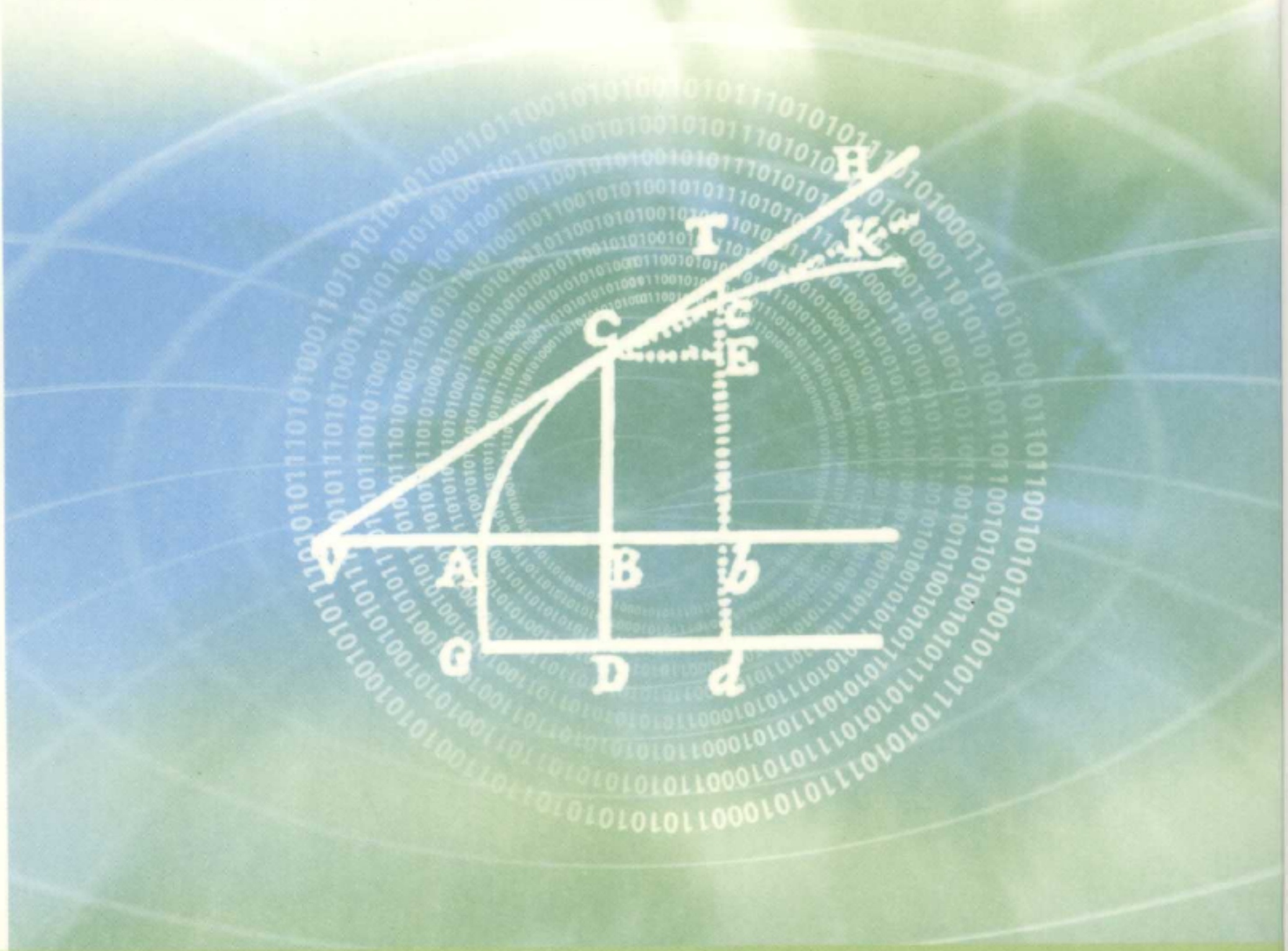
开放人文

Philosophy of Mathematics and Natural Science



[德] 赫尔曼·外尔 著　　齐民友 译

Hermann Weyl

数学与自然科学之哲学

上海世纪出版集团

世纪出版

上架建议：自然科学总论

ISBN 978-7-5428-4373-9

9 787542 843739 >

定价：34.00 元

易文网：www.ewen.cc

数学与自然科学之哲学

[德] 赫尔曼·外尔 著　　齐民友 译

世纪出版集团　上海科技教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学与自然科学之哲学/(德)外尔(Weyl, H.)著；齐民友译.
—上海：上海科技教育出版社，2007.8
(世纪人文系列丛书·开放人文)
ISBN 978-7-5428-4373-9

Ⅰ.数… Ⅱ.①外…②齐… Ⅲ.①数理逻辑—研究②自然哲学—研究 Ⅳ.O141 N02

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第057415号

责任编辑 傅 勇
装帧设计 陆智昌

数学与自然科学之哲学
[德]赫尔曼·外尔 著
齐民友 译

出　　版　世纪出版集团　上海科技教育出版社
　　(200235　上海冠生园路393号　www.ewen.cc)
发　　行　上海世纪出版集团发行中心
印　　刷　上海江杨印刷厂
开　　本　635×965 mm　1/16
印　　张　25.5
插　　页　4
字　　数　305000
版　　次　2007年8月第1版
印　　次　2007年8月第1次印刷
ISBN　978-7-5428-4373-9/N·722
图　　字　09-2005-099号
定　　价　34.00元

世纪人文系列丛书编委会

主任

陈　昕

委员

丁荣生　王一方　王为松　王兴康　包南麟　叶　路
何元龙　张文杰　张晓敏　张跃进　李伟国　李远涛
李梦生　陈　和　陈　昕　郁椿德　金良年　施宏俊
胡大卫　赵月瑟　赵昌平　翁经义　郭志坤　曹维劲
渠敬东　潘　涛

出版说明

自中西文明发生碰撞以来，百余年的中国现代文化建设即无可避免地担负起双重使命。梳理和探究西方文明的根源及脉络，已成为我们理解并提升自身要义的借镜，整理和传承中国文明的传统，更是我们实现并弘扬自身价值的根本。此二者的交汇，乃是塑造现代中国之精神品格的必由进路。世纪出版集团倾力编辑世纪人文系列丛书之宗旨亦在于此。

世纪人文系列丛书包涵“世纪文库”、“世纪前沿”、“袖珍经典”、“大学经典”及“开放人文”五个界面，各成系列，相得益彰。

“厘清西方思想脉络，更新中国学术传统”，为“世纪文库”之编辑指针。文库分为中西两大书系。中学书系由清末民初开始，全面整理中国近现代以来的学术著作，以期为今人反思现代中国的社会和精神处境铺建思考的进阶；西学书系旨在从西方文明的整体进程出发，系统译介自古希腊罗马以降的经典文献，借此展现西方思想传统的生发流变过程，从而为我们返回现代中国之核心问题奠定坚实的文本基础。与之呼应，“世纪前沿”着重关注二战以来全球范围内学术思想的重要论题与最新进展，展示各学科领域的新近成果和当代文化思潮演化的各种向度。“袖珍经典”则以相对简约的形式，收录名家大师们在体裁和风格上独具特色的经典作品，阐幽发微，意趣兼得。

遵循现代人文教育和公民教育的理念，秉承“通达民情，化育人心”的中国传统教育精神，“大学经典”依据中西文明传统的知识谱系及其价值内涵，将人类历史上具有人文内涵的经典作品编辑成为大学教育的基础读本，应时代所需，顺时势所趋，为塑造现代中国人的人文素养、公民意识和国家精神倾力尽心。“开放人文”旨在提供全景式的人文阅读平台，从文学、历史、艺术、科学等多个面向调动读者的阅读愉悦，寓学于乐，寓乐于心，为广大读者陶冶心性，培植情操。

“大学之道，在明明德，在新民，在止于至善”（《大学》）。温古知今，止于至善，是人类得以理解生命价值的人文情怀，亦是文明得以传承和发展的精神契机。欲实现中华民族的伟大复兴，必先培育中华民族的文化精神；由此，我们深知现代中国出版人的职责所在，以我之不懈努力，做一代又一代中国人的文化脊梁。

上海世纪出版集团

世纪人文系列丛书编辑委员会

2005年1月

对本书的评价

我们时代最优秀的思想家之一的丰富而令人人迷的著作。

——《科学美国人》（*Scientific American*）

这是关于科学综合的一个给人最深刻印象的范例，它是通过对事实和意义进行最彻底的探索而得出的。

——《科学月刊》（*Scientific Monthly*）

内 容 提 要

本书试图从西方哲学的角度来审视数学与自然科学的发展。原书以德文写作，发表于1926年，反映了20世纪20年代的数学与物理学以及数学基础的大发展与大争论。1949年的英译本，又以6个附录的形式反映了其后20年左右的科学发展，而且论述的范围也超出了物理学与数学，涉及其他学科的若干基本问题。

作 者 简 介

赫尔曼·外尔(1885—1955)，德国数学家。出生于德国汉堡附近的埃尔姆斯霍恩，1908 年获格丁根大学博士学位，曾任格丁根数学研究所所长和美国普林斯顿高等研究院教授。他是 20 世纪上半叶最重要的数学家之一，在数学的许多领域有重大贡献，在相对论和量子力学上，成就也十分突出。主要著作：《空间，时间，物质》、《黎曼曲面的思想》、《群论与量子力学》、《典型群》、《对称》。

关于中译本的说明

外尔(Weyl)全名赫尔曼·克劳斯·胡戈·外尔(Hermann Klaus Hugo Weyl)，1885年生于德国北部汉堡附近的一座小城市埃尔姆斯霍恩。

1904年外尔进入格丁根大学(有一段时期在慕尼黑大学学习)。他的博士论文是由希尔伯特指导的，毕业以后就在格丁根大学担任“无薪讲师”(privatdozent)，当时他追随希尔伯特。在这段时期，外尔写了许多著名的数学著作，有一些影响深远，直至今日。例如《论连续统》(*Das Kontinuum*)、《黎曼曲面的思想》(*Die Idee der Riemannschen Fläche*)。当时哲学家胡塞尔也在格丁根大学，而且与外尔关系很密切。外尔在哲学上受胡塞尔影响很深，这一点与外尔在数学基础的大争论中坚定地站在布劳威尔的直觉主义一边有很大的关系。

1913年，外尔去瑞士苏黎世高等工业学校任教授。第一年，爱因斯坦也在那里，而且正在从事广义相对论的研究。这对外尔也有

很深的影响，使外尔投身于从几何角度来研究物理学，并就此写出了他的名著《空间，时间，物质》（*Raum*，*Zeit*，*Materie*）。他在试图把电磁场与引力场统一起来的努力中，第一次提出了规范不变性的概念。虽然不为爱因斯坦和当时一些主流物理学家如泡利（Wolfgang Ernst Pauli，1900—1958）所接受，但后来规范场理论却成了理论物理主流的一部分。1921 年奥地利物理学家薛定谔（Erwin Schrödinger）也到了苏黎世，并且与外尔有了密切的交往。外尔当时正在进行群论（群表示论）的研究，于是他把群论的研究用于量子力学，写成了《群论与量子力学》（*Gruppentheorie und Quantenmechanik*，1928）这部名著。

在 20 世纪初，数学基础的研究出现了一场大争论，形成了 3 个主要学派。外尔也参加了这场论战，而且坚定地支持以布劳威尔为首的直觉主义学派，成了这个阵营的一位重要成员，并在许多方面对布劳威尔的直觉主义思想有重要的发展。

1930 年他又回到格丁根。当时希尔伯特退休，由外尔继任他的教职。因为希特勒推行反犹主义，而外尔的夫人又是犹太人，因此他离开了德国。1933 年，外尔去了美国，此后一直在普林斯顿高等研究院工作，直到 1952 年退休。以后，他有时在美国，有时在苏黎世。1955 年，在他七十寿辰后，当他去邮局给友人寄信感谢他们对他的生日祝贺时，猝死于路上。

总之，外尔可以说是不但经历并亲自参与了 20 世纪上半叶数学、物理学以及数学基础的影响深远的大发展，而且作出了重要的贡献。这些重大进展的根源都深深地埋在整个西方文化——科学与哲学——的深处，他自己也是从这片土壤中生长起来的一位大师。这本书正是他试图从西方哲学的角度来审视数学与物理学的发展，同时

也用数学与物理学的成果来丰富与深化哲学思想。原书作为奥尔登堡所编的《哲学手册》中的一篇，原以德文写作，发表于1926年，反映了20世纪20年代的数学、物理学以及数学基础的大发展与大争论。本书译文则是根据1949年的英译本，又以6个附录的形式反映了其后20年左右的科学发展。

正因为这样，翻译此书就有了特别的困难。因为译者缺少哲学与逻辑学的训练，而对数学与物理学所知既零星又浅薄，在理解本书作者与其中涉及的许多科学家、哲学家的思想上很难做到比较准确，更谈不上深入了。特别是在哲学与逻辑学方面，有一些专业用语有通用的或者约定俗成的译法，而这又是我所不熟悉的，所以闹出笑话也难以避免。虽然不少同行师友给我指正，仍盼读者进一步指出谬误不当之处。

本书的翻译首先要感谢老朋友康宏逵。他不但认真审阅了第一部分译稿，而且对本书以及许多涉及逻辑与数学基础的问题提出了相当中肯的看法。他一方面时时提醒译者力求避免当前的不正文风，而当译者一度想放弃这项工作时，他又督促我努力完成它。译者还要感谢约斯特(J. Jost)教授和他的夫人李先清教授。他们出于多年来对中国数学健康发展的关心，一直热情支持本书的翻译，而且在原书德国哲学与文学作品中的德文引文和许多拉丁文引文的翻译上，给了译者很大的帮助。

在涉及康德哲学的问题上，译者应该感谢武汉大学杨祖陶教授。他与邓晓芒教授合作，近年来将康德的三大批判书译成中文，并就此给予我不少指教。

关于生物学的问题的翻译得益于杨宏远院士的帮助；关于化学的问题则得益于武汉大学陈远荫教授的帮助；现在德国莱比锡的费志英

女士也帮助我翻译了几段德文诗歌。 在此向他们致以衷心感谢。

最重要的是，我要感谢我的妻子程少兰，她的默默支持，使我能够真正定下心来完成这项困难的工作。

尽管如此，翻译中的错误仍由译者负责。

此外，原书引用了不少其他作家的文字，其中有不少是现在已有中文译文的，我曾经查阅了一部分，借用了其他译者的译文，并在书中作了说明。 但是有不少则没有中文译文(或者译者没有找到)，只好自己来翻译，这中间也少不了不当之处。

原书中有一些小的笔误，译者做了一些改正。 也有一些文字上的修改，没有一一列出。

齐民友

2005 年末

于珞珈山

序

家是人们的出发点，
岁月流逝，
世界变得更加陌生，
模式也变得更加纷繁，
不论是生存还是消逝。

——艾略特(T. S. Eliot),《四个四重奏》
(*Four Quartets*), East Coker, V.

一个科学家就哲学问题写作时，总面临着良心的冲突，能够全身而出者是很少的；一方面是哲学思想视野的广阔和思考的深度，另一方面是作者在科学学派的熏陶下形成的客观清晰性与确定性，把这两方面调和起来是很困难的。

本书主要部分是我的《数学与自然科学的哲学》(Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft)一文的译文，原文于 1926 年收入奥尔登堡(R. Oldenbourg)所编的《哲学手册》(*Handbuch der*

Philosophie)一书。在写作该文时，我要受到《哲学手册》一书总的计划的约束，这种约束由该书的编者们概括为：对哲学的系统性与历史发展并重。我还自觉不自觉地受到另一种约束的限制，这就是德国文风与哲学传统的限制，因为我就是在这种传统中长成的。还有，在我的心智发展中一再在我心中醒来的问题，其范围是有限的，而我当然会受到这些问题的限制。

在我为《哲学手册》所写的论文中，在标题中的“自然科学”(Naturwissenschaft)一词之下，我几乎就只讨论了物理学。在自然科学的诸多分支中，这是我由于自己的工作而比较熟悉的唯一的分支。为什么对生物学只付之以寥寥数语，还有别的原因：因为分配给我的篇幅很快就用完了，我只好依赖生物学家兼哲学家德里施(Hans Driesch)写的文章《自然界的形而上学》(Metaphysik der Natur)来补足空缺了。

自那以后已经过去了20多年，这是科学史上漫长而又充满各种事件的年代。提出把这本书译成英文并不是我的主意，我虽然同意了，却又充分地意识到，当年我写这本书本出于偶然，而它现在看起来也已出现了岁月的痕迹。在我看来，这本书所传达的关于科学与哲学思想的解释，在今天和过去一样仍然是适用的。但是对于近20年来发生的诸多事件不能够完全视而不见。让我自己用英文重写，这种选择又因多种原因而完全不可能；我怎么可能重新获得当初我写此书的时代所具有的信念与精神——只要作适当的文字准备，就能在几个星期之内倚马可待地完稿？所以我只能另辟蹊径。

我特别要提到，除了第13—15节，以及最后的第23节之外，我只做了一些细小的修改。原版的实质仍然保留。总的看来，这书仍然是当相对论已经完成而量子力学即将兴起之时，一个有哲学思考的数学家的思考。但是参考文献已经更新了，而且添加了6个附录，

提供了在两个版本之间的年代里数学、物理学以及生物学发展的一些资料。这种安排，虽然从审美的统一性角度来看不是无可非议的，却有某种启发人们的价值。与正文相比，这些附录较多具有系统—科学性(systematic-scientific)而较少具有历史—哲学性(historico-philosophical)。随着年岁渐增，我对于科学的形而上学意义也更为踌躇；正是“岁月流逝，世界变得更加陌生，模式也变得更加纷繁”。然而，如果对真理与实在没有一种超验的忠诚，如果不能使一方面的事实与结构，同另一方面的观念的想象不断地相互作用，科学是会灭亡的。

本书的主要任务之一，就是对所提到的参考文献做一个评论性的导引。

[对全书主旨并非必要的历史和注解性质的一些段落，在德文版中是用小字排印的，在本版中则放在花括号中，如这一段文字一样。]

《哲学手册》中这篇文章除第16、17两节外均由赫尔默(Olaf Helmer)博士翻译，他对数学与哲学逻辑都很熟悉，那两节则由我的儿子乔基姆·外尔(Joachim Weyl)博士翻译。一本书如果在一定程度上要依靠文字的暗示力——而哲学思想的交流确实要依靠它——或者此书又有某种文采，则要翻译这样的书难免要对原文做一些折中。我想本书也不例外，但是比之大多数同类的译文，我深信这里的译文没有大的错误与误解。

赫尔曼·外尔

新泽西，普林斯顿

1947年12月

关于文献的说明

本书所引用或翻译的引文出处如下：

R. Descartes, *Oeuvres*, ed. Victor Cousin, Paris 1824. The French versions of the *Meditationes de prima philosophia* = *Méditations* [*métaphysiques*] *touchant la première philosophie*, and of *Principia philosophiae* = *Les principes de la philosophie*，分见于全集第Ⅰ、Ⅲ卷。

欧拉(L. Euler)的《全集》(*Opera omnia*)的里程碑式的瑞士版远未出版完毕，本书中引用的两本著作《动论》(*Theoria motus*)与《自然学说引论》(*Anleitung zur Naturlehre*)均尚未出版。

G. Galilei, *Opere*, Edizione nazionale, Florence 1890—1909, 1929 年重版。 "*Dialogo*" = "Dialogo sopra i dui massimi sistemi del mondo" is in Vol. Ⅶ; "*Discorsi*" = "Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno à due nuoue scienze" in Vol. Ⅷ, "Il saggiatore" in Vol. Ⅵ.

休谟(David Hume)的 *Treatise of Human Nature* 和洛克(John

Locke)的 *Enquiry concerning Human Understanding*，均按其章节引用而不涉及哪一个特殊版本。

康德(Immanuel Kant)的 *Critique of Pure Reason*，transl. by F. Max Müller，2nd ed.，New York 1905［German original：*Kritik der reinen Vernunft*，first ed. 1781，second ed. 1787］。

G. W. Leibniz，*Mathematische Schriften*，ed. Gerhardt，Berlin 1849 seq.，*Philosophische Schriften*，ed. Gerhardt，Berlin 1875 seq.

莱布尼茨致克拉克(S. Clarke)的信是莱布尼茨—克拉克论战的一部分，可在 G. W. Leibniz，*Philosophische Schriften*，ed. Gerhardt，Ⅶ，352—440 页找到。

牛顿爵士(Sir Isaac Newton)的 *Mathematical Principles of Natural Philosophy and his System of the World*，ed. F. Cajori，Berkeley，California，1934，2nd print 1946。［拉丁文原著：*Philosophiae naturalis principia mathematica*，first ed. London 1687，second ed. 1713，third ed. 1726。上述译文是以 1927 年莫特(Andrew Motte)对第三版的老译本为基础的。］

牛顿的《光学》(*Opticks*)是以英文写的。第四版(London 1730)有重印本(London 1931)，并由惠特克(E. T. Whittaker)写了引言。

目录

1 对本书的评价

3 内容提要

5 作者简介

7 关于中译本的说明

11 序

15 关于文献的说明

---

1 第一部分 数学

3 **第一章 数理逻辑,公理体系**

4 1 关系及其组合，命题的构造

10 2 构造性数学定义

17 3 逻辑推论

23 4 公理化方法

38 **第二章 数和连续统,无限**

38 5 有理数和复数

41 6 自然数
48 7 无理数与无穷小
57 8 集合论
64 9 直觉的数学
69 10 符号的数学
79 11 数学认知的特性

85 **第三章 几何学**
85 12 非欧几何，解析几何，高维几何，仿射几何，射影几何；色彩空间
90 13 相对性问题
99 14 全等与相似，左与右
107 15 黎曼的观点·拓扑学

117 第二部分 自然科学
119 **第一章 空间与时间，超验的外部世界**
119 16 从物理有效性来看空间与时间结构
138 17 主体与客体(认识论的科学意义)
156 18 空间问题

173 **第二章 方法论**
173 19 量度
181 20 概念的形成
188 21 理论的形成

206 **第三章 世界的物理图景**
206 22 物质
234 23 因果性(法则，机遇，自由)

271 附录

273 附录 A 数学的结构

295 附录 B 组合的艺术

314 附录 C 量子物理与因果性

329 附录 D 化合价与结构的等级

341 附录 E 物理学与生物学

353 附录 F 物理世界的主要特征;形态和进化

375 注释

第一部分

数　学

本书共两部分，原意是就主要产生于数学与精确经验科学这两个领域中的一些重要的哲学结果与观点做一概述。我将指出它们与以前的伟大哲学体系的我所能看到的联系。用于说明的例子将选得尽可能简单。然而，从原则上说，需要肯定，任何人想要从事科学哲学的研究，具备这些科学本身的知识是一个前提。

陈述数学基础的方法是由表及里，首先是对比较形式的方面做了考察，然后再研究与无限性相关的问题。虽然后一类问题曾经激起了多少代人的想象力，对其仔细的形式准备和严格的处理却只是近代的成就。在哲学的英雄们中，莱布尼茨比其他人对数学的本质具有更锐利的目光，而数学则是其哲学体系有机的、意义重大的组成部分。

第一章　数理逻辑，公理体系

我们能够得到以下的见解应该感谢希腊人，即空间结构完全是理性的，这种结构表现为空间形体的关系，以及它们的对符合一定法则的相互依赖性。在研究现实对象时，我们必须不断地求助于感官知觉，才能发现其新的特性，而这些新的特性我们又只能以适用范围较模糊的概念来描述，空间结构则可以用很少几个确切的概念，用几个命题，即公理，来详尽地刻画，使得所有的几何概念都可以用那几个基本概念来定义，而每一个真的几何命题都可作为公理的逻辑推论得出。这样，几何学就成了演绎科学(deductive science)的样板。数学由于它的这一特点，就特别突出地关心如何用其他概念来定义一个概念，如何由其他命题来推论一个命题。[亚里士多德逻辑(Aristotelian logic)基本上就是由数学抽象出来的产物。]更有甚者，若不先对这种做法作一完备的论述，看来就不可能建立数学自身的基础。

1 关系及其组合，命题的构造

在欧氏几何(Euclidean geometry)中，我们关心三种范畴的对象，点，直线，平面，这三者本身均无定义而认为是直观地给定的，而且其间有一些基本的关系即关联(incidence)(一点位于一直线上，一直线位于一平面内，一点在平面内)，介于(betweenness)(点 z 在点 x 和 y 之间)和合同(congruence)(线段的合同，角的合同)。类似于此，在自然数 1，2，3，…的领域内，我们只有一个基本的关系，而所有其他关系均可由它定义出来，这关系就是在数 n 和 n 的直接后继者数 n' 之间的那种关系。再者，人们之间的亲属关系也是关系的一般理论的极好例证。这时，有两个基本的范畴：男与女；两个基本的关系：子女(x 是 y 的子女)与配偶(x 与 y 是夫妇)。

一个关系如“x 在 y 之后”的命题模式必含有一个或多个空位，如上面的 x，y，…都是空位，其每一个都可能指某个范畴的对象。如果在命题模式中把每个空位都填上相应范畴的对象(即名字)就得到一个确定的命题，例如“5 在 4 之后”。语言不能正确地反映这样一个关系命题的结构；我们现在并没有主语、连词、谓语，而只有一个具有两个空位的关系，这两个空位可以用对象填进去，而谁也不从属于谁。为了排除语言的语法这种外来的东西，我们可以用一块木板来表示关系的命题模式，上面穿一些孔表示空位，再用一些小棍塞在孔中表示对象。从原则上说，它们是和字一样适用的符号。两个命题诸如“5 在 4 之后”与“4 在 5 之前”是 4 与 5 之间同一个关系的两种表示法。现在就来谈两个关系是互逆的还没有依据。然而，一个关系命题中的空位确有固定的位置；而关系 $R(xy)$(例如 x 是 y 的表兄弟)等价于(亦即有相同外延)关系 $R(yx)$，则是关系的一个特殊性质(可换性)。

性质也应算作是一种关系，正如把 1 看作一个自然数那样，它们的命题模式只含一个空位。

〔莱布尼茨(Leibniz)在给克拉克(Clarke)* 的第五封信的 § 47 中讲到“两条线段 L 与 M 之间的关系，不考虑何者在先，何者在后，何者为主语，何者为宾语”。“我们不能够说，把 L 和 M 两者合在一起，构成了这一偶性(accidens)的主语；要不然的话，我们就会有一个偶性在这两个主语之中，可以说是这个偶性的‘一条腿’站在一个主语上，而‘另一条腿’站在另一个主语上，这同偶性的概念是不相容的。因此我们必须说，关系……是主语之外的什么东西；但是，它既不是实体又不是偶性，那就必定是一个纯粹观念性的东西；尽管如此，对它还是很值得加以考察。”假设(不论是明显的还是隐含的)每一个关系都要以性质为基础，这在哲学中已经生成了许多混乱。举例来说，断言两朵玫瑰颜色不同这个命题，必定是基于如下的事实：一朵玫瑰是红的而另一朵是黄的。但是“点 A 在点 B 左方”这个命题却并不基于单独的 A 或单独的 B 的位置，而这些位置又可以定性地加以描述。人们之间的亲属关系也是如此。这里所反对的观点明显地源于感官素材的领域，这些感官素材——倒确实是——只能给出质而非关系。正是由此原因，莱布尼茨才在上面的引文中说关系是一种纯粹观念性的东西。在逻辑—哲学文献中极少提到有多于两个空位的关系。

引入具有空位的命题模式，是数理逻辑超越传统逻辑的重要进展。数学函数，若在其中把变元(亦即空位)填上数就会给出一个

---

* 克拉克(Samuel Clarke, 1675—1729)，英国数学家、神学家，牛顿的支持者。——译者

数，命题模式也有点像是这样，所以常称为“命题函数”。

除了关系以外，在算术公理中还有一些运算；例如加法运算，若把加法施于两个数 a 与 b，就会生成第三个数 $a+b$。然而，可以用三个数 a，b，c 之间的关系 $a+b=c$ 来代替这个运算；这个关系对于变元 c 是“单值的”，即对任意两个数 a 和 b，必存在且只存在一个数 c，使它们之间有关系 $a+b=c$ 成立。这样，我们就能把生成性的构造也归属到关系的静态的存在性了。然而，我们在后面要反其道而行，因为我们将把所有的关系都代之以构造的过程。]

关系的组合有以下原理：

1. 在多空位的关系格式中可以把几个空位等同(identify)起来。例如由模式

$N(xy)$：x 是 y 的侄子

可以得出

$N(xx)$：x 是他自己的侄子。

2. 否定，符号为～。$N(xy)$变成了

$\sim N(xy)$：x 不是 y 的侄子。

3. 并且，符号为&。这样如 $N(xy)$“并且” $F(xy)$——x 是 y 的父亲——可以给出一个三空位关系

$F(xy)\ \&\ N(yz)$：x 是 y 的父亲，并且 y 是 z 的侄子。

在组合模式中哪些空位要等同起来必须加以说明。以同一个字母表示这些空位就可以用符号来指出这种等同。

4. 或者，符号为∨。例如

$F(xy) \vee N(yx)$：x 是 y 的父亲或者 y 是 x 的侄子。

用“或者”来做的组合也可以用“否定”和“并且”的组合来表示，反之亦然。[1]

5. 在相应的范畴中取一直接给定的对象填入空位(即代入)。例如，用 $F(\mathrm{I}, x)$表示 I(我)是 x 的父亲，这就是只有一个空位 x 的性质的模式之一例，而只有我的子女才专有这个性质。

6. 所有，符号为 Π_x。例如 $\Pi_x R(xy)$ 就表示(在相应范畴中的)所有 x 均与 y 处于关系 $R(xy)$中。

7. 某个，符号为 Σ_x。于是 $\Sigma_x R(xy)$ * 表示存在某个 x 使之与 y 有关系 $R(xy)$。Σ_x 和 Π_x 可以通过“否定”而互相转换，正如“并且”和“或者”可以通过“否定”而这样转换一样。因为在 Π_x 和 Σ_x 这两个前置的符号中，出现了下标 x，因此空位 x 不能再按照原理 5 那样用一对象代入。由于有 6 和 7 这两个构造的原理，就有必要再加上一个二空位的逻辑恒同关系 $x = y$，作为我们研究领域内的一个直接给定的关系。

〔例子：1. 令(xl)表示点 x 位于直线 l 上。欧几里得的平面几何指出，两直线 l 与 l' 的平行 $l \parallel l'$，就是它们没有公共点(x)；所以

$$\sim \Sigma_x \{(xl) \,\&\, (xl')\}$$

就是 $l \parallel l'$ 这一关系的定义。

2. 通过两个不同点(x, y)恒存在一直线 l，这个命题因此需要写成：

---

* 原书作 $\Sigma_y R(xy)$。——译者

$$\Pi_y\Pi_x((x = y) \vee \Sigma_l\{(xl) \& (yl)\})。$$

3. 在自然数域中，如果不存在两个不为 1 的自然数 x 与 y，使它们与 p 之间有关系 $x \cdot y = p$，则 p 称为素数。 p 为素数这一性质，应定义如下：

$$\Pi_y\Pi_x((x = 1) \vee (y = 1) \vee \sim (x \cdot y = p))。]$$

从对象的一个域中的直接给定的基本关系出发，我们可以把以上各原理任意地组合起来应用，得出无限多“导出”关系(基本的关系当然也要算在导出关系之内)。 特别是我们会得到一些只有一个空位的关系，即“导出性质”。 用这样的性质 $E(x)$，可以在 x 所指称的对象范畴的“最邻近的属”(genus proximum)中，区分出新的概念，即亚里士多德逻辑意义下的“种差”(differentia specifica)，从上面的例 3 中“素数”的定义就可以看得很清楚了。 在导出命题模式中我们进而还找到了其中不含任何空位的命题，如例 2；它们是我们的学科中的相关命题(pertinent propositions)。 如果我们对每一个这样的命题都已经知道了它是否为真，则对于基本的范畴中的对象，只要它们是用基本关系连接起来的，我们就有了完备的知识。 这一类命题的逻辑结构，只能通过在构造此命题时这 7 条原理是如何起作用，其次序如何，怎样组合，才能充分地加以描述。 相对于老的学说，即一个命题必须要包含主语、谓语和连词，这是一个很大的进步。 这里所指出的关于关系的句法，为对语言作逻辑的批判提供了坚固的出发点。

[例如，可以与罗素(Russell)* 关于定冠词的非指示的用法(non-

* 罗素(Bertrand Russell, 1872—1970)，英国哲学家、逻辑学家。 ——译者

deictic application)(例如在命题“*the* line through the distinct points *A*, *B* also passes through *C*”中 *the* 的用法)的评论作一个比较。[罗素的评论见他所著《数学哲学引论》(*Introduction to Mathematical Philosophy*)第16章。]

一个命题若在其构造过程中没有用到第5条原理，即没有使用一个直接给定的对象[所谓直接给定的对象即一个“这里的这个东西”(this here)]来代入的原理，就称为一般命题。非一般命题则称为特殊命题。(这里也可作进一步的区分，即只用原理5而没有使用 Π_x 与 Σ_x 以消除空位的称为单独情况，以与混合的一般—单独命题相区别。)如果一个对象可以一个贴切的一般命题来完全刻画，它就是一个个体(individual)；就是说，如果可以不使用原理5来构造出一个性质，使它只适用于 a 而不适用于任何其他对象，a 就称为一个个体。只对于用这样的性质来描述的东西，才谈得上存在与否，如果只是给一个东西冠以名称，就谈不上存在与否，这里重要的是 Σ_x 必须以一个空位 x 作为下标。(这一说明在评论上帝存在的本体论证明时是用得上的。)在自然数领域内，1是一个个体，因为只有这个数不是跟在其他数后面的。其实，所有自然数都是个体。数上所附着的迷雾和数的魔法都会从下面的事实中跳出来，即人的智慧以数之序列的形式，创造了互不相混的个体之无限的多样体*。甚至我们这些开明的科学家，也可以通过例如素数分布规律之不可理解，感受到这种神秘；另一方面，又正是由于自然数可以自由构造，且又具有个体性质，才适于用来对实在作精确的理论描述。空间的点则相反。由基

---

* 原书作 manifold，这个词现在在数学中更多地用于几何和拓扑学，而有特定含义，其标准译名是“流形”。鉴于这里并无这种特定含义，所以借用日文多样体的译名，强调其多种多样的意思。以后涉及几何和拓扑含义时，仍用“流形”一词。——译者

本的几何关系，不参照个别的点、直线、平面即可导出的任意性质，只要适用于某一点，则也适用于每个点。这种关于概念的均一性，正好反映了直觉上空间的均一性。莱布尼茨在给出空间图形的相似性的如下“哲学定义”时，是看到了这一点的，该定义说，“若就事物的自身来考察时，无法区别一些事物，则它们就是相似的。”（*Math. Schriften*, V, p.180.)]

2 构造性数学定义

除了第1节中所讲的导出关系的组合定义而外，数学中还可以使用创造性定义，来生成新的理想对象。例如在平面几何中，圆是通过三个点间的一个合同关系 $OA = OB$ 来引入的，作为一个公理有：“一点 O 与一相异点 A 决定一圆，即‘以 O 为心且经过 A 的圆’；所谓 P 点在此圆上，即指 $OP = OA$。”对于数学家来说，什么是圆本来并无关系。重要的只在于要知道圆可以用何种方式来给定（即使用 O 与 A），说点 P 位于这样给出的圆上又是什么意思。圆的概念只出现在上述一类命题中，或者出现在明显地以之为基础的命题中。所以，以 O 为心过 A 的圆与以 O' 为心过 A' 的圆，当且仅当第一个圆上的所有的点全在第二个圆上，同时反之亦然时，为全同的。几何公理证明，这样一个涉及所有点的无限多样体的判据可以用下面只讲到有限多个点的判据来代替：O' 必与 O 重合，且 $OA' = OA$。

[进一步的例子。1. 谁也不能解释函数是什么，但在数学中真正起作用的是：“如果对于每个实数 a 均有实数 b 与之联系（例如通过公式 $b = 2a + 1$ 来联系），就算给定了一个函数 f。就说 b 是函数 f

相应于自变量取值 a 时的函数值。”因此，两个定义方式不同的函数，如果对自变量的一切可能的值 a 均有相同函数值，就看成同样的函数。

2. 在欧氏几何中“无穷远点”，即两平行线假想的交点，就是一个通过创造性数学定义而补充到真实的点中间去的理想元素。更一般地说，只要适当地引入理想点，即可把空间的一个给定的有界限的部分 S，即“可到达的空间”，扩张得包含射影几何的全空间。我们的工作就是要通过在 S 内的几何构造，来判定两条真实的直线，即 S 内的两条直线是否是从同一个理想点发出的。定义这种点的最简单的办法就是定义它为一个三面角(它由三条真实直线构成)的顶点。于是我们达到如下的定义，“三条非共面直线 a，b，c，若其任意两条均共面，就定义了一个理想点[a，b，c]。说一直线 l 通过此点，就是指 l 与直线 a，b，c 之每一条均分别共面。”这个定义又蕴含了两个这种理想点是否重合的判据。对每一个真实的点 p，恰好有一个理想点 π 与之相应，使每一条经过 p 的直线也都在我们定义的意义下经过 π，所以有一部分理想点可以与真实的点等同起来。(比较 Pasch，*Vorlesungen über neuere Geometrie*，2d ed.，p. 40。)按此格式，数学总能通过引入理想元素来扩张某个运算之域。进行这类扩张的目的，在于强使某些简单的法则有效。例如，在添加了无穷远点后，结果就是不仅两个相异点可用一直线相联，而且两条相异共面直线必交于一点。在几何中引入虚(imaginary)元素(为了强化代数曲线和代数曲面交点的简单且普遍适用的定理)，以及库默尔(Kummer)在数论中引入理想数(目的在于恢复可除性法则，它在由有理数过渡到代数数时，本已失效了)，就是这种理想元素法最富有成果的例证。]

通过抽象化作定义的过程是一个特例。在对象域中一个二元关系 $a \approx b$ 称为一个等价(这是一个具有相等关系的特征的关系)，如果以下三款均成立：

(i) $a \approx a$；

(ii) 如果 $a \approx b$，则 $b \approx a$（可换性）；

(iii) 如果 $a \approx b$，且 $b \approx c$，则 $a \approx c$（可迁性，或可传递性）。

如果约定，当且仅当两个对象 a，b 不适合等价关系 $a \approx b$ 时，才视两者为相异的，则从原来的对象域通过抽象化得出了新的对象域。

例子和评论。1. 几何图形的相似性就是一种等价关系。每个图形都赋有一定的形状，两个图形当且仅当两者相似时就具有相同形状。一种更有哲学意味的说法是：我们常说从图形的概念中把位置与大小抽象掉，即得形状的概念。在科学实践中，引入一个抽象化的概念表示一种意图，即对原来给出的对象，只考察其不变的性质与关系。所谓一个关系是不变的，意为：若 $a' \approx a$，$b' \approx b$，而由 $R(ab)$ 必可得出 $R(a'b')$，就说 $R(xy)$ 对于等价 $\approx$ 是不变的。

2. 两个对象的集合 A 与 B(例如一个房间里的人的集合与椅子的集合)称为数值等价的：$A \approx B$，如果可以把 A 和 B 的元素配起对来(即可以给每个人一张椅子，既没有椅子空着，也没有人找不到座位)。数值等价显然也是上述意义下的等价。“每一个集合均决定一个(基)数；两个集合决定同一个数，当且仅当二者为数值等价。”[这个解释其实已可在休谟(David Hume)《人性论》(*Treatise of Human Nature*, Book Ⅰ, Part Ⅲ, Section 1)中找到。][2]一种不太确切的表述是，我们说，(基)数的概念来自集合的概念，只要把集合中元素的一切本性都抽象掉，而只留下其可辨识性。但有时可以提出一种反对意见：若两个集合的元素都蜕化成一个个的“一”了，那岂

不都坍缩为同一个对象了吗？ 如果采用以上精确的表述，这个反对意见就消解了。

[可以用数的例子来说明，通过抽象化作定义是创造性定义的一个特例。 它从属于后者如下：“每个集合 A 决定一个数(A)。 说任一集合 M 恰好有(A)个元素，就是指集合 M 和集合 A 是数值等价的。”所以，如果每个 $\approx A$ 的集合 M 亦必 $\approx B$（这里 $\approx$ 表示数值上等价），则数(A)与数(B)相同，反之亦然。 但是按照等价性的规则(ii)和(iii)，当且仅当 $A \approx B$ 时会是这个情况，最后，规则(i)特别保证了 A 本身是由(A)个元素构成的。

3. 按高斯(Gauss)的说法，若两个整数之差可以被 5 整除，就说它们 mod 5 同余。 同余也是具有相等特征的等价关系。 通过相应的抽象化，我们就由整数得到了 mod 5 的同余整数。 因为加法与乘法这两个运算对于同余都是不变的，结果就得到一个含 5 个元素的有限域，在其中可以作通常的代数运算，就像在通常的有理整数这个无限域中作通常的代数运算一样。 比如说，在这里我们会得出 $2+4=1 \pmod 5$，$3 \cdot 4 = 2 \pmod 5$。利用 5 为素数这一事实，不仅可作减法而且可作除法。 这个例子在数论中有基本的重要性。

4. 最有意义的物理概念，也是类似地按数学抽象的格式得出来的。 在第二部分中讨论测量过程时，我们还会回到这一点。

我发现，莱布尼茨在致克拉克的第五封信 §47 已经间接提到通过抽象化作定义，他说：“我在此地的做法大体上与欧几里得相同。欧几里得发现自己无法绝对地定义几何比，就来规定所谓相等的比是什么意思。”但是就在此之前他还说：“然而，心智并不满足于这种相等性。 心智还要求一种实体，要找出一个与这个比相同的真正的

东西，它还想象，这东西在某种意义下是在主体之外的。”一直到了19世纪，这个原理才显示出了其对数学的全部重要性。这个原理由帕施(Pasch)在上面引用的书(1882，p. 9)中有意识地完全一般地陈述出来，而弗雷格(Frege)* 在《算术基础》(*Die Grundlagen der Arithmetik*，Breslau 1884，Sections 63—68)中就讲得更清楚，还可参阅亥姆霍兹(Helmholtz)** 的《数与量度》(Zählen und Messen，1887，*Wissenschaftliche Abhandlungen*，Ⅲ，p. 377)。

人们总会把上述抽象化的数学形式与另一种抽象化，即所谓起源性的抽象化相提并论。在看一朵花时，我在心里会把其色彩这个抽象特性孤立起来，成为颜色。这个抽象化的行动在这里是本原的，而说两朵花有同样的颜色“红”，则要以此为基础；至于在数学的抽象化中，则相等性是第二位的，是由相等关系导出的。但是同一个mod 5同余类中的整数都可用同一特性来刻画，即当除以5时给出相同余数；两个三角形之相似则可以用下面的事实来刻画：其顶角具有相同数值，其对应边之比亦相同。求出这些余数以及角之数值或者比之数值，这些一般的程序，就好比分离出“色彩”特性。如果对于两个数或两个三角形其结果相同，就说它们同余或相似，正如说两朵花同为“红色”一样。这样看来，起源性的抽象化实归属于数学的抽象化。但是我实在无法用一个客体的特性来表示所有全等三角形或占有同一个空间位置的所有物体的共同之处(莱布尼茨在上述引文中讲的就是指这个例子)，而只能说是全等于这个三角形，占有这个空间位置。我们的问题是与相对性问题相关的(见第13节)，也与

---

* 弗雷格(Friedrich Ludwig Gottlob Frege，1848—1925)，德国逻辑学家。——译者

** 亥姆霍兹(Hermann Ludwig Ferdinand von Helmholtz，1821—1894)，德国物理学家。——译者

概念性的定义与直观的展现之区别有关。但是不论在起源性的抽象化还是在数学的抽象化中，总是一个共同的特性变成了一个理想化的对象。例如“红”这个性质变成了客体化的“红色”，而红的东西则是“分享”了这个“红色”，这是实质的一步[即柏拉图(Plato)的 μέθεξις]。}

若一个性质 $E(x)$ 对于某一给定范畴中的对象 x 有意义，则对应于每一个这样的性质，均有一个集合与之相联，即是“具有性质 E 的对象 x 之集合”。由此，我们可以谈及所有偶数的集合，或一已知直线上的所有点之集合。说这样一个集合可由它的个别的元素聚集而成，这样一个观念无论如何应该拒绝。我们说已知一个集合，只意味着我们已知一个刻画其元素的性质。只有在有限集的情况下，我们才对于集合除了作一般的描述外，还有可能作个体的描述，即展示其每个元素。[顺便提一下，从形式上看来，后一种描述法只是前一种描述法的特例；例如，说三个已知元素 a，b，c 组成一个集合，也就相当于说此集合相当于以下性质：x 或者为 a，或者为 b，或者为 c：$(x = a) \vee (x = b) \vee (x = c)$。]有可能同一个集合与两个性质 E 与 E' 相联结，而这只在(我们的范畴中)每一个具有性质 E 的元素都具有性质 E' 且反之亦然时才有可能。因此，为了确定两个集合相同，决定性的并不是定义它们的方式(即按第 1 节的诸原理把它们写出来的方式)，而只在于以下的问题答案如何，即某个集合之每个元素是否恰为另一个集合之元素，而且其逆亦真。这是一个关于存在的对象之域的问题，而不能仅就其意义来回答。如果这样理解集合的概念，则所谓创造性定义不是别的，正是由性质转到集合，而从数学上构成理想对象的新类，则可以相当一般地刻画为集合的形成。

现在，把以 O 为心并且通过 A 点的圆理解为这样一些 P 点的集合就再也没有任何可反对的了。同样，把一个对象的颜色理解为具有这种颜色的对象的集合；把基数 5 理解为所有这样一些总体的集合，这些总体都与我伸出右手时展示出来的手指的总体数值等价，这样做也都没有可以反对的了。但是如果以为给出了一个集合就是为构成它的理想的对象找到了具体的表示，这只是一个幻想——而戴德金(Dedekind)*、弗雷格和罗素都曾在一段时间里沉溺于此幻想，因为他们都把“集合”理解为一些东西的集体。与此相反，正是通过创造性定义的原理，一般的集合概念的含义才得以阐明而且不致有错误理解。

用于创造新的抽象 Φ 的那些性质，一般依赖于一个或多个变元 u，v，…，这些变元允许在一定的域中自由变化：即是说，Φ 是 u，v，…的函数。例如在圆的定义中，三点关系 $OP = OA$ 就解释为点 P 的一个性质(仅有一个空位 P 的关系)，它依赖于 O 和 A；“以 O 为心并通过 A 的圆”，就是 O 与 A 的函数。同一个抽象的两个值 $\Phi(u, v, \cdots)$与 $\Phi(u', v', \cdots)$相重合的判据，涉及关于存在对象的总体。但是特别重要的情况就是：这种超限判据可以用某些普遍适用的事实化为有限判据，而只需要用到定义它的关系的意义。我们关于圆的定义以及通过抽象化来作定义，都是例证。不仅是性质，而且更一般地说，还有关系，也能用来定义理想元素。如果我们想始终都遵从集合论的用语，则对于每一个二元关系 R，就应该有一个“二元集合”(R)，使得(R)与(R')全同即指：对任意两个元素 a，b，决不会存在 $R(a, b)$，$R'(a, b)$这两个命题有一为真，而另一个为假。

---

* 戴德金(Julius Wilhelm Richard Dedekind，1831—1916)，德国数学家。——译者

对于三元、四元……关系当然也是一样，这样我们就达到了创造性定义原理最终的表述方式如下：设有关系$R(xy\cdots/uv\cdots)$，其空位分为两组：$xy\cdots$与$uv\cdots$，这关系定义一个依赖于u，v，…诸元的抽象物$\Phi(uv\cdots)$；而对诸元的两组值u，v，…与u'，v'，…，等式$\Phi(uv\cdots)=\Phi(u'v'\cdots)$成立，当且仅当对于适当范畴中的任意对象$x$，$y$，…若它们与$u$，$v$，…有关系$R$成立，则它们与$u'$，$v'$，…也有关系$R$成立，反之亦然。

3 逻辑推论

在讨论了定义以后，现在转到讨论证明。如果把一个几何命题转化为一假设性命题，而其前提包括了所有的几何公理，如果再在我们心中把任意简略的记号均代以它们按定义所代表的东西，我们就得到了“形式有效(formally valid)命题”，或称“分析(analytic)命题”，此命题是否为真，与命题中的概念(如点、直线、平面、关联、介于、全同)的含义完全无关。推论的逻辑的任务，就在于刻画能够保证命题的形式有效性的命题构造。在这里，Barbara，Baralipton*等等都没有什么用了。莱布尼茨把形式论证(argumens en forme)的学说看作是“一种普遍数学，其重要性还未被充分认识”(*Nouveaux Essais*，Libre Ⅳ，Chap. 17，§4)。

逻辑学中完全只用到“否定”、“并且”、“或者”的那一部分称为有限逻辑，以与超限逻辑(transfinite logic)相对立，后者除“否定”、“并且”、“或者”以外还要用到命题算子“某个”(即“存

---

* 三段论的各种有效格式的研究曾经在逻辑学中占重要位置。Barbara和Baralipton不是人名，而是三段论的两种格式的名称。——译者

在”)与“所有”。这样区分的理由如下，设在我面前有几支粉笔；则命题“所有这些粉笔都是白的”无非是这样一个命题的简写：“这支粉笔是白的，那支粉笔是白的，以及……”(每支粉笔都要依次点到)。同理，“其中有一支红的”只不过是“这支是红的，或者那支是红的……”之简写。但是只对于有限集，其元可以个别地展示出来时，这样一种解释才是可行的。在无限集合的情况下，“所有”与存在“某个”的含义则涉及一个触及数学核心的深刻问题，即无限性的真正秘密，这将在下一章里展开。这个情况可以与从有限和(finite sums)转到无限和(infinite sums)来比较；无限和的含义系于收敛性这一特定情况，不可以在一切方面都像对待有限和那样来对待它。

在命题演算中，除了表示“否定”、“并且”和“或者”的记号外，再引入符号 $a \rightarrow b$(读作 a 蕴含 b)是方便的。它的意义与 $\sim a \vee b$(a 不成立或者 b 成立)一样，而不表示命题 a 与 b 之间有更深的联系。

[附带提及，$\sim$，&，$\vee$，$\rightarrow$四个符号中有两个就够了。在命题演算中选用$\rightarrow$与$\sim$比较方便，甚至只用一个符号 a/b(它表示命题 a 和 b 不相容：$\sim a \vee \sim b$)，因为可以把

$$\sim a,\ a \rightarrow b,\ a \,\&\, b,\ a \vee b$$

分别写为

$$a/a,\ a/(b/b),\ (a/b)/(a/b),\ (a/a)/(b/b)。$$

然而为了行文流畅，我们四个符号都采用。]

在一个有限逻辑公式中，可以把字母(即命题变元)用$\sim$，&，

∨，→这四个符号联结起来，而这些字母本身则可以代表任意（无空位）的命题。 例如：

$$b \rightarrow (a \rightarrow b)。$$

有一个一般的规则可以辨认出这类公式是否具有形式有效性。 事实上，按一切可能的组合，对一公式中出现的字母赋以值“真”（T）或“假”（F）。 并按下表所示的方向判定复合命题的真假，这样即可确定对于这一整个组合的公式的真假值：

a	$\sim a$
T	F
F	T

a	b	$a \rightarrow b$	$a \& b$	$a \vee b$
T	T	T	T	T
T	F	F	F	T
F	T	T	F	T
F	F	T	F	F

（举例来说，若一个公式中有 5 个不同的命题变元，需作检验的组合的数目就是 2^5。）如果在每种情况下，公式最后的值都为 T，这公式就是形式有效的。 这个法则可以说是基于矛盾律与排中律（*tertium non datur*）的，我将其简称为有限法则（the finite rule）。

例如：$b \rightarrow (a \rightarrow b)$。

a	b	$a \rightarrow b$	$b \rightarrow (a \rightarrow b)$
T	T	T	T
T	F	F	T
F	T	T	T
F	F	T	T

于是，在这个层次上，总可以用组合的程序，依固定格式，直接确定某一论断是否为某些其他命题的逻辑推论，只要前提与结论都是由命题 a，b，…（不须考虑其意义）借助～，→，&，∨四种运算构建起

来的。

但是，一旦在公式中容许有“某个”与“所有”（还有其伴随物：空位）出现，情况就完全改变了。Σ_x 与 Π_x 逼着我们去构造（construct）形式有效的命题——我们先定下几个形式有效的命题，即逻辑公理，再定下一个规则，使得可以由形式有效命题得出其他的形式有效命题。这个规则正是逻辑应用于所有理论科学的规则，即三段论（syllogism）。这就是：如果你有一个命题 A，还有命题 $A \rightarrow B$，而第一个命题 A 重新出现在→的左侧，那么就可以确定下一个命题 B。所有由公理出发，反复应用这一规则得出的命题构造都是解析的（即形式有效的）。然而，不可能独立于构造起各命题的方法，来描述性地刻画这些个别构造的无限多样性。所以，就需要一步一步地去证明。这一点可以借用弗里斯（J. Fries）所说的一句话，可以说是“理性的原生的朦胧”。我们并未占有真理，真理要求从行动中得到它，尽管弗里斯原来的意思多少有点不同。

[伽利略（Galileo）在解释人和神的理解之区别时，表达了一种广为流传的观点（“Dialogo”，*Opere*，Ⅶ，p. 129）：“我们在一步一步的讨论中由一个推断进到另一个推断，而神只需直觉就能感悟。于是，为了洞察圆的某些性质，而圆又有无穷多种性质，我们须从其最简单的一个开始；以它为定义，由此进到第二个性质，由此再进到第三个、第四个，等等。神的智慧则不同，他能一下子就抓住圆的本质，不需片刻凡人的思考（senza temporaneo discorso），就理解了圆的全部无限多性质的整个阵列。”（但是集中到一个性质来看，即就个别数学真理的客观确定性而言，人的智慧并不次于神的智慧。）]

关于“某个”和“所有”，Σ_x 和 Π_x，我们首先要列出下面两个公理，其中 $a(x)$表示任意的含有一个空位 x 的命题模式，c 表示相应范畴中任意给定的对象：

$$\text{I}.\ \Pi_x a(x) \to a(c);\quad \text{II}.\ a(c) \to \Sigma_x a(x)。$$

第一个公理只告诉我们怎样由一全称命题导出一个其他命题，但没有表明如何由其他命题导出全称命题。对于第二个公理，情况就恰好相反。

〔三段论有一个尽人皆知的经典的例子：（α）所有的人都会死，（β）Caius* 是人；所以（γ）Caius 也会死。按我们规定的形式，可把它分解为几步。令 H 与 M 记“是人”与“会死”两个性质，再用 c 表示 Caius。于是（α）成为

$$(\alpha)\qquad \Pi_x(H(x) \to M(x)),$$

由 I 有

$$\Pi_x(H(x) \to M(x)) \to (H(c) \to M(c)),$$

三段论的推论规则于是给出

$$H(c) \to M(c)。$$

这个命题，再加上

$$(\beta)\qquad H(c),$$

再由推论规则即有

$$(\gamma)\qquad M(c)。$$

---

* 有许多人名字是 Caius 或者含有 Caius 这个词，例如恺撒也称为 Caius Julius Caesar。这个例子就属于前文讲到的 Barbara 模式。——译者

→本身并不含有全称性质；但是（α）说明了，它可以与“所有”组合起来，成为一个全称假设命题。如下形式的全称蕴含

$$\Pi_x(a(x) \rightarrow b(x))$$

为有效的基础可以不同。如果只是在逻辑公理中看到上式，则符号→只表示纯粹的逻辑后承。但是其基础也可能具有事实的性质，诸如因果关系或某种别的在经验中观察到的规律性。只需这一点说明，就足以澄清因果关系与逻辑理由和结论的关系有何联系了。符号→可以同样用于所有这些关系。

希尔伯特（D. Hilbert）与贝尔奈斯（P. Bernays）的《数学基础》（*Grundlagen der Mathematik*，Ⅰ，Berlin，1934，p. 66）中列举了有限逻辑公理，它们当然是按照这样的方式构造出来的，使其形式有效性可以用“有限法则”得出。反过来也可证明所列出的公理是完备的，即指所有仅含符号 ～，→，&，∨ 而且形式有效的逻辑公式，都可以从这少数几个公理经由代入和反复应用三段论得出——但这一点需要一个本质上是数学的而且绝非平凡的证明。至于超限公理，我们还只知道公理Ⅰ与Ⅱ，其他有待补充。

由推论的三段论规则，所有其他的推论规则均可由逻辑公理得出。说实在的，每一个形式有效的形如 $A \rightarrow B$ 的命题[其中 A 与 B 都是由命题变项 a，b，…借助逻辑联结词（logical connectives）构造出来的]。借助三段论，可以导出以下的推论规则：若有一个形如 A 的命题，就可以确定一个形如 B 的相应命题。反过来，三段论也可以用逻辑公式表示为：

$$a \rightarrow ((a \rightarrow b) \rightarrow b)。$$

然而，因为构造意味着行动，所以仅仅使用公式是不行的，还需要有

一些实际的推论规则告诉我们怎样掌握公式。这可能就是认为逻辑具有规范化(normative)性质这样一种意见背后所隐藏着的真理。

康德(Kant)关于分析与综合判断的区别[见他的《纯粹理性批判》(*Critique of Pure Reason*)导言]，表述得如此晦涩，使得想把它与数理逻辑中形式有效性的精确概念加以比较，几乎是不可能的。然而，后一个概念却与胡塞尔(Husserl)的定义一致(*Logische Untersuchungen*, Ⅱ, 2d ed., p. 254)："分析法则均无条件的是全称命题，其中除形式概念外不包含别的。与分析法则相反，我们还有其特定情况，它的产生是由于引入了实质性的概念或假定了个别存在的观念。而由于法则的特例总给出必然性，所以分析法则的特例也给出分析的必然性。"]

参考文献

G. W. LEIBNIZ, *Philosophische Schriften*, Ⅶ, pp. 43—247, 292—301.

——*Mathematische Schriften*, Ⅶ, 49—76, 203—216.

L. COUTURAT, *La Logique de Leibniz*, Paris, 1901.

——*Opuscules et fragments inédits de Leibniz*, Paris 1903.

G. BOOLE, *The Mathematical Analysis of Logic*, London and Cambridge, 1847.

——*An Investigation of the Laws of Thought*, London, 1854; reprinted in: *Collected Logical Works*, Chicago and London, 1916.

E. SCHRÖDER, *Vorlesungen über die Algebra der Logik*, 3 Vols., Leipzig, 1890—1895.

A. N. WHITEHEAD and B. RUSSELL, *Principia Mathematica*, 3 Vols., Cambridge, 1910—13; 2d ed., 1925—1927.

B. RUSSELL, *The Principles of Mathematics*, Cambridge, 1903; 2d ed.; New York, 1938.

——*Introduction to Mathematical Philosophy*, 2d ed., London, 1920.

L. WITTGENSTEIN, *Tractatus Logico-Philosophicus*, New York and London, 1922.

C. I. LEWIS and C. H. LANGFORD, *Symbolic Logic*, New York, 1932.

A. TARSKI, *Introduction to Logic* (translated by O. Helmer), New York 1941.

4 公理化方法

公理化方法只不过是找出基本概念与基本事实的一个完备的集

合，使得一门科学的所有概念和定理都可以分别由定义与演绎导出。如果可以做到这一点，所谈到的科学理论，按胡塞尔的说法，就是确定的(definite)。空间的理论就是一例。当然，我不大可能由几何公理导出万有引力定律。所以必须首先解释，在一个探索领域内，什么是贴切(pertinent)命题。当然，从公理几何也揭示不了是苏黎世到汉堡远还是巴黎到汉堡远，这个问题虽然处理的是一个几何关系，但却是两个个别展示出的位置的关系。因此，确切地说，预期可以由公理导出的，是贴切的一般真命题。

[“那么，这就是说服人的全部艺术，它包含于两个原理中：定义所用的记号，把已定义的词都在心目中换成其定义，从而证明每一件事情。”帕斯卡(Pascal)*在《几何之精神》(*de l'esprit géométrique*)一文[Oeuvres Complètes, ed. F. Strowski, Paris (Librairie Ollendorff), I, p. 427]中这样说。但是这事说起来容易做起来难。欧几里得的《几何原本》(*Elements*)就没有完全地解决几何学公理化的问题。他从 ὅροι (即定义)开始；但是在我们的意义下，它们只部分地是定义，其中最重要的，只是对于直觉上已经知道的东西作了描述或指示。对于基本的几何概念，诸如“点”、“介于”等等，也只能做到这样；但是就几何学的演绎构造而言，这种描述显然是不切题的。接着就是称为 αἰτήματα 的一些几何公理，特别是平行公理：已知平面 P，P 上的直线 l，以及 P 中的不在 l 上的点 p；则 P 中所有过 p 的直线，除一条外均与 l 相交。最后则是关于量的几个一般公理：κοιναὶ ἔννοιαι。它们在几何学的建立中是有作用的，因为某些几

* 帕斯卡(Blaise Pascal, 1623—1662)，法国哲学家、数学家。——译者

何关系如全等、面积相等，都默认地假设是满足这些公理的。在它们的后面，则隐藏了数量不定的几何本身的公理。在《几何原本》后面的各卷中，只要有需要，就会对公理的清单加以增补。因为几何公设是直觉上自明的，而采取纯粹的逻辑—演绎的态度，对于人心又是不自然的，所以，要编纂几何公理的一个完备的清单就需极大的劳动。由鲍耶(Bolyai)*和罗巴切夫斯基(Lobatschewsky)**在1830年左右建立的“非欧几何”，就成了19世纪下半叶公理体系研究的驱动力。最隐晦的公理，即关于顺序的公理到1880年左右才由帕施揭示出来。最后，到了19世纪20世纪之交，才完全达到目的，而在希尔伯特《几何基础》(*Grundlagen der Geometrie*)一书中有了经典的表述。希尔伯特把公理分为五组，即关联公理、顺序(“介于”)公理、合同公理、平行公理和连续公理。

古代人的公理化纲领，除了欧几里得以外，还有阿基米德(Archimedes)也令人赞叹地灵巧地掌握了它，成为近代力学基础的样板。它支配了伽利略关于匀速运动和匀加速运动的学说[见《对话》(*Discorsi*)，第3日和第4日的谈话]，还在更大程度上，支配了惠更斯(Huyghens)***在《摆钟》(*Horologium oscillatorium*)一书中对摆的法则的建立。在更晚一些的年代(完全在数学本身之外)，在刚体静力学、时间—空间的狭义相对论和物理学的另一些分支完全实现了公理化纲领。

公理系统决非是由所讨论的学科唯一决定的；宁可说，基本概念和基本事实的选取在相当大的程度上是任意的。如何区分哪些概念

---

* 鲍耶(János Bolyai，1802—1860)，匈牙利数学家。——译者

** 罗巴切夫斯基(Nikolai Ivanovich Lobatschewsky，1792—1856)，俄国数学家。——译者

*** 惠更斯(Christiaan Huyghens，1629—1695)，荷兰数学家、物理学家。——译者

本质上是本原的，而哪些本质上则是次生的，这是数学家力所不逮的问题。[3]一种几何关系的原来已经选好的定义，可以同样有根据地用任一种判据来代替，只要这个判据按照几何事实，是此关系成立的必要与充分条件即可。]

一个公理系统必须在任何情况下都没有矛盾，这时它称为相容的；换言之，必须要能肯定，不至于用某种逻辑推论，可由公理既可得一命题 a，而由另一种证明则得出相反的命题$\sim a$。如果公理反映了某个领域中的对象的真理，则对其相容性确实应该没有疑问。但是，事实并不总能如人所愿地无误地回答我们的问题；一个科学理论给出有关素材的忠实的反映，这是很罕见的，理论几乎总是一种大胆的构造。因此，检验相容性是很重要的，这项任务就被交到数学家手中。一个公理系统中的各公理之为相互独立，虽非必不可少，然而最好是如此。公理系统不应该包含多余的成分，不应该把可在其他公理基础上得证的命题也作为公理包含进来。独立性问题又是与相容性问题密切相关的，因为命题 a 独立于一组给定的公理，当且仅当命题$\sim a$ 与之相容。

确定一个命题 a 依赖于其他一些命题A(一个公理系统)，只要得到在 A 的基础上证明a 的具体证明就可以了。另一方面，为了确定其独立性，就要断定，不论怎么复杂地把推论组合起来，也给不出命题 a。为了达此目的，有三种方法可供选择；根据上面所说，这三种方法的每一种都适合于证明一个公理系统的相容性。

(1) 第一种方法基于以下的原理：如果 a 中含有一个新的独创的概念，而不能用 A 中已有的概念来定义，则 a 不可能是A 的后承。例如：设一艘船长 250 英尺，宽 60 英尺，问船长年龄多大？仅仅在

最微不足道的情况下，这个简单的想法才能达到目的。

(2) 构造一个模型。即展示一些对象与关系，使在适当命名后能满足 A 中所有命题，然而不能满足 a。在迄今所发明的方法中，这个方法是最成功的。

平行线公理给出了最著名的例子。从很久远的古代起，就感到平行线公理不如几何学中其他公理那么在直觉上自明。多少世纪以来就做了许多尝试想从其他公理导出这个公理的成立。这些尝试的推动力量，就是怀疑这个公理是否真的成立，并克服这种怀疑。所有这些努力都没有效果，这一事实可以看成是“平行线公理是独立的”这一结论的一种归纳的论证，正如同制造永动机的失败是能量守恒原理成立的归纳论据一样。否定平行线公理就相当于假设，已给一点 P 与一条不过 P 的直线 l，则在 P 与 l 所决定的平面上，有无穷多过 P 而不与 l 相交的直线。所以，非欧几何的创立者正是这样做的：他们从这个假设得出许多结论，然后发现，不论怎样自由地使用欧氏几何的其他公理，只要总是只使用欧氏几何的公理，则循此前进，就不会有矛盾出现。但是他们不能保证将来也永远不出现矛盾。克莱因(Klein)* 是为非欧几何作出欧氏模型的第一人；欧氏几何中的对象，若取了与通常名称不同的名称，就会满足非欧几何的公理。令 S 为欧氏空间中的球面，把欧氏几何的名称按非欧语言的字典加以翻译，其实只包含了不多几个字(以下非欧语言的字都加上引号表示)：所谓“点”即指 S 的任一内点。说几个“点”在一“直线”上或在一“平面”内，或者说一定“点”位于另两“点”之“间”，其实就是它们在欧氏几何下的通常意义。“运动”就是把球

* 克莱因(Felix Christian Klein，1849—1925)，德国数学家。——译者

面 S 变为自身的共线变换；一个图形若能经一“运动”变为另一个，就说它们“合同”。任何人只要相信欧氏几何之为真，因此相信其相容性，则对于他而言，也就确立了非欧几何的相容性，而且这种几何是可以设想的。

然而欧氏几何的相容性则不同，只是相信它的真理性并不能算作证明了其真理性，其证明也不能依靠其基本概念的直觉的内容，因为解析几何(最好以向量概念为基础，见第 12 节)已经说明了欧氏几何只不过是线性代数(即线性方程组理论)事实的另一种表示法。这样，解析几何为我们提供了欧氏空间的一个简单的算术模型。线性代数说明了几何的仿射概念，而再加上一个正定二次型作为“度量的基础形式”则引导到度量概念。在代数中变量(或称“未知数”)的个数 n 可以不确定。要得到直观的三维空间，只须取 $n = 3$ 即可。算术与几何，由于互相对应，所以交织密切，以至于在今天，甚至在纯分析中，也经常使用几何术语。几何中的任意矛盾，都同时会以算术中的矛盾表现出来。这可以看作是一种化约，因为数与空间的对象与关系比较，在大得多的程度上是心智的自由产物，所以对于心智更为透明。

这些例子表明，使用模型方法，并不限于已经知道了构造模型时使用的对象与关系确实为真的情况，而这个方法可以把公理系统 A (例如几何中的公理系统)的相容性化约为另一个公理系统 B(例如算术中的公理系统)的相容性。一旦能用系统 B 的基本概念来定义系统 A 的基本概念，并使 A 中的公理成为 B 中的公理的逻辑后承，就做到了这种化约。为此目的，完全不必注意 A 和 B 中的基本概念有什么直觉意义；可以完全任意地把本来加给 A 中基本概念的名字加到在 B 中导出的概念上去。

希尔伯特通过绝妙地构造适当的算术模型而弄清几何公理系统各个部分的逻辑关系，他在这方面的贡献实在胜过任何人。

如果我们处理的只有有限个对象，而可以把它们一一列出并给以符号，无论能否得到基本关系，我们只要在每一单个情况下使用这些符号，就可以证明相容性。作为一个例子我们给出一个组合模型，它可以保证平面射影几何中关联公理的相容性(它只讨论一个关系："某点在某直线上")。这个模型用七个符号1，2，3，4，5，6，7代表点，再用七个符号Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ，Ⅴ，Ⅵ，Ⅶ代表直线，关联性由下表给出，例如在第3行、第Ⅵ列处有一个*就表示点3位于直线Ⅵ上。

	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	Ⅳ	Ⅴ	Ⅵ	Ⅶ
1		*	*	*			
2	*		*		*		
3	*	*				*	
4	*			*			*
5		*			*		*
6			*			*	*
7				*	*	*	

例如可以由这个表验证过任意两个不同点恰有一条直线的公理(选代表这两点的两个横行，再找一个竖列——代表直线——使它与这两横行的交点上恰好有一对*号)，也可验证任意两条不同的直线恰有一个交点！

其对象可以一一列出的有限系统的情况，相对而言是平凡的。在所有其他情况下，模型方法只能把一个系统的相容性化为另一个系统的相容性。最终还得对一个基本的公理系统证明绝对意义下的相容性。对于数学的很大一部分，以及对于物理学的全部，这个基本

的系统处理的是实数概念。

(3) 要得出相容性的绝对证明，我们只有使用直接法，其着力之处在于证明：若遵从演绎推理的法则进行，我们决不会得出两个命题，其中一个是另一个的否定。完备地列举出逻辑的游戏规则是必要的前提(比较第 3 节)；因为只有这样才能对各命题应用我们的方法，而全然不顾其意义，正如棋手应用弈棋的规则一样。只是到了近年，希尔伯特才以这种方式研究了算术公理的相容性问题。(如果发现了一种新的而且显然严格的逻辑推论方法，而且对原有的游戏规则做了补充，这时就需要有心理准备：用直接法作出的相容性证明变得过时了。模型方法则与此相反，是与“游戏规则”无关的。)

〔下面以下棋作为类比：要求证明，一盘棋，不论使用什么下法，只要符合下棋的规则，决不会出现这样的棋局：棋盘上会有 10 个同色的“后”。这里就可以使用“直接法”，因为由下棋的规则，任何棋着都不会使同色的后与兵的总数增加。因此，由于开始时这个和数为 9，它必永远 $\leqslant 9$。附带说一下，方法(1)也是直接法的特例，不过因为其简单，所以值得特别提及。

除了相容性和独立性外，公理系统要成为一门科学的基础还应有完备性。这是什么意思？就是对一个有关的一般命题 a，“是 a 还是 $\sim a$ 成立？”这个问题应该可以在该公理系统的基础上用逻辑推论来判定。正如相容性保证了不会同时得出 a 与 $\sim a$，完备性则保证了两者之中必可得到一个。只有建立了一种程序性的证明规则，使得能够对每一个命题 a，论证有据地表明，能按此程序回答 a 与 $\sim a$ 必有一为真这个问题，才能保证有这种意义下的完备性。如果找到了这种证明程序，数学也就变得平凡了。但是，没有谁发现过这种

点金石(philosopher's stone)，也永远不会发现。数学并不是从已给的假设无所不包地确立其所有的逻辑后承；数学的问题是由直觉和具有科学思想的人的生活提出的，而这些问题是不能如做计算练习那样按机械的规则解决的。解决这些问题的演绎程序也不是预先定好的，而是在每种情况下都得去发现。这项工作的主要源泉，是类比、经验以及能把五花八门的联系整合在一起的直觉。正如我们已在第3节中提到过的那样，可从一定前提演绎出来的命题并没有一种描述性的特征；我们必须依赖于构造。不可能像斯威夫特(Swift)*笔下的格列佛(Gulliver)在巴尔尼巴比访问过的学者那样，发展一种有系统的次序，例如按照推论所需的步数，把所有的推论都排列出来，再从中舍弃掉"没有意思的"；正如同世界上的文学名著并不是这样搞出来的：把26个字母的一切"允许重复的组合"都找出来，哪怕其为数达到10^{10}个之多，然后把其中最有意义、最美丽的组合选出来加以保存。

设对空间作连续的变形(好像空间中填满了塑料一样)，又假设我们把真实的直线、平面和全等图形变形而得的曲线、曲面和种种图形理解为直线、平面和全等图形。显然，几何学的所有结果对这些新引入的概念都成立。所以，不可能把直线族与经空间变形而得的曲线族，在观念上区别开来。]

这就引导到同构(isomorphism)的概念，它在认识论中有基本的重要性。设有对象的一个系统Σ_1(例如几何学中的点、直线和平面)

---

* 斯威夫特(Jonathan Swift，1667—1745)，英国作家，生于爱尔兰，其代表作为长篇小说《格列佛游记》。——译者

以及某些相关的基本关系 R，R'，…。设有第二个系统 Σ_2 以及相应的基本关系，虽然它们与 Σ_1 中的基本关系可以有完全不同的意义，却因为使用了第一个对象域中的关系的相同名称，而与 R，R' …互相关联。如果能够提出一个法则，把 Σ_1 中的元素和 Σ_2 中的元素一对一地配起对来，并且使得：Σ_1 中的元素，若其间有关系 R（或 R'，…）成立，则 Σ_2 中对应的元素之间也有同名关系 R（或 R'，…）成立。这时就称这两个域为同构的。两者之间的互相关联就称为由 Σ_1 到 Σ_2 的同构映射（isomorphic mapping）。可以说同构的域具有相同的结构。对应于 Σ_1 中每一个有关的真命题（这些命题的意义要按 R，R'，…在 Σ_1 中的意义来理解），必有 Σ_2 中一个相应的，且表述也完全相同的命题与之对应，反之亦然。凡能对于 Σ_1 之对象所断定的一切，无一不在 Σ_2 中同样有效。例如，笛卡儿（Descartes）构造的坐标就把空间同构地映入线性代数的运算域中。这种考虑引导我们把公理系统看成可能的科学的一种逻辑模板[logical mold，或“空形式”（Leerform）]。一旦对这些基本概念的名称指定了其所表示的意义，而使诸公理在此基础上都成了真命题，就说是得出了一个具体的解释。有人可能以为，只要公理成立，就可以将此公理系统中的基本概念的含义固定下来，这时就说此公理系统是完备的。但是，解释的唯一性这一理想是不可能实现的。因为，对一个具体解释作同构映射，其结果亦必为一具体解释。因此，最终的表述只能是：如果一个公理系统的任意两个具体解释都是同构的，则称它是完备的，或者范畴的（categorical）。在这个意义下，关于欧氏几何的希尔伯特公理系统之范畴性是有保证的。说真的，很容易证明，满足这些公理的空间必同构于笛卡儿的解析几何所提供的代数模型。

〔一门科学只能决定其研究领域至相互同构。特别是，它的对象的“本质”是没有什么差异的，是什么把空间中的点与数的三元组*或几何的其他解释区别开来，我们仅能借直接的直觉知觉(intuitive perception)而得知(*kennen*)。但是，直觉并非永远不会被扰乱的极乐净土，它会被驱向陷入关于认知(Erkenntnis)的辩论的风险。[4]事物可以由直觉明显地表现出来，但在直觉后面还有什么秘密的实质隐藏着，指望认知能把它揭示出来，这是愚蠢的。同构的概念划出了认知所自明不可逾越的界限。这个想法对于现象背后的物自体世界这种形而上学的思辨也有启发的价值。因为很清楚，在这样的假设下，绝对世界必同构于现象世界(然而，这种相关性必只在物自体→现象这个方向上是唯一的)；因为亥姆霍兹指出：“如果展现给我们的知觉不同，我们有根据推断说，知觉后面的真实情况也是不同的”(Helmholtz, *Wissenschaftliche Abhandlungen*, Ⅱ, p. 656)。因此，甚至当我们不知物自体时，我们对物自体的认知也和对现象的认知一样多。同构这个想法也有助于澄清莱布尼茨在他关于事物与词的联系的对话中讨论的问题，这问题是他受霍布斯(Hobbes)**关于真理的唯名论理论的启发而提出的；莱布尼茨显然也为如何表述这个思想而绞尽脑汁(*Philosophische Schriften*, Ⅶ, pp. 190—193)。

通过揭示同构关系，就可以把在一个领域中所得到的洞见，都转移到另一种与之同构的领域。例如，平面射影几何学中的对偶原理就起了这样一种作用。平面射影几何学中唯一的关系概念就是点与直线的关联(点在直线上，直线通过点)。可以唯一地把平面上的点

---

* 这里即指点之坐标(x, y, z)。——译者

** 霍布斯(Thomas Hobbes, 1588—1679)，英国哲学家。——译者

与直线这样配对，使得若点 P 位于直线 q 上，则与 P 配对的直线 p 必通过与 q 配对的点 Q。这样，射影几何中每一个有效的定理（通过这种不问方向的关联关系）立刻就变成另一个有效的定理，只要把“点”与“直线”两词互换即可。李（S. Lie）* 发现（复）空间中的直线可以与球面唯一地相关起来，使得相交的直线对应于相切的球面。解析函数理论的一个重要部分，即单值化理论（uniformization theory），用鲍耶—罗巴切夫斯基几何的语言来处理最为自然。设有一个电路网络，它是由一些均匀的导线在不同的分支点处连接而成；设一个“点”就理解为一种任意的电流分布，即对每一段（有向的）导线 s 赋以一个强度值 I_s，即 s 上之电流。这些“点”自然满足以 O 为原点的欧氏空间的法则。此空间的维数与网络的分支数相同。这时，原点 O 就表示没有电流，即所有的 I_s 均为零，而“点”到 O 的距离的平方则代表这一电流分布在单位时间内产生的焦耳热。这个同构是很有价值的，因为它把简单而重要的几何概念与简单而重要的关于电路的物理概念关联起来了。例如，已知导线 s 上的电动势而求电流分布这个基本问题，就化成了求一点在一平面上的垂直投影这一几何问题。就此，立刻在数学上确定了唯一解的存在，而计算解的方法也就找到了。]

从这一现代观点看来，纯粹数学无非就是关于关系的一般的假设—演绎的理论；它发展了逻辑“模板”的理论，而并不限于它的某一个可能的具体解释。请比较胡塞尔在《逻辑研究》（*Logische Untersuchungen*）第一卷第 67—72 节中所说的，这种形式化是“这样一

* 李（Marius Sophus Lie，1842—1899），挪威数学家。——译者

种观点，没有它，想理解数学方法是完全不可能的”。汉克尔(Hankel)* 宣称(*Theory of Complex Numbers*，1867，p. 10)，“建立一个普遍的算术之前提是，把它建立为一个纯粹心智的数学，而与所有的直觉相分离；建立为一个纯粹的关于形式的理论，它的对象并不是量及其形象(即数)，而是心智的对象，它们既可能相应于实际的对象或关系，也可能不。”公理变成了其中所出现的基本概念的隐定义(implicit definitions)。概念无可否认地具有一定范围内的不确定性；而不论在此范围内作何种具体的解释，公理的逻辑后承总是有效的。关于真理，纯粹数学只承认一个条件，而且是它必须承受的条件，即相容性。

〔可能在欧几里得为公理所采用的名称 αἰτήματα〔即公设(postulates)〕中，已经有了这种现代观点的萌芽了。莱布尼茨在实现这里所指出的意义(他清楚地理解这种意义)下的 *mathesis universalis*(普遍数学)上，走出了决定性的一步。尤其是群论，这一“纯粹心智的数学”的光辉的例子，就从属于他的 *ars combinatoria*(组合的艺术)的框架。一个有限群 G 就是具有有限多个对象的一个系统，在其中以某种方式定义了一种运算，它由两个元素(不管是相同的还是不同的)a，b(按照这一次序)给出系统中的一个对象 ab。仅有的公设，或称公理，就是

结合律 $a(bc)=(ab)c$；

若 $a\neq b$(即 a 与 b 不同)，则也有 $ac\neq bc$，$ca\neq cb$。

从这些并不显眼的假设中，涌出了大量深刻的关系；数学为这个简单

---

* 汉克尔(Hermann Hankel，1839—1873)，德国数学家。——译者

的公理系统提供了多得令人吃惊的不同解释。群或许是19世纪数学中最具特征的概念。

隐定义方法对于科学本身也是重要的，而不仅仅是为了奠定其基础。一个片的面积(所谓片我将理解为平面上由线段围成的一片区域)应满足以下的要求：

(i) 面积为一正数。

(ii) 若一个片可由其内的一串线段分为两部分，则整体的面积等于各部分的面积之和。

(iii) 合同的片具有相同的面积。

它们已是面积概念真正的本质，但是并不包含其显定义(explicit definition)。然而可以证明，这些要求是相容的，而且可以设计出一个程序使得对每一个片 γ 均可指定一个正数 $J(\gamma)$ 为其面积，$J(\gamma)$ 满足要求(ii)与(iii)。这些要求并不能无歧义地决定面积的概念；因为除了 $J(\gamma)$ 之外，$c \cdot J(\gamma)$ 也满足这些要求，这里 c 是与 γ 无关的正的常数，但此外再无其他选择可以满足这三个条件了。所以，遗留下来的任意性只有因子 c 了。要消除它，只有举出一个个别的片，例如正方形，并规定其面积为1(这就是大小的相对性)。隐定义对于各门科学，而不只是对于数学的意义，在石里克(Schlick)的《普通认识论》(*Allgemeine Erkenntnistheorie*, Berlin, 1918, pp. 30—37)中作了非常贴切的讲解，他说："从把一个个推论连接成串的精确科学的观点看来，所谓概念无非是这样的东西，对于它，可以断定某些命题成立。在这样做中，概念也就得到了定义。"这一思想的应用领域，除了精确科学之外，法理学也是一个适当的领域。]

参考文献

M. PASCH, *Vorlesungen über neuere Geometrie*, 2d ed., Berlin, 1926.

D. HILBERT, *Grundlagen der Geometrie*, 1899; 7th ed. Leipzig, 1930.

——*Axiomatisches Denken*, Mathematische Annalen 78, 1918.

M. GEIGER, *Systematische Axiomatik der euklidischen Geometrie*, Augsburg, 1924.

F. GONSETH, *Les mathématiques et la réalité*, Paris, 1936.

第二章　数和连续统，无限

5　有理数和复数

数的数学领域是逐步生成的，其出发点是自然数序列 1，2，3，…。要做的事第一步是由自然数上升到分数。从历史上看，分数的创造是由于从计数(counting)过渡到量度(measuring)。所有的量度都是以一族有大小的量，例如直线上的线段，为基础来进行的。我们在这里面有：(1)一个相等关系，$\mathbf{a} = \mathbf{b}$(即合同)，它满足一组公理；(2)一种运算，它可以用于任意两个线段 **a**，**b**，并且给出另一个线段 $\mathbf{a} + \mathbf{b}$。由线段 **a** 可以得出例如线段 5**a**，它是由 5 项 **a** 所成的和 $\mathbf{a} + \mathbf{a} + \mathbf{a} + \mathbf{a} + \mathbf{a}$。这就导致了计数与量度之间的联系。这个迭加过程由 **a** 引导到 1**a**，2**a**，3**a**，…这个过程可以准确地解释如下：

α）$1\mathbf{a} = \mathbf{a}$；

β）若 n 是一自然数，则 $(n + 1)\mathbf{a}$ 可以从 $n\mathbf{a}$ 按下式得出

$$(n + 1)\mathbf{a} = (n\mathbf{a}) + \mathbf{a}。$$

在线段的领域之内，迭加这一运算有唯一的逆运算：分划。设

已给一线段 **a** 与一自然数 n，必存在一个(且在相等意义下存在唯一一个)线段 **x**，使 $n\mathbf{x} = \mathbf{a}$；这一线段记作 $\mathbf{a}/n$。分划运算可以与迭加运算组合起来。于是，如我们可以得出 5**a**/3，称为 **a** 的“5/3 倍”，分数记号 m/n 就可以用作这种复合运算的记号。于是，说两个分数相等，就是指它们所标记的两个运算，不论作用在哪个线段 **a** 上都给出相同的结果。分数的乘法就是依次完成它们所代表的运算。两个分数之可以相加，是由于以下事实：

$$(m\mathbf{x}/n) + (m^*\mathbf{x}/n^*)$$

所表示的(作用于任意线段 x 上)的运算，可以用单一的分数来表示。

没有必要对每一个有大小的量之类别各引入特殊的分数。因为分数运算的规则独立于这些量的本性，所以用纯算术术语来定义它们更为方便。[5]只要在以上的考虑中，简单地选择自然数的领域为上述有大小的量的领域，就能完成这种定义。在这个域中，x 与 y 的如下关系 $5x = 3y$ 不可能对任一已给 x 都解出 y，这一事实并没有阻碍理论的发展。于是我们得到以下的陈述：“两个自然数 m，n 决定一个分数 m/n。说两个自然数 x 与 y 中后者为前者的 m/n 倍，只不过是等式 $mx = ny$ 的另一种说法。”这正是第 2 节中说的创造性定义。两个分数 m/n 与 m^*/n^* 相等，只要任何适合关系式 $mx = ny$ 的自然数 x，y 亦必适合关系式 $m^*x = n^*y$，且其逆亦真。这是一个超限的判据，因为它的陈述似乎要求对所有可能的 x，y 作检验，但是可以用自然数的运算法则把它换成以下的有限关系：

(C) $$m \cdot n^* = n \cdot m^*。$$

因此，我们又遇见了通过抽象化作定义的例子：分数 m/n 和 m^*/n^* 的相等性可以直接用(C)来解释，但需要先弄清这个关系是一等价关

系。把分数作为“理想元素”来引入，也可以来自纯粹算术的启发，而不必参照应用。事实上，把数值运算适当地推广到分数以后，就会发现，所有重要的算术公理仍有效。此外，乘法的逆运算除法，现在总能够施行了，而在自然数的算术中，可除性只是例外。

[如果再把同样的想法应用一次以保证加法的可逆性，我们就会从分数进到有理数(包括0和负数)。(然而这样做要以严重的牺牲为代价——即放弃以0作除数。)在这个过程中，没有任何逻辑上的含糊和哲学上的困难。倒是在起点的自然数系统，然后是无理数以及由有理数转向实数的连续统，问题严重得多。但是，一旦登上了这个高度，进一步向复数和超复数进展，就不须再越过深渊了。为了引入复数，只需要说清楚，这种数是怎样给出的，又怎样对之作运算。复数是通过它的两个分量给出的；这样，我们也可以说复数就是任意的实数对(α，β)[哈密顿(Hamilton)，1837]。我们不在这里明显地立下其运算法则。按这些法则，$e=(1,0)$在复数域中起乘法单位元的作用，因为它乘任意复数(α，β)仍然给出(α，β)。而(0，1)就是虚单位i，它满足方程$i\cdot i=-e$。可以看到，这些规定的内在理由仍然在于它们把计算的形式法则由实数推广到复数。长时期笼罩在虚的量上的神秘气息现在已经一扫无余了。[6] 从复数还可以上升到具有3个以上分量的超复数。但是可以一般地证明，在超复数领域中，不论怎样定义加法与乘法，想使算术的所有运算法则仍然保持有效是做不到的。在这方面，复数标志了数的概念扩张的一个自然的界限。然而，超复数系统在数学中仍然是有用的；例如，具有4个分量的四元数，除了乘法的交换律以外，它满足所有的算术运算法则，它在研究刚体在空间中的转动时就是一个有力的工具。

除了用逐步推进的办法来构造数的领域外，算术也可以以公理系统为基础。从这个观点看来，数的演进也只不过是把数的系统的相容性化为自然数公理系统的相容性。算术的公理可分为两组，代数公理和量的公理。代数公理这一组处理加法和乘法。它包含运算的形式法则(诸如 $a+b=b+a$)，还要求有一个0、一个1存在，而且具有以下性质

$$a+0=0+a=a,\ 1\cdot a=a\cdot 1=a$$

还有加法与乘法的可逆性(以0为除数除外)。量的公理(这些公理不能移入复数域)，处理 $a>b$ (a 大于 b)这样的关系，请与希尔伯特的《几何基础》一书中的公理表比较。]

参考文献

W. R. HAMILTON, *Lectures on Quaternions*, Dublin, 1853.
H. HANKEL, *Theorie der komplexen Zahlen*, Leipzig, 1867.
D. HILBERT, *Grundlagen der Geometrie*.
O. HÖLDER, *Die Arithmetik in strenger Begründung*, 2d ed., Leipzig, 1928.

6 自然数

"整数是上帝创造的；其他的一切都是人造的。"这是克罗内克(Kronecker)*常被引用的一句话。在自然数中，认知问题以最简单的形式出现。让我们再一次从纯数学的角度开始。

自然数序列从1开始，而按下面的程序生成，即从一个已得出的自然数给出其下一个数，以前已经得到的数都不会在此列中再次出现。所以关于数的任何一个概念(或特性，或运算)都只能用完全归

---

* 克罗内克(Leopold Kronecker，1823—1891)，德国数学家。——译者

纳法(亦称数学归纳法)引入，就是要说明：(α)这个概念对第一个数1是什么意思；(β)它怎样由任意 n 传到下一个数 $n'(=n+1)$。这里的例子有：上节讲的 $n\mathbf{a}$ 之定义。奇偶性的概念是这样引入的：(α)1为奇数；(β)如果 n 为奇或偶，则 n' 为偶或奇。两个自然数 a 与 n 之和 $a+n$ 也是这样引入的，这时

$$(\alpha)\ a+1=a';\quad (\beta)\ a+n'=(a+n)'。$$

对于概念要这样应用完全归纳法，对于证明也要这样应用。要想证明某个定理对于每个数都成立，就要先证明(α)它对于1成立，再证(β)若定理对 n 成立，则定理对 n' 也成立。利用这样的由 n 推论到 $n+1$ 的完全归纳法来下定义与证明定理，自然数理论就能够一步步地完全建立起来。这样一种推论方法把亚里士多德逻辑所未曾见到的全新的特殊的特点引入了数学方法，它正是数学证明的本质。第一个明确提到完全归纳法原理的，似乎是帕斯卡(1654)与雅科布·伯努利(Jacob Bernoulli，1686)。

在用完全归纳法来构造数的理论时，数的相继(succession)成为了它们最根本的特性。数最初表现为序数(ordinal numbers)，序数之间的区别仅在于其在序列中的位置不同。叔本华(Arthur Schopenhauer)在他的《充足理由律的四重根源》(*Vierfache Wurzel vom Zureichenden Grunde*)一书第38节中就数的这一概念公正地说："每一个数都预先假设了其前面的数作为自己存在的理由：我能得到十，仅仅是通过了十前面的数。……"把众所周知的计数的方法用于对象之某个已知集合，就会生成某个自然数，作为此集合中元素的数目[number(Anzahl) of elements]。由于计数的过程，集合中的元素被排成了一个序列(第一个，第二个，第三个……)。这里要作特别的

考虑以保证一个基本的事实，即计数的结果与次序无关。只有这样，基数(cardinal number)的概念才有了安全的基础。例如可与亥姆霍兹的《数与量度》(Zählen und Messen, *Wissenschaftliche Abhandlungen*, Ⅲ, p. 356)比较；进一步还可参看克罗内克的《全集》(*Werke*, Ⅲ, 1, p. 249)。

[关于基数概念或是序数概念，哪一个是初始的概念，对于这一问题有过广泛的讨论。如果说基数不须用次序的排列来引入，就需要通过抽象化来引入(见第 2 节)。这样定义基数，甚至不限于有限集；以此为基础的无限基数理论是康托尔(G. Cantor)* 在他的一般集合论框架内建立起来的。但是，数值等价性的判断要用到配对的可能性，而是否可以配对又只在依时间为序一个接一个地实行相配的动作中才能断定，这时，集合中的元素就已经依次序排好了。即便我们沿抽象化的道路把两个集合的元素个数的比较分解成了两步：第一步对每个集都指定一个数，第二步则再比较这两个数，仍然少不了要把各个集合中的元素依时间次序逐一展示。(不管怎么说，要认定一个总体已经具体地给定了，这种逐一展示就是必不可少的；我们在日常生活中所用到的数都是关于这一种总体的。)由于这个原因，在我看来，序数概念无疑是更本质的。关于数学基础的现代研究，已经摧毁了独断式的集合理论，而证实了这一观点。

另一个辩论焦点是：数究竟是独立的理想的客体，抑或算术只是关注具体的数值符号，“这些符号的形状可以确定地辨识出来，而不论时间与地点，也不论造出这些符号的条件和在执行时的细微差别”

---

* 康托尔(Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor, 1845—1918)，德国数学家。——译者

（希尔伯特语）。例如亥姆霍兹就这样说过（见他的《数与量度》，上引书359页）："我把算术，即纯数字的理论，看成一个建立在纯粹心理事实基础上的方法，用它教人们学会不自相矛盾地应用一个范围无限，且可无限改进的符号系统。特别是，算术研究的是：对这些符号做哪些不同的组合（即数值运算）会给出相同的结果。"直到最近，希尔伯特才把这个观点无矛盾地实现了（比较第10节），甚至在弗雷格针对它的批判（*Grundgesetze der Arithmetik*，1893）之下，它也是无懈可击的。画一连串斜杠"/"（各表示"一"），就是一个适当的符号。如果我听到一连串声响，每听到一声就画出一杠，把这些斜杠一个个接着放：////。第二次我又如法炮制，又得到一个符号，仍是一串斜杠"/"，如果我能立刻判断出这两个符号的"形状"相同或不符，数值比较也就完成了。这里使用斜杠表示数据还有一个功能，即把这些数据表示为一种"法式"（normal form），使得一旦形状不同就表示数目有差别。（如果直接给出的是总体，数目就用来表示这个总体与被取为单位的部分之间的关系。两个总体的形状不同，并不一定意味着它们所含的单位数目不同；例如∴∴和∴∴。有人说，"组合"这个动作是决定元素个数的基础。在我看来，用符号方法来对由单元构成的结构上的总体进行计数，并不需要通过把结构中的联结消除掉，仅仅把"总体"抽象出来；也不需要把个别给出的元素，例如那一串声响，"组合"成一个总体。"响了这么多声：////"这句话本身就很好懂，不需要去找"所听到的声响之总体"。）直接认知由一串斜杠组成的两个符号是相同还是不一致，只有对很小的数才可能做到。一般说来就需要把第一次记下来的一串斜杠，随着第二串声响，一个一个地删掉；而为此目的，第一个串就要保存着（而不能如声响本身那样，响过以后就消失了）。从原则上

说，为了检验以下命题“这一次的声响比上一次多些”，是可以不需要符号的，只要当听第二个声响序列时，可以把第一个声响序列按其次序复现即可(哪怕声调低一些也可)。只有当两个序列的比较被分解成两次决定数目时，符号才是不可少的(例如“第一次响了4声，这一次响了5声，而5比4大”)；因为这时心智活动有一部分(即“5比4大”这一部分)已经转移到永久性的符号5和4上，不再关注于声响本身了，而这时符号更便于保存和传输。所以，真正本质上具有符号特性的，并不是数的比较而是确定数的本身。“有4次声响”这句话如果不参照一个符号，是无法理解的。

同样，如果谁想把数说成是一个概念或理想客体，他就应该小心无论如何不要赋予数以独立的存在性；它们的存在就只在于它们所起的功能作用，以及它们的大小关系。(它们肯定不是亚里士多德关于抽象化的理论意义下的概念。)

使用多个数码以及位值制(positional system)(首先出现在美索不达米亚*，其后由印度人发展为前后一贯的书写的记数法)，比之使用相继的“一”(如前文的斜杠“/”就是一个“一”)的简单符号更便于迅速地判定大得多的数孰大孰小。然而这个很大的实际好处并不是原则性的。我们取十为位值制的基底，但在不同的文化中，基底取法不同。印度的文献，特别是佛教文献，颇为自得的是通过位值制(即通过加法、乘法与指数的组合)，可以生成和记载巨大的数。这些文献虽有其奇幻的一面，但也确有其伟大之处；人的心智由于使用了符号，第一次感觉到自己有力量展翅飞翔，超越直觉所允许达到

---

* 美索不达米亚即指两河流域。美索不达米亚原意就是两条河流——幼发拉底河和底格里斯河——之间。——译者

的界限。在希腊人那里，我们只在其最晚的年代，才在阿基米德致盖伦(Gelon)*的信《数沙者》(The Sand-reckoner)中找到类似的东西；这封信表示的，并不是因为一步一步地通向了无限而得到的一种欢乐，而是使无限臣服于理性所得到的欢乐。

关于数与时间和空间的关系，我们可以说，时间作为纯粹的意识的形式，是心智活动本质的而非偶然的前提，而有关数值的命题的意义，正是建筑在这种心智活动的基础上的。与有些哲学家(例如霍布斯)的看法相反，关于空间就不能这么说了，尽管具有空间构形的永久性的符号对于记载计数的结果加以贮存与传输，还有保证数的操作不出错，都是最好的方法。康德特别强调数的概念与时间的联系，但是如果要说算术是时间的科学，如同说几何是空间的科学一样，那就走得太远了。

关于两个具体给定的数的符号 m 和 n，不需要“生成”任意其他的数就可以描述命题 $m+n=n+m$ 的意义。也可以看到，对于任意的具体情况，这个命题都是成立的。然而，若我要把这些真正出现了的数的符号嵌入到所有可能的数的序列中去，这时就出现了新的情况。那个序列是按一个生成的过程产生的，其原理是每一个数只要加上一个“一”，就给出了新的下一个数。这里，存在的东西(the being)被投影到可能的东西(the possible)的背景上，这些可能的东西构成可能性的多样体，数虽然是由一个固定的过程产生的，但这个过程却可通向无限。我们在本节之初把算术建立在完全归纳法原理之上时，就是采用了这个观点。当我们说到一万亿元(10^{12}元)时，就用到了它。反复应用完全归纳法来作定义，我们就可以由变 n 为

* 盖伦，据说是叙拉古(Syracus，在今西西里)的暴君。——译者

$n+1$ 的过程得到乘以 10 这个运算。（从 1 开始）连续做这种乘以 10 的运算 12 次，就得到了我们想要的数 10^{12}。数 10 和 12 可以如前面那样用斜杠来写；至于 10^{12}，从来没有人这样做过，然而我们仍然坚持这个“虚构”也是一个数。}

这样，哪怕是在数的领域中，我们就已经遇到构造性认知（constructive cognition）的基本特点如下：

1. 我们对已给与我们的东西赋以某些特性，这些特性并没有显现于现象中，而只有经过一些心智的活动才能达到。重要的是，这种活动被认为是普适的可能的，而其结果被认为是由这个已给的东西唯一决定的。但是，用以确定这些特性的心智活动是否实际进行过，这并不重要。

2. 由于引入符号，心智活动所作的论断被分解开了，一部分被转成对于符号的论断，因而被认为是独立于已给的东西及其持续的存在。这样一来，对于概念的自由运作就与概念的应用形成对立，观念从实在割裂开来，得到了一种相对的独立性。

3. 这些特性并不是在它们实际出现时个别地展现出来的，它们的符号被投影到由多种可能性所成的有序的多样体的背景上，而这些可能性又是按照一个确定但又引向无限的程序生成的。

认知并未终结于此。把这个永不会完成的通向无限的数之序列看成自身存在的客体之封闭的总体，就产生了向彼岸的飞跃。正是在这一步飞跃上，把数看成理想的客体才会有危险。然而，对于绝对的信念深深植根于我们心中，所以并不奇怪，数学在完成这一飞跃时，确实是胆大而又天真的。奇偶性的以下定义：“n 为偶数或奇数，视是否存在一数 x 使得 $n=2x$”，涉及了所有的数的无限的总

体(而按完全归纳法给出奇和偶的定义，上面说过，是另外一回事)。因此不论是谁，只要他承认这个定义是有意义的，他就已经站到彼岸世界去了；对于他而言，数系已经成了绝对存在物的领域，而不是“此岸世界的事物”，这些绝对存在物，只有它们在这里或那里的某些闪光被我们捕捉到，并且被反映到我们的意识中。为这种超验的观点辩护，形成了激烈争论的主题，而如今又在数学基础研究上再燃烽火。在所有的知识领域中都有这个问题的征兆，而比起其他地方，这个问题在数学中可能更早得到明晰的判决。

参考文献

R. DEDEKIND, *Was sind und was sollen die Zahlen?*, Braunschweig, 1888; 3rd ed., 1911.

G. FREGE, *Die Grundlagen der Arithmetik*, Breslau, 1884; reprinted 1934. *Grundgesetze der Arithmetik*, 2 vols., Jena, 1893—1903.

E. HUSSERL, *Philosophie der Arithmetik*, Halle, 1891.

7 无理数与无穷小

与在数的序列中见到的无限不同，我们现在是在可以无限分割的连续统的形式下又遇到了无限。连续统的具有特殊重要性的特例，是时间与空间的连续统。在这里，我们在上面已经描述过的数的数学领域的构造中，发现了第二个尚未解决的空白。在连续统问题上，古人已经为我们传下了两大贡献：(a)对于如何在连续统中确定个别位置这一数学问题，已经作了意义深远的分析；(b)发现了一些哲学的悖论，其根源就在关于连续统的直觉上已显现的本性。

[(a) 希腊人的纯粹几何学在把几何学提高到超出不准确的感觉

素材时，已经把存在性的思想(不仅仅应用于自然数)应用于空间中的点。正方形对角线与其一边之比$\sqrt{2}$之无理性的发现，使得我们可以很清楚地看到，作为度量线段之比的量，不可能仅仅是分数，所以分数并非仅有的可能的“实数”。从柏拉图的对话中就可以感受到，这个数学发现对他那个时代正在兴起的科学意识之深刻影响。欧多克索斯(Eudoxus)已超过了得出个别无理数如$\sqrt{2}$的特殊的几何构造，认识到了这个现象的一般基础。

1. 他规定了以下的公理来代替难以站住脚的可公约性：若 **a** 与 **b** 是任意两个线段，则 **a** 可以重复相加充分多次，使其和 $n\mathbf{a}$ 超过 **b**。这意味着，所有线段从量级来说，都是可比的，也意味着在连续统中既没有真实的无穷小，也没有真实的无穷大。

2. 究竟是什么刻画了线段之比？欧多克索斯回答说：两个线段之比 $\mathbf{a}:\mathbf{b}$ 与 $\mathbf{a}':\mathbf{b}'$ 彼此相等，当且仅当对任意自然数 m 与 n，下面两行公式中，只要上一行的条件成立，必导致下一行相应条件成立：

$$(\mathrm{I})\begin{cases} n\mathbf{a} > m\mathbf{b} \\ n\mathbf{a}' > m\mathbf{b}' \end{cases} \qquad (\mathrm{II})\begin{cases} n\mathbf{a} = m\mathbf{b} \\ n\mathbf{a}' = m\mathbf{b}' \end{cases} \qquad (\mathrm{III})\begin{cases} n\mathbf{a} < m\mathbf{b} \\ n\mathbf{a}' < m\mathbf{b}' \end{cases}$$

所以，真正刻画个别实数 α 的，是它在有理数域中生成的分割，即把所有的有理数 m/n 分成三类：(Ⅰ)小于 α 者，(Ⅱ)等于 α 者，(Ⅲ)大于 α 者。第二类或者为空，或者仅含一个分数。第一个公理保证了两条不同线段不可能对一条固定单位线段有相同的比。欧几里得的比例理论也类似地建立在此基础上，而阿基米德则以它为基础建立了他的一般的穷竭法。

直到 19 世纪，数学才超越了欧多克索斯，而以更确定的方式解决了这个问题。对于欧多克索斯，实数是作为两个已知线段的比而

给出的，所以须待几何公理告诉我们有什么样的线段比存在。但是在欧几里得几何中不可能(用直尺和圆规)由已给的线段 1 作出线段 $\sqrt[3]{2}$，并由此解决立方倍积问题；也不可能作出线段 π(它是直径为 1 的圆之周长)，并且解决化圆为方的问题。但是我们都基于连续性的考虑，从而相信这些线段是存在的：如果把一立方体的边长 1 增加到两倍，立方体的体积就从 1 连续地上升到 8，所以体积的值必在某一时刻经过 2。至于线段 π，我们可以用内接与外切于圆的正 6 边形、正 12 边形、正 24 边形……之周长来从下方与上方逼近此圆，而这些多边形都是可以按欧几里得的尺规作图作出来的。这样一来我们就要把事情翻一个面：有理数域中的任一分割，即把所有的有理数分成三类Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ，不管这个分割是怎么做出来的，都决定一个实数。(要满足的要求如下：Ⅰ与Ⅲ都不能是空的；Ⅱ中至多只能有一个分数；Ⅰ中没有最大分数而Ⅲ中没有最小分数；Ⅰ中任意数必小于Ⅱ或Ⅲ中的任意数；Ⅲ中任意数必大于Ⅰ或Ⅱ中的任意数。)按照戴德金的说法(*Stetigkeit und Irrationalzahlen*，1872)，我们没有理由仅承认一部分分割是实数。这样，在几何中我们就作出一个公设：必存在一线段，其与已给单位线段之比正是由上述分割算术地给出的(这称为戴德金公理)。因为反过来按欧多克索斯的说法，任意线段 a 对一条单位线段的比决定一个分割，所以戴德金公理就保证了几何元素的完备性：如果想维持所有的公理(包括欧多克索斯公理)都成立，则点的系统不容许再扩充了(希尔伯特)。这种逻辑上的完备性(即不出现空隙)反映了空间中的点之间的连续性。由于有了戴德金关于数的概念，分析就与几何独立了。这样终于能够分析何谓连续性，而且给几何学一种手段来证明有关连续性的定理。下面是这类定理的一个例子：一条联结圆心和圆外一点的连续曲线必定与圆周相交。

在欧几里得的时代，这类定理的证明总是不完备的。莱布尼茨曾就欧几里得的第一个作图题指出过这一点，这个作图题就是作一个以 A，B 为顶点的等腰三角形。欧几里得未能证明以 A 为心而过 B 的圆，必与以 B 为心而过 A 的圆有公共点。

另一种与分割等价的刻画实数的方法是用有理区间“套” $a_n b_n$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$ 的无限序列，这里每一个区间 $a_n b_n$ 都含在前一个区间内，而且当 n 无限增加时，其长 $b_n - a_n$ 趋向 0（试以 π 为例来比较）。因为分数从逻辑上说并不比自然数复杂——每个分数均由两个自然数（其分子与分母）来决定——我们可以把问题（a）的历史发展的结果总结如下：}

个别自然数形成数论的主题，而自然数的可能的集合（或其无限序列）则是连续统理论的主题。

（b）下面引述的阿那克萨哥拉（Anaxagoras）的一段话清楚地描绘了连续统的根本特征：“小数中无最小者而恒有更小者。因为存在者不论如何细分，仍不失其为存在者。”连续统并非离散元素所构成，“如由斧砍为碎片然。”空间的无限性，不仅具有无终端的含义，而且在各处都具有可以说是向内的无限性。因为要确定其每一个点，都只能以逐步细分以至无限（*ad infinitum*）来做到，这与直觉所赋予空间的静止的、完备的存在恰成对比。由连续的空间以及外部世界的事物可以连续地分级这样的特性，传递出了这种“未完成”的特性。一个实在的事物的给出，永远不可能是充分的，它的“内在的视野”，随着经验的不断更新和不断精确化这个无限连续的过程，逐步地展开；正如胡塞尔所强调的，这正是康德意义下的极限的观念。由此原因，不能把实在的事物看作是存在的、封闭的而且自

身完备的。这样，连续统问题驱使人们走向认识论的唯心主义。特别是莱布尼茨作证说，正是为了寻求一个跳出“连续统的深渊”的办法，才启示他得到把时间与空间看作现象的次序这一概念。“数学的立体不能分解为原始的元素，由这一事实立即可知，数学的立体不是什么真实的东西，而只是一个观念的构造，标志着一种可以分成各部分的可能性”[莱布尼茨与德沃尔代(De Volder)的通信，Leibniz，*Philosophische Schriften*，Ⅱ，p. 268]。

[与连续统的这一本性相对立，莱布尼茨设想了单子(monads)的概念，因为他——与康德不同——感到必须为现象在绝对实体的世界中形而上学地建立一个基础。“在连续统的观念中，全体先于部分。……在这里，部分只不过是潜在的；但在真实的事物[即实体]中，单体先于总体，部分是真正给出的，而且先于全体。这些考虑驱逐了关于连续统的种种困难——这些困难之所以产生，只是因为把连续统看成了某种真实的东西，它在我们还未想出任何方案将它分解前，就已经具有了部分；只是因为把物质看成了实体”[致雷蒙(Remond)的信，*Philosophische Schriften*，Ⅲ，p. 622]。

把连续统设想为僵硬的存在物之不可能性，没有谁能够比芝诺(Zeno)的著名悖论“阿基里斯与乌龟赛跑”陈述得更简明的了。注意到级数

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots$$

的部分和为 $1-\frac{1}{2^n}$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$，它不会增长到超过一切界限而是收敛于1。现在人们以为，注意及此即可消解这个悖论。这个例子当然既中肯又能说明问题。然而如果长为1的线段确由无数多

个长度各为$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{8}$，…的小线段组成，而这些小线段如同由全体中“砍下的碎片”一样，则这一点与无限之本性之互不相容，亦如阿基里斯把所有的小段都跑过之“不可完成”是一样的。如果承认这种可能性，那就没有理由认为一个机器不能在有限时间内依次做完无限多次不同的决策行动；例如用$\frac{1}{2}$分钟做出第一个结果，再用$\frac{1}{4}$分钟做完第二个，再在其后的$\frac{1}{8}$分钟内又完成了第三个，依次类推。由此看来，只要人脑之接受能力是按此方式工作的，人脑就可以在有限时间内遍取所有自然数，而对关于自然数的任一个存在问题作出明确的“是与否”的判断！

笛卡儿苦思的是这样一个想法，即运动着的流体的物质颗粒必须能分成无限（*in infinitum*），“或至少要能无限制（*in indefinitum*）地分下去，使之成为那么多的部分，小到无法想象，一个部分既已如此之小，怎么能知道它是否还可以分成更小的部分。”这对于他始终是一个难解之谜，而他只能求助于神性万能的不可思议。欧拉（Euler）*在他的《自然学说引论》（Anleitung zur Naturlehre，*Opera postuma*，Ⅱ，1862，pp. 449—560）中十分清晰地概述了他那个时代的自然哲学基础，他指出，虽然物体可以无限分割，但是每个物体均由无穷多（“最终的”）部分组成这一命题，却是完全不对的，甚至与无限可分性显然不相容（见欧拉上述引文第2章，§12）。在康德的体系中，纯粹理性的前两个二律背反，都是关于连续统的。[7]]

---

* 欧拉（Léonhard Euler，1707—1783），瑞士数学家。——译者

在思想史上，曾经有三种把连续统看成自身存在的东西的企图。按照第一种，也是最激进的一种，连续统是由可以计数的离散的元素（即原子）构成的。用之于物质，这条道路是由古代的德谟克利特（Democritus）开辟的，而在现代物理学中一直追随它取得了光辉的成就。柏拉图清楚地意在用理念来“拯救”现象，他是想把原子主义用于空间的第一人。在伊斯兰哲学中，穆台凯里姆（Mutakallimûn）教派*复活了空间的原子主义理论（见 Lasswitz，*Geschichte der Atomistik*，Ⅰ，1890，pp. 139—150）。在西方则有布鲁诺（Giordano Bruno）的“至小”的理论**。休谟的时空理论目的也是在其理论中，把它从模糊的感觉材料变为由不可分元素组织而成的东西（*Treatise of Human Nature*，Book Ⅰ，Part Ⅱ，Section 4）。受到量子理论的刺激，这种思想今天在对物理学基础的讨论中又再次兴起。但是迄今为止，它一直只是一种思辨，而缺少与实在充分的接触。以这种思想为基础，人们应该怎样理解空间中的度量关系？如果一个正方形真正是由缩小的砖片构成的，则沿对角线与沿底边都有相同数目的砖片，而对角线与底边也就有相同长度。所以休谟不得不承认，借助于组成元素的数目来比较曲线与曲面的度量，这个原理虽然“再也明显不过”，事实上是无用的。黎曼（B. Riemann）在他的就职演说《作为几何基础的假设》（*Über die Hypothesen*，*welche der Geometrie zugrunde Liegen*，1854）以另一种说法说明了这一点：“虽然对于离散的多样体，度量的原理已经含于这种多样体的概念之中，对于连续

---

* 这是早期伊斯兰的一个哲学—神学派别。Mutakallimûn 一词来自 kalam 一词，即辩论。它与正统伊斯兰的辩论涉及了许多哲学问题。——译者

** 布鲁诺因为反对天主教正统的宇宙观而被烧死。他对宇宙的观点来自希腊的原子论哲学，认为宇宙是由最小的单元组成的，他把这种最小的单元称为“minimum”，此词虽然与数学中常见的“极小”、“最小”一样，含义却完全不同，所以译为“至小”，借用了庄子的“至小无内”的说法。——译者

的情况却必须来自其他地方。”

第二种方法是企图采用无穷小。伽利略在他的《对话》的第1天的对话中，就已独创而又详细地讨论过了。按伽利略的说法，正如我能够把一段直线弯成一个八边形或一千边形，我也只须把它在圆上一绕，就成一个具有无穷小边的无穷多边形，这样就不必依靠极限过程，而靠极限是永远到不了头的。[8]

[如果一个轮子沿水平直线 l 向前滚动，则每一个较小的同心圆都会沿一条长度相同的直线 h 被拉动[即所谓亚里士多德转动(*rota Aristotelis*)]。然而，如果用一个正多边形轮子来代替圆轮，则多边形的各边将依次落在 h 上，而 h 上“被盖住的”线段形成一个折断了的直线。因此，在圆轮的情况下，必须假设 h 是由被盖住的与未被盖住的直线段无限稠密地相继排列而成。“这个方法，”伽利略在《对话》(*Opere* Ⅷ, p. 93)中说，“可能比任何其他方法都更好地使我们能越过许多错综复杂的深渊，例如前述的固体的融合，以及稀疏与压缩，而无须把值得反对的真空与物体的可穿透性强加于我们。所以在我看来，只要假设空间是由不可分物组成的，就可以避开所有这些困难。”如果一条曲线是由无穷多个直的“线元”构成的，就可以简单地设想切线指出了个别线元的方向；它联结了曲线上两个“靠在一起”的点。然而，反对伽利略的假设的人就得把曲线上一点 P 处的切线定义为割线 PP' 当 P' 向 P 无限接近时的极限直线，这里 P' 是曲线上第二个动点。约翰·伯努利(Johann Bernoulli)与莱布尼茨对这个问题的讨论是很有教益的。莱布尼茨说(*Mathematische Schriften*, Ⅲ, p. 536)：“因为如果我们假设直线上真正存在

着一些线段，记作$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{8}$，…，而且这个序列的所有元都是真正存在的，你就由此得出结论，必有一无穷小元存在。然而在我看来，这个假设只不过意味着，任意小的任意有限部分都是存在的。”但是伯努利回答说(上引文，p. 563)：“如果有10个元出现，则必然存在第10个，如果是100个元，则必然存在第100个，……所以，如果这些元的个数是∞，则第∞个元[即无穷小]必定存在。”}

极限过程取得了胜利，因为极限是一个不可少的概念，其重要性并不受是接受还是拒绝无穷小的影响。但是，一旦掌握了极限概念，无穷小就变得多余了。无穷小分析提出，从无穷小的性态得出有关整体的性态的结论，只要作积分即可，而积分服从一些初等的规则；例如，从两个有质量的“体积元”之引力，用万有引力定律就可得出两个任意形状的物体间的引力之大小，而不论这些物体的质量分布均匀与否。如果这里对无穷小量不是作“潜在的”解释，即不是按极限过程来解释，则无穷小的过程与有限大小的过程，两者毫无关系，相互独立，把它们联结在一起的纽带被切断了。在这里，无疑是欧多克索斯看得正确。

{附带提到，依我所见，就关于无穷小的概念之清晰性而言，18世纪远不如希腊人。这个启蒙时代的不少作家都抱怨“数学之不可理解性”，而含混与不可理解的，其实是他们关于无穷小的概念。说实话，不可能建立一个关于量的相容的“非阿基米德”理论[9]使在其中欧多克索斯公理不成立(这个公理通常以阿基米德公理命名)。但是，正如刚才指出的，这个理论对于分析什么用处也没有。牛顿

(Newton)和莱布尼茨似乎有一种正确的观点，他们自己也或多或少清楚地表述过，即无穷小分析考虑的就是通过极限过程趋于0。但是他们没有最后的洞察力，即没有看到极限过程的作用不仅在于求极限之值，而且在于要确定极限的存在。由此原因，莱布尼茨对无穷级数的求和就不甚清楚。极限理论只是缓慢地站住了脚。1784年达朗贝尔(D'Alembert)在他的《百科全书》(*Encyclopédie*)中肯定地宣称："极限理论是微分学的真正的形而上学的基础。完全用不着通常说的无穷小量；唯一需要的是有限量的极限。"要等到19世纪初，才由柯西(Cauchy)无矛盾地实现了这些思想。特别是他发现了无穷级数收敛性的正确的判据，即是通过无限过程生成一个数为其极限的条件。然而这个判据的证明，又需要确定数的概念，这是后来由戴德金分割的原理完成的。}

第三种"拯救"柏拉图意义下的连续统的企图，可以在关于分析的现代集合理论基础中看到。

参考文献

R. DEDEKIND, *Stetigkeit und irrationale Zahlen*, Braunschweig, 1872; third edition 1905.

关于连续统和无理数问题的古代理论可以参看：

P. TANNERY, *Pour l'histoire de la science hellène*, Paris, 1887.

E. FRANK, *Platon und die sogenannten Pythagoreer*, Halle, 1923.

H. HASSE and H. SCHOLZ, *Die Grundlagenkrise der griechischen Mathematik*, Berlin, 1928.

B. L. VAN DER WAERDEN, *Mathematische Annalen*, 117 (1940), pp. 141—161.

K. VON FRITZ, *Annals of Mathematics*, 46 (1945), pp. 242—264.

8 集合论

乍一看，似乎是由于有极限过程，僵硬的存在(Being)确定地被

融入变化(Becoming)之中；仅此一端似乎亚里士多德的学说在数学上实现了，这个学说教导说，无限永远是处在过程中，所以只是 δυνάμει（潜在地）而非 ἐνεργείᾳ（实在地）存在。这种表面现象有欺骗性。对于个别的收敛序列，如收敛于 $\pi/4$ 的莱布尼茨级数

$$\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots$$

的部分和(partial sums)序列并非作为一种无规律的过程展开的，我们也并非只能闭着眼接受它，等着看它一步步地变出什么来；实际上它永远都遵循一个确定的规则，对每个自然数 n，给出 $\pi/4$ 相应的近似值(第 n 个部分和)。戴德金分割把无限多个有理数分成Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ三类时，并不是把这些分数一个接一个地取出来，再对每一个分数分别给它规定一个类，而是根据一个规则，说具有某个性质的就属于Ⅰ类。(只要定义Ⅰ类就够了，因为同时就自动定义了另外两类。)这个规则或这个性质，就精确地确定了所想定义的实数。

若一个函数 $f(x)$ 当变量 x 趋于 a 时收敛于 $f(a)$，就说它在 $x=a$ 处连续。但是这里的收敛的概念怎样定义？“对每个正数 ε，必存在一个正的 δ，使得对所有满足条件 $a-\delta<x<a+\delta$ 的实数 x，均有 $f(a)-\varepsilon<f(x)<f(a)+\varepsilon$。”这样，我们的看法一直是静态的。它的特征是不加限制地应用“存在”、“所有”这些词，不只是应用于自然数，还应用于连续统中的各个位置，即自然数的可能的序列或集合。这正是集合论的精华：它不仅考虑数的序列，而且也考虑其子集合的全体，把这些子集合看成是自身存在的对象，而子集合的全体则看成封闭的总体。在这个意义上，它是以实无限为基础的。但是，一旦接受了这一点，分析的庞大的结构就都有了不可动摇的稳固性；分析是安全地站住了，其各个部分都基于可靠的论

证，其概念是精确的，其证明无懈可击。 分析得到了基础，这基础则保证了在这个领域中工作的人，不论是在哪一个分支里，都能达到无条件的主体间一致。

〔可以肯定，要有相当的数学功夫才能从直觉的启示中证明关于连续性的一般事实；例如，一个连续函数可以取一切中间值，一个不自交的封闭平面曲线把平面分为两部分，或一个二维区域不可能以一种连续而且一对一的方式映入一个三维区域。 我们在教学生时就一再体验到，需要多么艰苦的训练才能摆脱成见，而这对正确地理解这些证明及其说服力又是必不可少的。 除了那些验证了我们的直觉的定理以外，分析还多次揭露出与直觉相反的事例，例如处处都没有切线的连续曲线以及填满整个正方形的曲线。 从柯西、高斯直到魏尔斯特拉斯(Weierstrass)*，他们在 19 世纪所做的工作，正是在以上基础上检验了分析中所有未曾证明过的假设。〕

集合论的方法不仅渗透于分析中，而且渗入到数学最初的起点，即自然数理论。 从集合论的观点看来，所有自然数所成的序列是一个完备的集合 N，其中定义了一个映射 $n \to n'$，它对此集合中的每一个元 n 都唯一地联结上一个 n'。 正是下面的事实：存在一个由 N 到 N 的一个子集合(此子集合不能恰好就是 N 本身)上的一对一映射($n \to 2n$ 或 $n \to n^2$ 这样的对应就有同样的一对一的效果)，表明了 N 是一个无限集。 要证明一个集合的有限性，只有去证明这样的映射是不可能的。

---

* 魏尔斯特拉斯(Karl Theodor Wilhelm Weierstrass，1815—1897)，德国数学家。——译者

〔这样，对于集合论，有限与无限原则上没有区别。对于集合论，无限甚至是两者中比较简单的。（这与笛卡儿是一致的，笛卡儿坚持认为无限先于有限〔见他给克莱尔色列(Clerselier)的信，*Corr.*, ed. Adam and Tannery, V, p. 356。在信中他说："但是，我说我称为无限的概念对于我要先于有限的概念，"亦见笛卡儿 Méditations métaphysiques, third meditation, Oeuvres de Descartes, I, pp. 280—281〕。）按照上面所说的确定的意义，欧几里得关于量的公理 *καί τὸ ὅλον μέρους μεῖζον*（"全体大于部分"）对于无限集合不再成立，这一点伽利略就已指出来了(Discorsi, *Opere*, Ⅷ, p. 79)。由此，莱布尼茨作出以下结论(致伯努利信，*Math. Schriften*, Ⅲ, p. 536)："若把数，或所有数的集合，看成一个完备的总体，必会带来矛盾。"波尔查诺(Bolzano)* 在这里看到了"无限的悖论"(*Paradoxien des Unendlichen*, 1851, §20)。最后是戴德金，他把这个事实提高到无限性的定义的地位(*Was sind und was sollen die Zahlen?*, 1887)。〕

按照戴德金的说法，一个由自然数构成的集合 C，如果其中每一个 x 的"象" $x' = x + 1$ 也在 C 中，就称 C 为一个链。由 1 开始，可以达到它的象 $1'(=2)$，再作一次这样的映射达到 $2'(=3)$，依次类推，终于可以达到任一个自然数——这里的"依次类推"的思想在逻辑上似乎是不能再化约了，而且是自然数序列的本质。这个事实可以表示成为一个原理如下：每一个以 1 为元素的链必然就是整个自

* 波尔查诺(Bernard Placidus Johann Nepomuk Bolzano, 1781—1848)，捷克数学家。——译者

然数集合 N。所以，完全归纳法可以基于对概念“所有”和“存在”做超限的应用；这样一来集合论就取消了数学与逻辑的分割。戴德金、弗雷格和罗素的研究，目的就在于把数学完全地逻辑化。

何时一个自然数 n 小于给定的数 m？人的常识常用有限的明确的算术判据来回答这个问题：“如果从 1 数到 m，在未达到 m 前即已达到 n，则 n 小于 m。”而在集合论中则用以下的超限的纯逻辑判据来回答：“若存在一链其中有 m，但没有 n。”但是，只有在人已经达到一个水平，能把“存在”一词用于自然数的集合时，才可能使用这个判据。

而仅仅是为了这个目的我们才需要把集合客体化，但在日常生活语言中，说来也怪，早就是这样做了。“这玫瑰是红的”这个命题不再归属于“x 是红的”这一有一个空位 x 的模式，而是归属于更一般的格式“x 有性质 X”，在其中只要作两次代入：x = 玫瑰，X = 红的，就得到原来的命题。“有性质”这几个字表示一个关系 $\in$，它可以用于任意的对象 x 和任意的性质 X。我们只是这样才遇见了联词(copula) $\in$；它把原来二成分的命题变成了三成分的命题 $x \in X$。[把这个联词误认为是存在(existence)或是相同，这种荒唐的混淆，最令人痛心地表示了哲学思辨依赖于偶然的语言形式。]现在，把第 1 节中关系组合的原理 6 与 7 形式地用于空位 X 的道路已经打开了。这样，一般的集合概念之引入其实分成两步：第一步是刚才上面说了的客体化；第二步则是作一规定，即两个性质 X 与 Y，或其相应的集合被视为相等，只当 X 之一切元素均属于 Y，反之亦然。

从个别展现出的对象之总体中，我们可以通过选择来生成所有可能的子集合，再逐一地加以视察。但是当处理如 N 这样的无限集合

时，则子集合的存在性的绝对主义，就比元素的存在性更值得怀疑。因为只有当一个子集合的元素可用一个特征的性质来决定时，才能把这样一个子集合选出来，所以很难摆脱一种感觉，即组成子集之可能性多得混沌不清，如果没有规则或规律能把元素放在一起，这么多可能性就会悬空了。但是，假设我们已经能用某种方法在这些性质中划分出一个“外延确定”的类(我将称这些性质为第一层次的性质)，则很难捉摸的“自然数的一切可能的性质之总体”的似为荒谬的特性还是可以较明确地摆出来。这使我们有权相信，“某个如此这般地适当描述的类别 A 是否具有一个第一层次的性质？”这个问题有一个或是或否很明确的回答。这样我们就可以说到一个性质 P_A：我们说所谓数 x 具有性质 P_A，当且仅存在一个第一层次的性质而 x 具有它。然而，按照 P_A 的意义，P_A 本身就在第一层次的范围之外；它属于一个更高的第二层次，因为它是用第一层次性质的全体来定义的。罗素把这个观点多少有些模糊地表述为所谓“恶性循环原理”(vicious circle principle)：“任何全体中都不能包含通过全体才能定义的成员。”在第二层次之上，可类似地构造第三层次，并依此类推。相应地应该区别第一、第二、第三……层次的自然数集合，实数集合亦应随之加以区别。这种构造性质 P_A 的方式在分析中就出现过，例如确定直线上点集的上确界的方式就是。存在性的绝对主义对这种首先是由罗素的型(type)的理论带来的这些层次之区别的忽略，构成了一种无可置疑的恶性循环。

[要想摆脱这种困境，只有当每个第二层次性质都有一个第一层次性质与之外延相等(但非意义相同)才行。只要接受自然数序列为一个外延确定的全体，则由基本的关系“n 随着 m”按第 1 节讲的定

义过程生成的性质都可以认为是第一层次的性质。在这种情况下，我们的愿望几乎无法实现，我们将面临这样一项工作，即把构造第一层次性质的原理加以推广，使得每个第二层次的集合都与一个第一层次的集合相同。但是没有最微弱的迹象表明这样可行。罗素为了由此脱身，只好在缺少任何证据的支持下把这个论断假设为一公设[即所谓“可化约公理”(axiom of reducibility)]，这等于让理性切腹自杀。我在1918年出版的一本小册子《论连续统》(*Das Kontinuum*)中，曾企图给出这个公设的诚实的结论，并且构造出第一层次实数的一个域，使在其中可以实行分析中的最重要的运算。]

在自然数和自然数的集合领域中，尽管绝对的存在性有悖论的性质，迄今却未导致任何矛盾。然而康托尔却不顾一切桎梏，不受限制地对集合概念进行操作，特别是允许构造任一已知集合的一切子集合的集合。他为无限集合发展了关于基数和序数的一般理论。这里，在集合论的最前沿，真正的矛盾出现了。但是它们的根源只能是，从数学的最开始就有一种胆大妄为，这就是把尚在构造中的可能性的领域看成一个已经自己存在的对象封闭的总体。

参考文献

B. Bolzano, *Paradoxien des Unendlichen*, posthumous edition Přihonsky, Leipzig 1851.

R. Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen?*

G. Frege, *Die Grundlagen der Arithmetik*.

G. Cantor, *Gesammelte Abhandlungen*, Berlin, 1932; in particular Sections Ⅲ and Ⅳ.

B. Russell, *The Principles of Mathematics*.

H. Weyl, *Das Kontinuum*, Berlin, 1918.

A. Fraenkel, *Einleitung in die Mengenlehre*, 3d. ed., Berlin, 1928.

9 直觉的数学

这种情况首先是由布劳威尔(L. E. J. Brouwer)* 发现的(自1907年以后)。他设计了一种数学系统，而不必越过我们在第6节末尾讲到的通向彼岸世界的鸿沟。一个存在性命题，例如“存在一个偶数”，并不是确定一件事实的本来意义下的命题。有一类命题(1为偶，或2为偶，或3为偶……直至无限)需要一个“无限逻辑和”，而无限逻辑和显然是不可能执行的。“2是一个偶数”是一个真命题(只要“偶”已经如42页那样递归地定义了)；“存在一个偶数”则不然，它只是由那个命题导出的命题性的抽象。如果我认为对于某事的一种洞见是一个有价值的宝藏，则命题性的抽象就只是一份确定有宝藏存在的文件，而未给出宝藏的位置，它的价值仅仅在于它令我去寻找这个宝藏。如果不附上一个真实的命题如“2是一个偶数”作为背书，这份文件就只是一纸空文而毫无价值。不论何时，如果只是确定了某种结构的可能性，我们就还没有得到一个有意义的命题：只是在有了一个有效的构造法，或一个已实行了的证明以后，一个存在命题才有了意义。在数学大量的存在定理中，在每一种情况下，有价值的都不是定理本身，而是在其证明中实现了的构造；没有它，这个定理只是一个空洞的影子。

[在第3节中提出了一个问题，即如何由存在命题得出结论。在这里，只有从原则上否定那种可能性才是这个问题的答案。要得到结论就必须把存在命题代之以有意义的总体，而此存在命题正是由此总体中抽象出来作为命题性的抽象的。这个说明适用于所有需要构

* 布劳威尔(Luitzen Egbertus Jan Brouwer，1881—1966)，荷兰数学家。——译者

造辅助元素的证明。另一方面，我们是怎样得出关于自然数的那些普适的定理的呢？为了用一个简单的例子来解释这一点，现用完全归纳法来定义一个数论函数 $\varphi(n)$ 如下：

$$(\alpha)\ \varphi(1)=1;\quad (\beta)\ \varphi(n')=(\varphi(n))'。$$

这里，（β）是一个全称命题，由它再加上（α），就可用完全归纳法推论出：一般有 $\varphi(n)=n$。由此可见，定义是普适性的根源，而完全归纳法把它铺展开来。完全归纳法的原则（作为定义或推论的工具）并没有被压进一个公式内，而是具体地应用于每一步，这才是数学的真正的、唯一的动力，才是数学最初的直觉。布劳威尔在这一点上与庞加莱（Poincaré）* 是一致的［见《科学与假设》（*Science et hypothèse*）］。关于数的全称命题的否定是一个存在命题；因为它本身是空的，所以全称命题是不能作否定的。即便全称命题不是讲的一件事，也不能把它解释为无穷多个单独命题的逻辑乘积，而应看作一个假设命题：如果把它用于一个单独的确定的已给数，它就会给出一个确定的命题。这里也没有理由应用排中律原理（即或者所有的数均有性质 A，或存在一个数具有性质 $\sim A$）。按布劳威尔的看法（*Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*，28，1920），对这个原理的信念“是由下面的事实历史性地形成的，首先，古典逻辑是由某确定的有限集合［即通过展示其元素而给出的集合］的子集合之数学抽象而来的；其次，是由于对这个逻辑赋予了与数学无关的先验的（*a priori*）存在性；最后则是在这种虚假的先验性的基础上，又把它无根据地应用于无限集合的数学。”］

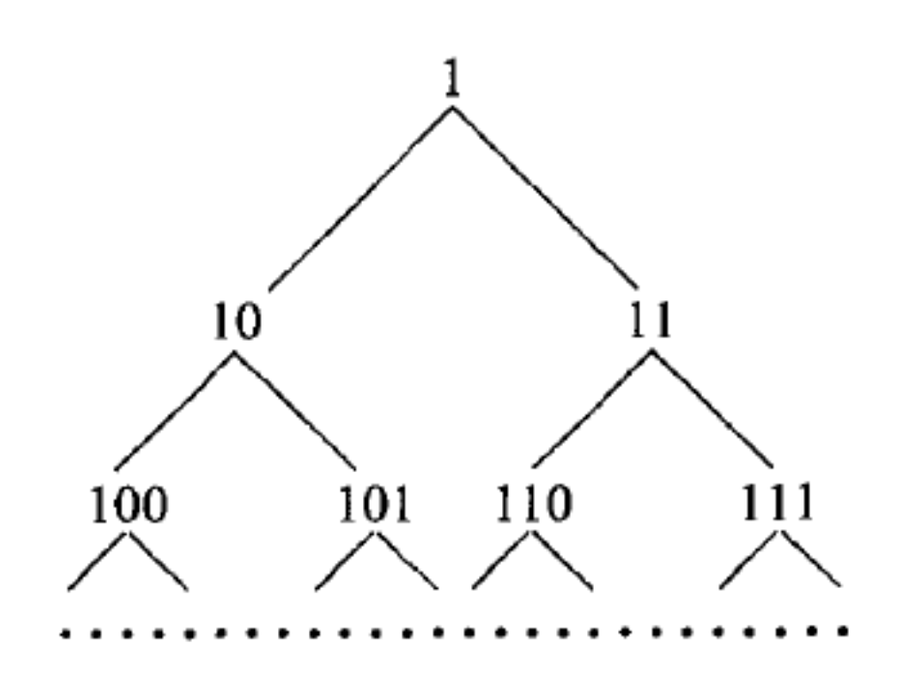
---

* 庞加莱（Jules-Henri Poincaré，1854—1912），法国数学家。——译者

按布劳威尔的分析，连续统中的个别位置，即实数，不能用自然数的集合，而只能用自然数的序列来定义，即用一个规则，使对每个自然数 n 都赋予一个自然数 $\varphi(n)$。（一旦自然数不能作为外延确定的总体来看待，则这两个定义是不等价的。）那么，关于所有实数，而不是所有自然数的论断，即关于一个实变量的所有值的论断，又是怎么来的呢？布劳威尔指出，在传统分析中常见的这类命题，如果正确地解释，都是涉及自然数的全体。如果不是这样，则序列的意义应该改变：它不再是指按某个规则来确定的序列，而是指由一步一步地各用一个自由的选择行动生成的，因而必定处于一种生成状态（*in statu nascendi*）之中。这样“变化着的”选择序列（*werdende Wahlfolge*）表示的是连续统，或者说是“变量”，而序列（想要决定一个序列必须用到以至无限才行）则表示落入连续统中的各个实数。用莱布尼茨的话说，连续统不再是固定元素的总体，而是自由“变化”的媒介。对于处于生成状态的选择序列，自然只能断定如下的性质是否有意义，即当此序列已经生成到某一点时，已经能够（就此性质能否适用于此序列）作出一个或是或非的判定；而当序列再延伸过这个点时，不论序列变成什么情况，都不能再推翻这个判定。

〔按照直觉，布劳威尔看出，连续统的本质特征并不在于元素与集合的关系，而在于部分与整体的关系。连续统可以归入“外延性的整体”的概念下，而胡塞尔指出“这种外延性的整体可以做这样一种肢解，使其各部分就其本性而言，均属于同一个最低层次的种（species），而这个种又是由未肢解的整体决定的”（*Logische Untersuchungen*, second edition, Ⅱ, p. 267）。一维连续统的分割格式，最好是以有限线段的分割为例来说明。它可以对分为左半

(10)和右半(11)，每一半又可再分为左右两半，各为 100、101 与 110、111，依此类推。这个过程可以纯粹组合地加以描述，这样就为开的一维连续统提供了算术的空位形式。这一点必须与具体展示出来的连续统(如空间中的线段)的实现区别开来。在按照这个算术模式将它连续划分时，很清楚，分成的两部分是否一定要有相同长度并无关系，只要分出来的部分足够细以至于可以落入任意可能的精度界限之内即可。(甚至当已给的连续统的本性并没有为比较长度提供基础时，也是可以的。)划分的过程具体做起来(*in concreto*)，只能做到一定点为止，这个过程确定了连续统的一个坐标系，使得可以用二进制小数这种算术语言确定个别的点。因为在具体的连续统中不能确定精度界限，必须设想，在分割的框架下这个过程什么时候都不能以完全的精确性固定下来，而只可能是，在分割继续进行时，以前的分点的精度会提得更高。在分割的第 i 步时的任两个相邻部分可以合起来成一个“第 i 层次的分割区间”。第 i 层次的分割区间是部分地重叠起来的，以至于任一个近似给出的数，只要近似到充分精确的程度，必落在一个第 i 层次分割区间中。这样各个实数将必须定义为*层次渐增的分割区间套的无限序列*。



说两个实数 α 与 β 是相等的，就是指：如果对每一个 n 值，序列 α 的第 n 个区间与序列 β 的第 n 个区间必部分或全体重合；说它

们不相等则是指，如果存在一个数 n 使这两个区间分离。但是因为排中律不能适用于这种命题，所以布劳威尔不承认后一种情况清楚明确地是前者的替代。这种观点很适合直觉的连续统的特性。因为在那里，两个位置的分离性，当这两个位置相向移动时，就会慢慢地、程度模糊地变得无法辨别。按布劳威尔的说法，连续统中只有连续函数。连续统并不是由各部分组成的。所以，如果在构成区间与区间序列时只用正的二进制小数，就可以在连续统内分离出正数的子连续统；但是，说整个连续统是由正连续统、负连续统以及与 0 相重的数构成，即是说每一个数必属于这三个连续统之一，这个说法却不真。于是一个古老的真理（*περὶ ἀτόμων γραμμῶν*）得到了精确的数学表述；关于这个真理亚里士多德是这样说的："运动的东西不能借计数而运动，"他在《物理学》（*Physics*，Bk. Ⅷ，Ch. 8）中又说："如果有人把连续的直线分成两半，他就把一点用作两点了——因为他既把它当作起点又把它当作终点。但是，如果这样分，那么无论是直线还是运动就不能仍是连续的了……虽然连续的事物含有无限多个'一半'，但这不是现实意义上的而是潜能意义上的。"*可以把它与前引的莱布尼茨致伯努利的信比较一下。在伽桑狄（Gassendi）所说的"凡非已被分割者，必不可分割"中，我们又看到了这个原理的现身。

数学在布劳威尔那里得到了最高的直觉清晰性。他的成功是由于对分析的起点进行了自然的发展，而始终保持与直觉的接触，比他的前人所做到的要密切得多。然而，不能否认，在推进到更高、更

---

* 这段译文借用自亚里士多德：《物理学》，张竹明译，商务印书馆，1997 年，255—256 页。文字上稍作了修改。——译者

一般的理论时，经典逻辑的简单规律之不可适用，最终会带来几乎无法忍受的尴尬。数学家们痛苦地看着，他们原以为是由坚固砖石砌就的高楼大厦，大部分却在自己眼前化为烟云。]

参考文献

L. E. J. BROUWER, *Over de grondslagen der wiskunde*, Dissertation, Amsterdam and Leipzig, 1907.

——*Intuitionisme en Formalisme*, Groningen, 1912 (English translation in *Bull. Am. Math. Soc.*, 20 (1913—1914)),

——Zur Begründung der intuitionistischen Mathematik, *Mathematische Annalen*, 93, 95, 96 (1924—1927).

H. WEYL, Über die neue Grundlagenkrise der Mathematik, *Mathematische Zeitschrift*, 10 (1921).

O. BECKER, Beiträge zur phänomenologischen Begründung der Geometrie und ihrer physikalischen Anwendungen, *Husserls Jahrbuch für Philosophie*, 6; especially pp. 398—436, 459—477.

10 符号的数学

难道没有办法摆脱这种激进的后果吗？要下决心让数学作出这样大的牺牲，实在是艰难万分，特别是鉴于一个历史事实：在集合论的分析中，尽管有极度的大胆，使用了最精妙的组合，我们却得到了演绎的完全的确定性，所有的结果都显然互为相容。于是希尔伯特给自己立下一个目标，就是用公理化方法来拯救整个数学。毫无疑问，对于直觉思维的力量，希尔伯特远不相信会如布劳威尔所断言的那样大，他认为直觉思维无法支持数学中的超限的演绎模式，数学中没有一个超限命题可以有根据地认为是显然的物质性的真理(*einsichtige inhaltliche Wahrheiten*)。希尔伯特想要确立的并非传统分析的真理性，而是其相容性。

为此目的，他不得不把数学，包括逻辑，都加以形式化，成为用

符号按固定规则进行的游戏。（所谓符号并非指代表某个事物的符号。）用这些符号作出的数学公式并非从头到尾都一定有物质的解释。除了有意义的命题外，还必须引入“理想的命题”，以便人为地重新确立一些简单逻辑规则的有效性，因为这种有效性，正如布劳威尔所指出的，在向无限性的转移中已经失落了——就像在代数数论中要引入理想数以便强使简单的可除性定理仍然有效。有四种不同的符号，[10]它们正如国际象棋中的兵和马那样，互有区别，而各服从不同的规则。这四种符号就是：常项（如 1）；变项（即空位的符号，x，y，…）；一位或多位的运算；还有整合（integrations）。最重要的一位运算有：～（否定），σ（由一自然数转向下一个）和 N（Na 理解为：a 是一自然数）。最重要的二位运算有→，= 和 ∈。我们把它们都当作运算；特别是 N 是这样的运算，当它作用于 a 时，就生成一个命题：a 是一自然数；= 则是这样的运算，当它作用于 a 和 b 时，生成“a 等于 b”这个命题。为了得到游戏规则的一个方便的一般表述方法，可以统一地规定把运算符号写在它们所要作用于其上的项（或公式）的前面。例如，要写作 $\in\left\langle\begin{matrix}a\\b\end{matrix}\right.$，而不写作 $a \in b$。在整合运算（其后一定只有一个公式）中，最重要的是量词 Σ_x 和 Π_x 以及马上就要讲到的符号 ε_x；它们必以一个（或多个）任意变项为下标。前置的带有下标 x 的整合符号的效果是，紧接着这个符号的公式中所有的变项 x 都成为“受约束”的，从而不可再用什么来代人 x。在数学的发展中，总会要引入新的符号。公式是什么，只能递归地定义：“（α）每个常项与变项本身均为一公式；（β）由一个或两个（或多个）已经构成了的公式可以建造一个新公式如下：先分别写下一个一位或二位（或多位）的运算符号 o，或写下一个（一位）整合符号；随后把上

述的公式按适当的次序写好，且每个公式各占一行，再把每个公式的首位符号用一条短线与 o 相联。”这时，整个公式看起来就像一个符号的家谱图，从这个图上可以无歧义地读出这个公式的“语法结构”，即其递归构造的方式。也可以这样来判断一个符号的树形排列是不是一个公式。

〔把符号都排成一条直线，虽然印刷上比较方便，但必须使用许多括号才能把递归构造唯一地辨识出来。如果问题只是把一个过程的基本特性列出来，我们就使用常见的不太系统化的符号体系。

不必担心在形式构造中，运算会被不加区别地应用于各类事物。如果有谁害怕这么样的一般性，他可以按以下的递归的操作来把“数值的”(numerical)公式和“事实的”(factual)公式区分开：“(α)常项或变项本身以及用 σ 或 ε_x 开头的分式都是数值公式；而以～，→，∨，&，N，=，∈，Σ_x，Π_x 开头的公式则是事实公式。(β)符号 σ 与 N 后必须随着一个数值公式，= 和 ∈ 后则随着两个数值公式，而～，ε_x，Σ_x，Π_x 后必须跟随一个事实公式，→，&，∨ 后则要随两个事实公式。”对下面讲的公理规则与三段论的推论规则，也要加上类似的限制。

若 $A(x)$(以下都这样记)是一个任意的只包含一个“自由”变项 x 的公式(所谓自由即指在它出现时不得受约束)，而 b 是一个“闭公式”(即不含自由变项的公式)，则当 x 为自由(即不受约束)时，可以用 b 代入 A 中的 x。这种代入的结果，迄今只是直觉地加以描述的，仍是一个公式；它简记为符号 $A(b)$。[11]

任何证明的起点都是用作公理的公式。然而在这里不是来陈述

各个公理，而是来讲一讲构成公理的一般规则。首先是有限逻辑的公理法则，例如

$$c \rightarrow (b \rightarrow c)。$$

它说的是，任取两个没有自由变项的公式 b 与 c，都可以由它们来作出公式 $c \rightarrow (b \rightarrow c)$；这个结果可以作为一个公理来用。其次有两个关于相等的公理规则，它们建立了逻辑与算术的联系：

$$b = b$$

$$(b = c) \rightarrow (A(b) \rightarrow A(c))。$$

第三，我们还有专门的具有有限特性的算术法则。其中出现了常项1，它是所有构造的实质性的起点：

$$N1$$

$$Nb \rightarrow N(\sigma b)$$

$$(\sigma b = \sigma c) \rightarrow (b = c)$$

$$\sim(\sigma b = 1)。]$$

下一步我们进到超限部分。如果我们承认下面的二择一（而布劳威尔是否定它的），即或者存在一个诚实的人，或者所有的人都是不诚实的，这时肯定可以举出阿里斯提得斯（Aristides）* 而且可以这样说：如果有诚实的人的话，那么阿里斯提得斯就是一个。因为，如果在第一种情况下，我们就可以选择阿里斯提得斯为一个诚实的人；而在第二种情况下，选什么人都行。因为不仅就诚实这一性质，而且对于每一个性质都能构造出一个阿里斯提得斯。也就是说，对于

---

* 阿里斯提得斯是公元前5世纪的希腊政治家。据说雅典的人们投票决定是否放逐阿里斯提得斯。有一个不认识阿里斯提得斯的人请他为自己写了赞成放逐的一票，而阿里斯提得斯也这样做了。因此，他是一个非常诚实的人。——译者

每一个含有一个自由变项 x 的公式 A，我们发明了一个虚拟的神奇的自动机，当对它输入性质 A 时，它都会产生出一个具有这种性质的个体 $\varepsilon_x A$，只要具有这种性质的个体是存在的。 ε_x 是(is)一个整合符号。（我们既能任性地容忍一种要命的习惯，使用同一个字“is”既作为连词又表示存在，也同样使用同一个符号 ε 表示两者，但在存在性的 ε 下面加上一个变项而得 ε_x，就避免了这种混淆。）如果真正有这样一个自动机，则自然摆脱了由于“某些”和“所有”所造成的困难。 当然，相信确有此等自动机存在，全属无稽之谈。然而数学的进展，似乎真有这么个东西存在一样。 这也表述为一个公理规则，而如果应用这个规则并不导致矛盾，则在形式化的数学中应用它也就是合法的了。 这样，我们就有了以下的超限逻辑公理规则：

$$A(b) \to \Sigma_x A(x); \qquad \Pi_x A(x) \to A(b);$$

$$\Sigma_x A(x) \to A(\varepsilon_x A); \qquad A(\varepsilon_x(\sim A)) \to \Pi_x A(x)。$$

第二行中的公式我们在第 3 节中略去了；它们能让我们从 Σ_x 中推论出一些什么，又可从另一些公式推论出 Π_x 来。 当然，它们还不能起那个虚拟的自动机的作用；因为，给定一个公式 A 后，它们不能确定 $\varepsilon_x A$ 究竟是什么。 只在一些特殊情况下，才能从公理开始得出诸如 $\varepsilon_x A = 1$ 这样的公式，作为证明的最终公式。

[在算术公理中，完全归纳原理尚付阙如。 它可以解释为一个超限的算术公理规则，表明这样一个事实：如果某个性质为 1 所具备，而且可以从 x “传给” σx，则它必是每个任意数的性质。 但是，正如我们已知的，如果允许对每个性质 A 都引入一个新的客体 y，即相

应的集合，使命题“x 是 y 的元素”就等价于 $A(x)$之逻辑上的有效(subsistence)，于是这个原理也就多余了。如果我们把这个假设也陈述为一条公理规则，则应用它不可避免地会导致矛盾——这件事可说是无限制地进行客体化的罚金，然而，为了分析之需，只要限制变项 x 为自然数就足够了，于是我们可以提出下面这个比较窄的超限的集合论法则：

(Ⅰ). $$\Sigma_y \Pi_x \{Nx \rightarrow ((x \in y) \rightleftarrows A(x))\},$$

这里 $B \rightleftarrows C$ 乃是$(B \rightarrow C)\&(C \rightarrow B)$的缩写。为了把分析构造出来，加上如下的确定性公理(axiom of definiteness)似乎更好，但非必不可少；根据这个公理，自然数的两个集合如果含有相同元素则必相等：

$$\Pi_x \{Nx \rightarrow ((x \in b) \rightleftarrows (x \in c)\} \rightarrow (b = c)。]$$

一个数学证明，首先是按已给的规则去制造公理——这些公理中不含有自由变项，其次是对这些公理和已经得出的公式应用三段论的推理规则得出更新的公式。我们重复一下这个规则(参见第 3 节)：已给两个公式 b 和 $b \rightarrow c$，在第二个公式中 b 要处在→的左侧，这样即可前进到公式 c。不可能事先就看到，这种游戏的结果会得出什么样的可证明的公式，主要是因为三段论是由两个公式 b 和 $b \rightarrow c$ 得出新公式 c 的，而 c 比前提中的第二个更短，所以在这场证明游戏中，缩短与加长互换了。

至此一切都是游戏而不是知识。但是现在游戏成了研究的主题，希尔伯特把它称为元数学(metamathematics)，其目的在于要确定这种游戏永不导致矛盾。如果真玩两个证明游戏，第一次以公式 b 告终而另一次则以其反命题$\sim b$ 告终，这就出现了矛盾。只是为

了悟出这一点，希尔伯特才要求用有限的、实质性的、有意义的思维模式，而这是不能压进“公理”之中的，特别是，这种实质性的思维要用到完全归纳法这种直觉推论，比如说我们在第 4 节曾得出如下结论：如果棋没有下错，就决不会在棋盘上同时出现 10 个同色的“后”，使用的就是这种推论。

〔初等命题演算中有一个法则，它或被列为一个公理规则，或很容易由公理规则导出，这就是

(1) $$\sim b \rightarrow (b \rightarrow c),$$

其中 b 与 c 是任意的闭公式。令 c 是任意一个这样的公式，并且假设同时证得了某个公式 b 与 $\sim b$。这时，由(1)开始两次应用三段论，则第一次得出 $b \rightarrow c$，第二次得出 c。因此，只要知道了某个形式化是不相容的，则任意闭公式 c 都可以证出来，这样一来证明游戏就没有意义了。也可以这样定义相容性，即公式 $\sim(1 = 1)$ 是不可证明的。〕

公理系统可以一步步地扩张，但是必须要证明，在扩张过程中决不会推翻相容性。特别是，定义也能以新公理规则的形式引入，例如

$$\sigma 1 = 2, \quad \sigma(\sigma b) = \sigma_2 b。$$

这特别适用于 $b + c$，$b \cdot c$ 和其他算术运算的递归定义。可以一劳永逸地证明，如果原来就有相容性，则在添加了这样一类公理后，不管是代表简单定义的还是递归定义的公理，仍有相容性。[12]

关于自然数，希尔伯特的构造方法与布劳威尔的不同，并不需要“直至无穷的可能性”，而第 6 节中把它描述为构造性认知的第三

步。对于希尔伯特而言，10^{12}是一个超限的符号，它并不表示一个形如 $\sigma\sigma\cdots\sigma 1$ 的数。几何学和物理学是可以加进来的，只要它们已经严格地公理化。也仅就此范围而言，希尔伯特甚至相信（*Axiomatisches Denken*，1917），“科学思维的每一个可能的主题，只要它已成熟得能成为一种理论，就必然会落入公理化方法之中，从而间接地要由数学支配其命运。”[13]

〔只要将超限的成分排除不加考虑，则相容性的证明可以用公式的“赋值”而轻易实现，每一个公式都可通过一个精确描述的递归过程，按其来源而赋以值 T（真）或 F（假），而使得有限的公理显然为 T 值，且第 3 节讲的赋值规则对于逻辑组合依然成立。因此，只要排除了超限性，三段论从而还有演绎法，也就都没有力量了，只有在结论 c 之真假已经判定后，才能判定 $b \rightarrow c$ 这一前提之为真或假。

如把超限的公理规则也考虑进来，则相容性的证明再也不能按以上的路线来实行了。它会带来一个事实，即对真与假的洞察也就随之停止了。在希尔伯特和贝尔奈斯发展了更间接的方法以后，阿克曼（W. Ackermann）* 和冯·诺伊曼（J. von Neumann）在 1926 年似乎成功地确立了“算术”的相容性，即一个包括了超限逻辑公理和完全归纳原则的公理系统，但是排除了把谓词转化为集合的那个危险的公理（Ⅰ）。这个结果可以为作者在《论连续统》一书中所取的观点作辩护，即可以安全地把自然数的序列作为存在的事物之封闭的总体来看待。要想就“自然数的一切可能的集合的总体”来论证这一观

* 阿克曼（Wilhelm Ackermann，1896—1962），德国逻辑学家。——译者

点，就须把相容性证明推广到集合论的公理规则（Ⅰ）；目前，我们还看不出如何做到这一点。甚至对于算术，刚才提到的相容性后来发现了一个严重的漏洞。附录A中将要讲到这个问题在1926年以后的发展，以及哥德尔（K. Gödel）* 在1931年的一项重要发现所带来的灾难。但是，希尔伯特纲领，不论其最终价值如何，他的这个勇敢的进取心有一个功绩：它向我们揭示了数学的高度复杂而棘手的逻辑结构，从逻辑上向深处追溯时有如迷宫，它生成了许多循环，乍一看去，实在无法推测会不会导致炫目的矛盾。

以上所说的符号主义，其实显然是在一种精致的形式下再次从事莱布尼茨本想用的“万能算学”（general characteristic）与组合的艺术来完成的工作。但在这里与我们对抗的，是否还有老分析（old analysis）那个冷血的魔鬼以外的东西？希尔伯特的数学可能是一个用公式来玩的漂亮的游戏，甚至比下棋还有趣；但是，既然认为这些公式没有物质的意义，而要表达直觉的真理又需要这种意义，那么它与人的认知有什么关系呢？按希尔伯特的说法，数学研究的主题只是具体的符号本身。所以，布劳威尔说的下面这段话也就没有讽刺的意思了（*Intuitionisme en formalisme*, p. 7）**：“数学的精确性在何处？形式主义者说：在纸上。”人何以恰好要确立这些规则？讲相容性的形式主义者无法回答。所以布劳威尔想，人必须回到哲学、心理学或人类学，才能“获得真正理解的欣喜”（lustgevoel van echtheitsovertuiging），才能有根据相信，自己选取的公理比之其他公

---

* 哥德尔（Kurt Gödel，1906—1978），原籍奥地利的美国数学家。——译者

** 这篇文章是布劳威尔1912年10月14日在阿姆斯特丹大学的就职演说，本书英文本直接引用了其荷兰文稿原文。这个就职演说后由A. Dresden译为英文发表在Bulletin of AMS 1913，81—96页上，其后又转载于P. Benacerraf and H. Putnam，*Philosophy of Mathematics*，*Selected Readings*，Prentice-Hall，1964，66—77页。中文译本的翻译根据的就是这个英译本。下一节开始时又引用了布劳威尔的另一段话，也出自此文。——译者

理，更适于投射到经验世界。]

上面这段话提醒我们，数学的功能在于为各门自然科学服务。然而，理论物理学的命题肯定没有布劳威尔所要求于数学命题的那种特质，即每个命题都必须具有其可以直觉地理解的意义。把理论物理学与经验对照，受到检验的只是这个体系的总体。看来我们必须仔细地把对于现象的知识或洞察——例如在以下命题中："这片树叶(这是我在"感知"这个现时的行动中得到的)是绿的(这也是在同一感知中得到的)"——与理论构造区别开来。知识给出了真理，它的器官是最广泛意义下的"眼见"(seeing)，它虽然也会错，但基本上是确定而不容变更的。理论构造似乎只受到一个可以严格表述的理性原则的约束，即协调性(concordance)原则(与第17节，第151页比较)，而在数学中，既然完全没有触及感觉素材的领域，这种协调性就化成了相容性；它的器官是创造性的想象。在物理学方面，我们将必须更详细地讨论，除了协调性以外，还有哪些决定的因素。在这里，直觉的真理虽然不是最终的判据，肯定不是无关紧要的。希尔伯特本人表示了以下的意见(Über das Unendliche，*Mathematische Annalen*，95，p. 190)，"给无限留下的功能……就只是一个观念(idea)——如果我们像康德那样，把观念理解为一种理性(*Vernunftbegriff*)，它超越所有的经验，而在总体性意义下补充了具体性。"但是这个问题可能只有在指出下面这一点时才能得到解决，即心(mind)的生命基本上具有历史性，而我自己的存在只是这个生命整合的(integral)部分，而非自治的(autonomous)部分。它是光明，又是黑暗；是偶然，又是必然；是约束，又是自由；不能想象可以从它分离出世界的某种最终形式的符号结构。

参考文献

关于莱布尼茨，可参看第3节末的参考文献。

D. HILBERT and P. BERNAYS, *Grundlagen der Mathematik*, 2 Vols., Berlin, 1934—1939.

11 数学认知的特性

〔从不可追溯的古代起，数学就被看作是关于量的科学，或者是关于空间与数的科学。（虽然我们已可在莱布尼茨那里找到这个定义，但是他这样划分出来的 *mathesis* 对于他，只是更广泛的组合艺术的一部分。）今天在考虑射影几何和群论这样一些领域时，这种观点就显得太狭隘了。所以我们不必为精确地确定“定量的”这个词究竟是什么意思而特别操心。事实上，数学自身的发展也对量究竟是否一个适当确定的、哲学上重要的范畴，引起了疑问。几何学，就其关心的是现实空间而言，已不被看作纯粹数学的一部分；它和力学、物理学一样，属于数学的应用。在超复数的一般算术的影响下，后来又加上集合论与符号逻辑的公理化研究，使数学与逻辑的区分，也逐步模糊了。皮尔士(B. Peirce)*在1870年宣称，“数学就是得出必然结论的科学。”在胡塞尔的《逻辑研究》(*Logische Untersuchungen*, Vol. I, *Die Idee der reinen Logik*)的第11章以及罗素的《数学哲学引论》(*Introduction to Mathematical Philosophy*)的最后一章，都详细地讨论了“数学或逻辑”的定义。

集合论的二律背反造成的危机——不论是对布劳威尔的激进直觉主义的追随者，还是对希尔伯特的符号主义的追随者——再一次把数学所特有的特性更尖锐地凸现出来了。布劳威尔像柏拉图一样，把

* 皮尔士(Benjamin Peirce, 1809—1880)，美国数学家。——译者

“二一性”（two-oneness）* 看作是数学思维的根。“这种新直觉主义把生命的契机之分裂为定性地互相区别的部分，后来又重新联合起来，但在时间上则仍为分离的，把这一点看作是人类心智（intellect）的基本现象，再从此把它的感性内容抽象为数学思维的基本现象，即单纯的‘二一性’。”我们已经看到一维连续统是来自一而再的“一变二”（one becoming two）[14]（请与 67 页上的图比较）。整数之写为二进制系统也是这样来的。从斯滕泽尔（Stenzel）的《柏拉图与亚里士多德的数与形》（*Zahl und Gestalt bei Plato und Aristoteles*，1924）一书来看，柏拉图可能是把他的数看作是按此格式排列的；但是因为这里的“一变二”造成越来越大的数，而我们在连续统中则是下降为越来越小的部分，他就把这种“二性”（two-ness）称为“大一小性”（great-and-small）。（但不同的诠释请参看 H. Cherniss，*The Riddle of the Early Academy*，Univ. of Calif. Press，1945。）对于整数，它们的自然次序更为适用，亚里士多德正是以此来反对柏拉图的数的概念的（*Metaphysics* A6 and M6）。但是它也可以由“二一性”产生出来如下：从一个未被分割的整体开始，先分出一个元素（即 1），并保留作单位之用，而剩下未被分割的其余部分。从后者我们再分出一个元素（2）以及一个未被分割的其余部分，并循此以往。（这一点可以形象地看作从一条射线连续地砍下一小段；时间则指向未来而无终结，但是每当我们停下来，就会看到又经过了一段时间。）在此格式中，并不需要对每一部分都作进一步的分割，而只分割余部。〕

---

* 这里讲到的“二一性”以及下面讲到的“一变二”（Da wurde Eins zu Zwei）都是来自西方哲学的深邃思想。正如本书作者在前面讲到的那样，必须“回到哲学、心理学或人类学……才能获得真正的理解”。想用几个中文字就把它们的含义表述出来，是译者不敢奢求的事，因此采取“逐字硬译”的方法，并写出原文，而没有用人们可能会联想到的中文词句译出，以免以文害意。对尼采的一首诗的注释也是这样。——译者

完全归纳法与这种把数学思维过程最终归结为“二一性”的价值没有关系。从直觉主义的观点看来，完全归纳法看来是防止了数学成为一个巨大的重言式(tautology)，而且对数学的论断赋予了一种综合的、非分析的(non-analytic)特性。完全归纳过程，自始至终是一个决定性的特点。如果说初看起来它在初等几何学中(特别是在初等射影几何学中)没有起作用，这是因为对于点朴素地使用了“若干”与“全部”。按直觉主义的观点，这是不容许的；几何学构造的域是一个连续统，而只有按上面的做法用一个分割的网织成连续统以后，才能对它作精确的数学处理(见第 15 节)。

从形式主义的观点看来，公理的超限部分取代了完全归纳法，而在数学自身打下了烙印。数学并不是自明的真理，而只是大胆的理论构造，这就与分析的自明性完全相反。元数学的实质性推理，恰好相反，是随着证明的步骤，用一种直觉的推理，从 n 推进到 $n+1$，而处理的是一种“外逻辑的(extra-logical)具体的对象，可以完全不顾其各个部分。它们的展现、分化、相继或协调，是与这个对象一起，直觉地给予我们的，是一种既不能够也无必要化约为其他的东西”(希尔伯特)。这样一来，希尔伯特就与康德一致了——附带也要提到，康德也强调在代数中用具体的记号所作的符号构造(*Critique of Pure Reason*, ed. Max Müller, 576 页，即 1781 年第 1 版的 717 页)。希尔伯特说：“数学具有安全的独立于逻辑的内容，所以永远不可能仅仅基于逻辑”(*Über das Unendliche*, p. 171)。

[然而应该承认，按照康德对“分析”和“综合”两词的用法，至少单个方程如 $3+2=5$ 应该称为分析的；因为莱布尼茨是这样解释的，它是由以下的定义

$$3+1=4,\ 4+1=5,\ (a+1)+1=a+2,$$

合逻辑地推出来的，所以也就包含于数 3、5 和运算 + 2 的“概念”之内。除此而外，康德还给这些记号联系上什么意义呢？

数学无疑是先验的，它并不如斯图亚特·穆勒(John Stuart Mill)力求使我们相信的那样，是基于经验的，即只有反复观察数值的例子，才能使得如下的算术定理如

$$m+n=n+m$$

貌似为真的程度越来越大，使它装扮成是对任意数都成立的。]

数学的一个突出的特点，也是使外行望而却步的，是它大量使用符号。直觉主义者并不以此为一本质的特性，他只把符号看作一种互相交流的工具，一种通过把它们固定下来而帮助记忆的工具，他对口头或书面语言也是这样看的。形式主义者则不然。他把数学看成完全是由符号构成的，它们没有任何可用感觉的或心智的直觉来验证的内容，它们是按固定的规则来操作的。语言则不然——例如在描述代人或实际的推论过程中，还有在元数学的推理中——它的作用是作为一种传递交流有意义的思维过程的模式与行动的手段。（交流永远存在难免有误解的危险。）“先是用几何图形，后来则用数学公式”，施派泽（A. Speiser）说（*Klassische Stücke der Mathematik*, 1925, p. 148），“数学使自己摆脱了语言；如果谁知道为此付出了多大精力以及一再出现的令人惊奇的成就，就不会不感到，今天的数学，在精神世界这个特殊领域中更为有效，而非当代语言所处的可悲的衰退可比，甚至连音乐也无法相提并论。”康德在他的超验方法论（*Critique of Pure Reason*, Part Ⅱ）中看到，数学的本质在于构造，

“哲学知识是理性得自概念的知识，而数学知识则是理性得自概念的构造的知识”*（ed. Müller，572 页，即 1781 年第 1 版 713 页）。他以三角形内角和定理为例，说明几何定理的发现如何不是来自概念的分析，而是来自合适的辅助点线的构造。他对构造过程的描述，其细节今天已不能令人满意。然而，有一点总是真的，即在证明数学定理时，几乎总是必须远远地超越它的直接内容。其理由就在于我们前已强调过的一个事实，即按三段论的推理规则进行证明的过程，并非单向进行的构造，而总是不断地在增加和去除一点是什么之间变来变去——公式则不同，制造一个公式总是沿同一个方向进行的，所以构成它的各个部分总保存在其最终的形式中。这种情况，再加上我在第 6 节中列举的 1、2、3 诸点（见 47 页），在我看来，已经对构造与直接的感受（pure reflection）的对照作了足够的刻画。

近年来数学基础的研究所经历过的阶段，相应于三种可能的基本的认识论的态度。集合论的途径是朴素实在论的阶段，它没有觉察到直接给出的东西向超验的东西的过渡。布劳威尔代表唯心论，他要求把所有的真理都化为由直觉给定的。最后，在公理化形式主义中，意识企图“跳过自己的影子”，把给定的素材统统甩到一边，以表达超验的东西——但是这怎么做得到呢？只有使用符号。笛卡儿以后的西方哲学，基本上依从唯心论的认识论观点；然而它一再地在形而上学里寻求达到绝对的领域，康德想一劳永逸地发出闪电惊雷，继之而起的有费希特（Fichte）、谢林（Schelling）和黑格尔（Hegel）。不能否认，有一种从单纯的现象观点来看是不可理解的理论意愿一直在我们

---

* 这里的译文借自《纯粹理性批判》，邓晓芒、杨祖陶译，人民出版社，2004 年，553 页，本书译者稍有改动。——译者

中间存在，就是力求达到大一统。 数学在这一点上表现得特别清楚；但它也告诉我们，这个意愿只在一个条件下才可实现，即我们必须只满足于符号，而摒弃一种神秘的错误，即盼望某种超验的东西终将降临到我们的直觉的光辉之中。 迄今为止，只有在数学与物理学中，符号理论的构造获得如此坚固的地位，使所有对于数学与物理学思想开放的人不得不接受它。 这些学科的哲学意义首先就基于这一事实。

〔如果要用一句简短的话概括地刻画数学生命的中心，那就不妨说：数学是关于无限的科学。 希腊人的伟大成就在于，他们使有限与无限的对立在分析实在上富有成果。 本书一直试图指出，不论是过去还是现在，这个紧张的对立——以及克服这种对立的种种企图——对于理论知识的历史重要性。 “无限，同别的问题都不一样，一直对心智有一种激励和富有成果的影响。 但是无限也比任何其他问题更需要澄清”（Hilbert，*Über das Unendliche*）。

关于今天数学研究所关心的各种焦点问题，读者可以参阅库朗（Courant）和罗宾斯（Robbins）的《什么是数学？》（*What is Mathematics?*）。〕

参考文献

I. KANT, *Kritik der reinen Vernunft*。 关于康德的数学哲学的彻底讨论，可见 L. COUTURAT in *Revue de métaph. et mor.*, May 1904。

H. POINCARÉ, *La science et l'hypothèse*, Paris; many editions.

R. COURANT and H. ROBBINS, *What is Mathematics?*, New York, 1941.

L. E. J. BROUWER, Mathematik, Wissenschaft und Sprache, *Monatshefte der Mathematik und Physik* 36, 1929, pp. 153—164.

H. WEYL, *The Mathematical Way of Thinking*, Univ. Penn. Bicenten. Conf. 1940; also *Science* 92, 1940, pp. 437—446.

第三章　几何学

再没有什么如同空间问题那样，数学、自然科学和哲学在其中可以如此密切地互相渗透。本章将简要地概述讨论这个问题的前提是怎样从数学研究中出现的。

12　非欧几何，解析几何，高维几何，仿射几何，射影几何；色彩空间

〔关于非欧几何，除了在第 4 节中就公理化讲到的东西以外，再不必增加什么了。如果所有其他公理都不动，就有三种可能性：设在平面上给定了一点 P 和一直线 l，而 P 不在 l 上，则在此平面上或者有无穷多条直线经过 P 但与 l 不相交，或者只有一条，或者一条也没有（自克莱因以来，这三种情况分别称为“双曲的”、“抛物的”与“椭圆的”）*。在这三种情况下，三角形的内角和分别小于、等于

* 依其希腊文本意，这三种情况分别称为“超曲线”、“齐曲线”和“亏曲线”。——译者

和大于 180°。 最后一种可能性一直到 19 世纪中叶才由黎曼指出，但是只有把次序公理加以修正，使得直线不再是开的，而是封闭的曲线后，才存在这种可能性。 平面椭圆几何就是在欧氏空间的球面上成立的几何学，只不过对径点应该视为同一点。 或者换一个说法，平面 p 上所有几何名词除了“全等”以外都仍保留其欧氏意义，全等的概念要这样修改：p 上的两个图形被认为是“全等”的，是指取 p 外一点O，把这两个图形都投影到以 O 为中心的球面上去，它们的投影在通常的意义下全等。 这时，对此平面要加以扩充，把“无穷远点”也加进去，无穷远点的投影射线正是过 O 而与 p 平行的直线。 p 上的把“全等”图形互相映射的映射，可以不必参照空间，而用具有某种不变性质的共线性变换来刻画，这种不变性质与鲍耶—罗巴切夫斯基几何的克莱因模型中所常见的是很相似的。 这就为不仅在平面上而且也在空间发展椭圆几何打开了道路。 要揭示这三种几何的真实关系，最好是用非度量的射影空间，并在其中赋予“凯莱度量”(Cayley metric)。 按照这个度量的基础所用的绝对圆锥截线是哪一种，就可以得出这三种度量几何的某一种。 克莱因把他的这种构造模型的方法解释为对射影空间附以罗巴切夫斯基度量，而不是用欧氏度量空间来构造模型。]

解析几何把每个几何问题都化为代数问题。 这就预设了，数的概念在包括进了分数和无理数后，已经非常广泛，不但适用于计数，而且适用于量度。 但是希腊人在这一步前面畏葸不前了，因为他们对待无理数的发现很是认真。[15] 后古典时代的西方文明就不如希腊人那样审慎，而再次回到苏美尔人、印度人和阿拉伯人的老代数传统。 只是在空间的科学通过笛卡儿的《几何学》(*Géométrie*,

1637)一书而从属于代数演算之后，他们才在几何学中获得了独立的成就。

[今天，解析几何最好的讲法可能是按照格拉斯曼(Grassmann)*在《扩张理论》(*Ausdehnungslehre*)一书中的程序用向量概念来讲。向量演算是一种计算的方法，不过计算的对象不是数，而是简单的几何实体。莱布尼茨就已经要求沿这样的途径来处理几何学了，而且还在他的著作《位置分析》(*De analisi situs*)和他对几何算学(geometrical characteristic)的设计(*Mathematische Schriften*, V, p. 178, and II, p. 20)中部分地实施了，这种设计则是在他的“普遍特征”(universal characteristic)的框架之内的。空间的平移(即平行移动)称为向量。一个点 A 将被平移 $\vec{a}$ 映为另一点 $A\vec{a}=B$，就是“将 $\vec{a}$ 放在 A 点时得到的终点”。反之，若有空间中任意两点 A 与 B，必有唯一的平移 $\vec{a}$ 存在映 A 为 B。所有平移中有一个“单位元”使所有的点 A 都不动，而被它映到自身；这就是向量 0。平移可以组合，构成一个群；先作一个平移 $\vec{a}$，再继之作一个平移 $\vec{b}$，等于作了一个平移，即合平移 $\vec{a}+\vec{b}$。数的概念是通过重复一个平移 $\vec{a}$ 来实现的(即把 $\vec{a}$ 加到其自身上面任意多次；见第 5 节开头部分)。从一点 A 开始，累次重复同一步骤 $\vec{a}$，可得到一条直线的骨架，即从 A 开始的一串等距的点。这条线也可以说是连续地累积施行一个无穷小平移的结果。通过分割(像第 5 节那样)，我们可以对 $\vec{a}$ 不仅作其整数 λ 倍，而且也可以作其分数 λ 倍，最后再按连续性的要求除去 λ 为有理数的限制。这样就得到几何学(准确些说是仿射几何学，

* 格拉斯曼(Hermann Günther Grassmann, 1809—1877)，德国数学家。——译者

在其中唯有平行的线段才能互相比较)的一个公理化构造，那里预先假设了已完全形成了的实数概念——关于连续性的全部分析都可以置于其中——而且这个几何仅以“点”和“向量”为基本的几何概念。这些对象可以用三种基本的运算联系起来：(1)由两向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 可产生第三个向量 $\vec{a}+\vec{b}$；(2)由一个数 λ 和一个向量 $\vec{a}$ 可产生向量 $\lambda\vec{a}$；(3)由一点 A 和一个向量 $\vec{a}$ 可产生另一个点 $A\vec{a}$。关于这些运算的公理成为一个公理系统，即从逻辑方面来看，也是一个远比欧几里得和希尔伯特的纯几何公理透彻而且整齐的结构。其实，正如第4节中即已指出的，它们无非决定了一个线性代数运作的领域。它们在一方面是直觉给出的东西与另一方面是理性的东西之间建立了一种奇妙的谐和。此外，最简单的衍生的几何概念，其中就有直线与平面，在这里正对应着从逻辑角度来看最为自然出现的东西。从两个已知向量 $\vec{e}_1$ 和 $\vec{e}_2$，按公式

$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 \tag{1}$$

作出的所有向量 $\vec{x}$（其中 x_1 和 x_2 是任意数值系数），形成一个“2维的线性向量流形”(linear vector manifold of dimension 2)*。为了使表达式(1)成为唯一，这里假设 $\vec{e}_1$ 和 $\vec{e}_2$ 为线性无关的，即只当 x_1 与 x_2 二者均为0时，(1)式右方才能给出0。如果把所有这些向量都放在一个固定起点 O 处，则终点 $O\vec{x} = P$ 形成一个“2维的线性点流形”(linear point manifold of dimension 2)，即平面。坐标系由点 O 和两个线性无关向量 $\vec{e}_1$ 和 $\vec{e}_2$ 构成。点 P 相对于此坐标系，由其

---

* 流形(manifold)在第一章中曾借用日文译法译为“多样体”，因为只取其含义“多种多样”。“流形”一词在数学中有专门含义。现在的“线性向量流形”(linear vector manifold)与“线性点流形”(linear point manifold)中，manifold 一词确指当代数学中有特定结构的流形。因此又用了“流形”一词。下同。——译者

“坐标”x_1与x_2表示。同理，可以引入1，2，3，…维的线性向量流形和线性点流形(直线，平面，……)。]

直到这里，我们才见到了维数概念。在现实空间中我们不会有多于三维；只存在3个线性无关向量，而没有更多的。如果按我们透彻的合规律性的公理系统来看，维数为3实在是一个偶然的特点。我们完全可以用任意维数n来取代3，即假设有n个但没有更多的线性无关向量。这时，空间的坐标系将由一个起点O和n个这样的向量构成。当$n=1, 2, 3$时，我们就分别得到直线的、平面的和立体的几何。只有在n维几何的基础上，维数问题才是有意义的，而以上的形式化正是以使人信服的方式引导到n维几何。维数问题的意义就在于，可以问：$n=3$这个特例比之其他情况，又有什么内在的特殊之处呢？如果是上帝在创造世界时就把空间做成了三维的，那么，能否揭示这种特殊之处来对上帝的所作所为做出一个“合理的”解释呢？

[如果把所有的向量都放在一个固定的起点处，则向量的几何就与赋予一个绝对中心O的点空间之(仿射)几何学完全一致了。如果两个非零向量一个是由另一个乘以倍数而得，把它们看成同一的元素，这元素就是一条过O的射线，则n维仿射几何学就变成了($n-1$)维射影几何学(即过O的射线族之几何学)。

在有色光的可知觉的色彩特性的空间中，射影几何学是成立的。(客观的物理彩色的流形有无穷多维；正常的非色盲的眼睛由它生成一个二维“射影”，物理上不同的彩色可以给出相同的彩色印象，这样就成了一个巨大的流形。)如果把两个具有确定强度的彩色组合起来(即混合起来)，其结果是一个新的有确定强度的确定的彩色。同

一种彩色的不同强度可以互相比较，所以在选定了强度单位以后，各个强度就可以用一个数来度量(同一彩色的单位强度一再组合，就给出强度的尺度，而彩色品质并未改变)。但另一方面，两种不同的彩色品质的强度就不能互相比较了。因此，不同强度的不同品质的彩色符合向量几何学的公理，这里加法解释为混合；所以射影几何学就可以用于彩色品质。三原色 A，B，C 混合的结果就构成“三角形” ABC。由于三原色就足以混合成所有彩色，所以彩色空间就成了二维的，至少整个彩色之域是可以由这些彩色三角形构成的。真实的彩色只填满整个射影平面受限制的一块。但是它可以如第 2 节那样，通过引入理想点而拓展到整个射影平面；必须选原色 A，B，C 为理想彩色才能使真实的彩色之域恰好完全在三角形 ABC 内。在射影彩色平面上，纯粹光谱上的彩色位于一条曲线上，它的两个端点会非常接近而以紫色相连接。除了通常的空间以外，还存在由直觉给定的实体的很不相同的领域，即彩色，它构成一个可用几何处理的连续统。从认识论的角度来看，这是很有意思的。]

参考文献

F. KLEIN, Über die sogennante nicht-euklidische Geometrie, *Gesammelte mathematische Abhandlungen*, I, Berlin, 1921, pp. 254—305, 311—350.

O. VEBLEN and J. W. YOUNG, *Projective Geometry*, 2 Vols., New York, 1910—1918.

H. WEYL, *Raum Zeit Materie*, fifth edition, Berlin, 1923; Sections 1—4.

H. VON HELMHOLTZ, *Handbuch der physiologischen Optik*, 3 Vols., third edition, Hamburg and Leipzig, 1909—1911; Section 20.

13 相对性问题

我们的知识服从客体性(objectivity)的规范。相信欧氏几何的人

会说，空间中所有的点作为客体都是相似的，而所有可能的方向也是这样。然而，牛顿似乎曾经以为，空间有一个绝对的中心。伊壁鸠鲁(Epicurus)肯定是认为，垂直的方向作为客体是可以与其他方向区别开的。他给出的理由是，所有物体，如果任其自处，都会向这同一个方向运动。所以说一条直线是垂直的，这句话是有缺省的或者是不完全的，在它的背后有一个完全的说法大概应该是这样的：这条直线在 P 点的方向是重力方向。这样一来，重力场(它是依赖于世界的物质内涵的)，就作为一个偶然的因素，进入了这一完全的命题。还有，一个单独展示出来的点 P，我们用一个手指点它一下，表示指示的动作，以下的字眼如“我”、“这里”、“现在”、“这个”等等，就表示了这种指示。只有在我们能够断定这个完全命题的真理性不受偶然因素和个别展示的东西(这里指重力场和 P 点)之自由变动的影响，我们才有权从命题中略去它们，而宣称其有客体性意义。一旦认识到重力场的方向在普林斯顿和加尔各答是不同的，而且当物质重新分布时它也可能改变，伊壁鸠鲁的信念就被动摇了。我们没有宣称给出了可以机械地应用的判据，而我们的描述指出了以下的基本事实：客体性是一个仅需以经验为基础即可判定的问题。这也就说明了，在知识的历史上常犯的错误，就是误将并不具有客体性的命题当作具有客体性的。这种错误有两个主要的来源：(1)忽略了某些环境因素，命题的意义虽然依赖于它们，却没有明说；(2)虽然认识到这种因素，却没有足够细心地研究过当这些因素改变时，命题的真理性会不会受影响。这样也就不必奇怪，在科学历史的进程中有好几个阶段，本来认为具有客体性的领域缩小了。

虽然客体性的哲学问题不容易以一种清楚而且确定的方式来回答，我们却确切地知道，为了陈述这个思想，需要哪些数学概念就足

够了。我们先从一个已经完全公理化了的科学如欧氏几何开始。为简单计，我们只假设一个基本的范畴，即空间中的点。按照希尔伯特，出现在公理中的基本关系有：(1)三点位于一直线上这个三元关系；(2)(三相异点 A，B，C 位于同一直线上，而且)B 在 A 和 C 之间这个关系；(3)四点位于一平面上的关系；(4)两对点 AB 与 CD 之间的全等关系 $AB \equiv CD$。对于任意客体的领域，只要其公理处理的是几个基本关系，以下讲的都适用。不必限制于这些客体究竟是什么，我们可以把它们都称为点，而把这个领域称为点域。

在第 4 节中我们引入了同构映射的概念。我们考虑以下特例，即客体的领域并非映到另一领域上，而是映入其自身之上，这样便得到了自同构(automorphism)的概念：自同构就是一个点域到其自身的一对一映射 $p \to p'$，这一映射保持基本关系不变；即如果点 a，b，…之间有基本关系成立 $R(ab\cdots)$，则点 a'，b'，…(它们是点 a，b，…映射所得)之间也有相同关系，其逆亦真。换言之，$R(ab\cdots)$ 蕴含 $R(a'b'\cdots)$，反过来，$R(a'b'\cdots)$也蕴含 $R(ab\cdots)$。一个映射 σ 把点域中的每一点都映为一点 $p' = p\sigma$。最简单的映射就是恒等映射 ι：它映每一点 p 到其自身。两个映射 $\sigma: p \to p'$和 $\tau: p' \to p''$可以相继施行，由此得出一个新映射 $\sigma\tau: p \to p''$。一个映射 $\sigma: p \to p'$ 如果有一个把 p'映回到 p 的逆 σ^{-1}：$\sigma\sigma^{-1} = \sigma^{-1}\sigma = \iota$，则它是一对一的。于是 σ^{-1}也是一对一的。恒等映射是一对一映射；而若 σ 与 τ 都是一对一的，则 $\sigma\tau$ 也是，其逆为 $\tau^{-1}\sigma^{-1}$。也可用“变换”一词作为一对一映射的同义语。关于自同构的基本事实是：自同构成为一个群。这表示下面三件事：(1)恒等映射是自同构；(2)若 σ 是一自同构，则 σ^{-1}也是；(3)若 σ 与 τ 都是自同构，则 $\sigma\tau$ 也是。这三个事实都是定义的直接推论。

一个最广义的图形 F，或称为点的构形 F，只不过是点的一个集合；如果对每个点 p 都能决定其是否属于 F，这图形就算给定了。点之间的一个三元关系 $R(xyz)$ 称为对于变换 $\sigma: p \to p'$ 及其逆 $\sigma^{-1}: p' \to p$ 为不变的，如果由 $R(abc)$ 可得 $R(a'b'c')$，而且反之亦然。我们现在就可以用精确的语言来陈述，欧氏空间中的所有点作为客体都是相同的，亦即“无区别的”（indiscernibility），这是什么意思。它的意思就是，任给两点 p_1 与 p_0，必有一个自同构映 p_0 为 p_1。两个图形 F 与 F' 称为相似的，如果可以找到一个自同构把一个映为另一个。莱布尼茨把相似图形定义为：如果就其自身来考虑无法区别的图形，这里就是我们对此定义的解释。群的三条公设无非表示：每个图形相似于其自身，而且相似性又是对称的和可传递的（见第 12 页上关于等价性的公理定义）。点的一个关系如果对一切自同构都是不变的，就称为具有客体性。基本关系在这个意义下是有客体性的，由此按第 2 节所列举的原理合逻辑地定义的关系也都是有客体性的。但是其中没有用到原理 5，即没有代入原理，用一个个别展示的点填入空位。（是否所有具客体性的关系都是这样得出的，这就提出了一个逻辑完备性的问题，它大概是不能回答的，正如相应的公理系统的完备性问题——即是否每一个为真的全称命题都可由该公理系统演绎出来——也不能回答一样。）

当我们的任务是研究真实的空间时，公理与基本关系并非都已经给了我们。恰好相反：当我们企图把几何学公理化时，我们是选择了一些我们相信具有客体性的关系为基本关系（例如伊壁鸠鲁会把 A，B 位于同一垂直线上列为一个基本关系，而欧几里得则没有这样做）。因此，为了公正对待事情的实际情况，我们不得不把思想进展的次序颠倒过来。我们从一个变换群 Γ 开始。可以说，它描

述了我们的点域在何种程度上是匀齐的。一旦给定了这个群，我们就知道了所谓相像或相似是什么意思——就是说若两个图形之一可用 Γ 中的变换从另一个产生出来，就说它们相似(或相像，或等价)——也就知道了在什么条件下一个关系才有客体性，那就是需要这个关系在 Γ 的一切变换下都不变。正是在这个意义下，克莱因在著名的埃尔朗根纲领(Erlanger Program，1872)中宣布了一个概念，即一种几何是由一个变换群决定的。现在，几何学公理化的问题被贬到后台去了。(第一步是要找出少数几个具客体性的关系 R_1，R_2，…使得所有令 R_1，R_2，…不变的变换所成的群不会比 Γ 更大，而恰好就是 Γ。)因为我们不必对以下的事实闭目不见，即同一种客体性的关系可以从别的这种关系合逻辑地构造出来，所以就不必再去划分基本的关系与导出的关系了。我们对所有的不变关系都有同样的兴趣。

[如果牛顿在空间中定出一个绝对中心 O 是做得对的话，则真正的自同构群 Γ_0 应由欧氏自同构群 Γ 中那些使 O 点不动的自同构组成。牛顿的 Γ_0 是欧几里得的 Γ 之子群。然而另一方面，在研究欧氏几何时，我们可能主要是关注那些对一切仿射变换或射影变换都不变的性质。(平面的仿射与射影变换分别就是依次施行任意多个平行射影或中心射影而得的变换。)仿射变换之群 Γ' 和射影变换之群 Γ'' 都比 Γ 大，更准确些说，Γ 是 Γ' 的一部分，Γ' 是 Γ'' 的一部分。仿射与射影几何对于透视理论的重要性是显然的。这样我们就明白了，克莱因的观点多么有助于测量，多么有助于揭示各种几何学之间的关系。这些几何学或者是由事物的性质启示而产生的，或者是来自任意的但逻辑上有用的抽象。[克莱因有一位先驱默比乌

斯(Möbius)*，他曾对一类特殊的几何学强调群论的观点。]人们能期望到的对于连续统的最广的自同构群，是由所有连续变换构成的；相应的几何学称为拓扑学。对于数学发展的一件幸事是，相对性问题首先并不是对于连续点空间来讨论的，而是对于由有限个互不相同的对象组成的系统来讨论的，这个系统就是具有有理系数的代数方程之根[伽罗瓦理论(Galois theory)]。这个情况十分有利于把有关概念弄精确。这里的客体性关系是由四个基本的代数运算(加、减、乘、除)组成的，换言之，即具有有理系数的代数关系。这类问题催生了一个一般的理论，即不只是变换群而且也是抽象群的理论。]

在解释了自同构以后，我们现在进到相对性问题的第二个阶段。对于点域中的点，怎样指定记号或标记以表现它们是相同的还是不同的？这些标记假设为自行创造的，同一标记不可表示多个点，但可用复制的符号如名字、数(或三元数组 x，y，z)等等来作标记。只有完成了这件事，才能想到，通过构造符号域就能把实际给出的世界的奇观表示出来。所有的知识，尽管始自直觉，都趋于符号结构。当人们处理的域只含有有限多个点时，不会遇到严重的困难，这有限多个点可以逐个地“召唤”出来。当点域为无限时，特别是为连续统时，这问题就变得严重了。要用具有以上性质的标记从观念上把点固定下来，使得当它失去了以后还能找回来，这只有相对于一个坐标系或称参考系才有可能，而这个坐标系又需要通过个别指定的行动才能展示出来。消灭自我及其直觉的直接的生命，是不会完全成功的，而坐标系就是这个灭绝自我(ego-extinction)的过程必有的残

* 默比乌斯(August Ferdinand Möbius，1790—1868)，德国数学家。——译者

留。[16]在这里最好是记住，在实践上二维和三维点集通常是用笔在纸上当着我们的面实际画出一个物体或图形，而不是用定义一个集合的性质来做逻辑—算术的构造。 数学为了获得足以应付这种直觉上给定的图形之复杂性与多样性，花了很长时间才找到了构造的工具。但是它一旦达到了这样一个阶段，符号方法的优越性就很明显了。

[现以直线上的点为例。 这时坐标系包含一个点 O 与一个单位线段 OE，也就是两个不同的点 O 和 E。 给出了这样一个参考系以后，任一点 P 都可以用它的横坐标 x 来表述。 x 就是以 OE 为单位标尺时量度 OP 之长所得的数(对于与 E 居于 O 之同侧的点，x 是正的，而对另一侧的点，x 是负的)。 任意两个参考系 OE 与 $O'E'$，总是客体性相似的，因为恰好有一个自同构(即相似)映 O 为 O'，映 E 为 E'。 所以展示了一个坐标系也只是展示了绝不可少的东西而已。符号 x 之域就是全体实数。 相对于一已知坐标系，对应关系 $P \rightleftarrows x$ 是点域到符号的变化区域上的一对一映射。 同一个任意点在两个坐标系下的坐标 x 与 x' 之间有一关系式 $x = ax' + b$，这里 $a \neq 0$ 和 b 是两个刻画这两个坐标系的相对位置的常数。]

把这个例子记在心里就能理解下面的一般论述了。 设已给定参考系 $\mathfrak{f}$ 的类 Σ。 这样的类应该是可以客体地加以区别的，即是说，若 $\mathfrak{f}$ 属于它，则由 $\mathfrak{f}$ 通过一个自同构 σ 得出的框架 $\mathfrak{f}\sigma = \mathfrak{f}'$ 也属于它。 但是需要假设，类除了客体性要求之所必不可少的元素以外，什么也不包含了，即 Σ 类中任意两个框架 $\mathfrak{f}$ 与 $\mathfrak{f}'$ 都相似。 此外还假设给出了一个客体性规则 A，使得对于每一点 p 与类 Σ 中任一框架 $\mathfrak{f}$，A 都会给出一个确定的(可复制的)符号 $x = A(p, \mathfrak{f})$ 作为 p 相对

于此框架的坐标。对于已给的$\mathfrak{f}$，点 p 与符号x 的对应$p \rightleftarrows x$ 是一对一的。所谓 x 是由p 与$\mathfrak{f}$ 客体性地确定的，就是说对任意的自同构 σ 均有

(1) $$A(p;\mathfrak{f}) = A(p\sigma;\mathfrak{f}\sigma)。$$

由这些条件可得如下的推论，令 σ 为点域中的一自同构 $p \to p'$，而$\mathfrak{f}$ 为类 Σ 中的一个固定框架。在此框架下，p 与p'的坐标 x 与x'可以用一个变换 S 联结起来：$x' = xS$，这个变换 S 就是自同构 σ 在$\mathfrak{f}$ 下的表示。对于恒等关系 $\sigma = \iota$，相应有恒等变换 $S = I$；σ^{-1}用S^{-1}表示，而若 S 与 T 分别表示 σ 与 τ，则 ST 表示 $\sigma\tau$。在这个意义下，相应于 Γ 中各个 σ 的变换S 构成一个群 $\mathbf{G}$，而 $\mathbf{G}$ 与 Γ 同构，$\mathbf{G}$ 只不过是 Γ 在框架$\mathfrak{f}$ 下的表示。另一方面，取定 Σ 中一个框架$\mathfrak{f}$ 以及它通过任意自同构 σ 得出的框架$\mathfrak{f}' = \mathfrak{f}\sigma$。我要指出，同一个点在$\mathfrak{f}$ 与$\mathfrak{f}'$下的坐标 x 与x'应由方程 $x = x'S$ 相联结。事实上，若用 $p\sigma$ 而不用p 表示任意点，则我们有 $x = A(p\sigma;\mathfrak{f})$，而由(1)，

$$x' = A(p\sigma;\mathfrak{f}\sigma) = A(p;\mathfrak{f}),$$

由此即得所求。在$\mathfrak{f}$下表示 Γ 的群 $\mathbf{G}$ 必定是独立于$\mathfrak{f}$ 的。实际上，若有两个不同的群 $\mathbf{G}$ 与$\mathbf{G}^*$ 分别在两个相似的框架$\mathfrak{f}$ 与$\mathfrak{f}^*$ 下表示 Γ，$\mathbf{G}$ 与$\mathbf{G}^*$ 之差别就构成$\mathfrak{f}$ 与$\mathfrak{f}^*$ 的客体性差别，而这是不可能的。也很容易显式地验证这一点。令$\mathfrak{f}^* = \mathfrak{f}\gamma$，而 γ 为一自同构。此外，令 x 与x'是任一点 p 及其象$p' = p\sigma$ 关于$\mathfrak{f}$ 之坐标，而 y 与y'则是它们相对于$\mathfrak{f}^*$ 之坐标。令$\mathfrak{f}$ 中表示 γ 与 σ 的变换为C 与S。我们把方程 $x' = xS$ 以更形象的形式写为$x \xrightarrow{(S)} x'$。由上所述，我们应该得出图式

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & (S) & & \\
 & x & \rightarrow & x' & \\
(C) & \uparrow & & \downarrow & (C^{-1})。\\
 & y & & y' &
\end{array}
$$

因此，由 y 到 y' 的变换是 $S^* = CSC^{-1}$，它就是 σ 在框架 $\mathfrak{f}^*$ 下的表示。$S^* = CSC^{-1}$ 和 S 同样在 $\mathbf{G}^*$ 中，反过来，$S = C^{-1}S^*C$。

正如点不能概念地加以刻画，点域的变换也不能，所以，说自同构群为已知或已给定，这句话是什么意思，可能本来还不完全清楚。现在已经到了这样一个阶段，最后一点含糊的阴影也将会消失。每一个点都被代之以它(相对于一固定框架)的坐标 x，而自同构 σ 之群 Γ 变成了变换 S 之群 $\mathbf{G}$。把 x 变成 $x' = xS$ 的个别的变换 S，如 x 的各个值一样成了一个可复制的符号。但是，坐标 x 既依赖于 p 又依赖于 $\mathfrak{f}$，群 $\mathbf{G}$ 则独立于 $\mathfrak{f}$，因此，也就没有必要个别地展示。为了符合客体性的要求，我们用符号构造世界的一个象。纯粹数学家会说：在符号域中给定了一个变换群 $\mathbf{G}$，只要同意只研究那个域在群 $\mathbf{G}$ 变换下不变的关系，并视之为客体性的，就建立了一种几何学。

[最后，关于框架还有一点纯逻辑的说明。把框架 $\mathfrak{f}$ 下对坐标的指定 $p \rightarrow x = f(p)$ 就看成框架本身是完全合法的。如果打算使自同构群广阔到包含所有连续变换，这样做似乎更好。于是 $\mathfrak{f}$ 这个符号就成了一个函数 f，它的变元就是点 p，它的值则是符号域中的元素 x。如果 $\sigma: p \rightarrow p'$ 是任意的变换，则变换后的函数 $f' = f\sigma$ 将由方程 $f'(p') = f(p)$ 来定义，这里 $p' = p\sigma$，或写作 $f'(p) = f(p\sigma^{-1})$。当我们把 $x = f(p)$ 写作 $x = A(p; \mathfrak{f})$ 时，则 A 表示一个通用的逻辑算子“其值为”，所以 $x = A(p; \mathfrak{f})$ 就表示：函数 f 当变

元为 p 时，其值为 x。]

参考文献

F. KLEIN, *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen*, Erlangen, 1872 (*Gesammelte mathematische Abhandlungen*, I, 460—497).

14 全等与相似，左与右

毫无疑问，欧氏几何对我们的说服力基本上来自我们对于所谓的刚体的一类问题处理很熟练，刚体可说是在不同条件下都相同而不变的。这样一个个体若在空间占据了两个位置，则这两部分空间就称为全等的。量度之有赖于刚体，其程度正如计数之有赖于使用具体的数的符号。（关于几何学的物理基础可见第 16 节与第 18 节。）一旦几何学已经从实际物体的性态中抽象出来（这些实际物体只是近似的为刚体），几何学就给出了一个对所有物体进行物理研究的标准，我们可以就此判断一个给定的物体离实现刚性这一理想状况还差多远。这个过程与决定温标的过程并无本质的差别，温标首先是基于实际气体的性态，然后假定这些定律精确地适用而得“理想气体温标”，而现实存在的气体只是近似地满足这些定律。因为刚体的位置是可以标识的，全等性就是两个全等的体 V 与 V' 间点到点的映射。全等的概念，最初是相对于一个已给的刚体 b 而言的。它与 b 在事实上是独立的，这是我们最基本的经验之一。事实上，令 V 和 V' 是同一个体 b 在两个位置上所填满的部分空间。令 b^* 是另外一个体，而且也可以填满 V，则把 b^* 移动一下一定也可以填满 V'。因为我们可以把一个刚体扩大到覆盖任意已知点，所以映射 $V \to V'$ 也可以扩大到全空间。空间的全等映射构成一个变换群 Δ^+ 称为欧氏运

动群(group of Euclidean motions)。一旦知道了这个群，则互相全等的体就可以定义为：空间中可用 Δ^+ 中的变换 S 互变的部分。这些事实启示我们把空间的全等映射的群 Δ^+ 解释为它表示了空间自身一种内蕴的结构，而空间把这种结构烙印在所有空间客体上。

如果这种看法是正确的，就应该把全等性看成几何学的一个而且是仅有的一个基本概念。首先让我们来研究几何学的这个概念在空间的自同构(相似性)上有些什么推论。我们已经相当一般地知道了，一旦确定了一种几何学的基本的客体性，也就确定了一个自同构群 Γ。在这种情况下，C 是否为自同构的判据如下：C 以及 C^{-1} 是否把一对互相全等的空间部分 v_1，v_2 变为也互相全等的一对。考虑由 v_1，v_2 通过 C 变出来的一对 v_1^*，v_2^*。令 S 为把 v_1 变到 v_2 的变换，则图式

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & (S) & & \\
 & v_1 & \rightarrow & v_2 & \\
(C^{-1}) & \uparrow & & \downarrow & (C) \\
 & v_1^* & & v_2^* &
\end{array}
$$

表明 v_1^* 可由映射 $C^{-1}SC$ 带到 v_2^*。所以这个判据要求，当 S 属于 Δ^+ 时，$C^{-1}SC$ 与 CSC^{-1} 也应属于 Δ^+。我们说 C 与一个变换群 Δ 为可换的，如果当 S 属于 Δ 时必有 $C^{-1}SC$ 以及 CSC^{-1} 都在 Δ 中。与 Δ 可换的变换构成 Δ 的一个子群，称为 Δ 的正规化子(normalizer)。这个子群必以 Δ 为一子群，Δ 与其正规化子可能相同，也可能是其真子群。我们的分析可以总结如下：相似性群 Γ 是运动群 Δ^+ 的正规化子。所以，全等图形必为相似的。其逆则不必为真。说实在的，Δ^+ 恰好是其正规化子的真子群，所以欧氏空间中必有不全等的相似图形；举例来说，一个物体及其镜像，一个建筑与其小尺寸的模型都是相似而不全等的例子。

让我们现在像克莱因那样，从一个已给的自同构群 Γ 开始。取 Γ 的一个子群 Δ，并说如果一个图形可用一个 Δ 中的变换变为另一个，这两个图形就是 Δ 等价的。在什么条件下 Δ 等价性关系具有客体性意义呢？当且仅当 Δ 等价的图形被 Γ 中的每个变换 C 仍变为 Δ 等价的图形；换言之也就是，当且仅当 Γ 之每一个元 C 均与 Δ 可换。这时，数学家就说，Δ 是 Γ 的一个不变子群。所以只要 Δ 是 Γ 的一个不变子群，则 Δ 等价性就是一个客体性关系。例如，平行移动构成欧氏相似性群的一个不变子群；事实上，两个图形可用平行移动互变，这种 ∥ 关系显然是一个具有客体性几何意义的关系——虽然在我们的语言中还找不到一个合适的词。平行移动群的正规化子中包含所有的仿射变换；所以仿射几何学可以图形之间的 ∥ 关系为基础。或者，还有更简单的，仅由恒等变换构成的群也是一个不变子群，事实上两个图形的恒等关系也是具有客体性意义的。（再没有别的什么更可称为具有客体性了，因为恒等变换包含于每一个可能的变换群 Γ 中。）群 Δ 越小，它的正规化子就越大，所以全等性与相似性之间的差别就越宽；准确些说，若 Δ' 是 Δ 的子群，则 Δ' 的正规化子 Γ' 必包含 Δ 的正规化子 Γ。Γ 的不变子群 Δ 的正规化子须包含 Γ。若一种几何学的自同构群是 Γ，只要 Δ 的正规化子不大于 Γ 而恰好是 Γ，则它可以仅以 Δ 等价性这一客体性关系为基础。

〔在结束这一分析时我们再作一点说明。空间是连续统，而我们讲到空间中的任一变换时，把它理解为任意连续变换是合理的。我们用 Ω 记那些需要考虑的变换之群；在连续统情况下，这就是所有连续变换之群。可以把这一点明显地表示出来，就又显示出了我们关于正规化子的定义如下。已给 Ω 的一个子群 Δ；Ω 中那些与 Δ

可换的元就构成了 Δ 的正规化子 Γ。 在这种形式下，正规化子的概念即令对于抽象群 Ω 与 Δ 也是有意义的。

康德在《未来形而上学导言》（*Prolegomena*）一书的 §13 中讲到全等与相似之分化，并且说，“不需要任何单个概念，只要指一下我们的左手和右手，则直接依赖于我们的直觉[Anschauung]就能理解相似而不全等的物体的区别(例如反向旋转的蜗牛)”；在他看来，只有超验的唯心论才能解开这个谜。 全等的意义固然无疑地是以直觉为基础的，其实相似性也是。 康德似乎指的是更微妙的事，但是正是这一点可以用群 Γ 及其不变子群 Δ，或者用一个群 Δ 及其正规化子 Γ 来加以完全澄清。 只要 Δ 是 Γ 的一个真不变子群，则全等概念 = Δ 等价性，而相似性 = Γ 等价性，两者并不重合，虽然前者具有客体性意义（= Γ 不变性）。 于是，康德感到奇怪的事可以这样最令人满意地置于一般的抽象“概念”之下。]

不论是谁只要把全等性提升到唯一的基本关系的地位，就一定会从这一概念出发来展开几何学。 可以有几条不同的途径做到这一点。 只要能把几何学的基本事实表述为关于欧氏运动的群 Δ^+ 的几条简单公理，则比用欧几里得公理类型的初等方法，还能得到更深的见解。 亥姆霍兹在余伯威(Ueberweg) 之后，首先在他的论文《论作为几何学基础的事实》（Ueber die Tatsachen, die der Geometrie zugrunde liegen)中实行了这个计划并取得了惊人的成功。 后来李建立了一个一般的理论，用他的更有力的数学工具继续研究这个问题，把它从 3 维推广到 n 维。 欧氏运动群 Δ^+ 几乎可以完全由以下事实刻画，即它容许刚体自由运动，这恰好是我们通过经验所熟悉的。 用更准确的语言表述：可以用适当的全等映射把任一点映射到任意另一

点；而且若固定一点，还可以把通过此点之有任意方向的直线全等映射到经过同一点有任意另一方向的直线；进而若固定一点及一个直线方向，还可以把包含它们的有任意面方向的平面全等映射到另一个也包含它们但有任意面方向的平面。 如此直至（$n-1$）维方向元素。另一方面，如果给定一点，一个过此点的直线方向，一个包含它们的面方向，如此直至一个（$n-1$）维方向，则除了恒等映射外再没有其他全等映射能保持这些互相联结的元素不变。 我们刚才说了，这个公理几乎完全刻画了欧氏运动群。 事实上，我们这样得到了一个稍微更一般的空间(即具有凯莱度量的射影空间)的全等变换群。 那个群含有一个数值不定的参数 λ，即空间的常值曲率，但是重要的仅仅是 λ 的符号。 根据 λ 为正、为零或为负，所得的空间是椭圆型的、抛物型的(即欧氏的)或双曲型的。 这些是仅有的使得其所有各点，以及在一点的所有方向等等都为等价的齐性空间。

〔如果不能把欧几里得群 Γ 和 Δ^+ 都以确切的描述展示在我们眼前，就不能以较深的理解讨论这些问题。 三维欧氏空间的笛卡儿参考系，是由点 O(即原点)，以及三个互相垂直的等长向量$\vec{e}_1$，$\vec{e}_2$，$\vec{e}_3$组成。 点 P 的坐标x_1，x_2，x_3，由

$$\overrightarrow{OP} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3$$

这个式子所决定。 相对于这样一个框架，将点(x_1，x_2，x_3)映为点(x'_1，x'_2，x'_3)的相似映射由一线性变换

(1) $\quad S$：$x'_i = a_i + a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$

其中a_i，a_{ik}是常系数，而且满足以下条件：$(x'_1 - a_1)^2 + \cdots + (x'_n - a_n)^2$ 是 $x_1^2 + \cdots + x_n^2$ 的a 倍，这里 a 是一个正数。(以上，维数 n 是留

下来未加确定的。)如果 $a=1$,则这个相似映射是"不放大"的,而且称为一个正交变换。正交变换构成 Γ 的一个不变子群 Δ。上述条件作为每一个相似性都应适合的条件,意味着 a_{ik} 的行列式 d 应该适合 $d^2=a^n$。所以,一个正交变换或者具有符号 +(即 $d=+1$)或者具有符号 -(即 $d=-1$)。具有符号 + 的正交变换构成欧氏运动群 Δ^+。Δ^+ 是 Δ 的指标为 2 的子群,即是说,若 S_1,S_2 均为 Δ 的符号为 - 的变换,则 $S_1^{-1}S_2$ 具有符号 +。(关于左与右的区别之基本事实就是:若两个螺旋都与同一螺旋转向相反,则它们必有相同转向。)说 Δ^+ 是全等映射群,还是说 Δ 是全等映射群,并没有什么区别。假设我们比较偏好大一点的 Δ。于是刚体的连续运动将由一个连续依赖于时间参数 t 的正交变换 $S(t)$ 来表示,而且 $S(t)$ 在初始时刻 $t=0$ 时化为恒等映射 I。因为 $S(t)$ 之行列式的值仅有两个:+1 与 -1,而它在初始时刻又等于 +1,以后则随 t 连续变动,所以它必定总等于 +1。因此,虽然我们许可用任意正交变换,对 $S(t)$ 的连续性的要求自动地把符号为 - 的正交变换消除了;一个刚体只有经过一个不连续的跳跃才能变成自己的镜像。}

群 Δ 还有一个远比描述刚体的可运动性更为深刻的侧面,它作为物理世界的自同构群的作用就揭示了这一方面。在物理学中我们不仅要考虑点,还要考虑种种不同类型的物理量,如速度、力、电磁场强等等。但是以下是一个事实,即相对于一个笛卡儿框架,不仅仅是点,所有物理量都可以用数来表示;例如力用其一组分量 $f_i(i=1,2,\cdots,n)$ 表示,电磁场强用一组斜对称的分量 $F_{ik}=-F_{ki}$ 表示,等等。若(1)是点空间的一个正交变换 S,则在其影响下,这些物理量都会经历一个由 S 唯一决定的相关的变换;例如力的

分量按照方程

$$f'_i = \sum_\lambda a_{i\lambda} f_\lambda \quad (i,\ \lambda = 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

变换，而电磁场强的分量则按以下规则变换：

$$F'_{ik} = \sum_{\lambda,\mu} a_{i\lambda} a_{k\mu} F_{\lambda\mu} \quad (i,\ k,\ \lambda,\ \mu = 1,\ 2,\ \cdots,\ n),$$

等等。所有的自然定律都在诸如此类的由群 Δ 导出的变换下不变。然而说它们在所有相似变换下不变则不是真的，虽然在自然现象的一定层次上看起来是这样。但是原子论的事实告诉我们，*长度并不是相对的而是绝对的*。电子的电荷和质量这些原子常数，还有普朗克(Planck)的作用量子 h 定出了长度的绝对单位，而且，它还可以通过谱线的波长用于实际测量。所以，我们不再依赖于保存在巴黎的度量衡国际委员会(Comité International des Poids et Mesures)的地下室里的铂铱米棒了。现在我们对笛卡儿参考系的基本向量赋以绝对长度 1。符号为 − 的正交变换必须也包括在 Δ 中，因为在自然定律中没有什么迹象指出左与右有内禀的区别。现在就清楚了，何以一个物体，当其各部分都经历群 Δ 中的一个连续依赖于时间参量 t 的变换 $S(t)$，而且其物理特性也相应变化时，它完全有理由宣称：虽然我在运动，我在物理上仍然是同一个东西。

〔外在世界中延伸着的介质，既是在空间中延伸，也是在时间中延伸。怎样按上述模式把时间作为第四个坐标，将在第 16 节中讨论。正是为了准备这一步，我们才让维数 n 暂不确定。对于物理学，$n = 4$ 甚至比 $n = 3$ 更重要。但是，目前我们还只限于空间。〕

现在总结如下：空间中的物理自同构群是正交变换群 Δ。几何自同构之群，按其本来的意义，则是 Δ 的正规化子 Γ，Γ 比 Δ 更大，因为其中还包括了延伸变换 $x'_i = ax_i$，其中 a 为大于 0 的任意常数。Δ 与 Γ 的这个区别决定性地证明了，物理学不可能归结为几何学，而物理学归结为几何学曾是笛卡儿所希望过的。

[*左与右*。如果要我把最基本的数学事实列举出来，说不定我将以事实(F_1)开头：在对一个集合的元素计数时，不论按什么次序来取出此集合的元素，总会得到同样的数。然后我会举出事实(F_2)为第二个：$n(n \geqslant 2)$ 个事物的排列可以区分为偶排列与奇排列。在所有排列构成的群中，偶排列构成所有排列之群的指标为 2 的子群。第一个事实是维数这个几何概念的基础，第二个则是“定向”概念的基础。考虑仿射向量几何。它的向量之基底就是 n 个向量$\vec{e_1}$，…，$\vec{e_n}$使每一个向量都可以表示为一线性组合$x_1\vec{e_1} + \cdots + x_n\vec{e_n}$，而维数不变性定理则断言，每一个基底都包含同样数目的 n 个向量。这个结论显然蕴含着事实(F_1)；把基底中的向量任意重排，仍会得出一个新基底。反过来，不变性定理又是由事实(F_1)连同加法和以数相乘的法则很容易导出的代数命题。已给 n 个线性无关的向量，它们的任一种排列都确定了一个“定向”，两个排列若可以用偶排列互相导出，则确定相同定向(这正是通过抽象化作定向的定义)。奇排列则将一个定向变为相反定向。这显然是左与右的区别之组合根源。再者，它连同仿射向量几何的基本运算(向量的加法，用数乘向量)给出了两个基底$\vec{e_1}$，…，$\vec{e_n}$与$\vec{e_1^*}$，…，$\vec{e_n^*}$定向的比较。当把$\vec{e^*}$用向量$\vec{e}$表示出时，

$$\vec{e_i^*} = a_{1i}\vec{e_1} + \cdots + a_{ni}\vec{e_n},$$

系数a_{ki}的行列式不为0。这两个基底的定向是相同或相反，则视此行列式为正或为负而定。但是，行列式的定义正是建立在偶排列与奇排列的区别上！

康德力求在超验唯心论中寻找解开左与右之谜的线索。数学家则在这个谜的后面看到了偶排列与奇排列之区别这个组合事实。在寻求世界给予我们的现象的根源上，哲学家与数学家的冲突很少有这么尖锐的。]

15 黎曼的观点·拓扑学

维数和定向的概念并不限于度量欧氏空间或仿射空间。它们可以应用于一般的连续流形。黎曼是从数学上分析 n 维流形的第一人。n 维流形上任一点的一个充分小邻域都可以一对一而且双方连续地映为 n 维实数空间的一个区域，后者的点是实数的 n 元组 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$。坐标的任意的一对一变换

$$y_i = \varphi_i(x_1, \cdots, x_n) \quad (i = 1, \cdots, m);$$
$$x_k = \Psi_k(y_1, \cdots, y_m) \quad (k = 1, \cdots, n)$$

都给出了适宜在同一邻域中表示的新坐标。m 是否必须等于n？这就是维数的拓扑不变性问题。

[令 $P = (x_1, \cdots, x_n)$ 为一已知点，$P^* = (x_1 + \mathrm{d}x_1, \cdots, x_n + \mathrm{d}x_n)$ 是无限接近于 P 的点。如果变换函数是可微的，则所有由 P 发出的无穷小向量$\overrightarrow{PP^*}$ 的分量$(\mathrm{d}x_1, \cdots, \mathrm{d}x_n)$将按线性式

(1) $$\mathrm{d}y_i = \sum_k a_{ik} \cdot \mathrm{d}x_k, \qquad \mathrm{d}x_k = \sum_i b_{ki} \cdot \mathrm{d}y_i$$

变换，系数 a_{ik}，b_{ki}都依赖于P 而不依赖于P^*。（可以通过引入虚

拟的时间 τ 并令点按任意的规则 $x_k = x_k(\tau)$ 在流形上变化，这样来避免无穷小量。设此点在时刻 $\tau = 0$ 过 P；在此时刻的速度将是在 P 点的向量，其分量是 $u_k = (\mathrm{d}x_k/\mathrm{d}\tau)_{\tau=0}$。同一速度的 y 分量 v_i 与其 x 分量 u_k 之间亦以方程(1)互相联系：

$$v_i = \sum_k a_{ik}u_k, \qquad u_k = \sum_i b_{ki}v_i,$$

此式对 P 点所有可能的速度均成立。）但是，只有当 $m = n$，而且 a_{ik} 的行列式即所谓雅可比行列式不为 0 时，这两个线性变换才可互逆。只有这种“可微的”坐标变换才被允许，而这些坐标变换构成一个总体 Ω。在这些条件下，才谈得上一个微分流形。因为雅可比行列式之值随 P 连续变化，则在指定了两个坐标系的连通区域，它或者处处为正，或者处处为负。在第一种情况下，我们给此坐标变换以符号 +，而在第二种情况下，符号为 −，所以可以在整个区域确定“定向”*！我们看到，维数与定向二者均得自以下事实，即在无穷小区域中，仿射几何学成立。尽管拓扑学在掌握连续性上已是颇有成效，我们迄今尚不了解微分流形这一限制的内在意义。说不定有朝一日物理学可能弃之不用。现在它似乎是不可缺少的，因为绝大多数物理量的变换法则都与微分 $\mathrm{d}x_i$ 的变换法则(1)紧密相关。]

黎曼受到高斯曲面理论的启发，假设欧氏几何在无穷小区域中成立。于是，以 $\mathrm{d}x_i$ 为分量的无穷小向量 $\overrightarrow{PP^*}$ 的长度 $\mathrm{d}s$ 之平方将可用 $\mathrm{d}x_i$ 的正定二次型表示如下：

---

* 这里的叙述有疏忽，因为没有提到流形中还有不可定向的情况。——译者

(2) $$ds^2 = \sum_{ik} g_{ik} dx_i dx_k ,$$

它的系数g_{ik}与向量$\overrightarrow{PP^*}$无关，但是一般地依赖于点 P，其坐标为 x_i，而且是这些坐标的连续函数。由ds^2的不变意义就可以很清楚地看到“度量场”之分量 g_{ik}在转到新坐标系 y_i 时应如何变化。这一类 3 维黎曼空间之度量会把自己加于此空间内的任意曲面上，而把此曲面变成一个 2 维黎曼空间。然而对于 3 维欧氏空间，说其任一个曲面都是 2 维欧氏空间则不为真；与之相反，所有可能的 2 维黎曼空间都是 3 维欧氏空间的子空间。所以，在欧氏几何中，空间比起可能含在其中的曲面有点特别(即空间是非弯曲的)，而黎曼的空间概念则足够广泛足以消除这种区别。

根据莱布尼茨的连续性原理，大自然的真正的规律性表现为近域作用定律(laws of nearby action)，即这些定律都只把在时空点的紧邻处的物理量的值联系起来，所以几何学的基本关系应该只涉及无限邻近的点(即为“近域几何”而非“远域几何”)。我们只能期望在无穷小中遇到基本的而且一致的规律，所以必须通过世界在无穷小中的性态来理解世界。

如果要求空间在度量上也是匀齐的——而作为“现象的形式”的空间又必然是匀齐的——则我们又立刻从黎曼关于空间的概念回到经典的空间概念了，而亥姆霍兹关于运动群的公设正是引导到这里。但是，黎曼关于空间的度量性质的本性以及来源有着截然不同的观念。对于黎曼而言，度量场并非是一劳永逸地刚性地给出来的，而与物质有因果性的联系，因而随物质而改变。他不把度量看成现象静态的匀齐的形式，而是看成其不断变化的物质内容。黎曼要求寻找空间的度量关系的内在的理由，(用我们在第 54 页中引用

的他的话来说)要求把离散与连续的多样体(即流形)区别开来，他接着说，“所以，要么我们的空间所基于的实在是一个离散的多样体，要么度量关系的理由需要从外部作用于它的联结的力来寻求。”度量场是通过它对于刚体，对于光线，对于自然界的一切事物的物理效果，才使我们能够感知的，只有这些效果才使我们能确定度量场的定量的状态。但是，不论是什么样的作用也都要受一点罪；它本身必须是实在的，而不可能因为加上了“几何”刚性这个不可攻击的王冠而高踞于物质的力之上。这样一来，尽管度量场出现了非匀齐性，仍然可以重新得到物体可以自由运动而不改变其量度这一性质，因为现在运动的物体会“带着”度量场一起动，而度量场正是它所生成或为它所变形的。爱因斯坦(Einstein)在引进了时间，从而把空间拓展为外在世界完整的四维介质以后，又把黎曼的思想发展为一个详尽的引力的物理理论，特别是确定了物质作用于度量场的规律。

黎曼和爱因斯坦都坚持，自同构群——不论是几何的还是物理的——正是所有可微变换的总体 Ω。在这一方面，他们的理论与前节详细讨论的观点根本不同。他们的广义相对论只有在把度量场也列入物理量之列才是可接受的，这些物理量作用于物质，又被物质反作用。然而，对于一给定点 P_0 的无穷小邻域，又保留了欧氏几何学。因为有一个数学事实，即只要在已知点 P_0 邻域中选取了适当坐标，则在此点度量方程(2)必可写为

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + \cdots + dx_n^2。$$

有了这样的形式，再没有丝毫不确定的余地了，这样，我们就可以说度量的本性在每一点都是相同的。但是，使度量法则取这个固定的

标准形式所需的坐标系一般说来各点不同，而正是这种坐标系刻画了这个度量的定向(orientation)*。当我们说所有的立方体(具有一定的大小)都有相同的本性只不过定向(orientation)不同时，我们使用了与欧氏几何中类似的词句。度量的本性是一，它是绝对地给定的；只不过其不同的点的相互定向(orientation)可以连续变化并且依赖于物质。欧氏空间可以比作一个晶体，它是由均一的不变的原子放在格点上做规则的不可变的排列而成；黎曼空间则可比作液体，也是由同样的不可分辨的不变的原子构成，然而其排列和定向(orientation)是活动的，受制于作用其上的力。

把黎曼的概念换一种不同的表述，也许可以讲得更好，而在量子物理中需要把刻画旋转电子的量放进广义相对论中时，这是不可少的。从上面关于速度的例子可以清楚地看见，在 P 点的切向量(即速度向量)的总体是什么。它们构成一个 n 维向量空间。对 P 指定坐标 $P \to x_i$ 后即可在 P 点的切向量空间 $V(P)$ 中定出向量基底 $\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n$，使得 $u_1\vec{e}_1 + \cdots + u_n\vec{e}_n$ 是一个以 u_i 为 x 分量的向量。设在 P 点的这个向量空间具有欧氏度量(具有长度的绝对标准)，即可在其中引入一个局部笛卡儿参考系 $\mathfrak{f} = \mathfrak{f}(P)$，它是由 n 个互相垂直的长为 1 的向量构成的。选择这一参考系的任意性则用欧氏旋转群 Δ_0 表示，这个群由所有保证

$$z_1'^2 + \cdots + z_n'^2 = z_1^2 + \cdots + z_n^2$$

的线性变换

---

* 前文中我们将原文的“sense”译为定向，因为它确实就是我们在解析几何中讲的“定向”。现在的“orientation”字面上就是我们在解析几何中讲的“定向”，但实际上又不同，内容更丰富。下文讲到立方体的“orientation”，则又确是初等几何中讲的定向，所以我们把原文注明。——译者

$$S: z'_\beta = \sum_\gamma a_{\beta\gamma} z_\gamma \quad (\beta, \gamma = 1, \cdots, n)$$

组成。这里变量z_β表示$V(P)$中一个任意向量关于笛卡儿框架$\mathfrak{f}$的分量。每个向量$\vec{e}_i$关于$\mathfrak{f}$之分量$e_{i\beta}$（$\beta = 1, \cdots, n$）的值表示了$\mathfrak{f}$是如何嵌入于空间中的。这样，n^2个量$e_{i\beta}$既依赖于坐标x_i的选取，又依赖于P点的笛卡儿框架$\mathfrak{f}(P)$，就是P的函数，现在就可以用它来刻画度量场。很容易算出，黎曼的g_{ik}之值为

$$g_{ik} = e_{i1}e_{k1} + \cdots + e_{in}e_{kn}。$$

只有在选定了坐标x_i以及笛卡儿框架$\mathfrak{f}(P)$后，所有的物理量才能够用数来表示。自然定律，应该是：(1)对坐标x_i的任意变换不变；(2)对框架$\mathfrak{f}(P)$的旋转S[而S又可以任意(连续的)方式依赖于P点]都是不变的。所以这里就有了双重的不变性，其一用坐标x_i的所有变换之群Ω来描述，另一个则用群Δ_0的元素来刻画，而后者可以任意地随P之位置变化。

由狭义相对论到广义相对论的过渡中，发生的事情显然就在于此。构成群Δ的物理自同构如前节之所述，被分成了平移和旋转两部分。平移群被坐标的所有可能变换的群取代，而旋转原来只是欧氏旋转，现在则与中心P连在一起，而当中心P在流形上变动时，允许这个旋转自由变化。空间作为物质世界的广延性的介质，很清楚就是坐标变换群Ω的舞台；但群Δ_0似乎根源于物质的最终的基本粒子。因而量$e_{i\beta}$位于物质与空间之间。

[于是产生了一个问题，大自然在齐次线性变换的所有可能的群中，有何内在的理由要选出Δ_0？亥姆霍兹的理论提供了一个回答，按此理论，Δ_0完全由自由活动公理确定：设有1维，2维，…(n -

1）维方向所成的关联集（incident set）σ，必可用 Δ_0 中的一个变换把 σ 变为任意另一个关联集，而且使 Δ_0 中某个已给的关联集 σ 不动，形成一个只含有两个元素的子群（即恒等变换以及 σ 中的反射）。然而，现在群不再能解释为刚体的可动性，这种刻画的方法也就不那么有说服力了。（此外，它对洛伦兹群也不适用，后者在四维世界中取代了三维空间中的正交群。）

群 Δ_0 可以看成一个抽象群，它的各种不同的线性变换表示恰好标志了不同的物理量。例如 Δ_0 的正交变换表示标志了向量，它的某种“张量”表示标志了电磁场强，另一种非常值得注意的表示是所谓的“旋量”（spinor）表示，可以用于电子波场。]

拓扑学。一般说来，指定一种坐标只能覆盖一已知连续流形的一部分。“坐标”（x_1，…，x_n）是实数组成的符号。实数的连续统可以看作是由逐次迭代的分割创造出来的。为了考虑流形作为一个整体的本性，拓扑学需要发展一种性质更为一般的组合的模式。应用这种组合方法，就可以不必只限于微分流形。

为了对连续统进行数学处理，必须假设它已分为“基本的小块”，而且这种划分可以按一定模式（这种模式在一维情况下就是把基本的线段再分割）重复而且加细。这种划分的效果就是用越来越稠密的细分之网把连续统编织出来。于是，恰当地说就是，每一个连续统都有自己的算术模式，只要对开始划分时各个互相邻接的基本的小块彼此如何联结做了组合的描述，这种模式就完全决定了；我们称之为流形的“拓扑骨架”。参照一维连续统的特定的划分模式来引入一些数作为坐标是一种莽撞的行为，这样做唯一的实际辩解就是：它使连续统得到了一种特殊的计算上的可操作性，如同通常的具有基

本四则运算的实数连续统那样。拓扑骨架决定了流形整体上的连通性。要决定两个这样的骨架何时等价，即何时表示同一个连续统分解为基本小块的两种不同方法，这是一个十分重要然而又很困难的数学问题。在 n 维封闭流形情况下，骨架中包含了有限多个 0，1，2，…，n 阶的元素(即顶点，棱，……)；这些元素都要用任意的符号来表示，一个 i 阶的元素以若干个 $i-1$ 阶元素为边缘，只要说明了哪些元素以哪些元素为边缘，这个骨架就得到了完全的描述。这样一个骨架满足什么样的要求，具有什么样的性质，以及等价性问题，就构成了组合拓扑学的主题。

〔拓扑学有一特点，即其领域中的问题在一定条件下，甚至当它所讲的连续统并未精确地给出而只是模糊地给出时，也是可以决定的，而在现实中时常就是这样。例如，一块没有打碎的砖的拓扑骨架是肯定可以辨认出来的。再者，一条没有头的线，尽管只是近似地决定了一条几何学精确意义下的曲线，也可以断定要么有结，要么没有。只要是所有可能的状况构成一个离散的多样体，就能以绝对的准确性确定是哪一种个别情况。因此，对连续统的合理的分析应分成三步进行：(1)形态学，它处理模糊画出的形；(2)拓扑学，它以很明显的奇性为引导，甚或凭借自由的构造，在流形里放置了一副骨架，其位置虽有些模糊，但在组合上是完全精确决定的；(3)本来意义的几何学，只有在已织就了一张细分的网，其细密程度可以直至无限地增加，这时才能精确地实现其理想的构造。(连续统中的构形这种几何性质，既然是独立于建造细分的网的任意性，所以可以仿照度量场那样，认为这种几何性质是基于覆盖于此连续统上的构造的场。)理想化的几何对于实在的意义，尽管在应用时明显地不可能符

合以上的要求，将在第二部分中讨论。上面讲的三个步骤揭示了几何学的一种“感觉—范畴”的矛盾状况，正是这种状况使得柏拉图把几何构形放在理念与感官对象之间的中间地位。关于模糊性与精确性的对比，以及关于极限概念的更仔细的唯象的分析，读者可以参看第 9 节末所引的贝克尔(O. Becker)的著作。按一定模式实行拓扑骨架的细分，隐含了一个假设，即在处理一个具体给出的连续统时，对于第一步划分所生成的小块的拓扑性质不能有错。这就是说，我们没有顾及这样一种可能性，就是在更详细地推敲一个曲面时会发现，我们原来以为是基本的小块，其实还附有一个小柄，这个小柄改变了这个小块的连通性质，而用倍数更高的显微镜，还会显露出这种类型的更新的拓扑复杂性，直至无限。

黎曼的观点允许实在的空间，适合与欧氏空间所适合的完全不同的拓扑条件。我相信，关于几何学，19 世纪数学的发展已经给予了我们一种更自由、更一般的概念，对它所揭示的想象力的可能性也有了一种更开放的心态，只有在这个基础上，才能对空间问题进行哲学上富有成果的探索。]

参考文献

H. VON HELMHOLTZ, Über die Tatsachen, die der Geometrie zugrunde liegen(1868), *Wissenschaftliche Abhandlungen*, Ⅱ, p. 618.

B. RIEMANN, Über die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen (1854), *Gesammelte mathematische Werke*, 1876 (separate edition with notes by H. Weyl, Berlin, 1923).

H. WEYL, *Mathematische Analyse des Raumproblems*, Berlin, 1923.

O. VEBLEN, *Analysis situs*, Am. Math. Soc. Colloquium Publications, second edition, New York, 1931.

P. ALEXANDROFF, *Einfachste Grundbegriffe der Topologie*, Berlin, 1932.

第二部分

自然科学

Ὁ ἄναξ οὗ τὸ μαντεῖόν ἐστι τὸ ἐν Δελφοῖς, οὔτε λέγει οὔτε κρύπτει ἀλλὰ σημαίνει.

（在德尔斐给出神喻的神，
既不揭示，也不掩盖，
而是给出征兆。）

——赫拉克利特（Heraclitus）

第一章　空间与时间，超验的外部世界

16　从物理有效性来看空间与时间结构

一切可能的空间—时间位置，亦即世界点（world-points），构成一个四维连续统。只有时空上的重合与直接的时空的接近性，才对我们有直觉上明显的意义。如果我们相信宇宙的隔离性，即相信两个局限于时空中的不同事件是发生在同一地点（但时间不同）或同一时间（但地点不同）这种说法具有客体的意义，那就是已经对作为介质的

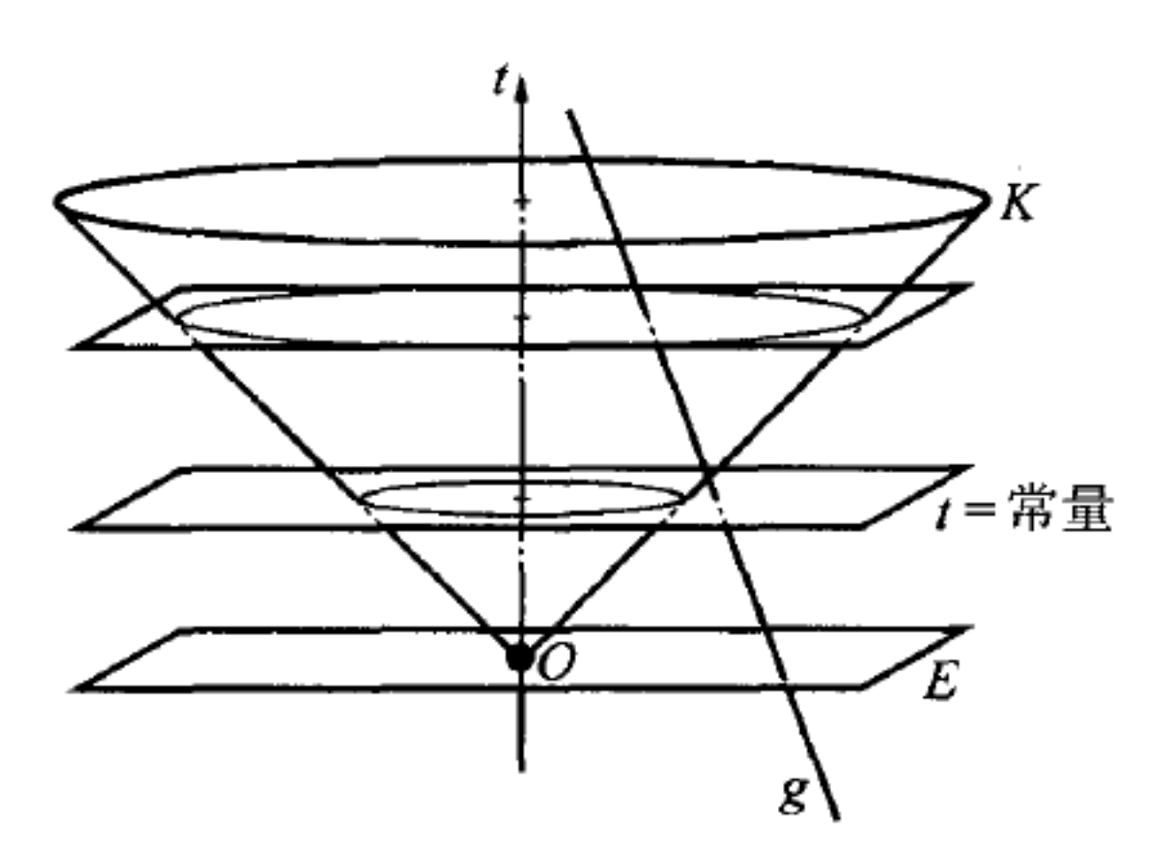


图 1　世界的分层与纤维化的图示。世界线 g 表示匀速平移，K 是光锥。

四维外部世界的广延性赋予了一个确定的结构。所有具有同一时间的世界点形成一个三维的层(stratum)，而具有同一地点的世界点则成一个一维的纤维(fiber)。按照这一观点，我们可以把世界的结构描述为：世界具有一种分层，而其各层又都被纤维横截。(也就是说通过每个世界点仅有一个层和一条纤维；一条纤维与一个层只能交于一个世界点。)现在为了便于作图，我们抛掉一个空间维，从而只考虑在一个曲面上，特别是在一个平面上发生什么事。我们把这个平面表示在一水平的平面 E 上，而把时间 t 表示在与它垂直的方向上。这样我们就可画出直觉空间中的世界之图；在此图上，所有同时的世界点的层都成为水平的平面，而同一地点的世界点则表现为铅直的直线。

此外，我们还通过对时间区间的相等以及空间构形之全等赋以客体性的意义，而对时间与空间给以一种度量结构。欧氏几何的命题，则对空间结构描述得比较详细。如果在我们的图示上，垂直的时间轴上的等长线段表示相等的时间区间，则在一直线上匀速运动的物体的图像的时刻表将是一条倾斜的直线。在这条世界线上的点都是，而且仅仅是，一个物体在其历史过程中所占据的时空位置。静止物体的世界线是铅直直线。若两个物体的世界线在某个时空点相交，这两个物体就会相遇。

把空间的结构从它下面的无定形的连续统在概念上分离出来，从而把空间只看作是“接触”的媒介，这早在亚里士多德关于空间的概念中就已指出。罗巴切夫斯基说(*Urkunden zur Geschichte der nichteuklidischen Geometrie*, ed. by Engel and Stäckel, Ⅰ, p. 83)，“接触成了用以区分物体的特性，几何物体之所以得到名称全赖于此，如果我们只关心这一性质，而排除物体的其他性质，不论其他物体是本

质的还是偶然的，这个几何物体即可得到名称。”然而在这里只对空间而不是对时空表述了这一思想。不论世界结构的内在理由是什么，所有的自然定律都以最为鲜明的方式表现出这一思想对物理事件历程的影响。这些定律包括：刚体和钟的性态；物体在不受外界影响时的匀速直线运动；光线在空的空间（在观看物体时所用的空间）中是直线；光波、声波或水波按同心球面或同心圆传播，等等。我们的任务就是从时间与空间的物理效应中看出它们的结构。所以我们必须要问：怎样客体地确定同位置性或同时性，以及时间区间之相等与空间构形之全等？

关于这个问题的第一部分，我们要提到，运动的相对性理论与绝对空间的教义总是互相反对的。亚里士多德认为位置（τόπος）只不过是一个物体与其邻近物体的关系。笛卡儿（*Principia*，Chap. Ⅱ）把运动定义为“物质的一部分或物体，从那些与它直接接触的物体邻近区域移动，而这些物体被视为在其他物体附近是静止的”。洛克（Locke）在他的著作（*Enquiry concerning Human Understanding**，Book Ⅱ，Chap. 13，Sections 7—10）中对位置的相对性作了透彻的讨论。伽利略以一个书记员为例，干净利落地说明了这个问题，他说一个书记员正坐在一艘运动着的船上作记录，那么，“实际上”，即相对于地球，这个书记员用自己的鹅毛笔画了一条略有起伏的光滑曲线，从威尼斯一直延伸到亚历山大港（Dialogo，*Opere* Ⅶ，p. 198）。莱布尼茨在与克拉克（和牛顿）的争论中，也从逻辑—认识论角度极为

* 原书说的洛克的著作 *Enquiry concerning Human Understanding* 似乎有误。洛克的基本著作是 *Essay concerning Human Understanding*（《人类理智论》），1687 年完稿。按原书正文所列章节查阅洛克关于空间位置之相对性的论述，这里应指《人类理智论》。似乎原书把洛克与休谟的著作混起来了。休谟的主要著作是 *Treatise of Human Nature*（《人性论》），1734—1737 年，后来他把此书缩写成 *Inquiry Into Human Understanding*（《人类理智新论》），1748 年。是否原书把 *Essay concerning*...误为 *Enquiry into*...？*Inquiry* 就是 *Enquiry*。下文亦同，不再注明。——译者

彻底地论证了空间中的位置的相对性。他在这里使用了家谱上的位置这个令人愉快的例子(见莱布尼茨致克拉克的第五封信，§47)。

[莱布尼茨在他的第三封信，§5中的论据也很重要。“如果假设空间本身是什么东西，而不只是物体之间的次序，则不可能给出上帝为何把物体恰好放在这里而不放在那里(但不干扰它们的相互距离与相对位置)的理由；例如上帝为什么不把物体的东和西对调。然而另一方面，如果空间只是事物的次序与关系，而没有了物体，它就什么也不是，而只是给物体指定位置的可能性，这时，上面讲的两种状态，即真实的状况与东西对调后的状况是没有办法区别的。它们表观上的不同，只是我们认为空间本身有现实性这一虚妄的假设的推论。然而事实上，这两种状况的每一个都与另外一个完全无法区别。所以要问何以一种状况优于另一种，这个问题是难以许可的。”[1]与此相对照，绝对主义者牛顿把运动看成是上帝按自由的意志创造世界的证据；因为如果不是这样，就无法理解何以物质按此方向而不按其他方向运动[见科茨(Cotes)为《原理》(*Principia*)第二版作的序，ed. Cajori, p. XXXII，又见 *Principia*, ed. Cajori, p. 546]。莱布尼茨受自己神学的限制，不能让上帝承担作这种决定的重担，因为它缺少“充足理由”。]

在我们日常生活的绝大多数时候，当我们谈及静止和运动时，有充分的理由相信，取为参考系的物体是“基础稳固的永恒的地球”[2]。出于实际目的，这种选择很自然，也最为方便。只有具有非凡的想象力，才能够使感官摆脱对于表观的局限，而能在空间中自由地构造，才能解除这一选择。阿那克萨哥拉就是这样想象出地球

在空间中有锥形影子，并由日月食和月相的变化，得出了地球、太阳、月亮和众星辰正确的空间排列；他在“月球的脸”上看出了它的山峰的影子的效应。毕达哥拉斯学派的人也是用同样的方法达到了地球为运动的假设。亚里士多德自觉地反对毕达哥拉斯学派和柏拉图学派先验的数学构造的精神，回复到地心系统。同时，这是一种对宇宙的确定的宗教态度，表现为在所有其他参考物体中，为人类所居住的地球保留了绝对的特权。这是在客体现实性的领域内坚持唯心主义的企图，即坚持我是展现于我的世界的中心。但是在这里，承认有“你”(thou)乃是有“我”(ego)之所需，而“我”(ego)又扩展为包含全人类，所以，这种必要性原本是唯心论的立场，现在又有了历史的和宇宙—神学—逻辑的(cosmo-theo-logical)意义。这就是哥白尼(Copernicus)的书成为对于世界概念的转折点的理由；布鲁诺在这个方向上以疾风迅雷般的热情得出了他的结论。上帝以自己的爱子为人类赎罪这一至为崇高的行为，耶稣在十字架上受难及复活，现在已不再是世界历史的唯一支撑点，而成为在一个又一个星体上演出的戏剧，如匆匆来往于小镇之间巡演的戏班子一样——这种亵渎也许是以一种最为含义深远的方式，显示出一个理论在宗教上的危险性，这个理论把地球从世界的中心搬走了。(布鲁诺当然要为此赔付赌注。)“认为‘宇宙的目的在于人这种思想是最愚蠢的’，开普勒(Kepler)、伽利略和笛卡儿都曾得出过这个命题，”狄尔泰(Dilthey)说(Der entwicklungsgeschichtliche Pantheismus, *Gesammelte Schriften*, Ⅱ, third ed., 1923, p. 353)，“这个命题完美地完成了对世界之解释的彻底改变。如果这些思想家被引导去思考一种存在于万物之中的目的论，即认为宇宙的目的表现在其和谐与美，则迄今占统治地位的基督教宗教狂热就改变了。”但是，歌德(Goethe)在他

的《色彩理论历史》(*Geschichte der Farbenlehre*, 3te Abteilung, 2te Zwischenbetrachtung)中说："在承认这一点以后，人类可能反而比过去更加需要仍未化为烟云的东西：第二个天堂，无邪的世界，充满诗意和怜悯的世界，感官的证言，对于诗意的宗教的忠诚信念。并不奇怪，人们不希望所有这一切都逝去，他们以各种可以想到的方式来反对一个理论，而这理论却给予接受它的人以一种他迄今还不知道的，甚至做梦也想不到的，思想自由和心灵提升的权利与挑战。"

从运动的相对性的观点来看，哥白尼系统是真是假无须争论。事实只是，如果从相对于太阳而不是相对于地球的观点来看，行星的运动要简单得多。

[牛顿在《原理》一书中把他的力学的展开奠定在绝对时间、绝对空间和绝对运动的观念上。他说："绝对的、真实的和数学的时间，由其自身决定，自身均匀地流逝，与一切外在事物无关。……绝对空间，其自身特性与一切外在事物无关，处处均匀，永不移动。……绝对运动是物体由一个绝对处所迁移到另一个绝对处所"(*Principia*, ed. Cajori, 定义Ⅰ、Ⅱ、Ⅳ后面的附注，pp. 6—7)。* 因为无可否认，从运动学角度把一个物体的各种可能的状况区分开来，是不可能的，所以牛顿力求从动力学角度把静止状况与一切可能的运动状况区别开来，而以诸如向心力之类的现象为基础。所以牛顿接着说："真实运动与相对运动之所以不同，原因在于施

* 以上译文借用王克迪译的牛顿《自然哲学之数学原理》(简称《原理》)(武汉出版社，1992年)，6—7页附注的Ⅰ、Ⅱ、Ⅳ诸款。下面一段也是借用这个译本，9、11、12诸页。在引用时作了一些文字修改。——译者

于物体上使之产生运动的力。……要认识特定物体的真实运动，并切实地把它与表象的运动区分开，确是一件极为困难的事。因为运动发生于其中的不动空间的那一部分，无法为我们的感官所感知。不过这件事也没有彻底绝望；我们还有若干见解作指导，其一来自表象运动，它与真实运动有差异；其一来自力，它是真实运动的原因与后果。例如两只球由一根线连接并保持给定距离，围绕它们的公共轴心旋转，则我们可以由线的张力发现球脱离可转动轴的倾向，进而可以计算出它们的转动量。……但如何由其原因、效果及表象差异推知真正的运动，以及相反的推理，正是我要在随后的篇章中详细阐述的。这正是我写作本书的目的。"（*Principia*, ed. Cajori, pp. 10 and 12.）

牛顿相信绝对空间，是受到了神学的影响。他在他的《光学》（*Opticks*）一书中这样谈论上帝："[神]在他的知觉中密切注视事物自身，彻底地感知它们，由其直接呈现完全地了解它们"（ed. Whittaker, p. 370）。牛顿在这里接受了莫尔（Henry More）的神学。对于莫尔而言，空间是"非物质本性"的真实与必要的权威的首要证据；他在空间的本质中重新发现了神性实质的特性；空间把神性与各个对象联结起来。牛顿以先验的形而上学的观念规定了世界结构的本性，即它的纤维化。但是现实世界纤维化的真实过程，必须通过纤维化对可观察的现实现象的效应才能确定。那就是他的科学计划。顺便说一下，牛顿并未成功地完全掌握这个问题。他只做到了从动力学角度把匀速平移作为物体不受外力影响时的纯惯性运动而与别的运动状况区别开来；但是他没有做到把静止状态从其他平移中区分开来。由于所谓的狭义相对论，他在这方面是必定要失败的。牛顿力学的定律是适合狭义相对论的，今天已由一系列最精确

的实验所证实，它也适用于所有的自然现象：在一艘匀速平直航行的船的船舱中，所有事件均与静止的船舱中的情况一样；在大自然中任取一个事件，若对参与其中的所有物体都给以匀速平移，则所得的新事件也是同样可能的。伽利略在他的《对话》（*Opere*，Ⅶ，pp. 212—214）中清楚而流畅地展开了这个原理。牛顿在这一点上则求助于在经验中并无根据的假设，或者以狡辩来搪塞。这在他的《原理》第三编*中宏伟地、无可辩驳地归纳起来的宇宙体系中，是一个不谐和音。这个假设认为宇宙有中心，中心是静止的。太阳系的公共重心，与任何不受外力作用的物体系统的公共重心一样，沿直线匀速运动；这样，他从力学定律正确地推导出，也就是我们现在所谈到的（*Principia*，ed. Cajori，p. 419），"……而如果该重心是运动的，则宇宙的重心也在运动，这与假设相矛盾。"但是他没有作出任何努力来说明，把行星系的重心假设为与静止的宇宙的重心一致的理由（除非是考虑到静止的重心是一个点，它可以在物质事件基础上得出来，而按照力学的法则，它的运动是匀速的平移）。]

我们的经验证明了不同的运动状况在动力学上是不等价的，这个经验告诉我们世界有一个结构。但在绝对空间的概念中显然没有正确地估计到这个惯性结构（inertial structure）；分界线并不在静止和运动之间，而在匀速平移与加速运动之间。用上面的图示来讲，在世界中跟在空间中一样：作为客体，直线有别于曲线，但在所有直线之族中，要想把"铅直"直线单独分出来，就需要一个规约，这个规约

---

* 第三编标题即"宇宙体系（使用数学的论述）"，见《原理》一书中译本，403—544页。——译者

必须以个别的展现为基础。

至于分层，即同时性概念如何？ 相信同时性概念有客体性的意义，是基于以下事实：每个人都视为当然地以为他观察的事件就发生在观察到它们的时刻。 这样，我就把我的时间扩展到进入我的视野的整个世界。 虽然在发现光具有有限的传播速度之后，这种朴素的看法就已失去了基础，但是坚持这个信念仍有某些理由（而不能归之于不愿放弃已有的成见）。 在我们的图示中，经过世界点 O 的水平面把从 O 点所见的过去和将来分开了。 在“过去”和“将来”这些名词后面的实在是什么？ 从 O 点向一切可能的方向以一切可能的速度发射子弹，我只会击中那些在 O 以后的世界点；我不可能射中过去。 与此类似，在 O 发生的一切事件，只对以后的世界点的事件有影响；过去的事是无法改变的。 这就是说，分层有一种因果的意义；它决定了世界的因果联系。 这一点莱布尼茨就已经认识到了，他在《数学的形而上学原理》（Initia rerum mathematicarum metaphysica， *Math. Schriften* Ⅶ，p. 18）中说：“若两个不同时的元素，其中一个包含了另一个的原因，则前者被看作是在先（preceding），后者被看作是在后（succeeding）。” 在一瞬间就把时间从 A 处转移到 B 处的一种简单方法是，在一个由 A 伸展到 B 的刚性杆的 A 端推一下；则在 B 端与 A 端同时观察到这一推。

但是，物理学的现代发展导致了在世界的因果性结构方面的本质的修正。 设在图 1 中在 t 轴上表示 1 秒的线段，与在表示距离的水平平面上表示光在 1 秒内走过的距离的线段，长度相同。 则由 O 点发出的、向一切方向以相同速度 c 传播的光信号，都可以被那些位于以 O 为顶点、顶角为 90° 的直立圆锥表面上的世界点所接收到。 按照爱因斯坦的狭义相对论，由上述锥面及其过 O 向后的延伸构成了

所谓“光锥”，正是这个光锥而非过 O 的水平面将世界分开为过去和将来。任何效应(包括我们用来传递时间的对刚性杆的一推)都不可能以大于光速的速度传播；任何物体的速度一定低于 c。这是狭义相对论原理以及下述事实的不可避免的推论：由 O 发出的光锥只依赖于O，而与状态无关，特别是与在 O 点发出信号的光源之运动速度无关。(不幸的是，这个事实总是用选得不甚恰当的短语“光速为常数”来表达。)

图 2　因果性结构。K 为光锥，L 为生命线。

如果我在 O 处，则 O 将把我的“生命线”(即我的身体的世界线)分成两部分，即过去和将来；在这一方面什么都没有改变。但是就我与世界的关系而言，情况就不同了。在锥的向前部分的内部，可以找到我在 O 处之所作所为对之有影响的所有世界点，其外部则是那些对于我而言是封闭起来的世界，对之我完全无能为力；前向的锥构成了我的*主动的将来*。与前不同，我所见证了的事件，或者是我得到过信息的事件，这两类事件的世界点占据了锥的后向部分的内点，只有这些事件可能影响到我；所以这就是我的*被动的过去*的区域。这两个区域，主动的将来与被动的过去，并非无间隙地互相邻接的，而按老的观点却会是这样的。

〔此外，我们的任务是从物理学的角度来描述时间区间的相等和物质的物体之全等。所谓一个时钟就是一个封闭的物质系统。它会回到它以前所处的相同的状态 S。我们假设因果性原理成立，这个

原理断言，一个系统在某一瞬间的状态唯一地决定了它的整个历史。于是同样的过程，状态的同样的循环系列，即一再地由 S 到 S，就会一次次地周而复始，且可定义为有相同的延续性(duration)。这样测量出来的是时钟的“本征时间”(proper time)；它可以直接用于在时钟的世界线上所发生的一切事件。亥姆霍兹说(Zählen und Messen, *Wissenschaftliche Abhandlungen*, Ⅲ, p. 379)，“时间的量度预先假设我们已经找到了一些物理过程，它们在同样条件下，以不变的同样方式重复自身，使得如果它们开始于同一瞬间(更正确些应该说是发生在紧邻的时空点)，则也必同时终结；昼夜的流逝，摆的摆动，沙或水从沙漏或水漏中的流出，莫不如此。假设延续性之不变，是基于这样一种情况，即量度时间的不同方法，若执行得很细致，总会给出一致的结果。”关于经验地决定空间的全等性，他在另一处说(*Wissenschaftliche Abhandlungen*, Ⅱ, p. 648)，“我称两个空间延展为物理等价，如果在相同的条件下，相等的时间区间中，同样的物理事件可以在这两个空间延展的内部发生。确定等价性使用得最多的方法，是把刚性的物体如圆规和直尺，从一处移到另一处。”亥姆霍兹把建立在物理可观察的全等性基础上的物理几何学，看作是一门经验科学，而且是“自然科学中第一位的、最完全的一门”。黎曼在他的就职演说中讲到这种物理几何学时，指出了一件在未来物理学中可以想象到会有重要的意义的事，即“作为空间度量基础的经验概念，刚体和光线概念，在无穷小领域中均不再适用”。事实上可以证明，世界的度量结构已经由其惯性结构和因果结构完全地决定，所以量度并不需要依赖于时钟与刚体，只要有光信号以及质点在惯性下的运动就够了。

当以某种方式对一三维连续统给以坐标 x_0，x_1，x_2 时，它就被

映到三维的实数空间上，即映到实数的所有三元组的连续统上。使用一种较熟悉的说法，我们用赋有笛卡儿坐标系的三维的直观空间取代了实数空间。在把这个程序应用于四维空间时，我们不得不在想象中取消它的一个维度，但这没有什么害处。平面的地理地图提供了一个二维的例子。在一幅使用墨卡托(Mercator)投影法的地图上，旧金山、格陵兰的最南端和北岬(North Cape)* 位于同一条直线上，但是我看到，在一幅使用正交投影法绘制的北半球地图上，就不是这样了，对此我并不惊奇。与此类似，世界的某种映射，若把 x_0 轴解释为时间轴，也可以作为使用通常的几何学—运动学名词的基础。(例如，如果一个物体的世界线是铅直直线，即沿着它 x_1，x_2，x_3 均为常值而仅有 x_0 变化，我们就说它是静止的。)只有那些与地图投影法的选取无关，因而在地图的任意变形下都不变的关系才有客体的意义。例如两条世界线的相交就是这样一种关系。如果我们想要刻画出一个或一类特定的映射，就必须用实在的物理事件以及其中显示出的构造才行。这就是广义相对论公设的内容。按照狭义相对论，特别是可以构造世界的一个映射，使得：(1)每一个不受外力作用的质点的世界线都是一条直线；(2)从任一世界点发生的光锥都是圆锥，其轴是铅直的，而顶角是 90°。在这个理论中，世界的惯性构造与因果性构造，从而还有度量构造，都具有刚性的特征，它们永远都是固定的。如果不求助于个别的展现，就不可能客体地在满足条件(1)与条件(2)的“正常映射”中选出较窄的一类。]

对运动的运动学分析与动力学分析会产生偏离，这件事需要得到

---

* 北岬位于挪威极北端。——译者

解决。我们从惠更斯的信件中了解到，他甚至也曾致力于从动力学的角度把所有运动的等价性的观点贯彻下去；在他的遗著（重印于 *Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, Vol. 29, 1920, p. 136）中就记载了他在这方面的尝试。在我们的时代，马赫（Mach）* 也曾在他的《力学》（*Mechanik*）（第七版，1912）一书中做过同样的事情。把地球表面在极点附近展平，并在那里做傅科摆实验，他由此看到了地球相对于恒星旋转的效应；恒星将要支持着并且携带着摆的平面。另一方面，莱布尼茨不论如何坚决地反对牛顿关于空间的形而上学，却坚持以下的意见，即空间“只不过是事物间的次序”，显然同意牛顿用动力学判据来区分真正的运动与表观的运动。（请比较他于 1694 年 6 月 12/22 日致惠更斯的信，*Math. Schriften*, Ⅱ, p. 184；以及他在 In. rerum math. metaph., *Math. Schriften*, Ⅶ，第 20 页说的一段话：“我们说一物体在运动，如果它改变自己的位置，而且其改变的原因在于自身。”）欧拉（*Theoria motus*, 1765，特别是 § 81）也认为运动的相对性原理虽然对于我们的理性是显然的，但根据动力学的经验却必须放弃。人们本以为在康德的《自然科学的形而上学原理》（*Metaphysische Anfangsgründe der Naturwissenschaften*）中能找到问题的正确提法，但它实在无助于问题的解决。

顺便可以提到，如果没有一个世界结构，则按广义相对论公设，几个物体的相对运动概念和单个物体的绝对运动概念一样，是没有基础的。我们把四维世界设想为一块做塑像用的黏土，而各个纤维，即物质粒子的世界线，则穿过其间。除了要服从两条世界线不得相

---

* 马赫（Ernst Mach, 1838—1916），奥地利物理学家、哲学家。——译者

交这一条件外，这些世界线的形状可以是任意的。然后让黏土连续地变形，使得不仅是一条纤维，而且是所有纤维都变成了铅直直线。于是，只要你遵从惠更斯与马赫的倾向而抛弃世界的构造，则问题不可能解决。但是，一旦认识到惯性结构是各种运动的动力学上的不等价的原因，我们就清楚地看到何以情况会如此令人不满意。我们被要求相信，那个造成如此巨大效应——例如在列车相撞时它与分子力之间的斗争所加于车辆的效应——的惯性，原来只是世界的刚性的性质，是永远固定不变的。莱布尼茨(与笛卡儿相反)着力强调惯性的动力学特性，即一种对改变方向的力加以抗拒的倾向；例如，他在一封给德沃尔代的信(*Philosophische Schriften*, Ⅱ, p. 170)中写道："如果某个东西只是保持它的状况直到发生了某种事件来改变它为止——若主体对于这两种状况全然漠不关心就发生这种情况，这是一回事；而如果主体并非漠不关心，而是有一种力量，或者可以说是一种倾向，即保持原状而抗拒改变它们的原因，那就是另外一回事了，而且意义更大。"因此，只要我们敢于承认惯性结构是一种实在的东西，它不仅对物质施加作用，而且反过来也承受这种作用，则问题迎刃而解。黎曼早在19世纪中叶就空间的度量结构走出了这一步；因为度量与世界的惯性结构的联系如此密切(毕竟是度量决定了直线)，只要剥夺惯性场的几何刚性，度量场也就变得很柔顺而易于处理了。

爱因斯坦独立于黎曼重新发现了这个思想，他通过一个重要的洞见使之完善，并使它后来在物理上富有成果。从惯性质量与重量之相等——这是一个在他之前人们就早已很好地确知但并未理解的谜——爱因斯坦得出了结论，即在力与惯性的二元对立中，要把引力归于惯性一边而不是归于力一边。引力现象就这样暴露了惯性场(field of inertia)——我宁可称之为"引导场"(guiding field)——的可

变性以及它依赖于物质的秘密。 统一的引导场分裂为服从伽利略惯性定律的匀齐的部分，以及比惯性微弱得多的偏离的另一部分，后者称为引力，它包围着各个星体。 但是这种分离不可能以绝对的方式来完成，而只有相对于坐标系才能做到。 取代牛顿的引力定律而支配着物质之作用于惯性场的定律，决定性地来自于这个概念。 他们的结论已由经验充分地证实了。

〔引导场只是受到物质的(非常轻微的)扰动，正如湖面受到航行的轮船扰动；而当物质消失以后，引导场又将回到由狭义相对论所描述的无扰动状态，正如湖面在轮船抛锚以后又变成光滑匀齐的平面。然而，爱因斯坦也调侃马赫的观念。 按照早前的说法，要想消除惯性场(亦即“以太”)之作为自然现象的独立力量是不可能的。 并非星球在引导傅科摆，而是二者合一，即傅科摆以及由星球到地面观察者的光线所成的光罗盘构成的联合运动在引导傅科摆，这个联合运动是由于以太在与物质的相互作用中，具有压倒性的力量。 把惯性与引力绝对地分离开来，这个老观念只在下面这一点上错了，仍然使用我们上面的例子来说，老观念认为湖中的水的粒子的真实位置，是由唯一的静止状况以及航行的轮船引起的位移共同形成的。 在这一点上，老观念是不正确的；实际上，当夜晚所有的船只都已停航后，水面复归平静，我们就无疑会得出清晨船只出航前一样的“定性状态”，即一个平静的湖面；但是隐藏在后面的“物质状态”，即各个不同的水粒子的位置可能已经完全改变了。 这并不与充足理由原理相矛盾，而按该原理湖面应有唯一决定的平衡状态。 其原因在于，如果所有的水粒子都是相似的，由粒子任意交换位置而成的湖面的两个状态 S 与 S'，若仅考虑其自身，是无法区别的。 只有在“引入一

个坐标系”（在这种情况下对每个粒子给以一组数，而这组数在各粒子间引入了人为的差别，且在粒子的运动中始终伴随），谈论两个物质状态 S 与 S' 之区别才有意义（见附录 B）。然而说真的，重要的并不是我们可以干预粒子的安排而形成物质状态 S，而是由物质状态 S 到 S' 的转换，这是一种排列，这一点应与前面引用的莱布尼茨关于位置的相对性的评论（见 122 页）作比较。

现在要把三维空间中的欧氏旋转群 Δ_0（见第 15 节）换成所谓洛伦兹群（Lorentz group）。这个群就是由保持以下的不定二次型 $-z_0^2+z_1^2+z_2^2+z_3^2$ 不变的齐次线性变换

$$z_i' = \sum_k a_{ik} z_k \quad (i,\ k = 0,\ 1,\ 2,\ 3)$$

所组成的群。对每一个这样的变换，系数 $a = a_{00}$ 的绝对值，以及 3×3 的系数矩阵 a_{ik}（$i,\ k = 1,\ 2,\ 3$）的行列式 d 之绝对值均 $\geqslant 1$。我们根据 $a \geqslant 1$ 或 $a \leqslant -1$ 称此变换有时间符号 + 或 −，同样 d 的符号决定其空间符号。时间符号为 + 的洛伦兹变换构成整个群的指标为 2 的子群。空间符号为 + 的变换也构成指标为 2 的子群。它们的公共部分则包含在两者之中，并成为每一个上述子群的指标为 2 的子群。时间符号为 − 的变换将过去与将来对换，而空间符号为 − 的变换则将左与右互换。我们的生活的最基本的经验似乎指明了，Δ_0 应该限于时间符号为 + 的洛伦兹变换（但是包含空间符号为 − 的变换）。但是物理学发现，这件事颇难判定（见第 23 节，C）。还有第三个符号（拓扑符号），加于坐标变换上，由雅可比行列式的符号决定。]

我们可以用“广义相对论”把时空的结构问题之最终结果总结如

下：世界是一个四维黎曼空间。由坐标为 x_0，x_1，x_2，x_3 的 P 点出发，将 P 与无限接近的点 $P' = (x_i + \mathrm{d}x_i)$ 联结起来的每个线元，存在与之有关联的数值量度

$$\mathrm{d}s^2 = \sum_{i,\,k=0}^{3} g_{ik}\mathrm{d}x_i\mathrm{d}x_k \quad (g_{ik} = g_{ki}),$$

它与所采用的任意的坐标系无关。系数 g_{ik} 依赖于 P 的坐标 x_0，x_1，x_2，x_3，但与 $\mathrm{d}x_i$ 无关。上式右方的基本度量形式并非正定的，而有一个负的维度；即在适当坐标系下，它在 P 点具有普适的正则形式

$$\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}x_0^2 + \mathrm{d}x_1^2 + \mathrm{d}x_2^2 + \mathrm{d}x_3^2。$$

由于这一情况，“P 点的光锥”，即由 P 发出并使 $\mathrm{d}s^2$ 等于零的线元组成的锥，把 P 点的主动的将来区域与被动的过去区域分隔开来。基本度量形式以很容易详细描述的方式决定了时钟与尺的行为，它确定了光锥的整个延伸，并把纯惯性运动的世界线（例如行星的轨迹），从所有可能的世界线之总体中区别开来。它的系数，即连续函数 $g_{ik}(x_0, x_1, x_2, x_3)$，在所选取的坐标系中描述了度量场，即与物质相互作用的“以太的状态”。

当提出整个宇宙整体延伸问题时，必须要区别其纯拓扑的侧面与度量侧面。从亚里士多德绕着一个中心旋转的水晶球世界体系，转变到没有中心而各个星球散居其中的冷漠地无限延伸的欧几里得空间，布鲁诺欢迎这个转变，视之为威力强大的解放。然而亚里士多德空间（水晶球的内域）与无限空间的区别仅在其度量关系上，而不是拓扑上不同。如果我们假设物质在总体上均匀分布于宇宙之中，而牛顿万有引力定律又成立，则无限的欧几里得空间必导致谬论。虽然恒定质量的引力与距离平方成反比下降，远处的质量仍将在整个引

力的作用中占优，使得作用在任一星球上的整个引力作用完全不能确定。然而，空间可能是有限但却无界的；说实在的，它可能是一个如二维球面那样的闭流形。施派泽在《数学经典文献选》（*Klassische Stücke der Mathematik*，1925，p. 53）中对但丁（Dante）作了一个有说服力的解释，即但丁并不否认亚里士多德知觉的空间的观念是有效的，而是假设真实的神创的空间（知觉的空间是它的象）是封闭的而非有界的。由地心[这是撒旦（Satan）的居所]发出的半径会收敛于相反的另一极，即神力之源。上帝个人之力必定是从一个中心发出的，它不可能包住处于空间的宁静之中的世界球，而成为亚里士多德的“无动于衷的第一推动者”[请与但丁的《神曲》（*Divina Comedia*）第三部分《天堂》的第 28 篇以下诸篇比较]。当爱因斯坦试图在他的引力理论的框架中实现马赫原理时，他用一个封闭的三维空间构造了一个静态的宇宙 U_a 而物质均匀地分布于此三维空间中；世界的总质量决定了空间的体积。爱因斯坦的空间当然与但丁的空间不同，它没有那一对特别的相反两极。它和欧几里得空间一样匀齐。如果对引力方程再加上一个所谓的宇宙学项，由 U_a 就可得到引力定律的一个可能解。宇宙学项中引入了一个宇宙常量 a，其量纲为距离（而且具有“世界半径”的数量级）。

如果抛弃两个空间维，我们可以把 U_a 描绘为一个半径为 a 的铅直柱面，其两端均伸向无限。这表明 U_a 有两个分开的“边缘”，即无限遥远的过去与无限遥远的将来，而在这个拓扑意义下，U_a 是从永恒伸向永恒。使用同一种降低维数的方法，则欧几里得—布鲁诺的共同概念（即宇宙是一个空旷的世界，其度量性质由狭义相对论来描述）下的宇宙 U_∞ 的映象（map）就是一个铅直的平面，所以它只有一个连通的边缘。我们在以上的分析中使用的封闭空间与开空间两

个词，正是指明 U_a 与 U_∞ 在这个拓扑上的区别(前者有两个边缘，后者只有一个)。

{在爱因斯坦的宇宙学中，度量关系是这样的，即由一个世界点发出的光锥将无限次地折回其自身。所以，一个观察者可以看见一个星体的无穷多个像(除非它们被稀薄的宇宙尘埃介质遮蔽了或被折射隐去了)，向他展示一个星体的各个状态，这些状态之间隔了一个“永恒”(eon)，即光在世界球上绕行的时间。由久远的过去的魅影中能拍摄到现时。此外，这个解又是不稳定的。然而，德西特(de Sitter)发现引力定律也允许有可能存在一个无质量的由永恒到永恒的世界，其中由一个世界点发出的未来域并不与自身相重叠。由最遥远的天体(螺旋状星云)发出的光谱线有系统地向光谱的红端移动，这可以用膨胀的宇宙来解释，而德西特的做法给出最简单的模型[还有外尔、弗里德曼(Friedmann)、勒梅特(Lemaître)、罗伯逊(H. P. Robertson)和其他人的研究]。这样可以得到 a 的值 $\sim 10^{27}$ 厘米。附带说一下，每一个适合某种自然的整体匀齐性条件的世界(不论它是虚空的还是有质量的)，若在膨胀过程中世界半径变得远大于 a，都渐近地服从这个模型(又见第 23 节，C)。对于每个世界点 O，主动的将来和被动的过去，这两个世界域是分离的(不仅是在 O 的紧邻而且在其整个延伸域中)，这一公设排除了一个世界既在其空间维中封闭又在其时间维中封闭的可能性。在这样一个世界中，不论什么事件，一旦发生，都会按着一个代代相传的传统，成为永恒再现[这就是尼采说的“ewige Wiederkunft”(永恒的再生)]。}

参考文献

I. NEWTON, *Philosophiae naturalis Principia Mathematica*.

L. LANGE, *Die geschichtliche Entwicklung des Bewegungsbegriffs*, 1886.

Das Relativitätsprinzip(collection of the most important papers of H. A. LORENTZ, A. EINSTEIN, H. MINKOWSKI, H. WEYL), edited by O. Blumenthal, fifth edition Leipzig 1923; English edition, London 1923.

A. S. EDDINGTON, *Space, Time, and Gravitation*, Cambridge, 1920; *The Mathematical Theory of Relativity*, Cambridge, 1923.

H. WEYL, *Raum Zeit Materie*.

A. S. EDDINGTON, *The Expanding Universe*, Cambridge, 1937.

H. P. ROBERTSON, Relativistic Cosmology, *Reviews of Modern Physics* 5, 62—90, 1933.

17 主体与客体(认识论的科学意义)

感觉品质的主体性的学说自德谟克利特提出以下的原理以来，一直与科学的进步密切联系着。这个原理就是："甜与苦，冷与热，还有色彩，所有这些都只存在于我们的意见之中，而并不存在于现实中(νόμῳ, οὐ φύσει)。"真正存在的是不可变的粒子(原子)，它们在虚空的空间中运动。柏拉图(*Theaetetus*, 156e)也说："硬、热这些性质，不论其名称是什么，并非自身存在的东西，"而是在主体与客体的"运动"相遇之时生成的。实在是纯粹的活动，它只是存在于"映象"中，夹在运动的间隙里，夹在意识中受罪。也可以提到伽利略作为另一个证人，他说："白与红，苦与甜，喧闹与安静，芳香与恶臭，都只是作用于感觉器官的某些效应的名称。"他认为不能把它们归之于外在客体，正如在与物体接触时产生的痛与痒一样。这一点在笛卡儿的《原理》的最后几个部分与他的《光学》(*Traité de la Lumière*)中均有表述(视知觉的理论有赖于笛卡儿才会有重要进展)。洛克在《人类理智论》(Book Ⅱ, Chap. 8, §§15—22)中的说法也类似。在哲学与科学两个方面都需要坚持感觉品质的主体

性。 首先，感觉的这样一些品质，由于其本性，只有通过感觉才能进入到我们的意识中。 我们或者把它看作感觉本身就固有的属性，或者在作了更深入的分析后，把它看作是一个有目的客体用有意识的行动推到我面前的实体。 但是显然无法理解，何以与意识相分离的品质能作为如此的性质被赋予如此的事物。 这是认识论的唯心论的基本信条。 其次，外部世界的客体，用某些品质装扮起来以显现于我，这些品质并不只依赖于客体。 它们相当本质地也依赖于相伴的物理环境。 以色彩为例，就还要依赖于照明，依赖于位于客体和我的眼睛之间的介质的性质，进一步说还要依赖于我，依赖于我自己的心理—物理组织。 我的视觉并不是在客体存在之处抓住了客体；宁可说，我看见什么，是由与我的感官(视网膜)相接触处的视场的状况决定的。 甚至实在论者也不能否认这些科学事实。 如果人眼对于其他的波长也敏感，或者视网膜上的生理过程是把物理上不同色彩的无限维的组合域映到一个三维甚至四维流形上，而不只是映到一个二维流形上，世界对于我们的视觉该有多么不同！

〔“次生”品质与“原生”品质的经典区分，我们是得自于洛克；原生品质是物体的时空性质——如广延、形状和运动。 德谟克利特、笛卡儿和洛克都认为它们是客体的。 洛克说：“物体的原生品质是它们的形象，而它们的模式确实存在于物体之中；但次生品质在我们中间生成的思想则与它们的形象毫不相似”（上引书，Book Ⅱ，Chap. 8，§15之始）。 虽然笛卡儿教导说，在真正发生的事情与对这些事情的知觉(例如声波和音调)之间，其相似之处不会多于事物与其名称之间的相似之处，他仍然坚持关于空间的概念具有客体的有效性，因为与其他品质不同，我们能清晰而判然地认识它。 而他

的认识论的基本原理就是宣称，凡我们能清晰而判然地理解的均为真。然而，他必须求助于上帝的诚实无欺来支持这个原理，因为他认为上帝是不会欺骗我们的。一旦一个人既要坚持唯心论的原理，又因为意识的某些要素因某种原因似乎特别可靠，从而想坚持从这些要素来建立起外部世界，那么，没有这样一个保证真理性的上帝的概念是不行的。“一方面是独处、刚愎自用和孤立的思想，这思想又只是对它自身为确定无疑，另一方面是外部世界，在两者之间……上帝是一座桥梁。建立一座桥梁的企图虽然过于天真，人们仍然清楚地看到，正是笛卡儿为哲学丈量了自己的坟墓。然而，奇怪的是他又设法把亲爱的上帝当作爬出这座坟墓的梯子。但是，甚至他的同时代人也不让他越过这个边缘”[引自比希纳(Georg Büchner)的哲学笔记，G. Büchner，*Werke*，Inselverlag，Leipzig，1922，pp. 268—269]。霍布斯的论著《论物体》(*De Corpore*)是先虚设宇宙已经消失[类似于胡塞尔的“悬疑”(epoché)]，以便他能从理性开始一步一步地再把宇宙建立起来。但是即便是他，也要使用由经验的残留物形成的一般概念作为建筑材料，特别是要使用空间与时间的概念。这个观点的对立面有伽利略、牛顿和惠更斯的物理学；在那里所有发生于世界的事件，都是在直觉空间中的，可以直觉地感受到的粒子运动所构造出来的。所以，就需要一个绝对的欧几里得空间作为运动轨迹的平台，伽利略在《试金者》(Saggiatore，*Opere*，VI，p. 232)中有一段名言：“真正的哲学写在大自然这部大书中(*questo grandissimo libro*，*io dico l'universo*)，它打开在我们眼前，但是若没有学会理解它的语言，不认识写它时所用的字，就不能读这本书。它是用数学语言写的，它的字就是三角形、圆和其他几何图形。”]

莱布尼茨似乎是第一个向前推进到一个更激进概念的人："关于物体我能够证明，不仅是光、色、热之类，诸如运动、形状和广延等等也都只是表观的品质"（*Philos. Schriften*，Ⅶ，p. 322）。这里也应提到贝克莱(Berkeley)与休谟。在达朗贝尔看来，用"经验的残留物"来构筑客体世界，其根据并不如笛卡儿所说是在于由此得到的观念之清晰与判然，而仅仅在于这个方法的实际成功。按照康德的理论，空间与时间只不过是我们的直观的形式。施通普夫(Stumpf)在《空间观念的心理基础来源》（*Über den psychologischen Ursprung der Raumvorstellung*，1873，p. 22)中认为，不能想象原子只是一个没有颜色的空间物体，它的运动的作用，在以太中会产生这样一种振动，它具有一定的波长，从而成为某种颜色的载体；正如颜色不能没有空间的广延一样，空间(按照贝克莱与休谟的教义)更不能没有颜色的某种品质作为服饰。直觉的空间和直觉的时间，很难成为物理学构建外部世界的适用的介质。必须舍弃空间与时间之直观，正如感官的品质也必须要舍弃一样；它们必须被代以抽象的算术意义下的四维连续统，这样才能用来作为外部世界的建筑材料。色彩对于惠更斯，"它的实在"只是以太的振动，现在，色彩只是四个变量的周期数学函数，这四个变量就是时空媒介的坐标。最终留下来的就只有一种符号的构造，这与希尔伯特在数学中所贯彻的完全一样。

像这样从直接给予我的直观中蒸馏出这个客体世界，只有在用符号表示时才有可能。这要分成好几步来进行，从一个层次到另一个层次。实施起来必会出现这样一件事，即在某一层次上存在的东西，一定会表现为一种更高级的实在，即更高一层的实在的影子。一个典型的例子是一个物体的立体形状正是种种透视形象的共同根源。如果观看这物体的点在变化，例如实际观看的点有各种可能位

置，这些位置展开在我们面前成一无限可能性之连续统，就会看见不同的形状。我们将在下一节中回到这个问题。然而，系统的科学解释必须按相反的方向进行；它要先建立起符号的世界作为一个独立的领域，然后跳过所有的中间层次，试图去描述两个方面之间的关系：一个方面是表示客体条件的符号，另一方面则是我们意识中相应的东西。

［透视学告诉我们怎样从物体的立体形状，以及观看者相对于物体的位置，来得出光学映象。还有一个取自更高层次的物理例子，这就是“电场”和“电场强度”的概念的构成。我们发现在荷电的导体所在的空间中，一个带有很弱电荷的“检验粒子”受到某个力 $\vec{F} = \vec{F}(P)$ 的作用，P 为放置检验粒子的地点。每当同样的检验粒子放回到同一点 P 时，就有同样大小和方向完全确定的力。使用不同的检验粒子，我们发现此力是这样地依赖于此检验粒子的，即 $\vec{F}(P)$ 可以拆成两个因子：

$$\vec{F}(P) = e \cdot \vec{E}(P),$$

其中向量因子 $\vec{E}(P)$，即“电场强度”是一个点函数，与检验粒子的状态无关，而标量因子 e，即检验粒子的“电荷”，却仅由粒子的内部状况决定，既不依赖于粒子的位置，也与荷电的导体无关，因此不论把粒子放在什么样的电场中，e 都是一样的。在这里我们是从力作为一个给定的东西开始。但是上面概述的事实引导我们设想，有一个在数学上用点的向量值函数 $\vec{E}(P)$ 描述的电场，包围着导体。不管是否认识到它所施加于检验粒子的力，这个电场都是存在的。检验粒子的作用只在于使我们可以观察电场，量度电场。这与透视

情况明显地完全相似。电场 $\vec{E}$ 就相当于那个物体，检验粒子相当于观看者，其电荷相当于观看者的位置；场对检验粒子所施加的力及其按此粒子之电荷而变化，则相应于立体物体提供给观看者的二维侧面及其随观看者的位置的变化。这时，不应把方程 $\vec{F}=e\cdot\vec{E}$ 看成 $\vec{E}$ 的定义，而应看成是一个自然定律（而在情况许可时，还可以加以改正），它决定了电场 $\vec{E}$ 施于点电荷 e 的驱动力（ponderomotoric force）。光，按照麦克斯韦的理论（Maxwell's theory），只不过是急速交替的电磁场；因此，我们的眼睛是一种能感受电磁场的驱动效应以外的其他效应的感觉器官。要作系统的表述，就必须以一种纯粹"符号"的方式，即无须任何解释的方式，引入电场强度 $\vec{E}$，再定下它所满足的规律（例如，$\vec{E}$ 在空间的封闭曲线上的线积分为 0），以及它与驱动力如何联系的规律。如果所考虑的力是可观察的，则我们的符号与经验的联系也就建立起来了。]

有人可能会说，物理学只是在广义相对论中才成功地完全摆脱了直观空间与时间，而不必以它们作为构造客体世界的手段。在广义相对论框架中（顺便提及，以前采用的观点无非是它的特例或极限状况），主体与客体的关系可以用一个典型的例子来说明，这就是对两个或更多的星体的观察。为简单起见，我们设，点眼（point eye）是一个有理解力的意识，其世界线可记为 B，设观察是在此点的一生中的时刻 O 发生的。应该在四维实数空间中去实现这一构建，只不过为了更方便，我们才用一个几何图形代替它。令 Σ 表示两个星体的世界线。由 O 点发出的后向光锥 K 与这两条线 Σ 各交于一点，而由星体发出的达到 O 点的光信号的世界线 Λ 就把这两个点（星体）与光锥 K 上的 O 点联结起来了。这样一种构建方式，也可以完全用算

术来表示。借助于它，就可以用这些数据来决定这两个星体对 O 点处的观察者所张的角 ϑ 之数值量度。这种构建方式是不变的，也就是说，它是这样一类构建：如果对整个图像做任意变形，但仍对变形了的图像做同样的操作，则必给 ϑ 以同样的数值量度。每一件事都尽含于此——这个角对星体本身的依赖性，对这些星体间的度量场的依赖性，对观察者在世界中的(空间视角的)位置以及对其运动状况(即线 B 过 O 的方向；这就是我们称之为光行差的视速度)的依赖性。一个星座中的两个星体所成的角 ϑ，决定了星座的视觉形状，对它不可能客体地描述，而只能直观地经验，它是在同样不可描述的假设下出现的，即我就是 O 处的点眼。如果这些数据均与第二个星座提供的相同，这两个星座在时刻 O 就表现为相同的形状，否则就表现为不同形状。

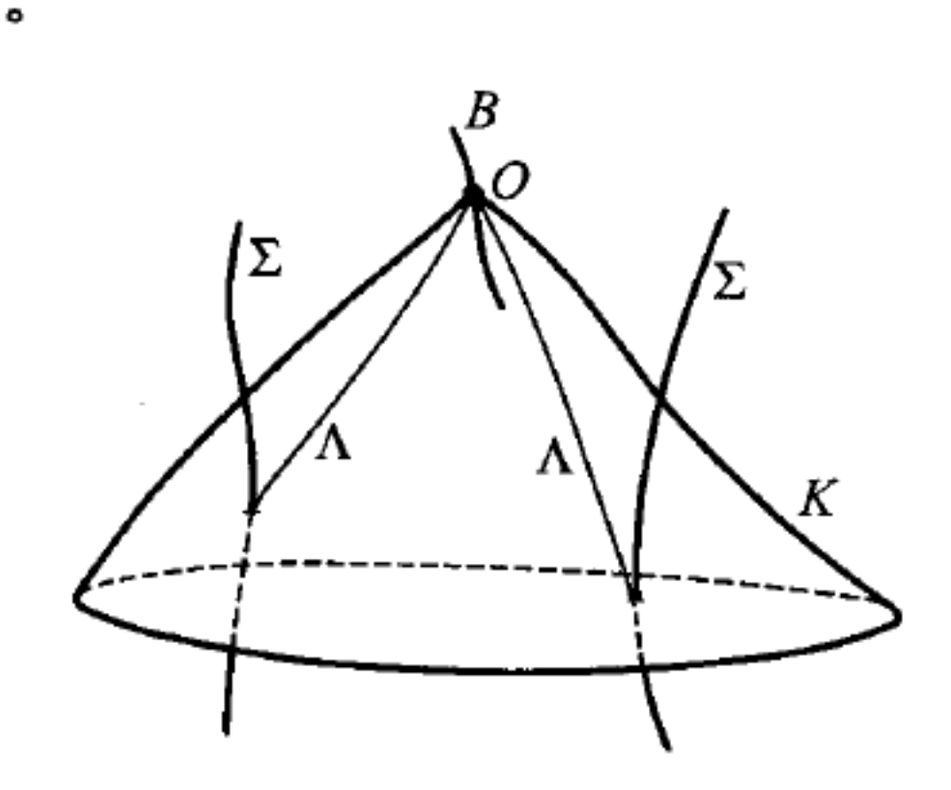


图 3　观察两个星体的角距离所依赖的数据。

客体世界只不过是存在的，而不是发生的。只不过是当我沿自己躯体的生命线向上爬行时，在我意识的瞭望中，世界的这个截面才成为在时间中连续变化，并在空间中流动的形象。

〔在构建这个角 ϑ 的过程中，在我意识的每一时刻 O，世界都“分裂”为空间与时间，这件事起了重要的作用。这件事可以客体

地描述如下：若 e_0，e_1，e_2，e_3 表示 B 在 O 点的向量的分量，则紧邻我的空间邻域，将由发自 O 点的正交于 e 的线元（dx_0，dx_1，dx_2，dx_3）构成，所谓正交即满足以下关系式：

$$\sum_{i,k=0}^{3} g_{ik} \cdot dx_i \cdot e_k = 0, \quad g_{ik} = g_{ik}(O)。]$$

这样，事物的客体状态包含了它对主体的外观所必须说明的一切。我们的经验没有任何一项差别不相应于其内的客体情况之差别（进一步讲，这里的差别是在任意坐标变换下都不变的）。这也包括了把自我的主体看成一个物理客体是自然的事实。直接的经验必是主体的与绝对的。无论它是多么模糊，也只是因为它在给出时就是这么模糊，而不是别样。另一方面，客体世界，我们在日常生活中不断地要考虑到它，而自然科学也总是想把它结晶出来，所用的方法与我们以日常的自然的态度去经验实在时所采用的判据，是互相协调地发展的——这个客体世界一定是相对的；它可以用确定的事物来表示（用数或其他符号），但也只是在把一个任意的坐标系带入世界才行。在我看来，这一对互相对立：主体—绝对和客体—相对的对立中，包含了可以从科学中得到的最基本的认识论洞见。凡是想要得到绝对者，就必须以承认主体性和自我中心为代价；凡是倾向于客体性者，就面临着相对性问题。这个思想在我们前面引用的玻恩（Born）关于相对论一书的引言中生动而漂亮地展开了。

在自然科学内，互相冲突的唯心论与实在论哲学却表现出它们在方法上、原则上并不矛盾。我们通过科学构造了一个客体世界来解释感官素材，这个客体世界必须要满足下面的基本原则，我们在第 4

节中介绍过它，这就是：提供给我们的知觉上的差别，总是基于真实条件上的差别（亥姆霍兹语）。兰伯特（Lambert）* 在他的《测光学》（*Photometria*，1760）一书中，把下面的特例宣布为一个公理："同样的眼睛受到同样的影响必得同样的影像。"在这里，自然科学是按实在论的方式进展的。

［如果我不打算超越已经直接给予我们的素材，或更准确些说，不超越当前所已经给予我们的素材，也就没有必要讲客体世界的子结构。即使我把记忆也包括在这种素材之内，原则上承认它作为"证词"也是有效的，如果我进一步承认他人的意识之内容与我自己的意识之内容有同等的地位，那我就打开了通向主体间交流这一神秘领域的大门。但我仍然不必如我们实际进行的那样做，我可以要求做几个意识的像之间的"变换"。这样一种说法也能与莱布尼茨的单子论相配合。我们可以不去构造一个给定的物体经一个固定的观察点提供的透视图像，也不是反过来通过几个透视图像去构造物体（如照相测量法所做的），而可以消除这个物体，直接提出如下的问题：令 A，B，C 各代表一个附着于一点物体（point body）的意识，而 K 是位于他们的视野中的一个立体。任务是描述这三人中的每一个从 K 得出的图像与另外两人的位置之间的合规律的几何联系。这种做法将是更笨拙的；事实上，任何一个单个的意识，比之整个实在的世界，其局限性以及意识与实在的世界间的距离，都使这种做法注定要失败。但无论如何，科学在这一方面与实在论的态度是互相协调的。］

---

* 兰伯特（Johann Heinrich Lambert，1728—1777），德国天文学家、数学家。——译者

但是科学在另一方面则向唯心主义让步：它的客体实在性并不是给出的，而是造出的(nicht gegeben, sondern aufgegeben)，且非绝对地造出的，而仅是相对于一个任意设定的坐标系造出，以符号出现的。更有甚者，把上述的基本原理倒过来说，就得出了唯心主义自身的中心思想了：世界的客体图像，如果不能对于知觉表现出多样性的话，其本身就不会有任何多样性。一种存在，如果从原则上说是完全不能由知觉达到的，那么这种存在是不被承认的。莱布尼茨就绝对运动这种虚构说道(见他致克拉克的第五封信，§52)："我回答说，运动是真正独立于实际的观察的，但不能完全独立于观察的可能性。只有在发生了一种可以达到观察的变化时，运动才是存在的。"肯定地说，许多物理上不同的色彩都会产生相同的红的感觉；但是如果我们让这许多不同的红都穿过同样的棱镜，则它们在物理上的差别将显现为棱镜的一缕缕色光在感官上的差别。可以说是棱镜揭示了对于我们的感官隐藏着的差别。一种差别若以任何方式都不能对我们的感官打开，则这个差别是不存在的。这一点作为一个理论构造的方法论原理是很重要的。

〔围绕着一个质量(如太阳)的度量场通常给出的公式[即施瓦茨席尔德公式(Schwarzschild formula)]可以解释如下，其中出现的坐标看成真实空间到欧几里得空间的映射："(Ⅰ)在现实的空间中，欧几里得几何是成立的，但围绕着质心 O 的球对称引力场是这样作用于刚体的，使得在 P 点的轴向杆按 $\sqrt{1-2\alpha/r}:1$ 的比率缩短(这里 $r=\overline{OP}$，而 α 是一由该质量决定的常数)，而垂直于 OP 的杆是不变的。"毕竟大家知道杆的长度会随温度而改变，为什么它不能以类似的方式对引力场作出反应呢？但若使用另外的坐标系，会得到另一

种描述："(Ⅱ)在现实的空间中，欧几里得几何是成立的。但在 P 点处的杆，不论其方向如何，由于引力场的作用，杆按 $(1+\alpha/2r)^2:1$ 的比率变化。"这两种描述都表达了同样的事实情况。对每一种可能的坐标，都有一种修正的方子来挽救欧几里得几何。然而，每一种方子都和另一种一样好。每一种都在事情的事实情况上添上了一个任意元素，而这元素又没有什么后果可以从知觉上加以验证，因此是应该消除的任意元素。也可以像爱因斯坦那样，别的什么也不用，只用物理几何就把它消除了，因为它正是通过杆的量度的直接比较来定义的。(那个几何当然不是欧几里得几何。)这两个理论的每一个，如果适当地表述，都可以分成两部分：就是爱因斯坦的理论(E)和一个附加的(Z)，后者既与(E)没有联系，又与实在没有接触，因此必须去掉(请比较图 4 的示意图)。

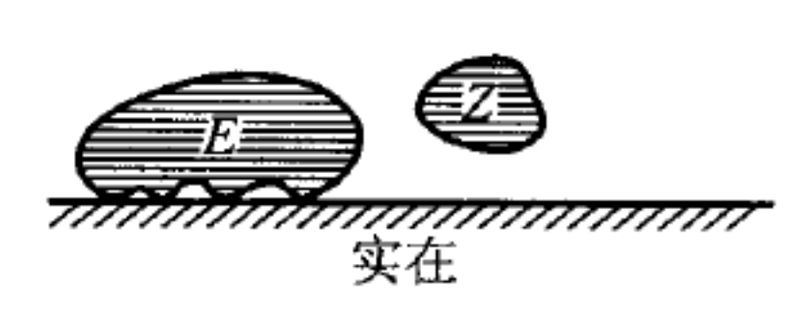


图 4　有冗余部分 Z 的理论的示意图。

在玻尔(Bohr)的氢原子模型中，出射光的周期与电子绕核旋转的时间并无关系。虽然它令人满意地解释了光谱，但是，少了一个相应于电子旋转周期的可观察的数据，仍使人感到是这个理论的一个应该消除的令人烦恼的特点。为了弄清相对论的思想，庞加莱一度有个虚幻的设想：到了夜晚，当每一个意识都熟睡了时，世界及其中一切物体，包括我在内，都被按一定比例放大；醒来以后，不论是我还是别人都未能以任何方式觉察到这一变化。对于这样一个事件，科学会采取与唯心论者一样的立场；因为，在这样一种情况下，说世界被放大了究竟是什么意思？只有在相等性的假设与以下原理矛盾

时，才能看到差别。这原理就是：相等的东西，在相等（相同）的条件下[特别是在观察者的客体特征、位置和时间都相等（相同）的条件下]都被知觉为相等的[3]（在与因果性原理相矛盾时也是这样）。

在实在的世界与给定的世界之间，有一种对应，一种数学意义下的映射。然而，一方面有一个定量确定了的客体的世界，另一方面，不仅有一个在这一瞬间给定的我（ego）的知觉，还有我的可能的知觉（也可以是记忆中的知觉，或与意志的确定意愿相应的知觉）；进一步说，进入这个对应关系的，除了世界唯一的客体状况以外，还有这个能知觉的自我（它的躯体的世界线，等等）的可能的客体状况。亥姆霍兹建立了“经验论观点”的原理（*Physiologische Optik*，Ⅲ，p. 433）：“感觉是给予我们的意识的信号，我们的智慧的任务就是要去理解它们的意义。”在这一方面我们可以既同意亥姆霍兹的看法，又同意胡塞尔的意见，即我所看见的空间的物体，尽管它有超验的方面，却是在它的具体性之下被感知的（Husserl，Ideen zu einer reinen Phänomenologie，in his *Jahrbuch für Philosophie*，Vol. 1，1913，pp. 75，79）；因为在知觉的具体的统一性中，感觉素材是被“解释”串连（animate）起来的，感觉素材只有与解释在一起才能完成“表示的功能”，而有助于构成我们称之为色彩、形状等的“外观”。一只狗走近另一只狗时，就看见或者嗅到了一个“狗伙伴”，这是一个整合起来的全体，而不只是“一堆感觉”。我们在这里只是描述了外部世界构成过程的一个层次。这里完全没有否定，通过这种串连功能把一个事物实实在在摆放在我面前的确定的方式，需要许多以前的经验的指导。我们只能用下面的话来描述这一点，“我们总是想象，这样的客体已出现在我们的视野之中，它必须这样出现，才能带来用我们的眼睛在通常的正常条件下获得的印象”（Helm-

holtz, *Physiologische Optik*, Ⅲ, p. 4)。亥姆霍兹在这里讲到“无意识的推论”。这听起来有些问题，然而他明确强调，只是就结果而言像是推论，更准确些说，像是用类比作推论，虽然隐藏其下的心灵活动(psychic acts)可能与有意识的推论大不相同，而它们的效果也不会被更好的知识废除。镜像的感觉印象，抑或一根在水中折断了的棍子的感觉印象或者还有彩虹的感觉印象，并没有欺骗我们；但是那个我看见的物体对象，或按胡塞尔的说法，由这些印象放在我面前的东西，是一个错误。要想确定真正存在的东西，只有考虑到所有的感觉信号才行，而在上述各个例子中，很快就会揭示出来“非正常”的条件起了很大作用。只要设想一下，如果我们的眼睛对于波长与固体中原子距离的数量级相同的光也能敏感到，那么解释光学“信号”对于我们该有多么困难[劳厄干涉图样(Laue interference patterns)]！在对外观与实在的联系作最终的描述时，最好是把这个构成过程的所有中间层次都忽略掉。}

客体世界仅能用符号来表示，在整合知觉素材时，总是要这样做的，这对于人的日常生活的意义何在？亥姆霍兹回答说(上引书，p. 18)，“一旦我们学会了正确地阅读这些符号，我们就能借助它们设计出我们的行动，得出所需的结果，就是说，所预期的新的感觉就会出现。把概念与事物作别的配对，不仅在现实中不存在——所有学派都同意这一点——而且不同的配对方式是不可想象的，没有意义的。……因此，单个物体的这样一种表象(presentation, *Vorstellung*)其实已经是一个概念(concept, *Begriff*)，它包含了按时间排成序列的无穷多个直觉，而每一个直觉都可以由概念导出。[4]如果我能正确和准确地从一张桌子的表象中获得当我把我的目光或手放到与这

张桌子相关的这个或那个确定的位置上时应该体验到的感觉，那么我所具有的这张桌子的表象是正确而准确的。我不能理解，在这样一种表象和它所表示的客体间，还可能有什么别种相似性”（上引书，p. 26）。在同样的意义下，莱布尼茨这样评述笛卡儿的原理（*Philosophische Schriften*，Ⅳ，p. 356），“关于感觉素材，我们所知不可能多于，也不需要多于，互相协调的且由不可辩驳的理性所指示的东西，从而在一定程度上，可以由过去预测将来。想要探求更多于此的真理与实在，是轻浮之举——怀疑论者不会这样要求，独断论者也不会许诺这样做。”胡塞尔也说（*Ideen*，p. 311）：“事物—意识对象（thing-noema），总有直觉的无限发展的理想的可能性与之协调，这是属于事物—意识对象的本质的。这个发展要循着事先确定的一定类型的方向。”但是，要建立经验的实在，总会发生一些偏离，迫使我们作出“修正”。由于这种经验的特性，认知实在必然要经历谬误。“（感觉中）给出的决不意味着确定而且必然的物质的存在，而只是一种假设的实在。这意味着总会发生这样的事，即原来认为已经得到经验很好地证实了的东西，在进一步经验的历程中不得不放弃。”（Husserl，*Ideen*，p. 86.）在知觉的运动图像中，开始是协调的，最后则以“爆裂”告终，这也完全是可能的。在这种情况下，想使之与理性原理调和的企图将会失败，从而无法构建实在的世界。

要有一个关于世界进程的正确理论，从我们的讨论中可以看到有一些要求，现在表述如下：

1. 协调性。出现在某一理论中的一个量，在某一个别情况下所取的特定值，将在理论上已建立的联系的基础上，由经验数据确定。每一次确定都应得相同的结果。例如关于电子电荷 e，无论怎样确定它，由观测的结果，联系着已由物理学建立起来的理论，都给出 e 的

(在观测的精度内)同样的值。 相当常见的是要把所讨论的量(例如彗星在某一时刻在各星体中的位置)的(相对地)直接测量的值与在其他观测基础上计算出来的彗星当时的位置(例如根据它前几天的位置按牛顿理论算出来的此时的位置)加以比较。 协调性这个要求蕴含了相容性，[5]然而协调性要求理论与经验相接触，在这一点上，协调性又超过了相容性。

2. 必须尽可能在原则上以观测数据为基础，定出在理论中出现的某个量在特定情况下所取的确定值。 这句话表示了一个公设：理论在解释一个现象时，不得有冗余部分。

休谟试图毫不动摇地，前后一致地坚持以下的观点，即(在人的感觉中)所给出的就是全部实在性。 然而通过他的经历就可清楚看到，在解释一些在日常生活和科学中起基本作用的关于认知的立场时，他的这个观点是完全失败的。 所以，他其实是揭示实在性问题全部困难性的第一人。 理性在构建实在性中的功能，被他描述为想象的功能。 他完全真诚地承认思想和生活的不可调和的冲突，并发现自己也深陷其中。 要把他的方法贯彻到底是不可能的，犹如把算术的基础仅仅放在具体存在的数字上而其他什么都不要是不可能的。在我看来，马赫或阿芬纳留斯(Avenarius)的实证主义，不过是休谟之企图的不甚协调的再现而已；因为在他们的体系中，假设有理论性的根本原理(这是休谟所严格避免的)起了相当的作用。 但这样一来我们又回到了理论的构建，这种构建是为了整体的利益而对(在感觉中)所给出的东西加以补充，而我们也不再被迫使用感觉素材作为建筑材料了。 康德的超验唯心论再次重建了莱布尼茨已经得到过的洞见。 本节的内容可以看作是对康德关于实在的观念，即“实在就是按照法则与知觉相联系的东西”的一种修饰。 在把关于实体与因果

性的古老的形而上学本体论观点，转化为构建经验性的实在的有系统的原理上，康德走得比莱布尼茨更远。

〔在关于逻辑的那一部分中，我们坚持，一个已经展示出来的东西就不能再提出其存在性，逻辑符号 Σ_x 必有一个表示空位的下标 x。这似乎与诸如“这把椅子是实在的”这类命题相矛盾。但是要确定实在的存在时，要么从唯心论的观点来解释，其中包含了预测许许多多互相协调的印象存在，这些印象回应了意志的某种愿望；要么从实在论的观点来解释，则其中应包含确定有某个东西 x 存在，它与已给的椅子这一现象有某种形而上学的关联。

关于实在论与唯心论的对立，我们在几何学中找到了令人震惊的一个类比，即在客体世界中，坐标系只不过是消除自我后的遗留物而已。就这个事实而言，两者的关系实已超出类比，而确有事实上的联系。正如在第 12 节中，我们考虑平面上的向量 $\vec{x}$，并把它用两个线性无关的向量 $\vec{e_1}$，$\vec{e_2}$ 所成的基底表示为 $\vec{x} = \xi_1 \vec{e_1} + \xi_2 \vec{e_2}$（请与 88 页(1)式比较）。数 ξ_1，ξ_2 是由 $\vec{x}$ 和 $\vec{e_1}$，$\vec{e_2}$ 唯一确定的，称为 $\vec{x}$ 相对于基底($\vec{e_1}$，$\vec{e_2}$)的坐标。我们把平面上的向量类比作实在世界的客体，基底类比作观察者，数类比作主体的现象，这样就把坐标(ξ_1，ξ_2)类比为“客体 $\vec{x}$ 对于观察者($\vec{e_1}$，$\vec{e_2}$)所呈现出的外观”。对于几何的向量平面，我们可以构造一个代数模型，定义向量 $\vec{x}$ 为一对数(x_1，x_2)，而定义两个向量的加法以及用数 α 乘 $\vec{x}$ 这两种运算如下：

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2),$$

$$\alpha(x_1, x_2) = (\alpha x_1, \alpha x_2)。$$

把数 x_1，x_2 称为我们的模型中 $\vec{x}=(x_1, x_2)$ 的绝对坐标，$\vec{i}_1=(1, 0)$，$\vec{i}_2=(0, 1)$ 为绝对基底。在几何向量空间中，所有基底都是同等地可容许的，只要指定一个任意的基底，让它起绝对基底的作用，就可以实现到代数模型的转移。另一方面，如果只对能用这两个基本运算来定义的性质与关系才赋以客体的意义，则不同基底各自的特性就在这个模型中消除掉了；或者说，只对任意线性坐标变换下不变的性质与关系才赋以客体的意义，则所有的基底都有了相同的地位。向量与其绝对坐标的关系并不是客体性的，而只是在向量 $\vec{x}$、基底($\vec{e}_1$，$\vec{e}_2$)与 $\vec{x}$ 相对于($\vec{e}_1$，$\vec{e}_2$)之坐标 ξ_1，ξ_2 之间的客体性关系之特例。我们的类比假设了，对我们的直觉开放的只有数的领域(表观)而不是几何空间(事物自身)。所以这个模型只是我的现象世界，绝对基底就是那个特定的观察者："我"。"我"宣称所有现象都是这些现象对于"我"的表观。在这个层次上，客体、观察者和表观都属于同一个现象世界，而由一些关系联结起来，从中我们可以区分出哪些是"客体的"，即不变的。只要用不变性的观点去看"代数表观"的领域，则实在的观察者与实在的客体，我、你(thou)以及外在世界，可以说是一致地、互相关联地出现的。在这个问题上我们的理论支持莱布尼茨(请与他的 *Nouveaux Essais*，Libre Ⅳ，Chap. 11 比较)而反对笛卡儿，后者通过他的"我思故我在"(cogito ergo sum)使我(ego)的实在性，原则上优先于外部世界的实在性。这样一种类比使下面的事实马上就明白易懂了：在纯粹意识中为唯一的"我"，即意义的来源，从客体性观点看来，只不过是诸多同类主体中的一个。

然而，这是一个真理："我"这个绝对的主体，永远是唯一的，尽管不同的主体有着客体性的等价。这与我所发现的事实是一致

的。在纯粹的认知基础上，conscientalism* 是不可驳倒的，它可以完全地贯彻到底。尽管如此，不仅是在以下意义下要求我承认“你”，即在我的思想中，我屈从于“客体性”的抽象规范，而且在一种绝对的意义下承认“你”就是对于你自己，又再一次如同“我”对于我自己一样，成为现象世界的有意识的(conscious-existing)承载者。在我们的上述类比中，只有当我们越过仿射向量几何的代数模型而进入其公理化描述时，才能采取这一步骤。这时，向量的概念和它的两种基本运算都作为未定义的术语出现。在公理系统中，再无必要通过抽象化来实现各种坐标系的等价性，因为在这种系统中，要把一对确定的向量($\vec{e}_1$，$\vec{e}_2$)区分出来，只须通过个别地展示它们即可。所有这些证明性的行动之模式与源泉都是一个字：“我”。所以公理化再次把自己展现为一种净化了的实在论的方法(请比较第11节结尾部分)：它断定存在一个超验的世界，但是满足于用符号来重新创造这个世界。

设定“自我”(ego)、“你”(thou)和外部世界，对于“实在”的认知的处理，是没有影响的。这是一件形而上学的事，它不是一个判断，而是一种承认，或者说是信仰[正如费希特在他的《人的使命》(*Über die Bestimmung des Menschen*)一书中所强调的]。但是，这种信仰是所有知识的灵魂。然而，从形而上学—实在论的观点看来，自我性(egohood)仍然是一个谜。莱布尼茨(Metaphysische Abhandlung，*Philosophische Schriften*，Ⅳ，pp. 454—455)相信他已经解决了人的自由意志与神的预定之间的矛盾，他的办法是让上帝在

---

* conscientalism是这样一种哲学学说，它认为我们所理解、认识、领悟的均只为心智的、观念的，而实在的对象只是意识的实在。——译者

无限种可能性中规定让其中的一种存在(当然要符合充足理由律)，例如对于犹大(Judas)和彼得(Peter)，他们的实质的本性决定了他们的全部命运。这种解决方法从客体来看是足够了，但是犹大绝望的呐喊却动摇了它，“我为何一定要是犹大？”对于这个问题显然不可能作出一个客体性的陈述。所以不可能以一个客体性的洞察结果作为对它的回答。知识不能够把一个闪着光辉的自我和阴暗的屡屡犯错的人的存在调和起来，而这种不断犯错却铸造于一个人的命运之中。

设定外部世界并不能保证：这样一个世界会通过试图构建协调的理性的认知活动从现象中出现。为了做到这一点，必须让简单的基本法则统治世界。这样，只是肯定有外部世界并不足以解释它原本要解释的事，世界的实在性问题不可分地与它何以会有合乎法则的数学和谐性的问题混在一起。后一个问题清楚地指向与超验世界不同的另一个超验的方向；它指向起源而不是指向后果。所以最终的回答必在一切知识之外，而只有求之于上帝；他发出了意识之光，而意识之光的源泉却被掩盖住了，意识要通过自我透视来掌握自己，它把主体与客体分开而悬于两者之间，悬于意义与存在之间。]

18 空间问题

[A 空间表象的起源

直到 19 世纪，才开始对空间表象的心理起源进行详细的研究。对于空间表象的构成，贡献最大的感觉领域是视觉和触觉。培恩(Bain)* 又加上了动觉和肌肉的感觉。

单只眼睛看见各种不同的质分布于一个二维视域。之所以说视

* 培恩(Alexander Bain，1818—1903)，苏格兰哲学家和心理学家。——译者

域是二维的，是因为任一个穿过它的一维曲线都可将它一分为二。有一个基本生理学事实，即我们想集中视觉印象到视域中的哪个地方，由受刺激的那一部分视网膜而定。这里我们有数学意义上的一一连续“映射”。视域中的地点连续联结的方式，与它们所对应的视网膜上的地点连续联结的方式是一样的。特定的感觉能(specific sense energy)定律的创建者弥勒(J. Müller)*甚至说：“在任意视域中，视网膜只看见自己在受影响状态下的空间延展。当眼睛在休息而完全闭上时，它只看见自己是空间中的一片黑暗”(*Zur vergleichenden Physiologie des Gesichtssinnes*, p. 54)，亥姆霍兹的《生理光学》(*Physiologische Optik*)一书标志前进了一大步，因为它不再讲全同而只讲对应。同是这一点说明还澄清了一个著名问题，即为什么我们看见的东西都是正立的(视网膜上的像都把客体在空间里的原像倒转了180°)。如果我们把“客体的”空间放在一边而与另一边的我的直观的空间相对立，如果我们又假设这两个空间都有欧几里得度量结构，那么对于客体的事物及其在我的直观中的像之对应的忠实程度，我们所能要求的充其量也就是第4节定义的意义下的同构(或相似)。这样一种同构意味着，凡可用客体空间的度量概念来描述的事物的所有几何特性，都映射为直观空间中用同义的度量概念所刻画的几何特性。但是，如果事物与其像都位于相同的空间中，再追问两者之中哪一个有意义，就是一个荒谬的问题了。

视域确有度量结构；静息的眼睛无疑也能领会到一些东西，如形状(形状本来就是我们所见的东西的一种质)，也能区分不同的形状。然而，这种形状既不类似于我们看见的东西，也不类似于客体在视网

---

* 弥勒(Johannes Peter Müller, 1801—1858)，德国生理学家。——译者

膜上生成的像。（亥姆霍兹在《生理光学》一书第3卷151—153页就描述了由于视线而形成的构形方面的变形。）通过眼睛的运动，这种度量构造得到了更精细的成形与部分修正；如果我的视线的移动把像Ⅰ变成像Ⅱ（从客体角度来说，即视网膜的同一区域，在运动前是受到视觉印象Ⅰ的刺激，而在运动后则受视觉印象Ⅱ的刺激），那么Ⅰ与Ⅱ是全等的。所以，在眼睛运动的范围内，形状就不再是一个给定的质，而是从全等关系中抽象出来的一个概念（请与第2节比较）。

洛采（Lotze）*认为，必有一种“局部信号”存在，其基础是他的生理学原理：“感觉唯一的品质可以看作是直接感受，再由心智来区分”（*Wagners Handwörterbuch der Physiologie*，Ⅲ，Section 1，1846，p. 183），他还认为：心要从这些品质中构造出空间延伸的表象。局部信号就是这样一些感觉，它们的质的等级划分成为视域中不同位置的基础。他试图把局部信号更准确地刻画为，眼睛为了把这些位置移到视域中央而产生的运动脉冲，以及眼肌在完成这些运动时产生的感觉。但是，在这里被当作基础的东西本身也还需要一个基础。因为静止的眼睛有一个连续分布的视域，该视域与眼睛的运动无关，因此是属于构建空间时的下一个更高的层次。对于冯特（Wundt）**把色彩的等级作为局部信号的企图，最好还是让它悄悄过关算了。亥姆霍兹虽然接受了洛采的论题，却承认局部信号就是隐秘的质（*qualitates occultae*）。因为在视域中色彩与延伸有不可分的联系，由洛采的论题又引出了一个问题（参看 Poincaré，*La valeur de la science*，ed. Flammarion，p. 91），就是要解释一个感觉怎么会分

---

* 洛采（Rudolf Hermann Lotze，1817—1881），德国哲学家。——译者

** 冯特（Wilhelm Wundt，1832—1920），德国心理学家。——译者

成两个成分：色彩与延伸——或者换句话说，为什么在视网膜两个不同点 P 与 Q 上如果产生同样的“红”，就有一种亲和性，而 P 点的“红”与 Q 点的“绿”之间则没有？ 但是如果你很好地理解了简单的感觉有一种“点粒状结构”（punctiform）的特点，你就很难倾向于认为那种把“空间延伸性”也给予了“红”的东西就是可以连续分级的感觉，而会承认康德与费希特，后者说（Fichte，*Bestimmung des Menschen*，ed. Medicus，Ⅲ，p. 326）：“‘我’从来就是不仅有知觉，而且有直觉。”对于“我”，只可能存在这么一种东西，它是质的连续统，覆盖着延伸性的（时间的，或时空的）连续统。 承认了这一点以后，把感觉看成一种局部信号也就多余了。

静止与运动这种视觉印象又如何？ 当我上上下下打量一个东西时，我有一种印象：在我视域中的这个东西是静止的，虽然它产生的像在我的视网膜上位置在变化。 但只是在眼睛的运动机制让眼睛按我的意愿运动时，像的位置是在变。 所以这里并不是眼肌的感觉与其运动的关系问题，而是自愿的意图问题。 存在一种静与动（变化）的原始印象。 如果一件事物在视网膜上的像不动，同时又没有让眼睛运动的意图，这时它就给出处于静止的印象。在视网膜上的像的移动与指导眼肌运动的自愿的意图之间，有一个补偿系统，而人的经验显然已把它发展得相当精细了。 这项任务已经由于所谓利斯廷定律*而简化了。 该定律指出，人的眼睛当固定在视域中的某一点时，不能按意愿转动，而是任意一个这样的点都只确定眼睛的一个相应位置（可能有微小的漂移）。 这样一来，眼球的三个自由度就只剩下了两

---

* 利斯廷（Johann Benedict Listing，1808—1882），德国数学家。 他是高斯的学生，可以说是拓扑学的最早的研究者之一。 他是遵照高斯的思想从事这一研究的。 拓扑学一词就是他首先使用的。 利斯廷的科学兴趣十分广泛，例如也从事了视觉的研究。 这里讲的利斯廷定律就是他研究视觉的成果。 ——译者

个。视线的方向仍然可能按人的意愿自由地转动，这就可以用来把视域中的某些变化“解释”为运动。

不能用关于静止的直接印象作为“感觉的证词”来反驳相对性的物理理论。因为我们已经看到，这个现象(它归根结底只是：直观素材的区别，展示了客体的区别)的客体性“解释”，只能借助于物理实体的互相覆盖(即其像在视网膜上的移动)的相对运动这一概念，以及运动的动力学概念(即人自愿的意图是通过肌肉的力量而使受限于惯性场的眼球偏离它的自然的运动，而眼睛又是嵌在人体之内这一事实)。人的躯体的动觉也是如此；动觉并不告诉我们“绝对运动”，而始终不变的只是对加速度的感觉，动觉指示了人的躯体或其一部分脱离了它的自然的惯性运动，还记录下了继之而来的动力学的扰动。

深度(即景深)的光学知觉，正如惠斯通(Wheatstone)用立视镜(stereoscope)所作的引人注目的说明，是与双目视觉紧密相关的。(此外，调节眼睛所用的力产生的感觉也起了作用。)双目在视域中各自决定的位置是一一对应的，结果是两者在各自位置上生成的像被看成了一个。对深度的立体的感受依赖于这两个像并不一致的事实，同样的色彩品质与同样的轮廓线并不出现在两个视域的相应位置上，就造成了这个结果。这里的细节是两种对立理论的争论点所在，一种理论是“先天论”(nativistic theory)，特别是以赫林(Hering)为代表，另一种理论是亥姆霍兹的“经验论”。前者把一切都归之于感觉，坚持认为对于两个视网膜的相应点(例如两个视网膜中央凹处)的刺激会产生单个感觉。这一理论认为，视网膜上的各个位置，除了给予指示方向的局部信号外，还给出了修正感觉的深度值。亥姆霍兹的理论则不同，它把光学深度看成一个构造过程的结果。只有后一理论才易与事实相协调。然而也必须说明，在先天论的意义下，

与深度这一维度相关，也出现了一些新的有独创性的东西。前两个层次上获得的材料——二维的纯视觉域以及眼肌的运动之域——就可以借助于它构筑成一个有中心的三维空间，自我的躯体可从中找到自己的位置，虽然这仍是特殊的中心的位置。[在前两个层次上显然还没有这样一个躯体—自我(body-ego)。]我们原来是把一个客体透视的外观变成视网膜上的平面图形的，现在我们“反过来”(不论是自愿地还是非自愿地)对平面图形作透视的解释时(例如可与亥姆霍兹的《生理光学》第3卷，239页比较)，就会特别清楚地感觉到视觉有一种“串连”(animating)与“整合”(integrating)的功能，能够把视域中的图形，转变成受到来自空间中心的视线所照到的客体的外观。也就是在这个层次上，与局部化的触觉域和四肢的动作发生了联系。在与视觉相关的心理学实验中，常用抓住看见的东西作为一种对比。胡塞尔则强调指出：“所有这些事实，原来只被说成是空间直观的偶然附带的事实，而不是“真正的”、“客体的”空间，却表现出是本质上必需的，只需少许经验的修正”(*Ideen*, p. 315)；贝克尔也就是在这个意义上对空间性的结构层次作了更详细的现象学的描述。

当人们向有中心的空间的无限远的天边走去时，由于与此相联的移动，也由于感觉到有可能按照自愿的意图让躯体运动，这样就从有中心的空间产生了匀齐的空间。只是在这个阶段上，才感到躯体也和其他空间客体一样，而我们也就能够想象出别人也各有自己的视点。唯有如此才可设想，对于不同的主体，空间都是一个；这是构造出一个各个主体都共有的世界之前提。也只有这样才能够确定客体在此空间中的方位，才能在多个主体之间进行对比与修正。

贝克莱不赞成亚里士多德把空间看成是一个 *αἰσθητὸν κοινόν*，认为只存在对各人均不相同的感觉空间。施通普夫则反对并且质疑

说："我们是否应该相信触觉的持续与视觉的持续也都是异质的不同成分？"（上引书，p. 287）。认为空间以前（pre-spatial）的局部化域（即第一、第二层次）对视觉与触觉各不相同，在这一点上贝克莱可能是对的。但是从第三层次起则只能讲一个空间，它同时包含了触觉以及视觉的感觉素材。这样，空间成了联结不同的感觉域的链条。培恩关于空间的联结理论（association theory），目的就是想说明空间的这一功能。庞加莱把这个理论发展为更确切的形式。他首先区别了质的变化与运动，提出后者是可以通过自我—躯体（ego-body）的运动而加以逆转的，而自我—躯体的运动则是通过自愿的意图与相伴动觉才表现出来的（*La valeur de la science*，Chap. Ⅳ，§§1—4）。他然后就试图给出一个判据，以判明通过各不相同的一串动觉和自愿的意图而到达的两个点在空间中是否重合；最后他研究相关于不同的感觉器官（例如两个指尖或者左眼的视觉与右肢的触觉）的空间之间的映射——通常解释为全同。按照这种观点，则视觉可以及于远方而触觉则不能，这个命题只不过是说出了以下事实：任意感觉器官的空间中的两处，如果相应于触觉器官空间中两个互相重合的位置，则在该器官的空间中这两处亦必重合；但触觉空间的两个不重合的位置，则可能对应于视觉空间中的互相重合的位置。斯图亚特·穆勒接受了培恩的观点，但是他的空间的表象并不是由培恩的感觉及其组合构成的，而是由它们通过创造性的合成（"心灵化学"）产生出来的。所有这些理论都忽略了在结构的最低层次的无可否认的素材，这些素材并不具有感觉的特性，例如在纯视域中的并置就是。]

B 空间的实质

意识的一般形式就是对于"此"（This）（此地此时）和"于是"

(Thus)的深刻洞察。一个事物只能在直观与意识的密不可分的统一中，通过连续的延展性与连续的质叠合，才能存在。从现象学的观点看来，也不能再超越于此。如果按形而上学的观点，如柏拉图那样，让被动的意识来自两个“运动”的相遇，一个运动来自“自我”，另一个运动来自客体，则会把质贬入客体的领域，而把延展性贬入自我的领域(但是并非反之亦然，因为延展性是自由的可能性的一种性质上尚未分化的域，而具体的多样性则在于质之中)。费希特说：“可看清的和可穿透的空间先于看视和伸戳而存在，我的知识(*Wissen*)之最纯粹的像并不是被看见的，而是被直觉的，而且其中我的‘看’本身也是被直觉的。光并不在我之外，而是在我之内。我自己就是光”(*Werke*, ed. Medicus, Ⅲ, p. 325)。但是这种直觉作为一种整合的力量，其洞察感觉素材并且应用其材料的方式，很受经验之限制。

这两种成分(即延展性与质)之不可分离，正是亚里士多德的论题“虚空是不可能的”之基础。休谟正是这样解释的(*Treatise*, Book Ⅰ, Part Ⅱ)(在这方面必须记住，空间——或更准确些说是时空——它的分离和它的接触一样，是可以直接确定的)。但是这个基本的认识论的事实，必须要通过亚里士多德所说的从一个属转移到另一个属(*metabasis eis allo genos*)才会变成关于物质—物理事件的论断，这样就会引导到笛卡儿的如下论断(这是休谟所嘲笑过的)：箱子如果被抽空了，它的壁就会碰到一起。莱布尼茨是在关于世界的完美性和充足理由律的基础上来否定虚空(emptiness)的。他把空间连同时间解释为现象的次序，以此来说明空间必定联系于感官上的质。施通普夫反驳说：“当我们区分不同的次序时，每一次我们都必须承认，是相对于有特定的、绝对的内容来谈次序，”因此他断言，“宁可说空间是作为次序基础的肯定的绝对的内容”(上引书，pp. 15, 26)。

他宣称，空间中的点的位置必须是基于各个点个别来看的“位置”，并采用了关系之自身不充分性的逻辑原理[这个原理他可能是从布伦坦诺(F. Brentano)写的《关于空间与时间的学说》(Zur Lehre von Raum und Zeit, *Kant-Studien*, XXVI)那里取来的]，这样他就使自己无缘理解位置的相对性了。

因为仅仅是“此地”(Here)本身，是不可能与其他“此地”相区别的，空间就是 *principium individuationis*(个性化原则)。它使得有可能存在各方面都相同唯有编号不同的事物。这就是为什么康德反过来把空间说成是直观的形式而不是关于“现象的事情，即相应于感觉的事情”。相似性与全等的概念根源在此。莱布尼茨由此推知空间与时间只是理想中的东西；因为它们违反了“不可辨别即为全同”这一原理，这个原理莱布尼茨认为在质的领域中是必不可少的(即作为充足理由律的推论)——在这一点上，他和斯宾诺莎(Spinoza)是一致的。

实在的二元性(dual nature of reality)可以说明以下事实，即若不以可能性作为背景，我们不可能给存在性以理论的形象。所以四维时空连续统属于这样一个领域，其中先验地存在重合的可能性。这就是为什么莱布尼茨说“抽象的空间是一切可能取得的位置之次序”，并由此再加上一句，“所以它是某种理想的东西”(见莱布尼茨致克拉克的第五封信，§104)。

[如果我们说地球到太阳的距离是多少码，这句话是通过下面的情况才得到可以验证的意义：有一个刚性的梯子，它一端靠着地球，另一端靠着太阳，在梯子上则用可以移动的尺来标出多少码。刚体在物理上最清楚的实现就是晶体。如果要想使得坐标有可以直接获得的意

义，我们必须设想整个世界是被一个晶体所填满了的。在所有使晶格仍变为晶格的运动(即覆盖运动)中，我们可以用其特定的性质把平移区分出来；可以用覆盖平移(即实际进行平移)引入数的三元组作为晶格中原子的坐标，这些坐标形成了全空间中位置的标志。但是两端靠着地球和太阳的梯子是不存在的，用刚性的标尺去量度也没有人做过。同理，“坐标晶体”也不存在，覆盖平移也未付诸实践。说实在的，它们的理想性是很本质的，因为它们的存在会产生实在的力量，影响世界上事件的进程。至于第 16 节中讨论的结构，我们只能断定，由实验者的自由干预而产生的事件来确定这种结构，可能性是有的。因此，几何命题只是理想地确定下来的，孤立地来看个别几何命题，都没有可用已给予我们的东西来验证的意义。这种理想的确定形成一个网络，它只是忽而在此，忽而在彼地与人所经验到的实在相接触，而在这些接触点上，必须对它加以“检验”。用最平常的话语来说，这就可以称为几何方法。“必须承认，那些打算不用几何学而来对付自然科学问题的人，是在做不可为之事，”伽利略如是说(Dialogo, *Opere*, Ⅶ, p. 229)。这种方法的敌人，一是经验主义者，因为对于他们，任何先验的结构都是如芒在背；他们天真地想象，可以把实在作为一个他们自以为是绝无先验成分的层次，用纯粹描述性的方法来掌握[例如培根(Bacon)与伽利略的对立，休谟与康德的对立，马赫与爱因斯坦的对立都是这样]。二是那些形而上学家，他们由于厌恶几何结构的自由和领域的开放，所以也反对这种方法，而去建造一个僵硬的辩证的概念世界，并且以之作为真正的实在(如黑格尔与牛顿的对立)。从这两个角度来看[与阿尔基塔斯(Archytas)*

* 阿尔基塔斯，公元前 4 世纪的希腊数学家和哲学家，关于他所知甚少。——译者

和柏拉图相对立]，亚里士多德都称得上是伟大的反数学家(anti-mathematician)。]

C 是先验的，还是后验的？

几何认知，特别是欧几里得几何的认知具有先验的特性，这种信念深深植根于过去的年代。开普勒在1610年4月致伽利略的著名的信(Galileo, *Opere*, X, p. 338)中说："关于空间的科学，是唯一的、永恒的，它是上帝精神的反映。人能够参与其中，正是人被称为是上帝之像的原因之一。"莱布尼茨曾试图表明几何的真理是分析的，康德在《纯粹理性批判》一书中，就几何学提出以下问题：怎么可能会有先验的综合判断？康德相信，他已经用下面的论题回答了这个问题，即空间是纯粹的非经验直观。"感觉在空间中仅仅是排列，由之得到一定次序，空间本身并非感觉；因此关于现象的事情都只是后验地给予我们的，而其形式则必须是先验地已存在于我们的心中，因此不需任何感觉，即可作独立的研究……所以只需我们的解释，即可使得几何学作先验综合知识的可能性，成为可以理解的。"非欧几何学的发展，动摇了这种确定性。

[普罗克洛斯（Proclus）*在评论欧几里得时已经就平行线公理提出了警告：不要不适当地使用直观的证据。高斯在给奥尔贝斯(Olbers)的信(1817, *Werke*, Ⅷ, p. 177)中说："我越来越相信，我们的几何学之必然性是不能证明的，至少凡人的智慧不能证明，也不能为了凡人智慧而加以证明。也许在某个来世我们能对空间的本性有另一种洞察，但在目前是达不到的。在此之前，几何不应与纯粹先验

* 普罗克洛斯(Proclus Diadochus, 410—485)，希腊哲学家。——译者

的算术并列，而只能与力学并列。”1830 年他又致信贝塞尔(Bessel)(上引书，p. 201)说：“我们必须谦卑地承认，数仅是我们智慧的产物，空间的实在性则在人心之外，我们不能完全地规定其规律。”]

亥姆霍兹指出，康德关于空间学说的两个部分，即(i)空间是直观的纯粹的形式，(ii)关于空间的科学(即欧几里得几何学)是先验成立的，并非很紧密地相互联系，(ii)并不是由(i)而来的。他愿意接受(i)作为对事态的正确表述；但是按他的看法，除了外部世界的事物都有空间延展性之外，由此什么也推断不出来。与黎曼一致，他提出了几何学有经验性的物理内容，并且引用了牛顿在《原理》一书序言中的一段话：“几何学以力学的应用为基础，它不是别的，而是普遍适用的力学中能够精确地提出并演示其技巧的那一部分。”如果空间量除了“物理等价性”(见 129 页)外还有什么由直接的超验直观给出的相等性，则这两个概念如果一致，可能终究只是一个经验事实，而如果互相冲突，则其超验的相等性又可能降格到“感觉幻象的层次，即一种从客体角度看来并不真实的貌似”(Helmholtz，*Wissenschaftliche Abhandlungen*，Ⅱ，p. 654)。亥姆霍兹为了反对非欧几何学没有直观性(Anschaulichkeit)的论证，建立了直观性的一个定义。他说直观性就是“完全可以想象到的那种感觉印象，就是客体按照感官的规律，在任意可以设想到的条件下，对我们生成的印象，而且一个客体正是凭借着它才区别于类似的客体”。可以参看第 17 节中所描述的，客体世界与沿一世界线运动的那个点眼所看到的主体像的关系。针对企图用实验来检验几何学，必然会涉及刚体与光线的性态这样一种论据，可以指出个别的物理学定律，如果孤立地看待，正如几何学的个别规律一样，难以用实验来检验，而构造性的理

论，只有作为一个整体，才能付诸检验。

受到现代数学公理化研究的影响，人们开始区别“数学空间”与“物理空间”，前者的法则是任意设定的公理的逻辑后承，后者则是真实事物的次序模式，且作为一个整体的成分进入对于世界的理论构造。关于这个区别，爱因斯坦说（*Geometrie und Erfahrung*，p. 3），“数学命题在讲到实在时，它就不是确定的，在它为确定时，它就不是讲的实在。”另一方面，自那以后哲学的总的发展走上了这样一条道路，使康德的先验判断分成了两个方向。在一个方向上，存在非经验的法则（Wesensgesetze），它描述了意识的素材与层次如何彼此互为对方的基础，但它不宣称含有关于事实的命题；这条探讨的路线聚焦为胡塞尔的现象学，其先验性大大超过了康德的体系。另一个方向则是表述了构建理论的一些原则，其最极端的观点（庞加莱）认为理论只是纯粹的约定。

因为在第一部分中已经讲过了，所以我在此不必更详细地讨论连续统的一般数学，以及可以赋予它们的更重要的结构。对于物理空间的情况，可以在某种客体的意义下区分先验与后验的特性，而不必如康德那样讨论其认知的根源或其认知的特性。事实上，按照黎曼—爱因斯坦的观点，我们可以把度量的一个绝对给定的欧几里得—毕达哥拉斯本性与在不同点的度量之相互定向（即度量场的定量的进程）作一对照。前者不具有因在连续的标尺上占有不同位置而产生的不可根除的模糊性；后者则是偶然的，依赖于物质的分布，它在不断改变，只能近似地而且要借助于对于实在的直接直观才能得到。于是，广义相对论并没有完全否定有这种意义下的先验的东西，即对延展于外部世界的介质之构造是先验的东西，但是先验与后验的界限要画在不同的地方。（说得更准确些，先验与后验的并置或分离，应理

解为——在这类情况下总是如此——可以从整体中孤立出先验的因素而不穷尽整体；然而，当把这一部分从整体中“减掉”以后，余下的却不是完全后验性质的残留物。）在世界的先验特性中，除了具有上述本性的度量场以外，还有比它更上一层的拓扑连通性，它是永远固定的，还有维数4。 度量场的定量进程遵从精确的自然定律即爱因斯坦的引力定律，就像电磁场遵从麦克斯韦定律一样。 在后验的东西中，还需要区分哪一些按自然定律是必然的，哪一些即使是在这些规律下仍是自由的，因此是偶然的。 分为先验与后验的两重分级，现在被代之以三重分级。

{除了物理空间外，也可以承认还存在一个直观空间，并要求它的度量结构必适合欧几里得几何。 这个观点并不与物理学相矛盾，至少当物理学坚持一点 O 的无穷小邻域必具欧几里得本性时是如此（在此时刻，自我恰好在 O 点）。 因为由不同的星体发出且射到点眼的光线，其空间方向所成的角确实适合欧几里得空间的球面三角学。但是这就得承认，离开这个自我中心越远，直观空间与物理空间的关系就越模糊。 直观空间就好像一个弯曲的曲面（物理空间）在 O 点的切平面；在紧接 O 的邻域中，两者重合，但是离 O 点越远，我们想把 O 附近的重合关系连续拓展，来建立切平面与曲面之间的一一对应关系，也就有更大的任意性。 这并不意味着，这样一种直观空间必然有一种模糊的特性。 直观空间说到底并没有用游移不定或者马虎妥协来克服双目视觉所产生的偏差（只要并没有因为极端的情况，或由于专注于如此的视觉的感受，而导致两个视域的对抗和分裂），而是真正明晰的。 虽然在做客体性的构建时，这种事态可以看作是一种妥协。}

由于空间的先验特性，产生了一项任务，就是在理性的基础上，了解它的一些特点；而正是这些特点，使得能在形式化的数学所展示的更一般的可能性中，找到这些先验特性的特定位置。于是，四维黎曼流形按本性有三种可能，视其基本度量形式有 0 个、1 个或 2 个负维度而定。如果世界对应于 0 个负维度的情况，则任一件事情的效应都不会从世界点 O 传播；若相应于 2 个负维度的情况，则过去与将来将融为一个世界域。所以可以这样论证：在真正的世界的度量场中实现的是居中的 1 个负维度的情况，这正是因果结构必须要具备的，有了它，自我才能与世界或被动或主动地联系起来，才能区分过去与将来，才能区分什么是本来已知的，什么又是按计划得出来的。对于由三维空间无可反驳地形式化(第 12 节)而得到的 n 维欧几里得几何或黎曼几何，也必须提出这样的疑问，还要问有什么内在的理由，使得真实的空间恰好是 $n = 3$ 这一特殊情况。亚里士多德对此给出了好几个答案，但都属于神秘思想的范畴。伽利略在《对话》一书开头就讨论了亚里士多德的这些答案并加以拒绝。他自己提出的解决方案则只是把问题陈述得更清楚，而没有回答问题。在我看来，成功的最佳机会在理论物理的构造中。[6]例如，可以用光的波动方程(它可以立刻推广到 n 维)来证明，只有在奇数维空间中，一根蜡烛熄灭之后，会立刻在其四周出现一片完全黑暗的区域(其半径随光的行进而迅速增加)。这至少表明了，关于效应的传播，维数为偶或为奇，有重要的内在的区别。麦克斯韦就虚空的空间中电磁场发展起来的那些特别简单而和谐的法则，与任意改变世界的长度单位标准，都是不变的，只要世界是四维的就行。对任意别的维数，这个“规范不变性”原理却不能成立。

[欧几里得旋转群(即便采用黎曼—爱因斯坦的无穷小几何，它仍然统治着世界的度量本性)的群构造，在不同维数下有着决定性的不同。这种情况暗示，数学与物理的法则在一个更深的层次上有可能不再受维数影响，但这个层次是今天的物理学还很难触及的。有充分的理由期待，有朝一日，我们的问题会沿着这条路线得到一个无可争议的解答。波尔查诺(*Abhandlungen der Böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften*，1843)就企图通过空间的三维性在意识中构成外部世界的作用来理解它。而贝克尔更晚些时候在同一方向的研究，虽不那么荒谬，却远非令人满意。

作者恰好是通过把先验的与后验的分开来，曾经指出过一条理解度量的毕达哥拉斯本性(欧几里得旋转群就表现了这种本性)的道路。只在这个特殊群的特例下，度量场的偶然的定量分布，只要它是在其先验的固定本性的框架下，不论怎么选取，都唯一地决定了一无穷小平移，即由一点非旋转地前进而进入世界。这个论断涉及作者所证明的一个相当深刻的群论定理。这样解决了的空间问题，在黎曼—爱因斯坦理论中起的作用，颇类似于亥姆霍兹—李问题(见第 14 节)在刚性的欧几里得空间中所起的作用。“直线行进”可能唯一确定这个公设，可以在符合现象学要求的空间结构的基础上得到论证。贝克尔坚持试图把欧几里得旋转群对于直观空间的意义，放在亥姆霍兹自由运动性质公设的基础上。如果按照第 15 节所作的注解那样，把 3 或 4 维的变换群 Δ_0 看成一个抽象群的表示，则应更加强调这个抽象群的独有特性，而不是强调特殊 Δ_0 的具体表示。]

参考文献

R. DESCARTES, *Principia philosophiae*.

G. GALILEO, *Il saggiatore*.

T. HOBBES, *De corpore*.

G. W. LEIBNIZ, *Philosophische Schriften*, ed. Gerhardt, VII, pp. 352—440 (Controversy between Leibniz and Clarke).

J. LOCKE, *An Enquiry concerning Human Understanding*.

D. HUME, *Treatise of Human Nature*.

I. KANT, *Kritik der reinen Vernunft*.

H. VON HELMHOLTZ, *Handbuch der physiologischen Optik*, III.

——Über den Ursprung und die Bedeutung der geometrischen Axiome, in *Vorträge und Reden*, fourth edition, II, 1896.

——Über den Ursprung und Sinn der geometrischen Sätze, *Wissenschaftliche Abhandlungen*, II, p. 643.

E. MACH, *Analyse der Empfindungen*, third edition, Jena, 1903.

R. LUNEBURG, *Mathematical Analysis of Binocular Vision*, Princeton University Press, Princeton, 1947.

E. STUDY, *Die realistische Weltansicht und die Lehre vom Raum*, Braunschweig, 1914.

M. SCHLICK, *Allgemeine Erkenntnislehre*, Berlin, 1918.

E. HUSSERL, Ideen zu einer reinen Phänomenologie und phänomenologischen Philosophie, *Jahrbuch für Philosophie und phänomenologische Forschung*, 1, pp. 1—323, 1913. (English translation under the title *Ideas* in the Library of Philosophy, London and New York, 1931.)

O. BECKER, Beiträge zur phänomenologischen Begründung der Geometrie und ihrer physikalischen Anwendungen, *ibid.*, 6.

H. WEYL, *Mathematische Analyse des Raumproblems*.

R. CARNAP, Der Raum, *Kant-Studien*, Ergänzungsheft, 56, 1922.

第二章　方法论

19　量度

现代已经肯定了这样一种意见，即只有当定性的确定被归结为定量的确定以后，才能在真实的外部世界中找到认知上的联系。这种意见是反对亚里士多德哲学的，它对于自然科学有着基本的重要性。用开普勒的简洁的说法就是，“Ut oculus ad colores, auris ad sonos, ita mens hominis non ad quaevis sed ad quanta intelligenda condita est.”（定量的研究之对于人的探索，正如眼睛之对于探索色彩，耳朵之对于探索声音一样。）我们的知识的标准在于它对“隐秘的质”(nudae quantitates)的接近。伽利略提出了下面的原则，“量度一切可以量度的，设法使目前尚无法量度的变成可量度的。”他发明的温度计，正是这个原则第二部分的光辉例证。

但是量度究竟是什么？下面以惯性质量为例。

如果以同样的速度驱动两个物体相撞，而任何一个都不能逼着另一个后退(可以假设它们相撞后就粘在一起)，按照伽利略的说法，就

应该赋予它们以同样的惯性质量。这正是一个用抽象化作的定义。这种用物理方法定义的质量相等，是一个具有(第2节中说的)相等性特性的关系，这是可由经验证实的。此外，必须用实验证明，相等性与伴随在定义过程中的环境，例如碰撞的速度等等都无关。相等性这个所有量度的第一个要件，总有“小于”和“大于”这两个关系与之俱来。在我们的情况下，用相同速度驱动后能将另一个逼退的物体，就是有较大质量的物体。最后还必须给出一个加法的过程；在质量情况下这很简单，就是把两个物体连在一起。在假设了关于这些基本概念的某些公理(例如亥姆霍兹在我们多次引用过的论文《数与量度》中就讨论过)以后，就能建立起一个测量用的标记，它用一个数来刻画所研究的量之每个值。有时可能还必须任意确定量度的某个单位(这里又有了一个新的相对性的成分，例如在线段和质量情况下就是如此)；而在其他情况下则可能有自然的量度单位存在，例如在角的领域中，旋转一整圈(360°)就是一个自然的单位。从实用观点来看，单位必须符合以下要求，即在任何地点、任何时刻都可以所要求的精度再现。

还有一些量与上面讲的这些“可加”量不同，它出现在可加量的函数关系中，是作为自然定律被接受的绝对的物质性的常数。属于这个范畴的有折射率 n，斯涅耳(Snell)的折射定律说明了它的意义：入射角的正弦等于 n 乘以折射角的正弦(两个角都是可加量，这个定律把它们放在一定的关系中)。亥姆霍兹把这类常数称为“内涵量”，以区别于可加量(即外延量)。特别是，性质的所有数值都是内涵量。

[测量温度是一个好例子。两个物体如果放在一起并不再产生热

交换，就有相等的温度。若 A 和 B，B 和 C 都分别有相等的温度，则 A 与 C 也有相等温度，这一点绝非自明的，而须由经验来证实。在温度领域中并不存在一种可以引导到一确定的量度标尺的加法。然而，不相等温度的物体会使彼此的长度之比发生变化，在这种经验的基础上，我们可以进而确定温度如下：让一个标准物体与待测温度的物体放在一起，再测量标准物体长度的变化。这种测温法总是可以重复的，而且与该物体过去的历史无关。然而我们关于温度的感觉，一个在物理上为常温的物体摸起来感觉其冷或热，就要看我们的皮肤刚才暴露在什么程度的温暖而定。同样温度的木头或铁摸起来感觉不同——如果本来就热，铁摸着更热；如果本来就冷，铁摸着更冷。热的外传导率也参与了决定最终的感觉。这样，关于温度的客体性的概念就与热觉的感觉素材有相当距离了。温标依赖于标准物体的选择。然而，至少是所有气体的反应都很相近，它们的性态在相对小的误差之内都由一个简单定律来描述，而这个定律就成了“理想气体”的特征。但是，只有从理想气体定律导出了对一切物体都成立的热力学第二定律后，才可能无歧义地认识到理想气体温度计的温标。要刻画绝对温度，除了需要相等温度的物体必有相同的温度值 T 这个命题以外，还需要以下的定律：$\mathrm{d}Q/T$ 在可能状态的任意循环上积分为 0。这里 T 是个别状态 σ 下的温度，$\mathrm{d}Q$ 则是当状态 σ 沿此循环进到下一个状态时所生的热的无穷小增量。热是作为能量来量度的，因此是可加的量。这样，温度 T 就成了亥姆霍兹意义下的内涵量。它的定义是一个隐定义，而且预设了某些自然定律的成立。只余下量度的单位是任意的，而零点则不是任意的。T 一定是正的，而温度有绝对零点。（若规定水在 1 个大气压下沸腾与冰冻的温度之差为 100°，则在绝对热力学温标下，这两个温度分别为 373°

与 273°。）

伽利略在他的《对话》中的第二天的谈话中讲到的“力学相似性”定律，其基础就是：按任意选定的标准确定一个量是有相对性的。这些定律使我们能用小模型来研究实在的事件。正如当已知三角形的各角而求其边长之比时，可以用一个小三角形为模型来求。如果在一个有关浮动或飞行的问题中，必须考虑介质(水或空气)的黏性的话，则当变更一个模型时，一般要用另一种介质来取代，这种介质的黏性要按模型的大小加以改变。然而，物理的相似性定律是有局限的。这样，按照狭义相对论的建立，只留下了一个任意的时间与空间的长度单位，光速 c 成了绝对的速度单位。然而，在相对论里有一个绝对的速度单位并不比几何学中有一个绝对的角单位更特别。它只是四维世界的度量结构的推论之一。如果再加上引力常量，则在所有的物理量度中，只余下了一个必须任意选定的单位，例如时间单位秒。至此为止，我们还不需要物质的原子构造。关于原子理论以及由原子定律所得出的自然界的绝对常数，请参看第 22 节 E 和附录 F。]

量度理论(theory of mensuration)涉及一个问题：为什么可能确定一个量，其精确程度远远超过我们的感官所能允许的分辨能力？区分出感官无法分辨的两种黄色的微妙差别(例如钠光谱中两条相邻 D 线之黄色的区别)有什么好处？一个简单的例子是精确测定摆的振动的时间：让它振动 1000 次再把总的时间除以 1000。这样做的精度要比只测 1 次振动之所得增加了 1000 倍。可以肯定，在这里作了一个理论的假设，即每一次单独振动的时间都是一样的。直觉主义者尊重感官精度的极限，所以不愿意侵犯这个极限 1000 次，对于他们而

言，这个假设和间接得到的关于单次振动时间的其他论断一样，是没有意义的。然而这个假设可以部分地证实如下，即 m 次相继振动的时间，与 n 次相继振动的时间（m 与 n 都是大的整数）之比是 $m:n$，当然这也应是在直接观测的精度极限之内。（可以随机地做几列振动来进行这种检测。）一般情况如下：由基本理论的基本定律，想要确定的量 x 是依赖于其他几个量的函数。通过观测其他的量，可以就 x 之值得到一些结论，再由这些结论可以得到比直接观测更准确的 x 值。如果所有间接法得出的 x 之值与它在所希望的误差范围之内是一样的，这个基本理论就得到了证实。特别是，如果一个事实的这种因果性的推论在更长时间中不断发展，这个基本理论就被确定得越精确。两枚导弹的方向之偏离，一开始可能还看不出来，但最终可以变得极明显：一个中靶而另一个脱靶。然而必须记住，任意一种这样间接地进行定量，以及确定连感官都感觉不出来的差别，都要以理论为基础才有可能。验证理论，就在于检验它们推论出的所有数值，并且看能否得出协调的结果。（否则，观察就迫使对理论作出修正。）

〔实验物理学所有的间接方法，从最简单的工具——如游标尺，测小偏差的镜面反射器，分辨发光物发声振动的旋转镜，显微镜——直到现代原子研究用的，从单个原子粒子的效应来观测这个粒子的精巧的实验仪器，都属于这个领域。马赫在《认识与谬误》（*Erkenntnis und Irrtum*，1905）一书的“物理实验与其动机”（Das physische Experiment und seine Leitmotive）一章中对于所涉及方法论原则作了一个有趣的综述，并且试图加以组织。这里是实验者进行发明的广阔领域。〕

尽管可以论证这样一种看法，即世界比从感官上感觉到的要精确得多，甚至是绝对精确的，这种绝对精确的状态仍然要由作为观察者的我来确定，而我为了等待这最终的发展，可能要等到时间终止之时（也要把提供精确定律的理论物理发展到完美才行）。完全的精确性只是一个极限的观念，而绝非可以立即给出的。所以莱布尼茨关于前定的和谐性(preestablished harmony)的思想——他用两个完全独立的时钟为例，这两个时钟之所以是同步的，并不是由于相互有一种调节的影响，而是因为其构造相同——与连续统的本性是矛盾的。休谟在《人性论》一书中宣称测量的精确化是基于彼此间反复修正，但是说认为“进行修正的程度，可以超越我们让任何仪器和技艺所做的事，这只是心的虚构，而且是白费力气、不可理解的”（Book Ⅰ，Part Ⅱ，Section 4）。尽管如此，我们仍然可以理解精确的数学之必要性与方便之处：精确的理论提供了一个进行近似验证的框架。例如，若我们采用欧几里得几何作为空间的理论，有了正方形对角线与边长之比为$\sqrt{2}:1$这个定理以后，则当我们将来要改进测量，不论是直接测量还是间接测量，就有了准备；它可以一再引导我们去做新的预测(其本性是近似的)，或者得到越来越细密的数据以检验标准的测量物是否满足欧几里得几何的理想假设，当然每一步都只是在可达到的精度内。

〔近来，丹麦几何学家叶尔姆斯列夫(Hjelmslev)主张一种纯粹近似的几何学（*Abhandlungen des Mathematischen Seminars der Universität Hamburg*，Vol. 2，p. 1），其论据则与休谟相同。休谟说，“我们的理念似乎完全确信了：两条不同的直线不会有公共的线段；但是，如果我们考察一下这些想法，就会发现它们总是预设这两

条直线间有一个可以感觉得到的倾角，而当它们形成的角极小时，我们对于什么是直线就不会有那么精确的标准，以使我们确信此命题为真了”（*Treatise*，Book Ⅰ，Part Ⅲ，Section 1）。但是叶尔姆斯列夫进一步把毕达哥拉斯定理陈述如下，“在直角三角形中，可以这样地给三边各赋一数，使赋予斜边的数之平方等于赋予另外两边的数的平方之和。”这时就会感到有一种想缩小直接观察到的量度之不确定性的倾向，办法是把它说成为一个函数关系，即通常的毕达哥拉斯定理所宣称的函数关系，并称之为一个不可违反的精确定律。如果我们还记得，在这里起斜边作用的同一个线段，也可能是无穷多个别图形的组成部分，而在这些图形中它又与其余部分有类似的函数关系，我们就达到了统治着构造性的物理学(constructive physics)的精确理论的概念。附带说一句，叶尔姆斯列夫太过于关心画在黑板上的图，似乎忘记了几何学也必须成为天文学和原子物理的理想观念的基础。构造性的科学可以延续布劳威尔的直觉主义，但是，休谟和叶尔姆斯列夫的感觉主义——它在原则上仅仅承认直接给予我们的感觉的东西为实在的，但无法贯彻到底——对于科学是死路一条。]

量度，正如我们迄今已经考虑到的，是基于以下事实的，即物理量在许多情况下都服从于相等性和可加性的概念，服从于它们特有的公理，正是由于这个事实，它们的值被投影到一个数值标尺上。麦克斯韦说(*Scientific Papers*，Ⅰ，p. 156)：“于是，整个数理科学都是基于物理定律与数的法则的关系。”我们在这里所讨论的把数值符号引入自然科学的特定的方法，不论多么重要，似乎并非定量分析的决定性的特点。如果说，从连续统中把个别位置数字性分化出来的基础是用分割的网罩住连续统，而且在每一步又都有充分的改进与细

化的余地(当然要受到一定组合模式的限制)，这个过程比之真正的量度本身，总是不同的，而且松动得多。此外，许多可观察的物理量(本身并非标量，而是向量或“张量”，例如度量场)的量度只有相对于一坐标系才可能，坐标系就是这样任意地被引入到世界中来的。引入坐标和把量度基于相等元素的加法，在以下两种应用的各个层次上都是典型的：一是应用于世界的形式，二是应用于世界的内容。然而，所有量度唯一决定性的特点就是符号表示；甚至数也绝非唯一可用的符号。量度允许我们使用符号把事物观念地表示出来(相对于量度的已设定的基础)。如果把无限的欧几里得平面的一部分物化为一个平坦的金属片，我们一开始只能在这个金属片内用物质性的标记来固定位置，这种标志与金属片性质不同而且永远可以辨认。但是一旦在金属片上刻出两条正交的轴并刻出一个长度单位，则我们不仅能够用任意精密的刻画明确的网盖住金属片，即对各点指定了坐标(当然这也只是“在观念上”加以指定，而且要以刚性的测量标尺之性态的理论为基础)，而且这种间接法还使我们能把这种观念上的“数值标记”延伸到金属片外去。我们以地球为基点来探测恒星空间时就是这样做的。

最后，在进行量度时，总有一种倾向，即把直接的感官的观测尽可能地归结为最安全、最精确的观测，即空间—时间的重合(特别是，我们尽量不对色彩和光的强度做主观的比较)，尽管不可能完全消除感官的观测。我们希望，任一种量度最终都是确定某一标尺上的标记(例如活动的指针之类)能否与另一个标尺上的标记相重合。在天文观测中，分度圈上的读数就是这样的，用仪器来瞄准一个星体时，使用的就是用光线修正了的重合，即使得星体与镜头上的十字线“重合”。

20 概念的形成

狄尔泰在关于17世纪思想自主性的论文(*Gesammelte Schriften*, Ⅱ, third ed., 1923)中，曾经这样描述伽利略前力学的发展，“伽利略来了，随之而来的是，在2000多年中仅仅考虑和描述自然界的形式以后，有了一个真正的对本性的分析，集中在哥白尼的世界图景中。”为了作此分析，决定性的是要在纷繁的事实中分离出一些简单出现的事实，并且把世界的进程分解为简单的反复出现的元素。培根就已经提出过“分解自然”(dissecare naturam)这个提法。“只有数学家达到了确定无疑和显然，因为他们从最简明易懂者出发”(Descartes, *De Methodo*)。自然科学的力量很大程度上在于，它不再试图在一稿之中就完成对“世界体系”的设计，而屈尊于从事小的个别问题的研究，并以无尽的耐心对它们作详尽的分析。其实笛卡儿本人仍然是罪孽深重，违反了自己关于方法论的说明。伽利略在自然科学领域中优于笛卡儿，部分地应归功于以下事实：伽利略在研究自由落体定律时严格地实行了“知有所不为，乃是大师的高明之处”。[7]

我们可以把这种分解到简单元素的过程分成各阶段，其前三个阶段仍属于前科学时期。

{1. 把三维的空间实在分成单个的部分系统(物体或事物)，使每一个部分系统都是直观上在空间中孤立而且相对恒定的单元。每一个单元的性态都被视为与其他单元无关，除非是进一步分析要求作出修正。与此紧密相关的是把四维的时空实在分解为单个孤立的事件，它们形成了自然的直觉单元。

2. 形成一个直观地经验过的事件的概念，它们来自时空上的重

合(spatio-temporal coincidence)以及几个简单现象的融合。(如果把其他事件“删去”或代之以“正常情况”，则每一个事件都会生成不同的现象的整体的知觉；例如太阳躲到金色云彩后面去了。)

3. 形成“是什么”(being-so)的知觉，它给出现象的具有特征性质的特点(这些特点本身仍是现象的不充分的部分)。将类似事物分组，使之归结为概念，总而言之：“分类”就是以此过程为基础的。当我们的经验财富增加时，这种分类也会自我修正。它将学着越来越好地把真正本质的与非本质的区别开来，进展到形成越来越“自然”的类。概念越本质，则它按照经验的证据所导出的蕴含于其中的东西也越丰富，即是说会经验地发现，本来不包含在此概念下的更多的特征，也是此概念下的客体所共有的。

4. 我们还不满足于直观上可以孤立起来的元素，而把那些总是一起出现的一系列性质解释为：它们指示了还有什么东西隐藏于其深处。这就导致了一些假设的元素存在，例如原子、力、电磁场等等。此外，我们学着不仅是解释可观察到的性质，还把一个系统在与另一个系统相遇时的反应解释为这种假设的元素的表现，即其内涵与其定量的值的表现。(实验的本质，就是按照我们的意愿教唆出来的反应。)最后，我们会毫不犹豫地把这些假设出来的，甚至直观上已经很简单的元素再加分解，例如把白色的阳光分成光谱上的色光，把行星的加速度分成太阳给出的部分加速度和其他行星给出的部分加速度。很显然，在分解的同时，还要建立综合的原理，以便把元素按之形成一个整体(例如形成合力)。]

处处都从最简单者出发，我们就会在这样得到的一再出现的元素及其值的变化中，找到恒定的、合规律的关系，可以对它进行定量的

研究，并用数学函数表示出来。起决定作用的是：分析越有进展，观察越是仔细，对现象之分解为元素越细，则基本规律会变得越简单——而不是如人们可能设想的变得越复杂——这些规律对事件的事实进程的解释，也更完备、更准确。正确的构造性概念只有沿这种分析的途径才可能进展，以描述客体的自然界；这些概念从头到尾都是与明确的事实和有效的自然定律不可分的。

〔在物理学中究竟是什么迫使我们把均匀的白色看成由许多东西组合而成的？这就是因果律：相等的东西，在相等的条件下，产生相等的反应。在感官上相同的两束白光，却具有“隐藏着”的区别，因为它们在通过同样的棱镜后，给出不同的光谱，故而因果律要求把它们看成两种光。（从原则上说，这里发生的事，与两个外形相同却有不同惯性与重量的球并无不同，因为切开其中一个发现它有一个灰色的铅核。）后来发现，隐藏在白光后面的多种多样的东西，用光谱及其强度分布来描述最为方便。首先要让用于反应的仪器，即有种种特殊性质的棱镜也参加进来，有必要对棱镜的形状与质地加以改变，才能把它对这两个色光的反应分离开。这样，我们将得到光谱上各种色彩的波长，而波长是与棱镜无关的。上面我们以检验粒子在荷电的导体产生的场中所受的驱动力为例，详细解释了这种分离是怎样做到的。另一方面，有一定光谱色和强度的偏振光才被证明是简单的东西，因为它在一切反应中的性态都完全决定于以上提到的特性。〕

伽利略的质量概念是物理概念的形成的一个典型例子。我们在上面已提到了质量相等的判据。在这里动量概念表现为先于质量概念。两个物体相向运动（按惯性定律各自做匀速平移，各自的速度也不一定

相同)，若在碰撞后(假设碰撞后不合为一个物体)每一个都不能逼着另一个后退，则它们有大小相等、符号相反的动量。 如果它们在速度相等时也有相同动量，我们就重复伽利略的说法，说它们有相等的质量。 我们就是这样按照第 6 节中讲构造性认知的意义处理一个构造性概念。 我们不是(或者说不仅是)在数的领域中做纯粹的智力操作，而是在做真正的(至少是真正可能的)实验，并用其数值的结果来确定特性。 这是很重要的一步。 从物质上撕去了所有感官的质以后，乍一看会只留下赋予它的几何性质。 在这方面，笛卡儿是完全前后如一的。 但是现在看来，物体还有一些数值特征可以得自于一些定律，即该物体在反应中运动发生变化时所要服从的定律。 这样，除了几何学与运动学之外，还会开辟适当的力学和物理学概念的领域。 伽利略的质量定义基本上蕴含了动量定律："一孤立物体(设做匀速运动)有动量 $\vec{I} = m\vec{v}$，这是一个向量，其方向与速度 $\vec{v}$ 相同。 一孤立系统中各个物体的动量之和，在反应前与反应后必相等。"令所观察的物体服从这个定律，就能得到各个物体在反应前与反应后的质量 m 之比的数值。 构造性的自然科学有一个一般的任务，即赋予客体以这类构造性的定量特征(它仅依赖于此客体，虽然不一定可直接观察到)，使得在由同类特征所描述的环境下，它们的性态为完全确定的并可在自然法则的基础上预测。特征的隐示的定义是与这些法则相联系的。科学这样才能服从以下的公设(如果除了感官的质以外什么都不承认，这个公设就不可能满足)："物体所经历的一切变化，均在自然界及物体本身的质中有其原因"(Euler，*Anleitung zur Naturlehre*. Chap. Ⅰ，§2，*Opera posturna*，Ⅱ，1862)。 我们虽然没有找到自然知识的一般原则但却要求遵循它们，庞加莱用他的约定主义(conventionalism)特别强调的正在于此。

再回到反应过程的时间分析，考虑到一个孤立物体 k 的动量 $\vec{I}$ 在时间中不会变化，所以如果 $\vec{I}$ 改变了，这就表示有其他物体 k_1，k_2，…作用于 k。我们取 $\vec{I}$ 在单位时间中的变化 $\frac{\mathrm{d}\vec{I}}{\mathrm{d}t}$ 来度量这种作用，并称之为力。事实上，牛顿就已认识到，这力是由 k_1，k_2，…对于 k 的分作用按加法(即向量加法的平行四边形法则)组合而成的。这些力是这样作用的：以 k_1 为例，k_1 对 k 在某一瞬间的作用力只依赖于当时 k_1 和 k 的状况(即位置和速度)。以上就是一个力分解为几个分力的真正含义。看看这些事实，就不能不得出以下的结论：以“力 = 动量的时间导数”作定义，并没有充分反映力的本性，而真实情形是别样的：力是一种独立力量的表现，它把各个物体按其内在的本性及其相对位置、相对运动联结起来，而正是这种力导致了动量随时间改变。于是活生生的形而上学的解释就符合了理论的构造。物理学通过关于运动的基本力学定律得到一项任务：探讨作用在物体之间，并依赖于这些物体的位置、运动和内在条件的力。内在条件通过刻画作用中的物体状态的一些数值而进入力的定律，例如关于静电的吸引和排斥的库仑定律中的电荷。于是，力的概念变成物质的新可测物理特征的来源。

关于自然界的形而上学概念要受到理论构造的结果之影响，这种影响会在概念中得到有启发作用并富有成果的表达。时常在具体研究工作的根基上就已经有了一些尚未被体会到的想法，这些想法则与事实令人愉快地互相呼应。伽利略在运动过程中就看到了动力强度、驱动的推力，impetus* 或动量这些概念。在伽利略看来，运动

---

* 这是 13、14 世纪常用的一个概念，用于当时关于运动的理论，后来的动量概念可以认为源出于此。——译者

依赖于两种倾向的斗争，即惯性与力的斗争，力使得物体偏离惯性规定的路径，质量就是惯性抵抗偏离的力的动力学系数。歌德在《色的理论历史》(*Geschichte der Farbenlehre*，Section 4，Galileo Galilei)中说："在科学中一切都依赖于所谓的概观(*aperçu*)，即认识到是什么在现象的根基上。这样一种认识的成果是无限丰富的。"有了正确的方向，在其指导下进行的详细研究中，正确的基本概念就会出现。

[卡西勒(E. Cassirer)在其《实体的概念与功能的概念》(*Substanzbegriff und Funktionsbegriff*，1910)一书中努力表明，在数学与物理学中，概念的形成绝不是按照亚里士多德的逻辑模式。在平面解析几何中，椭圆是用其方程来定义的，此方程则是令坐标的某个正定二次型等于1。令二次型的系数取特定的值(这些值限定在某个事先确定的范围中变动，即在实数连续统中变动)就得到各个椭圆。我们不能同意卡西勒的说明，说在此过程中更一般的概念更为丰富；因为个别椭圆的性质除了依赖于方程的一般形式外，还依赖于系数的特定值。虽然如此，认定特例是从一般情况中对"变量"指定确定的值——其范围或者是完全给定的或者是可以自由构成的——而得出的，这一点却是真的。亚里士多德从单个客体上升到概念，方法是分离出个别的特点，而将其余一切都"抽象"掉。于是，所有展现了同样特点的其他客体也都落入了同样的概念，即分到同样的类中。在这个过程中，只涉及真正存在的客体(例如在描述植物学或动物学中)，而类(classes)宁可说是这样形成的：按照经验之所证实，使这些概念能够具有尽可能多的"内含的东西"。另一方面，在概念的数学和物理的形成中，或者说是"功能"的形成中，并没有任何抽象化，而只是让某个个别的特性成为可变的，可以做连续的分级(例如

椭圆情况中的二次型系数就是这样的），这样概念之所及就不只是延伸到所有真正存在的客体，而且还延伸到所有可能如此得出的客体。按照马赫的说法（*Prinzipien der Wärmelehre*，third ed.，1919，p. 459），“偏好这种定量的构造法，是真正值得的，因为它使得有可能无限地精细化，易于综述，能够处理一切情况所成的整个连续统，以保证完备性。”然而，在这里最本质的是，上面说的连续统并不是指的一个封闭的整体，它的有待于确定的领域是开放的，而且通向无限；因为，如果不是这样，我们终究还会回到亚里士多德的特征特性这种模式[“点(x, y)的一个集合是一个椭圆，如果存在数 a，b，c 使此集合的所有点（而无其他点）都满足方程 $ax^2 + 2bxy + cy^2 = 1$”]。这样，落入这种功能性概念下的个别个体必须加以推广，某一个给定客体是否在此概念下这个问题是不能问的，即不能指望对此问题做出清楚明确的是或否的回答。

利用 67 页上的那种柏拉图式的图（此图与一维连续统的分割的网是一样的），柏拉图利用二分法（即 diaeresis）由一般进到特殊，以此确定一切存在物的位置。这种模式，还有柏拉图式的基于此事的“理念即数”这一概念，并不如人们乍一看时认为的那样远离现代关于世界的数学—物理学概念。对此模式需做的修改首先是，正如柏拉图所坚持的那样，分割的某些但非所有层次以及分割本身——如像作为祭祀动物的分割那样（*Phaedrus*，265c；*Politicus*，287c）——是由事实所规定，而且可以严格执行的（当出现了均匀的连通的连续统时，这种可能性就没有了）；其次是这个过程可以持续下去直至无限，个别东西只是作为一种极限的理念出现在远方天边。亚里士多德的特点则是把这个图式颠倒过来，由最底层的个别存在开始，而柏拉图则从“一”开始。

特别是，按照第 2 节末尾讲的规则用数学抽象得到的概念，都具有“功能性”的本性。]

21 理论的形成

根据上面的讨论，自然科学的构造性的本性已经显而易见了。个别的科学命题并不能赋以可用直觉来检验的意义，真理构成一个体系，只能在其整体中才能检验。霍布斯发展了以下的观点（*English Works*，Ⅶ，pp. 183 ff.）：我们只在那样一些科学中才能得到确定的认知，这些科学是在认知主体内部的结构条件的基础上构造自己的客体对象的。对于霍布斯而言，实在并不在于意识的形象中，而在于意识的内容，这些内容使得有可能来构造客体。他在这个由起源而生成现象的综合过程中，看到的不是 *cognitio*（认知），而是严格意义的 *scientia*（科学）。他宣称，在自然科学中能够使用数学的演绎之处，都会发生这个过程。狄尔泰说（*Gesammelte Schriften*，Ⅱ，p. 260）：“人类智慧独立的至上的意识，及其对于物理事物的力量，肯定是由哥白尼、开普勒和伽利略的伟大发现确立的。同时随之而来的，利用意识先验具有的逻辑—数学元素来构造关于自然界的本性的理论，成了绝大部分进步思想的占统治地位的信念。”在现代物理中，建构所用的材料不再是由实在抽象出来的意识的元素，而是纯粹的“算术”符号。事实上，丁勒（Dingler）就定义物理学为符号构造的原则可以完全贯彻的科学领域（*Die Grundlagen de Physik*，p. 305，1923）。但是我们还有经验以及用实验做出的对经验的分析，与这种先验的构造耦合在一起。“人类的科学想象力是由严格的方法所调节的，这种方法使数学思考的种种可能性服从于经验、实验，以及事实的验证。……这样得出的结果使得经过各个国家的共同努力，就

可以造成科学研究规范的、互相联结的进步。可以说，只有在现时，人类的理性才变成了在各个文明国度协调工作的统一性力量。在这个星球上，人类心智最困难的工作就是由服从经验调节的科学想象力完成的”（Dilthey, Der entwicklungsgeschichtliche Pantheismus，上引书，Ⅱ，p. 346）。

[现以电磁现象的理论为例来说明以上所述。因为我们只想举出最本质处，请允许我为了使读者能避免相对论物理的困难，假设传播速度为无穷大。设有基本的物质量子（即电子），其质量与电荷永远不变。这些电子的位置与速度在时刻 t 按电磁场生成的规律唯一地决定了电磁场。这个场又按进一步的规律与动量和能量的空间分布相联系，而由动量的通量在生成此场的电荷上生成一定的驱动力。最后，这个力按力学的基本定律产生电子的加速度；但是速度和加速度将在时间间隔 dt 内给出下一个时刻电子的位置与速度的变化，于是由它们在时刻 t 的值给出它们在时刻 $t+dt$ 的值。一而再地重复由 t 到 $t+dt$ 的无穷小转移，就可以通过积分这一数学过程得出整个运动。只有这个完备的理论的前后关联，几何在其中显然会起作用，才能用实验证实；甚至在这里还需一个理想化的假设，即电子的运动是能够直接观察的。然而，从这个理论的前后关联中取出的个别定律，只能是悬在半空中的事情。这样一来，物理学和几何学的各个部分，归根结底，都融为不可分割的一体了。

基于同样的理由，一个理论总是由经验的日益丰富和日益精确而不断在作修正。“因此，科学的进展正是依赖于科学本身，它是一个扩展而不是一个创造”（Enriques, *Problems of Science*, translated by Royce, Chicago and London, 1914, Chap. Ⅲ, §37, p. 165）。在

由观察建立开普勒—牛顿的行星理论时，曾暗地里假设每个事件都是在它被感知之时发生的。只是到了后来，木卫的视运动与理论导出的运动出现了明显偏离时，勒默尔(Roemer)才发现了光的传播速度是有限的。这样，原来是使用了一个后来证明为不正确的理论(光的瞬时传播)。但正因为假设了它的粗糙的正确性(再加上得自经验的前提)，才导致了认识它的更精细的不准确性，导致了它的修正。若无最初的假设，甚至连第一步也迈不出去。牛顿研究自然界的第四条规则就是讲的这一点，他说："在实验哲学中，我们必须将由现象所归纳出的命题视为完全正确的或基本正确的，而不管想象所可能得到的与之相反的种种假说，直到出现了其他的或可排除这些命题，或可使之变得更加精确的现象之时"(*Principia*, ed. F. Cajori, p. 400)。]

为了有助于理论家的工作，实验家这样来安排实验，使之对某一个规律最为敏感，而对其余也参与其中的规律尽可能地不敏感，也就是阻滞其余规律所产生的情况之影响。除此以外，在安排实验上，还要煞费苦心地删除"误差的根源"。但不管怎样，某些元素的影响，例如度量场之影响是不可消除的。如果某个事实与科学的整个理论储备不相协调，最后就要让理论家来指出理论应作修正之处。几乎不可能提出这样做的一般规则，也不能求出已知事实在理论解释中所占的相对分量，这得由天才来判断。广义相对论的出现正是由于爱因斯坦认识到了一个事实的基本本质与特殊含义，这个事实就是重量与惯性质量相同。不能排除这样的可能性，即有几个不同的构造同样适于解释我们的感觉。霍布斯与达朗贝尔在认识这种"真理的歧义"上超过了现代的实证主义者。1918 年，爱因斯坦在普朗克六十寿辰时的讲话中就非常公正地描述了认识论的这种情况，"历史

的发展表明了，在种种可以想象到的理论构造中，总有一个被证明无可置疑地优于其他。凡身历其事者，没有人会否认，感觉的世界基本上无疑义地决定了理论系统，虽然并未找到引到这个理论原理的逻辑途径。”

在理论构造的任一个阶段，规律都可分为层次，各个不同层次的规律各有不同程度的稳定性。其中有一些规律被认为有极大坚韧性。在很长一段时间里，欧几里得几何的规律被看作是神圣不可侵犯的。能量与动量的守恒原理之坚韧性，不说是更高，也是堪与比拟的。理论系统的相当一部分可以在任何经验下都保持下来，允许只对其余部分作修正即可。所以在科学研究的实践中，并没有康德意义下的先验与后验的清楚确定的分界，只有把稳定性分级的丰富的标尺。决定一个原理的地位，正在于看这个定律的形式是否简单，是否具有直观上有说服力的特性，再加上它对广泛领域的事实是否有决定性的意义。例如，令人信服的简单的惯性定律，一开始似乎是由我们相对于地球的运动的经验所充分证实了的，尽管后来有一些经验(例如傅科摆实验)与之矛盾，仍然得以维持。不过要借助于一个“狡猾的遁词”，说这个定律讲的并非相对于地球的运动，而是讲的“绝对运动”，而“绝对运动”的意义则由现象来确定。动量定律是基于一个“明显的”事实，即原来静止的物体系统，不可能在其自身的力作用下向前平移运动；更准确些说，一个静止的孤立的物体系统，不能使其一部分得到匀速平移运动而不波及其余部分。当我们嘲笑闵希豪生(Münchhausen)*想拉着自己的辫子把自己从沼泽中拉

---

* 闵希豪生，德国民间故事中的人物，他幻想拉着自己的头发，把自己从地上拉起来。——译者

出来时，其实表现出我们对上述惯性定律是有着直观的了解的。其他例子还有速度的合成定律，伽利略几乎完全没有注意到他其实已经暗中承认了它（见伽利略《对话》中第4天的对话），还有能量原理也是这样。

〔惯性定律有一个特殊形式，即是宣布在各向同性的重力场中，一个物体系统不可能依靠自身能力而把自己提升到更高处，伽利略和斯泰芬（Stevin）就曾使用它来导出斜面定律，惠更斯则用它来把复摆化约为“数学”摆（*Horologium oscillatorium*，1673）。惠更斯已经领悟到能量原理的一般思想了。他说（上引书，p. 95），“只要那种新机器的发明者，那些白费力气地企图造一个永动机的人，能够遵从我的这个假设！他们马上就会认识到自己的错误，明白他们的目标是永远不可能达到的。”莱布尼茨把能量原理写成一个公式：“causa aequat effectum”（原因等于效果），并且把它看成“量的逻辑”所需要的理由充足律的特殊推论。他以此作为度量“*force vive*”（活力）的基础。对于一个结论，一个以下类型的普遍的否定的经验，即“不论情况如何，都不会发生这样的事”，比做单个实验来肯定某个结论分量要重得多。能量守恒原理，正是这样从制造永动机的种种企图都归于失败这件事得到支持的；相对性的各个原理，狭义相对论原理以及“光速恒定”原理，都有这样的特性。牛顿批评经院哲学时说（*Opticks*，ed. Whittaker，pp. 401—402），“告诉我们说每种事物都有一个视觉上的特性，它以此来起作用，而且产生显明的效果，这等于什么也没有说：但是从现象导出两三个关于运动的一般原理，然后再告诉我们，所有物质性事物的作用与性质如何从那些显明的原理而来，这将是哲学很大的进步，哪怕还没有发现这些原

理的原因。”]

简单性被看成是 *sigillum veri*（真理的印记）。开普勒说：“自然界偏爱简单性与统一性”（*Opera*, ed. Frisch. Ⅰ, p. 113）。亚里士多德把同样的原理表述如下（*De coelo*, Ⅰ, 4, 217a）：At deus et natura nihil prorsus faciunt frustra（“但是神和大自然不会创造无用的东西”）。* 它还被当作一个公理：frustra fit per plura quod potest fieri per pauciora（“凡能用‘少’即可完成的事，用了‘多’也是白费力气”）。伽利略在《对话》的第 3 天中重新构造了他得到落体定律时的思想链条（*Opere*, Ⅷ, p. 197）：“所以，当我观察到一个原来静止的物体从一个相当的高度下落而且其速度逐步地得到新的增量，这时我为什么不相信这种增量会以最简单、最合情理的方式发生呢？仔细考察以后，我们将会看到，再没有一种比等量增加更简单的增加方式了。”他进而提出了匀加速运动的概念，展开了其推论而没有顾及经验，而且尽其所能，他发现这个概念被“落体的自然加速”运动所证实。在牛顿提出的研究自然界的规则中，第一条就是“寻求自然事物的原因，不得超出真实和足以解释其现象者。……因为自然喜欢简单性，不会响应于多余原因的侈谈”。** 重要的并不在于建立绝对最简单的原理（而丁勒在其《物理学基础》中却要求如此）——因为那样一来，如对世界赋予一维性而不是四维性就最简单了——真正重要的是把迄至今日的全部经验都考虑进来，而寻求相对于已知现象的最简单的解释。时常有这样的事，即对于某个部分领域，解释 *A*

---

* 这就是奥卡姆的威廉（William of Ockham）本人（他是 14 世纪有影响同时颇具争议的英国哲学家和神学家。因为他出生于英格兰萨里郡的奥卡姆，所以时常简称为奥卡姆）对于所谓奥卡姆的威廉的剃刀（简称奥卡姆剃刀）原理的几种表述之一。——译者

** 这段话引自牛顿的《原理》第三编，中译本第 403 页。——译者

比B简单；但当经验的范围扩大时，A变得越来越复杂而B则不然，结果是B终于成为更优胜的理论而胜出。进一步说，所求的简单性并不一定是显而易见的，而我们必须让自然界教会我们去识别内在的简单性。

〔简单性问题对于自然科学的认识论有中心的重要性。既然对于客体性的陈述，简单性似乎是不可企及的，所以一直企图把它归结为概率，而概率在很大程度上已经被吸收到数学思想中了。例如设已经找到20对(x, y)满足函数关系$y = f(x)$，而且在直角坐标系下描点时，它们位于一直线上，也符合误差要求，这时就会猜测该函数关系是：y线性依赖于x，而且这种线性关系是一个严格的自然法则。这样猜测既是因为直线有简单性，同时也是由于如果涉及的定律不同，则20个观察的点(近似地)位于一直线上，这是极其未必可能的(improbable)。如果现在用直线作内插与外推，就会得到超出观察内容的预测。然而，这样的分析也有问题。肯定有许多方法来数学地定义函数$y = f(x)$，使得有20个观察数据适合它；而这些函数中也有一些相当地偏离于直线。对每个这样的函数，如果它不表示真正的定律，则称20个观察点符合它是极其未必可能的。所以重要的是，数学必定先验地准备好了一个(或一类)具有数学简单性的函数。这个类中的函数，不会含有与观察数据一样多的参数(例如线性函数类$f(x) = ax + b$只依赖于两个参数a，b，而可以确定其值使观察数据与此函数符合)。如果观察精确性有了提高(而观察点数量也有增加)，而原来打算用以解释这些数据的函数仍然与数据相符，这样就得到了对理论的很重要的证实。欧几里得几何是一个出色的例子。大地测量与天文量度的精确性远非建立欧几里得几何时的经验基础所

能想象到，却仍然证实了欧几里得几何学。但是这远非证实简单性原则的唯一例子。在物理学中有许多类似的情况。反过来说，如果一个理论遭到了与托勒密(Ptolemy)的本轮理论一样的命运，即每当观察的准确性有所改进的时候，就需要多添一些轮子，这当然是理论走错了路的肯定的信号。开普勒的三定律显然简单得多，而它与观察结果符合的程度好于能够想象到的最复杂化的本轮系统。但若不是早前的希腊几何学家已经发现了椭圆作为一类数学上简单的曲线，开普勒的天文发现就是不可能的。牛顿的引力定律，特别是把它陈述为一个近距作用律后，又比开普勒的行星运动理论简单。如果只考虑太阳的引力而把其他行星的“摄动”略去不计的话，则后者可以从前者导出。再者，对牛顿理论基础的“深化”(Tieferlegung)的光辉验证就在于，以它为基础来计算这些摄动，并用数量巨大的观察结果对之进行检验的完美性，而这种观察的精确性自第谷·布拉赫(Tycho Brahe)的时代以来已经大有改进。还要补充一点，引力定律已经在超出双星运动的经验范围外被证实是有效的，而设计这个经验范围原本是用于双星的相互运动的。

如果经验已经暗示了一个假说，我们就必须演绎地展开其种种推论，以期得到可以用实验检验的命题。惠更斯在其《论光》(*Traité de la lumière*，1678年写成，1690年出版)一书的序言中讲到，此书所用的论证方法与几何学大不相同，他说：“这里的原理是由它们引出的推论来检验的。……总是有可能达到比严格的证明时常低不了多少的概然性(probability)。事实上，如果在这些原理之下得到的推论与由经验得出的现象完全符合，当然是与严格证明相差无几；特别是，如果现象为数巨大时仍是这样，尤其当设计或预见了由这些假设会得出一些新现象，而且发现这些结果仍与我们的期望相符合时，就

更加如此。”这样，他发现自己关于光的波动理论由于发现了冰晶石的双折射定律得到了证实。这个定律太复杂了，很难纯粹经验地发现；但是如果对光波在冰晶石中的传播作了简单性稍次于球面波的假设，就会得到与经验一致的折射定律了。如果能把直接观察量的复杂的依赖性归结为这个理论中的基本量之间的简单关系，则必须认为这是该理论的成功。伽利略之发现落体定律，也正是遵循了类似的程序。

按照马赫的说法（*Erkenntnis und Irrtum*，p. 237），“假说的基本功能就在于它为新的观察和实验提供了一个向导，我们的假设或由此获得证实，或被驳倒，或得修正，总之，我们的经验得到了拓展。”“一个水手，从海浪冲到海滩上来的东西，想象出一个遥远国度的生动情景，于是出发去探寻这个国度。不论他的探寻成功与否，也不论他找到的并非是他设想的印度或中国的海岸而是一个新地，无论如何，他的经验得到了拓展”（上引书，p. 231）。

对于伽利略、惠更斯与牛顿来说，演绎部分在当时起的作用比现代更大。就伽利略而言，发现一个原理固然值得骄傲，而“从单个原理得出许许多多定理”同样值得骄傲（见他的《对话》中第 3 天对话之末）。在物理学中，经验论的态度是逐渐得到强调的。电的发现是第一次重大出击。]

与简单性这一概念有紧密联系的是完美性的范畴。在亚里士多德哲学中，它不仅作为一个方法论的原则，而且作为一个解释性的原则起了相当大的作用。例如亚里士多德把天体的不可破坏性与不可变更性都归结为它们的形状是完美的球形。伽利略在他的《对话》中这样批判亚里士多德，他指出：首先，从亚里士多德的观点看来，

对于精确的球形若有偏离，则差之毫厘与相差万里是同样不可接受的，因为同样破坏了球的完美性。伽利略从他的连续性的感觉出发，反对如下的观点，即在不允许有绝对准确的量度的自然界中，连续的量的精确的值，会使得此值不论变化多么小，承载者的性质都会截然不同。其次，伽利略指出，以一个四面体包含一个内切球为例，这个四面体伸出来的几个角是可以破坏掉的(但不改变同样的内切球)。这样，他就出色地证明了，对于诸如不可破坏性这样的性质，重要的并不在于其几何形状，而在于其边缘的曲面。某些物理量(在本例中是物质的密度)穿过此面会发生间断性的跳跃，因此曲面必是特殊的表面力的所在之处。(事实上，为使雨滴得到球形，表面张力*起了作用。)我们在这里比在《对话》一书任意其他地方，都更清楚地看到，在解释自然界的本性上，伽利略的思想反对亚里士多德的思想，带来了根本性的变化。伽利略的态度之特点是，他充满激情地赞赏可变性而不是水晶球式的完美无缺(Dialogo，*Opere*，Ⅶ，pp. 83—84)；他指着盛开的花朵，认为它比亚里士多德的孤零零不会改变的天体，更为优美动人。在开普勒的著作中，完美性的考虑仍占了相当的篇幅，他关心所谓“地球的地位”。由于他深信圆是完美的，尽管布拉赫的观察早已逼着他放弃火星的轨道为圆的观点，他却经过了艰苦的挣扎才做到这一点。他在开始时一直死抱着静态的观念，认为行星系统的和谐正表现在柏拉图的正多面体之中。只是在经过努力后，对世界的更为动态的观点才得以胜出。甚至伽利略在《对话》一个显眼的地方也屈从于用几何的完美性作解释的魔法，他以几何完美性为基础指出，纯粹的惯性运动的路径是圆的(而

* 原文作“毛细作用力”。——译者

不是直的！）。然而，从整体上说，他比开普勒更为决定性地实现了这一转变。他不再在固定的构形与个别的物体中去寻求完美，而是在动态的关系与自然定律(其中也为偶然性留下了广阔的余地)中去寻求。对于伽利略，完美性不再是理论的一个事实上的组分，而是一种启发，一种激励人们去研究的原则。狄尔泰说："开普勒、伽利略还有布鲁诺，他们都与古代的毕达哥拉斯学派具有同样的信念，即相信宇宙服从最完美、最理性的数学法则，相信神的理性是自然界的合理性的来源，同时，人的理性也与此相关。"在以后的许多世纪中，经验的漫长路程，使这种信念总是得到新的、惊人的部分实现，其中最美丽的或许要算是麦克斯韦关于虚空空间中的电磁场理论了。但是自然界一再地证明了自己超越于人类的心智，每当人类为了一种更深刻的和谐性而过早地提出一个最终的图景时，它总是逼迫人类毁掉这个图景。

根据第 19 节，对任何理论都必须提出两个严格的要求：(i)协调性，它蕴含了相容性；(ii)没有那些对于可观察现象无影响的多余的纯粹独断的组成部分。此外，绝不可违反充足理由律。在简单的情况下，它可以用诸如对称性的原理，来导出确定的定律。阿基米德把杠杆理论建立在以下定理基础上时，就应用了这一点，该定理就是在等长的杠杆臂上附上相等重量是平衡的。阿基米德把整个构形，包括引力的方向，都相对于经过支点而垂直于杠杆的平面作了一个反射。空间相似性成了结论的基础。如果一个质量与力的构形，或者一个唯一决定事件以后发展的状况，被一个相似变换映为其自身，则事件本身亦必对此变换为不变的。由此原因，这杠杆在上述情况下不可能倾向于一侧。再加上一个一般的力学公理，即若从一个平衡的系统中除去一个平衡的部分系统，其余部分仍然平衡，阿基米德于

是由这个特例得出了杠杆的一般定律。

同样的思路可以导出相等物体有相等惯性质量的定理；即是说若驱动两个相等物体相向而行且有相同速度时，则任一个都不会逼退另一个。 如果两个外观相同的物体发生了一个逼退另一个之事，我们就可以推论，两者必有某种内在的区别。 虽然在不利的情况下，可以承认只不过有质量上的区别，但无论如何，它总会使得我们去寻求这两个物体在物理性态上还有没有其他区别。 通常总是要依靠充足理由律来证明惯性定律，并由此推出，当一个物体自得其所而不受影响时，其运动状态不会改变。 但是，“状态”是什么意思？ 经院派学者把它解释为位置，于是他们相信，一个物体若不受外界影响，则一定静止不动。 伽利略则相反，把它理解为速度，既有大小，又有方向。 哪一种意见为正确，只有经验可以判断。 在上面讲到的情况下，还必须告诉我们，什么是“有关的”起决定作用的情况。 莱布尼茨与克拉克和牛顿关于运动相对性的论争(见第 16 节)，就是应用充足理由律的一个典型例子。 然而，充足理由律作为事实之真理的一个源泉之意义，被莱布尼茨过分夸大了。

[马赫反对先验的东西，认为它们“把科学中的本能直觉变成了一种新的神秘主义而且死死抓住不放”，他还在《力学》一书(第七版，1912，p. 27)中说：“甚至阿基米德所用过的对称性原理这种伟大的逻辑力量之本能的直觉，也会引入歧途。 许多读者都还会记得，当他们第一次知道，沿着磁子午线的磁针会被平行于此磁针的电流弄得偏离到磁子午线以外时，自己心灵所受的震撼。”然而，若对磁针与电流所在的平面作一反射，使电流仍为其自身，而磁针南北极对调，则对称性原理仍会满足。 这个观点之所以公认为可能，是因

为正负磁性是不可分的，而且其本性相同。我们对磁性的本质有一个理论的概念——认为磁性来自分子的垂直于磁针的循环电流——由此，上面那些事情就再也不令人吃惊，而成为必然的了。]

连续性原理是对理论家们的另一个指导原理，它首先是由莱布尼茨一般地提出的。它的基础是：一个匀齐的连续统不可能适当地分划。如像欧几里得那样，把零角和直角从角的概念中排除在外，在科学上是没根据的。静止并不与运动矛盾，而是运动的极限情况或特例。莱布尼茨说，由于这个原理，“静止物体的法则，可以说，只是运动着的物体的一般法则的特例，相等之法则是不等之法则的特例，直线的东西(the rectilinear)的法则只是曲线的东西(the curvilinear)的法则的子类”，而且他称一些多样体为“匀齐的，如果可以用连续的变化将其中的一个变为另一个的话”(Initia rerum Mathematicarum metaphysica，*Mathematische Schriften*，Ⅶ，pp. 25，20)。他根据 *lex continui*(连续性原理)反对碰撞法则，而笛卡儿则按不同情况对此作了不同的陈述。伽利略导出惯性定律时(Dialogo，*Opere* Ⅶ，pp. 171/174)，首先是从物体在斜面上的滑落开始，而这个定律他是知道的，再令斜面对水平面的倾角趋于 0；于是惯性运动成了下降运动的极限。惯性定律的这种研究起源，就使我们可以理解，何以伽利略似乎只对垂直于重力的运动，认识到经典形式的惯性定律是成立的(这种观点从广义相对论的角度看也可以在某种意义上给予承认)。马赫在《力学》一书第 131 页上作出了以下指示：“在一特殊情况下达成一种意见后，应在想象中尽量修改这一情况的条件，使得与原来的意见尽可能地接近。再没有别的方法，能够更安全且在思想上更经常地，得到对所有自然事件的最简单的解释。”另一方面，

为了检验打算接纳的一般观点，数学和物理学中一个常见的做法是考察极限情况以及结果相当明显的特例情形。

类比原理与连续性原理是颇为相近的。牛顿将其表述为研究自然界的第二条规则(*Principia*, ed. Cajori, p. 398)，他说："因此对于相同的自然现象，必须尽可能地寻求相同的原因。"在建立原子理论时，我们遇见了类比原理可能是最值得注意的应用。那些原来是由通常可见的物体的性态导出的力学定律，原先是由行星最精确地证实了的，现在被用于原子。我们可以期望，这些事实今后必须修正，但若不初步接纳力学定律，就不能设想怎样来开始原子的研究。甚至关于原子的最新的量子力学，它与传统如此截然不同，以至于否定了关于原子事件的任意的空间图像，仍然是基于旧的力学定律的最彻底的形式，即哈密顿方程。洛伦兹得到电子理论的基本的电磁定律，也是先取来自观察并为电力工程师所应用的唯象的麦克斯韦方程，同时删去其中的物质性的常数如传导率、电极化和磁化，因为它们都表现了物质的影响。假设真正的"微观"电磁场服从这些简化的和谐的定律，再连同关于物质的原子构造的某些思想，他就能再次得到宏观场的唯象定律，这里他把宏观场量与微观场量的某种均值等同起来。

〔自然界的精确的定律不应该含有任何物质常数，而应该由这些定律在所研究的物质的原子构造基础上导出这些常数来。因为当涉及物质更精细的内部构造时，唯象定律常常失败，原子理论必须同时揭示出其适用的界限，而且给出在超过这些界限时，取代宏观定律的原子定律。例如，麦克斯韦曾假设电极化与场强成正比。对于静态的场、缓变的场乃至无线电报的每秒振荡达百万次的场，它

都是正确的。但在振荡快得多的光学振荡中，我们遇见了色散(dispersion)这一新现象；麦克斯韦原来是令比例因子——即介电系数(constant of dielectricity)，它是折射系数的平方——为常数的，现在这个比例因子依赖于振荡频率，而后者又按一定的定律与折射介质的原子构造密切相关，而且只有这样才能理解它。(特别是在色散公式中出现了电子的电荷和质量，使得可以从光学观察中得到两者之比的确定的值。)}

形成一个理论的终极目的是什么？赫兹(H. Hertz)在他的《力学原理》(*Prinzipien der Mechanik*)第1页中是这样说的："我们形成了外界客体的形象或符号，使得形象的逻辑上必然(denknotwendigen)的推论，一定是相应客体的物质上必然(naturnotwendigen)的推论的形象。"到了19世纪，在怀疑论的认识论影响下，特别是在英国物理学家中，出现了一种时尚，即只探求形象，在限制得很窄的事实领域内探求类比，并且构造出力学模型，这个模型能呈现出现象的某些特性，但是决不可能认真地视此模型为"解释"。人们不再苦苦探寻被唯一决定的实在这个"幻觉"。但是如果仔细考察的目的仅在于建立形象和模型，则这种做法已经被证明为没有什么效果。对于麦克斯韦而言，物理类比只是一种权宜之计，目的在于避免纯粹数学理论(它时常会把经验上重要的推论弄糊涂)和物理假说(它容易使人对于事实视而不见)带来的种种不利。

{"所谓物理类比，"麦克斯韦说，"我是指一门科学的定律和另一门科学的定律的一种部分的相似性，可以互为参证。"他讲到引力和介质中的定常的热分布的类比——这一类比基于两者都服从拉普拉

斯方程，而且用光与弹性介质中的振动之类比来与之比较。后一类比“可以延伸得更远，但是，虽然其重要性与成果之丰富都决不可低估，却只是光与振动的定律在形式上相像。如果剥掉它的物理的外衣，把它归结为一种‘横振动’（transverse alternations）的理论，我们可以得到一个严格基于观察的真理系统，但在概念的生动活泼与方法的富有成果两方面都有欠缺”（Maxwell，*Scientific Papers*，Ⅰ，p. 156）。这个例子，特别是参照之后麦克斯韦本人所开创的光的理论的进一步发展来看，非常适当地说明了这个观点的一大好处，即它为反对独断论提供了一种保护。]

马赫讲到逐渐地使“思想适应于事实”。他认为形成理论的根据在于，理论带来了在理解以及交流事实与过程上的一种经济（见他的《力学》之引言）。其他人则坚持另一种信念，即理性在此是会起作用的：理性力求按照一种内在的原理，符号地构造出相关的超验的实在。在他们看来，科学没有了这种信念就犹如一个空壳。但是就理论的终极目标而言，双方都持同样的意见，即预测事件。但是一个理论，不论是按照思维经济原理还是按照理性原理产生，在保证能实现预测上究竟能够走多远呢？这是一个最后的事实，它已指向知识以外——这正是休谟的问题：对于归纳法的信赖，如果要加以论证，也只能用归纳原理本身来论证。但是对世界和对自己的信赖是无须论证的；这种信赖是心的生命的自然态度，特别当它表现为理性的任意规定的行为（thetic acts）时就更是如此。

康德在他的超验逻辑中企图用一种系统的程序来建立构造经验的实在的先验原理。他的工作之值得称赞，在于他把自伽利略以来就统治着科学的关于实在的观念，提升到哲学的自觉，把它从莱布尼茨

体系中因袭下来的形而上学重担下解放出来，使它能避免休谟牌号的感觉主义，而这种感觉主义其实也是源于自然科学的。然而，他的企图很难使自然科学家满足。康德所提出的还不够充分，且与他那个时代的物理学的特定形式联系过紧；另一方面，它也包含了一些多余的成分，这只能来自“这个柯尼斯堡的伟大中国人”[8]僵硬的逻辑模式化以及他对三分法(trichotomy)的特殊偏爱。实体(substance)与因果性(causality)的概念则为真正有用的核心，此书最后一部分就是讲它们的。除了讲述它们的两个“经验的类比”以外，康德还附上了第三个讲述交互性(*Wechselwirkung*)的类比。它的前面则是“直观公理”(“一切直观都是外延的量”)以及“知觉预测”(“在一切现象中，感觉，以及对象上与感觉相符合的实在的东西，都有某种内含的量，即度”)。在三个经验的类比之后，康德写了“一般经验性思维的公设”，讨论可能性、现实性与必然性。关于康德的问题，我们在上面引用了康德本人的一些段落*，但这个问题也许是一个永恒的问题，仍有待未来去解决。然而康德认为形而上学，特别是当它力求解决这个问题时，“是一切科学中唯一的一门这样的科学，它可以许诺这样一种完成，即在较短时间内，只花较少的但却是联合的力气来完成它，以至于不再给后世留下什么工作”(*Critique of Pure Reason*，序，ed. M. Müller，p. XXV)。

参考文献

P. DUHEM, *La théorie physique, son objet et sa structure*, Paris, 1906.
E. MACH, *Erkenntnis und Irrtum*, 1905.

---

* 这些段落均借用了杨祖陶、邓晓芒译的康德《纯粹理性批判》(人民出版社，2004年)的相关内容。——译者

H. POINCARÉ, *La science et l'hypothèse*.
E. CASSIRER, *Substanzbegriff und Funktionsbegriff*, Berlin, 1910.
B. RUSSELL, *Our Knowledge of the External World*, Chicago, 1914.
A. S. EDDINGTON, *The Nature of the Physical World*, Cambridge, 1929.
J. JEANS, *The New Background of Science*, Cambridge, 1933.
P. W. BRIDGMAN, *The Nature of Physical Theory*, Princeton, 1936.
K. POPPER, *Logik der Forschung*, Vienna, 1935.

第三章　世界的物理图景

22　物质

A　物质的实体理论

17、18 世纪是被我愿意称之为物质的实体概念统治的。有体之物包含着不会变化的实体核心：它是变化着的感觉的质的承载者，而这种感觉的质是我们知觉中的事物所固有，不受变化影响的。洛克说："连续的物体，在所考虑的存在的瞬间，总是与它自身是同一的"（*Enquiry concerning Human Understanding*，second book，Chap. 27，§3）。因有这种恒定性，变化着的感觉现象必是实体的元素之运动在我们的感官上生成的效应。这个概念的基本特性可以追溯到德谟克利特。他从感官表象作出了堂皇宏大的抽象，假设仅有的分化（一切多样性都由此而来）在于"虚空"与"充满"这种绝对的区分——虚空空间的 $\mu\grave{\eta}\ \ddot{o}\nu$ 与物质的 $\pi\alpha\mu\pi\lambda\tilde{\eta}\rho\epsilon s\ \ddot{o}\nu$ 之对立。这是对该现象的最终的解释性原理。17 世纪初，伽桑狄又复活了德谟克利特的这个理论。但是伽利略也宣称："物体在外观上展现出来的多样

性，是基于其各个部分之不同位置，而这些部分无增无减。……物质是不可变的，它总是同样的，因为它表示了存在的一种永恒的必然的形式。”实体的这一物质概念决定性的特点在于：同样的实体性的位置，在物体系统历史进程的任意时刻，原则上都可以识别出来；它在时间中保持了其同一性。因此，这个概念的科学论证，必依赖于建立一种精确的方法，以便能在运动之流(flux of movement)中追随一个实体性位置。四维的世界连续统可以分解为由个别的世界线组成，即由个别的实体性位置的世界线组成。只要在物理学中假想地引入某种介质，作为某个现象的“载体”，例如光的机械理论中的以太，这总是一个突出点。于是，就可能客体地区分出某个物体相对于此介质是静止的还是运动的。

但是，在完全匀齐而无质的物体中识别出同一个位置之不可能，一如在匀齐的空间中识别出同一个点之不可能。因此，德谟克利特的思想必定导向原子论并承认虚空空间(empty space)。物体的密度之不同，它们的稀疏与稠密之不同也都可由物体的原子构造来解释，即以物体中原子在其与虚空的混合中所占体积之比不同来解释。一个物体必占有空间的一部分，而其中被原子“覆盖”的那一部分的总体积，则被认定为该物体中物质的量。这里所需的空间是欧几里得空间，它具有刚性的度量结构，还有“远几何”(far-geometric)关系。世界上所有可能的变化，都必为互相远离的原子之空间关系随时间的变化。原子是不可分的，又是刚性的，即它们总是与其自身全同的。此外，它们又是不可贯穿的，即是说，两个原子各自所占的那一部分空间永远不会重叠。立体性，即包括不可贯穿性与刚性，曾被强调地(特别是由伽桑狄和洛克)描述为物质的基本特性；在这一点上，笛卡儿有所不同，在他的粒子理论中，基本的物体可以变

形，可以互相挤压。立体性决不可理解为关于硬度的感官性质，因为这样做就等于把触觉的质从感觉的质的主体性中排除出去了。它也决不可以动力学地理解为坚固性，后者是以实体性位置之间的相互作用力为基础的。立体性按其定义而言是一种抽象的几何性质。我们看得到的物体的弹性坚固性，正是建立在原子的这个绝对的性质之上的。惠更斯在与莱布尼茨的书信往来中，为这个观点辩护过。前者作为一位机械论者是几何地运动学地来思考的，遵循一定的原理；后者作为一位形而上学家则是直观地动力学地思考的。可以肯定，惠更斯本人也讲过对于破裂或压缩的抵抗。但是他选用这些字眼只是由于它们有较大的表现力，因而绝不可以误解；正如他所说，“必须假设这种抵抗是无限的，因为要对之赋以一定的度，比如说等于钻石或者铁的抵抗程度，这种说法似乎是荒唐的；因为在除了广延性以外什么也没有假设过的事项中，找不出这样做的理由。所以，无限坚固性这个假设对于我是必然的，我不能理解您何以认为它如此奇怪，好像一个永恒的奇迹一般。”如果惠更斯认识到他的“实体”观点可以有如下的推论，他可能就更容易理解莱布尼茨何以要反对他了：哪怕一个原子的形状不是空间的连通的部分，如图 5 所示，由于它的几何刚性，它也总会与其自身全同，“方形”的部分也不能相对于其“圆形”部分自由地运动；因为“上帝希望”把这个整体看作一个单元。

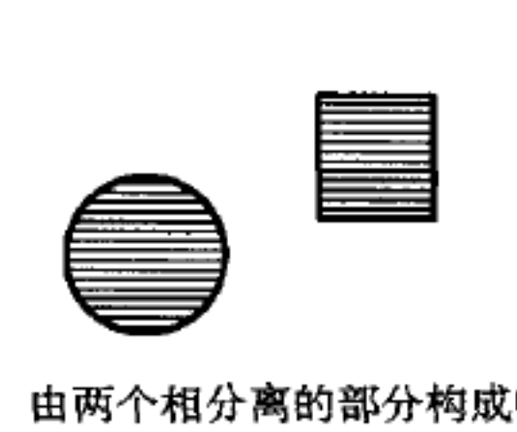


图 5　由两个相分离的部分构成的原子。

关于原子的形状，原来普遍地以为球形是最简单的形状。但是球形上面加上一些钩状突起这种形状也很流行，就是假设原子是用这

些钩状突起连结起来而形成一个立体的，只有在受力时才会破裂。一个理想的解决方案是：原子有这样一种形状，其中所有的点在几何上均不能区别。因为这时一方面有可能把原子看成一个整体在运动，另一方面又不会把原子的各部分看作始终与其自身全同的。选择球形，显然是因为球形是最近于这个理想的近似。

对现象的机械的原子论的解释，即把一切过程都归结为实体的粒子的运动，需要知道原子的运动法则。首先必须确定，当其他原子不妨碍这个原子穿透空间的其他部分时，该原子是如何自由运动的。其次需要知道原子间相互施加的效应，知道当它们互相挡道，即在相接触的状态下，其运动怎样受到修正。伊壁鸠鲁将下坠当作自由运动。伽利略以后，则以服从惯性定律的匀速平移取代了引力场中的下坠。原子通过“碰撞”(impact)而相互作用。而对碰撞则并未作动力学的理解，上述命题仅仅意味着，两个原子碰撞后的运动全由其碰撞前的运动所决定。惠更斯成功地建立了有关的原理，即能量与动量的守恒定律，这些定律在整个物理学中都是基本的。这些定律，再加上一个假设“两个相撞的原子只在垂直于其公切面的方向上交换动量”，就可以唯一地决定有碰撞的运动。“因此，整个自然科学就在于说明，当发生这种或那种变化时，物体处于何种状态；再就是考虑到物体的不可贯穿性，说明只有那些实际发生了的变化，才是可能发生的变化”(Euler，*Anleitung zur Naturlehre*，Chap. VI，§50)。

这就是纯粹形式的世界的机械论图景。欧拉提到(上引书，1—6章)，物质的基本性质是：广延性、可运动性、惯性和不可贯穿性。牛顿在其《光学》的总结性思考中则说：“考虑到所有这一切，在我看来似乎是，上帝在创世之时就把物质做成立体的、有质量的、坚硬的、不可贯穿的、可以运动的粒子，它们有如此的大小和形状，有这

样那样的性质，占据空间如此的部分，都是最适合于上帝的目的，上帝正是为了这个目的而创造这些物体的；而这些始初的粒子既然是立体的，则比之由它们构成的有孔的物体，要无比的坚硬；坚硬到不可磨损，不可打碎成片；没有任何通常的力量能把上帝在创世之时造成为一个的物体分开。……因此，大自然可以是永存的，肉体的东西的变化，只是在于不同的分与新的合，在于这些永恒的粒子的运动。”

原子论的实体理论，经由惠更斯之手达到了如此精确的程度，使得可以作出严格的结论。可以用统计方法证明，同样大小的球形原子，按照他所确立的法则运动，就能形成一个物体，此物体具有我们在经验上与气体相关的性质。表现出热是由于原子活泼的运动。然而，惠更斯的理论，不能超过对气态的解释，甚至在气态方面也在有决定性的一点上失败了。因为，已有可能从观察数据出发，应用气体的力学理论，推导出原子的半径大小和惯性质量的相当可靠的值，这些值出现在能量和动量的表达式中，而且泄露出一件事，即不同化学元素的原子质量远非正比于这些原子的体积。这就动摇了一种关于物质的基本概念，即视实体为一种均匀的面团，造物主在时间的起始，借助于一套烤蛋糕的模具，用这种面团烤出了微小的原子蛋糕，赋予它们以绝对的刚性，然后又以不同的初始动量，把它们送到空间中去。然而，质量之比与原子的相对重量相一致，这点已由对许许多多种化合物所做的真实的定量分析证明了。倍比定律正是对化学中的各种发现作原子解释的基础，它在很长时间里都是物质由原子构成的最有说服力的证据。

B 物质与场，以太

从牛顿开始，动力学的概念进入了实体的物理学。这一发展的主要推动力是引力的发现。在上面引述的《光学》一书的结尾处，

牛顿继续说道："进一步，在我看来，这些粒子不仅有惯性（*Vis inertiae*），伴随着那些作为力的自然结果的被动的运动定律，同时还被某些主动的原理（如引力原理以及导致发酵和促使物体融合的原理）所驱动。我不把这些原理看作是来自事物的特定形式的隐秘的质，而是看作大自然的一般法则，而事物本身正是借助于这些一般法则形成的。"直至不久以前，还发展了实体与动力学的种种混杂的组合，但是物质的构造性的动力学性质逐渐地取代了那些实体的性质，并使它们成为很浅薄的东西。

[质量基本上是由伽利略引进的，是作为动量定律中出现的系数；然而同时，把质量定义为"物质的量"，这种思想仍然顽强地存在着。原子的坚硬性与不可贯穿性被原子之间的斥力代替了，而这种力还服从一个依赖于距离的定律。牛顿驳斥了用带钩状突起的原子所作的解释，认为它什么也没有说明，而继续说道："我宁可从物体的融合中推论出：这些物体的原子以某种力互相吸引，这种引力当物体直接接触时极强，在小距离时即可完成上述的化学作用，而在离粒子不远处就没有可以感觉得到的效应了"（*Opticks*，ed. Whittaker，p. 389）。原子变成了"力的中心"。博斯科维奇（Boscovich）、柯西和安培（Ampère）明确地承认，所谓中心乃是严格意义下的点。康德在其《自然科学的形而上学原理》一书中从引力与斥力的平衡构造出了物质。对自然界的机械论的解释被有心力的物理学取代了。[9] 贝采利乌斯（Berzelius）第一个提出化学亲和力具有电的本性这样一种观点。今天我们已在相当大的程度上能以原子之间的作用力来解释物体的构造以及它们的弹性、热、电、磁、光学以及化学的性态。这特别适用于物质的两种极端状态：气态和晶体状态。

现代物理讲到电子的半径，并赋之以 10^{-13} 厘米数量级的值。然而这个数必须解释为两个电子的距离(即出现在库仑定律中的距离)，而两个电子接近到这样的距离时，其相互排斥力即可使它们得到可与光速比拟的速度。]

对于牛顿，引力仍然是一个瞬间即可达到远方的作用。当只允许近距作用时，就出现了引力的以太理论。然而在一开始，这个理论还处于对自然界的纯粹机械论解释的压力之下。牛顿当然也知道这个困难，但他对引力的原因拒绝作一个“框架性的假设”。(他显然想到了力的传递是借助于“精神的实体”的，或者说是借助于充溢着无所不在且穿透一切的上帝的空间，总之是非物质之力的传递。)当法拉第(Faraday)发展了关于电现象的场的概念后，这个困难就用物理的手段克服了。麦克斯韦发现了场从激发中心的传播并不是瞬时的，而是具有光的速度。近距作用的定律以微分方程的形式把刻画物质与场的物理量，即电荷与电流的密度，与电场和磁场的强度联系起来。力并不是如牛顿所说，是由单个物体 k 所决定和发出的一种活动，而是两个物体 k 与 k' 之间的联系，它把这两个物体越过一个深渊牵起手来，这个力被分裂成 k 在活动(即只由 k 激发出来的场)而 k' 在承受(由场所造成的动量随时间的变化)。在两者之间，场的延伸是按自己的极为简单和谐的规律向外铺展的。场把动量以及能量从一个物体传送到另一个物体；一个辐射的物体不仅失去能量，而且当它向一个方向发射出光时，它也会反冲。所以我们在场中有空间上局部化了的能量与动量。标量性的电荷密度和向量性的能量和动量流的密度，都可以借助于关于电场和磁场的强度用简单的定律计算出来。一物体对另一物体的驱动效应(ponderomotoric effect)产生

于场的能量与动量之交换为物质的动能与动量，以及相反的交换；场的某一部分 V 之总能量与总动量之随时间的增减，将由能量与动量通过 V 表面的流动来补偿。如果空间的一部分中既有物质又有辐射，而我们运用与决定一个“驱动”物体引力中心(质心)的同样方法来决定这一部分空间的能量中心，则可以看到，这一部分所含有的总动量 $\vec{I}$ 与能量中心的速度 $\vec{v}$ 具有相同的方向。若我们设定 $\vec{I} = m\vec{v}$，其比例因子 m 又可称为惯性质量。它与能量 E 有一个普适的关系式 $m = E/c^2$，这里 c 是光速。场的一部分，例如由无质量的外壳所包围的自由空间中的辐射，即所谓“空腔辐射”(Hohlraumstrahlung)，也和通常的物体一样具有惯性质量。所以一个物体有能力在面对使它改变运动状况的力之时，仍然坚持其由惯性场所决定的路径，这种能力依赖于压缩在此物体内的能量。电子的质量，肯定部分地是来自伴随着这个电子的电磁场。甚或全部来自于此？因为一个基本的物质粒子所有在物理上重要的性质，如上所述属于包围着它的场，而非场中心实体的核。这样就不可避免地产生一个问题：这种核的存在是否只是一个可以完全去除的假设而已？

物质的场论肯定地回答了这个问题。按此理论，一个物质粒子如电子只不过是电场的一个小区域，其中场强取极高的值，表明有相对极为巨大的场能集中在这个极小空间中。没有一条清晰的界限能把这样一个能量结(energy knot)从场的其他部分中划分出来，而这个能量结穿过虚空的空间传播，正如水波在湖面上传播一样；电子绝不可能在任何时候都是由同样的实体组成的。正如水波的速度并非实体的东西而仅是相速度一样，电子运动的速度也只是由场的分布构造出来的理想的“能量中心”的速度。按照这种观点，只有一种自然定律，就是麦克斯韦关于电磁场所确立的那种性质已很清楚的场定

律。物质与场的相互作用这一含混的问题不会出现。这种关于世界的观念，已经很难再说是动力学的观念了，因为场既非由某个场以外的东西生成，也非作用于场以外的东西上，而只是在平静的连续流动之中服从于自己的规律。这正是连续统的本质。甚至原子核和电子也不是被作用于其上的自然力推来推去最终不变的元素，它们自身也是连续地伸展开，而且进行着精微流畅的变化。

〔米(G. Mie)* 在 1912 年以一些很有说服力的一般考虑为基础，指出一种修正麦克斯韦方程的办法，使它能解决物质的问题，即解释何以场仍有一种颗粒构造，以及何以这些能量结在能量与动量的往返流动之下仍然不变。单有麦克斯韦方程是不行的，因为由此方程可以推导出：把负的电荷压到一个电子中会爆炸；尽管有库仑斥力，电子仍能和谐相容而不爆炸，是要求洛伦兹的电子理论中的实体所做的唯一的事。能量结之能保持，必须来自以下的事实：修正了的场定律只容许场的一种平衡态——或几个平衡态，而它们又不会互相连续地变换(这种平衡态就是场方程的定态球对称解)。这样，场定律应使我们能够事先就算出电子的电荷和质量，以及现有的各种化学元素的原子量。我们为什么能把一个复合物体之能量或惯性质量(近似地)分解为不可再分的最终的基本组分之能量，以及连接它们的链的可再分的能量，其理由也在于这些事实，而不在于场与实体的对立。

除了电磁场之外，我们还有第 16 节中讨论的度量场(即引力场)。这就产生了把这两种场融为一体的任务。近年来，外尔、卡

* 米(Gustav Mie，1868—1957)，德国物理学家。——译者

卢查(Kaluza)、爱丁顿(Eddington)和爱因斯坦各自以不同方法从事这一工作。在一定的发展阶段上，希望把所有的物理现象都归结为一个简单的(具有哈密顿原理的形式的)包罗万象的场定律，这个想法似乎也并不荒谬。]

几何学与场论有机地互相统一；空间不再是(如在实体论中那样)与事物相对立的了，不再是安放事物并赋之以远距的几何关系的空洞的容器。不再存在空虚的空间；说空间的某一部分没有场，这样的假设是荒谬的。正如在直观的空间中，延伸性与质是联结在一起的那样，在场论中，一方面有场的状态量或场的结构，另一方面则有场的时空媒介，即一个无结构的四维连续统，两者也是相互依存的。如果对后者给以坐标，则状态量就是坐标的函数。但是，自变量的概念是与函数概念相关联的；一个函数存在的范围有多大，它的变元变化的区域也就有多大。(这里应该提到，说方程 $E = 0$ 在空间的某一部分成立，并不是说电场在这一部分中被破坏了，而只是意味着电场在空间的这一部分“处于静止”，它仍然连续地连接着所有其他可能的状态。)

[如果谈论放在一个箱子中的物体，完全可以问，把这个物体拿走后情况会如何。然而，场是不可能拿走的。当莱布尼茨拒绝承认居里克(Guericke)和托里拆利(Torricelli)的实验证明了真空存在时，他心中必已想到类似于此的问题，然而他至少是在词句上，用以下可疑的论证表明他承认了这个证明，“玻璃上有小孔，光和磁的辐射以及其他极细小的粒子[!]可以由此穿出”(见莱布尼茨致克拉克的第五封信，§34)。]

按照德谟克利特的理论，充满(full)与虚空(empty)的区别构成了实体论的基础，而任一种场论则是基于某个延伸于四维时空连续统的状态量。实体的运动法则被代之以(构造简单的)微分方程，其中除有状态量在任一位置上的值以外，还有它们对这个世界坐标的导数出现。这些就是场定律，而由于它们有客体性的意义，所以必须独立于坐标系的选择。

用连续场中能量与动量的传播来解释驱动效应，这与我们的经验有最紧密的联系，而在今天，这个观念已经渗透进整个物理学。因为对自然界的描述如今已与时空连续统及其度量结构紧密相关，要说有朝一日这个观念将在对自然界的描述中消失，似乎不大可能。另一方面，纯粹的场论还只是假说与纲要；尽管它有高度诱人的特点，一度引起了伟大的希望，而且是由希尔伯特、玻恩和其他伟大人物建立起来的，却至今仍处于思辨物理学的地狱边缘。然而对它的讨论导致了一些探索，而且有幸出现了一个结果[外尔、爱因斯坦和英菲尔德(Infeld)]，即为了说明离散粒子与连续场的相互作用的一些决定性的事实，完全用不着就粒子的内部结构作任何不成熟的假说。沿这条路走下去，我们可以重新确定场与物质的对偶性(duality)。它们之间的联系是动态的；物质激发了场，场又作用于物质。如果不多去注意场这个联结的介质，则物质和力就表现为世界的两个互相独立的组成成分。亥姆霍兹把这个观点陈述如下："科学按两种抽象来考虑外部世界中的客体：一方面是按其仅仅作为一种存在，而不论它对其他客体或对我们的感觉器官的作用，从这一点来说，科学称这些客体为物质。"另一方面，我们又赋予物质以一种能够起作用的能力，因为只有通过它的效应，我们才认识物质。"纯粹的物质与自

然界的其他部分无关，因为它绝不能在自然界或在我们的感觉器官中造成变化。纯粹的力则是某种本应该在那里的东西，然而它又不是，因为‘应该在那里’的东西，我们描述为物质。”朗格(F. A. Lange)在其《唯物论史》(*Geschichte des Materialismus*)一书中则对物质采取了一种更具批判性的态度，他把物质描述为“我们分析中未被理解，或不能理解的残余”。

我们已经看见，牛顿的物理学是完全由这种二元论主宰的。然而，对世界持动力学概念的经典哲学家却是莱布尼茨。对于他而言，运动中真正的东西并不是如此这般的位置的变化，而是驱动的力。“实体是一个能起作用的东西，是一个原动力”——这个原动力是跨越空间的，非物质的。“因为并非所有关于物体的世界的真理都可以仅仅从算术和几何公理导出，即仅从较大与较小，形状与位置的公理导出，”他用下面的说法来批判笛卡儿(*Mathematische Schrift-en*, VI, p. 241)，“还必须加上关于原因与结果，主动与被动的其他公理，才能说明事物的次序。”终极的元素就是单子，它是不可分的，没有广延性，力从单子作为一种超验的能力喷薄而出。只有相对于单子在空间的分布，物体才能描述为有广延性的东西，而单子在空间的分布只是一个“有良好基础的现象”(*phaenomenon bene funda-tum*)。然而，纯粹的活动就是一切；前定的和谐(preestab-lished harmony)取代了相互的效应，而我们认为这种交互效应是由场从粒子传到粒子的。费希特也认识到，除了关于质的感觉以及延伸性的直观以外，还要有把两者联络起来的主动的思想，才把事物确认为力，从而成为我之被影响的原因(Bestimmung des Men-schen, *Werke*, ed. Medicus, III, pp. 332, 333)。一种具有基本性质的经验似乎很清楚地在为另一种因果性说话，这种因果性是

不能放到场论的框架下面去的，它以为场如果任其自处必定会停留在一种均一的静止状态之下，而有待于某种另类的东西(即物质)，也就是“躁动的精神”，去把场激发起来。我们的自觉的活动必定总是首先攻击物质。场是一种延伸的介质，它借助于自己的结构把效应由一个物体传递到另一个物体，而此结构则是由场定律来表示的。

可以不需要关于粒子的内部构造的任何假设，就可以由包围该粒子的局域场，来导出它相关的力学性质。例如一个粒子的产生场的电荷，亦即主动的电荷，可以定义为电场透过包围该粒子的微小而虚幻的壳的通量。粒子在四维世界中画出了一条一维的无限延伸的狭窄管道，在这些管道之外，我们可以应用虚空空间中的经典的场定律。由于下面就要解释的历史原因，这些只处理电磁势与引力势，而不处理状态的任何其他量的微分方程被称为以太定律。粒子究竟是场的一个真正的奇点，还是覆盖了一个小区域，而在此区域中以太定律不再适用(而应代之以某些未知的定律)，这并不重要。局域场是由粒子唯一地决定的，至少就场的本性而言，即就其在坐标变换下不变的性质而言是这样。在这一方面，“单子”保存了其纯粹的主动性，而与其外部的任何东西都无关。粒子只在其定向(orientation)上，在其局域场之嵌入于外场上，受到场的反作用。其实运动的力学定律可从以下事实中导出：个别电子的场在粒子之外必须适合于场的分布，而后者服从以太的场定律。这样我们就能懂得，激发出场的电荷与质量同时也出现在被动的函数中，并决定了已给的场施加于粒子上的效应的强度。不再是由粒子发出的能量的容量，而是由粒子穿过包围它的壳送出的引力场的通量说明了引力质量，而按广义相对论，也就说明了它的惯性质量。

[以太理论的力量在于它的清醒的、不介入的态度；它由物质的效应来研究物质，而不试图透入其内部。思辨总是试图填补粒子留下的“空隙”。物质的纯粹的场论以一种方式来做这件事，广义相对论则提示了另一种方法，因为它容纳这样一种假说，即基本粒子的“车辙”是没有尽头的，并不迫使谁把粒子看成时空流形的真正奇点。（我在这里讲的是四维世界的管道，就好像在二维曲面上将其比作车辙。）其实广义相对论并未事先定下世界的拓扑，所以存在这样的可能，世界不仅具有通向无穷远处的不可达到的“边缘”，还有向内的无穷深的“边缘”。沿着莱布尼茨的思路，物质粒子虽然嵌入在空间环境中，而其场的效应就由此发出，但粒子本身则是一个存在于时空之外的单子。所以我们不能说：“这里有一个电荷，”而只能说：“场内的这个封闭曲面包围了一个电荷。”向内的边缘是把世界分裂为空间与时间的几何—物理基础，这种分裂只是在我们的意识中发生的，在物体上是联结的。

谢林部分的是在莱布尼茨的影响下，曾经表述了一个模糊地预见到这个发展的思想，他在《自然哲学体系草案》（Erster Entwurf der Naturphilosophie，1799；*Sämtliche Werke*，Ⅲ，p. 21，Cotta，1858）中说：“应该有能在经验中加以识别的某物，它虽然不在空间中，却是所有空间性的原则。”这个“自然的单子”本身并非物质，而是活动，“除了通过自己的产物外，别无他法对其加以度量。”“所有独创性的趋势均在于探求把空间充满”，谢林以这个论题为基础，达到了构造一个无形状的流体——我们今天则以场来取代这种流体。]

继朴素的实体理论之后，历史上又有关于物质的更加精巧的以太

理论作为第二步，我们把纯粹的场论和单子理论算作它的两个假设的变体。现在略述以太概念的历史是恰逢其时。它可以追溯到斯多葛哲学。在伽利略以后的时代里，以太作为光和重力的实体的承载者出现，惠更斯和欧拉也是这样看的。刻画以太特性的状态量也和任意实体一样，都是“密度”和“速度”。因为它作为一个整体是静止的，只不过是被激发做微小振动，所以它同时也可以作为一个物理的实在(虽然只是假设的)，以支持牛顿关于绝对空间的形而上学的观念。然后，光的现象也从仅仅从属于电磁的现象，变成了电磁理论的部分领域，而法拉第与麦克斯韦又发展了电磁场的理论，以太就被剥去了其实体—物理的特性，什么也没有了，只留下了绝对空间作为电磁场状态的介质。它不再从属于物质的激发，而成了一个固定的几何实体。第三步是狭义相对论表明了绝对空间概念不能正确地描述时空结构。作为客体而区别出来的一类运动并不是静止状态，而是匀速平移，这就终结了作为实体的以太。最后，也就是第四步，广义相对论又对这个度量的世界结构重新赋予了对物质的力起反作用的能力。这样，在一定意义上，成了一个封闭的圆圈。因为电磁场显然与度量场本性相同，而后者还导致了引力现象，所以，“以太”现在就成了“场”的同义语了，“场”在这里指的是虚空空间中统一的电磁与度量场。如果相对于某个坐标系，电磁场的分量和爱因斯坦的引力势之分量 g_{ik} 的定量的分布都已由数学公式给出，以太的状态就算是已知的了。如果说，以太就这样又重新得到了其物理的本性，但刻画它的状态的量却彻底改变了，这同它在发展初期作为实体介质进入舞台迥然不同。

C 历史的联系，特别是与形而上学的实体概念的历史联系

康德在《纯粹理性批判》第一版中，以与经验的第一类比，很清

楚地表述了物质与实体的概念的关系，即所谓的“持存性原理”(Principle of Permanence)，他说：“一切现象都包含有持存的(permanent)东西[实体]作为对象本身，而包含可以变化的东西作为该对象的单纯规定，即对象实存的某种方式。”康德在证明中接着说：“假如一位哲学家被问到：烟的重量是多少？他就会回答：‘从燃烧的木柴的重量中减去余烬的重量，那么你就得到烟的重量了。’所以他确信，甚至在火焰中，物质[实体]也并未消失，只是其形式经历了一次改变。”这个原理在第二版的表述中则更加强调了定量的量度，“实体在现象的一切变化中持存着，它的量在自然界中既不增加也不减少。”在上面引述的例子中，是假设了重量正比于这个量的，但是完全没有给出按照它来量度物质的原理。物质的不可毁灭性这一论题，就以这样的形式被拉瓦锡(Lavoisier)引入了化学。在个别的实体位置无可跟踪处，可传送性就成了实体性的判据。必须要找到量的量度，使得量在传送中不会改变。在这种意义上，能量也就可以被看作一个实体(关于热质的假说)，尽管完全谈不上在事件的进程中如何追踪单个的“能量位置”。霍布斯认为无形的实体是一个没有意义的词语。

但是实体的观念并不是像上面的引文中所显示的那样紧密地联系着物理的物质观念。它的根源在亚里士多德的逻辑与形而上学中，而且笛卡儿、斯宾诺莎和莱布尼茨都在形而上学的意义上使用过它。今天我们发现很难掌握它的意义。笛卡儿这样来定义实体(*Principia*, Part Ⅰ, §51)：“所谓实体我们不能理解为什么东西，而只是这样存在着，即不需要任何别的东西就可以存在。”他然后又修改了这个定义，使得“创造出来的实体”也符合此定义，说“它们不需要任何别的东西而只需要上帝之助”。亚里士多德哲学则把物质

(ὕλη, τὸ ὑποκείμενον)看作是可以决定的，而形式(εἶδος)是决定的。物质就是可以变成有形式的可能性。在一个分成多阶段的过程中，其物质在每一阶段上都是“更加成形”，因此其进一步成形的可能性的范围就更受限制。与此同时，物质，即仅是潜在的成分而非真实的存在，越来越收缩。实体性是赋予形式而非赋予物质的。形式把物质由潜在性推向现实性；这种推移在“运动”中实现。伽利略所理解的自然科学首先就必须制服这种实体形式的形而上学。莱布尼茨通过他的单子理论又重新引入了它们，但是他又不想放弃新的“机械论”的解释方式。他说：“不论我一般情况下多么站在经院哲学一边，也可以说是站在对物理世界的形而上学解释一边，然而在另一方面，在解释特定的现象方面，我又是粒子的哲学的最激进的追随者”(to Arnauld, *Philosophische Schriften*, Ⅱ, p.58)。他又说：“于是我的意见是这样的，物体(通常被看作是实体)，其实只是真实的现象，和日晕的光轮或彩虹一样是非实体的。……唯有单子才是实体”(to de Volder, *Philosophische Schriften*, Ⅱ, p. 262)。他承认“不存在单子不出现的物质粒子”(to Bernoulli, *Mathematische Schriften*, Ⅲ, p. 538)。“不论把这个原理看作‘形式’、‘ἐντελέχεια’或者‘力’，均无不可。”他认为单子的实质就是法则(law)。“有一个法则持续着，它包含了我们视为同一的主体所有的将来状态，实体的同一性就在于这个事实”(to de Volder, *Philosophische Schriften*, Ⅱ, p. 264)。这就使他甚至超过了亚里士多德。对于一种自然哲学，最具特性的是看它在哪一点上使赫拉克利特的流动的东西“固化”。[10]亚里士多德是在内在的实体形式上，柏拉图是在超验的理念上，而现代的自然科学则与莱布尼茨一样，是在定律上。牛顿在《原理》一书的结尾处，即紧接着他宣称只须知道引力

的定律而不打算构建一种关于引力性质起因的假设的那段内容，我们可以找到以下一段颇有些奇怪的话："现在我们再补充一些涉及某种最微细的精气的事情，它渗透并隐含在一切大物体之中；这种精气的力和作用使物体粒子在近距离上相互吸引，而且在相互接触时即粘连在一起；等等。"*

笛卡儿赞同以下的学说，柏拉图也倾向于此学说，[11]即空间广延性是物体的真正的实体。只要把实体与偶性的对立看成是"这个"(this)和"于是"(thus)的对立，则此学说完全适合于场论的框架。"这个"只能由个别的认定来给出，而不能由定性的刻画来给出，它在这里并不是一个赋予了各种性质的隐藏的载体；它就是此地—此时(here-now)，即个别的空间—时间位置。用希尔伯特的话来说，场论对世界的描述就是一个"此地—于是"关系——"此地"用时空坐标表示，而"于是"则用状态量来表示。如果把后者给出为前者的函数，则世界的进程就完全知晓了。

[笛卡儿关于运动的观念似乎预设了有一个实体(即本节A部分意义上的实体)存在，而可以在其运动下对之追踪。他的物理学是粒子理论，但是他的粒子并不在相互之间留下虚空的空间，所以必定彼此摩擦、变形。正是他在连续统面前的无助状况，使他把沿分离的曲面的间断性看作是对于理解运动为不可少的。事实上，他以一种连续充满空间的流体作为运动的载体。如果愿意的话，可以假设对于这种流体有不可压缩的无黏性流体的定律成立，而且在后来的物质理论中也确实这样做了，只是作了一个修正，即应从流体动力学方程

* 见王克迪的中译本，553—554页。——译者

中消除压强这一动力学变量。这不会导致什么困难。做到了这一点以后，实体性的介质也可以抛弃。只是需要放弃把微分方程处理的向量状态量 $\vec{v}$ 解释为实体的速度。于是，如果笛卡儿的基本观念被前后一致地贯彻下去，就会得到一个场的理论。一旦作出了由运动着的实体向分布于时空中的场的转变，而这个场不需要一个物质的载体，则受流体动力学启发而来的理论，就不会比麦克斯韦的场论有任何直观的优越性了，麦克斯韦的场论所选用的状态量，是以经验为基础的而非基于思辨。

实体概念的根源中最重要的是以下两个：(i)外部世界中的事物，它作为一个稳定的因素适合于我们的因果世界，虽然其外观和观察它的侧面可以变化，却仍是同一个事物，或经历了一个熟知的缓慢变化；(ii)“我”也对自己的同一性总是自觉的，而且也意识到，在“我”一生的流动之中，有不断变化着的万花筒式的经验。（请与 Leibniz，*Philos. Schriften*，VI，502 页的话比较：“既然我现在已经看到，其他存在物也有权自称为‘我’，或者别人可以代它们自称为‘我’，我就理解了实体一般说来是什么意义。”）笛卡儿首先明确提出了一个哲学问题：“蜡本身”是什么？［见他的《第一哲学的沉思》（*Méditationes de prima philosophia*）之“第二沉思”末尾。］蜡在感觉领域中全都变了，但仍是同一的蜡，尽管它给予我的味觉、嗅觉、形态和触觉都变了。笛卡儿发现这并不是我的想象，但我只能通过思想来理解它。洛克关于“我们关于实体的一般观念”的评论就更为苛刻了（*Enquiry concerning Human Understanding*，Second Book，Chap. 23，§2）。休谟则认为它全然是一个不当概念。他说：“我们混淆同一性与关系的癖好如此之大，以致倾向于想象在关系之外还有某种未知而神秘的东西，把各个部分联络起来”（*Treatise*

of Human Nature, Book Ⅰ, Part Ⅳ, sect. 6)，“……对事物的这种观点……迫使用想象力去伪造一个未知的某种事物，或一种原始的实体和物质，作为把这些品质合成或粘连起来的原则，使得可以给这些复合的对象一个头衔，称之为一个事物，而不管其多样性与组成”(上引书，第3节)。]

D 守恒定理

考虑到物理学的现状，那些想要保持一个先验的守恒原理的人会倾向于墨守能量守恒原理。而按照狭义相对论，能量只是一个四维向量(即能量—动量向量，它是一个不变的客体的整体)的一个分量，即其时间分量，这个向量的空间分量则是动量。所以能量和动量的守恒定理是不可分地捆在一起的。

{自伽利略以来，就令以速度 $\vec{v}$ 运动的物体的动量等于 $m\vec{v}$，而称 m 为其惯性质量。于是有了一个问题，即当速度变化，而按照随物体做同样运动的观察者判断，内在状态为不变时，惯性质量如何依赖于速度。答案可由狭义相对论得出，但是若对世界假设了不同的因果结构，答案可以不同。如果按照老的观点，这种结构是一个分层 t = 常量，则质量是与速度无关的。但是，同样没有疑问的是，如果这种结构是由光锥来表示的，则我们有

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{c^2 - v^2}},$$

v 是速度的绝对值，c 是光速，而“质量因子”m_0 与速度无关。根据相对论原理，能量守恒定理可由动量定律导出，而物体的能量将是

$E = mc^2$。例如，如果一个物体的能量内容 E 因加热而增加，则其惯性质量 m 也按比例增加。不仅是有质量的物体，而且由四处飞转的分子构成的气体，甚至一个场的任意部分，也有一定的能量 E 和一定的动量 $\vec{I}$。而且

$$\vec{I} = m\vec{v},\ E = mc^2$$

这些定律仍然成立，只要我们把 $\vec{v}$ 理解为能量中心的速度即可。能量在这里表现为一部分空间在给定时刻绝对的能量水平。它是由这一部分空间中的物理状态唯一决定的。]

唯象的能量定律在历史上是与动量守恒原理独立地出现的，它处理的是能量水平的差值，即当一个固定的物体系统由一个物理状态变到另一个状态：$Z \to Z'$，所附加的能量值。在 $Z \to Z'$ 这个迁移中，能量 E 按以下方式依赖于初态 Z 和终态 Z'：

$$E(Z \to Z') + E(Z' \to Z'') = E(Z \to Z'')。$$

莱布尼茨是在 *causa aequat effectum*（原因等于效应）这一公理的基础上证明了能量定律的，即把状态的每一个机械的变化（即原因），化为一个“标准的效应”，它只有一个自由度，即举起一个重量到某高度。举起的高度就取作能量的量度。莱布尼茨的思想真正抓住了能量原理的基础。只要（例如）用水量热器来代替举起的重物，这个原理就被移到所有自然现象去了。（然而，直到 19 世纪中叶才认识到这一推广。）其实，状态的一个非机械的变化，并不总能化为举起重物这样的机械效应，但却总可以变换为一个已知标准物体的加热或冷却。于是，作为能量定律之基础的经验事实可以陈述如下：令 S 为一个物体系统，其各个部分的相互作用以及任意其他物体的效应，使之

发生了状态的改变 V。把 S 与一个静止的水量热器以及一些适当的辅助物体联结起来，就可以消除这种状态改变，使得辅助物体仍以原来的状态从此过程中脱出，而只有量热器产生了温度的变化(事实 A_1)。如果量热器的加热(或冷却)消耗了 w 卡热量，即有 1 大气压下的 w 毫升的水，温度由 15 ℃上升到 16 ℃(若 w 为负，则指 w 毫升的水温度由 16 ℃降为 15 ℃)，则 w 就是变化 V 的能量量度。不论通过什么样的过程，也不论使用什么样的辅助物体，都会得到同样的 w(事实 A_2)。

[由狭义相对论的原理，就导致以下推论：(i)对于每一个物体，均有一个仅依赖于其内部状态的数 m_0 存在，使得这个物体的状态不论如何改变，其能量值都等于

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{c^2 - v^2}}$$

在初态与终态时的差值。(在这里与状态的变化相关的能量差值又引导到各个状态的绝对能量水平。)(ii)除了能量定律外，我们还有动量定律，而动量由下式给出：

$$\vec{I} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{c^2 - v^2}}。]$$

对能量定律做系统的处理当然与下面的假设再也没有关系：状态的任何改变，都可以化为标准物体的温度的改变。在广义相对论的框架里，能量和动量的守恒定理是与在任意坐标变换下场定律的不变性密切相关的。这些定律之有效在很大程度上是与场的相互作用定律的特定形式无关的。即令如此，如有必要，没有任何先验的理由能防止物理学在新的经验发现的压力下放弃守恒律的严格的适用性。[最近在玻尔和斯莱特(Slater)的一个理论中，确实发生了这种情况，

但是这个理论很快也被放弃了。]

[有一个什么东西能保持它自己的量度，这个东西就是能量，只从这么一个假设就能导出能量原理，这多少是令人吃惊的。解释就在于，基本的经验事实 A_1 蕴含了一个论断，即只要我们在讨论物体的一个给定的系统，则自然界总共只有一个守恒的量。但是由能量定律又导出了动量定律，表明这个论断是错误的。然而回想起来，我们又能够理解，为什么 A_1 尽管不是严格成立，却在经验可能达到的精确程度内得到了证实——这就是因为有地球，其质量大大地超过了反作用物体的质量。因为若状态 V 的一个给定的变化涉及动量在某个预先指定方向上增加，把它反过来就可以把这个增加转移给地球，而地球是作为地上实验静止的参考物体的。如果把一颗子弹水平地射向一座山，我们看不见失去的动量变成了什么；在这种情况下，经验似乎使动量定律不成立了。我们所看见的是，由于子弹减速所造成的“动能”的损失变成了热能。严格地讲，甚至热能也不能表示完全的等价性，因为还要加上一个隐藏着的动能，即地球由静止转为被碰撞而得到微小速度产生的动能。然而这个隐藏的动能可以忽略不计，其程度与子弹的质量与地球的质量相比可以忽略不计的程度一样。

另一个有守恒律成立的量是电荷。按照电子理论，电荷是束缚在物质上的，所以在一个固定的物体系统状态的改变 V 中，如果严格地解释，要除去电荷的放电与充电。为使 A_1 成立，这个限制确实是必要的。]

场的物理学把能量和动量的守恒定律推广到了辐射，这样就使得这两个定律不必与一个确定的物体系统相联系。倒是必须通过假设

一个能流(正如在电荷以外还需要一个电流一样)来考虑进入和离开空间的一定区域的能量。如果一个空间区域 D 分成了部分区域 D_1 和 D_2，则在 D 内的总电荷等于 D_1 和 D_2 内所包含的电荷之和(加法律)。对于能量和动量也有加法律成立。然而，从原子论的观点来看，其中有一个差别，因为展布于基本粒子之间的场中虽然没有电荷，却有能量—动量。“质量因子”(四维能量—动量向量之“长度”)既不像能量那样依赖于坐标的选择，也不像电荷那样可以有两个符号：+或−，它是不变的而且恒为正。尽管如此，它却不适于用作量的一种量度，因为它不满足加法律。(正如三角形一边的长度并不等于另两边长度之和，而是小于它，区域 D 的质量因子大于 D_1 和 D_2 的质量因子之和。)

E 原子论

原子论最初起源于回应某些认识论要求的纯粹的思辨。化学通过倍比定律为原子论提供了坚固基础以及强有力的经验上的支持，这个定律由道尔顿(Dalton)从原子论出发作出了解释。同一种化学元素的所有原子必是相同的，否则此元素的物理性质的恒定性就无法理解了。在一大批相同的原子中，识别一个原子并把它与其余原子区别开来，不能由它的特定的内部性质以及对于它们成立的特定的定律来保证(如同莱布尼茨对于单子所做的那样)，而只能由运动的连续性以及原子间的空间分隔来做到。不论一个“自我”(ego)的经验是否与其他“自我”的经验完全一样，“自我”可以确定自己的身份，而与其他“自我”相区分，在这方面原子不就是像“自我”一样吗?

从关于物质的一个连贯的实体理论的角度看来，没有任何理由可以说明，何以在由具有一切可能半径的球所构成的无穷连续的多样体中，恰好那少数几种离散的可能性，即相应于化学元素的那么几种可

能性得到了实现；然而质量应由半径确定。我们在前面已经看到，经验与这个要求完全相左。另一方面，以太理论则对物体的电荷 e 与质量 m 完全未加限制；这里与经验没有碰撞。然而仍然没有得到解释的是，为什么对于基本粒子，这些可能性也只有少数得到实现。只有纯粹的场论还有希望能解释这个基本的事实。因为有可能它的(非线性的)场定律就是这样的，就是只容许有离散多个正规的、静态的球对称解。

现在可以肯定，在发现电子以前，对这个问题不可能作出有成果的探讨。物理学家在这里走得比化学家更远，而着手处理物质的基本单元，而且这单元对于所有不同的化学实体都是相同的，并以阴极射线的形式自由地产生。在此之前，“元素的周期系统”已经作了一个手势，指示了不同的化学原子也有均一的构造，虽然这个手势还比较含混。但是，现在物理学已经进入了原子研究的黄金时代。它在上半个世纪中，已经对原子论的基本原则给出了透彻的、光辉的确证，而且越来越深地穿透到奇异的原子世界的更深层次。一开始，它的所有方法都给出电子之电荷和质量越来越精确的相同的值。原子学(atomistics)只有通过这种均一性才得以成为基础稳固的物理理论。后来，间接法逐渐地被越来越多的直接法所取代。于是，微小的悬浮粒子的布朗运动，直接向我们的感官展示了分子的热运动。通过精心安排的实验，已经可以把个别原子事件的效应分离出来。其最重大的成果是发现了我们现在认为是最基本的原子常数——普朗克的作用量子 h。它第一次是在辐射的热力学中展现了自己的存在，即是在为数巨大的原子事件无序的合作之统计效应中展现出来的。普朗克发现自己不得不违反经典物理学，而假设线性振子发出频率为 ν 的光时，并非发出连续的振荡，而是以间断的“跳跃”发出，每次跳跃它都失去能量 $h\nu$。玻尔把这个原理用于个别原子中的

电子。令这样得出的频率“对应”于由经典的辐射理论给出的频率，他得到了计算原子能级的近似的公式。这样就造出了一把钥匙，可以开启那统率着原子和分子的辐射所发出的一系列谱线惊人的规律性之秘密。对于最简单的氢原子，成就最为惊人。索末菲(Sommerfeld)说(*Die Bedeutung der Röntgenstrahlen für die heutige Physik*, Munich, 1925, p. 11)：“我们的谱系列，要受整数量子数的主宰，这在一定意义上相应于古代的七弦琴发出的三和弦，2500 年前的毕达哥拉斯学派由此推论到自然现象的和谐；而我们的量子则让我们想起毕达哥拉斯学派的学说中整数所起的作用：它们不仅是物理现象的属性，而且是其真正的本质。”于是，我们就看见了新的量子物理学的兴起，旧的经典定律是它的极限情况，在同样的意义上，跟爱因斯坦的相对论力学当光速 c 趋于 ∞ 时就变成牛顿力学一样。

把所有物质统一起来，这个古老的梦想由于电子的发现，在圆梦之路上前进了一大步。但是荷正电的原子核(荷负电的电子如行星绕日一般绕它旋转)，却仍似为一个有内部组成的粒子，而每个化学元素的核组成不同。可以先验地看到，要想构造一个原子，除了荷负电的电子以外，至少还要有一种荷正电的砖石。从两种终极基本单元(电子和质子)来构造物质，要执行这种思想，当然预先就假设了对这两种单元可以作形形色色的组合，有很强的力把它们拉在一起，使其对外如同一个坚固的原子球一样。因此，没有力而仅有实体是完全不行的。

[后来认出了质子就是氢的原子核。不同化学元素的核的电荷是不同的，它们都是 e 的整数倍 ne，这里 $-e$ 指电子的电荷。如果原子处于电中性的状态(“非离子化”)，则因子 n(称为原子序数)与绕核的电子数目相同。不同元素的序数序列是没有空隙的：$n = 1$ 是

氢；$n = 2$ 是氦；$n = 3$ 是锂；……元素可以通过核发射或吸收基本粒子而变成其他元素。对于放射性元素，这就暴露了其不稳定性。这种过程是自发发生的，但是用具有足够能量的基本粒子去轰击，可以实现种种核嬗变。阿斯顿(Aston)发现，原子核的质量，至少是相当地近似于质子质量的整数倍。如果说在化学中得出的原子量还不是很明显，其原因可以在下面的事实中去寻找，即同样序数的原子可以有不同的构造(“同位素”)，而化学家们过去看作是纯粹的元素，时常是原子量不同的同位素的混合物；因为它们不能用通常的化学方法分离开。这些发现似乎确认了只存在两种基本粒子的假设，而在1926年之前确实也没有其他基本粒子存在的清楚证据。但从那以后，新的基本粒子出现了，现在我们已经有了很大一族基本粒子：电子，正电子，质子，中子，好几类中微子和介子。它们的电荷都是 $\pm e$ 或 0，但是量子理论还没有成功地把它们的质量也归结为电子的质量，也没有能把几个粒子解释为一个共通的粒子(one universal particle)的不同量子态。特别是，原子核似乎是由紧密地捆在一起的质子与中子组成的(这是两种质量相等或近似相等的粒子)。]

物质世界是由一个或几个单元组成的，每一个单元都以数量巨大的完全相同的样本而存在，这肯定应该看作是宇宙的本性之最基本的特点；而这正需要最深刻的解释。

[虽然这仍然是一项留待未来的任务，当本书正在写作时，[12]量子力学有了一项决定性的进展需要记录下来。海森伯(W. Heisenberg)对于任意原子系统的量子力学成功地用一个完全的、简单的、自洽的表述，即计算其能级的明确的规则，取代了对应原理，后者是

量子力学的一个多少有些含混、可变通的描述方式，所以不能列入理论之列，而且在其使用过程中变得越来越模糊而令人不能满意了。海森伯在对经典力学作必要的修正时，受到一个由光谱学广泛的经验材料抽象而来的普遍原理的指导，这就是谱线的所谓组合原理。它甚至迫使我们放弃关于原子过程的任何一种时空图景。玻尔在关于原子理论和力学的一篇漂亮的，一般说来资料丰富的论文(*Naturwissenschaften*，1926，p.1；英文版见 *Atomic Theory and the Description of Nature*，Cambridge，1938)中解释说，许多事实迫使他和其他物理学家得到一个信念："在量子理论的一般问题中，面临的不是对于可以用通常的物理概念来描述的力学和电动力学理论作一些修正，而是迄今作为描述自然现象基础的时空图景本质上的失败。"特别是，新的量子力学避免了本书 148 页所提到的电子在原子内旋转的频率与我们观察到的发射的谱线的频率之间偏差。海森伯是从修正计算的形式规则达到了这个新力学，薛定谔(Schrödinger)则从完全不同的观点独立地达到在数学上等价的结果，他的理论是基于这样一种思想：用波动过程取代力学系统的运动。这个波动过程可以看成是纯粹虚拟的，其本身是观察不到的，而力学系统中的可观察现象是由它以基于统计原理的"投影"导出的。一方面，电子的运动过程这样一来就被假设为由电子波支持的；另一方面，服从麦克斯韦电磁场方程的光波又调节着"光量子"(光子)的统计性态。具有一定能量和动量的光量子这个概念，在 1925 年以前就已经作为经典物理和量子物理的折中而流行(爱因斯坦，1905)。它可以既顾及由光电效应所证实的光的粒子性，又顾及由衍射和干涉所表现出来的光的波动性。]

从而似乎就清楚了，量子物理不能如以太理论曾经做过的那样，

不能主张以物质和以太作为一切现象下面的基本的两极对立。光不只是以太波，也是粒子，电子不只是粒子，也是波。取决于我们在何种具体情况下作观察，用什么仪器加诸其上，光子或电子可以表现为具有一定频率的以太波，也可以表现为击中此地或彼地的粒子。玻尔为新量子力学的这一基本特点创造了一个新词*互补性*(complementarity)，并用它在一定程度上代替了物质与力这一老的两极对立。首先是用实体来处理物质问题，后来则用以太概念，现在物质问题进入了其历史发展的全新阶段。

有关量子物理学更完全的知识，见附录 C。

参考文献

K. LASSWITZ, *Geschichte der Atomistik*, Hamburg and Leipzig, 1890.

K. KIRCHBERGER, *Die Entwicklung der Atomtheorie*, second ed., Karlsruhe 1929.

H. WEYL, *Was ist Materie?*, Berlin, 1924.

R. A. MILLIKAN, *Electrons* (+ and −), *Protons*, *Photons*, *Neutrons*, *Mesotrons*, *and Cosmic Rays*, Univ. of Chicago Press, 1947(revised edition).

F. HUND, *Linienspektren und periodisches System der Elemente*, Berlin 1927.

P. A. M. DIRAC, *The Principles of Quantum Mechanics*, third edition, Oxford 1947.

23 因果性(法则，机遇，自由)

A 因果性与法则

虽然原因与结果的关系既支配着我们的理论知识，也支配着我们与现实世界的交往，但想要把因果律的那些实际关乎科学研究的方面都清楚地拿出来，仍然是困难的。康德在《纯粹理性批判》第一版中说："一切发生的[开始存在的]事都预设了某种它按照一条规则而紧随其后的东西。"*这是他的"经验的类比"中的第二类比，然而

---

* 康德说的这句话及下面一句话均见《纯粹理性批判》一书中译本。——译者

他还用第三类比来加以补充："一切实体，就它们同时存在而言，都必然处于相互的交互作用的普遍协同体之中。"休谟是第一个详细分析因果性范畴的人，在他之前，在物理学与形而上学中都是未加批判地使用这个范畴。他首先发现了，被看作"原因"或"结果"的对象或过程必是在时间—空间上互相邻近的。这就是近距作用原理。任一个远处的效应必是来自效应的连续传递。"为什么会如此？"这个问题要求加入连续而无间隙的原因之链。从时间上说，"因→果"的传递必与"过去→未来"关系平行前进。进而还宣称两者之间必有"必然的联系"。但是如果我们定义"两个相继事件 A 与 B，若 A 发生时 B 不可能不发生，则 A 为 B 的因"，则我们讲的话其实没有可用经验来检验的意义。这是因为，我们毕竟只有一个世界，而在其中 B 只是跟随着 A，怎么能辨认出所需的必然性呢？所以休谟就用恒定的联系来取代必然的联系，前者就是在一切情况下都会再次发生。即令如此，在一开始还是什么也没有得到，因为一个具体给定的事实只能发生一次。这样，就有必要加上连续性的要求，就是充分相像的因导致近乎相像的果，而且相距太远的事件与物体没有可以注意到的影响，等等。现象必须置于概念之下，并按照典型的特性分成类。因果关系并不存在于个别事件之间，而是存在于事件的类之间。最重要的是——这是休谟也未曾注意到的一点——要把世界的唯一的进程加以分解（如在第 20 节中所做的那样），成为多次出现的元素，这种分解只有通过用少数几个数值特征来分级才能做到。这样就能分离出一般适用的联系。

对这些联系进行量度，就可以得出简单的、精确的函数关系，它们可以一劳永逸地确定下来。自然法则（natural law）就这样代替了因果性（causation）。如果几个量 a，b，c 由一个函数关系相联系，

a 与 b 之值就可以确定 c 之值；但同是这个法则也可以理解为量 a 由 b 和 c 决定。所以函数关系跟因果关系不同，它并不关心决定量与被决定量的区分。主张对自然法则做科学的探索而放弃对原因做形而上学的探索，所有伟大的科学家都是这样教导的。伽利略之发现落体定律是第一个伟大的例子。他本人说："探求什么是加速度的因，现在对于我似非上策"（Discorsi，third day，*Opere*，Ⅶ，p. 202），主要关注点必须是探求产生加速度的定律。牛顿也说："但我迄今为止还无能为力于从现象中找出引力的这些特性的原因，我也不构造假说，……对我们来说，能知道引力确实存在着，并按我们所解释的定律起作用，并能有效地说明天体和海洋的一切运动，即已足够了"（《原理》末尾，第3版）。按照达朗贝尔和拉格朗日(Lagrange)的教导，力学并不需要那些超越自身领域而进到物理现象的原因和这些原因的实质的定律；它满足于描述现象的规律性。马赫近年来特别致力于反对对于因果性概念的"偶像崇拜"。

这里是一个合适的地方来议论上几句关于形状(*Gestalt*)与法则的关系。开普勒仍然在行星系统的形状中看到世界的合理性：他把这种形状与柏拉图的正多面体联系起来，从而与某些理想的构形联系起来，而这种构形先验地在几何上很独特。形状及其类型的思想在生物学(系统形态学)中起了重要作用，虽然在这里是与有机功能这个目的论概念紧密联系的。但是这种概念在无机的自然科学中也没有完全消失，结晶学就给出了精确的形态系统最漂亮的例子。动力学的法则因为是一种近距作用的法则，所以具有连续的无穷小特性；在今天的物理学中，是这些法则而不是形状被认为是本原的。然而当这些法则具有某些有特性的离散解(如静态解、周期解)时，典型的构形又会出现。读者在附录 F 中会找到有关形状与组成及其与法则和

进化(尤其是生物学问题)之关系的更详尽的评论。

[科学似乎将因果性归结于功能法则(functional law)的观念，但这也不是完全没有问题的。物理学史上曾有两次相信自己已从原则上克服了将世界分解为个别系统(即个别事件及其元素，而它们归根结底只是近似地互相孤立的)，而把世界作为一个“一切都互相交织的整体”来掌握“Wie alles sich zum Ganzen webt”(万物交织，一体浑同)。[13]第一次是有心力的物理学，第二次是纯粹场的物理学，一时似乎都达到了这个目的。因果律在这里取以下的形式：状态量在某一世界点处的时间导数，等于这些状态量本身及其空间导数在此点之值的数学函数。因此，世界在某一时刻的状态会通过微分的法则决定其在紧接时刻的状态。于是，只有世界在某个时刻的状态才是“任意的”或“偶然的”，而由它可以通过积分“拉普拉斯世界公式”计算出世界的全部过去和未来。但是在这里，因果律又一次面临着被化解为无足称道的危险。这是因为：设只有一个状态量；则此量连同其时间导数和三个空间导数，一共是五个含有四维时空坐标的确定的函数。所以在数学上不言而喻，其间必有一个函数关系成立，而此关系中不再显含时间与空间坐标。如果任意程度的复杂性都可以容许，则关于规律性的论断也就没有意义了。莱布尼茨在《形而上学著作集》(*Philosophische Schriften*，Ⅳ，p. 431)中就已强调过这一点。决定性的，而且令人吃惊的，是这样一个事实：法则表现为如此简单的数学构造，而在世界连续统中，状态量之定量分布却复杂得令人难以置信。对于我们的知识，这就有如下的推论：尽管事件唯一的定量过程在很大程度上尚属未知，有限的经验就足以使我们能确定那些法则了。这种差别对于朴素的实在论者，只是一个

很模糊的介于简单与复杂之间的差别，而当直觉主义或构造主义观点在数学与物理学中被接受时，却变成了一个原则上的差别。]

进一步说，因果性原理的含义不但是假设了有函数依存性存在，而且假设其各个组成部分都有一定的强度。在它的通常的陈述中就可以看到这一点："在同样的条件下，同样的事件将会重现。"那么，在条件以及在此条件下会发生的事件之间，应该在何处画出界线？如果因和果分属于存在性的不同范围，这里就没有困难；例如当我们找出了内在知觉的实在条件，而且要求知觉中的每一点差异均基于相应的实在条件的差异时，就是这样。但在自然界中，因和果是在同一平面内的。为了区别两者，可以在世界中定下一个三维的类空(space-like)截面 t = 常量，作为分隔两者的分界线，这个截面把世界任意地分成"过去"一半、"将来"一半。这就引出了因果性原理的另一种陈述："过去"的内容按一定法则决定"将来"的内容。然而这并不是因果律本身，而只是它的适宜于场物理学的一种特殊的形式。没有必要仅仅为此就无条件地接受它。一个具有实际重要性的特殊情况是：假设我们有了几个永恒的对象或恒定的事件(例如棱镜和光束)，如果把它们孤立起来，其性态都是已知的；现在把它们放置到时空中使之互相穿透，这时就会出现一个新奇的然而可以预测的事件(光被棱镜折射成光谱色)。以太理论可能会用物质与场的对照来解释这里的因果关系("物质激发了场")。对于实验家而言，条件就是在他的控制之下的那一部分事件。(这种情况正是斯图亚特·穆勒的一个有系统的评论的基础：如果我们想知道原因的效应，我们可以做实验；但是如果我们想知道效应的原因，我们只能纯粹依靠观察。)我们可以体验到，我们自己的意愿是一种决定性力

量，而如果我们不曾如此或主动或被动地进入自然界的流中（哪怕仅仅是起一个创造实验条件的实验家的作用），那就很难对自然界从因与果这两个形而上学的侧面来看待。（休谟不同意。他认为，我们的思考着的意念会感受到，它是被迫从一个思想转到另一个思想，这对于他而言正是力的原型。）仅仅是对“我”这个词的内在的理解，才向我揭示了实体的概念。因此，莱布尼茨说：“对我自身的考虑也向我提供了其他形而上学概念，如因，果，……”（*Philosophische Schriften*，Ⅵ，p. 502）。

因果律断言“如果得到同样的条件，则会发生同样的事件”，这并不是一个经验性的命题。甚至通常倾向经验论的亥姆霍兹都这样强调过，因为“用归纳法去证明它，似乎是一个很可疑的命题。其适用的程度最多可与气象学的法则相比较”（*Physiologische Optik*，Ⅲ，p. 30）。宁可说：“甚至由因果律导出的推论也并非真正关乎经验本身，而是关乎对经验的理解，所以因果律决不可能用经验来驳斥，即使在这一方面，因果律也带有纯粹逻辑法则的特性……它只不过是一种对每件事都求得理解的需求”（上引书，p. 31），它是一种规范，在构造实在世界时，我们强制要求因果律有效。（在此应该回忆起一个例子：两种红光对于感官知觉为相同的，但是经同一个棱镜折射以后却有不同的光谱。）亥姆霍兹把因果性理解为一种方法论的原理，这与康德关于范畴的学说是一致的。

{时常会提出下面的问题来检验是否理解了因果原理：为什么白昼和黑夜的关系，这一个有规则的相继关系的原型，并不是一种因果关系？用因果关系具有“不可逆性”来辩解，不是一条好的出路，因为很容易用鸡和蛋的例子来反驳它。斯图亚特·穆勒提出了因果

关系的如下判据：不可更改性（即“一而再”）与无条件性（即“不论其余条件如何”）。他指出白昼与黑夜的交替不满足后一要求。可以这样来反对斯图亚特·穆勒的判据：谁也没有真正试验过，如果把太阳移走了，即如果一个本质的附加条件变更了，究竟会发生什么情况。休谟则以“已被承认的原理”（recognized principle）来回应，这个原理其实已蕴含在连续性原理中了，即若一个对象已在一段时间内并未改变地存在着，而有另一个对象产生了，则这个对象不可能是产生新对象的唯一原因。但是在某些化学反应中，在把反应物混合之后，相当一段时间已经过去了，而没有观察到什么，然后突然发生了颜色变化。在这种情况下，大家都承认，理论会告诉我们有某种连续进行着的隐藏着的变化，它只有在越过某个阈值时，才产生看得到的光学效应。但是，白昼与黑夜也可能是同样的情况：光明积累到12个小时后就变成黑暗，反之亦然。然而这时我们会注意到光明总是与太阳的现象有关，注意到恒定的12小时还有问题，注意到白昼之长在变，注意到甚至在白昼，当太阳被云遮掩或者发生了日食，也会变暗，而且阴影也随太阳的位置而动。于是我们的注意力被吸引到太阳，我们发现，如果考虑及此，则夜晚黑暗的积累只是白昼出现的原因之完全表面的一部分。下面的类比最终是决定性的：点亮一枝蜡烛，我就可以造出一片光明。把太阳与在我控制之下的蜡烛并列起来，我就会得到一个概念：如果我像吹熄蜡烛一样吹熄太阳，就会变成黑暗。

斯图亚特·穆勒在他的归纳逻辑（*A System of Logic*，*Ratiocinative and Inductive*，Book 3，Chap. 8）中，试图把借助经验来确定因果关系归结为几条明确的规则。这些规则只能看成是归纳研究方法论之初步的粗略的尝试。它们的主要缺点在于，它们并未解释怎样把这

些对规则适用的“例证”从作为一个整体给出的情况中分离开来。]

因果性在物理学中不仅仅是作为一个方法论的原理，而且还作为一个理论的事实成分，即作为第16节中讨论过的因果结构。按照在相对论之前的理论，效应的传播是即刻发生的。对刚性的杆一推，则在杆的任一点，在同一时刻就会感到这个推力；我把手一伸，造成了质量的错位，就在这同一时刻影响了行星的运动。然而，在相对论中，光速是一切信号和传播的速度之上限，因此远处的效应是在稍晚于发出原因的时刻才实际发生的。康德的第三个与经验的类比，即同时存在的客体的协同性原理，就必须抛弃。对于主体来说，光锥的指向将来的那一部分之作用，与它的指向过去的那一部分完全不同。我们是“把意识完全屏蔽起来”而沿着我们躯体的世界线在运动的。说实在的，只是对于光锥的指向过去那一部分中的内容，我们才可能具有以知觉为基础的直接知识。不论是力学运动的经典定律，还是电和引力的场定律，都未能说明这个差别。举例来说，一个趋向中心 O 的球面波与一个由 O 发出的球面波，都与场定律同样相容。然而，我们必定会要求，关于意识的一个基本的事实，即时间流的单向性，具有物理基础。唯象的热力学以熵的定律作为这个物理基础，按此定律，自然过程是不可逆的，而且都发生在熵增加的方向上。因为原子理论已把唯象的热力学归结为原子运动的统计学，由此引入了机遇(chance)的元素，所以我们就把对这个问题的讨论延后，而先来对机遇作一分析。

B 机遇

那些或明显或暗地决定我们行动的判断，极少如经典逻辑所要求的那样，表现为可以明确地划分为真与假。在黑与白之间有各种色

调的灰色。特别是有关未来的问题并不表明要以任何一种实在来检验；然而，我们现在就可以讨论这些问题，并且用“可能的”、“很可能的”、“不可避免的”这些词句来判断它们，而不是判断它们为真的或假的。例如，关于一年以后会发生什么事的命题，要到一年以后才能实地检验，但到那时就要用另一种时态(即过去时)来修正这个命题“在过去的一年里发生了(happened)什么”。在做计划时，我们要预先算计将来的可能性，并以估计各种可能性为基础来作出决定。开车的人随时都要几乎是本能地来做这件事。我们力求达到某个目标，要冒风险，危险原来就在我们头上。除了铁的事实之外，我们还依赖于期望，而期望总是带有希望或惧怕这种感情的色彩。人们可能不太愿意在这里讲到知识或判断，然而这些事又确具有判断的结构，而且意味着某种对于我们至关重要的东西。

概率的逻辑最早产生于赌徒们向同时代的数学家求教这种刺激，这真是一个讽刺性的历史评论。帕斯卡和费马(Fermat)正是由此引导到对博弈的机遇作数学的分析。这是一个赚钱或赔本的问题，所以定量的因素就不能忽略了；所求的解答不是对概率的概念作描述性的分析，而是概率的计算。问题在于以精确的方式满足对公正性的要求，方法是，在最简单的情况下，即当博弈是由一组规则确定时，公正地估算得与失。这个科目最早的著作是惠更斯写的。在雅科布·伯努利的《猜测术》(*Ars Conjectandi*，1713年出版)中，前面的部分还是在带有主体性的概念(诸如“希望”、“期望”、“猜测”)的圈子里打转。说真的，由拉普拉斯创造的定量概率的经典定义——有利情况的数目与一切可能情况的数目之商——则强调了其客体的方面。然而，这个定义明显地预设了，各种不同的情况均为等可能的。于是它要以对可能性的定量比较作为先验的基础。

[当问题不只涉及有限多个可能性，而是各种可能性形成连续的多样体时，例如在一个箱子里自由运动的粒子的位置，对于这样的先验的基础的需要就特别明显了。在箱子的一部分 D 中找到这个粒子的概率 $v(D)$ 是 D 的一个函数，而且它具有可加性，即若 D 以任意方式分成两个部分区域 D_1 和 D_2 时，必有 $v(D) = v(D_1) + v(D_2)$。这个要求与我们对于连续统中之任意区域 D 之体积的要求是完全一样的，而后一要求又是作为理所当然的要求而定下的(请与 36 页关于面积的公理比较)，因此就可以理解，何以今天的数学家通常是在“测度论”这个名目下讨论连续概率的。]

由于这样一种测度有任意性，尽管拉普拉斯从他关于自然界的连贯的决定论概念开始，最终也只能赋予概率以主体的含义；它处理的是前提不完全知道的事件，所以是相对于“我们(对此事件)是有知识的还是无知识的”。因此，我们对其是否会发生同样无知的事件，拉普拉斯称之为等可能事件。然而，当事件的概率并非绝对地算出来，而是在与之有因果或逻辑联系的事件的已知概率基础上算出来时，就可以分出一个纯粹数学的部分来。若 A，B 是两个事件(或为“这些事件发生了”这样的命题)，则可以作出“A 或 B”和“A 与 B”这样的逻辑组合。它们的概率分别是两个个别概率之和与积，但在“A 或 B”中须设 A，B 互斥，而在“A 与 B”中须设 A，B 彼此独立。统计独立性可以在主体性的拉普拉斯意义下定义为如下要求：若我们据以断定“A 与 B”的概率的知识，当对于 A 确实发生有了附加知识，而 B 的概率不变时仍然有所增加，就说 A，B 独立。

雅科布·伯努利在其《猜测术》一书的第四部分用他的“大数定律”(law of large numbers)建起了一座从概率的主体性概念通向客体

性概念的桥梁。按照这个客体性的解释，概率演算能够建立起表现于许多相似事件的平均值中的正规性，而非表现于单个事件上的正规性。这样，除了严格适用的因果律以外，我们还获得了统计性质的正规性。丹尼尔·伯努利(Daniel Bernoulli)以这种计算来建立气体动理论的基础。概率演算的客体意义，不仅在物理学，而且在好几门生物学科(遗传学、生物统计学)中显露出来，在现代保险业以及其他应用(经济与社会问题、大规模生产的质量控制等等)中也有所体现。按照上述主体性的观点，这是很难理解的。为了论证这个问题，出现了大量的认识论的文献。一个能用于说明所有概率问题的模型，是从装有 m 个白球和 n 个黑球的坛子中摸球。假设从这 $m+n$ 个球中摸出任一个球都是等可能的，则摸出白球的概率是 $\frac{m}{m+n}$。在实际事件的序列中，粗略地说，这个概率就是在多次摸球中，摸出白球的相对频率。(规定在下一次摸球前要把上一次摸出的球放回到坛子去，以恢复坛子的原状。)丹尼尔·伯努利的定理如下：令 p 为事件 E(例如是从坛子中摸出了白球)的概率，ε 为任意小正数 $\left(\text{例如说}\frac{1}{100}\right)$；则在一系列 N 次试验(摸球)中，每一次 E 既可能出现也可能不出现，设有 N' 次是成功的，则只要试验次数 N 充分大，相对频率 N'/N 与 p 之偏离最概然地(most probably)小于 ε。事实上，丹尼尔·伯努利把 N'/N 不在 $p-\varepsilon$ 与 $p+\varepsilon$ 之间的概率 $p(\varepsilon, N)$ 算出来为 ε 和 N 的函数，并且证明了 $p(\varepsilon, N)$ 对于固定的 ε 当 N 无限增加时趋于 0(如果 $\varepsilon\sqrt{N}$ 趋向非 0 极限，则它趋于 0，1 之间的一个确定极限)。在他的计算中，各个单次试验都看作是统计独立事件。这个定理属于纯粹数学。这个定理与实在能够发生关系，只是由于以下的事实，即一个事件发生的概率如果与此事

件肯定发生之差，比如说，小于百万分之一，就认为此事件实际上一定发生：我们可以几乎肯定地预计，在 $N \geqslant 200\,000$ 次试验所成的试验序列中，相对频率离先验的概率之差小于 $\frac{1}{100}$。我们可以更加肯定地预计，在大量这种长为 N 的试验序列中，其偏差大于 $\frac{1}{100}$ 的试验序列，只占所有试验序列的小于 $\frac{1}{1000}$ 的部分。但是总留下不确定性的残余，命题的不准确性是一个本质的特征。

〔有一些重要的情况，其中不同结果的等概率性，或者可由导出结果的过程中得到，或者可利用充足理由律，由情况的对称性得到。于是在大量实体的划分中（例如在某机体中成熟的细胞之分裂，见附录 B），互补的部分将以相同频率出现，从而可以期望它们的发生有相等概率。掷骰子是对称性的例子。只要承认骰子的 6 个面的每一个都有一个概率，则这些概率只能是相同的，当然需要这个骰子真正是匀齐的才行。这个推理很像阿基米德确定臂长相等的杠杆平衡的定律时所用的推理。我们有理由认为这种对称性或精确或近似有效的情况并不罕见。如果观察到的频率与我们的假设相符，我们就很满意；如果不相符合，就会驱使我们去寻找不对称的原因。如果有一个骰子，1 点出现的频率明显高于 6 点出现的频率，我们说不定就会在骰子上钻一个洞，看看里面是否灌了铅。〕

在这个例子中，如果骰子内质量分布是已知的，则仍有可能用精确的物理分析确定每一个面向上的概率。然而在日常生活的绝大多数情况，概率完全不可能按经典定义所要求的那样先验地确定，而只

能在观察相对频率的基础上后验地确定。生男孩的概率是一个好例子——哪怕是具备了现有生物学的关于性别确定机制的知识。如果把某一地区所有的小孩出生都按其时间先后收集起来成一序列，然后又把这些事件任意地排成序列，则后一序列将会表现出用概率论预测“摸”出在“坛子”中按 $m:n$ 混装的男孩或女孩的序列的所有性质。如果在时间延长得很长时，这两个序列有系统的偏差与错位，就可以推知，决定概率的环境已发生了缓慢的连续变化，尤其是人口的遗传构成出现了这种变化。

但是，如果概率真的只能用计数频率来确定，则把概率理论的客体性基础直接置于试验序列之上，并定义概率 p 为相对频率似乎就是合理的；但是因为这样做过于原始而且不能作任何预测，所以定义概率为试验次数无限增加时相对频率的极限，似乎更加合理。不幸的是这里假设了已经做过无限多次试验，而这是一个不可能的幻想。此外，这样做还超越了概率命题的内容，因为对这样一个试验序列，预测了相对频率与概率 p 的一致，是一个绝对的肯定，而不只是“以一定概率，无限地趋向一致”。它断言在同样条件下，每个试验序列都给出同样的频率值 p。为了使概率演算的数学规则能够成立，试验序列就需要符合于某些要求，例如要求有什么“大范围中有序，小范围中无序”之类；而精确地陈述这种要求又有很严重的困难。但是我相信，由严格经验主义的认识论立场所产生的统计学的“客体性基础”，只不过是在一个虚幻的频率极限后面掩盖了先验的概率，而频率极限这种独断论的陈述又是与试验的无限序列这个无意义的观念紧密相联的。只要你相信严格的因果性，则统计学必须化为严格的法则才能找到适当的基础。但是，如果个别的原子事件有一种不能归为因果律的“原生的概率”——按照物理学最新的进展似乎就是

这种情况——则我们势必在自然定律中或者引入概率本身，或者引入某个与概率有联系的量作为原生的因素；而概率的经典定义将只限用于具有对称性的特例，在这种情况下，充足理由律提供了充分的引导。

〔在 1 克氢中大约有 $N = 3 \cdot 10^{23}$ 个氢分子挤来挤去。在一定压力下，这些气体将会充满一个容积为 1 的立方体容器 C。我们想求出个别分子出现在此容器的一部分 D 中的概率。这里，相应的频率不是通过用同一个分子无数次地重复试验得出的，而是用很大的数 N 个分子同时“掷骰子”。在把伯努利大数定理推广到这种情况时，我们作了两个隐含的假设：首先，分子之间的作用力可以不计；其次，不同分子的位置在统计学上互相独立，其意义正如从坛子中重复多次摸球一样。统计学以这种新形式应用于由许多同类粒子组成的力学系统。因为对每个特定位置并无偏好，所以一个分子在某一时刻位于此立方体的给定子区域 D 中的概率，等于 D 的体积。我们又在心里想着，在 C 内再划出一个小的立方体 c 来，比如说其体积是 $\frac{1}{1000}$。我们想问，在某一时刻 c 中气体的密度(即 c 中的分子的质量除以 C 的 $\frac{1}{1000}$ 体积)与总的密度值 1 偏差大于 0.01% 的概率是多少。根据伯努利定理，我们可以发现，这个概率是一个分数，分子为 1，而分母的位数不少于 100 万。我们因此期望，在“统计平衡”状态下，气体的分布，宏观地说，将是在容器内处处有相同密度。明显的偏离(例如，自发地出现了所有气体都集中于容器的一角这种“奇迹”)是可能的，但概率特别小。如果一开始时就有一个不均匀的分布，则若无外力作用，分子的运动将很快地向均匀分布状态转

移。基于同样的理由，如果把咖啡和牛奶倒进一只杯子，搅动一下，立刻就会得到一种色彩均匀的液体。]

现在就可以理解了，绝大多数物理概念，特别是那些有关具有原子构造的物质的概念(例如气体的密度)，都不是精确的，而是统计的，就是说它们表示受到一定程度不确定性影响的平均值。类似于此，绝大多数通常的物理“定律”，特别是那些关于物质的物理“定律”，都不能看作是自然界的严格适用的法则，而是统计规律性。静力学(它处理热平衡时适用的法则)和动力学(它处理调节由扰动态向平衡态迁移的法则)要由涨落理论来补充，它研究的是对于平衡态下的统计平均值的涨落以及与之相关的物理效应。例如空气自发的密度涨落，造成阳光的衍射，以及白天光线的漫射，使天空看起来呈蓝色而非黑色。这种涨落不论个别地看来多么微小，仍然有可以观察得到的整体效应。事实上，由天空之蓝的颜色与强度，可以算出单位体积的气体在通常的压力与温度下的分子数目，即阿伏伽德罗(Avogadro)常数*，而且其结果可以用得自其他方法的阿伏伽德罗常数来校验。研究这种伴随着可观察的累积效应的涨落，已经证明在确定原子的各种常数上非常有效，而且是分子理论最强有力的支柱之一。

统计物理学的正当性的证据正是由以下事实得出的，即隐藏着的复杂的分子过程与我们的知觉没有直接的关系。知觉依赖于某些平均值，统计学教导我们怎样决定平均值。我们的意识并不反映现象

---

* 阿伏伽德罗常数为 6.022×10^{23}，表示 1 摩尔分子的物质含有的分子数。H_2 的分子量是 2，所以 1 克 H_2 中有大约 3×10^{23} 个氢分子。——译者

中的分子混沌，而是在空间与时间两方面都施加了一种整合的功能，由此得到了现象的显示出来的匀齐性与连续性。统计平均值可能服从一种关系，此关系指出统计平均值可能依赖于整个系统的全部历史（滞后，持续的倾向，“记忆”），虽然精确的自然定律是微分方程，但微分方程只把无限接近的空间—时间点连接起来。这种现象虽然在无机界也不陌生，但经常发生则是在有机界。然而不能据此证明有机过程不能有“机械的”解释，尽管有时确实是这样做的。

尽管概率演算有这么些应用，物理学家一开始总是固执于这样的观点，即它只是由精确的因果律导出某些具有可观察意义的推论的一种捷径。于是就有一种企图，即由这些推论导出统计分析据以为基础的概率测度。这就等于是对机遇作因果分析。只要“由微小的因得出巨大的果”，机遇就占优势。[14]两个抛射体若方向稍有偏离——这种偏离说不定是我们完全不能控制的——则当抛射体经过了很长的距离后，就会导出致命的不同结果。生殖过程中，卵子接受这种或那种遗传构成的精子，这种情况是无法控制的，因此，生男还是生女就只有托付给“机遇”了。

〔有一个简单的例子：向一个高速匀速旋转的分成几个扇形的圆形靶射击。扣动扳机的时刻 t 是因，被击中的扇形的编号 y 是果。y 是 t 的不连续函数 $y = f(t)$。对于结果的机遇特性，下面几种情况是本质的：(i)令 Δt 是时间范围，而且我们能在主观上尽了最大可能的细心来决定 t 的值；于是 $f(t)$ 在区间 Δt 中可以取一切值，即是说在 t 轴上使 $f(t)$ 保持常值不变的 t 的区间比之 Δt 一定很小。(ii)再假设在无限小时间段 t 到 $t + \mathrm{d}t$ 间扣动扳机的概率等于 $\varphi(t)\mathrm{d}t$，从而在 t 轴上假设了一个任意的概率分布 $\varphi(t)$，于是不同

的 y 被击中的概率可以计算出来。这些概率几乎与所设的分布函数 $\varphi(t)$ 无关，只要 $\varphi(t)$ 的性态充分正规即可，这里的正规即指在任意长为 Δt 的区间中 $\varphi(t)$ 变化不大。这个分析也可用于掷骰子，它把（y 域中）概率的量度化为（在 t 域中）比较概率的数量级的可能性。]

至此为止，我们都依赖于“几乎无关”或“充分正规”这些模糊的说法。我们企图让靶子的转速趋向无穷大以进到一个严格的表述。可以用封闭于体积为 1 的立方体容器中的由分子组成的气体为例来说明这个思想。我们设个别的点状的分子在容器内部沿直线匀速运动，而在器壁上按通常的反射定律弹回。以立方体的三边为轴，分子的初速由它的三个分量 v_1，v_2，v_3 给出。我们希望，不论初速如何，无限延伸的观察时间 t 将给出作为统计学基础的“无序性”，所以我们做极限过程 $t \to \infty$。对任意部分区域 D，我们理解的分子停留时间 t_D 就是在观察时间 t 中，该分子位于 D 内的所有时段的总的时间长度。所谓相对停留时间 $v(D)$，就是指分数 t_D/t 当观察时间 t 趋于无穷大时的极限。事实上可以证明，分子的相对停留时间等于 D 的体积，但要把满足线性关系式 $a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 = 0$ 的初速作为例外除去，这里系数 a_1，a_2，a_3 都是有理数。可以肯定，除去上述特例后的初始速度之集合，在三维速度空间中是处处稠密的，但相比于其余集合，此集合具有“零测度”。（它之对于全空间正如有理数集合对于所有实数之集合一样。）出现这样的例外，相当于在伯努利大数定理中，相对频率与概率值只以无限接近 1 的概率相等。对于 N 个点状的分子，若其每一个都遵循上面讲的定律中的路径，也可以证明一个类似的命题；但这时也要在同样的限制之

下，即 N 个初速的 $3N$ 个分量之间没有具有理系数的齐次线性关系。在这种意义上，N 个分子具有统计独立性。结果是，只要除去了这种“有理的”初始状态，则在观察时间 t 中，气体与密度均匀状态有明显偏离的时间之比 t_D/t，当 $t\to\infty$ 时趋于一个极小的数。像这样把概率命题解释为关于停留时间的命题，则在由精确定律统治世界的框架内，似乎可对概率演算之客体性意义作出解释。

〔当观察时间 t 无限延长时，在极限情况下会发生什么事，却依赖于某个数为有理数或无理数，这方面的命题来自事物的本性——不论它多么有悖于一切物理量度之近似性质与连续统的本性。这一研究趋势的价值受到一个问题的质疑：扰动从不能完全消除，但热力学的适用性显然并不受扰动的影响——或者只是在正面的意义下受扰动的影响：热平衡的出现因扰动而加速。附带提一下，在比上述例子更复杂的情况下，所作的分析依赖于一个关键的假设，称为遍历假设（ergodic hypothesis），然而其证明长期以来难住了数学家。有讽刺意味的是，当证明最终达到合理预期的程度时，量子力学却把这个假设的大部分物理意义都剥掉了。〕

无论如何，在实际的物理研究中，今天统计学至少起着与严格的定律同等重要的作用。把两者之一归结为其中另一个的努力，由于统计热力学已经独立地建立起来，逐渐地落后了。有两个对一切物理现象都有普遍意义的定律，其一是能量守恒定律，这是严格定律的原型，另一是熵增定律，则是一个统计定律。后者事实上宣称，热只能由温度较高的物体流向温度较低的物体，牛奶和咖啡搅动后只会混合而不会分离，一般地说，概率较小的事件随时间的流逝会转向

“最概然”(most probable)的状态，而绝大多数可能状态均与这个最概然状态相差极小；或者换句话说，有序(order)逐渐变为无序(disorder)。玻耳兹曼(Boltzmann)实际把熵定义为 $k \cdot \log D$，D 是无序性的测度，而 $k(=3.2983\times10^{-24}$ cal./℃)是自然界的一个普适常量。当我们所依赖的方法是从有说服力的契机发展起来时，我们不能不看到，统计概念是在那些属于严格定律的概念之外，是真正独创的。说不定空间与时间，正如上面被锁在一个容器内的气体分子提示我们的，其功能只不过是为物理学提供了概率场。按照新的量子力学，我们在场物理学中所熟悉的那种类型的精确定律，确定与原子有关的某种概率。但是它们确定在空间与时间中观察事件的方式，只是如同先验的概率确定统计平均值一样——具有不可避免的不确定性的因素。很明显，只有物理学才能对概率演算的真正意义提供最终的启示。在以前，人们争论说，概率演算之所以必不可少，是基于不可能把一个物理系统完全地孤立起来。这样，就认为统计学是把无限的宇宙对一个近乎孤立的子系统的影响概括在一起来考虑。但是，也许比世界之指向无穷远处的边际的开放性更为重要的，是指向原子的内在无限性。哲学家们是一些缺乏耐心的人。作为科学家，总有一个印象，即只有在量子之谜解决了以后，才能再对因果性、法则与统计学讲一些合理的话。

[附录 B 和 C 将要讲述，自 1926 年以来，量子理论的发展是怎样把这种情况弄清楚的，以及清楚到什么程度。“原生的”原子概率成为某个(复值的)场量 Ψ 之绝对值的平方，而“次生的”量子—热力学的统计学，只不过是一一历数各个量子态。因此，内禀的概率测度的困难就不再出现在该理论中了。]

C 时间之箭

熵的定律以高屋建瓴之势说明了“时间之箭”，说明了过去与未来之不同作用，说明了自然过程之不可逆性，而且与物理学所有分支中的经验相一致。然而有一个严重的困难。因为关于分子运动的统计学导出熵的定律，全然是基于一些基本的法则，例如分子的碰撞，而后者是可逆的，即当变 t 为 $-t$ 时，碰撞的法则是不变的。天体运动令人印象深刻地展现了这种可逆性，扰动的影响已经完全或几乎完全消除了。它们的和谐似乎已战胜了在地球上占据优势的普遍衰变法则。仔细地检查熵定律的统计推导将会表明，一个远离热力学平衡的不甚概然的(improbable)状态，在一个小的时间区间 Δt 之后固然会以压倒性的概率以一个更接近于平衡的态为其后继，而在 Δt 时间以前，也以同样压倒性的概率以一个更接近于平衡的态为其先行。事实上，这个预测为所有的涨落现象所证实：这里完全没有不可逆性。

[于是斯莫卢霍夫斯基(Smoluchowski)* 在《论物质与电的运动学理论》(*Vorträge über die kinetische Theorie der Materie und der Elektrizität*, 1914)中得出以下结论：“如果我们继续自己的观察直到不可量度的长时间，则所有过程都表现为可逆的。”玻耳兹曼也说(*Populäre Vorträge*, p. 362)：“概率演算的法则蕴含着，如果我们想象世界足够大，则在这里或那里总会出现一个区域，像天空一样大，具有高度不概然的态分布。”我们恰好见证了这样一个事件，这种情况也可能用以下的事实来解释：生命的可能性正是处于这样一种

* 斯莫卢霍夫斯基(Marian Smoluchowski, 1872—1917)，波兰物理学家。——译者

例外状态中。

然而，很难把这番话看作是这件事的定论。如果两个本来互相孤立的系统有了接触而开始彼此影响，我们认为，在那一时刻，它们彼此处于热平衡是极不概然的。把时间方向颠倒过来，将两个系统连结起来的过程变成将一个系统分割开来的过程，这时我们就会作出一个相反的判断：如果有一个系统已在很长时间内孤立于一切外界扰动，把它分成两部分，我们认为这两部分在分离的那一时刻正处于热平衡之中，这是极度概然的。因此，在因果律中固有的一个概念，即早发生的事是后发生的事之因，反过来则不行，正是这个概念对我们的概率判断打上了时间具有特定方向的烙印。]

上面说过，在时刻 $t+\Delta t$ 与时刻 $t-\Delta t$，一个系统与平衡态的偏离，将以压倒性概率小于时刻 t 的偏离，只要 y 在时刻 t 显著地异于 0；换句话说，y 好像屋顶一样向两边溜下去。但是既然一个屋顶有两个坡面，我们就不能用这种屋顶构成状态唯一相继的图景。只有当我们在每一个时刻都偏好向前的坡面或者偏好向后的坡面，这样一个图景才能出现。比如说，当我们追随热传导或扩散过程时，我们是偏好前者。换言之，我们将会预测，比之目前的(不甚概然的)状态 S，将来的状态 S' 将有更大的概率(即比 S 更为概然)。我们假设目前的状态 S，比之它由之产生的以前的状态 S'，也更为概然——尽管过去的 S' 比之目前的 S，其概然性更差。按照这种倾向于未来的概率判断，我们期望再过几百万年，地球将会进一步冷却。用同样的倾向过去的概率判断，将会宣称几百万年前的地球比现在冷得多。然而我们假设过去它处于一个更温暖的状况，而现状则是用倾向于未来的概率判断得出的。我们斥责那种倾向过去的判断为“奇迹”，

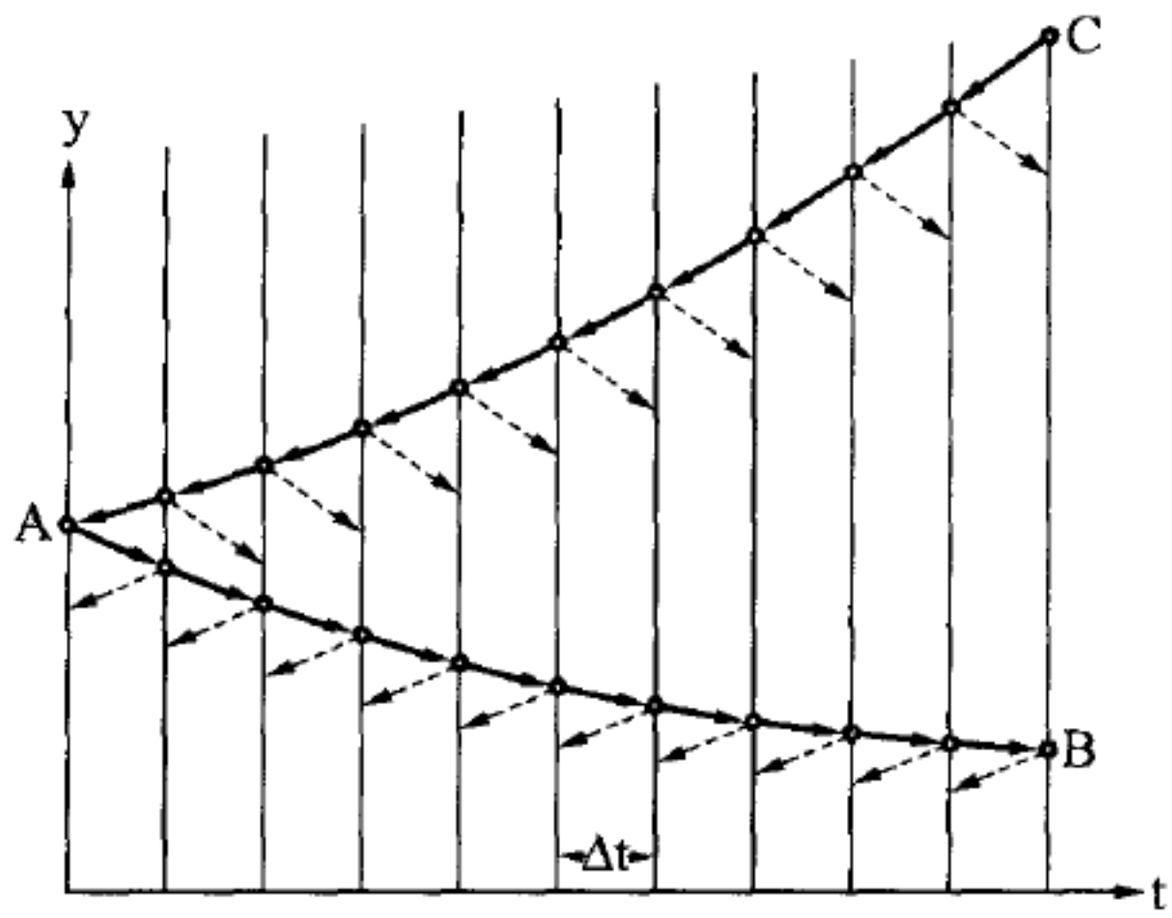


图 6　*AB* 是倾向前方的概率判断，*CA* 则是倾向后方的概率判断。在每个情况下都忽略了相反的坡面(虚线)。

而随着我们考虑的那部分宇宙更大，就可以更深远地推向过去。我们的判断将会是这样进展的，好像我们正在讨论的系统是在我们的时间之前创造出来的。“创造”(creation)一词暗示了一种形而上学的，甚至是神学的解释，但是这并不妨碍我们认识现在的事态用“创造”一词来表示最为恰当。

[物体在时刻 $t=0$ 时的任意给定的温度分布，将按照热传导方程随时间而变化。这样就能算出在将来的任意时刻 $t \geqslant 0$ 时的温度分布，但是在绝大多数情况下，把解追溯到过去 $t<0$ 一步也办不到。所以在这里必然在紧接着当前时刻 $t=0$ 前的一瞬间就已经发生了“创造”。可能是在这里把物体加热了，而在别处又与另一个物体相接触变冷，并在时刻 $t=0$ 时，把那个物体移走。

当然必须承认，一个范围有限的系统，若在一个无限长的时段中孤立起来，会有可逆的偶然涨落。但是一个现在孤立的系统可能看似将永远孤立下去，而非看似从来就是孤立的。因此，可以说，可

逆的涨落之研究只有局部的重要性，而对世界作为一个整体，什么也没说明。]

由此我们得到一种信念，即由过去到未来这一方向的独特性，并不表现为一基本的法则，而是一种概率判断。确实，在经典的场物理学中，可以找到一个公式(李纳—维谢尔公式)，它在解的两个分量中仅保留相应于推迟势(retarded potential)的一个，使得电子的运动按此公式决定了它所激发的场。只有当我们设想在某时刻之前世界是虚空的(即所有的电荷均已中和，而且场 = 0)，而只在电荷被分离和创造出来以后，场才开始辐射，即便后来电荷再次中和，场也不会消失，只在这时，以上所述才是场定律的必然的推论。但是在今天，一定要用量子论来代替经典的电子理论。按照玻尔的基本观念，原子中电子的跃迁只给出向外发出而非向内收拢的球面电磁波，其频率由原子的能量损失决定。在此毫无疑问，为了理解发射与吸收之不可互换性，其基础应该是和熵定律情况下的同样原理。

[当爱因斯坦引力方程(其中已加上了那个宇宙学项)给出了表示宇宙膨胀的解时，自然而然会把宇宙的膨胀与独特的时间方向联系起来。按第16节所说，一个无物质的世界可由德西特的双曲面来表示。各个星球在其中都画出了一条测量世界线(geodetic world line)，而由此线上各点发出的指向未来的光则填满了这个星球的影响域 D。这个区域只盖住了半个双曲面，它如扇形一样向无限的未来展开。D 同时也是测量线的三参量束中的每一条测量线的影响区域。假设双曲面只有这一半 D 对应于真实的世界，而测量线对应于各个星球的世界线(但不计这些星球间的引力)，则这个假设是合乎情

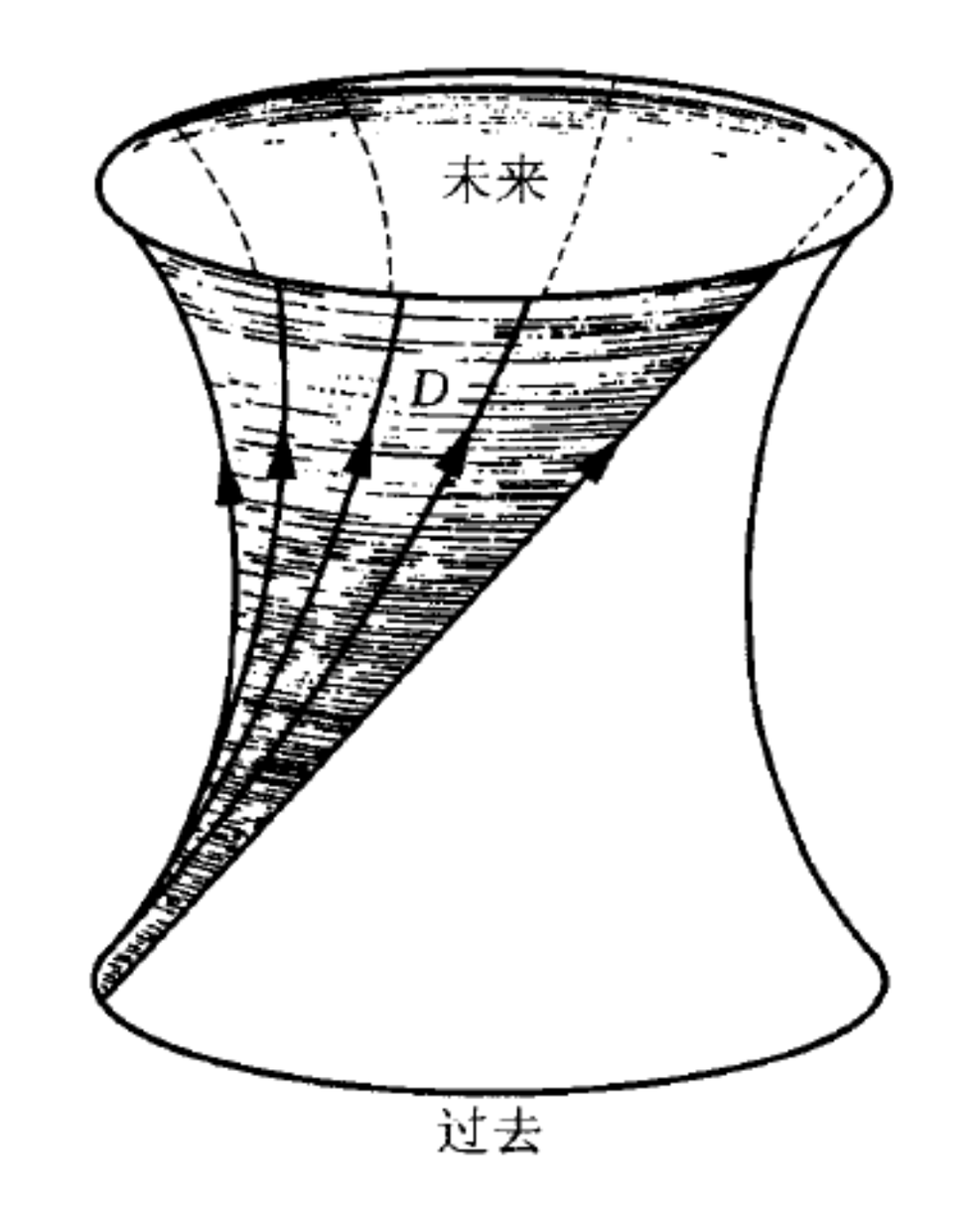


图 7　德西特的双曲面，其中 D 表示影响域，也画出了星球的世界线。

理的。 换言之，所有星球都有共同的影响域。 正是所有星球起源总体的这个图景，使我们得以解释螺旋星云的谱线之红移，并且估计出世界半径的数量级约为 10^{27} 厘米。 宇宙膨胀的一个自然推论就是，我们更加倾向于对指向未来的光锥给以独特的地位。 真实情况是，世界并非空无质量的；所以应该把德西特的解换成一组可能的解，其中含有德西特的解与爱因斯坦的常态解作为特例。 这些解中的大多数会对宇宙赋予一个点状的时间起点。 曾有人揣测，宇宙的创造是由于一次猛烈的辐射爆炸，现在的宇宙线作为其化石正是这次爆炸的证据(勒梅特)。]

我们可以如爱丁顿一样把情况简要地总结描述如下：“我们已经在当前的物理问题领域中，把相反的机遇(anti-chance)都扫除掉了，但是我们还不能完全摆脱它。 当我们中间有些人被误导而试图回到几百万年以前，就会看到那些被扫除的东西已堆成一堵我们无法越过

的高墙——时间的起点”（*New Pathways in Science*，p. 60）。

*右与左*的对立，不管它在神话的思维中占了多大的地位，在科学思维中并不如过去与未来的对立那样成为基本的问题。毫无疑问，所有的自然法则在左右互换时都是不变的。然而必须注意到一个事实，一个具有光学活性化合物的左旋与右旋同分异构体，在自然界中常以极不相同的丰度出现（例如在葡萄发酵时，右旋酒石酸就比左旋酒石酸出现的多得多），而在有机界右手螺旋系或左手螺旋系时常是物种（例如贝壳）的可遗传的特性。[15]

我们现有的物理理论都不能说明*正电与负电*的本质区别。在自然界中负电子远多于正电子，而正质子又远多于其负的对应物（这种对应物的存在迄今尚未在实验中证明），这难道只是一种“偶然”吗？

D 自由，目的性

命运与注定、机遇、好运与厄运、自由意志，这些字眼都表示一些范畴，而人们常愿用它们来解释自己的存在。在荷马（Homer）的著作里，上帝和凡人一样，都要服从 *moira* *。日耳曼各民族把命运的力量拟人化为 Norn**（“只要 Norn 发了话，谁也不能活到晚上，”见 *Edda****，Old Hamdir Song）。伊斯兰教有 Kismet***** 的概念，是一种宿命的宗教；而在基督教神学的领域内，加尔文（Calvin）把人的命运无条件地置于上帝手中（凭上帝的选择施以恩宠，或上帝预先决定）。第一个连贯的决定论（determinism）的现代理论应该归功于霍

---

* 希腊神话中的命运三女神，也常写作 *moirae*、*moera* 等等。——译者

** 北欧神话中的命运之神。——译者

*** 冰岛人的一本诗集。——译者

**** 命运，即真主的意志——译者

布斯，他认为自然界的法则是一种束缚的力量。另一方面，笛卡儿则坚持意志自由(freedom of will)，按他的哲学原理，自我既然因思维而确定其存在，思维即可保证真理性，他也不得不这样做。他无法理解，这怎么能与前定说相容，而由上帝的全能必然会得出前定说。

笛卡儿展示了在肯定与否定这些理论行动中的意志自由，他以很大的清晰性指出了自由问题中决定性的一点：当我以清晰的理性作出2+2=4这个实际的判断时，这个判断并不是以盲目的自然因果性加之于我的(因为这个观点会使得思维不再是：我想)。宁可说，有一种纯粹精神世界的某物，即2+2确实等于4这种情况，对我的判断有一种决定的力量。这里的问题并不在于，决定我的行动的各个因素中，是否有一部分作为实存的自然存在于我之内而不是在我之外。康德把这种自由嘲笑为：说到底也只不过像一个“有发条的机器，上足了发条以后就会依样自行运动”(《实践理性批判》)。自由也不是无根据地、盲目地、任意地做决定的问题。宁可说，我们面对着的是这样一个事实，“存在”(Being)之领域对于决定存在的因子并非封闭的，而在“自我”(ego)之中，“意义”(Meaning)和存在融为不可分的联合，“自我”对于“意义”则是开放的。然而，如果这个信念不错，则其开放之处，即客体的界限，应该在自然界及其科学中表现出来。然而在自然科学中并不是这样，自伽利略以来，科学有着不可抗拒的动机，声称它能囊括整个自然界，并得到了极大的发展，对于现代意识来说，科学已经成了动摇“自我”的独立性这一朴素天真的信念的力量。所有证据都表明，一切有生命的表面上看来赋有意志功能的生物，都不能摆脱精确的自然法则。我若想让自己的身体动一动，也只能通过推开身边的物体，并且吸收它们的反作用，才动得起来。

[笛卡儿试图通过灵魂来挽回这个局面，他让灵魂具有某种指导或“变换”动量的功能，虽然不能改变其总量。下面可以引用莱布尼茨两段话。莱布尼茨在一篇关于自由的论文(*Lettres et opuscules inédits de Leibniz*, ed. Foucher de Careil, Paris 1854, p. 178 et seq.)中说：“可能有，甚至一定有一些真理，它们不论如何分析也不能归结为同一律或者矛盾原理，相反，要支持它们需要作无限系列的推理；这整个的序列只有上帝才能参透。而这就是人们认为是自由或偶然的所有东西的实质。”莱布尼茨又进一步在《单子论》(*Monadology*)一书(*Philosophische Schriften*, VI, pp. 607—623; Section 79)中说：“灵魂，它的渴望、手段与目的，要按照终极理由的法则行动。躯体则按有效理由或运动的法则行动。终极理由与有效理由这两个领域是和谐的。”决定论的最清楚的表述是拉普拉斯下面的一段话：“只要有了一种智慧，在某一瞬间既懂得使大自然具有生气的所有的力，又能知晓组成大自然的一切事物的状况，这个智慧又足够伟大能分析所有这些材料，它就能在一个公式中囊括宇宙中从最大的天体到最轻的原子的运动；对于这个智慧，世上无不确定之事，未来和过去尽在它的目下。人的心智，就其已赋予天文学的完善而言，已足以使我们对这个智慧有一点初步的印象了”(*Essai philosophique sur les probabilités*, second ed., 1814, pp. 3—4)。康德按照他所处时代的科学的情况，就时空现象的世界而言，是同意这种观点的，而且他试图通过区分现象世界与心智世界，来对自然因果性与意志自由的冲突，给出一个超验的解决。但是他的解答很难协调一致地[16]贯彻到底，甚至对他本人也是晦涩不清，到了连人的性格的改变都无法理解的地步。在拉普拉斯物理学的框架下，要想对康德的企图作合理的解释，似乎一定要求个体从永恒到永恒的存在，或者是作为莱布

尼茨的单子，或者用灵魂转世(metempsychosis)来解释，如印度人和叔本华那样。因为这时个体必与每个截面 t = 常量相交，从而不能被与其存在不“相交”的世界状态完全确定。]

上述二律背反的最尖锐的表现，在于“知”(Knowing)与“存在”(Being)的关系。现在我们像拉普拉斯和场物理学那样假设，在给定的时刻，即在一个三维截面 t = 常量上的世界状态，按照已知的严格适用的数学定律，决定了未来事件的进程。由此则下面的推论应视为正确：从我在一个世界点 O 处已知(或能够知道)的东西，或者从在 O 处可以知觉到的那一部分世界中已知(或能够知道)的东西，就能计算出未来事件的进程。这个二律背反原来是存在的，但已经由相对论化解了。因为已知与未知并不是由经过 O 的截面 t = 常量来划分的，而是由向后的光锥来划分的。这是一个数学的事实，即按照场定律，此锥内部状态量的分布并不唯一地决定世界的其余部分。只在紧接着一个行动之后，我才能完全知道这一行动的因果性前提。此外，必须记住，只有在现在的全部后果，即直到时间终结处的后果的基础上，对现在才能有完全的知识。

然而，如果我们把这个决定(determination)的问题看作是只涉及实在的问题，而不是涉及知识与实在的关系的问题，而且我们又坚持在实在的世界中有自由行动的可能性，则我们必得要求，由 O 发出的向前光锥的内容，并不完全由世界的其余部分决定。这与纯粹的场物理学是相矛盾的。但是它的理想，和拉普拉斯的理想一样，至今仍然残存。由上所述就清楚了，现代物理学，可以说其基础一半是定律，一半是统计学，确实很难说它宣布了决定论的胜利。在量子物理学中，基本的过程并不是由严格的因果律决定的。如果这样

一来，在今天看来世界并不如拉普拉斯时代那样，而较少受“不可违反的法则”之桎梏，则也必须指出，决定论唯一真正无矛盾的形式，即坚持一切发生了的事均有无条件的必然性，从未在物理学中找到支持。甚至在拉普拉斯的世界中，也有“开放之处”（open place），它可以任意地位于这个或那个截面 t = 常量上。

在我们对有生命的物体的自然理解上，除了因果律和统计学外，起源于某个目的这种概念也起了作用。长了一双手是为了去握，长了一对眼是为了去看。我的躯体是我在这个世界中实在的存在。生命之理论若不考虑这些简单事实，是不会成功的。感觉器官的各个部分之间有大量最微妙的相互适应，感觉器官之成为外部世界进入感觉知觉的大门，这种相互适应是必不可少的。肯定地宣称，“只是我们自己把目的性放进了生物体的生命之中”，或者说，“生命的目的是人造出来的，而不是人发现的”，这又太方便了，而某些有实证论倾向的科学家也正是这样做的。（说诸如“当我开车去拜访朋友时，车子出了毛病，这时我就马上会被迫放弃关于车子的目的论观点，转而去作因果性的分析”这样的话，不会对分析因果性与结局的关系问题给出多少启发。）必须首先得承认对于有机或无机环境有大量的适应以及功能的调节，才有可能试图用因果性来解释它[达尔文主义(Darwinism)正是这样做的]。器官的功能，个体的保存，在个体死亡以后，通过进化而得到的特定形式的生命仍然传承。所有这些都不是人为的目的。有机体的目的性的一个侧面可以从以下事实看到：有机体尽管受到外界条件变化或躯体损毁(退化)的影响等深远的干扰，仍然保证了它在恒定的或几乎恒定的形态学上，或在功能上的最终效果。当把自由的有目的行动与合法则的必然的事件对立起

来时，目的性和自由实际上是同一事物的两个侧面。就我自己而言，我知道自己对于一个纯粹精神的影像世界是开放的。我对自由的洞察力和对真理的关切，来源其实在此，而我的自由的行动和责任也来源于此。但我同时又占有人的躯体，因此是一个有生命之物，而与其他有生命之物深深类似。因此，在一切有生之物中去寻求自由和观念的种子，是很自然的事。

秩序，组织，是生命的特征。因此就有了一个印象，生命在其于地球上的演化中，必对坠入“热寂”的深渊予以抵抗，而熵定律正是把热寂加之于每一个无机物的。柏格森(Bergson)为这种抵抗力专门造了一个庄重而有些虚夸的词“élan vital”(生的冲动)。甚至一块晶体，在其生长中俘获一些物质时，也把秩序加予它们。水结晶为雪或者冰时，把热散到周围环境中，使环境的熵，即其“无序性”增加。这样，总体说来，熵定律仍然成立。同理，一个有机体在从受精卵逐渐分化的成长中，必有一种创造秩序的能力——而肯定要以环境的熵，即其无序性之增加为代价。植物的绿叶的光合作用必伴随着吸收入射光并加以“无组织化”。由血液流动输送来的氨基酸与嘌呤基合成了细胞中复杂的蛋白质和核蛋白。在细胞分裂时基因和染色体自我复制——而热量以及组织程度较低的物质如水、二氧化碳、尿素等等都被释放到环境中去了。

在贝采利乌斯的时代之前，人们普遍持有一种观念，即有机物只能因一种有生命的物质才具有的“活力”(vital force)，才能存在，而到了1828年维勒(Wöhler)从纯粹的矿物质(氰酸铵)合成了尿素以后，就必须放弃这个观点了。确实，绝大多数有机化合物比无机化学中遇到的任何东西要复杂得多。一个典型的蛋白质分子由大约6000个原子组成。有生命的物质的最显著的特性大约可以由此说

明。然而这只是复杂性的程度不同而已；因为费歇尔(E. Fischer, 1901)和他的后继者[贝格曼(M. Bergmann)等人]已经成功合成了许多的多肽，即有相当长度的氨基酸链，它们从系统的观点来看只不过是最简单的蛋白质。因此，如果生命与死亡之间有原则的差别，它决不可能在物质基质的化学成分中去寻找。

[事实就讲这么多。物理学家和莱布尼茨一样，毫不犹豫地指出，严格可逆的自然法则，例如行星运动的定律，从不区分前因与后果。光在一个折射系数(=传播速度)随空间变化的介质中的折射定律，既可如通常的方式用微分方程来陈述，这时，由一给定点 A 向一定方向发出的光线，或者说依一定方向到达给定点 B 的光线，它的路径可以一步一步地用积分方法唯一地定下来；另一方面也可以如费马那样，宣称光由 A 到达 B，走的是需时最少的路径。看起来似乎是，自然界依可能是最经济的方法达到自己的目的。这种变分原理，特别是哈密顿的作用量原理，确实在力学和物理学中起了重要作用。但是从数学上来讲它们等价于微分法则，而后者只在无限接近的事物间建立了联系。说在变分原理中表现了自然界是有目的地力求经济是无根据的，还有进一步的理由，即哈密顿的作用量在一定条件下并不一定取最小可能值；而是取驻定值(extreme value)，即当独立的状态量作出任意的无限小变动时，其值不变。

由于引入了概率和熵的概念，对于可逆的自然法则成立的前因与后果的对称性完全消失了。这些概念在理论构架中显然为形而上学的因果观提供了充分的表现，按这个因果观，在前的对于在后的是决定的理由。

在牛顿物理学的模式(此模式对于拉普拉斯也适用)中，只有初态

（例如太阳系中各行星的次序）是自由的。对于牛顿，这已经为行动的目的性，为“强大的永生的事物之智慧与技能”提供了充分的活动空间。他深信，“盲目的命运决不可能使所有行星在同心的轨道上作相同的运动”（康德和拉普拉斯后来试图对这一特性给出科学的解释）。“必须允许行星系的这种奇妙的均一性乃是一种选择的结果。动物躯体中的均一性也必须如此”（牛顿《光学》一书的结语）。]

按康德的观点，目的性只不过是用于判断自然界事物的一种调节的原理。一旦我们知道了眼睛可以用于看，我们就感到需要找出是什么内部的组织使得眼睛，还有别的物理对象，能按此内部组织的功能法则，完成看的任务。另一方面，开普勒则说：“并非眼睛的构造使得心智具有这种特定的掌握定量关系的能力，恰好相反，是思想的这种基本的资质要求眼睛有相应的构造。”在对世界的形而上学的解释中，都能找到这样的命题，例如费希特就试图在目的论的（teleological）观点下解释，世界应该能够意识到其自身。对于唯心论者而言，世界的这种 *telos*（终极目的）被断定为世界自身的本质。

[谢林，以及后来的德里施（H. Driesch），还有整体论的生物学学派，用整体（whole）这个概念来取代目的性的概念。生物学中的整体性概念是由贝塔朗菲（Bertalanffy）、霍尔丹（J. S. Haldane）、迈尔（A. Meyer）、阿尔韦德斯（Alverdes）、于克斯屈尔（v. Uexküll）、沃尔特雷克（Woltereck）等人表述的，而各有细微差别。在心理学中，格式塔心理学（gestalt psychology）也表现出类似的趋势。任何一个物理学家都不会承认德里施关于有机过程不容许“力学解释”的“证明”为有说服力的，因为他的论据是基于对“力学解释”的本性的过

分局限的概念。甚至原子的物理过程与一个机器的总的宏观的运作也绝少有相似之处。每一个原子就已经是一个具有相当确定构造的整体，它的组织是具有最大复杂性(utmost complexity)的可能有的组织与构造的基础。附带提一下，近年来关于染色体的研究就已显示了那种在细胞分裂中仍能保存遗传成分的物理过程，而在德里施看来这是不可想象的。看不出有任何理由，能让理论的符号构建在生命与灵魂(psyche)的事实面前止步。很可能是，相关的科学还没有达到所需的水平。在我看来，心理分析就已经表明，这种限制既非基本的，也非永远的。在自然界中，“万物交织，一体浑同”，空间，物质，引力，电磁场产生的力，有生命体与无生命体，都不可分地联系在一起，这个事实有力地支持自然界的统一性的信念，因此也支持科学方法的统一性的信念。没有任何理由不相信它。

生物学肯定不是应用物理学或应用化学，而是一门独立的科学，它不但有自己的主题范围，也有自己的法则；这些法则，与物理学中研究的物质一般定律比较起来，其特性可用特定的复杂性来刻画[哈特曼(M. Hartmann)]。一个有力的证据就是遗传的染色体理论，它可以说明许多事实。但是自19世纪与20世纪之交以来生物学所取得的巨大进展，用的仍然是与统治着物理学一样的推广归纳的方法，比较和实验的方法。在生物学中，比较方法超过实验方法的程度仍大于物理学中，这一现状并非原则问题。近几十年来，这种情况已大有改变。在刻画和理解生物的形式与功能时，着重于其计划性和整体性不论是如何的必不可少，必须如康德那样指出，还只是提出问题而不是解决问题。想要得出解答，就必须用我们将整体性概念应用于物理中同样的方式。“对于现象的观察与分析可贯穿到自然界的最内在之处，我们不可能知道，这些会随着时间走到多远”(康

德)。确实，可以认识到的必然性是有界限的。事实上，似乎在无机界，在每个原子中，我们已经达到了这样的界限。如果说，只要把原子过程中的因果独立性当作统计独立来对待，则无机物质的性态遵从统计学，那么，在有机领域中，一个有生命的整体的生命之力量，就可以在理论上表示为那些基本过程的统计相关性的非空间(non-spatial)因素。然而必须指出，迄至现今，自然界的统计—热力学定律甚至在有生命的机体中，仍然证明为有效。我们现在还只有关于生命的比较原始的判据，还不适于做精确的表述与研究。关于生命的本质以及自发发生的可能性这些问题都还不够成熟，必须等到我们在宽阔得多的程度上了解了生命的法则后才行。

肉体—灵魂的问题也属于此。我不相信，把整个实在(它无疑具有心理—物理本性)都置于一种理论的构建之下的任何一种无偏见的企求，会遇到不可克服的困难，只是需要把灵魂解释为个体的真实心灵活动的总体。如果因果性概念把肉体与灵魂的相互作用看得如此怪诞，以至于只能如笛卡儿那样求助于上帝的偶因论式的干预(occasionalistic intervention)，或者如莱布尼茨那样，求助于一切都前定于时间之始的和谐，这样来理解因果性都太过于机械论了。]

如果我说得不错的话，真正的谜在于“自我”(ego)的双重地位；它不只是一个存在并执行着实在的心灵活动的个体，它还是一个“视力”(vision)，一个能洞察一切的光(赋予意义的意识、知识、影像，怎么称呼都行)；作为一个个体，它能对实在作出论断，它的视野对于理性是开放的；如费希特所说，“能把眼睛注入其中”，或者用谢林的话说，“能同时转向两个世界的组织”(“Erster Entwurf eines Systems der Naturphilosophie，” *Werke*，Cotta 1858，Ⅲ，p. 148)。

但是这个秘密按其本性来说，已经超出了自然科学的认知手段。

[最后，我要再次强调，我的本意并不是就自然科学写一本哲学思想史。那需要广泛得多的历史研究，如像拉斯韦兹(Lasswitz)在他的《原子论史》(*Geschichte der Atomistik*)，或卡西勒在《近代哲学与科学中的认识论问题》(*Das Erkenntnisproblem in der Philosophie und Wissenschaft der neueren Zeit*)所做的那样。我主要的兴趣在于数学研究，对上面所说的那种研究我既没有时间，也没有足够的热情。

我越是浏览哲学文献，就越是深刻地感到，在那些严肃地以一种自由独立的思想——而不只是按传统模式——来处理问题的人中间，在关于自然哲学中最本质的见解上，其实一般都是一致的。至少在这类见解的发展上，有共同的方向。是用胡塞尔的现象学语言还是如亥姆霍兹那样从“生理学上”讨论空间问题，并不那么重要，重要的是由于他们有着本质上的一致性，他们都采取了力求使用公式的“哲学立场”。

精确的自然科学，如果不说是最重要的文化，比之其他文化，也是最具有特色的一种。哲学的任务是理解这种特色的独特与卓越。这里所讲的一些观点，都在本书讲数学的第一部分中有坚实的基础，可以看作是向着这个目标的努力——虽然我不得不承认，这个任务在目前还远未完成。]

参考文献

D. HUME, *Treatise on Human Nature*.

J. LOCKE, *An Enquiry concerning Human Understanding*.

I. KANT, *Kritik der Urteilskraft*.

E. KOENIG, *Die Entwicklung des Kausalproblems*, 1888—1890.

E. WENTSCHER, *Geschichte des Kausalproblems in der neueren Philosophie*, 1921.

J. S. MILL, *A System of Logic, Ratiocinative and Inductive*, many editions.

H. POINCARÉ, *La valeur de la science*, Paris, 1905. (See also H. WEBER'S remarks on causality in the German edition, Leipzig, 1910.)

E. MACH, *Analyse der Empfindungen*, third edition, 1902, Chap. V.

F. EXNER, *Vorlesungen über die physikalischen Grundlagen der Naturwissenschaften*, 1919.

P. FRANK, *Le principe de causalité et ses limites*, Paris, 1937.

M. PLANCK, *Wege zur physikalischen Erkenntnis, Reden und Vorträge*, second edition, Leipzig 1934.

N. BOHR, *Atomic Theory and the Description of Nature*, Cambridge, 1934.

——Kausalität und Komplementarität, *Erkenntnis* 14(1937), p. 293.

L. ROSENFELD, L'évolution de l'idée de causalité, *Mem. Soc. Roy. Sci. Lièges*, 4e série, VI(1942), pp. 59—86.

E. CASSIRER, *Determinismus und Indeterminismus in der modernen Physik*, Göteborg, 1936.

N. K. BRAHMA, *Causality and Science*, London, 1939.

A. D'ABRO, *The Decline of Mechanism*, New York, 1939.

F. GONSETH, *Déterminisme et libre arbitre*, Neuchâtel, 1944.

P. S. DE LAPLACE, *Théorie analytique des probabilités*, third edition, Paris, 1820.

G. BOOLE, *An Investigation of the Laws of Thought*, London, 1854.

J. VON KRIES, *Die Prinzipien der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Tübingen, 1886.

J. VENN, *The Logic of Chances*, third edition, London, 1888.

M. VON SMOLUCHOWSKI, Über den Begriff des Zufalls und den Ursprung der Wahrscheinlichkeitsgesetze in der Physik, *Die Naturwissenschaften*, 6(1918), pp. 253 ff.

P. and T. EHRENFEST, Begriffliche Grundlagen der statistischen Auffassung in der Mechanik, *Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften*, IV(Mechanik), Art. 32.

J. M. KEYNES, *A Treatise on Probability*, London, 1929.

R. VON MISES, *Probability, Statistics and Truth*, New York, 1939(German edition, Vienna, 1928).

E. NAGEL, Principles of the Theory of Probability, *Internat. Encycl. Unif. Sci.*, I, No. 6, Chicago, 1939.

A Symposium on Probability, I, II, III, in: *Philosophy and Phenomenological Research*, 5, pp. 449—532; 6, pp. 11—86, 590—622(1945).

D'ARCY W. THOMPSON, *On Growth and Form*, Cambridge, 1917.

W. KÖHLER, *Die physischen Gestalten in Ruhe und im stationären Zustand*, Erlangen, Philosophische Akademie, 1924.

H. FRIEDMANN, *Die Welt der Formen, System eines morphologischen Idealismus*, Munich, 1930.

C. R. DARWIN, *The Origin of Species*, London, 1859.

H. DRIESCH, *Analytische Theorie der organischen Entwicklung*, Leipzig 1894.

——*Philosophie des Organischen*, Leipzig, 1909.

——Metaphysik der Natur, in *Handbuch der Philosophie*, edited by Baeumler and Schröter, Vol. 2, Munich, 1927.

J. SCHAXEL, *Grundzüge der Theorienbildung in der Biologie*, Jena, 1919.

P. JENSEN, *Organische Zweckmässigkeit, Entwicklung und Vererbung*, Jena, 1907; *Über den chemischen Unterschied zwischen dem lebendigen und toten Organismus*, Munich

and Wiesbaden, 1921.

J. VON UEXKÜLL, Die Rolle des Subjekts in der Biologie, *Naturwissenschaften*, 19 (1931), p. 385.

H. BERGSON, *L'Évolution créatrice*, Paris, many editions.

J. HUXLEY, *Evolution, The Modern Synthesis*, London, 1942.

C. H. WADDINGTON, *An Introduction to Modern Genetics*, London, 1939.

J. REINKE, *Das dynamische Weltbild*, Leipzig, 1926.

F. MEDICUS, *Die Freiheit des Willens und ihre Grenzen*, Tübingen, 1926.

E. CASSIRER, *Das Erkenntnisproblem in der Philosophie und Wissenschaft der neueren Zeit*, 3 Vols., Berlin, 1911—1920.

——*Philosophie der symbolischen Formen, Vol. 3, Phänomenologie der Erkenntnis*, Berlin, 1929.

B. BAVINK, *Ergebnisse und Probleme der Naturwissenschaften, Eine Einführung in die heutige Naturphilosophie*, eighth edition, Bern, 1945.

M. SCHLICK, Naturphilosophie, in M. DESSOIR, *Lehrbuch der Philosophie*, Vol. 2, Berlin, 1925;

——*Gesammelte Aufsätze*, Vienna, 1938.

M. HARTMANN, *Philosophie der Naturwissenschaften*, Berlin, 1937.

A. N. WHITEHEAD, *An Enquiry concerning the Principles of Natural Knowledge*, Cambridge, 1919.

M. R. COHEN, *Reason and Nature, An Essay on the Meaning of Scientific Method*, New York, 1931.

A. S. EDDINGTON, *The Philosophy of Physical Science*, Cambridge and New York, 1939.

D. DE SANTILLANA and E. ZILSEL, The Development of Rationalism and Empiricism, in *Internat. Encycl. Unif. Sci.*, II, No. 8, Chicago, 1941.

附　录

“你还没有进入思想的领地！”

但是我看见了它的海岸。

虽然不能占领岛屿，

却可以停泊在岸边。

——歌　德

附录 A　数学的结构

1．希尔伯特宣称，他的“证明论”的目的在于“一劳永逸地解决所有问题”。在 1926 年，有理由作乐观的期待，再经过为数不多的几年持续的努力，他和他的合作者将成功地建立起我们经典数学的形式等价物的相容性(consistency)。开始的几步曾经是令人鼓舞，感到有希望的。但是到了 1931 年，哥德尔(Kurt Gödel)的发现却砸碎了光明的希望：哥德尔对整个计划提出了质疑。从那以后，主要盛行的态度是放弃这个计划。数学的终极基础和终极意义，仍是一个未决的问题；我们不知道可以沿哪个方向找到答案，甚至不知道是否能期待得到一个客观的答案。“数学化”可能正是人的一种创造的活动，如同音乐一样，其产物不仅在形式上，而且在实质上都要受历史的决定之制约，所以不可能有完全客观的理性化。希尔伯特大胆的计划之没有结果，不能不影响哲学的解释。然而我发觉，我对于 1926 年写的这本书中所说的，没有什么要改变的，虽然现在我在用词时可能会更小心一些。

哥德尔证明了，在希尔伯特的形式体系中(其实在任一个不太狭窄的形式系统中也一样)，会发生两件奇怪的事：(1)可以举出性质上比较初等的算术命题 Φ，它显然为真，但不可能在此形式体系内演绎出来。(2)令 Ω 为以下命题："M 为相容的"，则这个命题 Ω 在 M 内是不可演绎的。准确些说，在形式体系 M 内演绎出 Φ 或 Ω，必直接导致 M 中的一个矛盾，即在 M 中演绎出公式～(1 = 1)。从第一个事实中可以得知，一方面是人的洞察力可以达到的命题之域，另一方面是可用演绎而达到的命题之域，两者并不重合，任一个都不能含于另一个之中。符号数学在某些方向上可以远远超越可用证据加以论证的领域，而在另一些方向上，其成就又少于可用证据加以论证的领域。虽然在建立形式体系时，有一个指导原则，即一定存在一个超验的且完全的世界，然而这个形式体系的特征是：在任意固定的阶段，它必具有不完全性(incompleteness)，即总有这样的问题，甚至是简单算术性质的问题，可以在此形式体系中表述，并由洞察力来判定其是否为真，但是不能在此体系内用演绎法来判定。在自然界中取出具体的一部分，让它作为孤立的现象而存在，而由于其不可穷尽性和不完全性，使得我们无法对它进行分析，对此我们并不感到吃惊；我们已经看到，正是为了得到完全性，物理学才把已经给予的东西，投射到可能的东西的背景上。但是，完全由心灵构造出来的东西如整数序列，它对于构造性的心灵是最简单、最精致的东西，而从公理化的角度来看，居然也有晦涩、缺陷的一面，的确令人吃惊。

哥德尔的第二定理(Gödel's second theorem)更令人不安，因为它把下面这种两者择一的情况放在我们面前：要么，在用以确立此形式体系的相容性的推理中，必含有某些在此体系中没有形式对应物的论证，即我们未能把数学归纳的过程完全形式化；要么，必须完全放弃

对相容性作严格“有穷”的证明这种想法。作为一个经验，数学家用于实际研究的数学归纳法，不论取何形式，总是在希尔伯特的形式体系的框架下被用作一个公理法则的。于是相容性的有穷证明的希望就已变得暗淡了。根岑(G. Gentzen)关于算术的相容性的具有独创性的证明(1936)，并非希尔伯特意义下的有穷证明；他必须以接受关于明显性的一个实质上较低的标准为代价，他不得不接受某种可以贯穿到康托尔的“第二类序数”中的归纳推理也是明显的。于是，什么是直觉上可以信赖的东西，其界限又一次变得模糊了。在这种皮洛士式的胜利*之后，再也没有谁鼓足勇气，拿起武器走进分析的战场了；而希尔伯特之思想最终的考验正是在这里。

哥德尔的构造(Gödel's construction)与逻辑悖论密切相关，而后者在古代哲学家中引起了那么多讨论![1]而在很长一段时期内不为人注意之后，近50年来又在我们关于数学基础的思想之发展中骚动起来。由于这个原因，因为它对数学的结构，从而对所有理论科学的结构，提供了深刻的洞察，我打算尽可能精确地描述一下哥德尔的发现而又不过于流于技巧。

2. 在第10节中概述了的符号系统将作以下的修正(以下称为符号系统H)。按上面引述的方式，我们要区分事实公式与数值公式。规则

(1) $$(b = c) \rightarrow (A(b) \rightarrow A(c))$$

仅用于事实公式 A；而对数值公式 A，则要代之以

$$(b = c) \rightarrow (A(b) = A(c))。$$

---

* 公元前2世纪希腊国王皮洛士(Pyrrhus)以极大的牺牲打败了罗马军队而胜利，所以皮洛士式的胜利即指得不偿失的胜利。——译者

闭的数值公式与事实公式，将分别称为形式数与形式命题。因为我们将只限于算术，我们将放弃 74 页上的符号 $\in$ 与超穷集合论规则（Ⅰ）不用。因为这时我们的变项只代表“任意自然数”（而不代表这些数的集合之类），算子 N 以及与之相关的两条规则

$$N1;\quad Nb \rightarrow N(\sigma b),$$

也要丢掉。我们规定自然数序列从 0 而不是从 1 开始，并用 $'$ 来代替符号 σ。从一开始起，我们就要添加上包含数的加法与乘法的归纳定义的公理。因此，特定的算术规则（其中 b 和 c 可以是任意的形式数）现为

$$('b = 'c) \rightarrow (b = c).$$

$$\sim ('b = 0).$$

$$b + 0 = b. \quad b + 'c = '(b + c).$$

$$b \cdot 0 = 0. \quad b \cdot 'c = (b \cdot c) + b.$$

数学归纳法原理现以下面的形式引入：

$$\Pi_x (A(x) \rightarrow A('x)) \rightarrow (A(0) \rightarrow A(b))$$

这里 $A(x)$ 可以是任意的 x-谓词（＝除了可能含 x 以外，不再含任意自由变项的事实公式），而 b 是任意形式数。

公理

(2) $$A(b) \rightarrow \Sigma_x A(x),\quad \Sigma_x A(x) \rightarrow A(\varepsilon_x A(x))$$

当然也是采纳了的，x 是出现在此符号体系中的任意变项。

在正文中，初等命题演算的公理法则并未显明地列举。我们要提到下面 3 个公理法则，因为以后要用：

1. $(b \rightarrow c) \rightarrow ((a \rightarrow b) \rightarrow (a \rightarrow c))$.

2. $(a \to \sim a) \to \sim a$.

3. $(a \to b) \to (\sim b \to \sim a)$.

(a, b, c 是任意形式命题)。演绎如同下棋，如果在棋局中，出现了两个 $a \to b$ 与 $b \to c$ 这样类型的公式，则可以按法则 1 与三段论法，由它们走到 $a \to c$。按类似的方式，可以由 $a \to \sim a$ 走到 $\sim a$，而由蕴含式 $a \to b$ 走到“反”蕴含 $\sim b \to \sim a$。

我们在元数学推理中要用到(真实的)数

$$0,\ {}'0,\ {}''0,\ {}'''0,\ \cdots \tag{3}$$

(有时按习惯的简写法称它们为 0, 1, 2, 3, …)，还要用到一种非公理化的数论，其基础是：可以从任一已知数 ν 走到下一个数 ${}'\nu$。因此，我们用递归定义来引入函数 $\mathfrak{f}(\nu)$ 和性质 $\mathfrak{F}(\nu)$，使得我们可以对 $\nu = 0, 1, 2, 3, \cdots$ 逐个地计算 $\mathfrak{f}(\nu)$ 之值，或者同样对 $\nu = 0, 1, 2, 3, \cdots$ 判定性质 $\mathfrak{F}(\nu)$ 是否成立。例如我们可以用递归定义

$$\mathfrak{f}(0) = 0,\ \mathfrak{f}({}'\nu) = {}''\mathfrak{f}(\nu),$$

来引入函数 $\mathfrak{f}$，从这个定义可以算出

$$\mathfrak{f}(0) = 0,\ \mathfrak{f}(1) = 2,\ \mathfrak{f}(2) = 4,\ \mathfrak{f}(3) = 6,\ \cdots$$

或者我们也可以用世界上一切军队都使用的“成双计算”这个程序，来定义偶或奇这两个互补的性质 $\mathfrak{F}$ 和 $\overline{\mathfrak{F}}$ 如下：“0 是偶数；一个偶的 ν 后面必是一个奇的 ${}'\nu$，一个奇的 ν 后面必是一个偶的 ${}'\nu$。”在这种互补的对 $\mathfrak{F}$ 与 $\overline{\mathfrak{F}}$ 中会出现递归性质。

必须把直觉定义的函数 $\mathfrak{f}(\nu)$ 与数值公式 $x + x$ 区别开来，后者暂时也可用简写 $f(x)$ 来表示。如果 μ 是 $\mathfrak{f}(\nu)$ 对一个给定的数 ν 的值，则在此形式体系中可以演绎出公式 $f(\nu) = \mu$；例如，因为

$\mathfrak{f}(2) = 4$，所以可以演绎出 $''0 + ''0 = ''''0$。为了一般地证明这一点，需要演绎出公式 $\Pi_x((\prime x + \prime x) = ''(x + x))$，此式可以简记为 $\Pi_x(f(\prime x) = ''f(x))$，由它不但可以对一个真实的数 a 得出公式 $f(\prime a) = ''f(a)$，而且可以对任意的形式数 a 得出此式。按此方式，x-谓词 $F(x) \equiv \Sigma_y(x = (y + y))$ 乃是“为偶”这个性质 $\mathfrak{F}$ 的形式等价物。事实上，若 $\mathfrak{F}(\nu)$ 对一已知数 ν 成立（即 ν 为偶），则可以演绎出公式 $F(\nu)$；但若 $\overline{\mathfrak{F}}(\nu)$ 成立（即 ν 为奇），则可演绎出公式 $\sim F(\nu)$。我们的形式体系必须足够广阔，使得凡我们的构造用得着的递归定义的函数与关系，均用数值公式或事实公式来表示。附带说一下，任意递归性质 $\mathfrak{F}(\nu)$ 都可以用一个方程 $\mathfrak{f}(\nu) = 0$ 来表示，这里 $\mathfrak{f}$ 是一个递归定义函数。

我们现在就可以更确切地描述哥德尔第一定理（Gödel's first theorem）是什么了。他归纳地构造了一个确定的性质 $\mathfrak{F}$，并使之有一个 x-谓词 F 作为形式对应物，使得没有一个真实的数 ν 具有性质 $\mathfrak{F}$，然而公式 $\sim \Sigma_x F(x)$（它把命题“没有一个数具有性质 $\mathfrak{F}$”符号化了）却不能在此形式体系中演绎出来。既然 $\overline{\mathfrak{F}}(\nu)$ 成立，$\sim F(\nu)$ 就是可以演绎出来的。用 a 来简记 $\varepsilon_x F(x)$。考虑 $\Sigma_x F(x) \rightarrow F(a)$ 或者 $\sim F(a) \rightarrow \sim \Sigma_x F(x)$，我们就面临着以下情况：只要 ν 是一个真实的数，即(3)中的任一数，$\sim F(\nu)$ 就可以演绎出来；然而对于某个确定的明显地构造出来的形式数 a，$\sim F(a)$ 却演绎不出来。

3．“悖论性的东西”（paradoxy）是以康托尔证明连续统不可数时所用的“对角线过程”形式进入哥德尔构造的。把区间(0，1)中的实数写成二进分数，康托尔就用 0 与 1 所成的无穷序列 R 来代替此数：

$$R = r_1 r_2 \cdots r_\nu \cdots; \qquad (r_\nu = 0 \text{ 或 } 1)。$$

假设所有这些“二进分数”可以排成一个序列 $R^{(1)}$，$R^{(2)}$，…，

$$R^{(\mu)} = r_1^{(\mu)} r_2^{(\mu)} r_3^{(\mu)} \cdots \qquad (\mu = 1, 2, 3, \cdots)$$

将会导致矛盾。事实上，按此次序，一个 $R^{(\mu)}$ 下面再写另一个，然后沿着对角线，见到 0 就写成 1，见到 1 就写成 0；你会得到一个序列 $Q = q_1 q_2 \cdots$，它与 $R^{(1)}$ 第一位不同，所以 $q_1 \neq r_1^{(1)}$，与 $R^{(2)}$ 第二位不同，所以 $q_2 \neq r_2^{(2)}$，依此类推，所以 Q 与这些 R 的任一个都不相同。这个矛盾证明了，把所有的二进分数 R 排成序列是不可能的。

把 0，1 解释为两个真值“真”与“假”，一个像 $R = r_1 r_2 \cdots$ 这样的序列就变成等价于一个谓词 $R(x)$：当 $x = \nu$ 时，若 $r_\nu = 0$ 就说它对数 $x = \nu$ 成立；若 $r_\nu = 1$，就说它对 $x = \nu$ 不成立。整个由 0，1 组成的矩阵 $r_\nu^{(u)}$，等价于一个二元关系 $S(y, x)$，如果当 $x = \nu$，$y = \mu$ 时 $r_\nu^{(u)} = 0$ 就说此时有这个关系，若 $r_\nu^{(u)} = 1$ 就说此时没有这个关系。谓词 $R^{(\mu)}(x)$ 就相当于 $S(\mu, x)$。康托尔的构造就等于作出了一个谓词 $\sim S(x, x)$。如果它与某一个谓词 $R^{(\mu)}(x)$ 相同，例如设 $R^{(\gamma)}(x) = S(\gamma, x)$，则当 $\sim S(x, x)$ 成立时，有 $S(\gamma, x)$ 成立，反之亦然。对于 $x = \gamma$，这就导致一个矛盾：$\sim S(\gamma, \gamma)$ 蕴含了 $S(\gamma, \gamma)$，反之亦然。这当然不是一个悖论，只不过是二进分数（或自然数的谓词）的连续统之不可数性的一个间接证明。

然而，如果有谁认为任何实数均可用一个（写出的或印出的）英文文本来定义的话，它就会变成一个悖论，这首先是由理夏（Richard）在 1905 年指出的。一个文本就是一串基本符号所成的序列，而这类基本符号不会多于 50 个，具体说就是字母（我们不用大写字母！），有

0 到 9 的数码，标点符号，包括长为一个全身的空位，还有括弧。把组成一个文本的符号总数称为此文本的长度。因为长度一定的符号序列只有有限个，我们就可以把所有文本一一列序排出：先排长度为 1 的文本，接着排长度为 2 的文本，依此类推。这正是把“卢尔艺术”（Lullian art）* 基础的方法机械化，也正是斯威夫特在《格列佛游记》（*Gulliver's Travels*）一书中讲的访问勒普泰岛时所见的拉格多大科学院中的“思辨学习计划者”所用的方法。这样，凡可定义的东西，特别是每个二进分数，都可以在按数目 1，2，3，…排列的档案中找到自己的位置。

然而，如果用这种形式，则不能数学地讨论这个悖论，因为它要用到语句在英语中的“意义”，而所谓“意义”当然是有些含混的。但是还有比语言更好的给定义的方法。在本书一开始的第 1 节中，我们就讲到命题和命题函数的逻辑结构，而且看到数的性质必可反复组合地应用 6—7 页中所讲的关于关系之组合的少数几个原理来定义。后来我们又得知，如果我们坚持命题必须有可以直觉检验的意义，就一定要放弃使用量词 Σ_x 和 Π_x；而必须加上一个用归纳法作定义的原理。然而，在一个符号化的形式体系中，不会提出意义和真假问题，我们甚至可以把如希尔伯特的 ε_x 那样的东西也包括进来。但是不论我们是用递归定义的有系统的过程（Δ 系统）来描述 x-谓词，还是用一个形式体系 M 来描述 x-谓词，总可以把可构造的 x-谓词按次序排列起来（于是，可以说某个 x-谓词具有性质 No. 17，或者性质 No. 919 等等）。然后我们作出一个二元的关系 $S(z, x)$，

---

* 卢尔（Lull，1232？—1315），西班牙神学家。据说他是第一个提出用机器来证明逻辑命题的人。他把自己的装置称为 *Ars Magna*（大艺术），所以有卢尔艺术之说。——译者

“x 有性质 No. z”。如果以下的两条均成立，则理夏悖论(Richard's paradox)将是不可避免的：(i)系统中的命题都是可判定的(decidable)；(ii)关系 S 本身是可构造的(constructible)。对于 Δ，假设(i)总是满足的，于是我们得出结论：S 是不可构造的。在我写的《论连续统》(1918)一书中，我在本质上就是这样来讨论与解决理夏悖论的。然而，哥德尔发现在足够宽广的形式体系 M 中，S 是可构造的，所以他得出结论：M 中并非所有的公式都是可判定的。

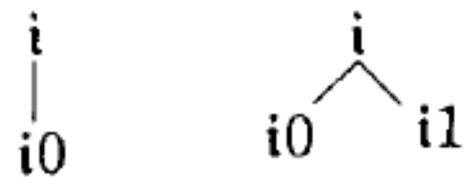
4. 现在让我们从启发式的论证转到确切地描述哥德尔的程序(Gödel's procedure)。为了把所有可能的公式都排列成序，我们必须把形式体系 H 中所有用到的符号都用数标识。下表中的每个符号下方就是标识它的数 κ。对于数量无限增加的变项，也都留有充分的空间。(形式体系的这个根本性特点，本可使我们不管怎样都放弃以字母作为变项的符号，而代之以字母再加上作为下标的数，如 x_7。)例如46，51，…都留给以后需要扩充形式体系时可能引入的常项和算子。标了数 2 和 7 的最前面的两个变项 x 和 y，将起到特殊的作用。

0，～，→，&，∨，=，′，+，·［常项和算子］

1，6，11，16，21，26，31，36，41［形如 $5n+1$ 的数］

x，y，z，u，…［变项］ 2，7，12，17，…［数 $5n+2$］	Σ_x，Σ_y，Σ_z，Σ_u，… 3，8，13，18，…［$5n+3$］
Π_x，Π_y，Π_z，Π_u，… 4，9，14，19，…［$5n+4$］	ε_x，ε_y，ε_z，ε_u，… 5，10，15，20，…［$5n+5$］

一个公式就是一个符号之“树”，其中每一个数后面直接连着最多两个“后代”。仿照 67 页上的柏拉图式的图式，我们可以用“数码”i(即以 1 打头的由 0 和 1 组成的有限序列)来标识树上的各个位置。最头上的一定是 1，然后再按下面的规则对整个树做上标志。



（分别用于一个或两个后代）。

按柏拉图方式，我们把“数码”

$$\mathrm{i} = r_1 \cdots r_h \qquad (r_1 = 1;\ r_2,\ \cdots,\ r_h = 0 \text{ 或 } 1)$$

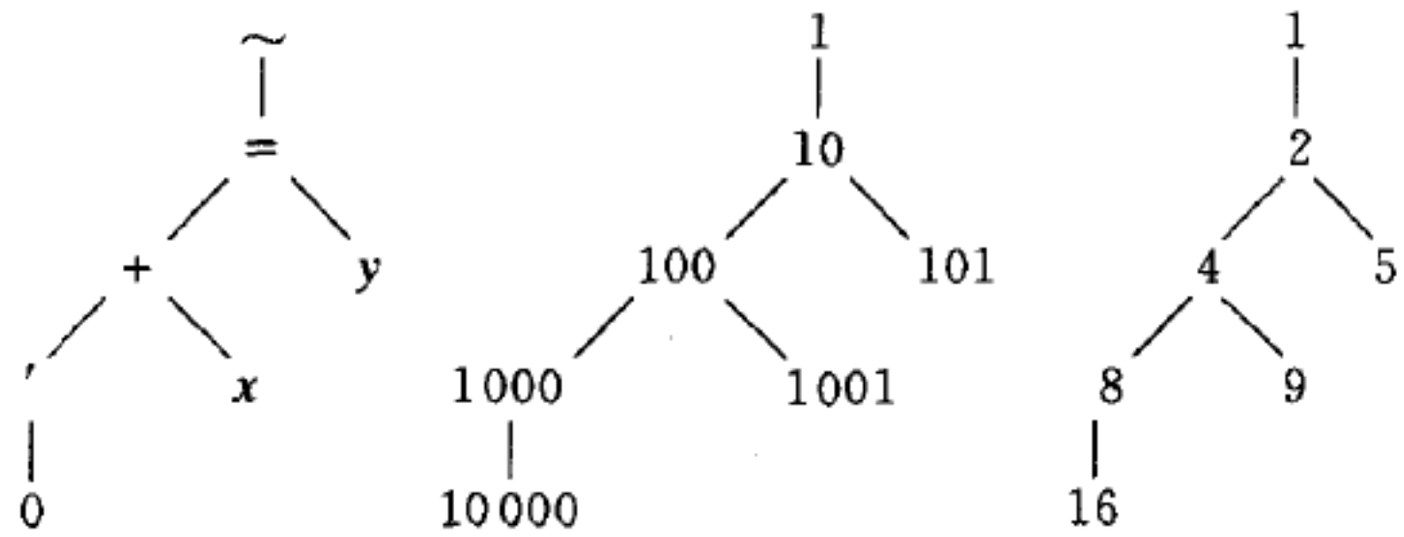
解释为数的二进表示

$$i = r_1 2^{h-1} + r_2 2^{h-2} + \cdots + r_h。$$

于是，描述一个公式就要把它的树上标号为 i 的地方写上占据此位的符号的数码标志 κ_i。现以下面的公式为例：

(4) $\qquad \sim((' 0 + x) = y) \qquad$（或简写为 $1 + x \neq y$）。

先在最左方画出此树的骨架，然后在其右方标上数码 i，最后再把这个 i 换成通常的十进位数 i。在我们的表上找出 0，～，=，′，+，



x，y 的标号 κ，我们就对公式(4)找到一串 κ，而可以完全确定(4)：

$$\kappa_1 = 6,\quad \kappa_2 = 26,\quad \kappa_4 = 36,\quad \kappa_5 = 7,$$

$$\kappa_8 = 31,\quad \kappa_9 = 2,\quad \kappa_{16} = 1。$$

现在令自然排序的素数为 π_1，π_2，…即

$$\pi_1 = 2,\quad \pi_2 = 3,\quad \pi_3 = 5,\quad \pi_4 = 7,\ \cdots。$$

（按欧几里得定理，素数序列是无限的。）于是，对于位置 i 处放了标

号为 κ_i 的符号后所得的公式树，就可赋以一个数(称为此公式的特征)

(5) $$\nu = \Pi_i \pi_i^{\kappa_i},$$

这里的乘积是对其位置上有符号 i 的树来进行的。例如(4)式的特征就是

$$\pi_1^6 \pi_2^{26} \pi_4^{36} \pi_5^7 \pi_8^{31} \pi_9^2 \pi_{16}^1 \text{ 或 } 2^6 \cdot 3^{26} \cdot 7^{36} \cdot 11^7 \cdot 19^{31} \cdot 23^2 \cdot 53$$

(它总还是一个数!)。因为整数的素因子分解是唯一的，所以不同的公式就有不同的特征，而且对任意给定数 ν 我们都可以唯一地判定：(i)它是否相应于一个公式；(ii)若能判定，则此公式是什么。

每一个演绎程序，如果按由结论到假设的方向来读，其模式 P 也是一个(闭的事实)公式之树：这树上的每个元 c 或者没有直接的后代，这时它就是一个公理；或者有两个后代，一为小一为大，而若小的是 b，则大的是 $b \to c$。最顶上的一个公式就是按模式演绎出来的公式。既已用一个数 ν 来刻画每一个可以设想出来的公式，再应用与刻画符号树的构成法(5)同样的原理，就可以用乘积 $\Pi_i \pi_i^{\nu_i}$ 决定一个数 μ 来刻画这一演绎程序 P，这里 ν_i 就是占据着此树的位置 i 处的公式的特征数，而乘积是对此树上所有的位置 i 来取的。

这种把形式体系算术化的方法虽然简单，却引到具有相当大的哲学兴趣的一种洞见——即自然数及其算术构成了一个如此宽广的域，使得任何一种理论(一旦完全形式化以后)都可以映到其中。数有如此惊人的力量，柏拉图和毕达哥拉斯已经或多或少清楚地认识到了，斯威夫特则以之取笑，却被哥德尔用来对一个已给的数学形式体系作元数学的研究。

如果 ν 是一个明显地写成(3)式的一个数，而 μ 则是表示 x-谓词

$F(x)$的数，则我们用$\mathfrak{s}(\mu, \nu)$表示公式$F(\nu)$的数；然而若μ不是一个x-谓词，则令$\mathfrak{s}(\mu, \nu)=0$。只要x在F中是自由的，则公式$F(\nu)$显然是由公式$F(x)$中把x代换为ν而得。这样一个含两个任意数μ，ν的函数$\mathfrak{s}$可以归纳地定义。事实是，在形式体系H中我们可以构造一个含有两个自由变项x，z的数值公式$s(z, x)$，为$\mathfrak{s}$在前述意义下的形式对应物：即若μ，ν是两个真实的数，而且$\mathfrak{s}(\mu, \nu)$等于κ，则公式$s(\mu, \nu)=\kappa$是可演绎的。令$\mathfrak{t}$与$t(z, y)$对y-谓词有相似的意义：λ是任一给定的y-谓词$F(y)$之数，$\mathfrak{t}(\lambda, \nu)=\kappa$是$F(\nu)$之数，而等式$t(\lambda, \nu)=\kappa$在这些情况下是可演绎的。

如果μ，ν是任意两个数，我们可以判定ν是否为形式命题a的特征，而μ是否为一个从公式a开始的演绎模式P的特征。用$\mathfrak{D}(\mu, \nu)$表示两个任意数μ和ν的这个关系(读作μ号模式是ν号公式的演绎模式)，用$\overline{\mathfrak{D}}(\mu, \nu)$表示互补的关系。$\mathfrak{D}$与$\overline{\mathfrak{D}}$可以递归地定义。形式体系H允许用一个含有两个自由变项x，y的公式$D(y, x)$来表示$\mathfrak{D}$：当μ，ν是使$\mathfrak{D}(\mu, \nu)$成立的数，公式$D(\mu, \nu)$就是可演绎的；当$\overline{\mathfrak{D}}(\mu, \nu)$成立时，$\sim D(\mu, \nu)$就是可演绎的。

$s(z, x)$与$D(y, x)$这两个公式的构造较为细致一些，而且多少有些麻烦，但并不是一件特别难的事情。

康托尔—理夏悖论依赖于算子S，它表示“作代换”。如果我们能找到一个含有两个自由变项x和z的公式$S(z, x)$，使得对任意的形式数a和任意的x-谓词$F(x)$，以下公式

(6) $$F(a) \rightarrow S(\varphi, a) \qquad S(\varphi, a) \rightarrow F(a)$$

都是可演绎的，则此系统肯定有矛盾，这里 φ 表示公式 $F(x)$ 的数。我们这里作出的 s 肯定不能作 S 之用，原因很简单：$s(\mu, \nu)$ 是一个数，而不是一个事实公式。但是怎样继续前进也很显然：$S(\mu, \nu)$ 应该代表以下命题：数为 $s(\mu, \nu)$ 的公式为真。若把“真”解释为可演绎性，就会得到在我们的形式体系中 S 之定义为

$$S(z, x) \equiv \Sigma_y D(y, s(z, x))。$$

进一步要探讨之事就是要确定，(6)这样的公式在何种程度上可以演绎为这个 S。

以上是一个插曲，下面我们再回到系统的讲解，作 x-谓词 $\sim S(x, x)$，即

$$\sim \Sigma_y D(y, s(x\,x))$$

并且算出它的特征 γ（一个大得出奇的数!）。在这个特征为 γ 的公式中以 γ 代替 x，于是得到一个公式

$$(7) \qquad \sim \Sigma_y D(y, s(\gamma\,\gamma))$$

设它的数是 $s(\gamma, \gamma) = \beta$。我们当然可以说(7)这个公式就是宣称它自己不真。

这里就想到了经典的“撒谎者”(pseudomenos)悖论，[2]它的最枯燥的形式是：“此命题(即我做的这个命题)为假。”我们的形式体系和语言一样，允许用一句话(这里是一个公式)来宣称一句话(一个公式)为真；说真的，对任意的闭公式 a，都可以作 $\Sigma_y D(y, a)$。除此以外，“撒谎者悖论”要依靠指示词如：“这个”、“我”、“现在”，由于有了它们，句子的意义就爆炸了[用韦内特斯(Paulus Venetus)的话说，就是有了一个“cassatio”]。这里，悖论的特性是由康托尔的对角线程序带来的。但是不会发生爆炸：γ 和 β 是确

定的数，它们的计算可以完全清楚而毫无歧义。

$[F(y) \equiv D(y, s(\gamma\gamma))$ 是 $\mathfrak{F}(\mu) = \mathfrak{D}(\mu, \beta)$ 的形式对应物。事实上，若 μ 是一个任意地使 $\mathfrak{D}(\mu, \beta)$ 成立的数，则 $D(\mu, \beta)$ 是可演绎的。此外 $\beta = s(\gamma\gamma)$ 是可演绎的。所以下面使用公理法则(1)如

$$(\beta = s(\gamma\gamma)) \rightarrow \{D(\mu, \beta) \rightarrow D(\mu, s(\gamma\gamma))\},$$

就给出了公式 $D(\mu, s(\gamma\gamma))$ 的三段论的三段证明中的两步。由类似的理由，如果 $\overline{\mathfrak{D}}(\mu, \beta)$ 成立，则 $\sim D(\mu, s(\gamma\gamma))$ 是可演绎的。正如前面所说，我们要证明两件事：(i)公式 $\sim \Sigma_y F(y)$ 是不可演绎的；(ii)但若 μ 是任一定数，则 $\overline{\mathfrak{F}}(\mu)$ 成立。证明依靠一个假设和一件事实：(A)形式体系是相容的；(B)此形式体系足够宽阔，使得能对函数 $s(\mu, \nu)$ 和关系 $\mathfrak{D}(\mu, \nu)$ 给出其形式对应物 s 与 D。

(i)的证明是反证法。设我们已演绎出了特征数为 β 的公式(7)，我们就会得到一个数 μ 使 $\mathfrak{D}(\mu, \beta)$ 成立。所以 $D(\mu, \beta)$ 和 $D(\mu, s(\gamma\gamma))$ 都是可演绎的。但是按一般的公理法则 $A(b) \rightarrow \Sigma_y A(y)$，我们就有

$$D(\mu, s(\gamma\gamma)) \rightarrow \Sigma_y D(y, s(\gamma\gamma))。$$

因此，我们演绎出了公式(7)以及公式 $\Sigma_y D(y, s(\gamma\gamma))$，这是一个真实的矛盾。

(ii)若 μ 是任一数，则 $\mathfrak{D}(\mu, \beta)$ 不会成立。因为若它成立，我们就会有一个特征数为 β 的公式(7)的真实的演绎——这与(i)之所证矛盾。因此，$\overline{\mathfrak{D}}(\mu, \beta)$ 成立。

这样，哥德尔第一定理得证。第二定理可以由它得到，只要注意到，证明第一定理的推理也可以变为一个形式演绎。这个定理准确的表述要用到一个简写“neg”，它是～(否定)的算术化。如果 ν 是一个事实公式 a 的数，则～a 也有一个数，记作 neg (ν)；如果 ν 不是一个事实公式的数，则我们令 neg (ν) = 0。这样定义的算术函数 neg 有一个形式对应物，即 neg。现在，相容性就可以用下面的含一任意形式数 b 的公式 $\Omega(b)$来表示：

$$\Sigma_y D(y,\ b) \rightarrow \sim \Sigma_y D(y,\ \mathrm{neg}\, b)。$$

我们这时就能得到：如果这个形式体系确为相容的，即不可能演绎出～(0 = 0)，则我们就能指出相容性公式 $\Omega(b)$的确定的例子，而它是不能演绎出来的。

从我们的讨论中就可以清楚看出，这个确定的例子应该是什么。令 φ 为 y-谓词 $D(y,\ s(\gamma\gamma))$ 之数，而用 a 简记 $\varepsilon_y D(y,\ s(\gamma\gamma))$，然后我们就取公式 $t(\varphi,\ a)$ 为 b。这里不能详述论证的各步。它可以归结为描述把相容性公式 $\Omega(b)$这个特定例子，用(假想的)演绎化为“演绎出～(0 = 0)”，即真正的不相容性。]

5. 哥德尔既已使得以证明相容性来支持一个足够宽阔的能够包容经典数学的形式体系成为毫无希望之事，则在希尔伯特之前发展起来，没有那么大的雄心的公理系统又重新引起了人们的兴趣。在这里，逻辑名词“非”(～)，“如果……则”(→)，“存在”(Σ_x)等等仍按其意义来理解，演绎则按我们在几何与分析中所依靠的那种超验的逻辑来进行，包括对此公理系统中的对象自由地使用“存在”与“所有”。如果使用符号逻辑体系，那也只是为了简便起见。此

外，为了仿照戴德金和弗雷格把算术建立在集合论基础上那样，我们也不引入算术公理。全部的兴趣都集中在基本的集合论关系 $x \in y$，即“x 是集合 y 的一个元素”。以下的假定：对于任一个适当定义的性质 $F(x)$，都相应有一个集合 φ，使得当且仅当 x 具有性质 F 时，$x \in \varphi$，即

(8) $F(x) \rightarrow (x \in \varphi)$，$(x \in \varphi) \rightarrow F(x)$ 对所有 x 成立，

会导致一个形式矛盾(参见 74 页)。实际上，如果我们写 $S(y, x)$ 而不写 $x \in y$，则公式(8)就与(6)一样了，只不过有这样一个事实：现在集合 φ 并非真正的数，或者不可用一个真正的数来表示。我们全都熟悉用以下的构造方法会产生矛盾：取 $\sim(x \in x)$ 为 $F(x)$，并用 φ 来代替 x。这就是罗素悖论(Russell's paradox)：“一切不是自身的元素之事物之集合。”

所以对于将性质转化为集合，必须加一些限制。这个限制要足够严格，要能排除罗素悖论，但是又为数学留下尽可能宽的活动余地。这种态度坦率说是实用主义的；你治好了可见的症状，但没有确诊深层的疾病并加以治疗。策梅洛(Zermelo)系统(1908)就是这类公理化方法最初的例子，后来又由弗伦克尔(Fraenkel)、冯·诺伊曼、贝尔奈斯等人加以改进；数论、古典分析乃至康托尔的一般集合论就是以它为基础的。策梅洛的公理系统只处理一个范畴，其对象是元素或集合，一个基本关系是 $x \in y$。基本思想如下：不是用性质来作为集合的定义，而只是利用它们从一个已知集合中分出一个子集合。由此就需要他的选择公理：“给出一个适当定义的性质 B 以及一个元素 a，必有一元素 b 存在，使得 $x \in b$ 当且仅当 x 是 a 的一个元素且具有性质 B。”

上述选择公理中的“适当定义的性质”这个概念多少有些模糊。但是我们知道，可以通过利用逐次地把基本的构造程序组合起来使用这种方式来构建一个性质，从而使得这个概念精确起来。我们不说 x 具有性质 A，而说 x 是类(class) A 的一员：$x \in A$。我们这样把元素或集合，与类区别开来，并用两个未定义的对象之范畴，元素和类，来陈述公理。既然我们假设两个元素 a，b，当且仅当 $x \in a$ 必蕴含 $x \in b$ 以及其逆均成立时方为相同，而因为每个元素 a 都与满足条件 $x \in a$ 的元素之类 A 相联，我们就有理由把 a 与这一个类 A 等同起来。所以，每个元素就是一个类，而公理处理的是一个未定义的基本关系 $x \in Y$，即“元素 x 是类 Y 的一员”，这已吸收了策梅洛关于元素之间的关系 $x \in y$。构建性质的原理被代以相应的类的公理；例如，给出两个类 A 与 B，则存在一个类 C，使得当且仅当 $(x \in A) \vee (x \in B)$ 时，有 $x \in C$，反之亦然。

因为选择公理只会由一个已给的集合产生一个较小的集合，我们还需要找一辆车把我们带到相反的方向。所以还要加上两个公理，以保证存在某一给定集合之一切子集合的集合，以及对于已给定的集合之集合存在其并集。重要的在于必须仅限于集合 = 元素，而不用于类。

在引入了类以后，这些公理就如几何学的公理一样，具有了自我保持(self-sustaining)的特性；诸如“任意适当定义的性质”之类的一般概念就不会再从外界渗入公理系统之内了。在哥德尔的专著《连续统假设的相容性》(*Consistency of the Continuum Hypothesis*)的开头几页就可以找到这个系统(以下称为 Z 系统)的全部公理的列表。有些类因为太“大”，所以在此被排除，而不能进入体面的集合之俱乐部，由此也就防止了二律背反的灾难。甚至康托尔本人也在 19 世

纪与20世纪之交前转向这一方向，把“相容的类”（=集合）与不相容的类区别开来。

对于今天数学中实际在做的事，Z系统似乎是最充分的基础了。特别是，“存在性的”（existential）戴德金—弗雷格数论可以由它导出（策梅洛），而哥德尔还能证明（见上书）策梅洛的影响深远的选择公理的一个很尖锐的形式也与Z系统的其他公理相容（只要那些公理自己已经是相容的！）。

在罗素的型（type）的理论的深层，还有另一个不同的思想，体现在74页上的超穷集合论法则（Ⅰ）中。数的集合是一个比数本身更高的型的对象：在（Ⅰ）中，变项 x 限于在（自然）数域中，而对应于某性质 $A(x)$ 的集合 y 则不是一个数（至少未假设为一个数）。这样，罗素就允许型构成无穷系列：第一个型由最初始的对象即数组成，第二个由数的性质组成，第三个则由数的性质的性质组成，依此类推。这些型必须是彼此分开的，而关系 $x_i \in x_{i+1}$ 则把第 i 个型的任意元素 x_i 与下一个较高的第 $i+1$ 型的元素 x_{i+1} 联结起来。这样一来，引起罗素悖论的构造 $\sim(x \in x)$ 就被防止了。最好是把第2级、第3级……的关系与性质一起处理。n 个各自的型为 τ_1，τ_2，…，τ_n 的变项之关系 $R(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 则属于一个“更高的”型

$$\tau = \{\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_n\},$$

τ 由 τ_i 这些型唯一地决定。我们可以对 τ 画出一个家谱树，它以 τ_1，τ_2，…，τ_n 为直接的后代。这些 τ_i 又各有自己的后代，而这样每一个型都可以用一棵树来表示，其所有的枝条都终于基础的型（或基础的型之一，如果基础的型有好几种的话）。外尔的《数学与逻辑》（Mathematics and Logic）一文（*American Math. Monthly*，53，

1946，pp. 6—7)，就概述了以型的等级(hierarchy)为基础的公理系统 U。

既然，“存在”与“所有”可以毫不犹豫地用于各型的对象，我们就必须假设某个型的对象构成一个存在性的范畴，其意为，在那个范畴中是否存在一个具有某种性质 A 的元素，这个问题是有意义的，而且在那个范畴中要么存在这样一个元素，要么此范畴中的每个元素都具有互补的性质$\sim A$。初等几何就是这样一个域，其初始的元素(点，直线，平面)都认为是给定的，而且构成存在性的范畴，而这些初始元素间的性质与关系，则是由少数几个未定义的基本关系构造出来的。我们在第 4 节中对公理的描述心照不宣地假设了这种标准情况。然而，在直觉的数论中，关系和初始元素都是构造出来的而非给定的；而在关于自然界的现象学中，我们不仅要处理如“物体”或“事件”这些对象的范畴，还要处理许多先于一切构造的性质之范畴，例如色彩品质的连续统。把系统 U 实在地看作是对实际存在的世界的描述，则在后一个方向上走得更远了；在这个世界中，对象的型之上还有型，其间的关系仍是 $\in$，但却是单独或整体地存在的。我们离开戴德金的命题，即数是构造性的智慧的自由创造，已经不知有多远了；数学已不再是仅仅基于逻辑的了[把数学归结为逻辑，一直是罗素与怀特海(A. N. Whitehead)的巨著《数学原理》(*Principia Mathematica*)的指路明星]，而是基于一个赋有“终极构件”的宇宙，这个宇宙是逻辑学家的某种天堂，而这些构件则相当复杂，是由一些包罗一切的封闭公理管辖着。动机是清楚的，但是有哪一个思想比较实在的人敢说他相信这个超验的世界呢？策梅洛的系统 Z，结构比较简单，力量却更大，它对我们的信仰的要求也不会稍低。(既然 U 的结构本身不求助于迭代这个直觉的概念就不能描

述，想把戴德金—弗雷格类型的自然数理论放在这个 U 系统上，就显得有点愚不可及了——而在 Z 中这却是完全合理的。）

通过添加一些初等的超验逻辑的公理把系统 Z 和 U 形式化，这并不是严重的问题。

奇怪的是罗素达到他的概念所走的路。他清楚地看到，如果性质是构造出来的，则如下的规定“如果有一个如此性质的话，则对某个数形成一个概念……”作为一种构造的法则，含有循环论证。他因此被迫承认，数有不同层次的性质，一个 $l+1$ 层次的性质，是由 l 层次的性质的整体来定义的。但是他害怕这个苛刻的见解根本性的结论，所以马上就用他的可化约性公理(axiom of reducibility)把一切都化归到基础的层次。这样一来，型和层次的分支等级的思想也就如花苞一样被折断了。他虽然看到了只需几种型的分化就足以阻止那些已知的二律背反，却几乎完全没有意识到，他是多么彻底地放弃了分析的道路，放弃了倾向于存在性—公理性观点的构造。

对于任何探求二律背反的根源的企图，罗素对层次所作的分析，比他后来通过化约公理(axiom of reduction)而作的“背叛”更为重要。然而，杠杆的着力点首先是放在了这一点上，这多少是一个历史的偶然。麻烦的最深刻的根源却在别处：一个通向无穷的可能性的领域，被误认为是一个自身存在的事物的封闭体。正如布劳威尔指出的，这是一种谬论，是集合论的被贬谪下凡和原罪，哪怕它没有得出悖论。

正是由于这个原因，本书的主要部分只对悖论给予相对较少的注意。哥德尔正是从这里得到了他的惊世骇俗之发现的主要思想，所以他作出不同的判断也就不足为奇了。他在近来赞扬罗素对数理逻辑的贡献时说，悖论揭示了“一个惊人的事实：我们的逻辑直觉是自

相矛盾的”。我承认，我在这方面仍然坚定地站在布劳威尔一边，他责备悖论并不是因为悖论在某些超验的逻辑直觉上欺骗了我们，而是责备它在由有限集合进到无限集合时，漫不经心地犯了一个错误。

罗素在公理化宇宙 U 中通过集合类型的等级来回避悖论，策梅洛通过限制集合的大小来避开悖论，而哥德尔则提请注意一种理论，在其中“每一个概念都是处处有意义的，只在某些‘奇点’除外……所以悖论就有点像是以 0 作除数。这时，我们的逻辑直觉除了须稍作修改外仍是正确的，即此时可以认为它对实际状况给出了基本正确但有些模糊的图景”。哥德尔根据自己的全部经验，为实在论观点作了有力的辩护，按此观点，“类”要被看作是一个真实的对象(客体)，即是“事物的多性(plurality)”，或者看成是由这些多性所成的结构，他还说：“在我看来，假设有这种对象(类或概念)存在，正如假设有物理物体存在，是一样合理的，有差不多同样多的理由相信它们存在。它们对于获得一个令人满意的数学体系之必要性，正如物理物体对于一个令人满意的关于我们的知觉的理论之为必要一样。在这两种情况下，都不可能把我们想对这些实体所作的命题看作是关于‘素材’(data)的命题。逻辑和数学(跟物理学一样)都是建立在一些公理基础上的，这些公理具有真实的但不可‘解释出来’的内容。”他还加上了一个警告：“然而，许多症状清楚不过地表明，原始的概念有待进一步澄清。”

讨论逻辑中的实在论而不涉及经验科学是不可能的。在那里，相容性只是协调性的这样一部分，即可以独立于经验事实而定下来的那一部分(见第 17 节)。我们永远不能确定，这种协调性，不论在当时看来多么完全，当我们的观察有所拓展而且变得更准确时，会不会保存下去。哥德尔似乎是在暗示，就相容性而言，情况也不会更

好。没有一个希尔伯特能对我们永远保证相容性；如果有一个简单的数学公理系统能通过迄今为止精巧的数学实验，我们就必须心满意足了。如果在后来发生了偏离，再改变基础也还来得及。对这种立场，我没有多少理由来反对。但是我们构建公理系统的指导原则是什么？哥德尔对于超验逻辑有着基本的信赖，喜欢设想我们的逻辑光学有点聚焦不准，希望稍加修正，我们就可以看得更清楚，而那时每个人都会同意说，我们看得正确。但是那些不具有这种信赖的人，仍将会为Z系统甚至是希尔伯特系统中含有过多的任意性而烦恼。爱因斯坦的广义相对论或者海森伯—薛定谔的量子力学，其启发式的论证以及后来的系统构建，更有说服力，也更接近于事实。一个真正实在的数学，同物理学一样，应该看成是对一个真实世界之理论构建的一个分支，对于其基础的假设性的拓广，也应该如同在物理学中表现出来的那样，采取同样清醒而谨慎的态度。

参考文献

B. RUSSELL, Mathematical Logic as based on the Theory of Types, *Am. Jour. Math.*, *30* (1908), pp. 222—262.

A. N. WHITEHEAD and B. RUSSELL, *Principia Mathematica*, 3 Vols., Cambridge, 1910—1913; second ed., 1925—1927.

E. ZERMELO, Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre, *Mathematische Annalen*, 65 (1908), pp. 261—281.

K. GÖDEL, Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme, *Monatsh. Math. Phys.*, *38* (1931), pp. 173—198.

——*Consistency of the Continuum Hypothesis*, Annals of Mathematics Studies No. 3, Princeton, University Press, 1940.

——Russell's Mathematical Logic, in *The Philosophy of Bertrand Russell*, Northwestern University 1944, 125—153.

G. GENTZEN, *Mathematische Annalen*, *112* (1936), 493—565; Die gegenwärtige Lage in der mathematischen Grundlagenforschung, in *Forschungen zur Logik und zur Grundlegung der exakten Wissenschaften*, her. von H. Scholz, Neue Folge, Heft 4, Leipzig, 1938.

CARL PRANTL, *Geschichte der Logik im Abendlande*, 4 Vols., Leipzig, 1855—1870. (Reprint 1927).

附录 B　组合的艺术

马沙琳(Marschallin)(对着手镜说)：

这怎么可能，

我曾经是一个小姑娘，

有一天却会变成老太太。

……

亲爱的上帝是怎么做的？

不论到了哪里，我都还是那个样。

如果上帝一定要这样做，

为什么又让我在此观望，而又看得如此明了，

为什么不对我隐藏？

这一切都是秘密，太多的秘密……

——冯·霍夫曼斯塔尔(H. von Hofmannsthal)，

《玫瑰骑士》(*Der Rosenkavalier*)，第 1 幕

1. 说不定现代科学与哲学最有关联的特性，就是抽象的符号结构——而且如爱丁顿说的那样——涌现为主体性的说故事者丰富多彩的故事后面之客体性坚核。我们在附录 A 中就是这样讨论了数学的结构。本附录*则讨论一些可以想象到的最简单的结构，即总体与复形的组合。令人高兴的是，符号数学的这个很原始的一小块，却与哲学上很重要的个体化问题和概率问题密切相关，而且它能说明在无机与有机的自然界中某些最基本的现象。同样的结构的观点也将统率我们在附录 C 中对量子力学基础的说明。在一个相距甚远的领域中，冯·诺伊曼和摩根斯坦(O. Morgenstern)近年来试图把经济学建立在对策理论(theory of games)的基础上，这一企图也是以此潮流为特征的。联结大脑和感觉器官的神经网络(network of nerves)，这一主题就其本性也要求作组合的研究。现代计算机能把我们的洞察力转化为数学的组合结构，变成机械与电子设备的实际活动。

正是考虑到这种一般情况，我们现在要对个体的总体，加入一些辅助性的组合的考虑。应该事先警告读者，在应用于遗传学时，界线要划得比实际情况之所需更细一些。在科学的进展中，原以为大体上相应于明显事实的初等结构，后来时常发现是建立在更深层次的结构上，而在进入到这个更深层次的结构时，就可以找到它的适用限度。这种结构的等级(hierarchy of structures)将在附录 D 中以化合价理论为例来说明。

一个由白球、红球与绿球所组成的总体中可能含有几个白球。一般说来，在一个给定的总体中可能有若干个个体或元素是属于同一类的(例如几个白球)，或者我们要说，同一实体(entity)(例如白球这

---

* “组合的艺术”(*Ars Combinatoria*)，这是莱布尼茨一本早期著作的书名。——译者

个实体）可以出现几个复本（copies）。我们必须要区别 *quale** 与 *quid***，区别相等（=，即属于同一类）与全等。对于由此产生的个体化问题，莱布尼茨用他的 *principium identitatis indiscernibilium*（“不可辨别者即为同一”这一原理）给出了一个先验的回答。物理学现在对于终极的基本粒子，特别是在光子与电子方面，已经得到了精确的、令人信服的经验性的解答。与此密切相关的还有同一性在时间中是否守恒的问题；我的内在的经验这个具有同一性的“我”，是哲学上最显著的例子。[1]对于什么可以看作相等的，而什么可以看作不同的，若我们的决定不同，则在计算究竟有多少个“不同”的特例时，影响也是不同的，而这一点正是决定概率的基础，这样，个体化的问题就触及了概率演算的根本。正是通过总体的组合理论，这些事情才得到确切的数学解释，很难再找到一个知识的分支，在其中思想与数学的关系表现得如此透彻。

最简单的组合过程，就是把一个含有 n 个元素的集合 S 分割为两个互补的子集合：$S_1 + S_2$。为了保持同一性以及做记录，我们对各元素赋以一个任意确定的标记 p。只有那些虽然选择了不同标记，仍不受影响的关系与命题，才具有客体的意义；这就是相对性原理（principle of relativity）。它的抽象表述，揭示了它的平凡性。一个“个别的”（individual）子集 S_1 是这样刻画的，对于每个标记为 p 的元素都要表明它是 S_1 之元（$p \in S_1$），还是其补子集 S_2 之元。因为构造 S_1 要依赖于作 n 次二择一的判定（即对 n 个元素中的每一个 p，都要判定是 $p \in S_1$，还是 $p \in S_2$），所以总共有 2^n 个可能互不相同

* 拉丁文，用于问某特定个体。——译者
** 拉丁文，用于问某一类。——译者

的个别的子集(包括空集以及全集 S)。但是若这 n 个元素被认为是不可辨别的，则此数将变为 $n+1$。因为这时一个子集 S_1 将完全由它所含的元素之个数 n_1 决定，n_1 可以取 0，1，…，n 这 $n+1$ 个值之一；而分割 $S = S_1 + S_2$ 则由把 n 分解为两项之和 $n = n_1 + n_2$ 这个分解来刻画(n_1，n_2 分别为 S_1 和 S_2 中元素的个数)。[2]可以问，有多少种各不相同的分割 $S = S_1 + S_2$ 由分解式 $n = n_1 + n_2$ 却会得出“看起来”相同的分割？答案是 $\frac{n!}{n_1!n_2!}$。因此，个别的分割的总数 2^n 应该等于和

$$\sum \frac{n!}{n_1!n_2!},$$

这里要对 $n+1$ 个不同的分解 $n = n_1 + n_2$ 求和：即有

$$(1) \quad 2^n = \frac{n!}{0!n!} + \frac{n!}{1!(n-1)!} + \frac{n!}{2!(n-2)!} + \cdots + \frac{n!}{n!0!}。$$

这种最简单的情况几乎没有什么兴趣。向现实靠近一些，现在我们假设在某个方面这些元素可能相等(～)或不同。[3]球可以是白色的、红色的或绿色的；电子可以在这个或那个位置；动物园里的动物可以是哺乳动物或鱼鸟爬虫；分子中的原子可以是 H，He，Li，……这种“类的相等性”有一个通用的表示法，就是使用一个满足等价性公理的二元关系式 $a \sim b$，等价性公理就是：$a \sim a$；若 $a \sim b$，则 $b \sim a$；若 $a \sim b$ 且 $b \sim c$，则 $a \sim c$。可以用不同的词句来表示等价性 $a \sim b$，即两个元 a 和 b 处于等价关系～下，也可以说是：a 和 b 在同一种类(kind)中或有同样本性，或说它们属于同一类(class)，或处于同样的态(state)下。若一集合的每个元都可以有一定的态，就称之为总体(aggregate)S；因此，总体一词是表示“具有等价关系的元

素之集合”。今设一个元素可以有 k 个不同的态 C_1，…，C_k。若有总体 S，其中有 n 个元素，且各有标记 p，如果知道哪个标记为 p 的元素属于哪个类，就说 S 处于一个确定的个体化态(individual state)之下。因此，S 有 k^n 个可能的个体化态。然而，如果不同标记并不用来表示人为的区别，而只表示态的内蕴的区别，则为了完全刻画总体 S，只须对任一个类 C_i（$i = 1, \cdots, k$）指出处于此态下的 S 之元素的个数 n_i 即可。这些数，其和为 n，可以用来描述系统 S 的所谓看得见的或有效的态，而这个说法是很方便的。系统的每一个个体化态都与一个有效的态相联系，而当且仅当一个个体化态可用标记的排列变为另一个个体化态时，这两个个体化态才与相同的有效的态相联系；这里，相对性原理就表现为对于一切排列的群之不变性。不同的有效态之个数，就等于把 n 分为 k 个加数 n_i 的“有序”分解 $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$ 的分法之个数，容易看到此数之值为

$$\frac{(n+1)\cdots(n+k-1)}{1\cdots(k-1)} = \frac{(n+k-1)!}{n!(k-1)!}。\tag{2}$$

也不难确定有多少个不同的个体化态与同一个可见态相联系，由此即可解释为什么 k^n 和(2)这两个数不同，正如(1)可以解释此式左方的值为 2^n，而右方的项数只有 $n+1$ 的不同。

S 分成两个互补子集 S_1，S_2，其个体化不同的分割之总数，也就是个体化不同的子总体(sub-aggregate) S_1 的个数，已知是 2^n；但因现在元素只能按其“类”来加以辨别，所以要想确定一个有效子总体 S_1，只要对每一个类 C_i 确定 S_1 中属于此类的元素的个数 $n_i^{(1)}$ 即可。因为 $n_i^{(1)}$ 可以在 $0, 1, \cdots, n_i$ 这 n_i+1 个值中取一个值，所以总共有

(3) $$(n_1 + 1)\cdots(n_k + 1)$$

个可能的不同的有效分割 $S = S_1 + S_2$。因此，(3)一定小于或等于

$$2^n \qquad (n = n_1 + \cdots + n_k)。$$

若所有 n_i 之值均为 0 或 1，即是说 S 中没有两个元素在同一类中，就会达到最大值 2^n。因为在这种情况下，S 中所有元素均可完全由其所属的类(即由其态，或其“本性”)决定，而这时就再无必要用标记来作人为的区别。这时，我们就说有一个单项(monomial)总体。

与总体 S 之分割为互补的子总体 S_1，S_2 的过程相逆的，是两个已知的(互不相交的)子总体 S_1，S_2 合并为一个整个的 $S = S_1 + S_2$。总体的组合理论以及互逆的分割与合并的组合理论，在遗传学中有特别重要的应用。两个有机体，尽管其遗传成分相同[用魏斯曼(Weismann)和约翰森(Johannsen)的名词，即为有相同的种质或基因型]，由于“外界环境”不同，可能取不同的发展道路。这种成分与环境的对偶，“先天与教化”(nature and nurture)的对偶，对于解释遗传事实是基本的。这种对偶性可以称为先验的概念，多少有点类似于力学中的惯性与力的类似的对偶性。大致说来，环境因素的特点是：它是外在于有机体的，(相对)可变与可控的，而与内在的、给定的而且(相对)稳定的“成分”相反。成分时常是由推论得知的，从而是假想而非经过证实的，就如构成化合物的原子一样。一个因素可能本属于某个个体的社会环境因素，但具有该个体生活于其中之社会的成分的特性。同其他基本概念一样，每个领域的基本概念的确切含义都是随着相关现象的理论而逐渐地展开的：在多少有些模糊但是很自然的解释的基础上，发现了一些定律，但令人吃惊的是，这些定律的形式却是精确的，而且融合为一个理论；坚持这些简单的定

律，并且按照这个理论来解释越来越多的细节事实，就能使原来的概念越来越精确。在这个意义上，在生物学中有不可胜数的经验证据来区分先天与教化，虽然这个区分从未完全清晰分明。

做繁殖实验就能把遗传成分分解为个别基因或“点”的总体，很像化学把分子分解为原子的总体那样。正如个别的原子可以处于某一个不同的态(即为不同的“实体原子”之某一个)，而各用一个化学符号 H，He，Li，……来表示，基因点也有不同的离散的态，称为等位基因(alleles)。在受精过程[配子配合(syngamy)]中，两个“配子”(gametes)S_1 和 S_2(即精子与卵子)融合为一个“合子”(zygote)或生殖细胞：$S = S_1 + S_2$。配子是由有机体生成的，S_1 由 Ω_1 生成，S_2 由 Ω_2 生成(Ω_2 不一定与 Ω_1 不同，两者可以是同一个自体受精植物)。有机体 Ω 的由生殖细胞 S 发展起来的所有体细胞，尽管有功能的分化，但是就其遗传成分而言，都是合子 S 的复本。有一部分体细胞在其生命周期的某一阶段会经过相反的分割过程[即成熟分裂或减数分裂(meiosis)]；[4]所以 S 有多少个不同的有效的子总体，有机体 Ω 就能生成同样多的成分上不同的配子。这种配子配合与减数分裂、合并与分割的交织可以解释遗传的本质特征：就两个总体的和是由其两个部分唯一决定而言，守恒性就起主要作用；就一个总体可按不同方式来分割为两个互补的部分而言，变异性起主要作用。

一个有机体产生出含于其合子 S 并作为其子总体的配子S'，有一定的相对频率(概率) $\gamma = \gamma(S')$。这些概率会受到外界环境特别是温度的影响，因此和总体不同，总体是离散的，而概率是能连续变动的。但是先验地就很明显，互补的配子 S''也必和 S'以同样的频率出现。[甚至如果这两个互补的部分 S'，S''之一，由于退化为极体(polar body)在成熟分裂后可能被消除，例如在♀有机体的情况下，

我们仍然坚持关于先验概率的假设 $\gamma(S') = \gamma(S'')$。]有可能，一个由 Ω 生成的配子 S' 与一个由 Ω_* 生成的配子 S'_* 相配合的概率，对于由这两个有机体 Ω 与 Ω_* 生成的各种配子 S' 和 S'_* 都是一样的。一对亲本 Ω，Ω_* 得到具有合子 $S' + S'_*$ 的概率因此假设为 $\gamma(S') \cdot \gamma_*(S'_*)$。

回到抽象的理论，我们现在讨论一个已给的总体 S 之态的时间变化。当元素只能有离散的态时，我们就不得不把时间也分解成一串离散的时刻，$t = \cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots$。这时，系统由时刻 t 的态转为时刻 $t+1$ 的态就会是一个跳跃式的突变。对于由标记 p 来个体化的 n 个元素，则态的变化将由该元素 p 在时刻 t 的态 $C(p; t)$ 来描述，而 $C(p; t)$ 则为 p 与 t 的函数。这样用函数 $C(p; t)$ 来作“个体的”描述，还要辅之以相对性原理，即个体与其同一性的标记 p 之间的联结是可以任意选择的；但是这种联结适用于所有时刻，一旦选定就不得再改动。然而另一方面，如果在每一时刻都只关注于可见的态，则数 $n_1(t), \cdots, n_k(t)$ 对 t 之依赖性就给出了完全的图景——而不论这种信息从“个体化”观点看来是多么的不完全。因为现在我们只知道在任一时刻 t 处于态 C_i 的元素有多少个，即 $n_i(t)$ 是多少，但是对怎样随时间来追踪这 n 个个体的同一性，却毫无线索；我们并不知道，比如说某个现在处于态 C_5 的元素，在一瞬间之前是处于 C_2 还是 C_6，甚至这样提问都是不适合的。可以说，世界在每时每刻都在重新创造，现时刻出现的存在物与下一时刻遇到的存在物，在同一性上并无联系。早期伊斯兰哲学穆台凯里姆派对待变化着的世界的态度就是这样。甚至当元素的总数 $n_1(t) + \cdots + n_k(t) = n(t)$ 可以在时间中变化时，这种非个体化的描述也是适用的。

在实在世界中，不论在何处，要想认定同一存在物在不同时刻的同一性，都必须以可观察的态为基础。对于连续流动的时间以及态的连续的多样体，基本的原理大体上可以表述如下：设在时刻 t 只有一个个体处在与其他个体明显不同的态 C 之中；如果后来，特别是在紧接着的后来的时刻 t' 中，又在态 C' 中找到了一个且唯有一个个体，而 C' 又与 C 相差甚微，或“典型地类似”于 C，那么就可以假设，我们处理的其实是在两个时刻 t 与 t' 的同一个个体。如果不只有两个时刻 t 和 t'，而是有一系列的时刻 t，t'，t'' …，就会想到如同追随在水面上运动的波！甚至在识别一个人时，我们也要依靠这样的手段[你会想到自《奥德赛》(*Odyssey*)以来的世界文学中，那些著名的相认的情景]，只要暂时把对于自我的同一性的内在的确信(“我就是在彼时彼地见到您的同一个人”)，以及以此为基础的交流都置之度外即可。

2. 我们看到了，在谈到不同的种类，不同的状态，不同的类别时，其下面总是有一个等价性概念。一类元素分裂成子类，这是常见的事；我们宁愿说“属”(genus)和“类”，而不用类与子类这样的说法。[5]每一个类 C 都属于一定的属 $G=[C]$，个体因为是类 C 的元素，当然也是属 $[C]$ 的元素。动物园里的动物分成哺乳动物、鱼、鸟等等，哺乳动物又分成猴子、狮子、老虎等等。许多的态可能在某一特性上相同；这个特性就相应于元素的属，而态则相应于元素的类。分成属与分成类，一是较粗的等价，记作 $a\sim b$，一是较细的等价，记作 $a\approx b$，而当 $a\approx b$ 时必有 $a\sim b$*。在不同的知识领域，这种有不同等级的划分各以不同名目出现。遗传学中的总体就是一个

* 原书误为 a～b 时有 a≈b。——译者

恰当的例子。基因相当于属，等位基因相当于类；一个基因可能有两个或多个等位基因。总体的一个元素 p 属于类 C 从而也就属于属 $[C]$，这一事实在这里就用一句话表示为“点 p 由基因 $[C]$ 中的等位基因 C 所占据”。

我在这里把遗传学中的几个名词归结为关于总体的组合理论的基本概念，而且描述了生殖过程中最常见的“正常的”个例。如果对一个总体的每一个元素 p 都知道了其所属的类 C_p（p 于是也就属于属 $[C_p]$），这时就说这个整体是知道了。如果有两个个体的总体 S 与 S^*，而且用于第一个总体之点的标记 p 可以一对一地映射到用于第二个总体 S^* 之点的标记 p^*，记作 $p \rightleftarrows p^*$，使得在 S 中与 p 同位的点，即与 p 同属于一类的点，在 p 映为 p^* 后，仍映为 S^* 中与 p^* 同位的点（即此映射为同构映射），这时就说 S 与 S^* 有相同的组分（constitution）。按照相对性原理，组分相同的总体应该看作是不可分辨的。在一定的外界情况下，合子 S 完全决定了表现型（phenotype），即有机体的看得见的发展；对于组合相同的合子，其表现型必为相同的。一个有效的总体 S 可以这样来描述，即对其每一类 C 都指定 S 中属于此类的点数 n_C；于是，属 G 中的点数 n_G 等于 Σn_C，这里 C 遍取 G 中所有满足 $[C] = G$ 的类。当且仅当两个个别的总体为同构时，即有相同的组分时，它们才与同一个有效总体相联系。设有两个个别的总体 S 与 S^*，若再有一个一对一的映射 $p \rightleftarrows p^*$，使得对应的点在 S 与 S^* 中属于同一个属（genus），[6]我们就说 S 与 S^* 属于同一个种（species）σ。S 与 S^* 对于一切可能的“属” G，数 n_G 与 n_G^* 都相等，是它们居于同一个种的必要充分条件。因此，所有这些数 n_G 是对一个总体的种 σ 的完全的描述。若一个总体 S 的不同的点决不属于同一类，就称 S 为单项的（monomial）；若 S

的不同点决不属于同一种，即若对每个属 G，数 n_G 或为 0 或为 1，就称 S 为一单倍体(haploid)。所以对相应的种也可以使用这个名词。若 S 含有两个不同类但同属的点，就说 S 是杂合的(heterozygous)或杂交体(hybrid)；如果它含有两个不同类但属于同一给定的属 G 的点，就称它为关于 G 杂合的。在两个总体 S_1，S_2 之并为一个总体 $S = S_1 + S_2$，以及 S 之分裂为S_1，S_2 这两个互逆的过程中，如果两个部分都属于同一种，就说它是平衡的(balanced)。在通常的配子配合和减数分裂中，正常情况都是这样的。在平衡的配子配合和减数分裂中，种在整个生殖过程中都不变。事实上，若 S，S^* 是同一种 σ 的两个配子，它们合并起来成为一个合子 $S + S^*$；如果后者又经平衡的减数分裂成为 S_1，S_2，则 S_1 和 S_2 必定和 S，S^* 属于同样的种 σ。甚至当发生突变，使一个点改变了类但不改变其属(称为点突变)，这仍然是正确的。特别是，如果这场“平衡的”复制游戏是由同样的单倍体种 σ 的两个配子开始的，则在其后代中只会有同一种的单倍体配子(以及二倍体合子)出现；这就是孟德尔(Gregor Mendel)处理的最普通的情况。假设一个自体受精的有机体 Ω 的合子是非杂交的，则 Ω 所有直接与间接的后代都有与 Ω 相同的基因型。在这个“纯系”中，表现型若有区别，必定来自不同的外界情况，这样，不变的遗传成分就清楚不过地与可变的环境因素分开来了(约翰森的豌豆实验，1903 年)。

3. 在物理学中，人们企求把分类做得详细到这样的地步，使得不可能再做进一步的分类；换句话说，就是企求得到态的完全的描述。在同一个“完全态”中的两个个体是不能就任何的内在特性来加以分辨的——虽然它们可能并不是同一个东西。经典力学认为，一个有着一定质量(与电荷)的质点的态可以由其位置与速度来完全描

述；这是因为采取这个观点能够与因果性原理相符合：按因果性原理，质点在某一时刻的态决定了它在所有时刻的态。线性振子是质点最简单的例子；它在一确定的直线上振动(所以只需一维空间)，有一个确定的频率 ν(即每 2π 秒中振动的次数)。[7]一个振子由其位置与速度表示的一切可能的态，构成一个二维的连续流形。然而，按量子力学它只能有一组离散的态，而由一个只能在 0，1，2，…中取值的数 n 来表示。在态 n 中，振子的能量是 $n \cdot h\nu$，这里 $h = 1.042 \times 10^{-27}$ 尔格×秒是普朗克的作用量子(这个数现在通常用 $\hbar$ 来表示)。若一座房子的墙壁是会反射的[即所谓“空腔”(Hohlraum)]，则其中的辐射将等价于一组谐振子的叠加，每个谐振子均由一个指标 α 来表示，其频率记为 ν_α。因此，空腔辐射可认为是被赋予一定频率 ν_α 的线性振子所构成的总体。(这里把电磁场的静电静磁部分丢掉了。)按照单个振子的量子力学，我们的辐射场将对每个振子 α 指定一个整数 n_α；在这个态下，振子 α 的能量是 $n_\alpha \cdot h\nu_\alpha$，而对所有振子求和，则 $\Sigma_\alpha n_\alpha \cdot h\nu_\alpha$ 就是总能量。用光子的语言，我们把这件事说成是有 n_α 个在态 α 下的，能量为 $h\nu_\alpha$ 的光子出现。在振子的语言中，我们说指标 α 确定了单个振子，而整数 n_α 是它的态；而在光子的语言中，则说 α 表示一个光子的态，n_α 则是处于此态的光子的数目。在翻译成光子的语言后，辐射就成了光子的气体。

既然在量子力学中一个个体所有可能的完全态形成一个离散流形，则在这里应用统计学就归结为仅仅是计算态的数目。一旦完全描述态的问题得到了解决，所有的概率就都可以用简单的计数来估计，而用度量来在连续的“相空间”中比较概率的问题就不会出现。因为光子有时存在有时消失，被发射又被吸收，它们就成了没有同一性的个体了。因此，除了以前说的总体的有效态以外，再要进一步

确定其特性就不可能了。所以对于光子气体，若对每个可能的态 α 都能知道处于此态下的光子的数目 n_α，则光子气体的态就是已知的了(这就是辐射的玻色—爱因斯坦统计法)。

对于光，因为在还没有在诸如衍射、干涉等现象来表现出其本性以前，我们无须深究光的本性，所以光的波动性质与粒子特征就都比较隐蔽。对于电子则情况相反；它们撞击这里，撞击那里，明白地表现出其颗粒本性，而其波动性则是在与量子力学的发展同时，由实验物理学家揭示出来的。然而很清楚，物质也和辐射一样，也将由波场来表示，其法则将是麦克斯韦的电磁场方程的对应物[德布罗意(de Broglie)，薛定谔，狄拉克(Dirac)]。对于个体电子完成了这一点以后，就应该作上面用于空腔辐射的同样的考虑；描述电子气就是要对每个态 α 给出处于此态从而相应能量为 $h\nu_\alpha$ 的电子的个数 n_α。我们来把无数个自由电子的气体与束缚于一个荷正电的原子核的少数几个壳层电子作一比较。后一种情况中壳层电子与核共同构成了原子。离散的能级和光子的思想，正是在运用于后一种情况时取得了最光辉的成功；因为它们直接导致了玻尔的频率定律，按此定律一个电子由原子内的较高能级跃迁到较低能级时，其多余的能量 $h\nu$ 将由一个频率为 ν 的光子发射出来。对于解释光谱学家们在研究原子和分子的辐射谱线时积累起来的，大量极为精确的观察数据，这个定律提供了线索。但是要想完全符合，还得加上一个假设：绝没有两个电子处于相同的完全态中(泡利不相容原理)。这对于理解所谓的化学元素周期系统是一个决定性的事实。化学键的量子理论也是基于这个原理的(见附录 D)。该原理由光谱学的事实导出以后，还可应用于自由电子，例如在金属中导电的自由电子，或在恒星内部撞来撞去的自由电子；而且其结果也与经验相一致。这一切最终的结果就

是：电子满足莱布尼茨的不可分辨者即为同一之原理（*principium identitatis indiscernibilium*），或者说，电子气体是一个“单项总体”（费米—狄拉克统计法）。物理学深刻而精确地证实了穆台凯里姆派的主张；不论是光子还是电子（荷负电的或荷正电的），都没有个体性。至于莱布尼茨—泡利的不相容原理，后来发现只对电子成立而对光子则不成立。

4．迄今为止，所考虑的总体都是没有构造的。但是分子中的原子所成的总体都有构造，凯库勒（Kekulé）用价键对它作了图示刻画。我们将要假设，构成一个配子或合子的基因点也非无构造的。由经验得知，这个构造的基础是两个点的“邻接”这一简单的二元关系。我们说两个邻点是“相连通的”（joined）。从拓扑学中借用一个名词，有这种构造的总体可以称为一个复形（complex）。[8]两个复形 K 和 K^* 称为具有同样的组分（或同样的种），当且仅当可在 K 与 K^* 的点 p 与 p^* 间建立起一一对应 $p \rightleftarrows p^*$，使得：(i)两个同位的点 p 与 p^* 都属于同一个类（属）；(ii)当且仅当 p 与 q 在 K 中邻接时，p^*，q^* 才在 K^* 中邻接。在这种情况下，称这个对应关系为 c 同构（g 同构）。复形 K 称为分为两个分离的部分 $K_1 + K_2$，如果 K_1 中没有一个点与 K_2 中的点相邻接；K 称为连通的，如果不可能分成两个分离的部分（除了不足为道的分法，即一个部分为空，而另一个则是整个 K 之外）。任一个复形都可以唯一方式分解为分离的成分。把遗传学与细胞学的经验综合起来，这些成分应该认定为细胞核中的染色体，所以我们将以染色体这个名词称呼这些成分。一个连通的复形，如果去掉其任何一条连接的线就会分成两个互相分离的部分，这个复形就称为树（tree）。（附带说一下，附录 A 中用来描述公式和证明的树，也都属于这一类。）在已知的外界情况下，构成有机体 Ω 的

合子的点的复形决定了 Ω 的表现型；或者说得更精确一些，两个 c 同构的合子必有同样的表现型。这就蕴含着，一般说来，表现型不仅依赖于 K 作为一个总体，而且也依赖于 K 作为复形的构造；构造的影响以位置效应(position-effect)之名为人所知。

在做复形的合并与分割时，不能切断任一条连接线，也不能添加新的。但如果在所有情况下都是如此，染色体就会成为不可分的整体，也无法区分同一染色体上的不同基因。在这些情况下，孟德尔的独立分配律(rule of independent assortment)就会成立，这个法则断定，由一定有机体生成的组分不同的配子的概率 γ 是一样的。尽管孟德尔在两个不同染色体上两个点互相独立这一点上是正确的，但是后来发现同一染色体上的点并非绝对独立，而是或紧或松地互相连接的。摩尔根(T. H. Morgan)和他的学派就果蝇(*Drosophila melanogaster*)来研究这种连接现象取得了至高无上的成就，结果得到了详细的基因图，由它可以获得关于概率 γ 的定量信息。摩尔根用交换(crossing-over)过程来解释连接。设合子 $K+K^*$ 是由平衡的配子配合从同一个种 σ 的两个配子 K 和 K^* 形成的，而且其间有一个 g 同构 $p \rightleftarrows p^*$。令 a，b 为 K 中的一对邻点，a^*，b^* 为同位的 K^* 上相应的一对点。这时，a^* 与 b^* 将在 K^* 中连接；点 a，b 位于 K 中一个染色体 K_0 上，a^*，b^* 则位于 K^* 中与之同位的染色体 K_0^* 上。所谓交换过程就是把 ab 和 a^*b^* 都切断，再把 a 与 b^* 以及 a^* 与 b 连起来。如果 K_0 是一棵树，这个过程会把不连通的对 (K_0, K_0^*) 变成一对 g 同构于 K_0 的染色体 $(\overline{K}_0, \overline{K}_0^*)$。在交换前位于同一染色体 K_0 上的点，现在可能被分离，一个在 $\overline{K}_0$ 中，一个在 $\overline{K}_0^*$ 中。细胞核中各对同位染色体在减数分裂之前即已处于可以进行交换作用的情况下；一对染色体并列着，一个染色体上的各点正

对着另一个染色体上与之同位的点[联会(synapsis)]。如果后来发生了平衡的减数分裂，则新的配子 $\overline{K}$，$\overline{K}^*$ 将与原来的 K，K^* 属于相同的种 σ。一个染色体上的两点 a 和 b，通过交换作用而分离的途径越多，则它们的连接也就越松散。

复形可以经历两类突变。除了点突变(这时连接线未受影响，点 p 则改变了其类 C_p 但不改变其属)以外，还有结构突变，即点的态不变但连接线变了。[9]上面描述的交换过程可以对任意 4 个不同的点 a，b，a^*，b^* 来完成[这时可以称为“转换过程”(switching-over)]。一个简单的切断以及这个转换过程似乎是结构突变的基本运算。由于联会，在每一次减数分裂前都有发生交换的机会，与此比较，突变则是罕有的事件。

最简单的连通复形是杆 $a_1—a_2—\cdots—a_h$(其中两个相继的点 a_i 用连接线连起来)与环。染色体似乎是杆而很少有例外[这就是摩尔根的线性排列定律(law of linear arrangement)]。然而，对一个杆(而不是两个杆)实行转换过程可以生成一杆加上一环(或者再生成此杆，但有一段被反转了)。由分离的杆与环组成的复形，不论怎样切断与转换，都仍保持这一特点。

染色体一定有着丝粒(centromere)。如果一个结构突变生成了没有着丝粒或有两个着丝粒的染色体，则当细胞分裂时，这种染色体会被丢下而产生缺陷(deficiencies)。一个细胞核的全部染色体配置，或一个染色体，或一个染色体的一部分，可以按好几种不同的方式复制(duplicated)。

我们在这里企图发展出遗传学的一个形式模式，使它十分一般以便把所有多少有些不规则的情况都包括进来。在这个模式中至今还无必要谈到性(sex)；但是两个配子只有当一个是精子，另一个是卵

子时才能配合，这一事实是不能永远不顾及的。这是一种极性(配子的性别)，而与基因无关。[10]另一方面，一个个别的有机体是产精子的雄性还是产卵的雌性(合子性别)，也和其他“可以看得见的特性”一样，是由合子的基因型决定的——还要加上影响发展的外界情况。经验表明，决定性别的并不是合子的单个基因，而是许多基因的平衡。性染色体(sex chromosome)[在这一点上它与常染色体(autosome)不同]只不过是起了扭转局面的决定作用。这就解释了雌雄间体(intersexes)现象，而且修正了一种通常的信念，即把性别看成另一种非定量的，非此即彼的特性。

[5. 对于我们在正文第23节B所讲的事，以及将在关于量子物理的附录C要讲的关于熵和统计学的事，如果现在稍讲一些关于统计热力学基础的事，尽管只是附带讲一下，也将会使它更加清楚，量子理论在这里带来了一个决定性的简化。事实上，在量子物理学中，一个系统 Σ 不能有多于一个离散序列的(完全的)态，且有一定的能级

$$U_i \qquad (i = 0, 1, 2, \cdots)。$$

按照能量守恒定律，我们把 N 个系统(这里数目 N 很大)随机地按其各个可能的态 i 来分配，但要求这 N 个系统的总能量有预先定下来的值 $N \cdot A$(A = 各个系统的平均能量)。人们发现，在绝大多数的分布中，出现态 i 的相对频数 N_i/N，在 $N \to \infty$ 的极限情况下，正比于 $e^{-\alpha U_i}$。这里的 α 是一个常数，将由已给的平均能量 A 决定。因此，我们通过对态 i 指定相对概率 $w_i = e^{-\alpha U_i}$ 来定义参量为 α 的典范分布。(相对概率并不需要满足正规化条件 $\Sigma_i w_i = 1$。)任意依赖

于态 i 的量 Z_i 这时将有平均值

$$\langle Z\rangle_\alpha = \sum_i Z_i \cdot e^{-\alpha U_i} \Big/ \sum_i e^{-\alpha U_i},$$

我们正是把这个值赋予在“热平衡”中的量。参数 α 与已给的平均能量 A 的联系是方程 $\langle U\rangle_\alpha = A$。出现在自然界中的系统可以具有任意高的能量值；所以 α 必须为正，而对每一个态都赋以同样的概率 $w_i^0 = 1$ 的这种标准分布，当能量 A 为有限时，只能近似地实现（即在 A 取很大的值而 α 取相应的低值时近似实现）。倒数 α^{-1} 具有能量量纲，可以暂时称为统计温度。

由于能量守恒定律，典范分布对时间是定常的。若一个系统 $\mathbf{\Sigma}$ 含有两个部分 Σ 和 Σ'，则 $\mathbf{\Sigma}$ 的态将由系统 Σ 的态 i 和系统 Σ' 的态 k 所成的对 (i, k) 来刻画。令 U_i，U'_k 分别表示 Σ 在态 i 和 Σ' 在态 k 下的能量；于是在两部分间没有相互作用时，系统 $\mathbf{\Sigma}$ 在态 (i, k) 下的能量，等于 $U_i + U'_k$。关于态 (i, k) 处于热平衡的概率，我们有

$$\mathbf{w}_{ik} = e^{-\alpha(U_i+U'_k)} = e^{-\alpha U_i} \cdot e^{-\alpha U'_k} (= w_i \cdot w'_k)。$$

这意味着三件事：(1)整体的热平衡蕴含部分的热平衡；(2)对于各个部分的组合，统计独立性仍适用，$\mathbf{w}_{ik} = w_i \cdot w'_k$；(3)对于两个部分，参数 α 取相同值，对于整个系统也是这个值。由这第三点，统计温度与通常可观察到的温度（这是物体一个大概的而非定量的性质）具有同样的决定性的性质：互相接触的物体的温度必然趋同。

理想气体即由 n 个粒子所成的总体，这些粒子的态全由其位置与速度决定，而其相互作用可以忽略不计。在一定压强 p 下，一定量的理想气体必有一定体积 V。对这种气体应用经典物理学和典范分布，将给出 pV/n 的一定值作为其统计温度。因此，若从一个与

Σ 相接触并充满了理想气体的气体温度计上读出的(绝对)温度为 T，则其统计温度应为 kT，这里 k 是一个普适的比例因子(称为玻尔兹曼常量)，必须加上这个比例因子才能把温标变成常用的摄氏度(100 ℃ = 在 1 个大气压下，水的沸点与冰点之差)。[11]于是，整个热平衡理论化为以下原理，它对量子物理和经典物理都是成立的：典范分布 w 可由标准分布 w^0 经由方程

$$w = w^0 \cdot e^{-U/kT}$$

给出，这里 U 记能量(各个态的 U 不同)，而 T 表示此系统(或此系统浸于其中的热环境)的固定温度。]

参考文献

C. H. WADDINGTON, *An Introduction to Modern Genetics*, London, 1939.

E. SCHRÖDINGER, *Statistical Thermodynamics*, Cambridge, 1946.

R. GOLDSCHMIDT, Position Effect and the Theory of the Corpuscular Gene, *Experientia*, 2 (1946), pp. 197—203, 250—256.

J. H. WOODGER, *The Axiomatic Method in Biology*, Cambridge, 1937.

J. VON NEUMANN and O. MORGENSTERN, *Theory of Games and Economic Behavior*, second ed., Princeton, 1947.

附录 C　量子物理与因果性

1. 现代的量子理论已经在基本的原子过程中摒弃了严格的因果决定性。它并没有完全否定严格的法则，但是它所处理的量只是统计地调节着可观察的现象。量子理论与这样一种思想是不相容的，即认为在量子理论后面有一个内容未知的严格因果理论——而对于气体理论，这种思想可能是对的，即在众多粒子所构成的气体的统计—热力学规律性后面是个别粒子的严格的因果性运动。可以证明，设想为关于一个集体的定律不可能是基本的量子定律。对于一项关于原子的实验之结果的不确定性，想要通过增加对于决定它的各个因素的知识，而把这种不确定性逐步缩小为零，这是办不到的。经典物理必会走向量子物理的理由同相对论必会消除绝对空间和时间的理由一样，都是令人不得不信服的；如果按一个理论使经验事实成为可以理解的程度来衡量其成功，则量子理论比相对论成就之大是不可比拟的。诚然，还没有达到最终的阶段；还有严重的困难未曾解决。但是不论将来会是怎样，道路决不会返回到经典的模式。

光的粒子本性的最激动人心的启示之一，就是光电效应：金属板受到紫外线或 X 射线照射，就会释放出电子。观察表明，很奇怪的是，这些电子的能量是由入射辐射的颜色决定的，即等于或小于 h 乘上其频率。人们从这里得到一个概念，即频率为 ν 的光是以能量为 $h\nu$ 的，离散的量子(即光子)形式被吸收的(爱因斯坦，1905)。这个能量用于发射电子(而电子的动能会小于 $h\nu$，因为有一部分功是用于把电子释放出来)。辐射的强度并不决定个别电子的能量，而是决定单位时间内释放出的电子的数目。哪怕辐射是如此之弱，以至于可能要等上好几个小时，使得流入一个原子的区域中的场能流量聚集到足以射出一个电子所需要的能量 $h\nu$，这个过程也会立即启动。连续的场论可能讲到“出现了辐射能 $h\nu$ 之一个分数倍”这样的话，其实必须解释为：出现一个能量为 $h\nu$ 的完整的光子的概率很小。与光电效应相逆的过程是原生的电子被阴极射线管的阳极遏制，而又生成次级 X 射线。因为这里的遏制要分成好几步来实现，可以期望出现 X 射线的连续光谱，而在频率 $\nu = eV/h$ (这里 $-e$ 是电子电荷，V 是阴极射线管的电压)处突然中止。经验证实了这些最初由爱因斯坦提出的关系式，包括 h 的数值，它必须与空腔辐射的热力学定律所导出的普朗克常量一致。

把光波与光子的概念调和起来的问题，最好用偏振来说明。设有一平面单色光波沿一定方向 $\vec{a}$ 传播而发生线偏振；偏振方向由一个垂直于 $\vec{a}$ 的单位向量 $\vec{s}$ 来表示。任选一点 O 作为原点，并过 O 作一“截面” G，其上有两条互相垂直的轴 1 与 2，它们都垂直于 $\vec{a}$。截面以及 $\vec{s}$ 均位于与 $\vec{a}$ 垂直的平面上。设光线通过一个定向为 G 的尼科耳棱镜；它就会分裂为 1 和 2 两部分，部分 1 在 1 方向上线偏振，部分 2 则在 2 方向上线偏振。这两部分光线相对于总的

光线的强度将为 $\vec{s}$ 相对于 G 的两个分量 s_1，s_2（亦即 $\vec{s}$ 在 1、2 两轴上的投影之长度）的平方。假设光线是由光子组成的，则我们只能得出如下的结论：有两种分别具有“特性”1 或 2 的光子（就好像球有白、有黑一样），它们分别具有概率 s_1^2 与 s_2^2。（由毕达哥拉斯定理，$s_1^2+s_2^2=1$，即光子“或白或黑”的概率应该为 1。）特性 1 与 2 都是相对于 G 而言的。这两类光子被尼科耳棱镜分开了，后者如同一个筛子，留下了 1 而让 2 通过筛眼。因此，我们应该期望，通过尼科耳棱镜而在 2 方向上偏振的光线比原来的更为均一。但是情况恰好不是这样的，偏振后的平面单色光波并不表示最高的均一度的光。如果让已在 2 方向上偏振的部分光线经过第二个尼科耳棱镜，其定向与前一个不同而为 G'，这束光又会按上面讲的强度法则再分裂。一束银原子受到不均匀磁场作用时，也会发生类似于偏振的事。应用笛卡儿坐标 x，y，z，并设磁场强度只依赖于 x。一个银原子就是一个很小的磁偶极子，其向量磁矩是 $\vec{m}$。磁场应按照 $\vec{m}$ 的 x 分量 m_x 之不同值来分裂这个原子。因为只会观察到两个部分射线（其曲率相反），我们必会得出结论，即这个分量只能取两个值 $+\mu$ 或 $-\mu$［μ = “磁子”（magneton）］。不论取什么方向作为 x 轴，这个结果都对。然而一个向量在任何可能方向上的分量都是 $+\mu$ 或 $-\mu$，这在几何上是没有意义的！把对应于“筛子”的不同定向 G 的几个特性都同时赋予光子或银原子的不可能性，显然来自事物的本性，而不是由于人的局限性。一个定向为 G 的筛子作出的分选，在下一次定向为 G' 的筛选中被破坏了。但是对于通过了筛子 G 的粒子，可以问，它们再通过 G' 的概率是多少；这个概率可以先验地由 G' 相对于 G 的定向算出来。

用牛顿所用的棱镜，或者用一个光栅，都可以把光分成其不同的

单色成分。一个“筛子”若可分出不止两个，而是多个“大小尺度的谷物”，就不妨称为一个“栅”。光电效应可以按光子击中的位置来筛选光子。所以爱丁顿很有理由在他那本漂亮的小册子《科学的新途径》(*New Pathways in Science*, p. 267)中说：“在爱因斯坦相对论中，观察者是一个带着标尺出发去寻求真理的人，而在量子论中，他是带了一个筛子出发的。”在动物园里，哺乳动物是用一种操作(即一个算子)M 同其他动物区分的。设鱼是用另一种算子 F 筛出来的。依次作用两次 M 而得 MM，同单用一次 M 是一样的，但作了 M 再作 F，即作 MF，捕获物只能是零。如果算子 M 与 F 适合方程

$$MM = M,\ FF = F,\ MF = FM = 0,$$

就称 M，F 为互相正交的幂等算子(idempotent operators)。在经典物理学中，栅只不过是一个已给的物理系统可能的态的分类。这里，态被看作是一个总体的元素。设态的数目有限，E_1，…，E_r 表示这些类。把类 E_i 的态从其余的态中筛选出来这个操作(算子)也可以记作 E_i。栅 $G = \{E_1, \cdots, E_r\}$还可以细化，把每个类再分成子类。有一个最精细的划分，就是每一个类都只有一个元。两个栅，一个把总体按 E_i 分类，另一个按 E'_k分类。这两个栅可以叠加起来。而算子 $E_iE'_k$则从总体中分出E_i，E'_k这两个类的公共元；在这里交换性适用：$E_iE'_k = E'_kE_i$，而整个总体就被分成了类$E_iE'_k$(其中有一些可能是空的)。在对各个类 E_i 指定不同的数 α_i以后，就可以说是有了一个可观察量(observable)(或称为态量)A，它在系统的态属于 E_i 类时取值 α_i。

现在要让这个经典的模式对抗量子物理的模式，而偏振这个典型的例子就已勾画出了后一种模式。n 个态的总体现在要由一个 n 维

欧氏向量空间 **I** 来取代。给定 **I** 的一个线性子空间 **E**，任一向量 $\vec{x}$ 都可以正交投影到 **E** 上去，投影的像 $E\vec{x}$ 是一个向量，而投影算子 E 则是幂等的，$EE = E$。两个线性子空间 $\mathbf{E}_1$，$\mathbf{E}_2$ 称为互相正交的，如果其一的每个向量均正交于另一个子空间的每个向量。我们这时可以构造两者之和 $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$，即由所有这样的和 $\vec{x}_1 + \vec{x}_2$ 组成，其中 $\vec{x}_1$ 是 $\mathbf{E}_1$ 之向量，$\vec{x}_2$ 是 $\mathbf{E}_2$ 之向量。把 **E** 中的向量 $\vec{x}$ 分解为 $\vec{x}_1$，$\vec{x}_2$ 两项之和的分解方法是唯一的，而由正交投影 E_1 和 E_2 实现。例如一个三维空间就可以这样分裂为一个水平平面和一条铅直直线。如果我们处理的是两个以上的互相正交的子空间 $\mathbf{E}_1$，$\mathbf{E}_2$，…，$\mathbf{E}_r$，情况也并不更为复杂。如果它们的和是全空间，则每一个向量 $\vec{x}$ 都可以分裂为 r 个分向量，每个分向量各属于自己的子空间 $\mathbf{E}_i$，且有下式成立：

$$\vec{x} = E_1\vec{x} + \cdots + E_r\vec{x},$$

而我们就说全空间被分成了子空间之和 $\mathbf{E}_1 + \cdots + \mathbf{E}_r$。投影算子 E_i $(i = 1, \cdots, r)$ 均为幂等的而且互相正交。以下用 $|\vec{x}|$ 记向量 $\vec{x}$ 的长度。

量子物理用 **I** 中的一个方向，或此方向上的一个向量 $\vec{x}$ 来表示所研究的物理系统(不论此系统是单个粒子，还是许多粒子的总体，甚至是无定数的粒子)的波态(wave state)。一个栅 $G = \{E_1, \cdots, E_r\}$ 就是把全向量空间分解为互相正交的子空间之和：$\mathbf{E}_1 + \cdots + \mathbf{E}_r$。我们称任何一个子空间 $\mathbf{E}_i$ 为特征 i 的子空间，或者精确一点，称之为子空间$(G; i)$。如果一个系统处于波态 $\vec{x}$ 之下，则它具有特征 i 的概率等于

(1) $$p_i = |E_i\vec{x}|^2 / |\vec{x}|^2。$$

毕达哥拉斯方程

$$|E_1 \vec{x}|^2 + \cdots + |E_r \vec{x}|^2 = |\vec{x}|^2,$$

就表示这些概率 p_i 之和为 1。没有一个栅会具有多于 n 个不同的特征；所以我们的模型，与之作比较的经典情况一样，相应于具有有限多个特征的情况。虽然在自然界中情形并非如此，但是使用有限维模型并不会有损于量子力学的本质特性。现在可以看得很清楚，栅 G 的细化(refinement)何在：事实上，每一个 $\mathbf{E}_i$ 还可以再分为互相正交的子空间，最细的栅就是分为 n 个互相正交的轴，因而与一个“十字架”（=笛卡儿坐标系）一样。从下面开始，我们就把这些特征(G；1)，…，(G；r)称为由栅 G 定义的 r 个量子态(quantum states)，而当栅为最细时，就说它们构成完全的量子态。

我在这里不得不指出，在第 17 节末尾，我并没有想到量子物理，但也是使用了这个模型，用来说明客体、观察者和观察到的现象之间的关系。这个模型与经典模型决定性的差别就在于，向量空间中的栅是不能叠加的。设 $\mathbf{I}$ 已用两种方式分裂为正交的子空间：

$$\mathbf{I} = \mathbf{E}_1 + \cdots + \mathbf{E}_r \text{ 和 } \mathbf{I} = \mathbf{E}'_1 + \cdots + \mathbf{E}'_s。$$

则 $\mathbf{E}_i$ 中的向量 $\vec{x}$ 当然也可以分为其分量 $E'_k \vec{x}$($k=1$，…，s)；但是这些分量一般不再位于 $\mathbf{E}_i$ 中，只有当算子 E_i 和每一个算子 E'_1，…，E'_s均为可交换时才可能是这样。于是，要把两个栅 G 和 G'组合起来，就得预先假定 r 个算子E_i 和 s 个算子E'_k两两均为可互换，而一旦满足了这个条件，组合的次序是 G 在G'后还是 G'在 G 后就没有区别了。关于量子物理的筛，奇怪的正是如下的特点：两个这样的筛，由于它们有“不一致的定向”，可能是，而且一般也正是，不可交换的。关于两个不可交换的筛，其特征 i 和 k 是不相容

的，当确定了 i 时，k 则不能确定。在这种意义上，一个粒子的位置和动量是不相容的。若 Δx 和 Δp 分别是一个粒子的 x 坐标及其动量的 x 分量之不确定度，则它们的乘积必定超过 h。这个海森伯不确定度原理正是以精确的形式体现了互补性的思想。若一个物体的颜色和形状也是这种不相容的特征，要问一个物体是否绿色的，或者是否圆的，都是有意义的；但是“它是否绿且圆？”这个问题就没有意义了。这里，与在经典模型中一样，可以对多个量子态(G；i)各指定不同的数 α_i，因此定义了一个可观察量 A，当系统处于波态 $\vec{x}$ 时，它能取 r 个值 α_1，…，α_r，而且以适合(1)式的概率 p_i 取值 α_i。[1]

用栅 G 把向量空间 $\mathbf{I}$ 分裂为几个子空间 $\mathbf{E}_i$，这本身就是一个纯粹的理想过程。实际把栅应用于一个物理系统，就是把此系统从波态 $\vec{x}$ 射入波态 $E_1\vec{x}$，…，$E_r\vec{x}$ 之一。究竟射入了哪一个波态是无法预知的；可以预先决定的，只是这 r 个事件的相对概率 $|E_i\vec{x}|^2$。在这种意义上，每做一次测量或观察都是对现象的一次侵犯，而其结果则只有统计的可预测性。实验物理学家从来也不会对下面的事实闭目不见，即每做一次测量，都伴随有测量仪器对于所研究的对象的反作用。但只要下面的假设似乎可以接受，即仪器可以做得比对象无限地更加敏感，则进行测量在原则上就不会有问题。但是如果对象也是如原子一般精细，而仪器之精细不可能超过它，则又当如何？这时，说事实独立于观察之外，这个观念本身就很值得怀疑了。

2. 现在暂时回到经典模型，并用它来描述事件随着时间的变化。只有有限多个态，这个简化的假设迫使我们在离散的时间内运作。于是动力学的定律将会确定，从时刻 t 到下一个时刻 $t+1$，这 n 个态 1，…，n 将要经历某个排列(permutation)s，如果各个时刻是

$t = \cdots -2, -1, 0, 1, 2, \cdots$也是一样的。若此排列 s “阶为 m”，即在做了 m 次同样的排列后，会得到恒等排列，则此系统经过每个这样的长为 m 的周期后，都会回到其初态(永恒的回归)。量子物理并没有把一个不连续的时间强加于我们，哪怕可以用栅来分出的量子态的数目是普适有限的。在无穷小时间区间 $\mathrm{d}t$ 内，向量空间经历了某个无穷小旋转，对任意向量 $\vec{x}$ 给了一个增量 $\mathrm{d}\vec{x} = L\vec{x} \cdot \mathrm{d}t$。动力学定律

(2) $$\mathrm{d}\vec{x}/\mathrm{d}t = L\vec{x}$$

(其中算子 L 与 t 和 $\vec{x}$ 均无关)在笛卡儿坐标 x_i 之下，可以表示为以下形式的方程

$$\mathrm{d}x_i/\mathrm{d}t = \sum_j l_{ij}x_j(t), \ (i, j = 1, \cdots, n),$$

它有常数值的反对称系数 $l_{ij}(l_{ji} = -l_{ij})$。突出之点是，波态 $\vec{x}$ 是按严格的因果律变化的；它的数学简单性是令人愉快的。一个栅 $G = \{E_1, \cdots, E_r\}$ 以及相应的量子态$(G; 1), \cdots, (G; r)$被称为是定常的，如果子空间 $\mathbf{E}_i$ 都对时间不变，即若线性算子 E_i 都与线性算子 L 可交换。

在附录 B 中称为粒子的态或总体的态的东西，在这里更精确地解释为量子态。一个在那里可能产生某些疑虑的情况，即光子概念对于空腔及其本征频率的相对性，现在则表现为一般现象的一个特例：量子态的区分是相对于一个栅而言的。

所谓测量，都是使用筛或栅。我们决不可以把波态设想为与测量互相独立的。事实上，射入尼科耳棱镜的偏振化了的单色光，本身就是由性质未知的自然光经过一个栅分选出来的。这符合一个基本事实，即只有一个笛卡儿坐标系相对于另一个笛卡儿坐标系的相对

位置，才能作为客体来刻画。然而，给定了两个栅 $G=\{E_1, \cdots, E_r\}$ 与 $G'=\{E'_1, \cdots, E'_s\}$，我们总值得去问下面类型的问题："如果第一个栅表明我们的粒子是处于量子态(G；i)之下，那么，第二个栅 G'发现此粒子处于量子态(G'；k)中的概率，有什么样的界限？"用几何语言来表述，这就相当于以下的问题：(Ⅰ)"当 $\vec{x}$ 自由地在空间 $\mathbf{E}_i$ 中变动时，商 $|E'_k\vec{x}|^2/|\vec{x}|^2$ 有什么样的界限？"如果从应用第一个栅到第二个栅之间，时间仍在流逝，则应考虑在这两个时刻之间，波态如何按动力学定律(2)变化。

一个系统决不会完全孤立于自己的周围，所以它的波态总是不断地受到扰动。这就是为什么在讨论已知的波态及其对于栅的反作用这一基础的原生的统计学之上，还要再加上高一层的次生的热力学统计学。在欧氏空间中，长为1的向量的随机分布有先验的概率，按照这个概率，单位球面上面积相等的区域要有相等的概率。这一"标准分布"对于由栅 $G=\{E_1, \cdots, E_r\}$ 定义的 r 个量子态 E_i($i=1, \cdots, r$)各赋以概率 n_i/n，这里 n_i 是 $\mathbf{E}_i$ 的维数，特别是它对于由完全的栅定义的 n 个量子态，各赋以相等的概率。实际的概率分布(吉布斯系综)不必与此标准分布相同。在前节末尾讲过，一个处在一定温度的热环境中系统的特殊的典范分布，是如何由标准分布变来的。现在出现了一个与上面考虑过的问题稍有不同的一般问题：(Ⅱ)"设已给了一个栅 G 以及波态的统计分布，则怎样由此得出(G；i)这些量子态的概率？"在这里要对一个栅和一个系统进行比较，而不是比较两个栅。为了得到解答，要对(1)式给出的依赖于 $\vec{x}$ 的 p_i 按已给的统计分布，在单位球面上作平均。用同样的方法可以求出一个原在量子态(G；i)下的粒子，在用另一个栅 G'作观察后，又出现在量子态(G'；k)下的概率的平均值。不论是提出问题(Ⅰ)还是问题(Ⅱ)，

特别是对于那些由大量粒子构成的系统而言，兴趣将主要集中在可用大的概率来进行预测的那些事件上。在用尼科耳棱镜来分裂一束光线时，个体光子的命运是不可预测的。然而两个部分光线的相对强度却是可以预测的，其精度随光子数目而增加。

对于这里给出的描述，有一点要从头到尾加以修正：所说的 n 维向量空间的坐标 x_j 均非实数而是任意的复数，因此就有绝对值 $|\vec{x}|$ 与相。向量长度的平方，在笛卡儿坐标系下可用坐标绝对值的平方和来表示。在这样一个复空间中，动力学定律(2)的最简单形式是：

$$(3) \qquad \mathrm{d}\vec{x}/\mathrm{d}t = \mathrm{i}\nu\vec{x}, \quad (\mathrm{i} = \sqrt{-1})。$$

这里的 ν 是实数。这时波态 $\vec{x}$ 将做频率为 ν 的简谐振动：

$$\vec{x} = \vec{x}_0\{\cos(\nu t) + \mathrm{i}\sin(\nu t)\} \quad (\vec{x}_0 = \text{常值向量}),$$

所以能量有确定的常数值 $h\nu$（普朗克定律）。但是不论动力学定律(2)是什么样的，空间总可以分裂为一些互相正交的子空间 $\mathbf{E}_j$（$j = 1, \cdots, r$），使得在 $\mathbf{E}_j$ 中方程(3)成立，且方程中有确定的频率 $\nu = \nu_j$。这样得到的栅 $G = \{E_1, \cdots, E_r\}$ 是定常的，而且其作用是筛出不同的频率 ν_j 及相应的能级 $U_j = h\nu_j$。热力学就是以这个 G 为基础的。

E_j 中的任一向量 $\vec{x}$ 都满足方程 $L\vec{x} = \mathrm{i}\nu\cdot\vec{x}$（$\nu = \nu_j$），这一事实用数学语言来说就是：$\vec{x}$ 是算子 L 相应于本征值 $\mathrm{i}\nu$ 的本征向量。算子 $H = \frac{h}{\mathrm{i}}L$ 称为能量，它有同样的本征向量，但相应的本征值则为能级 $h\nu$。一般方程(2)现在成为 $\frac{h}{\mathrm{i}}\frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t} = H\vec{x}$（薛定谔方程）。

未受观察扰动的“物理过程”可用一个没有直觉(anschauliche)解释的数学形式化来表示；只有具体的实验，即用栅来作测量，才可

用直觉的语言来描述。物理过程与测量之对立，与希尔伯特的数学系统的形式化与有意义的思维之对立，有相似之处。正如直觉的数学论证可以形式化一样，用栅 G 来作测量事实上也可以解释为一个物理过程。在这样做时，必须要把原来的系统 Σ 扩充为包括栅 G 在内的系统 Σ^*。但是，一旦我们想要通过具体的词句来得知关于 Σ^* 的某些事，则由动力学定律(2)主宰的未受扰动的事件的进程又一定会中断，因为这时 Σ^* 会受到 Σ^* 之外的栅的检测。

3. 给定了两个系统 Σ，Σ'，它们的合并 $\mathbf{\Sigma} = \Sigma + \Sigma'$ 可以具有所有这样的态(i, k)，即 Σ 的任意态 i 和 Σ' 的任意态 k 组合而成的态。经典物理学对组合的规定就是这样。量子物理学也同样如此，但态要理解为量子态；Σ 的一个(最细的)栅再加上 Σ' 的一个(最细的)栅，就给出 $\mathbf{\Sigma}$ 的一个(最细的)栅。因此，设第一个系统有一个波态，用 m 维欧氏空间 S 的向量 $\vec{x}$ 表示，$\vec{x}$ 在一个笛卡儿坐标系下写为 $\vec{x} = (x_1, \cdots, x_m)$，而对第二个系统，则有一个 n 维空间 S' 中的一般向量 $\vec{y} = (y_1, \cdots, y_n)$，其意义和上面一样。我们得到的结论是，联合系统的波态将由 mn 维的“乘积空间” $\mathbf{S} = S \times S'$ 中的向量

$$\vec{z} = (z_{11}, \cdots, z_{m1}, z_{12}, \cdots, z_{m2}, \cdots, z_{1n}, \cdots, z_{mn})$$

来表示。S 中的一个向量 $\vec{x}$ 与 S' 中的一个向量 $\vec{y}$ 决定了 $\mathbf{S}$ 中的一个向量 $\vec{z} = \vec{x} \times \vec{y}$，其分量为

$$(4) \qquad z_{ik} = x_i y_k \quad (i = 1, \cdots, m; \ k = 1, \cdots, n),$$

此式决定了 $\mathbf{S}$ 中由 S 与 S' 的坐标系下的任意旋转所诱导出来的旋转。因为(4)式给出 $|z_{ik}|^2 = |x_i|^2 |y_k|^2$，所以 Σ 和 Σ' 这两个部分的量子态的概率在 $\mathbf{\Sigma}$ 的一类特殊的波态 $\vec{z} = \vec{x} \times \vec{y}$ 下是独立的。

但是，联合系统 Σ 一切可能的波态的流形比之可以用这两部分的任意波态 $\vec{x}$ 和 $\vec{y}$ 来表示为 $\vec{z} = \vec{x} \times \vec{y}$ 的流形要大得多。事实上，乘积空间的每个向量哪怕不能写成 $\vec{z} = \vec{x} \times \vec{y}$ 的形状，仍然表示一个可能的波态。在这种很根本的意义上，量子物理支持这样一个学说：*整体大于其部分的组合*。一般说来，整个系统的量子态不能由部分系统的量子态的概率，用统计独立性的乘法法则来决定，哪怕这两个部分间没有动力学相互作用时也是这样。

这种考虑对于一对相等的两个系统 Σ，Σ'，例如两个电子，特别重要。那时这两个部分的波态将由同一个欧氏空间 S 来表示，而乘积空间 $S \times S$ 的向量 $\vec{z} = (z_{ik})$（即“张量”）中可以特别分出满足条件 $z_{ki} = -z_{ik}$ 的反对称向量以及满足条件 $z_{ki} = z_{ik}$ 的对称向量。一旦这一对系统 Σ，Σ' 处于反对称波态中，它们就会一直处于反对称波态中；任何外界影响都不会改变这一点，因为相等的粒子将以对称的方式进入作用定律中。因此可以期待，一对电子有一种确定的对称性质，或为反对称的，或为对称的。经验表明，第一种可能性是正确的。对于反对称向量 z_{ik}，方程 $|z_{ii}|^2 = 0$ 必定成立，就是说，两个电子处于同一种完全的量子态 i 的概率为 0；*波态永恒的反对称性，解释了泡利不相容原理*。再没有比该原理更彻底的方式来证明两个电子的量子态的统计独立性了！氢分子至少在一次近似下可以看成是两个电子围绕着两个固定的核，很显然，一对电子的波态的反对称性在计算它们的运动时必会有决定性的影响。事实上，正如伦敦(London)和海特勒(Heitler)后来证明的，它对中性原子在分子中的化学键给出了完全的解释。在经典物理的樊篱之内，这是一个无法解开的谜。

反对称性这个事实也可以从两个电子情况移用于多个电子情况。

因为多个粒子的统计独立性与这个法则有出入，所以把一个有一定波态的电子，一次又一次地送过一个栅，与把一批电子同时送过一个栅，两者是不一样的。对于一批光子也可以作类似的评论。光子的波态是受到对称性而不是反对称性的限制。（我们确知，不相容原理不适用于光子！）在光子理论的最终形式中，并不要求粒子数目为常数。光子不仅可能出现，可能湮没，而且由于狄拉克的一个大胆的解释，还能说明一个正电子和负电子一同湮没而发射出相应能量的光子（即所谓“Zerstrahlung”），以及相反的过程。

4. 现在我把量子物理的在我看来具有最深刻哲学意义的特点概括如下：

（1）观测而不扰动其效果是不可能的，这样的扰动只能在统计意义下预测。这就对主体与客体的关系给出了新启示：主体与客体的联系，比之经典物理所已认识到的更为密切。在第 20 节中说过，一个物体对于其他物体的反作用的定量的结果，不论这个反作用是否已经产生，都应该算作该物体的内禀性质。我们现在看到，这个“欧拉原理”有严重的局限性。在关于心灵的内省（psychic self-observation）方面，有明显的类似于此情况者。

（2）关于两个不同的栅所筛出的特性，用“与”和“或”加以联结，可能是没有意义的。经典逻辑并不适用于量子物理，所以应该代之以某种“量子逻辑”。

（3）因果律对波态的时间变化是成立的，但是在涉及波和量子态的关系时，必须放弃。

（4）整体总是大于部分的组合，对于波态，整体能有多得多的多样性。固定的波态的孤立系统的各部分，即便没有相互作用，一般也不是统计独立的。

(5) 按照莱布尼茨—泡利不相容原理，两个电子不可能处于相同量子态中，这个原理在量子物理中是反对称律(law of antisymmetry)的推论，于是就可以理解了。

(6) 存在着一种原生的概率，它是自然界基本的本性，而与观察者的知或无知没有关系。完全的量子态中的每一个量子态 i 的概率 $|x_i|^2$ 可以由描述这个“波态”的向量 $\vec{x}=(x_1, \cdots, x_n)$ 的分量 x_i 导出。在我看来，这似乎证实了正文中的一种观点，即概率是与某个基本的物理量相联系的，一般说来，只能在支配这个物理量的经验定律的基础上确定。

必须承认，量子物理即令考虑到它的全部成就如此重大，其意义还没有像如对相对论的基本思想那样彻底地弄清。实在与观测的关系问题是中心的问题。我们似乎还需要对以下问题作更深入的认识论的分析：什么构成实验，什么构成观测，用什么语言来传递其结果。这种语言是经典物理的语言吗？玻尔似乎是这样想的，或者这种语言就是我们每个人在日常生活中对待世界，对待他人，甚至是对待自己时使用的“自然语言”？与希尔伯特的数学作一类比，在这门数学中，对具体符号的实际操作，而不是某种“纯粹意识”的素材，构成了基本的“逻辑以外”的基础，这一点似乎暗示了还是使用自然语言。这是否意味着，现代数学和物理学的发展与我们所看到的当代哲学运动的趋势一致，即脱离唯心论而朝向“存在论”的观点？

除了认识论解释的谜以外，量子物理还受到严重的内在困难的困扰；在电磁辐射与(负或正)电子的相互作用上，我们还没有一个真正自洽的(consistent)完全的量子理论，更不用说其他基本粒子了。

现在回到一个比较安全的地方，关于量子物理在第 23 节 C 中所

讨论的过去与将来的问题上取何立场，对此我们想讲几句话。人们希望了解，为什么光只“向着未来”发射。我们已经看到物理学在说明光锥的将来一半与过去一半的区别时，是只保留李纳—维谢尔公式中的推迟势。量子理论把原子中的电子与空腔辐射场的相互作用描述为一连串个别的行为，在每次行为中或发射或吸收光量子，而都是在原子的相应能量跃迁下进行。这些行为的频率公式可以解释为，它指明了每次行为是自然发生的还是外加的。外加行为之频率正比于辐射的密度，而自然发生的则与它无关。外加的部分对于过去与将来是对称的，而自然发生的部分则不然；只有自发的发射，没有自发的吸收。这种不对称性(asymmetry)可以用概率论证来说明，这个论证与导致熵增定律的概率论证属于同一类。因此，光锥的将来一半之不同，根源在于热力学的统计原理，而不在任何的基本定律。

参考文献

P. A. M. DIRAC, *The Principles of Quantum Mechanics*, thrid ed., Oxford, 1947.

J. VON NEUMANN, *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*, Berlin, 1932.

H. WEYL, *Gruppentheorie und Quantenmechanik*, second ed., Leipzig, 1931.

G. WENTZEL, *Einführung in die Quantentheorie der Wellenfelder*, Vienna, 1943.

NIELS BOHR, *Atomic Theory and the Description of Nature*, Cambridge, 1934.

——Kausalität und Komplementarität, *Erkenntnis*, *14*(1937), p. 293.

M. BORN, *Atomic Physics*, transl. by J. DOUGALL, second ed., London & Glasgow, 1937.

——*Experiment and Theory in Physics*, Cambridge Univ. Press, 1943.

H. REICHENBACH, *Philosophic Foundations of Quantum Mechanics*, Univ. of Calif. Press, 1944.

L. ROSENFELD, L'évolution de l'idée de causalité, *Mém. Soc. Roy. Sci. Lièges*, 4e sér., VI (1942).

P. A. SCHILPP (ed.), *Albert Einstein: Philosopher-Scientist*, Library of Living Philosophers Ⅶ, Evanston, Ill., 1949, articles by Niels Bohr, M. Born, W. Heitler, H. Margenau, and W. Pauli.

附录 D　化合价与结构的等级

量子理论用以解释原子现象的符号结构，很可能是原生而不可化约的。与此对比，凯库勒在结构式中用表示价的小棒(即价键)把原子联结成一总体以表示化学分子的构造，这种结构则只有中间的特性。事实上，价键只是作用于原子之间实际的量子物理的力的简化符号，其本身就是复杂的动力系统(complex dynamical systems)。这样就可看出，凯库勒的图式建筑在更初始的结构(即量子力学)之上。这正是希尔伯特一般称之为“基础的深化”(Tieferlegung der Fundamente)之一例。

化学键的理论为结构的等级提供了一个突出的例子，所以我禁不住想比较详细地介绍一下。量子力学认为化学键正是应由电子的自旋和不相容原理这些特性来说明的。位置肯定是电子的一个特性。如果把电子按其位置来分离是一个最细的栅，则电子的波态将是一个(复值)函数 $\Psi(P)$，其变元 P 遍取空间中的一切点[这个向量之长的平方将是 $|\Psi(P)|^2$ 的积分]；f 个电子 1，2，…，f 的总体之波态将

是这些电子的位置P_1，…，P_f的反对称函数$\Psi(P_1, \cdots, P_f)$。不相容原理就是反对称性的推论。因为所有电子内在的相似性，不能想象会有什么样的动力作用能把一个反对称的函数Ψ变成不是反对称的。多个变元i之函数$\Psi(i_1, \cdots, i_f)$，如果在这f个变元的所有$f!$个排列下都不变，它就是对称的；如果所有的偶排列都使它不变，而奇排列则将它变为$-\Psi$，它就是反对称的。变元i的本性并无关系。它可以只取有限多个值$i = 1, 2, \cdots, n$，正如在讲量子力学时，为简单计我们就是这样假设的；变元也可以如P那样，在整个连续统上变化。我们在前面已经看到偶排列与奇排列的区别正是左与右这两种极性的组合基础；我们现在又看到，它又是化学元素的周期性的根本，也是物理世界一些难以用经典物理学概念说明的，具有决定性的显著特性的根本。

光谱学的经验证明了，除了按位置来分离电子之外，更为重要的还有电子束的分裂，例如在磁场影响下一个电子束可以分为两个。我们必然会得出一个结论，即单个电子的波函数$\Psi(P_\rho)$依赖于两个变元，第一个是表示位置的连续变量P，第二个ρ称为自旋，只能取两个值：+1或-1。这个波函数相对于笛卡儿坐标系有两个分量$\Psi(P, +1) = \Psi_+(P)$和$\Psi(P, -1) = \Psi_-(P)$。泡利第一个认识到，当一个坐标系经旋转变为另一个坐标系时，这两个分量按第15节中讲的旋量表示那样变化。f个电子的总体的波函数，则是f对(P_ρ)的反对称函数$\Psi(P_{1\rho 1}, P_{2\rho 2}, \cdots, P_{f\rho f})$。

除了自旋与反对称性外，还有第三种情况是有关的：自旋的动力学影响可以在相当程度的近似下忽略不计。现在设它严格为零，即能量这个动力学算子只作用在位置变量P上而不作用在自旋变量上。一开始我们会以为可以完全忽略自旋。但由于关于(P_ρ)的反

对称性，情况并不如此。令 $\eta(P_1, \cdots, P_f)$是算子 H 的关于本征值 $h\nu$ 的本征函数：$H\eta = h\nu \cdot \eta$，于是 η 表示能量为 $h\nu$ 的一个定常波态。设 η 对其变元 P 是反对称的。考虑到自旋的存在，我们将得到能量为 $h\nu$ 的许多波函数 Ψ，组成一个线性流形。

$$\Psi(P_{1\rho 1}, \cdots, P_{f\rho f}) = \eta(P_1, \cdots, P_f) \cdot \varphi(\rho_1, \cdots, \rho_f)。$$

这里第二个因子 $\varphi(\rho_1, \cdots, \rho_f)$可以是 f 个自旋变量 ρ 的任意函数；但 Ψ 的反对称性要求 φ 为对称的。如果在 f 个变元 $\rho_1, \cdots, \rho_f$中有 g 个取值 $+1$，其余 $f-g$ 个取值 -1，则 $\rho_1, \cdots, \rho_f$的对称函数 φ 将取一定的值 φ_g；而 φ 这个函数将由它能够取的 $f+1$ 个值 $\varphi_f, \varphi_{f-1}, \cdots, \varphi_0$ 所完全刻画。所以对称函数 φ 所成的线性流形是$(f+1)$维的，自旋存在的后果就是能级 $h\nu$ 或称为 ν “项”的多重数(multiplicity)是 $f+1$。只有在考虑到自旋的这个实际存在的微弱相互作用后，这个多重数为 $f+1$ 的项才分裂成为 $f+1$ 个不同的项组合而成的多重线(multiplet)。另一方面，我们暂时考虑一下如果 η 是对称的，又会发生什么情况。这时 φ 一定是反对称的。但是一个反对称函数只要有两个变元相等，就必定为0。因此如果所有的各个变元都只能取两个值，则当 $f>2$ 时这个函数必定恒为0，于是相应于对称的 η 的这些 ν 项就全部被抹掉了，它的多重数成为0。由于自旋空间的维数很低，只能为2，函数 $\varphi(\rho_1, \cdots, \rho_f)$对排列为对称的可能的特性可以只用一个数 v 来表示，这个数称为其价，其值在 $0 \leqslant v \leqslant f$ 中，而与 f 只相差一个偶数。η 为反对称(从而 φ 为对称)的态也称为价为 f 的态。价为 v 的项，由于电子可以任意排列，其多重数为 $v+1$。

我们把中性的原子看作 f 个电荷为 $-e$ 的电子的整体，但这些电子在原子核的场中运动，此原子核位置在中心点 O，而电荷为 $f \cdot e$。

这个模型只应用了非相对论力学，表现在只考虑这些电荷之间的静电力再加上电子的动能。令 $\eta(P_1, \cdots, P_f)$是能量算子 H 相应于项 ν 的反对称本征函数，在这个态 η 下的原子，能量为 $h\nu$，而最高可能的价为 f。（f 个点 $P_1, \cdots, P_f$ 的任意排列将把 η 变为同一项 ν 的本征函数；但由于反对称性，它并不产生排列的多重数。）确实，点 $P_1, \cdots, P_f$ 绕 O 共同旋转的后果也是把 $\eta(P_1, \cdots, P_f)$变为同一项 ν 的本征函数。因此，如果我们想要避免 ν 的“旋转的”多重数，就必须假设电子的阵列 $P_1, \cdots, P_f$ 的函数 $\eta(P_1, \cdots, P_f)$对于所有的旋转不变(即有中心对称)。这样一个定常的波态，在光谱学中称为 S 态。因此，我们假设原子有最高价 f 而且处于 S 态中。在离中心 O 距离大于 r 处找到一个电子的概率$\mathcal{P}(r)$是由 η 决定的，而且发现了$\mathcal{P}(r)$随 r 之增加而指数衰减。

在引入两个对应于自旋的两个值 $\rho = +1$ 和 -1 的“未定元” x_+，x_- 后，对称函数 $\varphi(\rho_1, \cdots, \rho_f)$可以方便地表示成 x_+，x_- 的 f 次代数形式：

$$\sum_{\rho} \varphi(\rho_1, \cdots, \rho_f) x_{\rho_1} \cdots x_{\rho_f} = \sum_{g} \frac{f!}{g!(f-g)!} \varphi_g x_+^g \, x_-^{f-g}$$

系数就是 φ 之值。左边共有 2^f 项，因为每一个 ρ 都可以取 $+1$ 和 -1 两个值，右边的 g 取值范围则为$f, f-1, \cdots, 0$。把未定元 x_+ 和 x_- 看成一个平面向量 x 的两个分量，并对它们作任意的模(modulus)为 1 的线性变换

$$(1) \qquad x_+ = \alpha x'_+ + \beta x'_-, \quad x_- = \gamma x'_+ + \delta x'_-$$

所谓模为 1 即指 $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$。设一个含有多个未定向量 $x, y, \cdots$ 的代数形式 $F(x, y, \cdots)$对 x 之次数为f_a，对 y 的次数为f_b，……如果当 $x, y, \cdots$都用同一个模为 1 的变换(1)变为 $x', y', \cdots$，有

$F(x, y, \cdots) = F(x', y', \cdots)$，就称 F 为一个不变式。

现在考虑若干个中性原子 a，b，…各有 f_a，f_b，…个电子，而其核则分别位于空间中的定点 O_a，O_b，…，设这些原子的每一个都处于最高价的定常 S 态，其能级各为 $h\nu_a$，$h\nu_b$，…，这意味着，这些原子组合成的系统之总能量为 $h\nu_0$，$\nu_0 = \nu_a + \nu_b + \cdots$，而其态则属于一个维数为$(f_a+1)(f_b+1)\cdots$的线性流形 Π。这样做，我们忽略了这些原子的相互作用，而这又违反了所有 $f = f_a + f_b + \cdots$ 个电子的本质的相似性，即对于原子 a，规定有 f_a 个电子在O_a 周边，它们只在自身之间以及与 O_a 处的核相互作用。我们设核 O_a，O_b，…之间的距离 r 对于玻尔半径 h^2/me^2 是很大的数。把各个原子之间的相互作用看成微扰，就知道项 ν_0 被“排列共振”(permutational resonance)按各种可能的价 $v = f, f-2, \cdots$ 分成几个分子的项系统。价 v 的态构成 n_v 维的线性子流形 Π_v，它们在微扰近似下，作为一个整体对于能量算子 H 是不变的，因此是定常的。相应的 n_v 个项 $\nu = \nu_0 + \Delta\nu$ 和各个分子的定常态应该是H 作用在 Π_v 上的本征值与本征函数。因为在价为 v 的态下的分子之 n_v 个项 ν，每一项都有多重数$v+1$，比较维数即得方程

$$(f_a+1)(f_b+1)\cdots = \sum_v n_v(v+1)。$$

平移 $\Delta\nu = V(O_a, O_b, \cdots)$ 是核的阵列 O_a，O_b，…的函数，而且与上面提到的概率$\mathcal{P}(r)$是同样类型的，即随 r 之增加有指数衰减。这解释了中性原子间的同极键(homopolar bond)是短程力这一事实。[两个距离为 r 的电荷相反的离子之互相吸引的异极键(heteropolar bond)没有什么神秘。它的能量服从库仑定律而为 $1/r$，因此其吸引力是长程力。]

把未定元的二元向量 $x=(x_+, x_-)$，y，… 各赋予原子 a，b，… 然后再加一个“自由”向量 l。这时 Π_v 最好用依赖于所有这些未定元向量 x，y，…，l 且次数各为已给的 f_a，f_b，…，v 的不变式 $J(x, y, \cdots, l)$ 之线性流形来描述。细节在这里无关紧要。但是有一点现在应该很清楚了，这就是：二维向量和对线性变换的不变性在这里很有作用，因为有自旋，电子的态 (φ_+, φ_-) 就是一个这样的向量。Π_v 的维数 n_v 就是线性无关的对自由向量 l 的次数为 v（对向量 x，y，…各为 f_a，f_b，…次）的不变式之个数。

最简单的线性依赖于两个未定元向量 x，y 的不变式，就是“括弧因子”$[xy]=x_+y_- - x_-y_+$。这种括弧因子的任意的积，都称为单项不变式。一个单项不变式可以用一个图式来完全地描述。其中每个向量变元 x，y，…，l 各用一点来表示，而如 $[xy]$ 这样的括弧因子则用联结 x，y 两点的线段来表示。（而含有自由向量 l 的括弧因子 $[xl]$ 也用一条短线表示，其一端为 x，另一端则空着。）单项不变式的次数 f_a，f_b，…，v 就是分别连到这些点的短线的个数。因此，单项不变式就完全对应于凯库勒价图（Kekulé valence diagrams）。所以我们将把这个不变式表示的态称为纯粹价态。不变式理论的第一个主要定理就是：每个给定次数的不变式都是这些次数的单项不变式的线性组合。

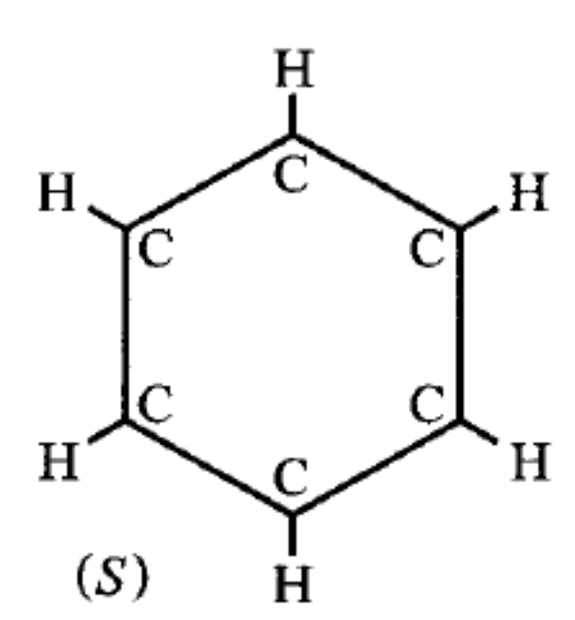
含两个其价各为 a，b（$a \geqslant b$）的原子 x，y 的分子，对于每一个可能的分子价 $v=a+b-2d$，$d=0, 1, \cdots, b$，只有一个不变式：

$$[xy]^d[xl]^{a-d}[yl]^{b-d}。$$

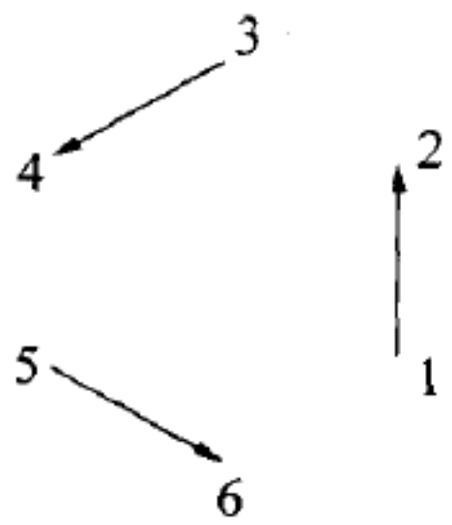
这正相应于我们所期望的价图；d 为联结两个原子的价键之数目，$a-d$ 与 $b-d$ 分别是由 x 和 y 发出的自由价键的数目。对于分子的

相应的项 $\nu_0+\Delta\nu$，我们有 $\Delta\nu=\lambda\cdot V(r)$，这里 $V(r)$是两个原子的距离 r 的函数，它与 d 无关，形式因子 $\lambda=(a-d)(b-d)-d$ 则含有 d 但是不含 r。函数 $V(r)$很难计算，但在最简单的情况下，当 r 很大时它为正。假设这一般也是正确的，则对应于形式因子 λ 为负或正，我们会得到吸引力或排斥力。$d=b$ 时 λ 为负；但因 λ 由 $-b$ 变到 ab，而 d 只取值 b，$b-1$，…，0，所以只对最强的键 $d=b$，或者还对少数几个较强的键 $d=b$，$b-1$，…形式因子为负。

如果有多于两个原子参加进来，图形的情况稍有不同。这时，由于在单项不变式之间有线性关系存在，线性无关的不变式的数目 n_v 会小于具有 v 条自由价键的可能图式的数目。此外，具有一定能级 $\nu_0+\Delta\nu$ 的各个个别定常态，不再与纯粹价态相重合。在化学中对此有明显的指示。例如凯库勒著名的苯环公式，即由 6 个 CH 基团(group)规则排列而成，预见了会有两种可能性，而对邻位衍生物(ortho-derivatives)的研究证明自然界中只有一种。价图 S 所示的骨架具有完全的六边形对称性，这正是人们期望于苯环的；但是在每个 C 原子上都还留有一个价电子未曾联结。在一个固定的骨架上有多余的价电子可以把不同的键接态叠加上去，这个概念可能是一种缺少正当理由的简化，但作为走出的第一步是有用的，而且把我们的问题(其中事实上有 42 个电子)归结为 6 个相同的单电子原子排列在边长为 r 的正六边形上。在这里，价 0 的态构成了所有线性依赖于 6 个变元向量 1，2，3，4，5，6 的不变式的线性流形。下面 5 个单项不变式 A，A'；B_1，B_2，B_3 就是这个流形的基底。(应该把它们的图式叠加到骨架 S 上去，相应的 5 个纯粹价态处于“共振”中。)不

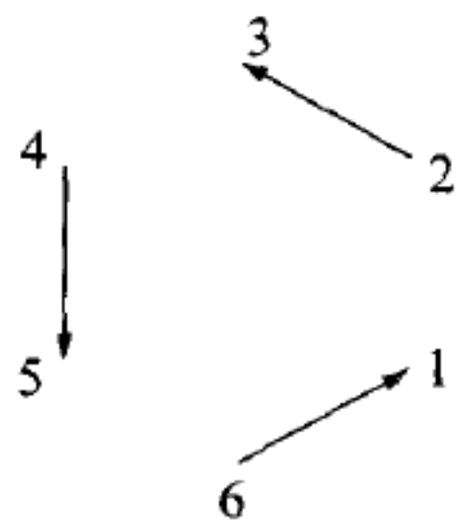


(S)



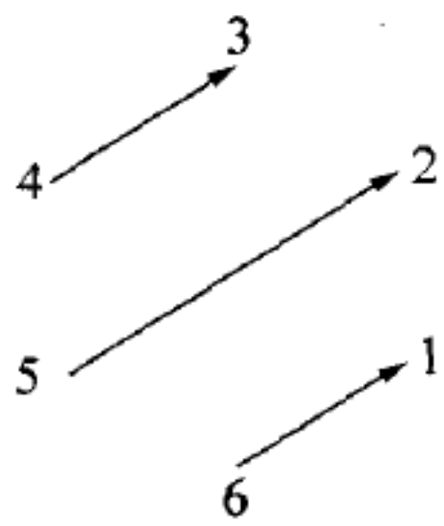
[12][34][56]

A



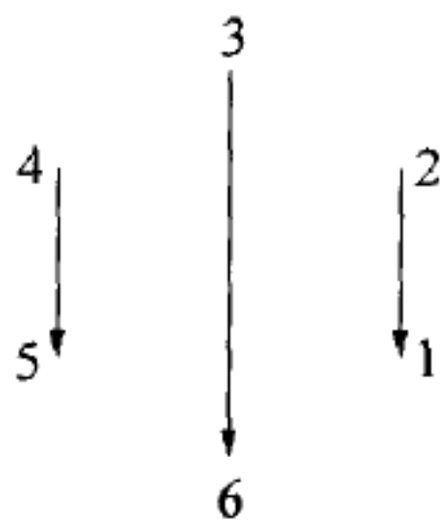
[23][45][61]

A'



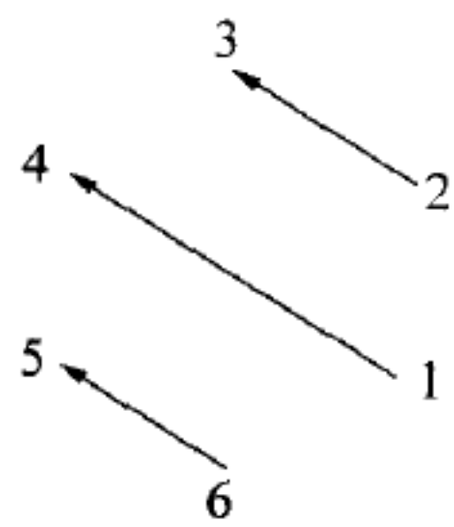
[61][52][43]

B_1



[21][36][45]

B_2



[23][14][65]

B_3

同定常态 η 的项平移 $\Delta\nu = \lambda \cdot V(r)$ 之区别在于形式因子 λ；然而，势函数 $V(r)$是短程指数型的公共因子。下表是各个定常态及其形式的因子 λ：

$A + A'$	$\lambda = 0$
$\beta_1 B_1 + \beta_2 B_2 + \beta_3 B_3 \quad (\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 0)$	$\lambda = 2$
$6(A - A') - (1 + \sqrt{13})(B_1 + B_2 + B_3)$	$\lambda = 1 + \sqrt{13}$
$\eta = 6(A - A') - (1 - \sqrt{13})(B_1 + B_2 + B_3)$	$\lambda = 1 - \sqrt{13} < 0$

我们知道，λ 为负意味着在相应的量子态 η 下存在一个稳定的分子。上表中只有最后一行的 η 满足这条件，所以正是这个 η 指明了应该在这个方向对凯库勒的苯的公式进行量子力学的修正，即对凯库勒的两个图式所描绘的单项不变式 A 和 A'之差，还要加上由杜瓦(Dewar)的 3 个图式 B_1，B_2，B_3 所表示的项之和的倍数。($A - A'$

和 $B_1 + B_2 + B_3$ 都在六边形旋转 60° 时变号，而在对 3 条对角线之任一条作反射时不变。)[1]

接近相等能级的态之间的量子力学共振的概念，在现代结构化学中起重要作用。与此同时，人们力求坚持很好地经过检验，且令人信服的价的格式，而把共振所需的修正维持在最低限度；在绝大多数情况下，人们满足于由经验的观察而非计算来决定微扰的能量。这个在此以苯环的经典例子所说明的保守的程序，取得了惊人的成功——甚至使那些过于拘泥的数学家吃惊，他们对于作为这种程序之基础的近似性质的若干“似为有理”的假设，感到很难认同。（在现在正在研制的高速计算机的帮助下，很快就能获得更为精确的分析。）

最后我要讲一下从这一段关于量子力学化学的很长的插叙中，得到了什么样的教益。这就是关于结构的等级(hierarchy of structures)。在最深的层次 α 上有量子力学本身的结构，应用这种结构，我们似乎已能解释所有关于光谱学和化学的事实，简言之，即不涉及原子核内部结构的所有物理事实。在第二个层次 β 上，则是表示分子的各种可能的态的结构，这个结构是二元不变式的线性流形。这个图景就只有有限的真理性了。特别是，它并不是把分子当成已经完成了的东西来讲，而是把分子看作分子中的原子的总体，这些原子之核固定在一个距离上，而这个距离比之原子自身的尺度又是很大的。此外，对于个别的原子，对其电子的排列与电子的构形在空间的旋转，又作了尽可能简单的假设。在第三个层次 γ 上，为解释化学事实，使用了价图的结构。从 β 看来，γ 这个图景在一个基本方面是正确的：分子所有可能的态(即所有不变式)，其实是纯粹价状态(即单项不变式)的线性组合。但是它在另外三个方面都错了：(1)不是仅有少数几个如纯粹价状态那样离散的态存在，而是波态形成整个线性

流形，这当然是经典力学和量子力学之间决定性的对立。(2)忽略了单项不变式之间的线性关系，这就使得独立可能性的数目 n_v 太大。(3) n_v 个定常量子态一般并不就是纯粹价状态中的哪一个，而是它们的某些线性组合。

历史发展的顺序和我们叙述的顺序相反，它是逐步向下深入到更深的层次：$\gamma \rightarrow \beta \rightarrow \alpha$。凯库勒是在 1859 年发展了他的化学结构的图式方法的。中间的 β 层次则是西尔维斯特(J. J. Sylvester)在 1878 年达到的[2][在他以后则是德国不变式理论家哥尔丹(P. Gordan)和俄国化学家阿列克谢耶夫(W. Alexejeff)]。然而因为对不变式的加法以及用以确定结合力和实际定常态的动力学定律缺少物理解释，化学家们一直坚持他们熟悉的价图。我们今天可以看到，只有如量子力学那样彻底地背离原有的理论，才能揭示西尔维斯特偶然发现的那个图景的意义，尽管此图景非常具有吸引力，他却一直视之为纯粹形式的数学类比。

这个故事的教训是很明显的：不要太过于从字面上来看待如价图那种最初步的组合模式，对于一大堆似乎不相容的事实，它们是一个有用的初步导引。对于简单几笔就画出来的关于实在的图形，不能指望它就足以显出明暗光影的全部变化。然而即便如此，工匠们也要有勇气勾出这几笔。毫无疑问，遗传学中的基因总体及其联结，作为一种结构也是如同化学中的价图一样，具有初步的特性。对于细胞的细胞学研究揭示出了染色体的复杂运动以及形形色色的物理过程，它们的各个部分都可以连续地变化，而对于其结果，离散的基因图只不过是效用有限的简写的摘要。所以我不能过于保证附录 B 中描述的原始的组合模式即已足够，然而最好还是先把图像画得尽可能确定，不论它的价值如何有限。[这就是库萨的尼古拉(Nicolaus

Cusanus)在他的《有学问的无知者》(*De docta ignorantia*)一书中强调的原理：如果我们只能通过形象和符号的媒介才能达到超验的东西，至少应该让符号成为数学所许可的那样清晰而无疑义。]

下一个附录里讲到的事实，使人们几乎不会怀疑遗传的法则亦如化学的法则那样，其最终的结构仍是：量子力学的结构。一个结构，如果能够用于把遗传图式和量子物理连接起来，则此结构应该能够说明生命之载体的化学复杂性。最简单的组合实体可能就是 n 个物体的 $n!$ 个排列所成的群。对于不同的数 n，这个群的组成不同。问题在于是否仍有某种渐近的一致性覆盖了一切大的 n，或至少某一类大的 n。对于这一类问题，数学所知甚少。人们会设想，生命过程的量子理论是否与这类问题的解决有关。

附录 C 中描述的量子结构目前已经被物理学家接受为最终的层次，但对此表示怀疑的哲学家可能会想这种还原是否并不止于这一步，而最后一步暂时还只是倒推到无限(*regressus ad infinitum*)。但是，科学家警告说，如果没有新的发现向我们展示新的具体情况，并迫使我们对基础作进一步的深化，而只是在思想中玩弄各种可能性，虽然最为省劲，却必是最无所得。

物理现象都是在时空这个连续伸展的介质中铺展开来的；正是这一个侧面在相当程度上主宰了关于自然科学的认识论的思想。本书正文所做的努力，就是把迄至 1926 年的这些思想汇集起来。这是有历史依据的、广义相对论的成就，在那时还很新鲜，更加强了这种观点。但近 20 年来，自然现象下面不连续的组合的结构，变得越来越有意义。这里似乎出现了一个新的层次，而我们通常的语言可悲地不足以描述它。前面几个附录证实了这个变化了的总的概观。然而，我们除了把有关的材料收拢起来以外，无法再多做些什么；从哲

学上把它看透彻，主要还有待于未来的工作。

参考文献

M. BORN, *Chemische Bindung und Quantenmechanik*, Ergebnisse der exakten Naturwissenschaften, vol. 10, Berlin, 1931.

LINUS PAULING, *The Nature of the Chemical Bond*, second ed., Cornell University Press, 1945.

W. G. PALMER, *Valency, Classical and Modern*, Cambridge, 1944.

附录 E　物理学与生物学

1. 自然界中最深奥的谜之一，就是无生命的物质与有生命的物质的对比。然而，可以逻辑地刻画生命现象：活的物质与死的物质相隔一个深渊。生命只存在于这样的物质系统中，这些系统从物理化学角度来看，都被认为是高度复杂的。如果只用描述的方式而且不求完备，我们可以列举有生命的生物体某些典型的特性如下：它们由基本单位细胞组成，而细胞在较基本的特性上是一致的；细胞作为一种形式(morphé，Gestalt)与作为一个功能的复合体，具有整体性，它的所有分化都可互相调节[用歌德的话来说就是“可能发展为生命的，完成了的形式”(geprägte Form，die lebend sich entwickelt)]；具有通过代谢而以异种物质为食物，摄入到自身组织之内的能力；通过吸收食物以及生长和分化而由较简单的状态发展为较复杂的状态；虽有内部不稳定性，但作为一个已经分化的整体，在变动着的外界影响下，特别是在分子热运动的扰动下，却有广泛深远但并非无限的维持自身的能力，且在扰动的侵害之后又能恢复其自身；个体的存在在时间上

的局限性(生与死)；把自身的组成传递到其后代的能力。死的物质是无生气的，生命体却是活性的源泉，在生命体的世界中攀登得越高，这种活动就越明显地带有自发性的烙印(而以有意志的行动为其高潮)。它既能感受刺激(其最高层次即为知觉)，又具有把刺激得来的经验储存起来的能力(记忆力)。生命展开为极大一群物种，而且通常具有多种多样的构成，生命体织成了彼此之间以及对于环境的适应与相互关系的密网。

生命体及其基本特性，似乎已由科学的分析还原为最终的单元及其最基本的一个性质：基因及其自我复制的能力。模本的基因通过这个物质过程，利用活细胞中可以得到的物质合成一个复本。顺便提一下，由于发现了病毒，有生命的物质与无生命的物质之间的鸿沟，已经在一定程度上被填补起来了。病毒是一种亚显微的实体，除非放在一定的活细胞中，它的性态就和死的无生命的物质一样。然而，一旦寄生在这些细胞中，又会表现出生命的基本特征——自我复制与突变。另一方面，许多病毒又具有典型的无生命的物质才具有的结构；它们是晶体。它们的大小介于比较复杂的蛋白质分子和比较小的细菌之间。在化学上，它们和基因一样都是由核蛋白组成的。病毒很清楚地像是一个裸基因。研究得最多的病毒是烟草花叶病的病毒，它就是一个大分子量的核蛋白，其分子量的95%是蛋白质，5%是核酸；它结晶为一细长的针形。

由物理学所发现，而化学也受其节制的关于物质的基本定律，无疑也管辖着有生命的物质。因此，如量子理论带来的物理学的深刻变化在生物学中必有反响。只要由比较简单的构形进到比较复杂的构形，仍然是科学中的方法论上的可靠途径，生物学就必定要基于物理学而不是相反。有生命物质的特定性质必须在适用于所有物质的

一般定律内加以研究；必须摒弃那种整体论(holism)的观点，即先有关于生命的理论，再通过剥夺什么而下降到无生命的理论。因此，量子力学把关于整体性(wholeness)、组织、非因果性(acausality)这些最简单、最清楚的特性，也赋予物质的所有基本成分是很重要的。在这方面，无疑出现了物理学与生物学的接近(*rapprochement*)。结构与组织并非专属于有生命的存在；物理学是彻底地熟知这个侧面的，早就用理论的符号工具来表示它们，而在有了这种符号工具以后，才有各种动力学定律。当在一个生物体的生命循环中，不多几个原子就能对大尺度的事件有一种控制作用时，在这种场合，关于原子过程的量子物理学就会与生物学有关。(今天的无线电真空管就是最为人们熟知的无生命物质中的控制作用的例子。)

在广泛的经验基础上，遗传学提供了最令人信服的例证，证明生物体是受到原子范围内的过程的控制的，在这里可以感觉到量子力学的非因果性。在19世纪、20世纪之交，当普朗克把作用量子引入物理学时，德弗里斯(de Vries)也发现了樱草(Oenothera)的遗传成分有跳跃式的突变(肯定地说，现在已经认识到这种突变大部分是结构突变而非点突变)。为了从物理上理解突变，用X射线照射染色体使之人为地产生突变，已经证明极具重要性。X射线可以诱导出突变，仅仅这一事实，就足以证明基因是一种物理结构。当X射线照到物质上时，这个或那个光子放弃自己全部或大部能量给快速的次生电子，接着后者又在原子的一连串离子化(ionization)[或激发(excitation)]中失去其能量。离子化的平均能量约为30电子伏特。穆勒(H. J. Muller)、季莫夫-雷索维斯基(N. W. Timoféeff-Ressowsky)等人用巧妙的方法建立了关于诱导突变的比率的简单定量定律。这些结果指出，突变只产生于一次碰击，而不是多次碰击的协同作用，且这

一次碰击就是一次离子化，而不是如人们可能设想的那样，由 X 射线光子直接释放出，或者由吸收次生电子的全部能量而产生的过程。

这些事实使人想到了一个假设，即基因是一个具有高度复杂结构的（核蛋白）分子，它的突变来自其键电子的离子化，这样，等位基因基本上是异构分子。量子物理能够设计出的最基本的化学变化是局部化的两步量子跃迁——第一步，分子由能级 1 提升到较高的能级 2，再从那里降到一个能级 3 为新稳定的态，2 减 1 的差，是必需的激活能 U。一个特定的需要激活能 U 的量子跃迁，在一已给定的温度下能自发地发生的比率，基本上只依赖于 U，但是随 U 的变化极强（服从指数律）。在目前的地球表面的温度下，相应于比如说在 1.4 至 1.7 的 U，量子跃迁只是偶尔会发生的罕见事件。（对于较低的 U，相应的量子跃迁则很频繁，使得统计的大数律能起作用；它们使得那些在生物体的发展中进行的化学反应能够发生。）这使人们不禁会把突变解释为上面说到的，在所述激活能范围中罕见的量子跃迁，以此来完成整个图景[德尔布吕克模型（Delbrück's model）]。[1]如果一个特定的突变需要在基因的一个临界体积（“靶”）内发生碰击，则所观察到的突变率就可以得到解释了，这个临界体积的大小约为 5—10 A 立方（即 5—10 个原子距离的立方）。在一个特定点上发生需要激活能约为 1.5 的量子跃迁，可以由在 5—10 A 立方这一敏感体积内的 30 电子伏特的碰击造成。物理学家发现，这是很可能的，至少是可以接受的。观察到的自发突变率的热变化（范托夫因子），与这个图景在定量上很好地符合。

有好几种估计基因大小与分子量的方法。大多数辐射实验是关于所谓隐性致死（recessive lethals）的突变的。在这种突变中，有很大百分比来自剥夺基因再生能力的离子化（其余则来自总的结构突

变）。第一类致死大概类似于酶和病毒的灭活（inactivation）。这些过程，也是来自单个的离子化，对它们可以用 X 射线的绝对剂量，或者用各种不同辐射的相对效率，来确定靶的大小。人们发现，靶的半径约为酶分子或病毒的一倍到五分之一那么小。因此，基因对于“第一类”隐性致死突变的整体，其靶的大小不应比基因小得太多。另一种确定基因大小或者其大小上限的方法如下：果蝇唾腺的大为放大了的染色体上有一些带状物的交叉条纹，这些带状物的宽度与形状显著地各有特点，而遗传学与细胞学的发现互相平行，证实了如下的假设，即这些带状物正相应于基因或基因组，而它们则组成了大染色体的许多平行条形物。这几个方法在一点上是一致的，即基因的分子量的数量级是 100 万（即氢原子量的 100 万倍）。考虑到核酸的线状的分子之分子量约为 5 万到数十万，而个别烟草花叶病毒之分子量可以达到 4000 万这个数目，对上述基因分子量的估计是很可能的。

近 10 年来的研究对于一个特殊的假设并不有利。这个假设就是，突变是来自局部化且限于少数几个原子的量子跃迁。发现了一些复杂情况。一个极端的例子是，斯坦利（W. M. Stanley）发现了烟草花叶病毒有一种自发突变，通过增加大约 1000 个组氨酸分子，改变了其化学分子结构。这就迫使人们想到有某种机制使得个别的离子化会启动一连串（酶？）反应，而最终的结果则是复杂的突变。即令如此，我们的模型所指出的方向很难说是欺骗性的；基因应看作是复杂的分子，其突变则与量子跃迁密切相关。突变可以由单个离子化造成，所以我们可以和约尔丹（P. Jordan）一样断定：“生命的操控中心并不服从宏观物理的因果性，而存在于微观物理的自由性领域内。”附带说一下，可以分离出来并用电子显微镜观察的病毒，在研究突变过程的物理过程上，在许多方面都是比细胞染色体中看不见的

基因更好的研究对象。

受精卵的核被认为由其遗传成分决定了生物体后来的全部发展。早前人们时常发现，把这种观点与动植物极大的多样性、不同的发展过程及其细微的差别调和起来有极大的困难——这又与“先成论”(preformation)和“后成论”(epigenesis)的矛盾问题密切相关。然而，基因分子中的原子之各种排列为数之大难以想象(请与附录 A 中讲的符号组合的特征数相比较)，实在远远超出为解释这些多样性之所必需。这样，细胞核中基因分子所包含的极细小的密码，能够精确地对应于高度复杂的特定的发展方案，并且以某种方式包含了使此方案能付诸运作的手段，这也就不足为奇了。德里施在一个著名实验中，把一个 Clavellina 切掉上端的 1/3，即其鳃筐(gill basket)，成了一个无定形的细胞团，但后来又发育成了一个新的较小的完整 Clavellina。他从这个实验中看到了不能用物理结构来表示的生机(entelechy)存在的证明。今天我们已经找到了一种很确定的物理结构可以作为生机。如何从各种组合的可能性中选出一种，这是另外一个问题；它涉及(i)复杂的分子组合的物理化学稳定性问题，(ii)“密码”被翻译为生物体的发展机制问题，(iii)进化过程问题。

分子的稳定性来自其原子之间的化学键。正如前面讲到的，量子物理学第一次对化学键的相当模糊的本质，投射了一线光芒。晶体(例如钻石)是原子(对于钻石，是 C 原子)的很规则的图案。这个图案在三个独立的空间方向上有周期性。在这里，链联结到每一个原子上，使得整个晶体似为一个分子一样。固体的稳定性就是晶体的稳定性，而如果德尔布吕克模型基本正确，则基因的稳定性也是基于同样的量子论的基础。然而对于晶体，是同样的构件周期地重

复，而基因中的每个原子都有其特定的、不可互换的位置与作用。因此，薛定谔说基因是一个无周期的晶体，而比之周期的晶体，赋有更高程度的秩序与组织。如果说自然界的宏观秩序与正规性是基于统计的热力学的微观无序性，我们这里在晶体与细胞核中遇到的则是一种没有被热的无序性掩盖的秩序。与通常的化学反应比较，化学反应的定律是通过对大量的分子过程的平均而得到的，突变则是攻击单个基因。因为(a)合子的秩序是通过自我复制和有丝分裂传递到体细胞的，(b)细胞染色体中相对微小而且适当排列的原子颗粒控制了有生命物体的发育，在突变的基因中少数几个原子的错位就造成了一个生物体的宏观遗传特性的适当定义了的变化。在没有对(a)和(b)这两种过程的深层机制得到洞察以前，我们就不能说已经了解了个体发育。

一方面，过去四五十年中形式遗传学大踏步地前进，另一方面，我们在这些领域中的知识还是十分概略的。至于自我复制这个中心问题，德尔布吕克近来(1941)大胆地提出一个详细但又承认为假设性的图景：设想氨基酸是串起来的，而利用在肽的联结位置上的量子共振以模仿先已存在的基因模型。基因与可以看见的特性的联系，例如果蝇的称为 jaunty 的翅膀形状与基因的联系，肯定是一连串中间活动的结果。因此，近来注意力集中到对于酶的活动的控制，是向前进的重要一步；有许多经验都指出了基因和特定的酶之间有密切的关系[例如可参见比德尔(G. W. Beadle)等人最近关于脉孢菌(Neurospora)的工作]。当一小粒固体的结晶物质能使同样物质的饱和溶液结晶时，我们见证了秩序之萌芽是如何把秩序传播开去的。虽然我们现在还不能追寻这个过程的理论细节，但它不会超越我们已知的物理定律的范围却是没有疑问的。科学会紧追不舍地分

析生物体中的秩序这个多种多样的过程，怎样会以基本上相同的方式，依赖于量子物理学及其原生的统计学这一最终的基础。但是可能有以下意义下的分叉出现：既然无序(disorder)可以通过热力学这个次生的统计学转化为有序(order)，所以由生物体中小尺度的秩序产生大尺度的秩序，也可以用平行于此的另一种类型的宏观定律来说明(薛定谔)。

2. 突变是一种可以清楚地认识到的非因果性的元素渗入了生物体的性态之中。既然我的知觉和行动一般说来是无数个别的原子过程的合力，那么有一个事实就很值得注意，即在有利的情况下，很少几个光子(不多于5到8个)就能激起关于光的视觉。因此，由基因的量子突变以及几个光子的刺激转化为视觉开始，人们还要走很长很长的路程，才能得到自己所面对着的完全的心理物理学的实在，并对此作出完整的理性的图景，这样才能说明自由洞见和自由意志这些事实。“虽然人类自由之门已经打开了，”爱丁顿在《科学的新途径》一书第87页中说，“这扇门并未大开；只是透进了一线光芒。但是这扇门不再是真正锁上的了，一切为把这扇门开得更大的努力都应受到鼓励。”我们可以问，突变的例子究竟有多大的代表性？生命过程在多大程度上可以归结为一小群原子的未曾前定的行为之触发作用？物理学家约尔丹曾经争论说，在很大程度上事情就是这样，但是在生物学家中有很强的反对。薛定谔也警告说，如果不是宏观的热力学定律几乎完全精细可靠地主宰着人体的神经和大脑过程，以及人与周围世界的相互作用，知觉和思想都是不可能的。然而，玻尔却倾向于扩大不确定性的范围，即在充分确立的海森伯量子力学不确定度原理之外，再加上一个特定的生物学的不确定度原理(其确切的内容尚为未知)。在这方面他还指出，若要对受试者的脑细胞的状态

做相当准确的观察，以便确定地预测他在以后短短几秒钟的行为，这是一种侵犯，可能会召来一种必然是致命的后果——这样也就使这个生物体成为完全可以预测的了。玻尔坚持认为，以这样的方式，用物理概念来分析生命现象，必有其自然的限度；正如人们为了解释原子的稳定性，就不得不忍受由海森伯不确定度原理所表现出来的互补性一样，想要说明有生命的生物体的自稳定性(self-stabilization)，就不能不要求人们作进一步的牺牲。

我们在正文中以判断 2 + 2 为 4 这样的理论活动来引出自由这个问题的突出的特点。如果对于思想，否定了它确有进行单个心灵活动的力量，即在心智上作出 2 + 2 确实为 4 的判断，而且它不仅有进行个别心灵活动的力量，还有力量让我的嘴唇动一动，念出一些含义正是 2 + 2 = 4 的字眼，甚至还有力量让我的手也动一动，比方说在做数学证明这个环境中，在纸上写出“2 + 2 = 4”的字迹，思想如果没有这些力量，它也就不成其为思想了。因此，只是在自然界的严格因果性上打一个洞还不够，还需要在理论中为生命的、心灵的和精神的因素找出一种表示，以便以某种方式指导与操控原子过程。在掌握自然界的先于一切理论的整体时，不要忽视了这些特性肯定是重要的。施佩曼(H. Spemann)在总结他一生的工作时得到如下结论：“发育的过程……就它们之互相联结而言，在我们知道得如此清楚的那些过程中，绝比不上那些我们有最亲密的知识的有关生命的过程，即心灵过程。”这样的声音——它不是孤立的声音——我们应当留意。然而我们仍相信，在关于实在的理论中，这里讨论的理想的因素应该用这样的结构来表示，这种结构有一点与物理学的基本粒子和它们的力的表示方法基本一致，即要用符号来表示。我并不是对于正文中的建议有不当的信心，即认为只要把这些原子过程相关起来，并

如热力学中那样，把它们作为统计独立地来处理就能达到目的。确实，量子力学的例子又一次证明了，在一个问题的解决尚未成熟时，实在(reality)总会远远地超越我们的想象力之所能及。即令如此，用泡利不相容原理来解释化学键，提示了与统计独立性这个经典的模式彻底决裂，正是打开了门，这与量子力学的互补性有同样重大的意义。

科学家如果忽视了这样一个事实，即理论的构建并不是研究生命现象的唯一道路，他就犯了大错。另一条路在我们面前开放着，那就是从内部来理解(解释)生命。最近沃尔特雷克(Woltereck)在一本流行很广的书《有生命的实在的哲学》(*Philosophie der Lebendigen Wirklichkeit*)中，大胆且比较详细地描述了生物之生命的“内部”是怎么回事。我对于自己，对自己的知觉、思想、意志、感觉和作为，有直接的知识，而与那些用符号来表示的“并行”的大脑过程的理论知识全然不同。这种对我自己的内在的自觉，提供了一个基础，使我能理解我所见到的并且认为是和我同类的人，与他们交流，有时关系十分密切，还能与他们分享欢乐与忧愁。即令我不能如理解自己的意识一样去理解他们的意识，我对他们的“解释性”的理解，却有无可争辩的充分的领悟。这种“解释”之光，不仅照耀着我的同类同胞，而且深深地透入了动物的王国，尽管越来越模糊，越来越不确定。施韦泽(Albert Schweitzer)嘲笑了康德的狭隘见解，即认为人会怜悯其他生物，但不会与它们分享快乐，他的嘲笑是对的，他质问说：“难道他从来没有见过牛从田地里饮水回家吗？”把“从内部”掌握自然贬为拟人化而把理论的构建提高为具有客体性，这是没有根据的。这两条路可以说是走的不同方向：人啊！对于理论最为一片漆黑的东西，对于“从内部”来解释、领悟却是一片光明；对于最容

易用理论来接近的基本的无生命过程，要想解释，却是不得其门。对于客体的理论，从内部理解可能是对重要问题的导引，然而不可能提供客体的解答。用“嗜好”来研究动物本能行为的方向，是一个新近的例子。

把玻尔关于互补性的思想延伸到足以涵盖这里讨论的两种相反的接近途径，这是很诱人的。但是不论人们如何看待孰重孰轻，总不能回避下面的明显而不容否认的事实：构造性理论这条路，近三个世纪已经证明是一条逐步取得进展之路，其广度与深度似乎都是无限的；在这里，解决一个问题就会出现新的问题，而通过思考与实验的协同努力，总可以找到精确的、具有普遍说服力的解答。与此对照，从内部求理解，其范围则为人类的本性所限，又是永远固定了的，最多是通过语言的精炼，特别是出自诗人之口的语言，稍微拓宽一点。理解，由于它是具体的、充实的，总是少了“空洞的符号”所提供的自由。如沃尔特雷克所主张的那种“从内部”开始的生物学，我则担心不会有新问题所带来的无穷无尽的推动，而正是这些问题的推动，驱使构造性生物学不断前进。

参考文献

W. M. STANLEY, Chemical properties of viruses, in *The Study of Man*, Bicentennial Conference, Univ. of Pennsylvania Press, 1941.

G. W. BEADLE, The Gene, *Proc. Am. Phil. Soc.*, *90*(1946), pp. 422—431.

H. J. MULLER, The Gene, *Proc. Roy. Soc.*, *B134*(1947), pp. 1—37.

H. SPEMANN, *Embryonic Development and Induction*, Yale Univ. Press, 1938 (esp. p. 372).

E. SCHRÖDINGER, *What is Life?*, Cambridge and New York, 1945.

D. E. LEA, *Actions of Radiations on Living Cells*, Cambridge and New York, 1946.

R. GOLDSCHMIDT, *Physiological Genetics*, New York, 1938.

M. DELBRÜCK, *Cold Spring Harb. Symp. on Quant. Biology*, *9*(1941), pp. 122—126.

NIELS BOHR, Light and Life, *Nature*, 131 (1933), pp. 421, 457.

——Biology and Atomic Physics, *Rend. gener. celebr. Galvani*, Bologna, 1938.

P. JORDAN, *Naturwissenschaften*, *20* (1932), p. 815; *22* (1934), p. 485; *26* (1938), p. 537.

——*Erkenntnis*, *4* (1934), p. 215.

——Zur Quanten-Biologie, *Biol. Zbl.*, *59* (1939), pp. 1—39.

——*Die Physik und das Geheimnis des organischen Lebens*, Braunschweig, 1941.

R. WOLTERECK, *Philosophie der lebendigen Wirklichkeit*. Bd. 1: *Grundzüge einer allgemeinen Biologie*, Stuttgart, 1931; Bd. 2: *Ontologie des Lebendigen*, Stuttgart, 1940.

附录 F　物理世界的主要特征；形态和进化

鲸就是一条喷水的、尾巴扁平的鱼。

——梅尔维尔(H. Melville),《白鲸记》(*Moby Dick*),第 32 章

生命是不会休止的,生命在一切事物之前。你说你不在意是愚蠢的。你很在意。正是这种在意激发了你的想象力;燃起了你的欲望;使你的意志无可抗拒,而从虚无中创造。——蛇对夏娃(Eve)这样说。

——萧伯纳(G. B. Shaw),

《回到玛土撒拉》*(*Back to Methuselah*),第 1 幕

再见,再见! 我告诉你,

你,婚宴的客人!

---

* 玛土撒拉,《圣经》中亚当的子孙。见《创世记》,第 5 章,第 21 节。——译者

不论是人还是鸟兽，

他都对之深爱，为之祈祷。

——柯勒律治(S. T. Coleridge)，

《老水手》(*The Rime of the Ancient Mariner*)

创造从何处起源，

是创造了，还是没有创造。

他从天上最高的宝座俯视，

只有他知道——或者连他也不知道？

——《梨俱吠陀》(*Rig-Veda*)，

《曼荼罗》(Mandala)，第 10 章“颂歌”(Hymn)129

1. 我们不会满足于回答“这是怎样的？”这个问题，而希望知道“这是怎么来的？”每当一个人悟到要考察存在之谜时，他很容易会期望进化会向他启示事物的本质。进化的思想在人类的神话和原始宗教中就很显著。印度教关于梵天(Brahma)的沉思，把它当作永恒的自我存在，而且展现自己为多种多样的物质世界与各个灵魂，也只是继续着这一路线。新柏拉图主义的“流溢”(emanation)学说也是这样，而早期的爱奥尼亚哲学家则企图在更接近物理的基础上说明宇宙的生成。先是恩培多克勒(Empedocles)，然后是卢克莱修(Lucretius)在向着物理进化的现代观念上迈出了重要的步伐。这里不可能详细地评论在亚里士多德(他的关于潜在性与实在性的对比)、柏拉图以及笛卡儿以后我们时代的伟大哲学体系中，进化的思想各取什么特殊的形式。康德的名字是与最初的科学发生理论之一，即行星系统的起源，相联系着的。更为普遍且具思辨性的，则有谢林关于自

然界通过形式的序列，或由于防止自然的无限发展而出现的所谓抑制点(points of arrest)的序列，来自我实现的概念，还有黑格尔的内在辩证过程，它只是在精神领域中造成真正的历史性的发展。随着布丰(Buffon)、拉马克、特雷维拉努斯(Treviranus)和歌德，我们就接近了关于生物体进化的现代概念。

科学在自己的历史中积累起来的经验引导到一种认识，即进化远非理解世界的基本原理，它是对自然界的一项分析的结尾而非开始。对一个现象的解释不能从它的源起中寻求，而只能来自其内在的法则。必须把对法则和事物的内在结构的知识大大推进，才能理解其源起或者以假说来重构其源起。由于缺乏这种知识，由达尔文主义在19世纪最后几十年里开辟的关于生物的谱系和系统发育的思考，绝大部分都欠成熟。甚至在今天，在遗传学的新的伟大的发现之后，我们关于事实和法则的知识都远远既不足以解释个体发育，也不足以解释系统发育。如果没有像牛顿万有引力定律之类的奠基性的工作，关于行星起源的种种假设都会是空谈。只有在对星体的光谱分析和现代原子物理的基础上，而且只有在对广泛的观察材料进行了分析，而得出关于星体宇宙的空间秩序的有根据的意见以后，天文学家才能着手画出一幅图景，这幅图景首先是关于星体的内部组成，接下来是关于星体的时间发展。而对宇宙起源的研究，仍然是一个颇成问题的事业。

在我们关于科学中概念和理论是怎样形成的概述(20—21节)中，我们已经看到，排序和分类是放在因果关系的分析前面的。说不定对于这个初步的阶段本来应该更加强调，该阶段在生物学中仍起主要作用，而在物理学中则其重要性已屈居第二位了。大自然所展示的动植物物种之纷纭万千的奇观，对于生物学的发展只是一个很早

就有而且持续不断的刺激，以待形态和分类的艺术能有大成。一个引人注目的事实，即诸多物种尽管变化范围很大，却在多数情况下展现出可以清楚地辨认的典型差异，促进了形态和分类的艺术这项工作。这些典型差异，虽然想用很好地定义了的概念来表述，是难以捉摸的，我们却以本能的确定性掌握了它，例如辨认一个人就是这样。要一般地描述这种分类过程怎样一步步地，越来越令人信服地，成功地把本质的特性与非本质的特性区分开来，并非易事。就个别的动物或植物而言，几个器官还可以就其形态、构造和功能来加以区别，但是除了用肢解祭祀动物以作生物学的比喻以外，柏拉图就找不到更好的例子来说明他的连续分割的 diaeretic 过程了。比较形态学用形态、构造与功能来决定器官的同源(homology)。不论逻辑上有何基础，到头来没有一个动物学家会怀疑鲸属于哺乳动物而不是鱼[然而请参看梅尔维尔的《白鲸记》第 32 章，看一看伊什梅尔(Ishmael)和楠塔基特岛的捕鲸人相反的观点]，也不会怀疑在脊椎动物的分类学上更高的群(group)中，某些颅骨同源于鱼的鳃弓(gill arch)。自然界中看到的晶体形状的纯粹形态学分类是物理学中的类似物；在这里，我们已经走到路的尽头，到了那里，描述就要让位于动力学理论。在光谱和原子的量子理论存在以前，在对光谱学的素材的整理上就已经花费了极大的精力了。

分类是为了寻找不同标记的形状，寻找空间排列与时间序列的规律性，寻找一种永恒的构造作为“外表流逝后留下的静止的影响”(ruhende Pol in der Erscheinungen Flucht)。我们在形态(*morphé*)这个标题下，将要简短地回顾一下科学在探求秩序与法则时得到的最初步的结构。

2. 我们从自然界的绝对常数开始。今天的物理学已经敢于声称

对两个绝对常数有了根本的理解，即光速 c 和普朗克作用量子 h。按照相对论，四维世界的距离的量度只有一个任意的标准单位；这样量出的两个相等距离(一个是“空间的”，一个是“时间的”)之比就是光速，它应该为 1。由量子理论建立的能量 U 与频率 ν 之间的普遍联系 $U = h\nu$（还有动量和波数的联系），暗示可以直接用频率来量度能量。确实，动力学定律中的基本算子 L[附录 C，公式(2)]既可以表示频率也可以表示能量。这样一来，h 之值也就变成 1 了。

基本电荷 e 造成了很大的困难。所有已知的各类基本粒子——只要它不是中性的，如光子与中子那样——其电荷除了符号可以不同而外，都是 e。这样我们不得不接受值 e 为自然界的一个基本常数，其基础的作用并不亚于 c 和 h。如果采用那个使 c 和 h 均成为 1 的“自然的”单位，则服从库仑的平方反比定律的两个电子间的斥力应为 α/r^2，这里 r 是两个电子间的可以变动的距离。α 这个常数因子(即 e^2)是一个纯粹的无量纲量，近似地等于$\frac{1}{137}$*。一个完全的理论应该能够用数学的理由说明这个值——如同几何学家说明圆周长与直径之比是 $\pi = 3.1415\cdots$一样。不论爱丁顿当年怎样想过，这个理论到现在都不存在。

第一步是要弄清何以具有一定电荷与质量的相同粒子(附录 B 的术语就是同样的“实体”)在世界上有许多复本。经典物理从一切均应保持不变的趋势导出了电荷和质量的守恒，但是允许具有任意质量的电荷的物体存在。就基本粒子有固定的电荷和质量而言，这个观点不能令人满意。它们的守恒必须依赖于调节而非保持。一个旋转

---

* $\frac{1}{137}$称为精细结构常数：$\alpha = \frac{2\pi e^2}{hc}$。——译者

陀螺的轴(例如地球的轴)的方位是随时都在变动的。这是由于有一种保持惯性的趋势——我们已把它称为惯性场——而磁针的方向则是由于磁场的调节来决定的。如果某一个量的守恒依赖于惯性，则它的初值可以任意选定；但是因为扰动决不可能完全消除，这个量容易随着时间产生偏差。然而，调节将会强加一个确定的值，此值与过去的历史无关，因此在经过了扰动，在时间流逝以后，只要原有的条件都恢复了，这个确定的值也会再次确定下来。爱因斯坦用来测量他的引力场度量理论的基本量 ds^2 时所用的刚性杆和时钟，归根结底也将保持其长度和周期不变，因为构成它们的基本粒子的电荷 e 和质量 m 都保持不变。然而，系统的理论则按相反的方向展开；它从基础的度量形式开始，这样引入一个原始的场量，而粒子的康普顿(Compton)波长 m^{-1} 将被调节到其自身的一定的比例。(我们在这里仍采用自然单位，以使 c 和 h 都等于 1。)从完全展开的理论还要经过很长的推论，才能得到杆和时钟的性态的结果。(在爱因斯坦的引力理论的某些假设性的推广中，例如在外尔的度量场论与爱丁顿—爱因斯坦的仿射场论中，这个原始的场量将表现为宇宙的曲率半径，而且可由更原始的场量导出，但这不会根本地改变上面讲的基本关系。)

米等人曾经试图这样来修正麦克斯韦的电磁场方程，使它只有一个或最多也只有很少几个定常的球对称解。如果谁能够成功的话，则所谓调节就可以在经典场物理的框架下得到解释。但直到现在这个想法还毫无结果。另一方面，量子理论利用场的量子化至少在一定程度上解开了这个谜，在这个过程中，是从一个粒子进到个数不定的相等的粒子。这就说明了相等性，但与从前一样，电荷和质量的特殊的值仍然没有得到解释。

如果自然界中还有什么东西有资格被看作“存在物的简单而且永恒的模式”，这就是电子，它是基本粒子中最为人们熟知的一个。质子就已泄露出了具有复杂结构的信号。

一个电子，一个质子，一个介子，质量均不相同。因此，基本粒子的质量，比之其电荷，似乎其本性不是那么原始而普适。电荷与电场的关系和质量与引力场的关系取相同的形式。若用自然单位来量度，两个电子间的引力是 ε/r^2，ε 是一个纯粹的数，其值约为 10^{-41}，它比前面讲的因子 α 还要神秘。说实话，一个简单的数学理论中可以出现 $\frac{1}{2}$ 或 8π 这样的数，但是很少会出现一个数量级超大的无量纲数 10^{41}。如果用爱因斯坦方程中的宇宙学项来解决螺旋状星云的光谱红移，会得到宇宙的半径数量级为 10^{27} 厘米，这样大小对于空间为封闭的，质量为 10^{55} 克且均匀分布于空间中的宇宙将是静态平衡的。物质的这一总量与观察宇宙云的密度而得到的估计值合理地一致。用电子质量去除(这就意味着忽略其他类别的粒子)，可知宇宙中粒子总数 N 大约是 10^{81}。它与那个神秘的数值 $\varepsilon \approx 10^{-41}$ 似乎有关系式 $\varepsilon \approx 1/\sqrt{N}$，这可以作为一个偶然事件来接受。但是如果严肃地对待它，似乎在暗示，两个粒子间的引力吸引与宇宙的总质量有关！这个想法其实并不像乍听起来那么古怪。很久以前，马赫就试图把物体的惯性质量解释为宇宙中其他物质诱导出来的效应。爱因斯坦的引力理论并不满足马赫的公设，虽然后者对其观念起过作用。建立一个能够满足马赫的挑战的理论仍然是一项急迫的事情(这理论会不会是引力的一个统计理论？因为 $\varepsilon \approx 1/\sqrt{N}$ 这个法则中的平方根似乎暗示如此)。暂时我们只能说，宇宙的构造似乎是基于两个纯粹的数 α 和 ε，它们的神秘我们还没有参透。

原子是由基本粒子组成的。一个中性的原子有一个高度稳定的核，而且有 Z 个电子绕着它转。量子理论已经完全地阐明了这个电子外壳的运动及其相关能级的法则；另一方面，对于核的构造的理解就没有达到同样的程度。一个原子，只要它的核没有改变，它就仍是同样的原子；当它的一个电子被提到较高的能级或降到较低的能级时，变化了的只是它的态。核是由质子和中子组成的，所以具有同样电荷的核可能具有不同的质量。元素的化学性质基本上是由核的电荷决定的，这一事实很长时期以来就妨碍了同位素的分离。一个原子嬗变为另一个原子，既可以是自发进行的(放射性蜕变)，也可以由人工手段实现；需要比改变其态多得多的能量。原子的各种可能的种类是由自然法则(natural laws)“前定的”，它们可由这些法则用纯粹的数学方法导出。它们和基本粒子一样是一些永恒的初始的构形；没有任何迹象表明较简单的原子会进化到较复杂的原子。天狼星光谱中氢谱线占优势，而太阳光谱中铁谱线更多，这件事并不表明在星体的发展中化学元素也在发展，而很容易用天狼星的表面温度更高来说明。对于原子成立的，对于分子原则上也成立；它们的组成以及存在的条件都是由普适的自然定律(universal laws of nature)定下来而不会改变的。但是由一种结构跳到另一种结构，例如由一个氧分子和两个氢分子变成两个水分子，其概率依赖于温度；这些概率决定了反应的速度。这样，在高温下不稳定的分子在低温下变得稳定得多；这样一来，地球的冷却会使得在地球历史的早期阶段找不到的分子却在以后的阶段里存在了。因为基因是高度复杂的分子，这个观点对于生命在地球上的起源和进化有些关联。

我们在晶体中遇到了给人以深刻印象的宏观结构，它们显然要受一些简单的和谐定律(harmonious laws)的管辖。晶体的对称性不仅

表现在它的外形上，而且表现在它的所有物理特征上。设结晶的物质充满了整个空间。它的宏观的对称性表现为一个旋转群 g。如果一些定向可以通过此群中的旋转彼此转换，则晶体在空间中只在这样一些定向是物理上无法区别的。例如，在结晶的介质中，光在不同方向上传播的速度通常是不同的，但如果有两个方向可被群 g 的一个旋转互变，则在这两个方向上光的传播速度是一样的。对所有其他物理性质也都是这样。对于各向同性介质，群 g 由一切旋转构成，但对晶体，此群则仅由有限多个旋转构成，甚至仅由恒等旋转构成。在结晶学史早期，有理指标律是由晶体的平表面的放置导出的。它导致了晶体的格点状原子构造的假设。劳厄的干涉图案确定地证实了这个解释了有理指标律的假设，而这个干涉图案本质上就是晶体的X射线照片。于是我们就知道了结晶的化学元素构成一个正则点集 S，正则性就在于这个集合围绕其任何一点的方式都是相同的。更准确地说，在把 S 的一切点都映到 S 之各点的运动群 G 中恒可找到一个运动，把 S 之某一点移到 S 的任意选定的点上。点空间的任意运动都诱导出向量空间的一个旋转。这样，运动群 G 就诱导出向量空间的旋转群 g，记作 $g = \{G\}$。G 描述晶体的隐藏着的原子形态(Gestalt)，g 则描述晶体的显现出的空间和物理形态。只有 32 种不同的 g，而一切可能的 G 则构成一个连续的网。

可以把群 G 所描述的原子对称性分解成一个纯粹离散的成分和一个纯粹连续的成分。因为这种离散对连续的对偶性，对于所有关于形态的研究都有基本的重要性，而且与我们讲到的“本性”与“定向”的对偶关系(见 111 页)有密切关系，也与固定的内在组成和可变的外在条件的对偶有密切关系，似乎值得稍微详细地讲一下晶体结构的群论分析。

[G 中的平移构成一个群 L，它可由 3 个独立的平移 $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ 生成。平移都是向量，所以 L 是由所有相对于基底 $e=(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ 而且具有整数坐标 (x_1, x_2, x_3) 的向量 $x_1\vec{e_1}+x_2\vec{e_2}+x_3\vec{e_3}$ 所成的平行六面体点格。由一个点格基底 e 到另一个点格基底 e^* 的变换以及相反的变换 $e^*\to e$，可由变量 x_1, x_2, x_3 具有整系数的两个互逆的线性代换（而且是幺模代换）U 和 U^{-1} 来实现。旋转群 g 令向量格点 L 不变。如果用"按格点修正过的"仿射坐标来表示，则 g 可以表示为点坐标 x_1, x_2, x_3 的整系数齐次线性代换群 $\mathfrak{g}$，而 G 则成为点坐标 x_1, x_2, x_3 的非齐次线性代换群 $\mathfrak{G}$，它在线性空间中诱导出群 $\mathfrak{g}$，记作 $\mathfrak{g}=\{\mathfrak{G}\}$。由于点格基底 e 的选择有任意性，两个通过幺模变换 U 互变的群 $\mathfrak{g}$ 被认为是等价的，在这种意义上，恰好有 70 个幺模不等价的 $\mathfrak{g}$（而 g 则只有 32 个"正交不等价"的）。一个决定性的事实是 $\mathfrak{G}$ 也只有有限多个可能性，具体说是 230 个。但是必须有什么可以连续变化的东西！事实上，在强调晶体的点格结构时，我们忽视了空间的度量结构；这一点必须改正。空间的基本度量形式，即任意向量 (x_1, x_2, x_3) 的长度平方，必是其相对于基底 e 的坐标 x_1, x_2, x_3 的正定二次型，这个型必须在群 $\mathfrak{g}$ 之一切变换下为不变。在 $\mathfrak{g}$ 之变换下不变的正定二次型成一个连续的束（pencil），而且其性质非常初等，度量基本形式只是这个连续流形中的一个元。因此，晶体的对称性最终要由一个不连续的特性（即 230 个群 $\mathfrak{G}$ 中的一个），再加上从这个连续流形（即在 $\mathfrak{g}=\{\mathfrak{G}\}$ 下不变的正定二次型束）中取出一个元，这样来刻画。]

自然界中实际出现的晶体以大量不同的形状显示出各种可能类型的对称性，这里形状要受包围着它的外界情况的影响。想象一下用雪花做的装饰图案的奇观，想象一下孪晶（twin formation）以及诸如此

类！形态学法则(morphological laws)现在是用原子动力学来理解的：如果相同的原子互相施力而成为原子系综的一个稳定的平衡态，则原子必然排列为一个严格意义下的正则点系。构成晶体的原子的本性，在一定的外界条件下，决定了其度量上的布置，而这种布置仍可在一定范围中连续变化，这就为进行纯粹形态的研究留下余地。晶格的动力学也与晶体的物理性态有关，特别是其生长的方式，后者又在环境因素的影响下，决定了它的特殊的形状。

物理对象看得见的特性，通常是其组分与环境两者的结合。水分子的化学组成是一定的，但它为固态、液态或气态则由温度决定。结晶学、化学和遗传学的例子使我们想到，这种组分与环境的对偶性，是否以某种方式同离散与连续的区别有关。下面是一个尝试性的提示。如果某种特性(按照所采用的理论)，如像晶体的对称群 $\mathfrak{G}$ 那样，只能取离散的值，这些值中的每一个都是成为基本要素的，而一个具有连续的域的特性，例如"与已给的群 $\mathfrak{G}$ 相容的度量"，也只有它的域(这里就是所有在 $\mathfrak{g} = \{\mathfrak{G}\}$ 下不变的正定二次型之束)是成为基本要素的。一个个别的定常量子态及其能级，是很好的成为基本要素的元素(尽管有相互作用引起的量子跃迁)；一个波态，或者更一般地说，波态的统计系综，就不是这样的。温度是*至尊的*(*kat'exochen*)* 的环境因子。我以为整个问题还需要认识论上的澄清。

自然界在*有生命的机体*的领域中，比在其他任何地方都更多地放弃了她的*形成动因*(*nisus formativus*)。因为生命体物质的胶质状态，形式在这里就不如在无生命物质中那么严格，但是有生命体的物

---

* 这是希腊文，是一个尊称。例如"三位一体"中的"天父"("圣父")就称为 Father，*kat'exochen*。——译者

质把这种柔韧性与在各种干扰下保持其基本组织的惊人的坚韧性结合起来了。内在的永恒的组成与可变的外在条件，这两个因素都影响外观与发育，两者互相对抗这一模式，在这里以及在分子和晶体的领域中都经过了我们的检视，而遗传科学对于生物体的内在的遗传组成给了我们一个清晰的图景。

最后，星体世界向我们展示了最大尺度上的物质的组织。最迫切需要解释的事实是，物质何以团聚成为各个发光的星体，而星体的密度超过物质的平均空间密度约 10^{27} 倍。所有这些星体都有大体相同的质量而例外相对较少，其变化幅度也很少大于各个年岁的人的块头之差别。星体组成很大的团，而各星体之间又有很广阔的空间；我们的银河系就是一个尺度极大的这样的团，而太阳是其中一个星体。一定部分的物质散布在空间中成为稀薄的气体星云与云。天体的分类首先是根据它们发出的光的本性。借助于原子物理，光谱上的发现对星体的内部给出了详尽的信息。一个中心问题，即发光的星体如何得到它由辐射而丧失的能量，现在已不再困扰我们了；我们已经看到了，人类是怎样成功地控制了原子嬗变释放出的能量，以用于破坏的目的。我们关于星体内部的信息，以及对陨石的化学分析似乎指明了，各种化学元素在整个宇宙中处处都是按相同比例混合起来的。这是所有星体都有共同来源的论据之一。

这样一个命题，即自然界的法则不但处在自然界中所发生的或多或少为永恒的结构的底层，而且也处在时间发展的全过程中，这里必须要加上一个注解：在具体的发展中绝不会没有机遇的因素。经典物理学把初态看作是偶然的。这样，才能用“共同来源”来解释那些并不是单独来自自然界的法则的特性。统计热力学连同量子物理学为机遇开拓了一个大得多的活动范围，但同时也表明了，现象的

“几乎”完美的宏观规则与机遇绝非互不相容的。进化不是科学知识大厦的基础，而是它的拱心石。宇宙起源论讨论宇宙的进化，地质学讨论地球和它的矿物的进化，古生物学和系统发育学讨论有生命的生物体的进化。

3．人的外貌会泄露人的年龄，星体发出的光谱线也给出它处于一生中哪个阶段的线索，这样我们谈到一个典型的星体的“一生”时，就能多少有些真实性。金斯(James Jeans)在我们的时代提出了一个基于观察和精确计算的宇宙起源理论，追溯它的进化：始于螺旋星云上一个缓慢旋转的气团，一直进化到如银河系那样的星团。再上溯一个世纪，拉普拉斯则提出了关于行星系的诞生和发展的理论；所有行星都以同一方向在几乎同一个平面上绕太阳旋转，这个事实很清楚地指出行星有共同的来源。最近，勒梅特则力求比金斯追溯到宇宙更久远的历史。在他的宇宙起源学说中，起决定作用的是爱因斯坦引力方程中的宇宙学项所表示的膨胀力。在勒梅特所取的数值条件下，引力吸引几乎能与此膨胀平衡，因此，在进化的某个不稳定的阶段，密度的微小的局部变动，就会造成累积的凝集。他概括说，宇宙的起源是单个的大原子的放射性蜕变。在这种宇宙起源学说中，肯定有大量假设性和初步的东西；这里只提醒一点，对引力本性的更深的洞察很可能造成这个理论根本性的修正。但是，考虑到天体物理学的全部成就，很难怀疑所选的途径基本上是正确的，必须求助于原子物理来解释星体的内在组成和天体系统的进化。

在我们上面所推断的三种进化理论中，关于地球进化的理论假设性最少。重建地球过去的历史，支持的经验证据最有力，而对有关的地质过程的物理解释，一直没有为原则性的困难所困扰。

然而，地球上生命的进化则是一个难解之谜。生物体进化的观

念(在达尔文之前很久就被人认识到了)，被达尔文主义提升到我们时代最具影响力的科学问题之列。它真正配得上这样的地位吗？整个19世纪是如此盲目地热衷于“进步”(progress)的福音，张开双臂欢迎这样一种学说：发展的总的潮流遵循着由简单到复杂，由低级到高级的方向。然而，比之人在动物界的祖先问题，在我看来更重要的是生物学揭示出来的另一个事实，即所有有生命的存在之内在的密切关系。它们都是由细胞构成的，细胞的基本构造和基本的细胞过程，例如新陈代谢、染色体复制、细胞分裂，还有生殖中的减数分裂和受精，对于人、动物和植物都是一样的。人，就其组织的基本特性而言，只是种种有生命的创造物的一员。人由于对自己的独特性(singularity)的自负和骄傲，很容易相信《创世记》第1章第1节中说的，上帝“照着自己的形象造人”，而且让人统治地球，但却不愿意在一切生命的共同体面前低下头来。对每一个生命以及一切形式的“生命的崇敬”(Ehrfurcht vor dem Leben，施韦泽语)，“爱并且崇敬上帝所造所爱的一切”(柯勒律治，《老水手》最后的评注)就是这种态度在伦理上的表现。圣安东尼(St. Anthony)对鱼布道则是它的一个动人的在宗教上的表现。

对于自然界中出现的原子和分子，当我们能从永恒成立的自然法则中导出它们，作为自然界中可能的构造时，我们就相信已经满意地解释了它们。那么为什么对于基因的组合，既然我们已经知道了合子决定了植物、动物及其器官的特征形态、结构与功能，还要诉诸进化呢？从受精卵发育到高度分化的生命体的个体发育，这在无机界仍然有类比，尽管可能相距太远，比如波浪之形成浪花，山在地质上形成锯齿起伏的山脉，都是例子。真正的问题在于系统发育(phylogenesis)。为了回答这个问题，我们先重复一下前面说过的一些话：

分子的稳定性依赖于温度和其他环境条件，而一般说来，分子越复杂就越易适应。所以毫不奇怪，具有生命物质特征的分子，特别是基因，是与地球历史的一定年代相联系的，它们的出现与地球本身的演化密切相关。但是这段话显然不足以解释生物进化这一宏伟的戏剧：从胶状物质的小球直到具有奇妙的能够适应外界的感觉器官的最高等动物。决定性的一点可能在于：当我们对付着如由上百万个原子组成的复杂分子时，各种原子组合的可能性之多种多样，远比在自然界确实存在的组合丰富得多。那种具有基因功能的原子组合是极为罕见的，只能通过一个选择的过程才能“找”出来，就是要试验许多可能性，以早前已经占领的位置为基地，慢慢地摸索一条由简单到更为复杂的结构的道路。但是，这样提出问题，最多只能对其解答提供最为模糊的暗示。

生物进化的证据是由古生物学、胚胎学、比较解剖学和遗传学提供的。古生物学的证据最为直接，但是很零散。胚胎学只对个体发育提供了直接的信息。确实，如人和鱼的胚胎都有类似的鳃裂(gill slit)，这个事实暗示了人和鱼有共同祖先的假设——但要作稍微谨慎一点的解释，就只能满足于得到一个推断，即类似的基因型只表现为，在发育的较早阶段而不是较晚阶段有较多的表现型上的相像。摩尔根也偶尔用鹿角的个体发育来嘲笑系统发育学。不论在哪种情况，海克尔(Haeckel)关于个体发育是系统发育的简略的重复这个观点(即所谓生物发生律)，基础极为薄弱。由比较解剖学发现并加以估计的物种之间的类同性，并不一定能解释为同宗性——正如在无机化学和有机化学手册中发现的化合物的分类并不反映历史的发展。但是当人们看到一个系统的大部分都展现了一种“树形”的向着同一个方向的分支时，确实会想到一种进化的解释。

达尔文还没有得到遗传学的证据。他的学说基于一个事实，即共同的遗传配备并不排斥偶然的变异，或由可变的周围环境引起的变异。既然由一代到下一代，尽管生育出的后代为数众多，能够长成的个体数目只有很小的漂移，所以在天赋不同的个体中必有生存竞争发生。达尔文假设变异是可遗传的，由此得出结论，即自然选择在世代发展中有积累的效应，而不断地维持与改进动植物对其周围环境与其生活方式的调节。[1]这个理论的一个主要支柱，即表现型的特性，包括在个体发展中因使用而得到的特性，是可遗传的(拉马克)，被约翰森关于纯系的实验推翻了。由环境的变化带来的表现型的修改，当返回到原来环境时，就消失了。

4．但是在这里，现代的遗传科学提供了一个取代的学说；重组和突变取代了达尔文的连续的偶然变异可以遗传的学说。孟德尔及其继承者发现了用减数分裂和配子配合来玩一场基因成分的组合游戏。从一个不完全均一的动植物品系(即非纯系)，切断和重组会产生新的可遗传的变异。生物体生命循环中的性过程在产生越来越新的形式上有重大的助力。亲本的种质并不是混在一起，作为这些种质的成分的基因并未改变其本性。从一个方面来说，基因进行的这种“颗粒遗传”比达尔文所假设的混合遗传更有助于进化。混合会使那些在一开始时展现了很大差异性的种群，迅速而且不可恢复地趋向越来越大的均一性。除非新的差异以一种与人们观察到的质变不可比拟的速率不断地展开；比较极端的变种很快就会被淹没而消失了。

基因的分离和重组可以说明自然界的不断变异，但是如果不让基因和基因的结构有突变，单是分离和重组并不能解释进化。在前面(附录 B)已经讲过种(species，严格的组合意义下的种)在什么情况下

得以保持。当这些条件被破坏时，新的种就会出现。在那些改变基因数目的结构突变之中，细胞中全套染色体的复制(多倍性)起了特别重要的作用。二倍体合子，有时会因杂交产出四倍体(异源多倍性)；有时由于化学因素的影响，或由于热的冲击，或由于其他原因，成熟的细胞没有进行减数分裂(同源多倍性)。此外，还可以期望基因不仅改变了其突变的态，甚至一个基因变成了另一个(正如原子不仅可以改变其量子态，而且可以互相蜕变)，或者出现了新的基因。一个自然的四倍体的每一类染色体都有四个同源染色体；但只有两个点为相同基因所占据——好像是在四倍体的各代中，两个相同基因的一对变成了另外一对，这也并不少见。说不定也不完全排除会发生有向的适应性的突变，例如响应某一个适应性的表现型的偶然变化，支持这种变化的突变之比率会增高。获得性不可遗传这个命题，正是基于这类可靠的、多种多样的证据，使人不愿改动它，然而对由无性分裂而传承的单细胞生物体的实验又表明这个命题有局限性。对纤毛虫(infusoria)用化学因素连续作用 100 代，先是影响其细胞质，然后是大核(macro-nucleus)，最终在小核(micro-nucleus)的内部结构上产生变化；这种变化肯定不需要无限长的时间才会遗传，而是可能只要 60 代就以逐渐减弱的效应而遗传。

即令我们知道了总是出现的可遗传变异的来源，我们仍需解释下面的很不寻常的事实，即其结果不是毫无意义的类型之一团混沌，而是确定地使一些变体分离成种，而物种等分类学上更高的范畴也都出现了。其实进化有两个方面，既有生命世界的多样性在发展，也有其间断性在发展[杜布赞斯基(Dobzhanski)]。首先要研究这些新产生的突变的东西，在关于其可生存性和配偶的一定假设下，是怎样在一群体的各代中延伸开来的。各个突变体对给定环境的适应值各不

相同，这样，自然选择就起作用了。基因组成基因型系统，而适应值是对整个基因型系统而非组成系统的各个基因而言的。如果没有造成分离的因素，把种和物种分离出来是不可能的，在这些因素中我们只提出两个最重要的：一是除非是相同或非常相近的物种，其配子是不育的，这有助于遗传上的分离；二是由于地理上的分离造成聚居地不同。

进步与退步(retrogression)的概念不一定与进化有关，如果要从进步与退步的角度来看进化，则进化肯定不一定总是进步。从只需要无机化合物和光的自养形式(绿藻和某些细菌)，经过不同的依赖于事先已经形成的特定有机物分子的好几个步骤，最终达到体现在病毒中的寄生性特化(parasitic specialization)，而病毒是一个能够利用其寄主的活的原生质来合成其自身的裸基因，这条线可能就是实际发生在自然界中的退行进化(retrogressive evolution)的图景。

我们现有的关于遗传法则的知识与关于进化的学说，肯定不是不相容的，它在解释小范围内的地理和生态的物种形成上已经有了一些成就。但是——如果外行也有权对于这种事情发表意见的话——我们还远未能在总体上，就其最引人注意的特性上，用遗传来解释进化。古生物学的发现似乎指出，生物体的进化在很长的时期内连续地遵循一定的方向。这种“直向进化”(orthogenetic)的潮流似乎可以归之于原生质自身的本性。有一个学派认为，这种直向进化主要是非适应的，而“进化的适应系列是叠加在宏大的直向进化潮流之上而与之完全独立的”[格里格斯(R. F. Griggs)]；其他人，如奥斯本(H. F. Osborn)，则认为，新结构时常是按照未来的功能上的要求出现的，谈不上对现世的适应。许多脊椎动物的牙齿上的锥形物(cones)是一个经典的例子，这种锥形物初出现时，只是几乎不能察

觉的凸起，而在进化的那个阶段，其功能性的用处也十分可疑，只是到了后来，它们才发展为引人注意的特性，而且有明显的功能上的重要性。

从大的必然性意志上考虑进化，就一定会导致生命起源问题。

遗传学的证据倾向于使人们把生命看作创造的偶然事件起作用的偶然成功。似乎并不是由于某些可以预测的宏观物理或宏观化学过程，这种过程并不一定在进化的一定阶段会有一定的自然的必然性，且在具备适当条件之处一定会重复出现，生命的历史开端可能是一个很特别的分子事件，一下子由偶然而出现，然后启动了自催化倍增(auto-catalytic multiplication)的“雪崩”(约尔丹)。约尔丹引证了以下事实作为他的这一见解的有力论据，即“动植物中所有比较复杂的分子，特别是蛋白质分子，都与它们的镜像在立体化学上不同”。说真的，如果这些分子在许多地方、许多时候都有独立的起源，它们的左旋或右旋异构物必有相同的丰度。因此，看来亚当(Adam)和夏娃的故事，若不是讲的人类的起源，而是生命的最原始的形式，也还是有一定的真理性的。

奥巴林(Oparin)曾经提出，在生命出现之前的很长的进化阶段中，有很多种有机分子聚集以后，才出现了最初的自我复制单元[“原基因”(protogenes)]，在那个阶段，它们能够生存下去的机遇，比在今天的条件下要大得多，因为当时还没有具有催化酶的活的生物体。基因能够自我复制所必需的化学反应链条，可以一步一步地倒推过去建立起来，其每一步都是突变，而每次突变又都提供了新的选择上的优势。在遥远的过去，基因可能在一个自由的态中存在并且复制。不论这种假设有何功绩，只要我们试图想象一下：有什么样的搜寻机制，可以既不需方向也不需记忆，就能在地质年代中建立起基因的极

为复杂的结构，建立起所有复杂的限制动物生命的生化过程，还能如此适应性地分化出如人的眼睛这种奇迹，我们就不会看不出这整个领域是多么地具有思辨性。

用一个包罗一切的计划来解释进化，这个诱惑几乎是不可抗拒的。威利斯(J. C. Willis)在他的《进化的进程》(*The Course of Evolution*, 1940)一书中就提出了一个这样的论题："进化的过程并不是一个偶然的变异按适应值的自然选择。宁可说它是按我们尚未理解的确定的法则进行的。这个法则大概是在生命一开始时就在起作用，而且是按某个确定的计划在起作用。"

甚至如赫胥黎(Julian Huxley)这样蔑视目的论的作家也不得不承认，"进化的契机以集中到智人(Homo sapiens)的统治地位为高潮，这样一个生物学的进程……可以看得很明白，不可能遵循别的一般进程，而只能走它在历史上所已经走过的路；或者换句话说，即令我们无法坚持一种横扫一切的否定态度，至少我们可以说，所有居住在地球上的生物，不论是过去居住过还是现在还生存着的，都不能找到一条别的道路，以产生口头的或概念中的思维，正是这个特性构成了人的生物优越性的基础"(*Evolution*, p. 569)。

说是由生命的组织力在互相独立的原子过程之间建立了一种相关，不论这种观点是否站得住脚，毫无疑问的是，凡在有思想以及涌现意志的力量的地方，特别是对于人，生命的组织力越来越受一个纯粹的精神形象之世界(知识、观念等等)的控制。能不能想象，有一种非物质的因素也具有形象、观念，以及"建造计划"的本性，也能使有生命的世界作为一个整体而进化？一些生物学家对此作出了肯定的回答，而且着手来比较详细地描述这些因素及其作用。柏格森建立了他的 *évolution créatrice*(创造的进化)之哲学，这种哲学和萧伯

纳在他的智慧的火花中写出的剧本《回到玛土撒拉》* 中提出的学说基本上是一样的。不受物质限制的纯粹思维的永恒的生命，按这个“元生物学的《五经》”(metabiological Pentateuch)来说是进化的最终目的。莉莉丝(Lilith)说：“我是莉莉丝。我把生命带进了力的漩涡，迫使我的敌人、物质，服从有生命的灵魂。但是我在奴役生命的敌人时，使生命成了主人；因为这是一切奴役的结束；我现在看到了奴隶获得了自由，仇敌和解了，漩涡变成了全是生命而没有物质。”科学家一般都比较谨慎。现在的情况是，主张超验的力量具有观念的本性，不论其在哲学上是危险的还是可取的，在解决实在的具体生物学问题中并无帮助。事实是，我们仍然一无所知(除非莉莉丝能告诉我们)，至少不能如同用来自内部的解释那样来了解我们自己和我们同伴的思想和冲动。

参考文献

P. NIGGLI, *Geometrische Kristallographie des Diskontinuums*, Leipzig, 1920.

F. RINNE, *Das feinbauliche Wesen der Materie*, Berlin, 1922.

A. NAEF, *Idealistische Morphologie und Phylogenetik*, Jena, 1919.

D'ARCY WENTWORTH THOMPSON, *On Growth and Form*, Cambridge, 1917.

A. S. EDDINGTON, *New Pathways in Science*, Cambridge, 1935.

——*The Expanding Universe*, Cambridge, 1933.

——*Fundamental Theory*, Cambridge, 1946.

H. P. ROBERTSON, Relativistic Cosmology, *Rev. of Modern Physics*, 5(1933), pp. 62—90.

J. H. JEANS, *Astronomy and Cosmogony*, Cambridge, 1928.

G. LEMAÎTRE, L'hypothèse de l'atome primitif, *Actes Soc. Helv. Sci. Nat.*, Fribourg, 1945, pp. 77—96.

H. S. JENNINGS, *Genetic Variations in Relation to Evolution*, Princeton, 1935.

R. A. FISHER, *The Genetical Theory of Natural Selection*, Oxford, 1930.

J. C. WILLIS, *The Course of Evolution* (by differentiation or divergent mutation rath-

* 这是萧伯纳的名剧(1920)。下面说的“元生物学的《五经》”是原剧的副标题。《五经》是《旧约全书》的前五卷，即：《创世记》，《出埃及记》，《利未记》，《民数记》，《申命记》。莉莉丝是剧中人物的名字。——译者

er than by selection), Cambridge, 1940.

TH. DOBZHANSKI, *Genetics and the Origin of Species*, second ed., New York, 1941.

A. I. OPARIN, *The Origin of Life*, New York, 1938.

H. BERGSON, *L'évolution créatrice*, Paris.

G. B. SHAW, *Back to Methuselah*; see also C. E. M. JOAD, J. D. BERNAL, W. R. INGE on Shaw's philosophy, Shaw the Scientist and Shaw as a Theologian, in: S. Winsten, *G.B.S.*90, London, 1946.

LECOMTE DU NOÜY, *Human Destiny*, New York, 1947.

M. SCHELER, *Die Stellung des Menschen im Kosmos*, Darmstadt, 1930.

CHARLES SHERRINGTON, *Man on his Nature*, Cambridge, 1940.

A. PORTMANN, *Biologische Fragmente zu einer Lehre vom Menschen*, Basel, 1944.

注　释

第一部分

1. 莱布尼茨用符号 · 和 + 分别表示“并且”和“或者”。我们不采用这种记号，以避免与算术中的乘法和加法相混淆。兰伯特的分配律：

$$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$$

(*Acta erudit*. 1765, p. 441)就使得这个形式类比看得很明显。我们对在 6 与 7 中对乘积记号 Π 和求和记号 Σ 的用法，则与莱布尼茨的用法一样。

2. 这一段话值得引述如下：“当把两个数这样合起来，使对一个数中的单个元均有另一个数之单个元与之相应，我们就说它们相等；几何学正是因为缺少这样一个外延相等的标准，所以很难看成一种完全的、无懈可击的科学。”

3. 有时候确实是如此；例如在亲属关系中，“子女”和“配偶”在本质上都是本原的关系。

4. 不幸的是，英文中用同一个单词“know”来表示两层不同意思，而作者用德文原文则分别使用了 *kennen* 与 *erkennen* 两个词，拉丁文、法文与希腊文也有这样成对的词。在拉丁文中是：*cognoscere* vs. *scire*；法文中是 *connaître* vs. *savoir*；希腊文中则是：γνῶναι vs. εἰδέναι。英文翻译前后不太一致，而只在有必要时，才使用 cognize，cognition 而不用 know 与 knowledge。［英译者注。］

5. 这正是最古老的数学传统，即苏美尔人的传统。希腊人只是在发现了无理数以后，才放弃了这个传统。他们不得不用几何的词句来表述代数事实。后古典时期的西方，部分地受到阿拉伯人的代数成就的刺激，才逆转了这一发展方向。在戴德金从构造上扭转了欧多克索斯的无理数理论以前，还几乎没有一种论据，能把所有的量都归结为普遍的数的概念(参见第 7 节)。

6. 例如，惠更斯在 1674 年就复数公式说过：这些公式“在很深处还隐藏了一些我们不理解的东西”(见 Leibniz, *Mathematische Schriften*, Ⅱ, p. 15)，甚至柯西到 1821 年还对复数运算有些模糊概念。但是负的量在更早的时期对于哈密顿，也造成过几乎同样多的麻烦。关于“负负得正”，克拉维乌斯(Clavius)在 1612 年说：“debilitas

humani ingenii accusanda (videtur), quod capere non potest, quo pacto id verum esse possit." 笛卡儿按他当时的说法，仍称代数方程的负根为伪根。在有些教科书中把 i 解释为自乘后得出 -1 的数。就我们只能够处理实数而言，这当然是没有意义的，因为 i 并不是实数；这样说只不过表明了一种需要，即数的概念需要扩大到这种程度，乘法的意义也要推广到这种程度，以便得出自乘后得等于 -1 这样的等式。

7. 然而第一个二律背反的陈述却会引起误导。按照所提出的论据，这并不是一个世界有或没有时间上的起始的问题，而是到现在为止的时间瞬间的个数是有限还是无限的问题。在连续地填满了的时间中，不论时间的长短(不论按内在或外在的度量原理)是有限的抑或无限的，都应是后者。

8. 汉克尔说(*Zur Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter*, Leipzig, 1874)："在多边形系列中不论走多远，虽然可以任意地接近一个圆，却永远达到不了圆的面积，这个思想把想象力绷紧到如此的地步：不论代价多么大，也要把实在和观念的间隙填补起来。在这样的心理压力下，再走出一步——是无穷小的一步还是无穷大的一步？——就会得到这样的结论：圆就是有无穷多个无穷小边的多边形。然而古人终于没有走出这一步；只要有希腊几何学家在，他们就总是停步在无穷的悬崖面前……"

9. 例如可与 Hilbert, *Grundlagen der Geometrie*, Chapter Ⅱ, §12 比较。早就由莱布尼茨和瓦里斯(Wallis)讨论过的如圆与其切线间的接触角(*anguli contactus*)与直线之间的交角相对立，就是无穷小量之一例。

10. 与希尔伯特原来的讲法稍有不同，我在这里是遵照冯·诺伊曼的简化的形式主义(Zur Hilbertschen Beweistheorie, *Mathematische Zeitschrift*, 1926)。

11. 这里的字母 A 和 b 显然都不是游戏中的符号，而只是用作互相交流的记号，使我们能一般地谈论公式等等，希尔伯特使用哥特体字母(Gothic alphabet)以示其与真正的符号有别，由于英语民族的读者都讨厌哥特体字母，本书英译本就没有这样做了，尽管它无疑地有助于说清楚问题。

12. 可以证明，在引入了关于 $b+c$ 和 $b\cdot c$ 的定义性的公理和相应的运算符号 $+$，$\cdot$ 以后，所有其他可递归定义的算术运算都可以在此形式化中表示出来。例如参看 Hilbert and Bernays, *Grundlagen der Mathematik*, vol. Ⅰ, pp. 412—422。

13. 康德从对数学的完全不同的观念出发(*Metaphysische Anfangsgründe der Naturwissenschaft*, Preface)也得出以下结论："在每一门特定的自然科学中，能找到多少数学，就能找到多少本来意义的科学。"另一方面，胡塞尔在与希尔伯特同样的意义下，特别就数理逻辑宣称(*Logische Untersuchungen*, Ⅰ, §71)："用数学形式处理……对于一切严格建立起来的理论(这里是就理论一词的真正意义而言)，是唯一的科学处理，只有它能使得系统具有完备性与完美性，并对一切可能的问题及其解答的可能的形式，给出一种洞察。"

14. 尼采(Nietzsche)在他的好几首诗中描述他的查拉斯图拉(Zarathustra)体验时，也常联想到"一变二"(Da wurde Eins zu Zwei)这句话，例如在"Sils Maria"一诗中他写道：

"Da, plötzlich, Freundin, wurde Eins zu Zwei——und Zarathustra ging an mir vorbei..."

(这时，突然地，女友啊，一变二——查拉斯图拉走过我的身边……)

15. 笛卡儿说："古代作者在几何中使用算术术语的种种考虑，未能使他们逾越鸿沟而看清这两门学科中的关系，因而在他们试图作解释时，引起了众多的含糊和令人费解的说法"(译文借用袁向东译：笛卡儿，《几何》，武汉出版社，1992，第 10 页——译者)。

16. 概念上的确定与直觉上的展示，想在两者之间建立起本质区别可能会有反对意见，因为作为概念上的确定之基础的客体性的几何关系，是需要直觉的展示的。但是概念只有很少几个孤立的关系，而点则构成连续统。我倾向于承认，只有这一点才构成本质的区别。

第二部分

1. 请把这一命题与我们在第 14 节末所引述过的康德关于左与右的命题比较。康德一直被解释如下：如果上帝的第一次创世的行动是造出一只左手，而且，甚至当这只手还不能与其他东西比较时，就已经具有了一种确定的特性，即为左(而非为右)，这里的左就只能从直觉上去领悟而不能从概念上去理解。然而，正如莱布尼茨指出的，如果我们倾向于认为这件事的意思是：如果上帝一开始是造了一只“右”手，而非左手，就会发生什么别的事，这一点就是不正确的。我们必须追随着上帝创世的过程，才能发现两者的区别：如果上帝不是先造一只左手再造一只右手，而是先造一只右手，然后还是再造一只右手，则神不是在第一次创世，而是在第二次创世时又改变了宇宙的计划，即是造一只与第一只手同样的手，而不是造一只与第一只手相反的手。

2. 即“Die wohlgegründete dauernde Erde”，引自 Goethe, Grenzen der Menschheit, verse 3。

3. 这个原理不能看作是客体的相等性的定义，而只能看作是一个隐含着的要求，因为相等这个概念在这里出现了两次：相等的东西，在相等的条件下。……

4. 本书和许多用英语写作的哲学家一致，采用 presentation 一词表示与康德和亥姆霍兹的 *Vorstellung* 以及洛克的 idea 一样的意思。[英译者注。]

5. 事实上，在一个不相容的理论中一定可以推导出 $e = 2e$，因此若把这样一个理论与观测数据结合起来，就能导出电子电荷既为 e，又为 $2e$。

6. 解决这个深刻问题竟然一再犯那些天真的几何错误，想到这一点真令人脸红，一个最近的例子是纳托普(Natorp)的 *Logische Grundlagen der exakten Wissenschaften*，303 页以后。

7. 哥德的十四行诗《自然与艺术》(*Natur und Kunst*)中，有一句人们熟知的诗句：“In der Beschränkung zeigt sich erst der Meister”(“有所不为，是为大师”)。

8. 这是尼采给康德起的绰号；例如可见 *Jenseits von Gut and Böse*, 6tes Hauptstück, aphorism 210。[英译者注。]

9. 然而，必须要说到与康德相反的一种看法，即当把均匀的有心力分成两个分力时，除非按距离决定这两个分力的法则各含有一个参数(即“吸引的”和“排斥的”质量)，而且这些参数互相独立，这种分法总是任意的。所以电力和引力可以分开，因为电荷不由质量决定。但因康德只讲到一个单独的质量密度(＝充满的强度)，而且是由排斥力与吸引力的平衡而来的，所以它的物质理论也就悬在半空中了。

10. 这是歌德的无人能模仿的用语，出自他的诗作《单个与全体》(Eins und Alles)第三首：

永恒的，生生不已的活动，
将一切已创造的都再次创造，
它将永远不会固化，
原来不曾是，它也会变成，
光明的太阳，多彩的世界，
它永远不会停歇。[英译者注。]

11. 试比较柏拉图在《蒂迈欧篇》(*Timaeus*, 48E 以下)说的：在“永恒的模式”与其实在的“模仿”之间，柏拉图早已作了区别，有必要放入一个东西，它“既是受体，又对于所有世代有如乳母”，这里的第三个东西，“如同一种可塑的物质，随时可以接受任何事物的烙印”，就是空间，它是感觉所不能达到的，也不会毁灭，而为一切将要存在者提供了一个位置。

12. 这句话是 1926 年写的！

13. 这是歌德的《浮士德》中浮士德的独白。

14. 这是一句熟知的德国谚语：“Kleine Ursachen, grosse Wirkungen”。

15. 葡萄发酵时还有一种副产品，其分子构成与酒石酸相同，但为光学惰性的，

即外消旋酒石酸，而巴斯德(Pasteur)在1848年的一个著名实验中也把它分解为右旋与左旋酒石酸。人体中既有右旋形式的葡萄糖，又有左旋形式的果糖，智人必有一个对所有人都相同的螺旋方向，这个事实以一种很可怕的方式得到了证明，如果一个人的食物中添加了一定量的左旋—苯基丙铵酸(levo-phenylalanine)就会得一种代谢病：苯酮尿(phenylketonuria)而导致的精神错乱(amentia)，而加上右旋的这种苯基丙铵酸就不会有这种灾难性的后果。

16. 比较 F. Medicus，*Die Freiheit des Willens und ihre Grenzen*，1926。

附　　录

附录 A

1. Megara 学派的苏格拉底哲学家弟子们包括 Euclides、Eubulides 等人十分爱好这类悖论，它们显然与芝诺提出的关于运动的伊里亚学派(Eleatic)悖论不同。亚里士多德专门为此写了整整一本书：*De Sophisticis Elenchis*；斯多葛学派的 Chrysippus 广泛地讨论过这类悖论(见 *Diogenes Laertius*，Ⅶ，189—198 页中关于 Chrysippus 的著作篇目；在罗马帝国，它们是正规学校中辩论术课程的一部分。在中世纪，经院哲学对它的发展主要集中在 Paulus Venetus(卒于1428年)身上(见他的 *Logica Magna*，Venetiis 1499 后；特别是 *De Insolubilibus*，192 卷 B 以后)。绝大多数现代哲学家对它的态度可以用 C. Prantl 在他的经典著作 *Geschichte der Logik im Abendlande* 一书中轻蔑的评论为代表："繁琐不足道的东西，如大多数虚幻之物一样，绝不会变为真正的逻辑"(Ⅰ，p. 95)。

2. 按 Diogenes Laertius 的论证，Eubulides 是这个悖论的发明者(*D. L.*，Ⅱ，108)。亚里士多德在 *Soph. Elench.*，*25*，180a，35ff 中描述过它而且给出了自己的解答。在流传至今的古代的陈述中，我要提到 Cicero 在 *Academica*，Ⅱ，29 页中说的："Si te mentiri dicis idque verum dicis, mentiris an verum dicis?"；还有 Alexander Aphrodisiensis(约在公元200年)在 *ad Soph. Elench.*，Aldina f. 54r. 中说的[M. Wallies，*Comm. in Arist. Graeca*，Vol. Ⅱ，pars Ⅲ，Berlin，1898，p. 171，l. 18]，ἀλλά μὴν ὁ λέγων "ἐγὼ ψεύδομαι" ἅμα καὶ ψεύδεται καὶ ἀληθεύει。Athenaeus 在 *Deipnosophists*，Ⅸ，401e 中写了一个对句(distichon)来纪念诗人 Philitas of Cos (Theocritus's master)，据说他因未能解决这个悖论而被杀。在 Chrysippus 的逻辑著作中，至少有七部是以 pseudomenos 为主题的。在塞万提斯的《唐吉诃德》中，桑丘·潘沙作为巴拉塔里亚岛的总督，也遇到了一个 pseudomenos 类型的悖论，而且以自己的所罗门式的智慧解决了它(Cervantes，*Don Quixote*，Ⅱ，51)。关于 pseudomenos 的详尽历史，请参看 Alexander Rüstow，*Der Lügner*，Leipzig，1910。与"Epimenides"类似，但形式不那么尖锐的陈述已属于基督教时期了。当保罗派遣提多(Titus)去向克里特人传道时，他警告提多说："有克里特人中的一个本地先知说，克里特人常说谎话，乃是恶兽，又馋又懒"(*Ep. to Titus*，Ⅰ，12)。保罗完全没有意识到其中有悖论，所以又加了一句："这个见证是真的。"早期基督教传统认定这里讲的先知是 Epimenides (Clemens Alexandrinus，*Stromata*，Ⅰ，59，ed. Stählin，Leipzig，1906，Ⅱ，p. 37；又见 H. Diels，*Fragmente der vorsokratiker*，fifth ed.，Ⅰ，Berlin，1934，Epimenides fr. 1，pp. 31—32)，也可能是受过"异教徒"辩论术教育的人如 Clement 或 Jerome把这个 pseudomenos 与保罗对克里特人的轻视联结起来了。然而，比 Angelus Politianus(1454—1494)，Ep. ad Manutium (*Opera omnia*，Basel，1553，p. 91)更早的参考文献似乎已找不到了。Strabo，*Geography*，10. 487 提到 Phocylides(约公元前530年)是下面这个命题的作者，这个命题是有点像说谎的克里特人，但是磨钝了悖论性的锋芒："勒罗斯人是坏人；不止是这个人或者那个人坏，而是所有的都坏，只有 Proclees除外；Proclees 也是勒罗斯人。"据说 Demodocus 在 *Anth. Pal.*，11. 235 中把勒罗斯岛换成了开奥斯岛(Chios)，不知其有何根据。

附录 B

1. 具有同一性的自我是一个谜，它对加之于它以及它所加于其他的都是旁观者，这一点在本附录开始时所用到的《玫瑰骑士》的诗句中，十分动人地表现出来了。

2. n_1 与 n_2 理解为 0，1，2，…这些自然数。

3. 下面再不会用到否定符号了。所以从现在往后，我们用符号～表示等价，希望不要引起误会。

4. 真实的过程[这是一个分为两步的过程，而且伴随着每一个染色体纵向分裂为两个染色单体(chromatids)]，比它的组合结果稍微复杂一些。

5. 这是数论中所用的名词；二次型的“种”(genus)比它的“类”(class)更宽。而在生物分类学中，依大小排序的等级是：界(kingdom)，纲(class)，目(order)，科(family)，属(genus)，种(species)，变种(variety)，与这里大小是相反的。[这里作者是使用了生物学和逻辑学的用法。在生物学中，genus 译为“属”，species 译为“种”，属比种更宽。生物学分类的名称则是借用了逻辑学中“属”与“种”的说法。但在数学中，这两个词另有含义，其大小与这里是相反的。——译者]

6. 这个自然的但是纯粹组合学的概念与现今在生物学中通用的 species(种)一词虽有关系，却不完全相同。毫无疑问，后者虽然难以给出准确的定义，却与一个基本事实相应。我现在引用杜布赞斯基的“动态的”定义，以作为说明差距之大的例子：“种是进化过程的一个阶段，这时，曾经实际地或者有可能互相交配的形式之阵列，分成了两个或多个互相隔离且在生理上不可能再交配的形式之阵列”(*Philosophy of Science*，2，1935，pp. 344—355)。

7. 不幸的是，frequency 一词在英文中用于两个完全不同的意义——既表示出现在一统计系综(德文为 Häufigkeit)中的次数，又表示振动的次数。

8. 拓扑学的复形是由没有质的元素组成的，而我们的元素既然属于不同的类，所以有不同的质。

9. 戈尔德施米特(R. Goldschmidt)最近在位置效应基础上，向基因的整个概念以及点突变和结构突变的区分提出挑战。

10. 用 $\Omega_{\alpha\beta}$ 表示由基因型为 α 的精子与基因型为 β 的卵子所生成的有机体。有时甚至在相同的环境下，反向的交配 $\Omega_{\beta\alpha}$ 也与 $\Omega_{\alpha\beta}$ 外观不同，这一事实证实了只用基因来解释有机体的发展并不总是足够的，除了细胞核中的染色体外，必须假设在细胞质中也有影响发展的遗传物质。然而，这个问题还远未得到满意的解答。

11. 气体的质量 $M = n \cdot \mu$ 正比于粒子的个数 n，若以 $v = V/M$ 记其比容，即可得到通常形状的盖吕萨克(Gay-Lussac)定律 $pv = RT$，这里 $R = k/\mu$ 标志了气体的特性，因此 k 标志了原子级的小，而对不同的气体，R 与“分子量”之积总是相同的。

附录 C

1. 按照定义，属于可交换的栅的这些量可以相加和相乘。

附录 D

1. 如果把苯分子看作是 6 个 3 价的 CH 基因所成的环，则共振的独立的可能性之数将由 5 个增至 34 个；因为 6 个变元向量的且对每个向量次数均为 3 的二元不变式的线性流形维数为 34。

2. 西尔维斯特的文章发表在 *American Journal of Mathematics* 第一卷，这个刊物正是他本人在约翰·霍普金斯大学创办的，论文标题是：*On an application of the new atomic theory to the graphical representation of the invariants and covariants of binary quantics*(论新原子论对二元齐次式的不变式与共变式的图示的一个应用)。这篇论文开始的一段，首先是对 19 世纪自然哲学一个特有的表述，其次又是一篇西尔维斯特式的如此动人的散文，所以值得引述如下：“所谓新原子论，我是指凯库勒的崇高的发明，它与旧原子论的对比，多少类似于开普勒的天文学与托勒密的天文学的对比，或达尔文的自然体系与林耐(Carl Linnaeus)的自然体系的对比；——和旧理论一样，它在

动能学的直接影响之外，其定律基于纯粹的形式之间的关系，又像新的由牛顿完善了的理论一样，这些定律有精确的算术定义——我想方设法，终于有一晚在梦中醒来，发现一种方法可以把现代代数学的对象的很明白的概念，传授给一个混杂的群体，这个群体主要由物理学家、化学家和生物学家组成，也有少数数学家散居其内。我坚持要把自己在所偏好的这个学科里的新近的研究介绍给这个群体，而且我一直感到，对于化合物的基因的研究和对“Grundformen”，即既约的不变式之研究有一种亲和性，甚至在我的心智的视网膜上，出现了一个化学—图式的影像，它可以体现和说明导出的代数式与原来的代数式之间的关系，以及它们自身之间的关系，从而完全地完成了我心目中的目标，这就是我将在下面解释的。”

附录 E

1. 见 N. W. Timoféeff-Ressowsky，K. G. Zimmer，M. Delbrück，*Über die Natur der Genmutation und der Genstruktur*，(Nachr. Gött. Ges，Wissensch.，Math.-Physik. Kl.，Fachg. Ⅵ，1)，1935，pp. 189—245。

附录 F

1. 长颈鹿的脖子变长，是为了“吃到树顶上的嫩叶”，就是在那时广泛讨论的经典例子。