Bakalářská práce WIP

Benjamin de Silva

October 2023

Úvod

Motivace

1 Definice (hlavní zdroj - linalg skripta

V této kapitole si zavedeme základní definice potřebné pro práci s maticemi, operace na nich a různé typy matic, které budeme používat.

Definice 1.1 (Matice)**.** *Maticí* typu m × n nad tělesem **T** rozumíme obdelníkové schéma prvků z tělesa **T** s m řádky a n sloupci. Matice typu m × m se nazývá *čtvercová matice řádu m.* Matice typu m × 1 se nazýva *sloupcový aritmetický vektor* a matice typu 1 × m se nazývá *řádkový aritmetický vektor.* Zápisem $A = (a_{ij})_{m\times n}$ rozumíme matici typu $m \times n$ s prvkem $a_{ij} \in T$ na pozici (i,j).

V rámci této práce budeme uvažovat matice nad tělesem $T = \mathbb{C}$

Definice 1.2 (Typy matic)**.** Nechť A je čtvercová matice řádu n. Pak řekneme, že

- A je *nulová*, pokud $a_{ij} = 0, \forall i, j \in \{1, ..., n\}$,
- A je *jednotková*, pokud $a_{ij} = 0$ pro $i = j$ a $a_{ij} = 0$ jinak,
- A je *diagonální*, pokud $a_{ij} = 0$ pro $i \neq j$,
- A je *horní trojuhelníková*, pokud $a_{ij} = 0$ pro $i > j$,
- A je *dolní trojuhelníková*, pokud $a_{ij} = 0$ pro $i < j$,
- A je *permutační*, pokud má v každém řádku a sloupci právě jeden prvek 1 a zbytek jsou nuly,
- A je *symetrická*, pokud $a_{ij} = a_{ji}$,$\forall i, j \in \{1, ..., n\}$,
- A je *řídká*, pokud většina prvků matice je nulových.

Značení. Budeme značit jednotkovou matici $\mathbf{I_{m\times n}}$ a nulovou matici $\mathbf{0_{m\times n}}$, jsou-li obě matice typu $m \times n$. Pokud jsou matice čtvercové řádu n, tak značíme $\mathbf{I_n}, \mathbf{0_n}$ a v případě, že je to z kontextu zřejmé, tak index může být vynechán.

Definice 1.3 (Sčítání matic)**.** Nechť A,B jsou matice stejného typu m × n, pak definujeme jejich součet jako matici

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{m\times n}$$

Nechť A,B,C jsou matice stejného typu, pak operace sčítání matic má následující vlastnosti

- $(A + B) + C = A + (B + C)$,
- $A + 0 = A$,
- $A + (-A) = 0$,
- $A + B = B + A$.

Definice 1.4 (Násobení matice skalárem)**.** Nechť A je matice typu $m \times n$ a $t \in \mathbb{R}$. Pak definujeme t-násobek matice A jako matici

$$t \cdot A = tA = (t \cdot a_{ij})_{m \times n}$$

Nechť A,B jsou matice stejného typu a $s, t \in \mathbb{R}$. Pak platí následující vlastnosti

- $s(tA) = (st)A$,
- $1A = A$,
- $-A = (-1)A$,
- $(s+t)A = sA + tA$,
- $s(A+B) = sA + sB$.

Definice 1.5 (Transponovaná matice)**.** Nechť A je matice typu $m \times n$, pak transponovanou maticí k matici A rozumíme matici

$$A^T = (b_{ij})_{n \times m},$$

kde $b_{ij} = a_{ji}$ pro $i \in \{1, \ldots, n\}, j \in \{1, \ldots, m\}$.

Z definice symetrické matice a transponované matice plyne, že pro A symetrickou platí $A^T = A$.

Nechť A,B jsou matice stejného typu $m \times n$ a $s \in \mathbb{C}$, pak platí

- $(A^T)^T = A$
- $(A^T + B^T) = A^T + B^T$
- $(sA)^T = sA^T$

Značení. Někdy je vhodné nahlížet na matici jako na posloupnost sloupcových vektorů, tedy matici $A = (a_{ij})_{m \times n}$ můžeme zapsat jako $A = (\mathbf{a_1}|\mathbf{a_2}|...|\mathbf{a_n})$, kde $\mathbf{a_i} = (a_{1i}, a_{2i}, \ldots, a_{mi})^T, i \in \{1, \ldots, n\}$ je i-tý m-složkový sloupcový aritmetický vektor matice A,

Definice 1.6 (Součin matice a vektoru)**.** Nechť $A = (\mathbf{a_1}|\mathbf{a_2}|...|\mathbf{a_n})$ je matice typu $m \times n$ a $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)^T$ je aritmetický sloupcový vektor. Pak definujeme součin matice A s vektorem b jako

$$A \cdot b = b_1\mathbf{a_1} + b_2 \cdot \mathbf{a_2} + \ldots + b_n\mathbf{a_n},$$

což je m-složkový sloupcový vektor.

Definice 1.7 (Součin dvou matic)**.** Nechť A je matice typu $m \times n$ a $B = (\mathbf{b_1}, \ldots, \mathbf{b_k})$ je matice typu $n \times k$. Pak součin matic A a B je

$$AB = (A\mathbf{b_1}, A\mathbf{b_2}, \ldots, A\mathbf{b_k}),$$

což je matice typu $m \times k$.

Ze zavedených definic už můžeme začít řešit úlohu soustav lineárních rovnic. Mějme zadanou matici A typu $m \times n$ a $b = (\mathbf{b_1}, \ldots, \mathbf{b_m})^T$ m-složkový aritmetický vektor. Pak hledáme $x = (\mathbf{x_1}, \ldots, \mathbf{x_n})^T$ sloupcový vektor takový, že platí rovnost $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. Každý takový vektor $\mathbf{x}$ nazveme řešením soustavy linearních rovnic matice A s pravou stranou $\mathbf{b}$.

Definice 1.8 (Inverzní matice)**.** Nechť A je matice typu $m \times n$. Pak

- matici X nazveme inverzní k A zprava, pokud platí $AX = I_m$
- matici X nazveme inverzní k A zleva, pokud platí $AX = I_n$
- je-li A čtvercová řádu n a matice X taková, že $AX = XA = I_n$, pak X nazveme inverzní k matici A, matici X značíme A^{-1} a matici A nazveme invertibilním

Definice 1.9 (Regulární matice)**.** Matici A řádu n nazveme regulární, pokud je zobrazení $f_A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n, x \mapsto Ax$ určené maticí A bijektivní. Matice A, která není regulární, se nazývá singulární.

Pro čtvercovou matici A platí následující ekvivalence

- Matice A je regulární,
- Zobrazení f_A je na
- Zobrazení f_A je prosté
- Soustava $A\mathbf{x} = 0$ má právě jedno řešení $\mathbf{x} = 0$
- Matice A je invertovatelná
- Existuje matice X tak, že $AX = I_n$
- Existuje matice Y tak, že $YA = I_n$
- $rank(A) = n$

Definice 1.10 (Obor hodnot, jádro, hodnost)**.** Pro matici A typu $m \times n$ definujeme

$$\mathbf{R}(A) = \{A\mathbf{x} : x \in \mathbb{R}^n\}\ ,\ \mathbf{N}(A) = \{\mathbf{x} \in \mathbf{C}^n\}\ ,\ rank(A) \equiv dim(\mathbf{C}(A),$$

kde $R(A)$ nazveme *oborem hodnot* matice A, $\mathbf{N}(A)$ nazveme *jádrem* matice A a rank(A) *hodností* matice A.

2 Metody pro hledání nulového prostoru (zdroj-kniha se stromem

V této kapitole popíšeme různé metody pro hledání nulového prostoru matic. Mějme tedy nějakou matici A typu $m \times n$ řádu m, pak hledáme nějakou matici B typu $n \times (n-m)$ řádu $n-m$ tak, že platí $AB = 0$, tedy sloupce matice B tvoří bázi nulového prostoru matice A.

Pro každou metodu bude výhodné nejprve rozložit matici A a poté matici B spočítáme za použití získaného rozkladu. Abychom zachovali numerickou stabilitu a řídkost, tak je někdy nutné prohodit některé řádky a sloupce za pomocí permutačních matic, tedy ve skutečnosti hledáme rozklad matice $P_1 E P_2$.

2.1 Singulární rozklad

Singulární rozklad (zkráceně SVD - singular value decomposition) nám umožňuje určit hodnost či normu matice, ortogonální bázi oboru hodnot a nulového prostoru matice, nicméně má vysoké výpočetní nároky. Před zavedením singulárního rozkladu si nejprve zavedeme spektrální rozklad.

2.1.1 Spektrálního rozklad

Věta 2.1. *Nechť $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, potom platí*

$$N(A) \bigoplus R(A^*) = \mathbb{C}^n, \;\; N(A) \perp R(A^*),$$

$$N(A^*) \bigoplus R(A) = \mathbb{C}^m, \;\; N(A^*) \perp R(A).$$

Věta 2.2 (Spektrální rozklad pro normální matice)**.** *Matice A je normální právě tehdy, když existuje unitární matice U a diagonální matice D tak, že*

$$U^* A U = D, \;\; tj. \;\; A = U D U^*$$

Předpokládejme, že A je hermitovská pozitivně semidefinitní řádu n s hodností r s nezápornými vlastními čísly $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_r > 0$, $\lambda_{r+1} = \ldots = \lambda_n = 0$. Podle věty 2.1 existuje rozklad matice A ve tvaru

$$A = Q \Lambda Q^*, \;\; Q^* Q = I, \;\; \Lambda = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n).$$

Sloupce unitární matice $Q = (q_1, \ldots, q_n)$ jsou vlastní vektory matice A a platí

$$A q_j = \lambda_j q_j, \;\; j = 1, \ldots, n$$

Vlastní vektory $q_1, q_2, \ldots, q_n$ tvoří ortonormální bázi prostoru $\mathbb{C}^n$.

Ze spektrálního rozkladu matice A vidíme bázi nulového prostoru a oboru hodnot matice A,

$$R(A) = span\{q_1, \ldots, q_r\}, \;\; N(A) = span\{q_{r+1}, \ldots, q_n\},$$

dále nám dává dyadický rozvoj matice A

$$A = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j q_j q_j^* = \sum_{j=1}^{m} A_j, \quad A_j = \lambda_j q_j q_j^*,$$

kde matice A_j jsou uspořádány podle spektrální (či Frobeniovy) normy matice a platí $\|A_j\| = \|A_j\|_F = \lambda_j$, tedy můžeme matici A aproximovat maticí nižší hodnosti

$$A^{(k)} = \sum_{j=1}^{k} A_j.$$

Pro odvození singulárního rozkladu budou důležité spektrální rozklady matic A^*A a AA^*. Matice A^*A a AA^* jsou čtvercové hermitovské pozitivně semidefinitní a můžeme uvažovat jejich spektrální rozklad.

Lemma 2.3. Pro komplexní matici $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ platí

$$N(A^*A) = N(A), \quad R(A^*A) = R(A^*),$$

$$N(AA^*) = N(A^*), \quad R(AA^*) = R(A).$$

Důsledek **Věty 2.1** a **Lemma 2.3** je, že

$$dim(R(AA^*)) = dim(R(A)) = r = dim(R(A^*)) = dim(R(A^*A)),$$

pro A hodnosti r.

Buď λ_j vlastní čísla a v_j ortonormální vlastní vektory matice A^*A, $j = 1, \ldots, n$. Uvažujme dále bez újmy na obecnosti

$$\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_r > 0, \quad \lambda_{r+1} = \lambda_n = 0,$$

pak pro $V = (v_1, \ldots, v_n)$ platí

$$V^*A^*AV = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_r, 0, \ldots, 0)$$

Dále z **Lemma 2.3** platí, že $v_1, \ldots, v_r$ resp. $v_{r+1}, \ldots, v_n$ tvoří ortonormální bázi

$$R(A^*A) = R(A^*) = span\{v_1, \ldots, v_r\},$$

resp.

$$N(A) = N(A^*A) = span\{v_{r+1}, \ldots, v_n\}.$$

Následující lemma nám dává vztah mezi ortonormálními vektory matic A^*A a AA^*.

Lemma 2.4. Uvažujme spektrální rozklad matice A^*A s vlastními čísly λ_j a v_j, $j = 1, \ldots, r$. Potom jsou vektory

$$u_j \equiv Av_j/\sqrt{\lambda_j}, \quad j = 1, \ldots, r$$

ortonormální vlastní vektory AA^* a platí

$$AA^*v_j = \lambda_j u_j, \ \ \|u_j\| = 1, \ \ j = 1, \ldots, r.$$

Z **Lemma 2.4** plyne, že vektory $u_j, \ j = 1, \ldots, r$ jsou ortonormální vlastní vektory matice AA^*, které odpovídají právě m nenulovým vlastním číslům λ_j a platí

$$Av_j = \sqrt{\lambda_j} u_j, \ \ j = 1, \ldots, r.$$

Analogie těchto vztahů platí i pro matici AA^*, tj. pokud $u_1, \ldots, u_r$ tvoří ortonormální bázi oboru hodnot matice a $u_{r+1}, \ldots, u_m$ tvoří ortonormální bázi doplňku oboru hodnot, pak platí

$$span\{u_1, \ldots, u_r\} = R(AA^*) = R(A),$$

$$span\{u_{r+1}, \ldots, u_m\} = N(AA^*) = N(A^*).$$

Z konstrukce plyne, že nenulová vlastní čísla matic A^*A a AA^* se rovnají včetně násobnosti.

Nyní můžeme popsat singulární rozklad.

Definice 2.5 (Singulární čísla)**.** Nechť $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$. Odmocniny vlastních čísel matice A^*A nazveme singulárnímy čísly matice A,

$$\sigma_j = \sqrt{\lambda_j}, \ \ j = 1, \ldots, r, \ \ r = rank(A).$$

Jelikož vlastní čísla λ_j jsou uspořádáná od největšího po nejmenší, tak platí

$$\sigma_1 \geq \ldots \geq \sigma_r > 0.$$

Tedy podle předchozích poznatků platí $Av_j = \sigma_j u_j, \ j = 1, \ldots, r$ a můžeme psát

$$AV = U\Sigma,$$

kde

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}, \ \ \Sigma_r = diag(\sigma_1, \ldots, \sigma_r) \in \mathbb{R}^{r \times r}, \ \ ,$$

$$V = (v_1, \ldots, v_n).U = (u_1, \ldots, u_m).$$

Ekvivalentně

$$A = U\Sigma V^*, \ \ A^* = V\Sigma^T U^*$$

Vidíme tedy, že pokud bychom byli schopni spočítat singulární rozklad matice A, tak nulový prostor podle **Lemma 2.3** je roven lineárnímu obalu vektorů $v_{r+1}, \ldots, v_n$.

Nyní pomocí SVD můžeme vyřešit úlohu hledání matice B splňující $AB = 0$ následovně

$$P_1 A P_2 = U\Sigma V,$$

$$[V_1, V_2] = V^T,$$

$$B = P_2 Q_2$$

SVD můžeme vypočítat za pomocí spektrálních rozkladů matic AA^* a A^*A, podmíněnost obou matic rovna $\kappa(A)^2$, tedy pokud by byla matice A špatně podmíněna, tak by mohla být singulární čísla spočtena nepřesně.

Věta 2.6. *Mějme matici $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ řádu m a její singulární čísla $\sigma_1 \geq \ldots \geq \sigma_m > 0$. Potom platí $\|A\| = \sigma_1,\ \ \|A\|_F = (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \ldots + \sigma_m^2)^{1/2}$. Dále*

$$\|A\| \leq \|A\|_F \leq \sqrt{m}\,\|A\|.$$

Jelikož platí, že

$$\|A\| = \sigma_1,\ a\ \left\|A^-1\right\| = \sigma_m^-1,$$

tak dostáváme

$$\kappa(A) = \sigma_1/\sigma_n.$$

Další standardní metoda výpočtu SVD probíhá ve dvou krocích

1. Transformace matice A na bidiagonální tvar užitím unitárních transformací nebo Golub-Kahanovy iterační bidiagonalizace. Transformovaná matice A je ve tvaru

   $$B = PAQ,$$

   kde P,Q jsou unitární a B je bidiagonální.

2. Nalezení singulární rozkladu bidiagonální matice B pomocí iteračního procesu, který nuluje její naddiagonální prvky.

Výpočetní náročnost závisí na iteračním procesu, kterým počítáme singulární rozklad bidiagonální matice. Pokud bychom předpokládali, že máme pouze čtvercové matice řádu m, iterační proces rychle konverguje a nezvyšuje počet operací, pak dolní odhad na počet operací je $\frac{16}{3}m^3$.

2.2 LU rozklad

Jednou z nejdůležitejších metod pro řešení soustav lineárních rovnic je LU rozklad, který nám původní matici A rozloží na součin dolní trojuhelníkové matice a horní trojuhelníkové matice. LU rozklad je založen na Gaussově eliminaci následovně

$$A \longrightarrow A^{(1)} \equiv \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ 0 & a^1_{2,2} & \dots & a^1_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a^1_{m,2} & \dots & a^1_{m,n} \end{bmatrix} = M^{-1}A,$$

kde

$$M_1^{-1} = I - m_1 e_1^T = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ -\frac{a_{2,1}}{a_{1,1}} & 1 & & & \\ -\frac{a_{3,1}}{a_{1,1}} & & 1 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ -\frac{a_{m,1}}{a_{1,1}} & & & & 1 \end{bmatrix}, \quad m_1 = \begin{bmatrix} \frac{a_{2,1}}{a_{1,1}} \\ \frac{a_{3,1}}{a_{1,1}} \\ \vdots \frac{a_{m,1}}{a_{1,1}} \end{bmatrix}.$$

Jelikož A má hodnost m, tak permutováním zaručíme, že nikdy nedělíme 0, tedy LU rozklad lze provést. V i-tém kroku bude

$$A^{(i)} \equiv \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & & & a_{1,n} \\ 0 & a^{(1)}_{2,2} & \dots & & & a^{(1)}_{2,n} \\ \vdots & 0 & \ddots & & & \\ & \vdots & & a^{(i-1)}_{i,i} & \dots & a^{(i-1)}_{i,n} \\ 0 & 0 & & a^{(i-1)}_{m,i} & \dots & a^{(i-1)}_{m,n} \end{bmatrix}, \quad m_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{a_{i+1,i}}{a_{i,i}} \\ \frac{a_{i+2,i}}{a_{i,i}} \\ \vdots \\ \frac{a_{m,i}}{a_{i,i}} \end{bmatrix}.$$

Po m-1 krocích dostaneme

$$U \equiv A^{(m-1)} = M_{m-1}^{-1} \dots M_2^{-1} M_1^{-1} A, \quad L \equiv M_1 M_2 \dots M_{m-1},$$

kde U je horní trojuhelníková typu $m \times n$ a L je dolní trojuhelníková řádu m s jednotkami na diagonále a upravením rovnosti dostáváme

$$A = LU = L[U_1 \; U_2], \quad U_1 = [u_1, \dots, u_m], \quad U_2 = [u_{m+1}, \dots, u_n].$$

Nyní můžeme LU rozklad použít k řešení naší úlohy $AB = 0$

$$P_1 A P_2 = L[U_1 U_2], J = U_1^{-1} U_2, B = P_2 \begin{bmatrix} -J \\ I_{n-m} \end{bmatrix}.$$

2.3 Gauss-Jordanova eliminace

2.4 Sloupcová eliminace

2.5 QR rozklad

2.6 LQ rozklad