Licence L1 SV

UE MAT103

Correction - Interrogation écrite du jeudi 29 novembre 2018

Exercice 1. *Calculer une primitive de la fonction f définie sur $x > 0$ par*

$$f(x) = 2\sin(x)\cos(x) + \frac{4x+6}{x^2+3x+1} + \exp(2x-4) + \frac{\ln(x)}{x}$$

Pour bien primitiver, il faut bien dériver ! Rappelons quelques unes de formules de dérivation à bien connaitre :

- $(u^2)' = 2uu'$
- Plus généralement, $(u^n)' = nu'u^{n-1}$
- $\ln(u)' = \frac{u'}{u}$
- $\exp(u)' = u'\exp(u)$

La méthode générique pour primitiver est la suivante :

- J'essaie de reconnaître une forme dérivée.
- Je vérifie ma supposition en dérivant la primitive que je propose ! (Je peux le faire de tête si je suis sûr de moi.)

On obtient ici :

- $2\sin(x)\cos(x)$: Comme $\sin' = \cos$ on reconnaît $2u'u$, avec $u(x) = \sin(x)$. Donc $F(x) = (\sin(x))^2$.
- $\frac{4x+6}{x^2+3x+1}$: On est sur une fraction, donc on a deux possibilités : du ln ou du u^n (avec n négatif). On regarde donc le lien entre le haut et le bas : $(x^2+3x+1)' = 2x+3$. On est donc sur du $2\frac{u'}{u}$, donc $F(x) = 2\ln(x^2+3x+1)$.
- $\exp(2x-4)$: du exp, c'est plutôt gentil. Pour $u(x) = 2x-4$, ça donne $\exp(u)' = 2\exp(2x-4)$. Donc on n'oublie pas de diviser par 2 pour trouver $F(x) = \frac{1}{2}\exp(2x-4)$.
- $\frac{\ln(x)}{x}$: un peu plus dur. Il faut reconnaître uu' avec $u(x) = \ln(x)$. D'où $F(x) = \frac{1}{2}(\ln(x))^2$

Exercice 2. *Calculer l'aire de la partie du plan Oxy définie par les inégalités $1 < x < 3$ et $0 < y < g(x)$, avec $g(x) = 3x^2 + \frac{1}{\sqrt{2x+3}} + 4$.*

Premier point : une aire sous une courbe est une intégrale ! Donc ici on nous demande de calculer

$$\int_1^3 g(x)dx$$

Cela nous conduit donc à trouver une primitive de g. Rappel : $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{(u)}}$! Donc on trouve $G(x) = x^3 + \sqrt{2x+3} + 4x$. Reste à utiliser la formule liant intégrale et primive :

$$\int_1^3 g(x)dx = G(3) - G(1) = 27 + \sqrt{9} + 12 - 1 - \sqrt{5} - 4 = 37 - \sqrt{5}$$

Exercice 3. *On note (x_n) la suite définie par $x_0 = 4$ et, pour tout $n \geqslant 0$, $x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + 5$. Pour tout $n \geqslant 0$, on pose $y_n = x_n - 10$.*
1. Montrer que la suite (y_n) est géométrique.

C'est TRES important de savoir faire ce genre de question. Attention à ne pas tout mélanger : il y a deux formes qui caractérisent une suite géométrique : la forme "récurrence" ou la forme "explicite".

La forme "récurrence" donne le terme suivant en fonction du précédent : $u_{n+1} = qu_n$.

La forme "explicite" donne le terme général (c'est-à-dire la valeur de u_n pour n'importe quel n) : $u_n = u_0 q^n$.

La forme récurrence avec un $\times$ se transforme en la forme explicite avec une puissance.

Attention à ne pas confondre avec une suite arithmétique : la forme récurrence avec un $+$ se transforme en la forme explicite avec un $\times$.

Ici, je calcule donc $y_{n+1} = x_{n+1} - 10 = \frac{1}{2}x_n + 5 - 10 = \frac{1}{2}(y_n + 10) - 5 = \frac{1}{2}y_n$.
D'où une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$.

2. En déduire une expression de y_n en fonction de n.

Formule du cours qui donne le lien entre la forme "récurrence" et la forme "explicite" : $y_n = y_0 q^n$.
On calcule $y_0 = x_0 - 10 = 4 - 10 = -6$.

3. Déduire de la question 2 une expression de x_n en fonction de n et, finalement, la convergence de la suite (x_n) vers une limite L que l'on calculera.

On utilise la définition de y_n dans l'autre sens : $x_n = y_n + 10 = (-6)\frac{1}{2^n} + 10$.
Comme $\frac{1}{2^n} \longrightarrow 0$, on en déduit la convergence de x_n vers 10.

Remarque : x_n n'est ni géométrique ni arithmétique, donc on ne peut appliquer aucune formule directement. C'est pour ça qu'on déplace le problème en utilisant y_n.

Fin.