Equations de droites – Système linéaire de deux équations à deux inconnues

I Equation réduite d'une droite

1) Rappels sur les fonctions affines

Définition : Une fonction affine f est une fonction définie pour tout nombre réel x par $f(x) = ax + b$ où a et b sont des réels donnés.

a est appelé coefficient directeur, b est appelé ordonnée à l'origine.

Propriété : La représentation graphique d'une fonction affine est une droite

2) Equation réduite d'une droite et coefficient directeur d'une droite

Propriété : Dans un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ toute droite (d) non parallèle à l'axe des ordonnées est la représentation graphique d'une fonction affine.

Elle admet donc une équation de la forme $y = m\,x + p$ où m et p sont des nombres réels

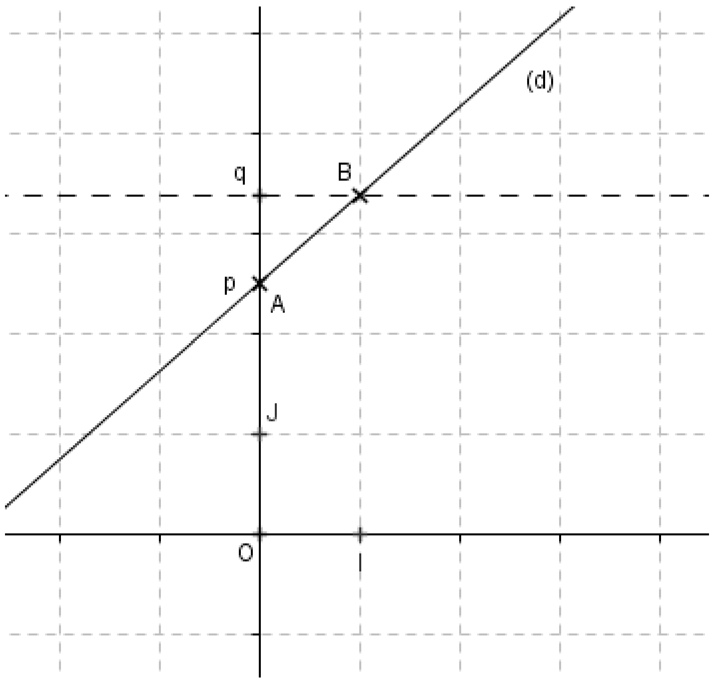
m est appelé coefficient directeur de la droite et p est appelé ordonnée à l'origine.

Démonstration

La droite (d) n'étant pas parallèle à l'axe des ordonnées, elle le coupe en un point A.

Elle coupe aussi la parallèle à l'axe des ordonnées passant par le point I(1 ; 0). On note B le point d'intersection.

On a donc A(0 ; p) et B(1 ; q)



Soit f la fonction affine définie par $f(x) = (q - p)x + p$

On a $f(0) = p$ et $f(1) = q$

La représentation graphique de f est donc la droite (AB) et donc $y = mx + p$ est l'équation de la droite (d).

Propriété : Dans un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ **toute droite (d) parallèle à l'axe des ordonnées** admet une équation de la forme $x = c$ où c est un nombre réel.

Démonstration

La droite (d) est parallèle à l'axe des ordonnées donc elle coupe l'axe des abscisses en un point A(c ; 0).

Un point M appartient à (d) si et seulement si son abscisse est égale à celle de A.

La droite (d) admet donc comme équation $x = c$.

3) Coefficient directeur d'une droite

Propriété : : Dans un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ soient $A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$ avec $x_A \neq x_B$. Le coefficient directeur de la droite (AB) est donné par la relation : $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

Démonstration

$x_A \neq x_B$ donc (AB) n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées donc elle admet une équation de la forme $y = mx + p$.

On a $y_A = m\,x_A + p$ et $y_B = m\,x_B + p$ donc :

$$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{m\,x_B + p - (m\,x_A + p)}{x_B - x_A} = \frac{m\,x_B + p - m\,x_A - p}{x_B - x_A} = \frac{m\,(x_B - x_A)}{x_B - x_A} = m$$

4) Applications

Dans un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ on considère les points A(1 ; 2) et B(4 ; - 2)

On cherche à déterminer l'équation réduite de la droite (AB).

On remarque que $x_A \neq x_B$ donc la droite (AB) a une équation de la forme $y = mx + p$

- On détermine le coefficient directeur m :

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-2 - 2}{4 - 1} = -\frac{4}{3}$$

- On détermine l'ordonnée à l'origine p :

On a $y_A = m\,x_A + p$ donc $2 = \dfrac{-4}{3} \times 1 + p$ car A (1 ; 2)

on en déduit $p = 2 + \dfrac{4}{3} = \dfrac{10}{3}$

Ainsi la droite (AB) a pour équation réduite $y = \dfrac{-4}{3}x + \dfrac{10}{3}$

5) Positions relatives de deux droites

Théorème : Dans un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ soient (d) et (d') deux droites d'équations $y = m\,x + p$ et $y = m'\,x + p'$.

(d) et (d') sont parallèles si et seulement si $m = m'$

II Vecteurs directeurs et équations cartésiennes d'une droite

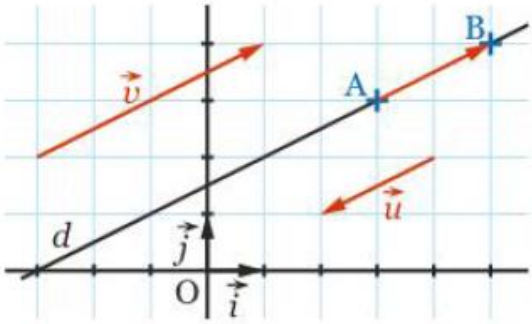
1) Vecteurs directeurs

Définition

On appelle **vecteur directeur** d'une droite d tout représentant du vecteur $\overrightarrow{AB}$ où A et B sont deux points quelconques distincts de la droite d.

EXEMPLE

Dans l'image ci-contre, les vecteurs $\overrightarrow{AB}(2\,;1)$, $\vec{u}(-2\,;-1)$ et $\vec{v}(4\,;2)$ sont des vecteurs directeurs de la droite d.



2) Equations cartésiennes d'une droite

Théorème

Dans un repère orthonormé, les coordonnées de l'ensemble des points $M(x\,;y)$ d'une droite vérifient une relation $ax+by+c=0$, où a, b et c sont des nombres réels.

DÉMONSTRATION

Soient $P(x_P\,;y_P)$ et $Q(x_Q\,;y_Q)$ deux points de d.

Alors, pour tout point $M(x\,;y)$ appartenant à d :

$\overrightarrow{PM}(x-x_P\,;y-y_P)$ et $\overrightarrow{PQ}(x_Q-x_P\,;y_Q-y_P)$ sont colinéaires.

On a donc $\det\left(\overrightarrow{PM}\,;\overrightarrow{PQ}\right)=0$

c'est-à-dire $(x-x_P)(y_Q-y_P)-(y-y_P)(x_Q-x_P)=0$.

Donc $x(y_Q-y_P)-x_P(y_Q-y_P)-y(x_Q-x_P)+y_P(x_Q-x_P)=0$.

Donc $(y_Q-y_P)x+(x_P-x_Q)y+(y_Px_Q-x_Py_Q)=0$.

En posant $a=y_Q-y_P$, $b=x_P-x_Q$ et $c=x_Qy_P-x_Py_Q$, on a donc $ax+by+c=0$.

Définition

La relation $ax+by+c=0$ s'appelle **équation cartésienne** de la droite d.

Propriété

Le vecteur $(-b\,;a)$ est un vecteur directeur de la droite d'équation $ax+by+c=0$.

EXEMPLE

La droite (AB) a pour équation $5x+4y-11=0$ et le vecteur $\overrightarrow{AB}(-4\,;5)$ est un vecteur directeur.

3) Application

Dans un repère $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,)$ on considère les points A(1 ; 2) et B(4 ; - 2)

On cherche à déterminer une équation cartésienne de la droite (AB).

Soit M(x ; y) un point de la droite (AB). On a $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$

M $\in$ (AB) si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires c'est-à-dire si et seulement si $det(\overrightarrow{AM}\,;\overrightarrow{AB}) = 0$

$-4\times(x-1)-3\times(y-2)=0$

$-4x+4-3y+6=0$

$-4x-3y+10=0$ est une équation cartésienne de la droite (AB)

Remarque : on peut en déduire l'équation réduite de la droite (AB) :

$-4x-3y+10=0$

$-3y=4x-10$

$3y=-4x+10$

$y=\dfrac{-4}{3}x+\dfrac{10}{3}$ et on retrouve le résultat obtenu dans l'application du paragraphe I

III Systèmes linéaires de deux équations à deux inconnues

1) Définition

Soient a, b, c, a', b' et c' des nombres réels donnés.

Résoudre le système linéaire (S) : $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ **c'est trouver tous les couples de réels (x ; y) appelé solutions du système qui vérifient les deux équations.**

Exemple : On considère le système (S) : $\begin{cases} 3x-2y=7 \\ x+3y=-5 \end{cases}$

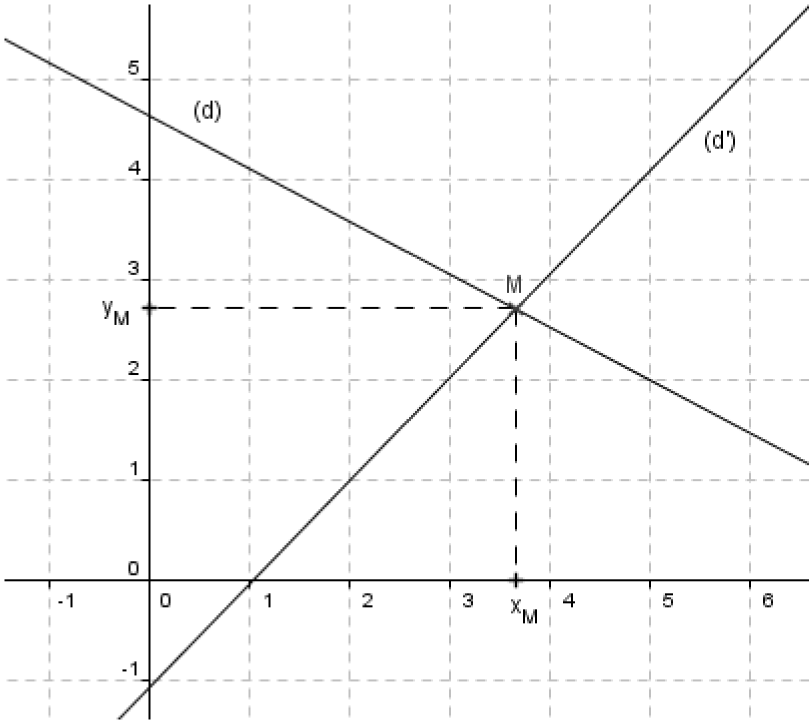
Le couple (1 ; - 2) est une solution de (S) car $3\times1-2\times(-2)=3+4=7$ et $1+3\times(-2)=1-6=-5$

2) Interprétation graphique

Soit (S) : $\begin{cases} a\,x + b\,y = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ où a, b, c, a', b' et c' sont des nombres réels donnés avec $b \neq 0$ et $b' \neq 0$.

(S) équivaut à $\begin{cases} y = \dfrac{-a}{b}x + \dfrac{c}{b} \\ y = \dfrac{-a'}{b'}x + \dfrac{c'}{b'} \end{cases}$.

Soit (d) la droite d''équation : $y = \dfrac{-a}{b}x + \dfrac{c}{b}$ et (d') celle d'équation : $y = \dfrac{-a'}{b'}x + \dfrac{c'}{b'}$



Premier cas :

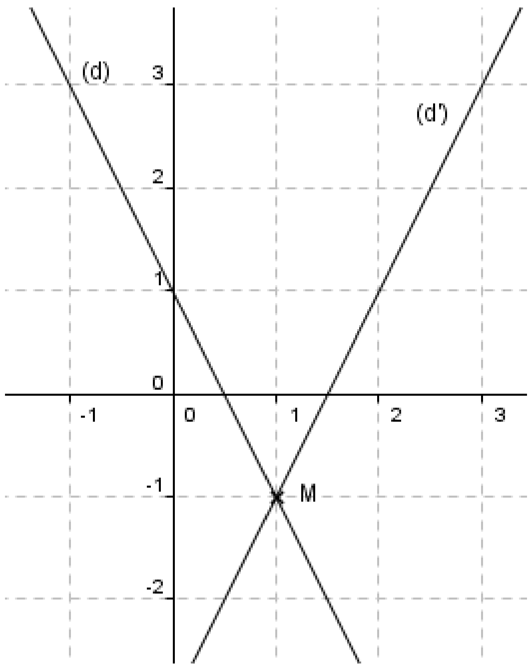
Si les droites (d) et (d') n'ont pas le même coefficient directeur c'est-à-dire lorsque $ab' - a'b \neq 0$ alors elles sont sécantes en un unique point M dont le couple de coordonnées (x_M ; y_M) est l'unique couple solution du système (S)

Deuxième cas :

Si les droites (d) et (d') ont le même coefficient directeur c'est-à-dire lorsque $ab' - a'b = 0$ alors elles sont :

- soient strictement parallèles et dans ce cas le système n'admet pas de solutions.
- soient confondues et dans ce cas le système admet une infinité de solutions qui sont les couples de coordonnées des points de la droite d'équation $y = \dfrac{-a}{b}x + \dfrac{c}{b}$

Remarque : Si $b = 0$ où $b' = 0$ on peut raisonner de manière analogue en utilisant des droites parallèles à l'axe des ordonnées.



Exemple : Soit (S) : $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ -2x + y = -3 \end{cases}$

$ab' - a'b = 2\times1 - (-2)\times1 = 4 \neq 0$ donc le système admet un unique couple solution.

On considère les droites (d) d'équation $y = 1 - 2x$

et (d') d'équation $y = 2x - 3$

On lit graphiquement les coordonnées du point d'intersection M : (1 ; - 1)

On vérifie que (1 ; - 1) est bien solution du système :

$2\times1 - 1 = 1$ et $-2\times1 - 1 = -3$

Le couple (1 ; - 1) est donc la solution du système (S).

3) Méthodes de résolution

a) Par substitution

On utilise cette méthode lorsqu'une inconnue s'exprime très facilement en fonction de l'autre.

Exemple :

(S) : $\begin{cases} x - 3y = -13 \\ 8x - 5y = -9 \end{cases}$

$ab' - a'b = 1 \times (-5) - 8 \times (-3) = 19 \neq 0$ donc le système admet une unique solution.

On remarque que dans l'équation de la première ligne x s'exprime facilement en fonction de y.

(S) $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y - 13 \\ 8x - 5y = -9 \end{cases}$

On remplace x par $3y - 13$ dans l'équation de la deuxième ligne.

(S) $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y - 13 \\ 8(3y - 13) - 5y = -9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y - 13 \\ 19y - 104 = -9 \end{cases}$

La deuxième inconnue est une équation à une inconnue. On la résout en déterminant y.

(S) $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y - 13 \\ 19y = 95 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y - 13 \\ y = \dfrac{95}{19} = 5 \end{cases}$

On détermine x à l'aide de la première équation en remplaçant y par la valeur trouvée.

(S) $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \times 5 - 13 = 2 \\ y = 5 \end{cases}$

Le couple (2 ; 5) est l'unique solution de (S)

vérification : $2 - 3 \times 5 = 2 - 15 = -13$ et $8 \times 2 - 5 \times 5 = -16 - 25 = -9$

Application :

Résoudre (S) : $\begin{cases} 3x - 2y = -12 \\ 2x + y = -1 \end{cases}$

b) Par combinaison linéaire

Cette méthode est à privilégier dans la majorité des situations…

Exemple :

Soit (S) : $\begin{cases} 2x - 3y = 8 & (L_1) \\ 5x + 4y = -3 & (L_2) \end{cases}$

$ab' - a'b = 2 \times 4 - 5 \times (-3) = 23 \neq 0$ donc le système admet une unique solution.

On multiplie la première équation par 5 et la deuxième par – 2 de manière à obtenir des coefficients de x opposés.

(S) $\Leftrightarrow \begin{cases} 10x - 15y = 40 & 5 \times (L_1) \\ -10x - 8y = 6 & -2 \times (L_2) \end{cases}$

On additionne les deux équations membres à membres de manière à éliminer l'inconnue x et on « garde » dans le système l'une des équations.

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} -23y = 46 \\ 2x - 3y = 8 \end{cases}$$

On termine la résolution en déterminant y puis x.

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{46}{-23} = -2 \\ -10x - 8\times(-2) = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2 \\ -10x + 16 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2 \\ -10x = -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2 \\ x = \dfrac{-10}{-10} = 1 \end{cases}$$

Le couple (1 ; - 2) est la solution du système.

vérification : $2\times1 - 3\times(-2) = 2 + 6 = 8$ et $5\times1 + 4\times(-2) = 5 - 8 = -3$

<u>Application :</u>

Résoudre (S) : $\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ 5x + 3y = 2 \end{cases}$

<u>c) Cas particuliers</u>

- Système n'admettant pas de solutions :

Soit (S) : $\begin{cases} -2x + y = 4 \\ 4x - 2y = 2 \end{cases}$

On a $ab' - a'b = -2\times(-2) - 4\times1 = 0$ donc soit le système n'admet pas de solutions soit il admet une infinité de solutions.

$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x + 4 \\ 4x - 2(4 + 2x) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x + 4 \\ -8 = 2 \quad \text{impossible} \end{cases}$ (S) n'admet donc pas de solutions.

Graphiquement cette situation se traduit par des droites parallèles.

- Système admettant une infinité de solutions :

Soit (S) : $\begin{cases} -2x + y = 4 \\ 4x - 2y = -8 \end{cases}$

On a $ab' - a'b = -2\times(-2) - 4\times1 = 0$ donc soit le système n'admet pas de solutions soit il admet une infinité de solutions.

$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x + 4 \\ 4x - 2(4 + 2x) = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x + 4 \\ -8 = -8 \end{cases}$ (S) admet donc une infinité de solutions qui sont les couples de coordonnées des points de la droite d'équation $y = 2x + 4$

Graphiquement cette situation se traduit par deux droites confondues.

Exercice 1 : Résoudre ces systèmes :

a) $\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x + 4y = 24 \\ x + 5y = 19 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x + 4y = 9 \\ 5x + 6y = 14 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x + 3y = -11 \\ 3x - 5y = 12 \end{cases}$

Exercice 2 :

1) Résoudre le système suivant : $\begin{cases} 2x + 3y = 30 \\ x - y = 5 \end{cases}$

2) Le CDI d'un collège a acheté deux exemplaires d'une même bande dessinée et trois exemplaires du même livre de poche pour la somme de 30 euros.

Une bande dessinée coûte 5 euros de plus qu'un livre de poche.

Quel est le prix en euros d'une bande dessinée ?

Quel est le prix en euros d'un livre de poche ?

Exercice 3 :

Une personne dispose de 8 euros ; elle peut dépenser cette somme soit en achetant 10 croissants et un cake, soit en achetant 4 croissants et 2 cakes.

Calculer le prix d'un croissant et celui d'un cake.