COLLECTION ALGOMATHS

Nouveau programme

Tle SÉRIES TECHNO

MATHS

Enseignement commun

+ spécialité STI2D/STL

Livre du professeur

DELAGRAVE

COLLECTION ALGOMATHS

Nouveau programme

Tle SÉRIES TECHNO

MATHS

Enseignement commun

+ spécialité STI2D/STL

Livre du professeur

M. Aït Khelifa, P. Allart-Cagé,
M. Béthencourt, V. Doli, M. Huet,
S. Morambert, A. Nectoux

DELAGRAVE

**Tous les fichiers TICE
sont disponibles gratuitement
en téléchargement :
lienmini.fr/10446-00**

Mise en page et infographies : IDT

ISBN : 978-2-206-10495-9

5, allée de la 2e DB – 75015 Paris
www.editions-delagrave.fr

SOMMAIRE

Enseignement commun

Enseignement de spécialité STI2D/STL

Chapitre 1

Suites numériques

CAPACITÉS
- Prouver que trois nombres sont (ou ne sont pas) les termes consécutifs d'une suite arithmétique ou géométrique.
- Déterminer la raison d'une suite arithmétique ou géométrique modélisant une évolution.
- Exprimer en fonction de *n* le terme général d'une suite arithmétique ou géométrique.
- Calculer la somme des *n* premiers termes d'une suite arithmétique ou géométrique.
- Reconnaitre une situation relevant du calcul d'une somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique ou géométrique.

Vérifier les acquis de Première

1. d **2.** a **3.** c **4.** c **5.** a **6.** d

Activités

Activité 1 Moyenne arithmétique contre moyenne géométrique

1. $\dfrac{\dfrac{50}{100}+\left(-\dfrac{40}{100}\right)}{2}=0{,}05$. Le pourcentage moyen est 5%. Ce pourcentage engage au placement.

2. a. $\dfrac{50}{100}\times 1000=500$. Le résultat de l'investissement de la première année est + 500 €. Le capital d'Antoine est alors de 1500 €.

b. $1500-\dfrac{40}{100}\times 1500=900$. La valeur totale du portefeuille d'Antoine est, au bout des 2 ans, 900 €.

c. Le capital au bout des 2 ans (900 €) est inférieur au capital de départ (1000 €). Ce placement n'est pas avantageux.

3. a. $a=1+\dfrac{50}{100}=1{,}5.$

b. $b=1-\dfrac{40}{100}=0{,}6.$

c. $\sqrt{a\times b}\approx 0{,}95.$

d. 0,95 – 1 = – 0,05. Le taux moyen d'évolution du placement par année est – 5 %.

4. Avec la moyenne arithmétique :

Année 1 : $1000+\dfrac{5}{100}\times 1000=1050.$

Année 2 : $1050+\dfrac{5}{100}\times 1050=1102{,}5.$

Avec la moyenne géométrique : Année 1 : $1000-\frac{5}{100}\times 1000=950$.

Année 2 : $950-\frac{5}{100}\times 950=902{,}5$.

La méthode la plus adaptée est la moyenne géométrique.

Activité 2 Une suite pour la musique

1. 50 + 10 = 60. Au 1er février, Mathilde dispose de 60 €. On a calculé u_1.

2. 60 + 10 = 70. Au 1er mars, Mathilde dispose de 70 €. On a calculé u_2.

3. $u_1-u_0=u_2-u_1=10$. La suite (u_n) semble arithmétique de premier terme $u_0=50$ et de raison $r=10$.

4. a. $u_n=u_0+nr=50+10n$.

b. Mai est le cinquième mois de l'année. On cherche donc u_4. $u_4=50+10\times 4=90$. Au 1er mai 2020, Mathilde dispose de 90 €.

5. Il faut déterminer la somme dont dispose Mathilde au 1er décembre 2020 (12e mois de l'année).

$u_{11}=u_0+11r=50+11\times 10=160$.

Mathilde dispose au 1er décembre 2020 de 160 €. La guitare coûte 200 €.

Mathilde ne pourra pas s'offrir sa guitare en fin d'année.

Activité 3 Un roi qui « riz »

1. $\frac{2}{1}=\frac{4}{2}=\frac{8}{4}=2$. La suite semble géométrique de raison 2 et de premier terme 1.

2. a. $u_{n+1}=2\times u_n$.

b. (u_n) est la suite géométrique de raison $q=2$ et de premier terme $u_1=1$.

c. $u_n=u_1\times q^{n-1}=2^{n-1}$. On recherche u_8. $u_8=2^{8-1}=2^7=128$. Sur la 8e case, il y a 128 grains de riz.

3. $u_1+\ldots+u_{64}=u_1\times\frac{1-q^{64}}{1-q}=\frac{1-2^{64}}{1-2}=2^{64}-1$.

Le Roi doit offrir à Sissa 18 446 744 073 709 551 615 grains de riz.

4. Sissa recevra donc 307 445 734 561,825 860 25 tonnes de riz.

En 2018, la production mondiale, en tonnes, de riz est : 778 600 000 t. La production mondiale de riz en 2018 est bien inférieure à ce que Sissa a gagné.

Activité 4 Panneaux photovoltaïques

1. a. La première année (2019), la quantité d'énergie produite par l'installation est, en kWh/an : $20\times 125=2500$.

La deuxième année (2020), la quantité d'énergie produite par l'installation est, en kWh/an :

$2500-\frac{3}{100}\times 2500=2425$.

b. $u_{n+1}=u_n-\frac{3}{100}u_n=\left(1-\frac{3}{100}\right)u_n=0{,}97u_n$.

La suite (u_n) est géométrique de premier terme $u_0=2500$ et de raison $q=0{,}97$.

2. 2050 = 2019 + 31. On recherche u_{31}. On sait que $u_n=u_0\times q^n$.

Donc $u_{31}=u_0\times q^{31}=2500\times 0{,}97^{31}$. À la dizaine de kWh près, la quantité d'énergie produite en 2050 est estimée à 970 kWh.

3. La quantité d'énergie produite annuellement diminue d'année en année.

4. On recherche n tel que $u_n = 1250$. À l'aide de la calculatrice, on obtient $n = 23$.

Par résolution, $0{,}97^n=0{,}5$ donne $n=\dfrac{\ln 0{,}5}{\ln 0{,}97}\approx 23$.

En 2019 + 23 = 2042, l'installation aura perdu plus de la moitié de son rendement.

5. a. $u_0+\ldots+u_{24}=u_0\times\dfrac{1-q^{25}}{1-q}=2500\times\dfrac{1-0{,}97^{25}}{1-0{,}97}=44\ 419$.

b. 44 419 > 20 000. La rentabilité financière de l'installation est assurée.

Exercices

Pour acquérir les automatismes

2 $\dfrac{9+14}{2}=11{,}5$.

3 $\dfrac{17+x}{2}=15$ donne $x=2\times 15-17=13$. La 2e note est 13.

4 6 – 1 = 11 – 6 = 5 donc 1, 6 et 11 sont les trois premiers termes d'une suite arithmétique de raison 5.

5 5 – 7 ≠ 1 – 5 donc 7, 5 et 1 ne sont pas les trois premiers termes d'une suite arithmétique.

6 4 – 12 = – 4 – 4 = – 8 donc 12, 4 et – 4 sont les trois premiers termes d'une suite arithmétique de raison – 8.

7 14 – 19 ≠ 17 – 14 donc 19, 14 et 17 ne sont pas les trois premiers termes d'une suite arithmétique.

8 On modélise la situation par la suite arithmétique de raison 100 et de premier terme 50.

9 On modélise la situation par la suite arithmétique de raison – 40 et de premier terme 750.

10 $u_n=3+5n$.

11 $u_n=6-8(n-1)=14-8n$.

12 $u_7=4+7\times 2=18$. $S=\dfrac{8}{2}(4+18)=88$.

13 $u_{19}=-2+2\times(19-1)=34$. $S=\dfrac{19}{2}(-2+34)=304$.

14 $\sqrt{4\times 16}=8$.

15 $\sqrt{(1-0{,}15)(1-0{,}1)}\approx 0{,}92$.

$1-0{,}92=0{,}08$. Le pourcentage de baisse est 8%.

16 $\dfrac{14}{7}=\dfrac{28}{14}=2$ donc 7, 14 et 28 sont les trois premiers termes d'une suite géométrique de raison 2.

17 $\frac{-10}{20}=\frac{5}{-10}=-\frac{1}{2}$ donc $20, -10$ et 5 sont les trois premiers termes d'une suite géométrique de raison $-\frac{1}{2}$.

18 $\frac{-27}{-9}=\frac{-81}{-27}=3$ donc $-9, -27$ et -81 sont les trois premiers termes d'une suite géométrique de raison 3.

19 On ne peut pas diviser par 0 donc 1, 0 et 2 ne sont pas les trois premiers termes d'une suite géométrique.

20 On modélise la situation par la suite géométrique de raison $q=1-\frac{6}{100}=0{,}94$ et de premier terme 450 000.

21 On modélise la situation par la suite géométrique de raison $q=1+\frac{15}{100}=1{,}15$ et de premier terme 50 000.

22 $u_n=2\times 3^n$.

23 $u_n=4\times 0{,}5^{n-1}$.

24 $S=4\times\frac{1-2^{12}}{1-2}=16\ 380$.

25 $S=10\times\frac{1-7^{10}}{1-7}=470\ 792\ 080$.

Pour commencer

26 **1.** $u_{n+1}=u_n+r$.

2. $u_n=u_0+nr$

27 **1.** $u_{n+1}=u_n+2$.

2. $u_1=6 \quad u_2=8 \quad u_3=10$.

3. $u_n=4+2n$.

4. $u_{10}=24 \quad u_{17}=38 \quad u_{23}=50$.

28 **1.** $u_{n+1}=u_n+r=u_1+(n-1)r$.

2. $u_2=27 \quad u_3=23 \quad u_4=19$.

3. $u_n=31-4(n-1)=35-4n$.

4. $u_9=-1 \quad u_{18}=-37 \quad u_{24}=-61$.

29 **1.** $u_{n+1}=u_n+r=u_n+10$.

2. $u_2=u_1+10=-80+10=-70$. $u_3=u_2+10=-70+10=-60$. $u_4=u_3+10=-60+10=-50$.

3. $u_n=u_1+(n-1)\,r=-80+10\,(n-1)=-80+10\,n-10=10\,n-90$.

4. $u_7=10\times 7-90=-20$. $u_{10}=10\times 10-90=10$. $u_{14}=10\times 14-90=50$.

5. On résout $u_n=80$, soit $10n-90=80$. On obtient $10n=170$, ce qui donne $n=17$.

30 **1. Vrai.** $u_{n+1}=u_n+r$ avec $r=8$.

2. Vrai. $u_1=u_0+8=12$.

3. Faux. $u_4=u_0+4r=36$.

4. Vrai. $u_{12}=u_0+12r=100$.

31 **1.** $300\times\dfrac{5}{100}=15$.

2. (u_n) est la suite arithmétique de raison $r = 15$ et de premier terme $u_0=300$.

3. $u_1=315$ $\quad$ $u_2=330$ $\quad$ $u_3=345$.

4. $u_n=300+15n$.

5. $u_n=600$ se modélise par l'équation $300 + 15\,n = 600$. D'où $n = 20$. Au bout de 20 ans, Mathilde aura doublé son capital.

32 $u_0+\ldots+u_7=\dfrac{8}{2}(u_0+u_7)=\dfrac{8}{2}(u_0+u_0+7r)=4(2u_0+7r)$.

33 **1.** $u_0 = 7 - 3 \times 0 = 7$. $u_1 = 7 - 3 \times 1 = 4$. $u_2 = 7 - 3 \times 2 = 1$.

2. $u_1 - u_0 = 4 - 7 = -3$. $u_2 - u_1 = 1 - 4 = -3$.

$u_2 - u_1 = u_1 - u_0$ donc la suite (u_n) est arithmétique de raison $r = -3$ et de premier terme $u_0 = 7$.

3. La suite ayant comme premier terme u_0, le 51^{e} terme est donc u_{50}.

$u_{50} = 7 - 3 \times 50 = -143$.

4. On cherche :

$$\sum_{k=0}^{50}u_k=\frac{51}{2}(u_0+u_{50})=25{,}5\times(7-143)=-3468.$$

34 **1.** On modélise par la suite arithmétique de premier terme $u_1=20$ et de raison $r = 5$.

$u_{120}=u_1+(120-1)r=20+119\times5=615$. Le 120^{e} mètre coûte 615 €.

2. $S=u_1+\ldots u_{120}=\dfrac{120}{2}(20+615)=38\ 100$. Le coût total du forage est 38 100 €.

35 **1.** (u_n) est de raison $r = 150$ et de premier terme $u_0 = 6500$. Donc $u_n = u_0 + n\,r = 6500 + 150\,n$.

2. $2025 = 2018 + 7$. On recherche donc u_7.

$u_7 = 6\,500 + 150 \times 7 = 7\,550$.

En 2025, le loyer à l'année coûtera 7 550 €.

3. On cherche

$$S=\sum_{k=0}^{10}u_k=\frac{11}{2}(u_0+u_{10})$$

avec $u_{10} = 6\,500 + 150 \times 10 = 8\,000$.

Donc $S=\dfrac{11}{2}(6\,500 + 8\,000) = 79\,750$.

4. À la calculatrice, on obtient $n = 24$.

Vérification :

$$S'=\sum_{k=0}^{23}u_k=\frac{24}{2}(u_0+u_{23})$$

avec $u_{23} = 6\,500 + 150 \times 23 = 9\,950$.

Donc $S' = 12 \times (6\,500 + 9\,950) = 197\,400$.

Et

$$S'' = \sum_{k=0}^{24} u_k = \frac{25}{2}(u_0 + u_{24})$$

avec $u_{24} = 6500 + 150 \times 24 = 10\,100$.

Donc $S'' = 12{,}5 \times (6500 + 10\,100) = 207\,500$.

36 **1.** $u_{n+1} = q \times u_n$.

2. $u_n = u_0 \times q^n$.

37 **1.** Augmenter de 1% revient à utiliser un coefficient multiplicateur $CM = 1 + \frac{1}{100} = 1{,}01$.

(u_n) est la suite géométrique de raison $q = 1{,}01$ et de premier terme $u_0 = 6{,}9$.

2. $u_n = 6{,}9 \times 1{,}01^n$.

3. 2025 = 2010 + 15. $u_{15} = 6{,}9 \times 1{,}01^{15} = 8{,}01$. La population mondiale en 2025 sera d'environ 8 milliards.

4. Pour $n = 27$, $u_{27} = 9$. La population mondiale atteindra 9 milliards en 2010 + 27 = 2037.

38 **1.** $u_1 = q \times u_0 = 1{,}054 \times 300 = 316{,}2$.

$u_2 = q \times u_1 = 1{,}054 \times 316{,}2 = 333{,}2748$.

2. $u_n = u_0 \times q^n = 300 \times 1{,}054^n$.

3. a. Une augmentation de 50% revient à une multiplication par $1 + \frac{50}{100}$, soit 1,5 et $1{,}5 \times 300 = 450$.

```
Tantque u < 450
        n ← n + 1
        u ← 1,054 × u
```

b. $u = 456{,}93$ et $n = 2025$

En 2025, la masse totale aura augmenté de 50%. Elle sera de 456,93 millions de tonnes.

39 **1.** $u_n = 1{,}82 \times 1{,}026^n$.

2. 2020 = 2015 + 5. $u_5 = 2{,}07$.

3. a. Exécution de l'algorithme.

b. La variable k contient toutes les valeurs indicielles de la suite pour lesquelles u_k est inférieur à 4,84 (de 1 à 39).

c. À partir de 2016 + 39 = 2055, la production mondiale des énergies renouvelables dépassera 4,84 en milliards de TEP.

d. $k = 39$ et $u = 4{,}95$.

```
u=1.82
k=0
while u<4.84:
    u=u*1.026
    k=k+1
print(k)
print (u)
```

En 2055, la production mondiale des énergies renouvelables sera de 4,95 en milliards de TEP.

40 **1.** Une diminution de 3% revient à utiliser un coefficient multiplicateur $CM = 1 - \frac{3}{100} = 0{,}97$.

$C_{n+1} = 0{,}97 \times C_n$. Donc (C_n) est la suite géométrique de raison $q = 0{,}97$ et de premier terme $C_0 = 1$.

2. $C_n = 0{,}97^n$.

3. $C_n < 0{,}5$ donne $0{,}97^n < 0{,}5$. On a alors $n\ln 0{,}97 < \ln 0{,}5$ d'où $n > \frac{\ln 0{,}5}{\ln 0{,}97}$.

À partir de $n = 23$, la concentration aura diminué de moitié.

4. a. $k = 0{,}858\,7$.

b. On a calculé C_5, c'est-à-dire la concentration au bout de 5 minutes.

5. a. Cet algorithme permet de savoir à partir de quel moment la concentration aura diminué de moitié. On a trouvé 23 donc il y aura plus de 5 itérations.

b. On retrouve la réponse obtenue à la question **3**.

41 **1.b** **2.b** **3.b** **4.c**

42 $u_0 + \ldots + u_{10} = u_0 \times \dfrac{1-q^{11}}{1-q}$.

43 $1 + \ldots + 24 = 300$.

44 **1.** La situation se modélise par la suite géométrique (u_n) de premier terme $u_1 = 1$ et de raison $q = 2$.

$u_{10} = 1 \times 2^9 = 512$.

2. $u_1 + \ldots + u_{40} = u_1 \times \dfrac{1-q^{40}}{1-q} = 1 \times \dfrac{1-2^{40}}{1-2} \approx 1{,}1 \times 10^{12}$.

Quelle famille ! On a dépassé la population mondiale en 2020.

45 **1.** 1. $u_1 = q \times u_0 = 3 \times 7 = 21$.

$u_2 = q \times u_1 = 3 \times 21 = 63$.

$u_3 = q \times u_2 = 3 \times 63 = 189$.

2. $u_n = u_0 \times q^n = 7 \times 3^n$. Donc $u_9 = 7 \times 3^9 = 137\,781$.

3.

$$S = \sum_{k=0}^{9} u_k = u_0 \times \frac{1-q^{10}}{1-q} = 7 \times \frac{1-3^{10}}{1-3} = 206\ 668.$$

4.

$$S = \sum_{k=1}^{7} u_k = \sum_{k=0}^{7} u_k - u_0 = u_0 \times \frac{1-q^8}{1-q} - u_0 = 7 \times \frac{1-3^8}{1-3} - 7 = 22\,953.$$

46 **1.** $100 + \dfrac{2}{100} \times 100 = 102$ €.

2. a. $u_{n+1} = \left(1 + \dfrac{2}{100}\right) u_n = 1{,}02 u_n$. (u_n) est la suite géométrique de raison $q = 1{,}02$ et de premier terme $u_1 = 100$.

b. $u_n = 100 \times 1{,}02^{n-1}$.

c. $u_{12} = 124{,}34$ €.

d. $u_1 + \ldots + u_{12} = 100 \times \dfrac{1-1{,}02^{12}}{1-1{,}02} = 1341$.

$\dfrac{5000}{4} = 1250$. $1341 > 1250$. Oui, il aura remboursé un peu plus d'un quart de ce qu'il doit.

3. a. L'algorithme calcule la somme $u_1 + u_2 + u_3 + u_4$.

b. Algorithme modifié :

```
n=1
u=100
S=100
while n<4:
    n=n+1
    u=1.02*u
    S=S+u
    print(u,S)
```

Valeurs de n	1	2	3	4
Valeurs de u	100	102	104,04	106,12
Valeurs de S	100	202	306,04	412,16

c. La case grisée donne la valeur de ce que Malik a remboursé à ses parents au 1er avril 2018.

d. $u_1+\ldots+u_4=u_1\times\dfrac{1-q^4}{1-q}=100\times\dfrac{1-1{,}02^4}{1-1{,}02}=412{,}1608$.

Pour s'entraîner

47 **1.** $-3-(-6)=0-(-3)=3$. $-6, -3$ et 0 sont les trois premiers termes d'une suite arithmétique de premier terme $u_0= -6$ et de raison $r=3$.

2. $u_n=-6+3n$.

3. $u_5=9$ $\quad u_{12}=30$ $\quad u_{25}=69$.

48 **1.** On lit $u=5$ et $u=u+4$ dans la boucle **for**. Donc (u_n) est la suite arithmétique de raison $r=4$ et de premier terme $u_0=5$.

2. On obtient la valeur des 10 termes après u_0 de la suite (u_n).

3. $u_n=u_0+n\,r=5+4\,n$.

4. $u_{15}=5+4\times 15=65$.

5. for n in range(15).

49 **1.**

```
u=4
for n in range(31):
    u=u+0.5
    print(n,u)
```

2. $u_n=4+(n-1)\times 0{,}5=0{,}5n+3{,}5$.

$u_{10}=8{,}5$ $\quad u_{15}=11$ $\quad u_{30}=18{,}5$.

50 **1.** $3000\times\dfrac{6}{100}=180$. Donc $C_{n+1}=C_n+180$. (C_n) est la suite arithmétique de raison $r=180$ et de premier terme $C_0=3000$.

2. $C_n=C_0+nr=3000+180n$.

3. $C_{10}=3000+180\times 10=4800$ €.

4. $C_n=6000$ donne $3000+180\,n=6000$ soit $180\,n=3000$. On a alors $n=\dfrac{3000}{180}\approx 17$.

Au bout de 17 ans, le capital aura doublé.

5. $C_n>10\,000$ équivaut à $3000+180n>10\,000$. Cela équivaut à $180n>7000$. Ce qui équivaut à $n>\dfrac{7000}{180}$. Au bout de 39 ans, le capital dépassera 10 000 €.

51 **1.** $p_2=600+50=650,$ $\quad p_3=650+50=700$.

2. $p_{n+1}=p_n+50$. La suite (p_n) est arithmétique de raison $r=50$ et de premier terme $p_1=600$.

3. $p_n=600+50(n-1)=550+50n$.

4. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}p_k=p_1+\ldots+p_n=\frac{n}{2}(p_1+p_n)=\frac{n}{2}(600+550+50n)=n(575+25n)=25n^2+575n$.

5. Il faut alors résoudre $25n^2+575n=12\ 000$. À l'aide de la calculatrice, on peut conclure qu'au bout de 14 mois, l'entreprise aura terminé la commande de son client.

52 **1.** La consommation est de 140 cigarettes par semaine. En diminuant la consommation de 4 cigarettes par semaine, la consommation de la semaine suivante est 140 – 4 = 136 cigarettes puis 136 – 4 = 132 cigarettes la semaine d'après.

140, 136 et 132 sont les termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison – 4.

2. $u_0 = 140$ et $r = -4$.

3. $u_5 = u_0 + 5\,r = 140 - 4 \times 5 = 120$.

Au bout de 5 semaines d'efforts, Rémy fume 120 cigarettes.

4. $u_n = 0$ si et seulement si $140 - 4\,n = 0$.

On a alors $140 = 4\,n$ ce qui donne $n = 35$.

Au bout de 35 semaines, Rémy aura arrêté de fumer.

5. On recherche la somme $u_0 + u_1 + \ldots + u_{35}$.

$$\sum_{k=0}^{35} u_k = \frac{36}{2}(u_0+u_{35}) = \frac{36}{2}(140+0) = 2520.$$

Entre le moment où Rémy a décidé d'arrêter de fumer et le moment où il a réussi, il aura consommé 2520 cigarettes.

53 **1.** On modélise la situation par la suite arithmétique de raison $r = 10$ et de premier terme $u_1 = 350$.

$u_1 + \ldots + u_7 = \frac{7}{2}(350+350+7\times 10) = 2695$.

La première semaine d'exploitation, 2695 voitures ont fréquenté le parking.

2. $u_n > 1500$ donne $350+10n > 1500$. On obtient alors $n > 115$.

Le parking est saturé au bout de 116 jours d'exploitation.

3. $u_1 + \ldots + u_{116} = \frac{116}{2}(350+350+10\times 116) = 107\ 880$. En 116 jours, 107 880 voitures auront fréquenté le parking. Le coût de stationnement d'une voiture est en moyenne de 8 € par jour.

$8\times 107\ 880 = 863\ 040$. La société d'exploitation aura gagné 863 040 € quand le parking sera arrivé à saturation.

54 **1.** $u_1 - u_0 = u_2 - u_1 = 200$. Ce sont les termes consécutifs de la suite arithmétique de raison $r = 200$ et de premier terme $u_0 = 1000$.

2. $u_3 = 1400+200 = 1600$, $u_4 = 1600+200 = 1800$, $u_5 = 1800+200 = 2000$.

3. $u_{n+1} = u_n + 200$.

4. (u_n) est la suite arithmétique de raison $r = 200$ et de premier terme $u_0 = 1000$.

5. $u_n = 1000 + 200n$.

6. a. $S_n = u_0 + \ldots\ u_n = \frac{n+1}{2}(u_0+u_n) = \frac{n+1}{2}(2000+200n) = (n+1)(1000+100n)$.

b. À l'aide de la calculatrice, on résout $S_n = 414\ 000$. La calculatrice donne $n = 59$. On peut donc forer 60 mètres avec un crédit de 414 000 €.

55 **1.** La masse d'EMPCS recyclés est passée de 229 à 282 entre 2011 et 2016 soit une évolution de : $\frac{282-229}{229}\times 100 = \frac{5300}{229} \approx 23\%$

2. Le coefficient multiplicateur global associé à la hausse de 23% entre 2011 et 2016 est $C = 1{,}23$.

Soit c le coefficient multiplicateur moyen durant ces 5 années alors on a $c^5 = C$.

Donc $c = C^{\frac{1}{5}} \approx 1{,}0423$.

Le taux d'évolution annuel moyen sur cette période est donc une hausse d'environ 4,23 %.

3. 243 – 229 = 14 et 250 – 243 = 7. Ces trois nombres ne sont pas les premiers termes consécutifs d'une suite arithmétique.

$\frac{243}{229} \neq \frac{250}{243}$. Ces trois nombres ne sont pas les premiers termes consécutifs d'une suite géométrique.

4. La masse d'EMPCS augmente de 4,2% par an, elle est donc multipliée par le coefficient multiplicateur associé à cette hausse soit 1,042.

On en déduit que (u_n) est géométrique de raison $q = 1{,}042$ et de 1$^{\text{er}}$ terme $u_0 = 282$.

5. $u_n = u_0 \times q^n = 282 \times 1{,}042^n$.

6. 2019 = 2016 + 3 donc l'année 2019 est de rang $n = 3$.

On a $u_3 = 282 \times 1{,}042^3 \approx 319$ et on peut donc en déduire une masse d'EMPCS recyclés d'environ 319 000 tonnes en 2019.

56 **1. a.** $c_{n+1} = c_n \times \left(1 + \frac{15}{100}\right) = 1{,}15c_n$. (c_n) est la suite géométrique de raison $q = 1{,}15$ et de premier terme $c_0 = 5$. $c_n = 5 \times 1{,}15^n$.

b. 1 heure et demie correspond à 90 minutes. $c_9 = 5 \times 1{,}15^9 \approx 17{,}6$.

c. $c_n > 20$ équivaut à $5 \times 1{,}15^n > 20$, qui équivaut à $1{,}15^n > 4$. On obtient $n > \frac{\ln 4}{\ln 1{,}15}$.

À partir de 100 minutes, la concentration dépasse 20 millions par mL.

2. a. 17,6 correspond à la concentration en millions par mL de bactéries au bout de 90 minutes.

0,5 correspond à 10% de la concentration initiale.

b. $I = 7$ et $C = 0{,}49$.

Après introduction des phages, la concentration sera devenue inférieure à 10% de la concentration initiale au bout de 70 minutes.

57 **1.** Pour augmenter un nombre de 6%, on le multiplie par $1 + \frac{6}{100} = 1{,}06$ donc $d_1 = 1{,}06 \times d_0 = 10{,}6$.

2. Pour la même raison qu'à la question précédente, on montre que pour tout entier naturel n, $d_{n+1} = \left(1 + \frac{6}{100}\right)$

$d_n = 1{,}06\, d_n$ donc la suite (d_n) est géométrique de raison $q = 1{,}06$ et de premier terme $d_0 = 10$.

3. Pour tout entier naturel n, $d_n = d_0 \times q^n = 10 \times 1{,}06^n$.

4. La distance qu'Alice pourra parcourir en septembre 2019 est $d_8 = 10 \times 1{,}06^8 = 15{,}9$ km arrondis à 0,1 km.

5. On cherche n tel que $d_n > 25$, soit $10 \times 1{,}06^n > 25$.

On obtient alors $1{,}06^n > 2{,}5$. En utilisant la fonction logarithme népérien, $n \times \ln 1{,}06 > \ln 2{,}5$.

On a alors $n > \frac{\ln 2{,}5}{\ln 1{,}06}$, soit $n > 16$.

Alice sera capable de courir en une fois 25 km au bout de 16 mois.

58 **1.** $v_7 = q^7 \times v_0$. Donc $q^7 = \frac{v_7}{v_0} = 2{,}5025$. Donc $q = \sqrt[7]{2{,}5025} \approx 1{,}14$.

2. $v_n = 800 \times 1{,}14^n$.

3. $v_7 = 2002$.

4. $v_0 + \ldots v_{15} = 800 \times \dfrac{1-1{,}14^{16}}{1-1{,}14} = 40\ 784$.

```
v=800
S=800
n=0
while n<15:
    n=n+1
    v=v*1.14
    S=S+v
print(S)
```

5. $v_0 + \ldots v_{15} = 40\,784$ pales de 2001 à 2016.

40 784 > 40 000. Cette suite modélise bien la production depuis 2001 de pales d'éolienne de l'usine espagnole.

59 **1.** $u_1 = u_0 \times \left(1-\dfrac{15}{100}\right) = 20\ 000 \times 0{,}85 = 17\ 000.$

Le nombre de mégots dans la rue principale en 2020 sera 17 000.

2. a. $u_{n+1} = u_n \times \left(1-\dfrac{15}{100}\right) = 0{,}85 \times u_n$.

(u_n) est la suite géométrique de raison $q = 0{,}85$ et de premier terme $u_0 = 20\ 000$.

b. $u_n = 20\ 000 \times 0{,}85^n$ pour tout entier naturel n.

c. On cherche n tel que $2028 = 2019 + n$ soit $n = 9$.

$u_9 = 20\ 000 \times 0{,}85^9 = 4633$. 4633 mégots seront jetés en 2028.

3. a. Le maire doit calculer :

$$S = \sum_{k=0}^{9} u_k .$$

b. $S = u_0 \times \dfrac{1-q^{10}}{1-q} = 20\ 000 \times \dfrac{1-0{,}85^{10}}{1-0{,}85} \approx 107\ 084.$

En 10 ans, 107 084 mégots auront été ramassés.

60 **1.** $p_{n+1} = p_n\left(1-\dfrac{3}{100}\right) = 0{,}97 \times p_n$. (p_n) est la suite géométrique de raison $q = 0{,}97$ et de premier terme $p_0 = 30$. On exprime en tonnes les résultats.

2. $p_n = 30 \times 0{,}97^n$ (en tonnes).

3. $2026 = 2015 + 11$. $p_{11} = 30 \times 0{,}97^{11} = 21{,}5$ tonnes.

4. a. Le résultat affiché est 2026.

b. $S = p_0 + \ldots + p_{11} = p_0 \times \dfrac{1-q^{12}}{1-q} = 30 \times \dfrac{1-0{,}97^{12}}{1-0{,}97} = 306$. On a bien $S > 300$.

c. C'est la masse totale de déchets produits de 2015 à 2026 en tonnes.

Pour faire le point

61 **Faux**

$u_4 = 81$; $u_3 = u_4 - 3 = 81 - 3 = 78$; $u_2 = u_3 - 3 = 78 - 3 = 75$; $u_1 = u_2 - 3 = 75 - 3 = 72$.

Donc $u_0 = u_1 - 3 = 72 - 3 = 69$.

62 **Vrai**

$u_n = u_0 + n\,r = 69 + 3\,n$.

63 **Faux**

$u_{10} = 69 + 3 \times 10 = 99$.

64 **Faux**

$\sum_{k=0}^{20} u_k = \frac{21}{2}(u_0 + u_{20})$. $u_{20} = 69 + 3 \times 20 = 129$.

Donc

$\sum_{k=0}^{20} u_k = \frac{21}{2}(69+129) = 2079$.

65 **Vrai**

$v_1 = 6$; $v_2 = 6 \times 1{,}2 = 7{,}2$; $v_3 = 7{,}2 \times 1{,}2 = 8{,}64$; $v_4 = 8{,}64 \times 1{,}2 = 10{,}368$; $v_5 = 10{,}368 \times 1{,}2 = 12{,}4416$.

Donc $v_6 = 12{,}4416 \times 1{,}2 = 14{,}929\,92$. Au dixième, $v_6 = 14{,}9$.

66 **Faux**

$v_n = v_1 \times q^{n-1} = 6 \times 1{,}2^{n-1}$.

67 **Faux**

$v_8 = 6 \times 1{,}2^7 = 21{,}499\,084\,8$. Au dixième, $v_8 = 21{,}5$.

68 **Vrai**

$\sum_{k=1}^{10} v_k = v_1 \times \frac{1-q^{10}}{1-q} = 6 \times \frac{1-1{,}2^{10}}{1-1{,}2}$. Au centième, $\sum_{k=1}^{10} v_k = 155{,}75$.

69 Réponse **a**

On cherche u_1 car $2018 = 2017 + 1$.

$u_1 = u_0 \times \left(1 - \frac{3}{100}\right) = u_0 \times 0{,}97 = 300 \times 0{,}97 = 291$.

70 Réponse **c**

$u_{n+1} = u_n \times \left(1 - \frac{3}{100}\right) = u_n \times 0{,}97$. (u_n) est une suite géométrique de raison $q = 0{,}97$.

71 Réponse **b**

$u_n = u_0 \times q^n = 300 \times 0{,}97^n$.

72 Réponse **b**

$2017 + 10 = 2027$.

73 Réponse **b**

$u_{10} = 300 \times 0{,}97^{10}$. À l'unité près, $u_{10} = 221$.

74 Réponse **c**

En étirant vers le bas, on saisira = B2 * 0,97.

Pour approfondir

75 **1.** Compagnie A : $a_{n+1} = a_n + 60$. La suite (a_n) est arithmétique de raison $r = 60$ et de premier terme $a_0 = 4500$. $a_n = a_0 + nr = 4500 + 60n$.

Compagnie B : $b_{n+1} = \left(1 + \frac{3}{100}\right) b_n = 1{,}03 b_n$ La suite (b_n) est géométrique de raison $q = 1{,}03$ et de premier terme $b_0 = 4200$. $b = b_0 \times q^n = 4200 \times 1{,}03^n$.

2. $2028 = 2019 + 9$. $a_9 = 4500 + 60 \times 9 = 5040$.

3. $4200 \times 1{,}03^n = 6000$ équivaut à $1{,}03^n = \dfrac{10}{7}$. On obtient $n = \dfrac{\ln\left(\dfrac{10}{7}\right)}{\ln 1{,}03}$. D'où $n = 12$.

Cela se produira en $2019 + 12 = 2027$.

4. $a_0 + \ldots + a_8 = \dfrac{9}{2}(a_0 + a_8) = \dfrac{9}{2}(4500 + 4500 + 60 \times 8) = 42\ 660$.

$b_0 + \ldots + b_8 = b_0 \times \dfrac{1-q^9}{1-q} = 4200 \times \dfrac{1-1{,}03^9}{1-1{,}03} = 42\ 668{,}24$.

La compagnie B propose un contrat plus avantageux si Antoine reste 8 ans.

76 **1. Vrai**

$u_1 = 0{,}4 \times 400 + 12 = 172$, $u_2 = 0{,}4 \times 172 + 12 = 80{,}8$.

2. Faux

$v_1 = u_1 - 20 = 152$.

3. Faux

$u_1 - u_0 = -228$, $u_2 - u_1 = -91{,}2$. $u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$. (u_n) n'est pas une suite arithmétique.

4. Vrai

$v_0 = 380$, $v_1 = 152$, $v_2 = 60{,}8$. $\dfrac{v_1}{v_0} = \dfrac{v_2}{v_1} = 0{,}4$. (v_n) semble être une suite géométrique.

$v_{n+1} = u_{n+1} - 20 = 0{,}4u_n + 12 - 20 = 0{,}4u_n - 8 = 0{,}4(u_n - 20) = 0{,}4v_n$.

(v_n) est la suite géométrique de raison $q = 0{,}4$ et de premier terme $v_0 = 380$.

5. Vrai

$v_n = 380 \times 0{,}4^n$. $u_n = v_n + 20 = 20 + 380 \times 0{,}4^n$.

77 **1.** Le premier contrat se modélise par la suite (u_n) arithmétique de raison $r = 5$ et de premier terme $u_1 = 200$.

Le deuxième contrat se modélise par la suite (v_n) géométrique de raison $q = 1{,}02$ et de premier terme $v_1 = 200$.

$u_2 = 205$, $u_3 = 210$, $v_2 = 204$, $v_3 = 208{,}08$.

2. $u_{36} = 200 + 5 \times 36 = 380$, $v_{36} = 200 \times 1{,}02^{36} \approx 407{,}98$.

3. $u_1 + \ldots + u_{36} = \dfrac{36}{2}(200 + 380) = 10\ 440$. $v_1 + \ldots + v_{36} = 200 \times \dfrac{1-1{,}02^{36}}{1-1{,}02} \approx 10\ 398{,}88$.

Le contrat le plus intéressant est le deuxième.

78 **1.** Réponse **a**

$u_{n+1} = u_n \times 1{,}01$. Donc $u_n = u_0 \times 1{,}01^n = 1480{,}27 \times 1{,}01^n$.

2. Réponse **c**

$2022 = 2017 + 5$. $u_5 = 1480{,}27 \times 1{,}01^5 \approx 1555{,}78$.

3. Réponse **d**

$n = 8$, $u = 1602{,}92$

4. Réponse **a**

$12(u_0 + \ldots + u_7) = 12 \times 1480{,}27 \times \dfrac{1-1{,}01^8}{1-1{,}01} \approx 147\ 180{,}35$.

$\boxed{79}$ **1.** $C_{n+1}=\left(1+\frac{6}{100}\right)C_n-4000=1{,}06C_n-4000$.

2. Cette suite n'est ni arithmétique, ni géométrique.

3. a. (u_n) est la suite géométrique de raison $q = 1{,}06$ et de premier terme $u_0 = 30\,000$.

b. $u_n=30\,000\times1{,}06^n$. $C_n=50\,000+30\,000\times1{,}06^n$.

c. $C_5=90\,146{,}76$.

d. $50\,000+30\,000\times1{,}06^n>180\,000$ équivaut à $1{,}06^n>\frac{13}{3}$. On obtient $n>\frac{\ln\left(\frac{13}{3}\right)}{\ln 1{,}06}$. $n = 26$.

TP Le permis de conduire

1. Chloé place 600 € et 10 < 600 < 1600

Elle a 15 ans et 12 < 15 < 25

Elle habite en France.

2. a. $u_{n+1}=\left(1+\frac{2{,}75}{100}\right)\times u_n=1{,}0275u_n$.

(u_n) est la suite géométrique de raison $q = 1{,}0275$ et de premier terme $u_0=600$.

b. $u_n=600\times1{,}0275^n$.

c. 2022 = 2019 + 3. $u_3=650$. Non car $u_3<1500$.

En salle informatique

	A	B
1	Date	Epargne en Euros
2	01/01/19	600,00
3	01/02/19	626,36
4	01/03/19	652,77
5	01/04/19	679,25
6	01/05/19	705,78
7	01/06/19	732,38
8	01/07/19	759,03
9	01/08/19	785,75
10	01/09/19	812,52
11	01/10/19	839,36
12	01/11/19	866,26
13	01/12/19	893,21
14	01/01/20	920,23
15	01/02/20	947,31
16	01/03/20	974,45
17	01/04/20	1001,66
18	01/05/20	1028,92
19	01/06/20	1056,25
20	01/07/20	1083,63
21	01/08/20	1111,08
22	01/09/20	1138,59
23	01/10/20	1166,17
24	01/11/20	1193,80
25	01/12/20	1221,50
26	01/01/21	1249,26
27	01/02/21	1277,08
28	01/03/21	1304,97
29	01/04/21	1332,92
30	01/05/21	1360,93
31	01/06/21	1389,01
32	01/07/21	1417,15
33	01/08/21	1445,35
34	01/09/21	1473,61
35	01/10/21	1501,95

1. En B3, on saisit : =B2*1,00226+25

2. Au 1er juillet 2019, Chloé disposera de 759,03 €.

3. $n = 33$.

4. a. $u_{n+1}=1{,}00226u_n+25$.

b.
```
N ← 0
U ← 600
Tantque  U < 1500
         N ← N + 1
         U ← 1,00226 U + 25
Fin Tantque
```

c.
```
n=0
u=600
while u<1500:
    n=n+1
    u=1.00226*u+25
print(n)
```

d. Si Chloé suit les conseils de ses parents, elle aura la somme nécessaire pour financer son permis de conduire le 33e mois, c'est-à-dire au 1er octobre 2021.

Pour l'épreuve du Bac

$\boxed{85}$ **1. a.** $u_1=1100\times\left(1+\frac{10{,}5}{100}\right)\approx1216$. On arrondit à l'entier.

$u_2 = 1{,}105 \times 1215{,}5 \approx 1343$. On arrondit à l'entier.

b. $u_{n+1} = 1{,}105 u_n$. (u_n) est la suite géométrique de raison $q = 1{,}105$ et de premier terme $u_0 = 1100$.

$u_n = 1100 \times 1{,}105^n$.

c. 2030 = 2019 + 11. $u_{11} = 1100 \times 1{,}105^{11} \approx 3299$.

2035 = 2019 + 16. $u_{16} = 1100 \times 1{,}105^{16} \approx 5435$.

d. $1100 \times 1{,}105^n > 2000$ équivaut à $n > \dfrac{\ln\left(\dfrac{20}{11}\right)}{\ln 1{,}105}$, soit $n = 6$.

2019 + 6 = 2025. À partir de 2025, on dépassera 2000 tonnes.

e. 2040 = 2019 + 21.

$S = u_0 + \ldots + u_{21} = 1100 \times \dfrac{1 - 1{,}105^{22}}{1 - 1{,}05} \approx 83\ 750$.

2. a. $v_1 = 1247$, $\quad v_2 = 1350$.

b. $v_1 - v_0 \neq v_2 - v_1$ donc la suite (v_n) n'est pas arithmétique.

$\dfrac{v_1}{v_0} \neq \dfrac{v_2}{v_1}$ donc la suite (v_n) n'est pas géométrique.

c. La valeur affichée en sortie est 1421,93 au centième près. Cela correspond au nombre de tonnes produites en 2019 + 2 = 2021.

d. En B3, on saisit : = B2+1.

En C3, on saisit : = 0,7*C2+477

e. $v_{21} = 1590$.

f. $v_0 + \ldots + v_{21} = 33\ 347$.

3. La modélisation proposée en **1.** permet de réaliser le plus gros volume d'exploitation entre 2019 et 2040.

	A	B	C
1	n	année	v_n
2	0	2019	1100,00
3	1	2020	1247,00
4	2	2021	1349,90
5	3	2022	1421,93
6	4	2023	1472,35
7	5	2024	1507,65
8	6	2025	1532,35
9	7	2026	1549,65
10	8	2027	1561,75
11	9	2028	1570,23
12	10	2029	1576,16
13	11	2030	1580,31
14	12	2031	1583,22
15	13	2032	1585,25
16	14	2033	1586,68
17	15	2034	1587,67
18	16	2035	1588,37
19	17	2036	1588,86
20	18	2037	1589,20
21	19	2038	1589,44
22	20	2039	1589,61
23	21	2040	1589,73

86

1.

```
def somme_nombres(n):
    somme=0
    for i in range (1,n+1):
        somme=somme+i
    return somme
print (somme_nombres(5))
```

2.

```
def somme_carrés(n):
    somme=0
    for i in range (1,n+1):
        somme=somme+i**2
    return somme
print (somme_carrés(5))
```

3.

```
def somme_cubes(n):
    somme=0
    for i in range (1,n+1):
        somme=somme+i**3
    return somme
print (somme_cubes(5))
```

4.

```
def somme_inverses(n):
    somme=0
    for i in range (1,n+1):
        somme=somme+(1/i)
    return somme
print (somme_inverses(5))
```

87 Partie A

1. $u_1 = u_0 + 160 = 80 + 160 = 240$.

$u_2 = u_1 + 160 = 240 + 160 = 400$.

2. a. $u_{n+1} = u_n + 160$. (u_n) est la suite arithmétique de raison $r = 160$ et de premier terme $u_0 = 80$.

b. $u_n = 80 + 160n$.

Partie B

1. $v_1 = v_0\left(1+\frac{3}{100}\right) = 1{,}03\times 125 = 128{,}75$.

$v_2 = 1{,}03\times v_1 = 1{,}03\times 128{,}75 = 132{,}61$.

2. $v_{n+1} = 1{,}03v_n$. (v_n) est la suite géométrique de raison $q = 1{,}03$ et de premier terme $v_0 = 125$.

3. $v_0 + \ldots + v_{11} = 125\times\frac{1-1{,}03^{12}}{1-1{,}03} = 1774$.

La mensualité du 12^e mois est : 2000 – 1774 = 226 €.

4. Il faut résoudre $v_n > 160$, c'est-à-dire $125\times 1{,}03^n > 160$.

On obtient $n > \frac{\ln 1{,}28}{\ln 1{,}03}$.

$n = 9$.

À partir du 9^e mois, les mensualités de Léo seront plus élevées que celles de Jules.

88 Partie A

1. a. $u_1 = u_0\times\left(1+\frac{1{,}5}{100}\right) = 1{,}015\times 470\ 000 = 477\ 050$.

b. $u_{n+1} = 1{,}015u_n$. (u_n) est la suite géométrique de raison $q = 1{,}015$ et de premier terme $u_0 = 470\ 000$.

c. $u_n = 470\,000\times 1{,}015^n$.

2. 2028 = 2013 + 15. $u_{15} = 470\,000\times 1{,}015^{15} = 587\ 609$.

Partie B

1. On a 4 éléphants par heure, donc 96 éléphants par jour et donc 35 040 éléphants par an.
Environ 35 000 éléphants sont tués par an.

2. $470\times\left(1-\frac{t}{100}\right) = 170{,}9$ donne $t = 63{,}63$. D'où le pourcentage de 64%.

3. a. $n = 2029$.

b. On aura extinction de l'espèce en 2029.

Chapitre 2

Fonction inverse

CAPACITÉ

• Étudier et représenter des fonctions obtenues par combinaisons linéaires de la fonction inverse et de fonctions polynomiales de degré au maximum 3.

Vérifier les acquis de Seconde et de Première

1. c **2.** b **3.** b **4.** c **5.** b **6.** a

Activités

Activité 1 Il y a une limite à tout

1. a.

x	10	800	10 000	50 000	400 000	1 000 000
$f(x)$	0,1	0,001 25	10^{-4}	2×10^{-5}	$2{,}5 \times 10^{-6}$	10^{-6}

b. Lorsque x prend des valeurs positives de plus en plus grandes, les valeurs de $f(x)$ semblent se rapprocher de 0.

2. a. Lorsque $A = 0{,}000\,01$, l'algorithme affiche $x = 100\,000$.

b. Cela signifie que lorsque $x > 100\,000$, on a $\dfrac{1}{x} < 0{,}000\,01$.

c. Lorsque $A = 2{,}5 \times 10^{-8}$, l'algorithme affiche $x = 100\,000\,000$.

Cela signifie que lorsque $x > 100\,000\,000$, on a $\dfrac{1}{x} < 2{,}5 \times 10^{-8}$.

3. a.

x	−10	−1 000	−8 000	−100 000	−500 000	−2 000 000
$f(x)$	−0,1	−0,001	$-1{,}25 \times 10^{-4}$	-10^{-5}	-2×10^{-6}	-5×10^{-7}

b. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x} = 0$.

4. a.

x	1	0,1	0,025	0,000 08	0,000 002	0,000 000 1
$f(x)$	1	10	40	12 500	500 000	10 000 000

b. Lorsque x prend des valeurs positives de plus en plus proches de 0, les valeurs de $f(x)$ semblent augmenter de plus en plus et devenir aussi grandes que l'on veut.

5. a. Lorsque $A = 350\,000$, l'algorithme affiche $x = 10^{-6}$.

b. Cela signifie que lorsque $x < 10^{-6}$, on a $\dfrac{1}{x} > 350\,000$.

c. Lorsque $A = 20\,000\,000$, l'algorithme affiche $x = 10^{-8}$.

Cela signifie que lorsque $x < 10^{-8}$, on a $\dfrac{1}{x} > 20\,000\,000$.

6. a.

x	-1	$-0{,}05$	$-0{,}000\,1$	$-0{,}000\,02$	$-0{,}000\,004$	$-0{,}000\,000\,5$
$f(x)$	-1	-20	$-10\,000$	$-50\,000$	$-250\,000$	$-2\,000\,000$
$\lvert f(x)\rvert$	1	20	10 000	50 000	250 000	2 000 000

b. Lorsque x prend des valeurs négatives de plus en plus proches de 0, les valeurs de $\lvert f(x)\rvert$ semblent augmenter de plus en plus et devenir aussi grandes que l'on veut.

c. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} \dfrac{1}{x} = -\infty$.

Activité 2 À la recherche de la dérivée

1. Si f est une fonction dérivable en un réel a alors $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)$.

2. a. Lorsque h se rapproche de 0 en étant positif, la limite du taux de variation semble être $-0{,}25$.

b. Lorsque h se rapproche de 0 en étant négatif, la limite du taux de variation semble être $-0{,}25$.

c. On conjecture donc que $f'(2) = -0{,}25$.

d. Pour tout $h \neq 0$, $\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h} = \dfrac{\dfrac{1}{2+h}-\dfrac{1}{2}}{h} = -\dfrac{1}{2(2+h)}$.

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} -\dfrac{1}{2(2+h)} = -\dfrac{1}{4}$.

Donc $f'(2) = -0{,}25$.

3. Pour tout $h \neq 0$, $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = \dfrac{\dfrac{1}{a+h}-\dfrac{1}{a}}{h} = -\dfrac{1}{a(a+h)}$.

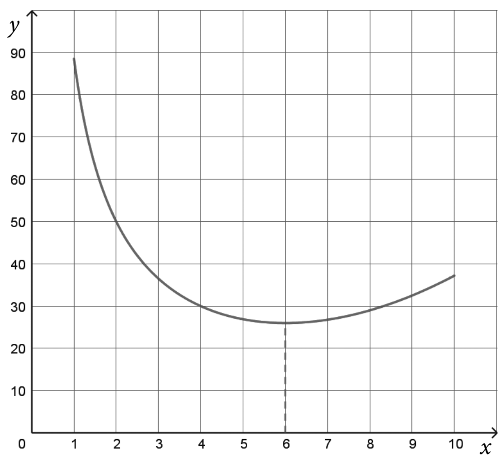
$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} -\dfrac{1}{a(a+h)} = -\dfrac{1}{a^2}$.

Donc $f'(a) = -\dfrac{1}{a^2}$.

Activité 3 Attention, embouteillages sur la chaîne !

1. $C_M(x) = 0{,}5x^2 - 4x + 20 + \dfrac{72}{x}$.

2. a.



b. Pour obtenir un coût moyen minimum, l'entreprise semble avoir à produire 6 tonnes de bouteilles.

3. a. $C'_M(x) = x - 4 - \dfrac{72}{x^2} = \dfrac{x^3 - 4x^2 - 72}{x^2}$. Or $\dfrac{(x-6)\left(x^2+2x+12\right)}{x^2} = \dfrac{x^3 - 4x^2 - 72}{x^2}$

donc $C'_M(x) = \dfrac{(x-6)\left(x^2+2x+12\right)}{x^2}$.

b. Sur [1 ; 10], $\dfrac{\left(x^2+2x+12\right)}{x^2} > 0$ donc $C'_M(x)$ est du signe de $x - 6$. Et $C'_M(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 6$. D'où :

x	1		6		10
$C'_M(x)$		−	0	+	
$C_M(x)$	88,5	↘	26	↗	37,2

c. Pour obtenir un coût moyen minimum, on retrouve bien qu'il faut produire 6 tonnes de bouteilles.

Exercices

Pour acquérir les automatismes

2 **a.** 0 **b.** 0 **c.** 1 **d.** −8 **e.** 9

3 **a.** 0 **b.** 0 **c.** 7 **d.** −20

4 **a.** $+\infty$ **b.** $-\infty$ **c.** $+\infty$ **d.** $-\infty$ **e.** $+\infty$ **f.** $+\infty$

5 **a.** $f'(x) = -\dfrac{26}{x^2}$. **b.** $g'(x) = \dfrac{12}{x^2}$. **c.** $h'(x) = \dfrac{1}{x^2}$.

6 **a.** $f'(x) = -\dfrac{8}{x^2}$. **b.** $g'(t) = -\dfrac{17}{t^2}$. **c.** $h'(x) = -\dfrac{31}{x^2}$.

7 **a.** $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2}$. **b.** $g'(x) = 5 - \dfrac{14}{x^2}$. **c.** $h'(t) = -1{,}25 + \dfrac{100}{t^2}$.

8 **a.** $f'(t) = 10t - 6 - \dfrac{37}{t^2}$. **b.** $g'(x) = -12x - 3{,}2 + \dfrac{4}{x^2}$. **c.** $h'(t) = -\dfrac{41}{t^2} + t - 7$.

9 **a.** $f'(x) = x^2 + x - 6 - \dfrac{13}{x^2}$. **b.** $g'(t) = \dfrac{5}{t^2} + 12t^2 - \dfrac{1}{2}t - \dfrac{9}{10}$.

10 **a.** $f'(x) = -\dfrac{24}{x^2}$ et $f'(-2) = -6$. **b.** $g'(x) = -3 + \dfrac{9}{x^2}$ et $g'(1) = 6$.

c. $h'(x) = -\dfrac{250}{x^2} + 4x$ et $h'(-5) = -30$. **d.** $k'(x) = 3x^2 - 8x - 5 + \dfrac{18}{x^2}$ et $k'(3) = 0$.

11 **a.** Sur D, $f(x) > 0$. **b.** Sur D, $f(x) < 0$.

12 **a.**

x	0		1,1		$+\infty$
$f(x)$	‖	−	0	+	

b.

x	$-\infty$		−1,1		0
$f(x)$		+	0	−	‖

13 **a.**

x	$-\infty$		−8		0		2		$+\infty$
$f(x)$		+	0	−	‖	−	0	+	

b.

x	$-\infty$		−7,2		0		7,2		$+\infty$
$f(x)$		−	0	+	‖	+	0	−	

14 **a.** Sur D, $f(x) > 0$.

b.

x	0		11		$+\infty$
$f(x)$	||	$-$	0	$+$	

Pour commencer

15 **1.** $+\infty$ et 0.

2. $+\infty$ et 0.

16 $-\infty$ et 0.

17 **1.** $f(x) = 6 + 22 \times \dfrac{1}{x}$.

2. $+\infty$ et 6.

18 **1.** $f(x) = 4 + (-39) \times \dfrac{1}{x}$.

2. • D'après le cours, $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x} = 0$.

On en déduit que $\lim\limits_{x \to -\infty} -39 \times \dfrac{1}{x} = -39 \times 0 = 0$ et donc que $\lim\limits_{x \to -\infty} 4 + (-39) \times \dfrac{1}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 4 + 0 = 4$.

• D'après le cours, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \dfrac{1}{x} = -\infty$.

On en déduit que $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} -39 \times \dfrac{1}{x} = +\infty$ et donc que $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} 4 + (-39) \times \dfrac{1}{x} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = +\infty$.

19 **1.** $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ $\qquad \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = -\infty$ $\qquad \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = +\infty$ $\qquad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

2. La droite d'équation $x = 0$ est asymptote verticale à la courbe et la droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale à la courbe en $-\infty$ et en $+\infty$.

20 **1.** $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ $\qquad \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = +\infty$ $\qquad \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = -\infty$ $\qquad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

2. La droite d'équation $x = 0$ est asymptote verticale à la courbe et la droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale à la courbe en $-\infty$ et en $+\infty$.

21 **1.** Lorsque $a = 8$, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

Lorsque $a = -4$, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

2. a.

```
a=float(input("Entrer un nombre réel a non nul"))
if a > 0:
    print('La limite de f en 0 par valeurs supérieures est +inf et celle en +inf est 0')
else:
    print('La limite de f en 0 par valeurs supérieures est -inf et celle en +inf est 0')
```

22 **1. Vrai.**

2. Faux ; la limite est $+\infty$.

3. Faux ; la limite est -7.

4. Faux ; la limite est $+\infty$.

23 **1.** $f'(x) = \dfrac{9}{x^2}$.

2. Sur $]0 ; +\infty[$, $f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante.

24 **a.** $f'(x) = -\dfrac{6}{x^2}$. **b.** $g'(x) = \dfrac{8{,}25}{x^2}$. **c.** $h'(x) = -\dfrac{3}{x^2}$. **d.** $l'(x) = -\dfrac{1{,}3}{x^2}$.

e. $m'(x) = \dfrac{20}{x^2}$. **f.** $p'(x) = -\dfrac{8}{x^2}$.

25 **a.** $h'(x) = -\dfrac{20}{x^2}$. **b.** $g'(x) = \dfrac{17{,}3}{x^2}$. **c.** $f'(t) = \dfrac{-5t^2 - 4}{t^2}$. **d.** $k'(x) = \dfrac{4x^2 + 5}{x^2}$.

26 **a.** $f'(x) = \dfrac{10{,}2x^2 - 3{,}1}{x^2}$. **b.** $g'(x) = \dfrac{-0{,}5x^2 + 7}{x^2}$. **c.** $h'(x) = \dfrac{7{,}2 + 3{,}5x^2}{x^2}$.

27 **a.** $f'(t) = \dfrac{14t^3 + 2{,}8t^2 - 0{,}6}{t^2}$. **b.** $g'(x) = \dfrac{-3 - 18x^3 + x^2}{x^2}$. **c.** $h'(q) = \dfrac{10q^3 - 10 - 3{,}1q^2}{q^2}$.

28 **a.** $f'(x) = \dfrac{0{,}3x^4 + 10x^3 - 3x^2 - 8}{x^2}$. **b.** $g'(t) = \dfrac{-12t^4 + 0{,}6t^3 + 2}{t^2}$.

29 **1.** Réponse **b.** **2.** Réponse **c.** **3.** Réponse **a.**

30 **a.** $f(x) = x - 100 + \dfrac{6\,400}{x} = x - 100 + 6\,400 \times \dfrac{1}{x}$.

Donc $f'(x) = 1 + 6\,400 \times \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = 1 - \dfrac{6\,400}{x^2} = \dfrac{x^2 - 6\,400}{x^2} = \dfrac{x^2 - 80^2}{x^2} = \dfrac{(x - 80)(x + 80)}{x^2} = (x - 80)\,\dfrac{x + 80}{x^2}$.

b. $f(x) = 2x - 3 + \dfrac{50}{x} = 2x - 3 + 50 \times \dfrac{1}{x}$.

Donc $f'(x) = 2 + 50 \times \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = 2 - \dfrac{50}{x^2} = \dfrac{2x^2 - 50}{x^2} = \dfrac{2(x^2 - 25)}{x^2} = \dfrac{2(x^2 - 5^2)}{x^2} = \dfrac{2(x - 5)(x + 5)}{x^2} = 2(x - 5)\,\dfrac{x + 5}{x^2}$.

31 **1.** $f'(x) = \dfrac{1{,}5}{x^2}$.

2. Sur $]-\infty ; 0[$, $f'(x) > 0$.

3. La fonction f est strictement croissante sur $]-\infty ; 0[$.

32 **1.** $f'(x) = -\dfrac{6}{x^2}$.

2. Pour tout nombre réel x non nul, $f'(x) < 0$.

3. La fonction f est strictement décroissante sur $]-\infty ; 0[$ et sur $]0 ; +\infty[$.

33 **1.** **a.** $f'(x) = -\dfrac{b}{x^2}$.

b. Non la valeur de a n'influence pas le sens de variations de f puisque $f'(x)$ ne dépend pas de a.

c. Lorsque b est positif, $f'(x) < 0$ sur $]0 ; +\infty[$ et f est donc strictement décroissante sur $]0 ; +\infty[$.

Lorsque b est négatif, $f'(x) > 0$ sur $]0 ; +\infty[$ et f est donc strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$.

2. a.

```
a=float(input("Entrer un nombre réel a"))
b=float(input("entrer un nombre réel b non nul"))
if b > 0:
    print('La fonction f est strictement décroissante sur l intervalle donné')
else:
    print('La fonction f est strictement croissante sur l intervalle donné')
```

34 **1.** $f'(x) = 0{,}16 - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{0{,}16x^2 - 1}{x^2} = \dfrac{0{,}16\left(x^2 - 6{,}25\right)}{x^2} = \dfrac{0{,}16(x - 2{,}5)(x + 2{,}5)}{x^2}$.

2. Sur $]0\,;+\infty[$, $\dfrac{0{,}16(x + 2{,}5)}{x^2} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $x - 2{,}5$. Et $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2{,}5$.

3. La fonction f est donc strictement décroissante sur $]0\,;2{,}5]$ et strictement croissante sur $[2{,}5\,;+\infty[$.

35 **1.** $f(x) = \dfrac{4}{x} + 2x^2 = 4 \times \dfrac{1}{x} + 2x^2$.

Donc $f'(x) = 4 \times \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) + 2 \times 2x = -\dfrac{4}{x^2} + 4x = \dfrac{-4 + 4x^3}{x^2}$.

Or $\dfrac{4(x-1)\left(x^2 + x + 1\right)}{x^2} = \dfrac{(4x - 4)\left(x^2 + x + 1\right)}{x^2} = \dfrac{4x^3 + 4x^2 + 4x - 4x^2 - 4x - 4}{x^2} = \dfrac{-4 + 4x^3}{x^2}$.

Donc on a bien $f'(x) = \dfrac{4(x-1)\left(x^2 + x + 1\right)}{x^2}$.

2. Sur $]0\,;+\infty[$, $4 > 0$, $x^2 + x + 1 > 0$ et $x^2 > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $x - 1$.

Et, $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$.

3. On en déduit que la fonction f est strictement décroissante sur $]0\,;1]$ et strictement croissante sur $[1\,;+\infty[$.

36 **1.** $f(x) = x^3 + 11x - 7 - \dfrac{9}{x} = x^3 + 11x - 7 - 9 \times \dfrac{1}{x}$.

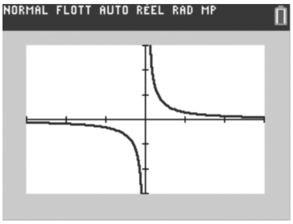
Donc $f'(x) = 3x^2 + 11 \times 1 - 9 \times \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = 3x^2 + 11 + \dfrac{9}{x^2} = \dfrac{3x^4 + 11x^2 + 9}{x^2}$.

2. Sur $]-\infty\,;0[$, $3x^4 > 0$, $11x^2 > 0$ et $9 > 0$ donc $3x^4 + 11x^2 + 9 > 0$. De plus, sur $]-\infty\,;0[$, $x^2 > 0$.

Par conséquent, $f'(x) > 0$ sur $]-\infty\,;0[$ et la fonction f est donc bien strictement croissante sur $]-\infty\,;0[$.

Pour s'entraîner

37 **1. a.**

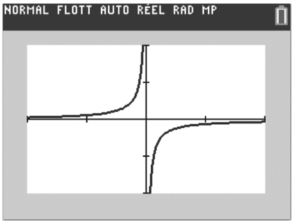


On conjecture que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

b. La droite d'équation $x = 0$ est asymptote verticale à la courbe et la droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale à la courbe en $-\infty$ et en $+\infty$.

2. $f(x) = 31 \times \dfrac{1}{x}$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

38 **1. a.**



On conjecture que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

b. La droite d'équation $x = 0$ est asymptote verticale à la courbe et la droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale à la courbe en $-\infty$ et en $+\infty$.

2. $f(x) = -12 \times \dfrac{1}{x}$.

- D'après le cours, $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} -12 \times \dfrac{1}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -12 \times 0 = 0$.
- D'après le cours, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \dfrac{1}{x} = -\infty$ donc $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} -12 \times \dfrac{1}{x} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = +\infty$.
- D'après le cours, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \dfrac{1}{x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} -12 \times \dfrac{1}{x} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = -\infty$.
- D'après le cours, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} -12 \times \dfrac{1}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -12 \times 0 = 0$.

39 $f(x) = -25 \times \dfrac{1}{x}$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} -25 \times \dfrac{1}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -25 \times 0 = 0$; $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} -25 \times \dfrac{1}{x} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = +\infty$;

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} -25 \times \dfrac{1}{x} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} -25 \times \dfrac{1}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -25 \times 0 = 0$.

40 $f(x) = -2 + 4 \times \dfrac{1}{x}$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} -2 + 4 \times \dfrac{1}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -2 + 4 \times 0 = -2$; $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} -2 + 4 \times \dfrac{1}{x} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = -\infty$;

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} -2 + 4 \times \dfrac{1}{x} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} -2 + 4 \times \dfrac{1}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -2 + 4 \times 0 = -2$.

41 **1.** Réponse **b.** **2.** Réponse **a.** **3.** Réponse **b.** **4.** Réponse **a.**

42 **1. Vrai.** $f'(x) = 2x + 11 - \dfrac{3}{x^2} = \dfrac{2x^3 + 11x^2 - 3}{x^2}$.

Or $\dfrac{(x - 0{,}5)\left(2x^2 + 12x + 6\right)}{x^2} = \dfrac{2x^3 + 12x^2 + 6x - x^2 - 6x - 3}{x^2} = \dfrac{2x^3 + 11x^2 - 3}{x^2} = f'(x)$.

2. Faux. $f'(x) = 1 - \dfrac{8}{x^2} = \dfrac{x^2 - 8}{x^2}$. Donc $f'(x) \neq \dfrac{(x - 4)(x + 4)}{x^2}$.

3. Vrai. $f'(x) = -\dfrac{13{,}4}{x^2}$. Or sur $]-\infty\,;0[$, $f'(x) < 0$ donc f est bien strictement décroissante sur $]-\infty\,;0[$.

4. Faux. $f'(x) = 15x^2 + \dfrac{4{,}7}{x^2}$. Or sur $]0\,;+\infty[$, $f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.

5. Faux. $f'(t) = 2 - \dfrac{18}{t^2} = \dfrac{2(t-3)(t+3)}{t^2}$. Or sur $]0\,;+\infty[$, $\dfrac{2(t+3)}{t^2} > 0$ donc $f'(t)$ est du signe de $t - 3$.

Et $f'(t) \geq 0 \Leftrightarrow t \geq 3$. On en déduit que f est strictement décroissante sur $]0\,;3]$ et strictement croissante sur $[3\,;+\infty[$.

43 $f'(x) = 0{,}1 - \dfrac{0{,}4}{x^2} = \dfrac{0{,}1x^2 - 0{,}4}{x^2} = \dfrac{0{,}1(x^2-4)}{x^2} = \dfrac{0{,}1(x-2)(x+2)}{x^2}$.

44 $f'(x) = 2x - 19 + \dfrac{5}{x^2} = \dfrac{2x^3 - 19x^2 + 5}{x^2}$.

Or $\dfrac{(2x+1)(x^2-10x+5)}{x^2} = \dfrac{2x^3 - 20x^2 + 10x + x^2 - 10x + 5}{x^2} = \dfrac{2x^3 - 19x^2 + 5}{x^2} = f'(x)$.

45 **1.** $f(x) = 2 - 0{,}1x - \dfrac{0{,}025}{x} = 2 - 0{,}1x - 0{,}025 \times \dfrac{1}{x}$.

Donc $f'(x) = 0 - 0{,}1 \times 1 - 0{,}025 \times \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = -0{,}1 + \dfrac{0{,}025}{x^2} = \dfrac{-0{,}1x^2 + 0{,}025}{x^2} = \dfrac{-0{,}1(x^2 - 0{,}25)}{x^2} = \dfrac{-0{,}1(x^2 - 0{,}5^2)}{x^2}$
$= \dfrac{-0{,}1(x-0{,}5)(x+0{,}5)}{x^2}$.

2. Sur $[0{,}1\,;1]$, $x + 0{,}5 > 0$ et $x^2 > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $-0{,}1(x - 0{,}5)$.

Et, $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow -0{,}1(x-0{,}5) \geq 0 \Leftrightarrow x - 0{,}5 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 0{,}5$. D'où :

x	0,1		0,5		1
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	1,74	↗	1,9	↘	1,875

46 **1.** $f'(x) = -10 + \dfrac{3\,240}{x^2} = \dfrac{-10x^2 + 3\,240}{x^2} = \dfrac{-10(x^2 - 324)}{x^2} = \dfrac{-10(x-18)(x+18)}{x^2}$.

2. Sur $\mathbb{R}^*$, $x^2 > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $-10(x - 18)(x + 18)$. D'où :

x	$-\infty$		-18		0		18		$+\infty$
$f'(x)$		−	0	+	‖	+	0	−	
$f(x)$		↘	422	↗	‖	↗	-298	↘	

47 $f(x) = 5 - \dfrac{10}{x} = 5 - 10 \times \dfrac{1}{x}$.

Donc $f'(x) = 0 - 10 \times \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = \dfrac{10}{x^2}$.

Or, sur $[1\,;10]$, $10 > 0$ et $x^2 > 0$ donc $f'(x) > 0$. La fonction f est donc strictement croissante sur $[1\,;10]$.

De plus, $f(1) = 5 - \dfrac{10}{1} = 5 - 10 = -5$ et $f(10) = 5 - \dfrac{10}{10} = 5 - 1 = 4$.

Le tableau de variation donné par l'énoncé est donc bien validé.

48 $f'(x) = 0{,}5 - \dfrac{8}{x^2} = \dfrac{0{,}5x^2 - 8}{x^2} = \dfrac{0{,}5(x^2-16)}{x^2} = \dfrac{0{,}5(x-4)(x+4)}{x^2}$.

Sur $\mathbb{R}^*$, $x^2 > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $0{,}5(x-4)(x+4)$. D'où :

x	$-\infty$		-4		0		4		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	‖	−	0	+	
$f(x)$		↗	-2	↘	‖	↘	6	↗	

$f(-4) = 0{,}5 \times (-4) + 2 + \dfrac{8}{-4} = -2$ et $f(4) = 0{,}5 \times (4) + 2 + \dfrac{8}{4} = 6$

49 **1.** $c(v) = 0{,}06v + \dfrac{150}{v} = 0{,}06v + 150 \times \dfrac{1}{v}$.

Donc $c'(v) = 0{,}06 \times 1 + 150 \times \left(-\dfrac{1}{v^2}\right) = 0{,}06 - \dfrac{150}{v^2} = \dfrac{0{,}06v^2 - 150}{v^2} = \dfrac{0{,}06\left(v^2 - 2\,500\right)}{v^2} = \dfrac{0{,}06\left(v^2 - 50^2\right)}{v^2}$

$= \dfrac{0{,}06(v-50)(v+50)}{v^2}$

2. Sur $[10\,;130]$, $0{,}06 > 0$, $v + 50 > 0$ et $v^2 > 0$ donc $c'(v)$ est du signe de $v - 50$.

Et, $c'(v) \geq 0 \Leftrightarrow v - 50 \geq 0 \Leftrightarrow v \geq 50$. D'où :

v	10		50		130
$c'(v)$		−	0	+	
$c(v)$	$15{,}6$	↘	6	↗	$\frac{582}{65}$

3. a. Pour que sa consommation en essence soit minimale, ce véhicule doit rouler à 50 km.h^{-1}.

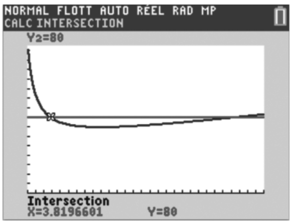
b. Sa consommation minimale est 6 litres.

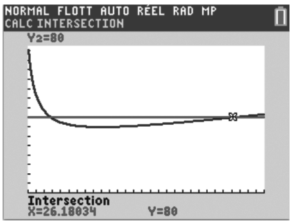
50 **1. a.** $C(20) = 1\,500$.

b. $\dfrac{1\,500}{20} = 75$.

2. a.

Le coût unitaire est inférieur à 80 € lorsque le nombre de tables produites appartient à $[4\,;26]$.





b. $C_U(q) = q + 50 + \dfrac{100}{q}$ donc $C'_U(q) = 1 - \dfrac{100}{q^2} = \dfrac{(q-10)(q+10)}{q^2}$.

c. Sur $[1\,;30]$, $\dfrac{(q+10)}{q^2} > 0$ donc $C'_U(q)$ est du signe de $q - 10$. Et $C'_U(q) \geq 0 \Leftrightarrow q \geq 10$. D'où :

q	1		10		30
$C'_U(q)$		−	0	+	
$C_U(q)$	151	↘	70	↗	$\frac{250}{3}$

d. Pour que le coût unitaire soit minimal, l'entreprise doit produire 10 tables. Le coût minimal unitaire est 70 €.

51 **1.** L'extension est un rectangle donc son aire est égale à xy.

On sait également que cette aire est égale à 722. On a donc $xy = 722$; d'où $y = \dfrac{722}{x}$.

2. a. $l(x) = x + 2y = x + 2 \times \dfrac{722}{x} = x + \dfrac{1\,444}{x}$.

b. $l(x) = x + \dfrac{1\,444}{x} = x + 1\,444 \times \dfrac{1}{x}$.

Donc $l'(x) = 1 + 1\,444 \times \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = 1 - \dfrac{1\,444}{x^2} = \dfrac{x^2 - 1\,444}{x^2} = \dfrac{x^2 - 38^2}{x^2} = \dfrac{(x-38)(x+38)}{x^2}$.

c. Sur [20 ; 60], $x + 38 > 0$ et $x^2 > 0$ donc $l'(x)$ est du signe de $x - 38$.

Et, $l'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x - 38 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 38$. D'où :

x	20		38		60
$l'(x)$		−	0	+	
$l(x)$	92,2	↘	76	↗	$\frac{1\,261}{15}$

d. • La longueur de la clôture est donc minimale lorsque $x = 38$. On a alors $y = \dfrac{722}{38} = 19$.

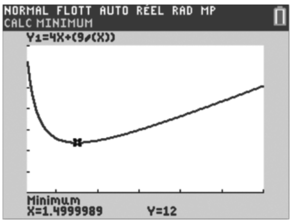
Les dimensions de l'extension rendant la longueur de la clôture minimale sont donc 38 mètres et 19 mètres.

• La longueur minimale de la clôture est 76 mètres.

Le prix, en euros, du grillage de la clôture est donc $76 \times 15 = 1\,140$ et celui du goudron du sol est $722 \times 25 = 18\,050$.

Or, $1\,140 + 18\,050 = 19\,190$ donc le prix à payer par le responsable de la jardinerie pour cette extension est 19 190 €.

52 **1.** D'après la calculatrice, il faut produire 1,5 tonne de farine pour que le coût unitaire soit minimal.



2. a. $C'_U(q) = 4 - \dfrac{9}{q^2} = \dfrac{4q^2 - 9}{q^2} = \dfrac{4(q-1,5)(q+1,5)}{q^2}$.

b. Sur [0,3 ; 6], $\dfrac{(q+1,5)}{q^2} > 0$ donc $C'_U(q)$ est du signe de $q - 1,5$. Et $C'_U(q) \geq 0 \Leftrightarrow q \geq 1,5$.

c.

q	0,3		1,5		6
$C'_U(q)$		−	0	+	
$C_U(q)$	31,2	↘	12	↗	25,5

d. Il faut donc produire 1,5 tonne de farine pour que le coût unitaire soit minimal. Ce coût unitaire minimal est 1 200 €.

Pour faire le point

53 **Vrai.** $f(x) = 24 \times \dfrac{1}{x}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 24 \times 0 = 0$.

54 **Faux.** $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0 + 8 = 8$.

55 **Faux.** $f(x) = -6 \times \dfrac{1}{x}$ donc $f'(x) = -6 \times \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = \dfrac{6}{x^2}$.

56 **Faux.** $f(x) = 8x - 5 + 2 \times \dfrac{1}{x}$ donc $f'(x) = 8 \times 1 + 0 + 2 \times \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = 8 - \dfrac{2}{x^2} = \dfrac{8x^2 - 2}{x^2}$.

57 **Vrai.** Car $f(x) = x^2 + 7x - 4 + 9 \times \dfrac{1}{x}$ donc $f'(x) = 2x + 7 \times 1 + 0 + 9 \times \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = 2x + 7 - \dfrac{9}{x^2} = \dfrac{2x^3 + 7x^2 - 9}{x^2}$.

Or $\dfrac{(x+3)\left(2x^2 + x - 3\right)}{x^2} = \dfrac{2x^3 + x^2 - 3x + 6x^2 + 3x - 9}{x^2} = \dfrac{2x^3 + 7x^2 - 9}{x^2} = f'(x)$.

58 **1.** Réponse **b.**

2. Réponse **a.**

3. Réponse **a.**

59 **1.** Réponse **b.**

2. Réponse **c.**

60 **1.** Réponse **a.**

2. Réponse **c.**

3. Réponse **b.**

Pour approfondir

61 **1.** $C'_M(x) = 1 - \dfrac{25}{x^2} = \dfrac{(x-5)(x+5)}{x^2}$.

2. Sur $[0{,}5 ; 8]$, $\dfrac{(x+5)}{x^2} > 0$ donc $C'_M(x)$ est du signe de $x - 5$. Et $C'_M(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 5$. D'où :

x	0,5		5		8
$C'_M(x)$		−	0	+	
$C_M(x)$	54,5	↘	14	↗	15,125

L'entreprise doit donc produire 5 000 litres de peinture pour que le coût moyen soit minimal.

62 **1.** $B(q) = 800q - (0{,}01q^2 + 250q + 2\,496\,400) = -0{,}01q^2 + 550q - 2\,496\,400$.

2. a. =B2/A2

b. Pour avoir un bénéfice unitaire maximal le nombre d'exemplaires à fabriquer et à vendre est estimé à 16 000.

c. $B_U(q) = -0{,}01q + 550 - \dfrac{2\,496\,400}{q}$ donc $B'_U(q) = -0{,}01 + \dfrac{2\,496\,400}{q^2} = \dfrac{-0{,}01q^2 + 2\,496\,400}{q^2}$

$= \dfrac{-0{,}01(q - 15\,800)(q + 15\,800)}{q^2}$.

d. Sur $]0 ; 60\,000]$, $\dfrac{(q + 15\,800)}{q^2} > 0$ donc $B'_U(q)$ est du signe de $-0{,}01(q - 15\,800)$.

Et, $B'_U(q) \geq 0 \Leftrightarrow q \leq 15\,800$. D'où :

q	0		15 800		60 000
$B'_U(q)$	‖	+	0	−	
$B_U(q)$	‖	↗	234	↘	$-\frac{13\,741}{150}$

Pour avoir un bénéfice unitaire maximal le nombre d'exemplaires à fabriquer et à vendre est donc 15 800.

63 **1. a.** $C_M(x) = 0{,}5x + 2 + \dfrac{200}{x}$.

b. $C'_M(x) = 0{,}5 - \dfrac{200}{x^2} = \dfrac{0{,}5x^2 - 200}{x^2} = \dfrac{0{,}5(x-20)(x+20)}{x^2}$.

c. Sur $[1 ; 50]$, $\dfrac{0{,}5(x+20)}{x^2} > 0$ donc $C'_M(x)$ est du signe de $x - 20$. Et $C'_M(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 20$. D'où :

x	1		20		50
$C'_M(x)$		−	0	+	
$C_M(x)$	202,5	↘	22	↗	31

d. Il faut donc produire 20 litres de produit chimique pour que le coût moyen soit minimal.

2. a. $C_m(10) = C(11) - C(10) = 12{,}5$.

b. $C'(x) = x + 2$ donc $C'(10) = 12$. $C'(10)$ et $C_m(10)$ sont proches.

c. D'après les économistes, résoudre l'équation $C_M(x) = C_m(x)$ revient à résoudre l'équation $C_M(x) = C'(x)$.

Sur $\mathbb{R}^*$, $C_M(x) = C'(x) \Leftrightarrow 0{,}5x + 2 + \dfrac{200}{x} = x + 2 \Leftrightarrow \dfrac{200}{x} = 0{,}5x \Leftrightarrow x^2 = 400 \Leftrightarrow x = 20$. On retrouve le résultat du **1.d.**

64 **1. a.** Voir fichier GeoGebra.

b. $m_{(OM)} = \dfrac{0{,}001x^3 - 0{,}09x^2 + 2x + 169}{x} = \dfrac{C_T(x)}{x} = C_M(x)$.

c. Pour que le coût moyen soit minimal, il semble que la quantité de pâtes de fruits à produire soit de 65 kg.

2. a. $C_M(x) = 0{,}001x^2 - 0{,}09x + 2 + \dfrac{169}{x}$.

b. $C'_M(x) = 0{,}002x - 0{,}09 - \dfrac{169}{x^2} = \dfrac{0{,}002x^3 - 0{,}09x^2 - 169}{x^2}$.

Or $\dfrac{(x-65)\left(0{,}002x^2 + 0{,}04x + 2{,}6\right)}{x^2} = \dfrac{0{,}002x^3 + 0{,}04x^2 + 2{,}6x - 0{,}13x^2 - 2{,}6x - 169}{x^2}$

$= \dfrac{0{,}002x^3 - 0{,}09x^2 - 169}{x^2} = C'_M(x)$.

c. Sur $]0 ; 100]$, $\dfrac{\left(0{,}002x^2 + 0{,}04x + 2{,}6\right)}{x^2} > 0$ donc $C'_M(x)$ est du signe de $x - 65$. Et $C'_M(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 65$.

D'où :

x	0		65		100
$C'_M(x)$	‖	−	0	+	
$C_M(x)$	‖	↘	2,975	↗	4,69

d. Pour obtenir un coût moyen minimal, il faut produire 65 kg de pâtes de fruits.

TP Des baskets en matières recyclées… et recyclables

1. $C_M(x) = \dfrac{x^3 - 90x^2 + 2\,700x + 8\,836}{x} = x^2 - 90x + 2\,700 + \dfrac{8\,836}{x}$.

2. a. $C'_M(x) = 2x - 90 - \dfrac{8\,836}{x^2} = \dfrac{2x^3 - 90x^2 - 8\,836}{x^2}$.

Or $\dfrac{(x-47)\left(2x^2+4x+188\right)}{x^2} = \dfrac{2x^3 + 4x^2 + 188x - 94x^2 - 188x - 8\,836}{x^2} = \dfrac{2x^3 - 90x^2 - 8\,836}{x^2} = C'_M(x)$.

b. Sur $[5 ; 100]$, $\dfrac{\left(2x^2+4x+188\right)}{x^2} > 0$ donc $C'_M(x)$ est du signe de $x - 47$. Et $C'_M(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 47$. D'où :

x	5		47		100
$C'_M(x)$		$-$	0	$+$	
$C_M(x)$	4 042,2	↘	867	↗	3 788,4

c. Pour que le coût moyen soit minimal, il faut donc produire 47 paires de baskets.

3. Graphiquement, on lit $x_0 \approx 45$.

En salle informatique

1. $B(x) = p(x) - C_M(x) = -9x + 2\,340 - (x^2 - 90x + 2\,700 + \dfrac{8\,836}{x}) = -x^2 + 81x - 360 - \dfrac{8\,836}{x}$.

2. Il y a 3 cas :

1^er^ cas :

x	a		x_0		c		d		b
$B(x)$	$B(a)$	↗	$B(x_0)$	↘	$B(c)$	↘	$B(d)$	↘	$B(b)$

2^e^ cas :

x	a		c		x_0		d		b
$B(x)$	$B(a)$	↗	$B(c)$	↗	$B(x_0)$	↘	$B(d)$	↘	$B(b)$

3^e^ cas :

x	a		c		d		x_0		b
$B(x)$	$B(a)$	↗	$B(c)$	↗	$B(d)$	↗	$B(x_0)$	↘	$B(b)$

Si $B(c) > B(d)$, alors on est certain de ne pas être dans le 3^e^ cas donc $x_0 \notin [d ; b]$ et on en déduit que $x_0 \in [a ; d[$.

Si $B(c) \leq B(d)$, alors on est certain de ne pas être dans le 1^er^ cas donc $x_0 \notin [a ; c]$ et on en déduit que $x_0 \in]c ; b]$.

3.

```
while b-a>1:
    h=(b-a)/3
    c=a+h
    d=b-h
    if Benefice(c)>Benefice(d):
        b=d
    else:
        a=c
print(a,b)
```

4. L'algorithme affiche :

```
>>>
42.70712082808816 43.43931875786775
>>>
```

On en déduit que $x_0 = 43$; il faut donc fabriquer 43 paires de baskets pour que le bénéfice réalisé sur une paire de baskets soit maximal.

Pour l'épreuve du Bac

69 Partie A

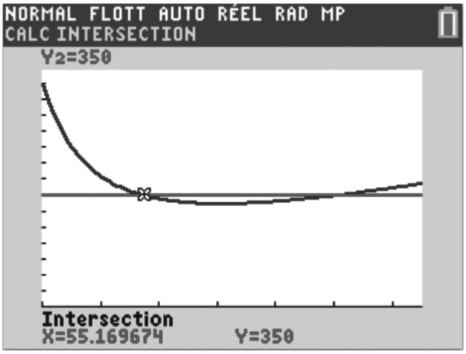
1. $f'(x) = 2 - \dfrac{13\,122}{x^2} = \dfrac{2x^2 - 13\,122}{x^2} = \dfrac{2(x-81)(x+81)}{x^2} = \dfrac{2}{x^2}(x-81)(x+81)$.

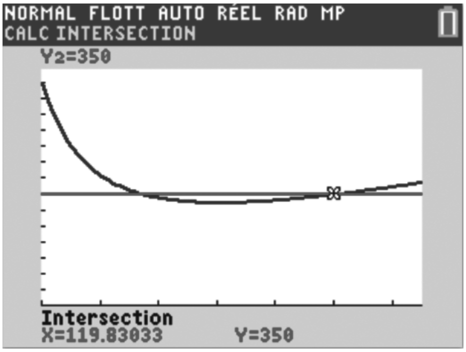
2. Sur I, $\dfrac{2}{x^2}(x+81)>0$ donc $f'(x)$ est du signe de $x-81$. Et $f'(x)\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 81$.

3.

x	20		81		150
$f'(x)$		–	0	+	
$f(x)$	696,1	↘	324	↗	387,48

4.





Graphiquement, on lit que les solutions de l'équation $f(x) = 350$ sont environ 55,2 et 119,8.

Partie B

1. a. $t=\dfrac{d}{v}$ donc $t=\dfrac{600}{v}$.

b. Le coût du carburant pour le trajet total est : $\left(5+\dfrac{v^2}{300}\right)\times\dfrac{600}{v}=\dfrac{3\,000}{v}+2v$.

c. Le coût total du transport est $\dfrac{3\,000}{v}+2v+16{,}87\times\dfrac{600}{v}=\dfrac{13\,122}{v}+2v=f(v)$.

2. a. Pour que le coût de transport soit minimal, le bus doit rouler à 81 km.h^{-1}. Le coût de transport minimal est 324 €.

b. Pour que le coût du transport ne dépasse pas 350 €, la vitesse moyenne du bus doit appartenir à l'intervalle [56 ; 90].

$\boxed{70}$ **1. a.** $B(x) = 100x - C(x) = -x^2 + 50x - 100$.

b. $B'(x) = -2x + 50$. Et $B'(x)\geq 0 \Leftrightarrow x\leq 25$.

c.

x	5		25		40
$B'(x)$		+	0	–	
$B(x)$	125	↗	525	↘	300

d. Pour que le bénéfice horaire soit maximal, il faut produire 25 appareils.

2. a. $f(x)=\dfrac{x^2+50x+100}{x}=x+50+\dfrac{100}{x}$.

b. $f'(x)=1-\dfrac{100}{x^2}=\dfrac{x^2-100}{x^2}=\dfrac{(x-10)(x+10)}{x^2}$.

c. Sur [5 ; 40], $\dfrac{(x+10)}{x^2}>0$ donc $f'(x)$ est du signe de $x-10$. Et $f'(x)\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 10$. D'où :

x	5		10		40
$f'(x)$		−	0	+	
$f(x)$	75	↘	70	↗	92,5

d. Pour que le coût unitaire soit minimal, il faut produire 10 appareils.

Ce coût unitaire minimal est de 70 €.

71 Partie A

1. $C_M(7) \approx 500$.

2. Graphiquement, on lit qu'il faut produire 5 km de tissu pour que le coût moyen soit minimal.

Partie B

1. $C_M(x) = \dfrac{15x^3 - 120x^2 + 500x + 750}{x} = 15x^2 - 120x + 500 + \dfrac{750}{x}$.

2. a. $C'_M(x) = 30x - 120 - \dfrac{750}{x^2} = \dfrac{30x^3 - 120x^2 - 750}{x^2}$.

Or $\dfrac{30(x-5)(x^2+x+5)}{x^2} = \dfrac{30(x^3 + x^2 + 5x - 5x^2 - 5x - 25)}{x^2} = \dfrac{30x^3 - 120x^2 - 750}{x^2} = C'_M(x)$.

b. Sur $[1 ; 10]$, $\dfrac{30(x^2+x+5)}{x^2} > 0$ donc $C'_M(x)$ est du signe de $x - 5$. Et $C'_M(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 5$. D'où :

x	1		5		10
$C'_M(x)$		−	0	+	
$C_M(x)$	1 145	↘	425	↗	875

c. Pour que le coût moyen soit minimal, il faut produire 5 km de tissu.

72 Partie A

1. $C(20) = 2\,300$.

2. $\dfrac{C(20)}{20} = 115$.

3. $f(x) = \dfrac{x^2 + 50x + 900}{x} = x + 50 + \dfrac{900}{x}$.

Partie B

1. $f'(x) = 1 - \dfrac{900}{x^2} = \dfrac{x^2 - 900}{x^2} = \dfrac{(x-30)(x+30)}{x^2}$.

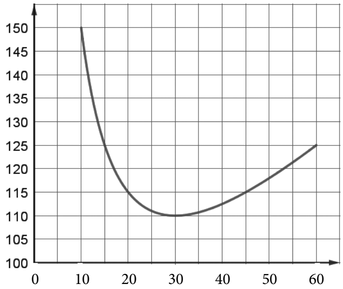
2. Sur $[10 ; 60]$, $\dfrac{(x+30)}{x^2} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $x - 30$. Et $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 30$. D'où :

x	10		30		60
$f'(x)$		−	0	+	
$f(x)$	150	↘	110	↗	125

3.

x	10	15	20	25	30	40	45	50	60
$f(x)$	150	125	115	111	110	112,5	115	118	125

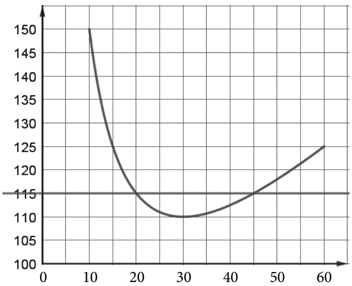
4.



Partie C

1. Pour que le coût unitaire soit minimal, l'artisan doit fabriquer 30 meubles.

2. a.



b. La courbe et la droite se coupent en A(20 ; 115) et B(45 ; 115).

c. L'entreprise réalise un bénéfice lorsque $x \in [21 ; 44]$.

3. $R(x) = 115x$.

4. $B(x) = R(x) - C(x) = 115x - (x^2 + 50x + 900) = -x^2 + 65x - 900$.

5. $B(20) = 0$; $B(45) = 0$ et $B(30) = 150$. Oui, les résultats sont cohérents avec les conclusions de la question 2. c.

Fonctions exponentielles de base *a*

CAPACITÉ

• Connaître et utiliser le sens de variation de la forme $x \mapsto ka^x$, selon le signe de k et les valeurs de a.
• Connaître les propriétés algébriques des fonctions exponentielles et les utiliser pour transformer des écritures numériques ou littérales.
• Calculer le taux d'évolution moyen équivalent à des évolutions successives.

Vérifier les acquis de Première

1. c **2.** b **3.** d **4.** c **5.** d

Activités

Activité 1 Baisse exponentielle de prix

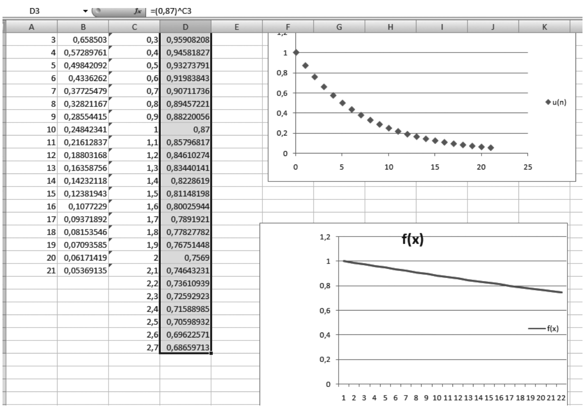
1. =(0,87)^A3

4. a. Prix au bout de 5 ans : 498,4 euros

au bout de 2,5 ans : 706 euros

au bout de 4 ans et 3 mois : 553 euros

b. Environ 5 ans


D3 =(0,87)^C3

A	B	C	D
3	0,658503	0,3	0,95908208
4	0,57289761	0,4	0,94581827
5	0,49842092	0,5	0,93273791
6	0,4336262	0,6	0,91983843
7	0,37725479	0,7	0,90711736
8	0,32821167	0,8	0,89457221
9	0,28554415	0,9	0,88220056
10	0,24842341	1	0,87
11	0,21612837	1,1	0,85796817
12	0,18803168	1,2	0,84610274
13	0,16358756	1,3	0,83440141
14	0,14232118	1,4	0,8228619
15	0,12381943	1,5	0,81148198
16	0,1077229	1,6	0,80025944
17	0,09371892	1,7	0,7891921
18	0,08153546	1,8	0,77827782
19	0,07093585	1,9	0,76751448
20	0,06171419	2	0,7569
21	0,05369135	2,1	0,74643231
		2,2	0,73610939
		2,3	0,72592923
		2,4	0,71588985
		2,5	0,70598932
		2,6	0,69622571
		2,7	0,68659713

Activité 2 Un placement intéressant ?

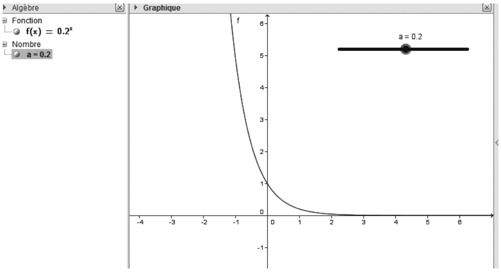
1. a. CM mensuel $= \left(1+\dfrac{t}{100}\right)$ CM annuel = 1,04 d'où l'équation $\left(1+\dfrac{t}{100}\right)^{12} = 1,04$

b. $t = 0{,}32\%$/mois

2. Taper $1000.(1{,}04)^{3{,}5}$

Activité 3 Un coquetier conceptuel

1. et **2.**



3. Pour $0 < a < 1$ f est décroissante et pour $a > 1$ f est croissante.

4. Si f est la fonction croissante $f(0) = 1$ et $f(1) = 2{,}6$ $a = 2{,}6$

Si g est la fonction décroissante $g(0) = 1$ et $g(1) = 0{,}4$ $a = 0{,}4$

Activité 4 Lever le pied, c'est écologique !

1. =0,6* 1,025^(A2)

2. $f(50) = 2{,}06$ $f(80) = 4{,}32$ $f(90) = 5{,}53$ $f(110) = 9{,}07$ $f(130) = 14{,}86$

B2 =0,6*(1,025)^A2

	A	B	C
1	Vitesse (km/h)	Consommation (l/100kms)	
2	10	0,768050727	
3	20	0,983169864	
4	30	1,258540547	
5	40	1,611038303	
6	50	2,062265232	
7	60	2,639873849	
8	70	3,379261713	
9	80	4,32574069	
10	90	5,537313799	
11	100	7,088229811	
12	110	9,073533426	
13	120	11,6148899	
14	130	14,86804104	
15	140	19,03234954	
16	150	24,36301649	
17	160	31,18672086	
18	170	39,92163935	
19	180	51,10307352	
20	190	65,41625457	
21	200	83,73833641	
22	210	107,1921502	
23	220	137,2150147	
24			

3. a. La consommation dépasse 10 L à partir de 120 km/h

b. La consommation baisse de 21,88 %.

c. À 90 km/h, 5,53×3 = 16,59 L pour 300 km et donc 24,88 €.

À 80 km/h 4,32×3 = 12,97 L pour 300 km et donc 19,45 €. On réalise une économie de 5,43 €.

Exercices

Pour acquérir les automatismes

2 $u_1 = 2{,}5$ $u_{20} = 2{,}5^{20}$

3 $C = 1000 \times (1{,}03)^{10} = 1343{,}91$

4 u_n est une suite géométrique de raison 1,5 et de premier terme $u_0 = 2$ donc u_{n} est une suite croissante.

5 $f(0) = 1 \quad f(-0{,}5) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \quad f(2{,}5) = 4\sqrt{2}$

6 $f(x) = -2\left(\dfrac{1}{3}\right)^x$

7 $f(0) = -3 \quad f(-1) = -0{,}75 \quad f(0{,}5) = -6$

8 $f(2) = 1{,}2^2 = 1{,}44 \quad f(3{,}5) = 1{,}2^{3{,}5} = 1{,}9$ et $t = \dfrac{1{,}9 - 1{,}44}{1{,}44} \times 100 = 31{,}94\%$

9 $x = -5{,}92$

10 $2^{7{,}5}$

11 $3^{-1{,}1}$

12 $0{,}1^{-1} - 0{,}1^2 = 10 - 0{,}01 = 9{,}99$

13 $\pi^{\frac{3}{2}}$

14 $\pi > 1$ donc f est croissante.

15 f est décroissante car $\dfrac{7}{8} < 1$

16 f est croissante car $0{,}25 < 1$ mais $-2 < 0$ et $f(0{,}5) = -1$

17 f est décroissante car $q > 1$ mais $-2{,}5 < 0$.

18 f la fonction décroissante $f(x) = 0{,}25^x$
g fonction croissante et $g(0) = 1 \quad g(x) = 4^x$
h fonction croissante et $h(1) = 1 \quad h(2) = 4$ donc $h(x) = 0{,}25\,.4^x$

19 $f(x) = 3.\left(\dfrac{2}{3}\right)^x$

20 $t = ((1{,}02)^{18} - 1) \times 100 = 42{,}82\ \%$

21 $t = ((0{,}8)^{(1/12)} - 1) \times 100 = -1{,}84\ \%$

22 $t = 0{,}26\ \%$

23 $2500.(1{,}01)^4.(0{,}9925)^8 < 2500$ donc une baisse
$t_{\text{moy}} = -0{,}17\%$

24 t est solution de l'équation $3{,}5 = 100\ ((0{,}95(1+t/100)^2)^{1/3} - 1)$ ce qui donne $t = 3{,}2\%$

25 $t_g = 1{,}05^4.0{,}96^5 = 0{,}991$ et $t_{\text{moy}} = 100(\ (0{,}991)^{1/9} - 1) = -\ 0{,}1\%$

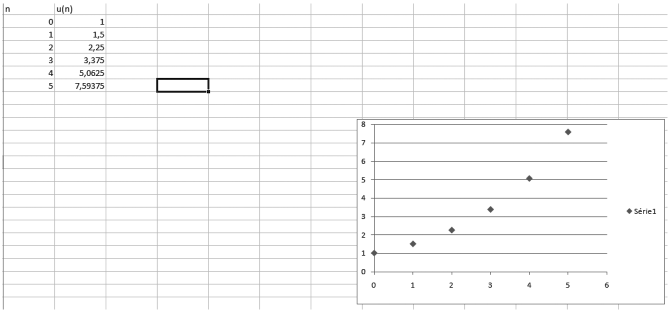
Pour commencer

26 Une suite géométrique de raison $q < 1$ et de premier terme 1 est décroissante et f est décroissante car $0{,}8 < 1$.

27 $u_1 = \frac{2}{3}$ $u_{10} = \left(\frac{2}{3}\right)^{10}$

28 u_n est une suite géométrique de raison $0{,}75 < 1$ et de premier terme 1 donc u_n est une suite décroissante.

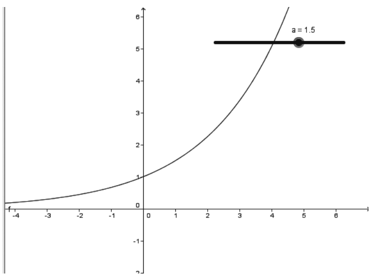
29



u_n est une suite croissante.

30 $u_0 = -2$ $u_1 = -3$ $u_2 = -4{,}5$ $u_3 = -6{,}75$ $u_4 = -10{,}125$

31 Sur GeoGebra



$f(x) = (1{,}5)$^x dans champ de saisie.

32 $f\left(\frac{2}{3}\right) = 0{,}63$

33 $f(1{,}5) = 2{,}27$ $f(\pi) = 5{,}61$

34 $f(0) = 1$ et $f(1) = 2{,}25$

35 $f(x) = k\,a^x$ et $f(0) = 1$ donc $k = 1$ et $a =$ base $= 0{,}1$ donc $f(x) = (0{,}1)^x$

36 $x = 5{,}514$

37 **1.** $u_0 = 2$ $v_0 = -3$ $q_u = 0{,}75$ et $q_v = 5/6$
2. $u_1 = 1{,}5$ $v_1 = -2{,}5$ $u_4 = 0{,}6328$ $v_4 = -1{,}446$

38 $f(-1{,}5) = 2.(0{,}75)^{-1{,}5} = \frac{16\sqrt{3}}{9}$ $f(2{,}5) = \frac{9\sqrt{3}}{16}$
$g(-1{,}5) = -3(1{,}2)^{1{,}5} = -3{,}94$ $g(2{,}5) = -3(1{,}2)^{-2{,}5} = -1{,}9$

39 **1. Vrai** **2. Vrai** car f est décroissante **3. Faux**. $(0{,}01)^x = 1$ a une unique solution $x = 0$.

40 $a > 0$ donc f est strictement négative et donc sa courbe est en-dessous de l'axe des abscisses

41 **1.** =B2*(0,95)^A2

2. =D2*(0,95)^C2

3. Anté (2) = 55,8 anté(4,5) = 40

42 **1.** resol(3) résout l'inéquation $1{,}5^x > 3$ S = [2,7 ; +∞ [et résol(−1) n'a pas de solution.

2. While ((2*(0,8)^x!=k) $x = 6{,}21$

43 **1.c** **2.c** **3.b**

44 $\dfrac{2^{2,5-1,5}}{2^{3,5\times1,5}} = \dfrac{2^1}{2^{5,25}} = 2^{-4,25}$

45 $0{,}89^{-0,7}$

46 $3{,}5^{2,2}$

47 $\dfrac{4{,}1^{2,5-5,2}}{4{,}1^{-4,8+2,7}} = \dfrac{4{,}1^{-2,7}}{4{,}1^{-2,1}} = 4{,}1^{-0,6}$

48 $5{,}5^{-0,7}$

49 $3{,}645 \,.\, 10^{-4}$

50 $\pi^{-0,2}$

51 $2{,}25^{-1,5}$

52 $A = 5^{-8}$ $B = 2{,}7^{-7}$ $C = 4{,}5^{-0,1}$

53 $f(1).f(-2{,}5).f(3) = 2{,}1.2{,}1^{-2,5}.2{,}1^3 = 2{,}1^{1-2,5+3} = 2{,}1^{1,5}$

54 $0{,}5^{2x+1} - 0{,}5$

55 L'expression devient $a^{2+0,5x+-2+0,5x} = a^x$

56 a^6

57 **1. b** **2. c** **3. b**

58 **1. Faux** **2. Faux** **3. Faux**

59 $a > 1$ donc f strictement croissante.

60 **a.** $a = 2{,}21 > 1$ donc f croissante sur $\mathbb{R}$ **b.** $a = 0{,}94 < 1$ donc f décroissante sur $\mathbb{R}$.

61 **a.** $a = 1/0{,}99 > 1$ donc g strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

b. $a = 1/1{,}001 < 1$ donc g strictement décroissante.

62 **a.** f croissante sur $\mathbb{R}$ car $a > 1$ **b.** f décroissante sur $\mathbb{R}$ $a < 1$.

63 **a.** h est croissante **b.** h décroissante sur $\mathbb{R}$.

64 **a.** $a = 1/0{,}25 > 1$ et $k > 0$ donc h est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

b. $a = 1/0{,}87 > 1$ donc h strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

65 $f(0) = -3$ et f décroissante donc la solution est $f_3(x)$

66 f est la fonction croissante et g la fonction décroissante.

67 $f(-1) = 4$

68 f est décroissante car $k < 0$ et $a > 1$.

69 $k = -2$ et $a = 0{,}5$ donc $f(x) = -2(0{,}5)^x$

70 $a = \dfrac{1}{2{,}8} < 1$ $k = 1$ donc f est décroissante mais positive strictement donc 0 n'a pas d'antécédents par f.

71 $f(-1) = 5$ et $f(0) = 1{,}5$

$f(-1) = \dfrac{k}{a} = 5$ et $f(0) = k = 1{,}5$ donc $a = \dfrac{k}{5} = 0{,}3$ donc $f(x) = 1{,}5\ (0{,}3)^x$ d'où $f(1) = 0{,}45$ et $f(3{,}5) = 0{,}0221$

72 $f(1) = k = 2$ et $f(2) = ka = 3$ donc $a = 1{,}5$ donc $f(x) = 2\ (1{,}5)^x$

73 **1.a** **2.b** **3.a**

74 **1. Faux** f croissante

2. Vrai

3. Vrai

75 **1.** $CM = (1{,}03)^5 = 1{,}159$

2. $Tmoyen = 100.((1\ ,159)^{1/5} - 1) = 3\%$

76 $CM = 1{,}005^{20} = 1{,}1$

77 $(0{,}98)^3 = 0{,}94$

78 $1{,}01 \times 0{,}98 = 0{,}989$

79 $0{,}97^2 \times 0{,}98 = 0{,}922$

80 Le coefficient multiplicateur global est $1{,}03^2 \times 0{,}99^2 = 1{,}039\ 788$

$t = 100((1{,}039\ 788)^{1/4} - 1)$

$t = 0{,}98\%$

81 $tmoy = 0{,}468\%$

82 **1. Faux** (baisse de 2,8%) **2. Vrai** **3. Faux** si $CM < 1$

83 **1.c** **2.b**

84 $(1+x) = 5{,}5^{1/5}$ donc $x = 5{,}5^{0,2} - 1$

85 **1.** $C = CMg$ $Q = CM$moyen T = Taux d'évolution moyen

2. $T = 8{,}45\%$

Pour s'entraîner

86 **1.** $P_{n+1} = 1{,}03P_n$ et $P_0 = 2$

2. Non car n est entier.

3. 1er février 2020 : 2937 15 mars 2021 = 4377 5 janvier 2024 = 11 842

27,43 mois soit en mars 2021.

87 **1.** f et g semblent être des fonctions exponentielles de base $a > 0$

2. $f(0) = g(0) = 1$ $f(1) = 0{,}8$ $g(-1) = 0{,}6$ donc $f(x) = 0{,}8^x$ et $g(x) = \left(\frac{5}{3}\right)^x$

3. $g(-3) = 0{,}216$ différent de 0,2 donc A n'est pas un point de Cg.

4. Il faut résoudre $0{,}8^x = 3$ à la calculatrice $x = -4{,}92$

88 2 ans 3 mois et 4 jours = 2,2657 ans

1. $992.(1{,}0075)^{2{,}2657} = 1008{,}93$ euros

2. Il faut résoudre $x.(1{,}0075)^{10{,}309} = 992$ d'où $x = 918{,}45$ euros

3. Il faut attendre 93,84 ans soit 34 251 jours.

89 **1.** Un point.

2. Il faut résoudre $1{,}5^x = 1{,}25^x$ soit $\left(\frac{1{,}5}{1{,}25}\right)^x = 1$ ou $1{,}2^x = 1$ soit $x = 0$ donc un point d'intersection.

90 **1.** f est croissante ($a = 1{,}05 > 1$) et g décroissante ($a = 1/1{,}05 < 1$) sur [10 ; 30].

2. Le prix d'équilibre est solution de l'équation $f(x) = g(x)$ soit $1{,}05^x = 7(1{,}05)^{-x}$

ou $(\,(1{,}05)^2)^x = 7$ soit $(1{,}1025)^x = 7$

3. À la calculatrice $x = 19{,}94$ euros

91 **1.** $f > 0$ et f croissante.

2. f est continue et strictement croissante sur [–1 ;5], $f(-1) < 10$ et $f(5) > 10$ donc l'équation $f(x) = 10$ admet une solution unique sur[–1 ; 5].

3. $x = 6{,}06$

92 **1.** $f(2) = 25\,000(1{,}1)^2 = 30\,250$ et $f(4{,}5) = 38\,389$

2. Sur [0 ; 8] , f est croissante car $25\,000 > 0$ et $1{,}1 > 1$.

3. Il faut résoudre $f(x) = 50\,000$ soit $(1{,}1)^x = 2$ et $x = 7{,}27$ h soit 7 h 16 min

93 **1.** $f(0) = -0{,}01$ $f(1) = -0{,}003$ $f(-2) = -0{,}11$

2. $f(x) = (0{,}3)^x(0{,}3^2 + 3\times 0{,}3 - 1) = (0{,}3)^x(-0{,}01)$

3. On peut en déduire que f est négative car $-0{,}01 < 0$ et f croissante car $0{,}3 < 1$.

94 **1. Faux** **2. Vrai** **3. Faux** **4. Vrai**

95 **1.a** **2.c** **3.b**

96 **1.** f est croissante car $2{,}5 > 1$.

2. f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution a appartenant à l'intervalle $[1 ; 2{,}5^{10}]$

3. a. *resol*(20) renvoie 3,4375. Le programme cherche à résoudre l'équation $2{,}5^m = 20$.

b.

a	0	0	2,5	2,5	3,125
b	10	5	5	3,75	3,75
$b - a > 1$	v	v	v	v	f
m	5	2,5	3,75	3,125	3,4375
$2{,}5^m < 20$	f	v	f	v	f

97 **a.** $t = 1{,}8$ %

b. $t = 5{,}525$ %

c. $t = 11{,}355$ %

d. $t = 0{,}0589$ %

98 $t = -0{,}043\%$

99 **1.** −42,26% **2.** 0,000 16 % en 2030.

100 **1.** Population en 2020 : 14,03 millions

2. $t = 1{,}22$ %

101 **1.** $f(0) = 21\,345(1{,}2)^0 = 21\,345$ la cote de la voiture le 1er avril 2015.

2. $f(1) = 21\,345(1{,}2)^{-1} = 17\,787{,}5$ la cote de la voiture le 1er avril 2016

$$\text{taux} = \frac{17\,787{,}7 - 21\,345}{21\,345} \times 100 = -16{,}66\%$$

3. a. $21\,345.(1{,}2)^{-4{,}5} = 9396{,}81$ euros

b. $CM\text{moyen} = \dfrac{9396{,}81}{21345} = 0{,}44$

$t = 100((0{,}44)^{1/54} - 1) = -1{,}5\%$

102 **1.** 1,1028 entre 2010 et 2017 et 1,055 entre 2017 et 2018.

2. $t = 1{,}91\%$

103 **1.** $t = 100((0{,}7)^{1/5} - 1) = -6{,}89$ %

2. $0{,}95.0{,}98.0{,}97.\text{CM}^2 = 0{,}7^5$ $t = -26{,}71\%$

104 **1.** $300 \times 1{,}0078^3 = 307{,}07$ euros

2. $300 \times (1{,}0078)^{36} = 396{,}82$ euros

3. À la calculatrice $n = 89{,}21$ ans !!!

105 **1.** $2\times(0{,}3)^3 = 0{,}054$ $2\times(0{,}3)^{24} = 5{,}65 \times 10^{-13}$

2. $f(x) = 2\,(0{,}3)^x$

3. Environ 5 h.

106 **1.** 11 027 ; 8 188 au bout de 4 ans et demi

2. $n = 12$

3. 10 846,5 euros

Pour faire le point

107 **vrai**

108 **vrai**

109 **vrai**

110 **vrai**

111 **vrai**

112 **vrai**

113 **vrai**

114 **faux**

115 **faux**

116 **vrai**

117 réponse **b.**

118 Réponse **a.**

119 Réponse **b.**

120 Réponse **b.**

121 Réponse **c.**

122 Réponse **c.**

123 Réponse **b.**

Pour approfondir

124 **1.** f est décroissante.
2. 129,93
3. 10,75 min

125 **1.** f est décroissante.
2. 6013 ans
3. 60 675 ans

126 **1.** $f(0) = 15{,}4$ km $f(1) = 15{,}398$ km
2. 438 ans

127 **1.** $R = 0$

2. $1-(0{,}87)^t < 1$ donc $R(t) < 28$

3. 4,97 jours

128 **1.** $f(12) = 93{,}03$ en janvier 2015 $f(41) = 78{,}13$

2. $t$moy = −5,59%

129 **1.** $f(19) = 3841$

2. 71 746

3. Hausse de 0,05%

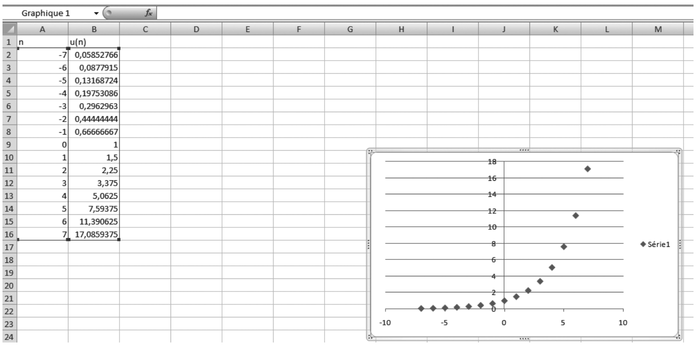
4. Au bout de 14 mois soit en juillet 2016.

TP Créer un algorithme de construction des points de $f(x) = a^x$

1. $u_n = 1{,}5^n$

2. $u_0 = 1$ $u_1 = 1{,}5$ $u_2 = 2{,}25$ $u_3 = 3{,}375$ $u_4 = 5{,}0625$ $u_5 = 7{,}5937$ $u_6 = 11{,}39$ $u_7 = 17{,}085$ $u_8 = 25{,}628$ $u_9 = 38{,}443$ $u_{10} = 57{,}665$

3.

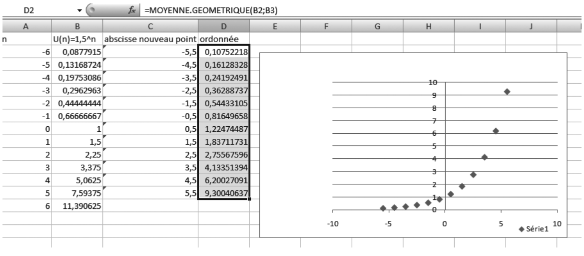


n	u(n)
-7	0,05852766
-6	0,0877915
-5	0,13168724
-4	0,19753086
-3	0,2962963
-2	0,44444444
-1	0,66666667
0	1
1	1,5
2	2,25
3	3,375
4	5,0625
5	7,59375
6	11,390625
7	17,0859375

4. a. L'ordonnée de A est $1{,}5^{n-1}$ et celle de C est $1{,}5^{n+1}$

b. La moyenne arithmétique est : $(n - 1 + n + 1)/2 = n$

c. $\sqrt{y_A \times y_C} = 1{,}5^n = y_B$



=MOYENNE.GEOMETRIQUE(B2;B3)

n	U(n)=1,5^n	abscisse nouveau point	ordonnée
-6	0,0877915	-5,5	0,10752218
-5	0,13168724	-4,5	0,16128328
-4	0,19753086	-3,5	0,24192491
-3	0,2962963	-2,5	0,36288737
-2	0,44444444	-1,5	0,54433105
-1	0,66666667	-0,5	0,81649658
0	1	0,5	1,22474487
1	1,5	1,5	1,83711731
2	2,25	2,5	2,75567596
3	3,375	3,5	4,13351394
4	5,0625	4,5	6,20027091
5	7,59375	5,5	9,30040637
6	11,390625		

Pour l'épreuve du Bac

137 **1.** $f(1) = 0{,}375$ $f(5) = 1{,}8984$

2. $f(8) = 6{,}4$ Si 8000 internautes sont connectés, la durée de chargement d'une vidéo est de 6,4 s.

3. $a = 1{,}5 > 1$ et $0{,}25 > 0$ donc f croissante.

4. A partir de 6128 internautes.

5. Il faut remplacer k par 3.

138 **1. a.** La raison correspond à $q = 1 - 7/100 = 0{,}93$ et $u_0 = 20$ et $u_{n+1} = 0{,}93\ u_n$

$u_n = 20(0{,}93)^n$

b. $u_4 = 20(0{,}93)^4 = 14{,}961$ soit 14 961 habitants.

c. $n = 4$ ans

2. a. $f(x)$=$20(0{,}93)^x$

b. $x = 9{,}55$ soit au bout de 9 ans et 200 jours soit 14 juin 2024.

139 **1.** $t$moy = 30,41%

2. a. $t$moy= 25,9%

b. 1540 millions

3. 27,52% et le nombre d'internautes est de 4073 millions.

140 **1.** $f(0) = 35$ et $f(50) = 35(0{,}948)^{50} = 2{,}423$

En 1950 il y avait 35 millions d'animaux et en 2000 2,42 millions

2. –5,2% = $t$moy

3. Cette espèce est menacée car f est décroissante mais toujours positive donc jamais nulle.

4. $T > 23{,}45$ ans

5. While (35*(0,948)^x>k) :

141 **1.** $3{,}3(1{,}44)^1 = 4{,}752$ milliards de SMS

2. $\dfrac{s(t+1)}{s(t)} = 1{,}44$ soit 44%

3. a. faux **b. faux** **c. faux**

142 Partie A

1. $C_1 = 85\times(0{,}75) = 63{,}75$ $C_2 = 47{,}812$. Ce sont les concentrations éliminées au bout de 1 et 2 heures.

2. $C_{n+1} = 0{,}75\ C_n$ donc C_n est une suite géométrique de raison 0,75 et de premier terme $C_0 = 85$

3. =B$_2$*(0,75)^A$_2$

4. $C_n = 85(0{,}75)^n$ et donc $C_{14} = 1{,}51$

Partie B

1. a. $g(4{,}5) = 25$ **b.** t =2 h

2. $t_0 > 5{,}6$ heures soit 5 h 36 min.

Chapitre 4

Fonction logarithme décimal

CAPACITÉS

- Utiliser le logarithme décimal pour résoudre une équation du type $a^x = b$ ou $x^a = b$ d'inconnue x réelle, une inéquation du type $a^x < b$ ou $x^a < b$ d'inconnue x réelle ou du type $a^n < b$ d'inconnue n entier naturel.
- Utiliser les propriétés algébriques de la fonction logarithme décimal pour transformer des expressions numériques ou littérales.

Vérifier les acquis de Seconde et de Première

1. a **2. b** **3. b** **4. a** **5. c** **6. a** **7. b**

Activités

Activité 1 Une nouvelle fonction

1. a. $a_1 = 10$; $a_2 = 100$. La suite (a_n) est une suite géométrique.

b. $a_n = 10^n$.

2.

x	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	1	10	100	1000	10 000	100 000

3. $\log(1) = 0$; $\log(10) = 1$.

4. a.

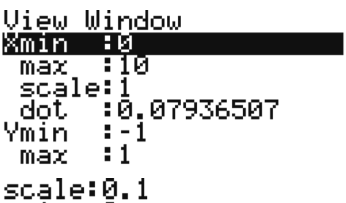
y	10 000	20 000	30 000	40 000	50 000	55 000	60 000
$\log(y)$	4	4,30	4,48	4,60	4,70	4,74	4,78

b. On cherche une valeur de x telle que $10^x = 50\,000$; d'après le tableau, $x \approx 4{,}7$ h soit 4 h et 42 min.

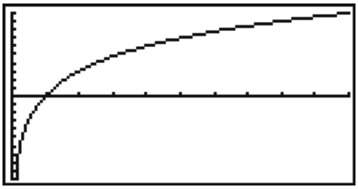
Ce résultat est une valeur approchée de la solution de l'équation $10^x = 50\,000$ (on admet que cette solution est unique).

Activité 2 Une fonction croissante

1. Avec la fenêtre graphique :



On obtient l'écran suivant :



2. La fonction logarithme décimal semble croissante sur l'intervalle $]0 ; 10]$.

3. a. $\log(3{,}5) > \log(3{,}05)$; $\log(\sqrt{2}) > \log(1{,}4)$; $\log(3) < \log(\pi)$.

b. Si $x > 1$, alors $\log(x) > \log(1)$ d'où $\log(x) > 0$.

Si $x < 1$, alors $\log(x) < \log(1)$ d'où $\log(x) < 0$.

c.

x	0		1		$+\infty$
Signe de $\log(x)$	||	$-$	0	$+$	

Activité 3 Où l'image d'un produit est la somme des images

Partie A

1. $\log(10^x \times 10^y) = \log(10^{x+y}) = x + y$.

2. $\log(a^2) = 2\log(a)$.

3. $\log\left(b \times \frac{1}{b}\right) = \log(b) + \log\left(\frac{1}{b}\right)$; comme $\log\left(b \times \frac{1}{b}\right) = \log(1) = 0$, on en déduit que $\log(b) + \log\left(\frac{1}{b}\right) = 0$ d'où $\log\left(\frac{1}{b}\right) = -\log(b)$.

Partie B

1. $N' = 10 \log\left(\frac{2I}{10^{-12}}\right) = 10\left(\log(2) + \log\left(\frac{I}{10^{-12}}\right)\right) = 10\log(2) + \log(N)$; $10\log(2) \approx 3{,}01$ à 0,01 près.

2. $N' = 10\log(2) + 90 \approx 93$ dB.

Activité 4 Utilisation du logarithme décimal dans l'écriture des nombres

1. a. Si $10^1 \leq N < 10^2$, alors $1 \leq \log(N) < 2$ (la fonction log est croissante sur $]0 ; +\infty[$).

b. On a nécessairement $10^2 \leq N < 10^3$ d'où $2 \leq \log(N) < 3$.

c. On a : $10^{p-1} \leq N < 10^p$ d'où $p-1 \leq \log(N) < p$.

2. Pour 99^{99}, en notant p son nombre de chiffres dans son écriture décimale, on a :

$p = \text{ENT}(\log(99^{99})) + 1 = \text{ENT}(99\log(99)) + 1$; $p = 198$. Le nombre 99^{99} comporte donc 198 chiffres.

De même, le nombre de chiffres p du nombre 2^{2021} est égal à $\text{ENT}(\log(2^{2021})) + 1 = \text{ENT}(2021\log(2)) + 1$.

$\text{ENT}(2021\log(2)) + 1 = 609$.

L'écriture décimale de 2^{2021} comporte 609 chiffres.

EXERCICES

Pour acquérir les automatismes

2 **a.** $\log(100) = 2$; **b.** $\log(1000) = 3$; **c.** $\log(10\,000) = 4$; **d.** $\log(1\,000\,000) = 6$.

3 **a.** $\log(0{,}1) = -1$; **b.** $\log(0{,}001) = -3$; **c.** $\log(0{,}000\,1) = -4$; **d.** $\log(0{,}000\,000\,1) = -7$

4 **a.** $\log(10^2 \times 10^{-1}) = 1$; **b.** $\log(10^6 \times 10^{-4}) = 2$; **c.** $\log(10^{-5} \times 10^{-2}) = -7$; **d.** $\log(0{,}1 \times 0{,}001) = -4$.

5 **a.** $\log(0{,}003) < \log(0{,}03)$; **b.** $\log(3\times10^{-1}) > \log(30\times10^{-3})$; **c.** $\log\left(\frac{5}{7}\right) > \log\left(\frac{5}{11}\right)$; **d.** $\log(2) > \log\left(\frac{2}{3}\right)$.

6 **a.** $\log(0{,}2) > \log(0{,}004)$; **b.** $\log(0{,}25) > \log(0{,}205)$; **c.** $\log(0{,}003\,9) < \log(0{,}039)$.

7 **a.** $\log(0{,}015) < 0$; **b.** $\log(1{,}001) > 0$; **c.** $\log(0{,}999\,9) < 0$; **d.** $\log(100 \times 10^{-3}) < 0$.

8 **a.** $-2 < \log(0{,}02) < -1$; **b.** $-1 < \log(0{,}25) < 0$; **c.** $0 < \log(7{,}5) < 1$; **d.** $3 < \log(2021) < 4$.

9 **a.** $\log(200) = 2 + \log(2)$; **b.** $\log(400) = 2 + 2\log(2)$; **c.** $\log(80) = 3\log(2) + 1$; **d.** $\log(32) = 5\log(2)$.

10 **a.** $\log(0{,}2) = -1 + \log(2)$; **b.** $\log(0{,}004) = -3 + 2\log(2)$; **c.** $\log(0{,}08) = -2 + 3\log(2)$;
d. $\log(0{,}032) = -3 + 5\log(2)$.

11 **a.** $\log(25) = 2\log(5)$; **b.** $\log(125) = 3\log(5)$; **c.** $\log(50) = 2\log(5) + \log(2)$; **d.** $\log(25\,000) = 3 + 2\log(5)$.

12 **a.** $\log(0{,}5) = -1+ \log(5)$; **b.** $\log(0{,}002\,5) = -4 + 2\log(5)$; **c.** $\log(0{,}625) = -3 + 4\log(5)$;
d. $\log(0{,}005) = -3 + \log(5)$

13 **a.** $\log(6) = \log(2) + \log(3)$; **b.** $\log(24) = 3\log(2) + \log(3)$; **c.** $\log(18) = \log(2) + 2\log(3)$;
d. $\log(1200) = 2 + 2\log(2) + \log(3)$.

14 **a.** $\log(500) = 2 + \log(5)$; **b.** $\log(0{,}05) = -2 + \log(5)$; **c.** $\log(50\,000) = 4 + \log(5)$; **d.** $\log(0{,}25) = -2 + 2\log(5)$.

15 **a.** $\log(9) = 2\log(3)$; **b.** $\log(27) = 3\log(3)$; **c.** $\log(0{,}3) = -1 + \log(3)$; **d.** $\log(30) = 1 + \log(3)$.

16 **a.** $\log(50)$; **b.** $\log(9)$; **c.** $\log(0{,}5)$; **d.** $\log(25)$.

17 **a.** $\log(20)$; **b.** $\log(4)$; **c.** $\log(20)$.

18 réponse **a.**

19 réponse **a.**

20 **a.** $x = 0$; **b.** $x = -3$; **c.** $x = 7$; **d.** $x = 2 - \dfrac{2}{\log(5)}$;

21 **a.** $x = -4 - \log(3)$; **b.** $x = 1$; **c.** $x = \dfrac{\log(3)}{\log(5)}$; **d.** $x = 1 + \dfrac{\log(3)}{\log(2)}$.

22 **a.** $x < 5$; **b.** $x < \dfrac{1}{\log(0{,}3)}$; **c.** $x \leq 3$; **d.** $x \leq \dfrac{\log(5)}{\log(0{,}8)}$.

23 **a.** $x < 2$; **b.** $x \geq \dfrac{-2\log(5)}{\log(2)}$; **c.** $x > \dfrac{\log(5)}{\log(1{,}2)}$; **d.** $x \leq \dfrac{\log(2)}{\log(0{,}8)}$.

Pour commencer

24 **1.** $\log(10^n) = n$; **2.** $\log(0{,}000\,1) > \log(10^{-6})$.

25 **a.** $\log(0{,}1) = -1$; **b.** $\log(100) = 2$; **c.** $\log(0{,}000\,000\,001) = -9$; **d.** $\log(1\,000\,000\,000) = 9$.

26 **a.** $\log(10^6) = 6$; **b.** $\log(10^{121}) = 121$; **c.** $\log(10^{-12}) = -12$; **d.** $\log(10) = 1$.

27 **a.** $\log(100\,000) = 5$; **b.** $\log(10\,000\,000) = 7$; **c.** $\log(10^{21}) = 21$; **d.** $\log(10^{2021)} = 2021$.

28 **a.** $\log(0{,}000\,1) = -4$; **b.** $\log(0{,}000\,01) = -5$; **c.** $\log(0{,}000\,000\,01) = -8$; **d.** $\log(10^{-9}) = -9$.

29

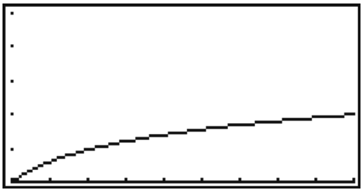
x	2	3	4	5	6
$\log(x)$	0,3	0,5	0,6	0,7	0,8

30 $\log(0{,}001) < \log(0{,}01) < \log(1{,}001) < \log(1{,}1)$.

31 $\log(0{,}003\,9) < \log(0{,}004) < \log(0{,}039) < \log(0{,}199) < \log(0{,}2) < \log(0{,}205) < \log(0{,}25)$.

32 $\log(2\times10^{-5}) < \log(204\times10^{-5}) < \log(2{,}4\times10^{-3}) < \log(0{,}24\times10^{-1}) < \log(25\times10^{-2})$

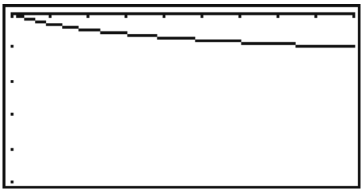
33 **1.**



2. La fonction f semble croissante sur $]0 ; +\infty[$.

3. $f(x) = 2\log(x)$; or, la fonction logarithme décimal est croissante sur $]0 ; +\infty[$. f est également croissante sur $]0 ; +\infty[$.

34 **1.** **Erratum fenêtre graphique : $y$min = –5 ; $y$max= 0 ; scale =1.**



2. La fonction f semble décroissante sur $]0 ; +\infty[$.

3. $f(x) = -\log(x)$; or, la fonction logarithme décimal est croissante sur $]0 ; +\infty[$. f est donc décroissante sur $]0 ; +\infty[$.

35 $f(0{,}5) = \log(2{,}5)$ et $g(0{,}5) = \log(1) = 0$. La courbe de couleur rose représente la fonction g.

36 **1.** $f(1) = \log(2)$ et $g(1) = 0$. La courbe de couleur orange représente la fonction g.

2. $f(5) \approx 1{,}4$ et $g(6) \approx 1{,}6$.

3. $x = 2$.

37 **1.** $\log(a\times b) = \log(a) + \log(b)$; **2.** $\log\left(\frac{1}{a}\right) = -\log(a)$.

38 **a.** $\log(1000) = 3$; **b.** $\log(100\times10^{-8}) = -6$; **c.** $\log(10^{-9}\times10^{7}) = -2$; **d.** $\log(0{,}000\ 1) = -4$.

39 **a.** $\log(0{,}5) = \log(5) + (-1) \approx -0{,}3$.
b. $\log(0{,}05) = \log(5) + \log(10^{-2}) \approx -1{,}3$.
c. $\log(25) = 2\log(5) \approx 1{,}4$.
d. $\log(500) = \log(5) + 2 \approx 2{,}7$.

40 **a.** $\log(0{,}2) \approx -0{,}7$; **b.** $\log(2\ 000) \approx 3{,}3$; **c.** $\log(8) \approx 0{,}9$; **d.** $\log(20) \approx 1{,}3$.

41 **a.** $\log(a^3) = 3 \times \log(a)$; **b.** $\log(a^5) - \log(a^2) = 3\log(a)$; **c.** $\log(a^{-3}) + \log(a^2) = -\log(a)$;
d. $\log(10a^5) = 1 + 5\log(a)$.

42 **a.** $-\log(a)$; **b.** $-2\log(a)$; **c.** $3\log(a)$; **d.** $1-\log(a)$.

43 **a.** $\log(20) = 2\log(2) + \log(5)$; **b.** $\log(40) = 3\log(2) + \log(5)$; **c.** $\log(200) = 3\log(2) + 2\log(5)$;
d. $\log(250) = \log(2) + 3\log(5)$.

44 **1. Faux** ; **2. Faux** ; **3. Vrai**.

45 **1.** $x = \log(3)$; **2.** $x = \dfrac{\log(2)}{\log(3)}$; **3.** Non, car $3^2 > 4$.

46 **1. d.** **2. b** **3. b.**

47 **a.** $x = \dfrac{1}{\log(5)}$; **b.** Il n'y a pas de solution réelle car pour tout x réel, $2^x > 0$.

48 **a.** $3^x = 0$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$ car, pour tout x réel, $3^x > 0$. **b.** $x = \dfrac{1}{\log(3)}$

49 **a.** $x = 10^{-1}$ **b.** $x = 1000$.

50 **a.** $x = 10^{0{,}5}$; **b.** $x = 10^{-1}$.

51 **a.** $x \leq \dfrac{1}{\log(5)}$; **b.** $x > \dfrac{1}{\log(2)}$.

52 **a.** $x \leq 2$; **b.** $x \geq \dfrac{\log(5)}{\log(3)}$.

53 **a.** $x < 10$; **b.** $x > 10^2$.

54 **1. Vrai** car $\log(100) + 1 = 2 + 1 = 3$; **2. Vrai** car $2\log(0{,}1) - 1 = 2 \times (-1) - 1 = -3$;
3. Faux car $3\log(10) + 1 = 3 \times 1 + 1 = 4$; **4. Vrai** car $\log(10^2) + \log(10) = 2 + 1 = 3$.

Pour s'entraîner

55

x	0,1	**1**	**100**	0,001	$\mathbf{10^{-5}}$
$\log(x)$	**–1**	0	2	**–3**	–5

56

x	0,01	**10**	**0,01**	0,000 1	**0,1**
$\log(x)$	**–2**	1	–2	**–4**	–1

57

x	1	5	25	125	625
$\log(x)$	**0**	**0,7**	**1,4**	**2,1**	**2,8**

58 **a.** $-4 < \log(0{,}000\,2) < -3$; **b.** $5 < \log(201\,000) < 6$; **c.** $3 < \log(2500) < 4$; **d.** $-2 < \log(0{,}05) < -1$

59

x	1	2	5	10	20
$\log(x)$	**0**	**0,3**	**0,7**	**1**	**1,3**

$\log(20) = \log(10\times2) = 1 + \log(2) \approx 1{,}3$; $\log(5) = \log(10 \div 2) = \log(10) - \log(2) \approx 0{,}7$.

60 **a.** $0,00147 = 147 \times 10^{-5} = 3\times7^2\times10^{-5}$. D'où $\log(0,00147) = \log(3) + 2\log(7) - 5$.

b. $11\,907 = 81\times 147 = 3^5 \times 7^2$. D'où $\log(11\,907) = 5\log(3) + 2\log(7)$.

c. 2700×490 . On a donc : $\log(2700 \times 490) = 3\log(3) + 2\log(7) + 3$.

61 **1.** $M = 0$ donc $k = 2{,}5\log(E_0)$.

2. $M = -2{,}5\log(E) + 2{,}5\log(E_0) = -2{,}5(\log(E) - \log(E_0)) = -2{,}5\log\left(\dfrac{E}{E_0}\right)$.

3. a. Si l'étoile est perçue comme plus brillante que l'étoile Véga, son éclat est donc plus grand que celui de Véga.
On a donc $E > E_0$. $\dfrac{E}{E_0} > 1$ donc $\log\left(\dfrac{E}{E_0}\right) > 0$, d'où $M < 0$. La magnitude apparente est donc négative.

b. La magnitude de l'étoile Véga est nulle donc la magnitude de l'étoile observée est inférieure à celle de Véga.

4. Magnitude de Vénus : $-4{,}6$ à 0,1 près.

Magnitude de Mars : $-2{,}3$ à 0,1 près.

Magnitude de Neptune : 7,9 à 0,1 près.

5. Éclat du soleil : environ $10^{10{,}72} \times E_0$.

Éclat de la pleine lune : environ $10^{5{,}04} \times E_0$.

Éclat d'Uranus : environ $10^{-2{,}28} \times E_0$.

62 **a.** $x = \dfrac{\log(5)}{\log(2)}$; **b.** $x = \dfrac{1}{\log(3)}$; **c.** $x = 1$

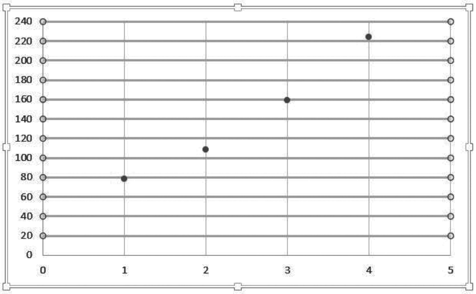
63 **a.** $x = 50$; **b.** $x = 999$.

64 **a.** $x = 4{,}5$; **b.** $x = 1$.

65 **a.** $x > 0$; **b.** $x \leq 0$.

66 **a.** $x > 5$: **b.** $-\dfrac{1}{3} < x \leq 0$ x vérifie à la fois $3x + 1 > 0$ et $3x + 1 \leq 1$.

67 **1.**



2. a.

Rang de la semaine x_i	1	2	3	4	5
$f(x_i)$ arrondi à l'unité près	77	110	158	226	323

b. D'après le tableau, on peut prévoir 323 couverts la cinquième semaine.

3. a. $54\times(1{,}43)^x > 810 \Leftrightarrow (1{,}43)^x > \dfrac{810}{54} \Leftrightarrow x\log(1{,}43) > \log\left(\dfrac{810}{54}\right) \Leftrightarrow x > \dfrac{\log\left(\dfrac{810}{54}\right)}{\log(1{,}43)}$;

soit $x > 7{,}57$ environ (à 0,01 près).

b. D'après la question précédente, le gérant commencera à refuser des clients à partir de la 8e semaine.

4.

```
from math import*
def f(x):
    return  54*1.43**x
x=1
while f(x)<=810:
    x=x+1
print('Le gérant commencera à refuser des clients au bout de',x,'semaines.')
```

68 **1.** $f(1) = 24\times1{,}27^1 = 30{,}48$.

2. a. $t > \dfrac{\log(2{,}54)}{\log(1{,}27)}$; **b.** Il faut résoudre l'inéquation $f(t) > 2\times f(1)$ soit $24\times1{,}27^t > 60{,}96$.

D'après **a.** $t > \dfrac{\log(2{,}54)}{\log(1{,}27)}$. Comme $\dfrac{\log(2{,}54)}{\log(1{,}27)} \approx 3{,}89$, cela se produira au bout de 4 semaines.

69 Le programme permet de calculer l'image d'un nombre réel x par la fonction logarithme décimal.

70 **1.** Si le pH augmente, alors la concentration en ions oxonium diminue.

2.

Solution	pH	Solution acide, basique, neutre	$[H_3O^+]$
Soude	14	Basique	10^{-14}
Acide chlorhydrique	0 (très proche de)	Acide	1
Eau de javel	11,5	Basique	$10^{-11,5}$
Eau distillée	7	Neutre	10^{-7}
Café	5	Acide	10^{-5}
Acide gastrique	2	Acide	0,01
Salive humaine	6,5	Acide	$10^{-6,5}$

3. pH = 2,7 donc $[H_3O^+] = 10^{-2,7}$.

4. pH = 5.

5. a. Ce programme permet de calculer le pH d'une solution dont la concentration en ions oxonium est donnée.

b. L'instruction « round » permet de donner l'arrondi d'un résultat, ici à l'unité près.

71 **1.** $N = 70$ dB.

2. $N \leq 120 \Leftrightarrow 10\log\left(\dfrac{I}{10^{-12}}\right) \leq 120 \Leftrightarrow \log\left(\dfrac{I}{10^{-12}}\right) \leq 12 \Leftrightarrow \log\left(\dfrac{I}{10^{-12}}\right) \leq \log(10^{12}) \Leftrightarrow \mathrm{I} \leq 10^{12}\times10^{-12}$

D'où $\mathrm{I} \leq 1$ W.m^{-2}.

3. $N + 20 = 10\log\left(\dfrac{I}{10^{-12}}\right) + 20 = 10\left[\log\left(\dfrac{I}{10^{-12}}\right) + 2\right] = 10\log\left(\dfrac{100I}{10^{-12}}\right)$. Si N augmente de 20 dB, l'intensité I est multipliée par 100.

4. $N - 10 = 10\log\left(\dfrac{I}{10^{-12}}\right) - 10 = 10\left[\log\left(\dfrac{I}{10^{-12}}\right) - 1\right] = 10\log\left(\dfrac{0{,}1I}{10^{-12}}\right)$. Si N diminue de 10 dB, l'intensité I est divisée par 10.

5. Le niveau sonore des deux enceintes est égal à $10\log\left(\dfrac{2I}{10^{-12}}\right)$;

$10\log\left(\dfrac{2I}{10^{-12}}\right) = N + 10\log(2) = 80 + 10\log(2) \approx 83$ dB. Les parents de Jade ont donc tort, les niveaux sonores ne s'ajoutent pas. Le son reste en dessous du seuil de douleur de l'oreille humaine.

72 **1.** $N + 1 = 2^{43112609}$ donc $\log(N{+}1) = 43\,112\,609\times\log(2)$.

2. La calculatrice donne $43\,112\,609\times\log(2) \approx 12\,978\,188{,}5$. La partie entière de log (N+1) est donc égale à 12 978 188.

3. $p = \log(N{+}1) + 1 = 12\,978\,189$. L'écriture décimale de $N + 1$ comporte 12 978 189 chiffres. N a le même nombre de chiffres que $N + 1$. L'écriture décimale de N comporte aussi 12 978 189 chiffres.

73 **1.** $b_1 = 22\,990$; $b_2 = 24\,024$.

2. $b_{n+1} = b_n \times 1{,}045$. (b_n) est une suite géométrique de raison 1,045 et de 1^er^ terme $b_0 = 22\,000$.

3. $b_n = 22\,000\times1{,}045^n$.

4. a.

```
n prend la valeur 0
Tant que B ≤ 40 000
        N prend la valeur N + 1
        B prend la valeur B×1,045
Fin Tant que
A prend la valeur N + 2019
Afficher A
```

b.

```
from math import*
n=0
b=22000
while b<=40000:
    n=n+1
    b=b*1.045
A=n+2019
print("Le bénéfice aura doublé en", A)
```

5. a. $n \geq \dfrac{\log(2)}{\log(1{,}045)}$.

b. Il faut résoudre l'inéquation $b_n \geq 2\times22\,000$ soit $22\,000\times1{,}045^n \geq 2\times22\,000$ ce qui équivaut à : $1{,}045^n \geq 2$. D'après **a.** $n \geq \dfrac{\log(2)}{\log(1{,}045)}$. On choisit le plus petit entier n supérieur ou égal à $\dfrac{\log(2)}{\log(1{,}045)}$

Comme $\dfrac{\log(2)}{\log(1{,}045)} \approx 15{,}7$, le bénéfice aura doublé au bout de 16 ans.

74 **1.** $N' = 10\log\left(\dfrac{2I}{10^{-12}}\right) = 10\left(\log\left(\dfrac{I}{10^{-12}}\right) + \log(2)\right) = N + 10\log(2)$. $10\log(2) \approx 10\times0{,}3 \approx 3$.

2. a. Niveau sonore de deux tondeuses côte à côte : environ 70 + 3 soit 73 dB.

b. $N' = 10\log\left(\dfrac{10I}{10^{-12}}\right) = 10\left(\log\left(\dfrac{I}{10^{-12}}\right) + \log(10)\right) = N + 10$.

Si $N = 120$, alors $N' = 130$. C'est donc vrai.

Pour faire le point

75 **Faux** ; elle est définie sur]0 ; +∞[.

76 **Vrai** car la fonction logarithme décimal est croissante sur son ensemble de définition]0 ; +∞[.

77 **Faux** car $10 \log(2) = \log(2^{10}) = \log(1024)$ qui est supérieur à $\log(20)$, car la fonction logarithme décimal est croissante sur son ensemble de définition]0 ; +∞[.

78 **Vrai** car $\log(1000) = \log(10^3)$.

79 **Vrai** car $\log(2^{2020}) = \log(\ 2^{2\times1010}) = \log((2^2)^{1010}) = 1010 \log(4)$.

80 **Vrai** car $0{,}5 < 1$ d'où $\log(0{,}5) < \log(1)$ soit $\log(0{,}5) < 0$.

81 **Vrai** car $\sqrt{3} < 3$ et la fonction logarithme décimal est croissante sur son ensemble de définition]0 ; +∞[.

82 **Vrai** car $5^{3\times1-1} = 5^2 = 25$.

83 **Vrai** car $3^x > 0$ sur $\mathbb{R}$.

84 **Vrai** car $\log(0{,}0002) = \log\ (2\times10^{-4}) = \log(2) + \log(10^{-4}) = \log(2) - 4 > 0{,}3 - 4 > -4$.

85 **Faux** car $\log(200) = \log(20\times10) = \log(20) + \log(10) = \log(20) + 1$

86 **Faux** car $\log(300) = \log(3\times100) = \log(3) + \log(100) = \log(3) + 2 \approx 2{,}5$

87 réponse **b**

88 réponse **d**

89 réponse **a**

90 réponse **a**

91 réponse **b**

Pour approfondir

92

x	0	0,000 1	0,001	0,01	0,1	1
$\log(x)$	**No image**	**–4**	**–3**	**–2**	**–1**	**0**

x	2	5	10	20	50	100
$\log(x)$	≈ 0,3	**≈ 0,7**	**1**	**≈ 1,3**	**≈ 1,7**	**2**

93 **1.** Si $A = A_0$, alors $M = 0$. Si $A = 10 \times A_0$, alors $M = 1$. Si $A = 10\,000 \times A_0$, alors $M = 4$.

2. Si $4 \le M \le 5$, alors $\log(10^4) \le \log\left(\dfrac{A}{A_0}\right) \le \log(10^5)$ d'où $10^4 \le \dfrac{A}{A_0} \le 10^5$. Il vient : $10^4 \times A_0 \le A \le 10^5 \times A_0$.

3. $M = 9{,}5$ donc $\log\left(\dfrac{A}{A_0}\right) = \log(10^{9,5})$. $A = A_0 \times 10^{9,5} = \sqrt{10} \times A_0 \times 10^9$.

4. Si $M = 8$, alors $\log\left(\dfrac{A}{A_0}\right) = \log(10^8)$ et $A = A_0 \times 10^8$. De même, si $M' = 4$, alors $A' = A_0 \times 10^4$.

Le rapport $\dfrac{A}{A'}$ est égal à $\dfrac{10^8}{10^4} = 10\,000$. Le journaliste a tort. Le séisme a eu une amplitude 10 000 fois plus petite.

94 **Erratum :** il faut lire $S = 20\log\left(\dfrac{p}{p_0}\right)$.

Si $p = 20$ bars, alors $S = 20\log\left(\dfrac{20}{2\times10^{-5}}\right) = 20\log(10^6) = 120$. Le niveau de pression est de 120 dB.

95 **1.** $f(x) = 3200\times 2{,}3\log\left(\dfrac{x+50}{50}\right) = 3200\times 2{,}3\log\left(\dfrac{x}{50}+1\right) = 3200\times 2{,}3\log(0{,}02x+1)$.

2. a. $f(100) \approx 3512$ m.s^{-1} à 1 m.s^{-1} près.

b. $f(400) \approx 7023$ m.s^{-1}. Non, la fusée ne pourra pas être mise en orbite.

3. Il faut résoudre l'inéquation $f(x) \geq 8000$ soit : $3200\times 2{,}3\log(0{,}02x+1) \geq 8000$.

4. D'après la calculatrice, il faut environ 560 tonnes de propergol au décollage pour permettre la mise en orbite souhaitée.

96 **1.** $-\log[H_3O^+] = 7$ donc $\log[H_3O^+] = -7$ d'où $[H_3O^+] = 10^{-7}$mol . L^{-1}.

2. pH $= -\log[H_3O^+] \approx 2{,}6$ d'après la calculatrice.

3. a. Si pH = 4, alors $[H_3O^+] = 10^{-4}$.

$10^{-4}\times 100 = 10^{-2}$. pH $= -\log(10^{-2}) = 2$.

Si on multiplie la concentration en ions oxonium par 100, le pH est diminué de 2.

De même, si on multiplie la concentration en ions oxonium par 1000, le pH est diminué de 3.

b. Si on divise la concentration en ions oxonium par 100, le pH est augmenté de 2.

Si on divise la concentration en ions oxonium par 1000, le pH est augmenté de 3.

TP À vos batteries

1. $\dfrac{Vf - Vi}{Vi} = \dfrac{208\ 989 - 167\ 365}{167\ 365} \approx 0{,}248$ soit environ 25 % à 1% près.

2. a. v_3 est le nombre de véhicules électriques immatriculés fin 2022.

$v_3 = 1{,}4^3 \times 208\ 989 \approx 573\ 466$ en arrondissant à une unité près.

b. La suite (v_n) est une suite géométrique de raison 1,4. $v_n = 208\ 989\times1{,}4^n$.

c. On cherche le plus petit entier n tel que $208\ 989\times1{,}4^n \geq 1000\ 000$. Cela équivaut à :

$n\log(1{,}4) \geq \log\left(\dfrac{1\ 000\ 00}{208\ 989}\right)$ soit $n \geq \dfrac{\log\left(\dfrac{1\ 000\ 00}{208\ 989}\right)}{\log(1{,}4)}$. On choisit $n = 5$.

L'objectif ne pourra être atteint qu'en 2024.

En salle informatique

Erratum sur l'algorithme en 1 et le programme en 3.

1.

```
n ← 0
u ← 208 989
Tant que u < 4 000 000
n ← n+1
u ← u×1,4
Fin Tant que
```

2. Il faut faire afficher la variable n.

3. Le programme correct est :

```
from math import*
n=0
u=208989
while u < 4000000:
    n=n+1
    u=u*(1+t/100)
print("Le nombre dépassera 4000 000 en",n+2019)
```

a. Elle affecte à la variable u la valeur de u augmentée de t %.

b. Programme à implémenter :

```
from math import *
n=0
u=208989
while u <4000000:
    n=n+1
    u=u*(1+25/100)
print("Le nombre dépassera 4000 000 en",n+2019)
```

La console affiche :

```
Console Python
>>>
*** Console de processus distant Réinitialisée ***
[Dbg]>>>
Le nombre dépassera 4000 000 en 2033
>>>
```

Pour l'épreuve du BAC

105 **1.** $r_{n+1} = 1{,}03 \times r_n$, la raison est donc égale à 1,03.

2. Il s'agit de calculer le nombre de séances au bout d'une année, soit 4 trimestres.

$r_4 = r_1 \times 1{,}03^3 = 598 \times 1{,}03^3 \approx 653$, résultat arrondi à l'unité près.

3. $598 \times 1{,}03^{x-1} \geq 800 \Leftrightarrow 1{,}03^{x-1} \geq \dfrac{800}{598} \Leftrightarrow (x-1)\log(1{,}03) \geq \log\left(\dfrac{800}{598}\right) \Leftrightarrow x-1 \geq \dfrac{\log\left(\dfrac{800}{598}\right)}{\log(1{,}03)}$ $(\log(1{,}03) > 0)$

$\Leftrightarrow x \geq 1 + \dfrac{\log\left(\dfrac{800}{598}\right)}{\log(1{,}03)}$; la calculatrice donne $1 + \dfrac{\log\left(\dfrac{800}{598}\right)}{\log(1{,}03)} \approx 10{,}84$ à 0,01 près.

4. Il faut résoudre l'inéquation $598 \times 1{,}03^{x-1} \geq 800$.

D'après la question **3.**, $x \geq 10{,}84$. Le nombre trimestriel de séances dépassera 800 après 11 trimestres.

Il faudra donc recruter un-e collègue au bout de 2 ans et 3 trimestres donc au cours du 3e trimestre de l'année 2021.

106 **1.** $660 \times 0{,}85^t \leq 115 \Leftrightarrow \log(0{,}85) \times t \leq \log\left(\dfrac{115}{660}\right) \Leftrightarrow t \geq \dfrac{\log\left(\dfrac{115}{660}\right)}{\log(0{,}85)}$ car $\log(0{,}85) < 0$.

La calculatrice donne $\dfrac{\log\left(\dfrac{115}{660}\right)}{\log(0{,}85)} \approx 10{,}75$ à 0,01 près.

2. Il faut résoudre l'inéquation $660 \times 0{,}85^t \leq 115$; la question 1 donne $t \geq 10{,}75$.

Le temps de récupération doit donc être supérieur à 10 minutes et 45 secondes.

3. On calcule l'écart du nombre de battements entre la 8e et la 9e minute : $g(8) - g(9) \approx 27$. La diminution n'est pas anormale ici puisqu'elle est supérieure à 12.

107 **1. a.** $u_1 = 256 \times 0{,}8 = 204{,}8$.

b. $u_{n+1} = 0{,}8u_n$ d'après l'énoncé.

2. a. C3 = C2*0.8

b. On résout l'inéquation $256 \times 0{,}8^n \leq 50$.

Elle équivaut à : $n \times \log(0{,}8) \leq \log\left(\frac{50}{256}\right) \Leftrightarrow n \geq \dfrac{\log\left(\frac{50}{256}\right)}{\log(0{,}8)}$. La calculatrice donne $\dfrac{\log\left(\frac{50}{256}\right)}{\log(0{,}8)} \approx 7{,}3$.

Le marché physique sera inférieur à 50 millions d'euros en $2018 + 8 = 2026$.

108 Partie A

1. $C_1 = 85 \times 0{,}75 = 63{,}75$; $C_2 = C_1 \times 0{,}75 \approx 47{,}82$ à 0,01 près.

2. $C_{n+1} = 0{,}75 \times C_n$ donc la suite (C_n) est une suite géométrique de raison 0,75 et de 1^er^ terme $C_0 = 85$.

3. B3= B2*0.75

4. $C_n = C_0 \times 0{,}75^n = 85 \times 0{,}75^n$. $C_{14} = 85 \times 0{,}75^{14} \approx 1{,}51$ mg.L^{-1} à 0,01 mg.L^{-1} près.

Partie B

1. a. On lit qu'au bout de 4,5 h la concentration est d'environ 22 mg.L^{-1}.

b. 50% de la concentration initiale est égal à 42,5 mg.L^{-1}. La concentration devient inférieure à cette valeur au bout de 2,2 h environ.

2. 20% de 85 est égal à 17 mg.L^{-1}.

On résout l'inéquation $85 \times 0{,}75^t \leq 17$.

Cela équivaut à : $0{,}75^t \leq 0{,}2 \Leftrightarrow t \geq \dfrac{\log(0{,}2)}{\log(0{,}75)}$. La calculatrice donne $\dfrac{\log(0{,}2)}{\log(0{,}75)} \approx 5{,}6$ h à 0,1 h près.

5,6 h = 5 h 36 min.

109 **1.** Prix de l'article au 1^er^ janvier 2021 : $f(1) \approx 78$ euros à 1 unité près.

Prix de l'article au 1^er^ juillet 2021 : $f(1{,}5) \approx 82$ euros à 1 unité près.

2. On résout l'inéquation $72 \times 1{,}087^x > 200$;

elle équivaut à : $1{,}087^x > \dfrac{200}{72} \Leftrightarrow x\log(1{,}087) > \log\left(\dfrac{200}{72}\right) \Leftrightarrow x > \dfrac{\log\left(\frac{200}{72}\right)}{\log(1{,}087)}$.

La calculatrice donne $\dfrac{\log\left(\frac{200}{72}\right)}{\log(1{,}087)} \approx 12{,}24$. Ce sera dans le courant de l'année 2032, au 1^er^ avril.

110 **1.** $u_1 = 800 \times 1{,}025 = 820$.

2. La suite (u_n) est une suite géométrique de raison 1,025 et de 1^er^ terme 800.

$u_n = 800 \times 1{,}025^n$.

3. $800 \times 1{,}025^n \geq 1000 \Leftrightarrow 1{,}025^n \geq \dfrac{1000}{800} \Leftrightarrow n\log(1{,}025) \geq \log\left(\dfrac{1000}{800}\right) \Leftrightarrow n \geq \dfrac{\log\left(\frac{1000}{800}\right)}{\log(1{,}025)}$.

La calculatrice donne $\dfrac{\log\left(\frac{1000}{800}\right)}{\log(1{,}025)} \approx 9{,}03$.

4. Cela revient à déterminer le plus petit entier n tel que $800 \times 1{,}025^n \geq 1000$, inéquation résolue à la question **3** avec $n \geq \dfrac{\log\left(\frac{1000}{800}\right)}{\log(1{,}025)}$.

La calculatrice donne $\dfrac{\log\left(\frac{1000}{800}\right)}{\log(1{,}025)} \approx 9{,}03$.

Le capital acquis dépassera pour la première fois 1000 € en 2029.

Statistiques à deux variables quantitatives

CAPACITÉS
- Représenter un nuage de points
- Déterminer et utiliser un ajustement affine pour interpoler ou extrapoler des valeurs inconnues
- Représenter un nuage de points en effectuant un changement de variable donné afin de conjecturer une relation de linéarité entre de nouvelles variables

Vérifier les acquis de Première

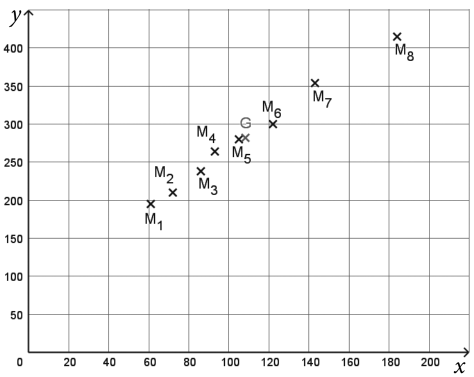
1. c **2.** d **3.** b **4.** b **5.** d

Activités

Activité 1 Ça déménage !

1. Les deux caractères étudiés sont la superficie des appartements et leur prix de vente.

2. a.



b. Les points sont proches de l'alignement.

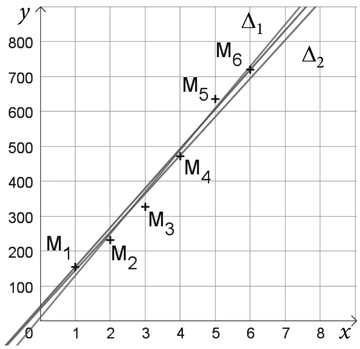
3. a. $\overline{x} = \dfrac{61 + 72 + 86 + 93 + 105 + 122 + 143 + 184}{8} = 108{,}25$ et

$\overline{y} = \dfrac{195 + 210 + 238 + 264 + 280 + 300 + 354 + 415}{8} = 282.$

b. G(108,25 ; 282) est « au centre » du nuage de points.

Activité 2 Quand la fibre fait un carton

1. a.



b. Les droites passent près des points du nuage.

c. $a = \dfrac{720 - 155}{6 - 1} = 113$ donc (M_1M_6) a une équation de la forme $y = 113x + b$.

$M_1(1\ ;155)$ est un point de (M_1M_6) ; ainsi : $155 = 113 \times 1 + b \Leftrightarrow b = 42$

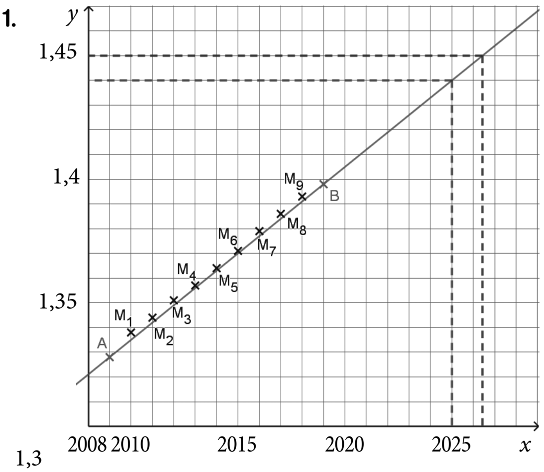
L'équation réduite de (M_1M_6) est donc $y = 113x + 42$.

2. a. b. c. Voir graphique.

d. On choisirait la droite Δ_1 car c'est celle qui donne le plus petit résultat pour la somme S ; ce qui signifie que c'est la droite qui passe au plus près des points du nuage.

Activité 3 Évolution de la population en Chine

1.



2. Oui la droite D réalise un bon ajustement du nuage de points car elle est proche des points du nuage.

3. a. Pour $x = 2\,025$, on a $y = 0{,}007 \times 2\,025 - 12{,}735 = 1{,}44$ milliard d'habitants.

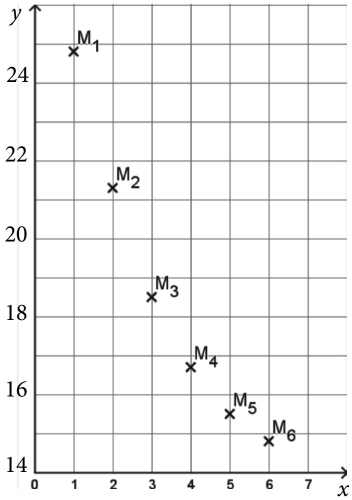
b. $0{,}007x - 12{,}735 > 1{,}45 \Leftrightarrow x > \dfrac{1{,}45 + 12{,}735}{0{,}007}$.

Or, $\dfrac{1{,}45 + 12{,}735}{0{,}007} \approx 2626{,}4$; c'est donc à partir de 2027 qu'on peut estimer que le nombre d'habitants dépassera 1,45 milliards.

4. Voir graphique.

Activité 4 Temps de montage d'un véhicule

1.



Non un ajustement affine n'est pas envisageable car les points du nuage ne sont pas proches de l'alignement.

2. a.

x_i	1	2	3	4	5	6
z_i	4,98	4,62	4,30	4,09	3,94	3,85

b. La droite a pour équation $z = -0{,}23x + 5{,}09$.

c. • $z = \sqrt{y}$ et $z = -0{,}23x + 5{,}09$ donc $\sqrt{y} = -0{,}23x + 5{,}09$; d'où $y = (-0{,}23x + 5{,}09)^2$.

• 2025 correspond à $x = 13$.

Pour $x = 13$, on a $y = (-0{,}23 \times 13 + 5{,}09)^2 = 4{,}41$. Donc en 2025, le temps de montage d'un véhicule de ce type est estimé à 4,41 heures.

Exercices

Pour acquérir les automatismes

2 G(3,5 ; 9)

3 G(3,5 ; 10)

4 G(8 ; 12)

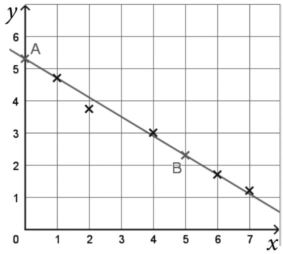
5 Non, la droite passant par A(4,5 ; 3) et de coefficient directeur 1,8 ne donne pas un bon ajustement affine du nuage de points car cette droite ne passe pas près des points du nuage.

6 Oui, la droite passant par A(4 ; 2) et de coefficient directeur 0,25 donne un bon ajustement affine du nuage de points car cette droite passe près des points du nuage.

A(4 ; 2) appartient à cette droite ; ainsi : $2 = 0{,}25 \times 4 + b \Leftrightarrow b = 1$.

Donc la droite a pour équation réduite $y = 0{,}25x + 1$.

7



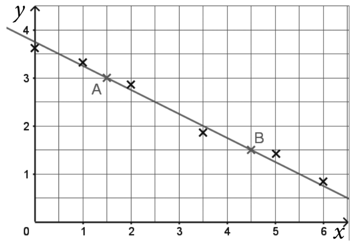
Oui, la droite (AB) donne un bon ajustement affine du nuage de points car cette droite passe près des points du nuage.

* $a = \dfrac{2{,}3 - 5{,}3}{5 - 0} = -0{,}6$. Donc l'équation réduite de (AB) s'écrit sous la forme $y = -0{,}6x + b$.

* $A(0\,;5{,}3) \in (AB)$ donc $b = 5{,}3$.

Donc la droite (AB) a pour équation réduite $y = -0{,}6x + 5{,}3$.

8



Oui, la droite (AB) donne un bon ajustement affine du nuage de points car cette droite passe près des points du nuage.

* $a = \dfrac{1{,}5 - 3}{4{,}5 - 1{,}5} = -0{,}5$. Donc l'équation réduite de (AB) s'écrit sous la forme $y = -0{,}5x + b$.

* $A(1{,}5\,;3) \in (AB)$: ainsi : $3 = -0{,}5 \times 1{,}5 + b \Leftrightarrow b = 3{,}75$.

Donc la droite (AB) a pour équation réduite $y = -0{,}5x + 3{,}75$.

9 $y = 2{,}5t^2 - 6{,}4$.

10 $y = \dfrac{1}{154{,}2t + 26{,}5}$.

11 $y = (4{,}2x + 1{,}3)^2$.

12 $x = 2 - \dfrac{2}{6{,}8t + 11{,}1}$.

13 $y = 10^{7{,}2x + 14{,}9}$.

14 $C = 10^{1{,}8t + 7{,}3} - 4$.

15 **1.** Lorsque $x = 4$, on a $y = 2 \times 4 - 4{,}8 = 3{,}2$.

2. Sur $\mathbb{R}^+$, $y > 10 \Leftrightarrow 2x - 4{,}8 > 10 \Leftrightarrow x > 7{,}4$.

Le plus petit entier x à partir duquel $y > 10$ est donc 8.

16 **1.** Lorsque $t = 2$, on a $y = \sqrt{2 \times 2 + 9} = \sqrt{13}$.

2. Sur $\mathbb{R}^+$, $y = 7 \Leftrightarrow \sqrt{2t+9} = 7 \Leftrightarrow 2t + 9 = 49 \Leftrightarrow t = 20$.

17 **1.** Lorsque $t = 3$, on a $y = 10 \times 3^2 + 8 = 98$.

2. Sur $\mathbb{R}^+$, $y > 178 \Leftrightarrow 10t^2 + 8 > 178 \Leftrightarrow t^2 > 17 \Leftrightarrow t > \sqrt{17}$.

Or $\sqrt{17} \approx 4{,}1$; le plus petit entier t à partir duquel $y > 178$ est donc 5.

18 **1.** Lorsque $x = 7$, on a $N = \dfrac{2}{3 \times 7 + 4} = \dfrac{2}{25}$.

2. Sur $\mathbb{R}^+$, $N = 0{,}2 \Leftrightarrow \dfrac{2}{3x + 4} = 0{,}2 \Leftrightarrow 3x + 4 = 10 \Leftrightarrow x = 2$.

19 **1** Lorsque $x = 2$, on a $C = 10^{-3\times2+5} = 10^{-1} = 0{,}1$.

2. Sur $\mathbb{R}^+$, $C < 0{,}001 \Leftrightarrow 10^{-3x+5} < 10^{-3} \Leftrightarrow -3x + 5 < -3 \Leftrightarrow x > \dfrac{8}{3}$.

Or $\dfrac{8}{3} \approx 2{,}7$; le plus petit entier x à partir duquel $C < 0{,}001$ est donc 3.

Pour commencer

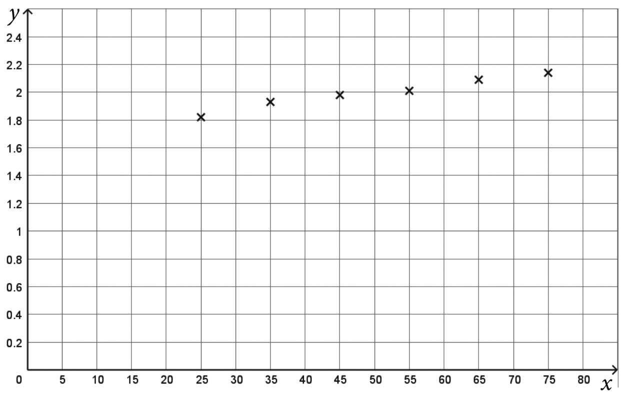
20 Les axes ont été inversés.

21 **1.**

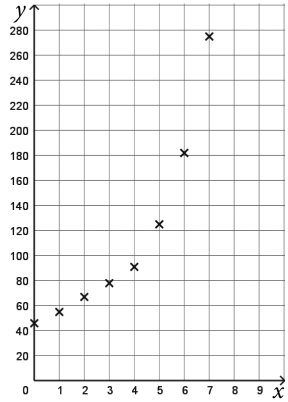
Heure	10 h 19	10 h 20	10 h 21	10 h 22	10h23
Nombre de minutes x_i	1	2	3	4	5
Nombre de « Like » y_i	13	16	20	25	28

2. On peut rajouter le point de coordonnées (7 ; 38).

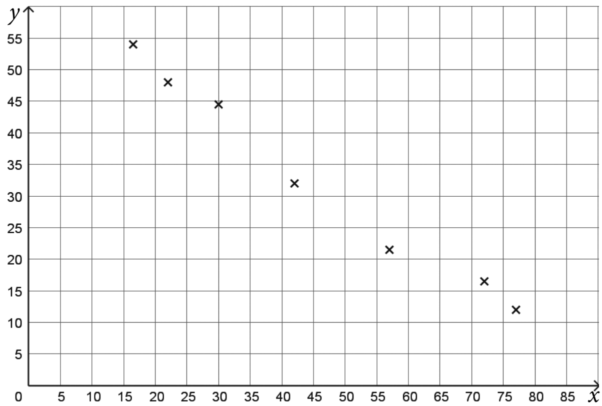
22



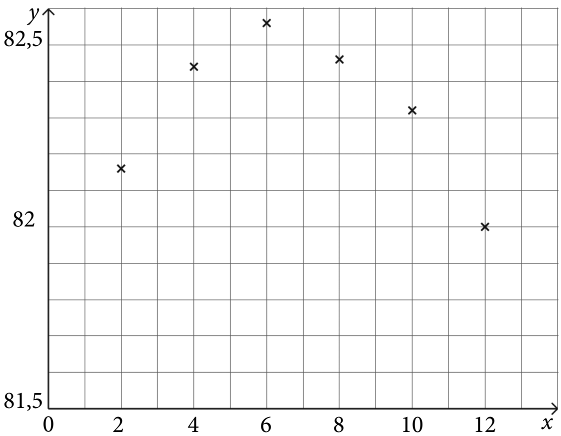
23


y
280
260
240
220
200
180
160
140
120
100
80
60
40
20
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
x

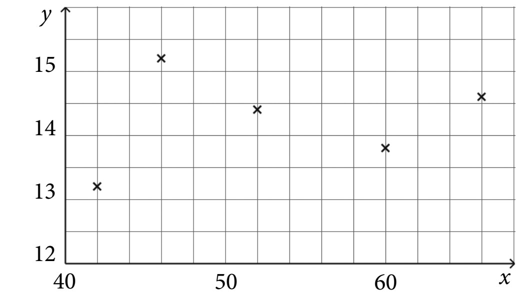
24


y
55
50
45
40
35
30
25
20
15
10
5
0
5
10
15
20
25
30
35
40
45
50
55
60
65
70
75
80
85
x

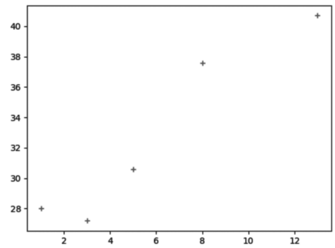
25


y
82,5
82
81,5
0
2
4
6
8
10
12
x

26



27



28

1. $\overline{x} = \dfrac{5{,}5 + 7{,}8 + 10{,}1 + 13{,}6}{4} = 9{,}25.$

2. $\overline{y} = \dfrac{2 + 6 + 12 + 21}{4} = 10{,}25.$

3. G(9,25 ; 10,25).

29 **1.** $\overline{x} = \dfrac{0 + 3 + 6 + 9 + 12 + 15}{6} = 7{,}5$; l'affirmation est donc fausse.

2. $\overline{y} = \dfrac{4{,}2 + 6{,}5 + 6{,}8 + 8{,}3 + 10{,}4 + 10{,}3}{6} = 7{,}75$; l'affirmation est donc vraie.

30

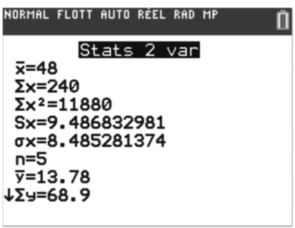
$\overline{x} = \dfrac{0 + 6 + 12 + 18 + 24 + 30 + 36 + 42 + 48}{9} = 24$ et

$\overline{y} = \dfrac{26 + 31 + 33 + 36 + 38 + 41 + 46 + 49 + 56}{9} \approx 39{,}56.$

Donc G(24 ; 39,56).

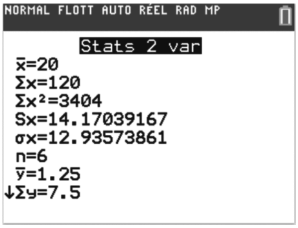
31 G(3 ; 2 206,4).

32



On lit G(48 ; 13,78).

33



On lit G(20 ; 1,25).

34 Fabiola s'est trompée sur l'ordonnée de G. En effet, la variable y prend des valeurs comprises entre 13,3 et 22,5 donc $\overline{y}$ ne peut donc pas être égale à 13,1.

35 Un ajustement affine n'est pas envisageable avec le 1er nuage de points (car les points ne sont pas proches de l'alignement) alors que c'est envisageable pour le 2nd nuage de points (car les points sont proches de l'alignement).

36 **1.** Vrai. Un ajustement affine est envisageable car les points du nuage sont proches de l'alignement.

2. Faux. En traçant la droite d'équation $y = 0,5x + 2$, on constate qu'elle ne permet pas de réaliser un bon ajustement affine du nuage de points.

3. Faux. La droite représentée ne passe pas par le point G.

37 La droite d'ajustement de y en x par la méthode des moindres carrés a pour équation $y = 5,5x + 117,9$.

38 La droite d'ajustement de y en t par la méthode des moindres carrés a pour équation $y = -0,015t + 9,953$.

39 La droite d'ajustement de N en t par la méthode des moindres carrés a pour équation $N = 9,431t - 140,343$.

40 **1.** Lorsque $x = 3$, on a $y = 0,25 \times 3 - 4,2 = -3,45$.

2. $y = 6,5 \Leftrightarrow 0,25x - 4,2 = 6,5 \Leftrightarrow x = 42,8$.

41 **1.** Lorsque $x = 3\ 000$, on a $y = 3,7 \times 3\ 000 + 65\ 000 = 76\ 100$.

Donc pour un investissement en publicité de 3 000 €, le montant espéré du chiffre d'affaires est 76 100 €.

2. $y = 84\ 240 \Leftrightarrow 3,7x + 65\ 000 = 84\ 240 \Leftrightarrow x = 5\ 200$.

Donc pour un chiffre d'affaires de 84 240 €, l'investissement en publicité est estimé à 5 200 €.

42 **1.** Lorsque $x = 2\ 021$, on a $y = -4,3 \times 2\ 021 + 8\ 740 = 49,7$.

Donc en 2021, le montant moyen des achats en ligne est estimé à 49,7 €.

2. $y < 45 \Leftrightarrow -4,3x + 8\ 740 < 45 \Leftrightarrow x > \dfrac{8\ 695}{4,3}$.

Or $\dfrac{8\ 695}{4,3} \approx 2\ 022,1$; c'est donc à partir de 2023 qu'on peut estimer que le montant des achats en ligne va devenir inférieur à 45 €.

43 **1.** Lorsque $x = 2\ 021$, on a $d = 25 \times 2\ 021 - 50\ 339 = 186$.

Donc en 2021, l'autonomie des voitures est estimée à 186 km.

2. $d > 600 \Leftrightarrow 25x - 50\ 339 > 600 \Leftrightarrow x > 2\ 037,56$

C'est donc à partir de 2038 qu'on peut estimer que l'autonomie des voitures électriques dépassera 600 km.

44 **1.** Lorsque $x = 2\,025$, on a $N = 112 \times 2\,025 - 216\,540 = 10\,260$.

Donc en 2025, le nombre de licences sportives délivrées dans cette ville est estimé à 10 260.

2. $N > 10\,000 \iff 112x - 216\,540 > 10\,000 \iff x > \dfrac{226\,540}{112}$.

Or, $\dfrac{226\,540}{112} \approx 2\,022,7$; c'est donc à partir de 2023 qu'on peut estimer que le nombre de licences sportives délivrées dans cette ville dépassera 10 000.

45 **1.** 1 jour représente 24 heures.

Pour $t = 24$, on a $N = 9{,}26 \times 24 + 1{,}5 = 223{,}74$. Au bout de 1 jour, il y aura donc 223 740 000 bactéries.

2. On résout l'inéquation $9{,}26t + 1{,}5 > 100$.

$$9{,}26t + 1{,}5 > 100 \iff 9{,}26t > 98{,}5$$
$$\iff t > \frac{98{,}5}{9{,}26}$$

Or $\dfrac{98{,}5}{9{,}26} \approx 10{,}6$. C'est donc au bout de 11 heures que le nombre de bactéries dépassera 100 000 000.

46 **1.** $\overline{x} = \dfrac{1+2+3+4+5}{5} = 3$ et $\overline{y} = \dfrac{7{,}9 + 8{,}3 + 8{,}7 + 9{,}4 + 9{,}8}{5} \approx 8{,}82$. Donc G(3 ; 8,82). Réponse **c.**

2. La calculatrice donne pour équation : $y = 0{,}49x + 7{,}35$. Réponse **b.**

3. L'année 2024 correspond à $x = 10$. On a alors $y = 0{,}49 \times 10 + 7{,}35 = 12{,}25$. Réponse **c.**

4. On résout l'inéquation $0{,}49x + 7{,}35 > 15$.

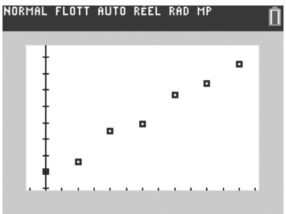
$0{,}49x + 7{,}35 > 15 \iff 0{,}49x > 7{,}65 \iff x > \dfrac{7{,}65}{0{,}49}$.

Or $\dfrac{7{,}65}{0{,}49} \approx 15{,}6$. C'est donc au bout de 16 ans, c'est-à-dire en 2030, que le prix de cet article dépassera 15 €.

Réponse **b.**

Pour s'entraîner

47



48

$$\frac{35{,}2 + a + 26{,}7 + 21 + 18{,}4 + 15{,}2 + 11{,}3 + 9{,}8}{8} = 21{,}3 \quad \text{et} \quad \frac{11{,}4 + 9{,}5 + 7{,}6 + 5{,}2 + 4 + 3{,}1 + 2{,}8 + b}{8} = 5{,}6$$

$$\frac{137{,}6 + a}{8} = 21{,}3 \quad \text{et} \quad \frac{43{,}6 + b}{8} = 5{,}6$$

$137{,}6 + a = 21{,}3 \times 8$ et $43{,}6 + b = 5{,}6 \times 8$

$137{,}6 + a = 170{,}4$ et $43{,}6 + b = 44{,}8$

$a = 170{,}4 - 137{,}6$ et $b = 44{,}8 - 43{,}6$

$a = 32{,}8$ et $b = 1{,}2$

49 **1.**

```
def moy(l):
#l est une liste"
    s=0
    for i in l:
        s=s+i
    return (s/len(l))
```

2. G(20 ; 25).

3. G(20 ; 25) appartient à la droite d'ajustement ; ainsi : $25 = 0{,}3 \times 20 + b \Leftrightarrow b = 19$.

L'équation réduite de la droite d'ajustement par la méthode des moindres carrés est donc $y = 0{,}3x + 19$.

50 **1.** Réponse **d.**

2. Réponse **b.**

3. Réponse **b.**

51 **1. a.** Le taux d'occupation espéré pour un budget publicitaire de 48 000 € est environ 51 %.

b. Le montant des frais publicitaires laissant espérer un taux d'occupation de 80 % est environ 76 000 €.

2. • L'équation réduite de Δ est de la forme $y = 1{,}04x + b$.

$A(11 ; 12) \in \Delta \Leftrightarrow 12 = 1{,}04 \times 11 + b \Leftrightarrow 11{,}44 + b = 12 \Leftrightarrow b = 12 - 11{,}44 \Leftrightarrow b = 0{,}56$

L'équation réduite de Δ est donc $y = 1{,}04x + 0{,}56$.

• Pour $x = 48$, on a $y = 1{,}04 \times 48 + 0{,}56 = 50{,}48$.

Donc le taux d'occupation espéré pour un budget publicitaire de 48 000 € est 50,48 %.

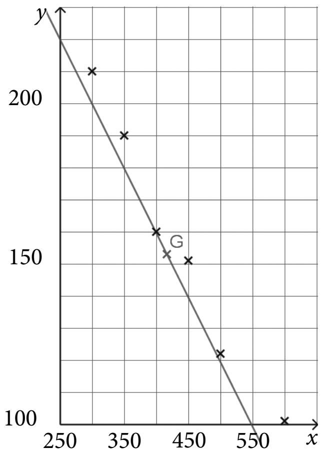
• On résout l'équation $1{,}04x + 0{,}56 = 80$.

$$1{,}04x + 0{,}56 = 80 \Leftrightarrow 1{,}04x = 80 - 0{,}56 \Leftrightarrow 1{,}04x = 79{,}44$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{79{,}44}{1{,}04}$$

Or $\frac{79{,}44}{1{,}04} \approx 76{,}385$. Donc le montant des frais publicitaires laissant espérer un taux d'occupation de 80 % est environ 76 385 €.

52 **1.**

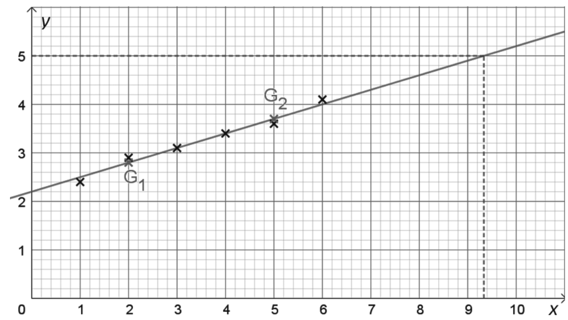


2. G(433 ; 156).

3. Voir graphique.

4. $430 \approx x_G$ donc le nombre de ventes de ce nouveau modèle est estimé à environ 156.

53 **1.**



2. $\overline{x_1} = \dfrac{1 + 2 + 3}{3} = 2$ et $\overline{y_1} = \dfrac{2,4 + 2,9 + 3,1}{3} = 2,8$ donc $G_1(2\,;2,8)$.

$\overline{x_2} = \dfrac{4 + 5 + 6}{3} = 5$ et $\overline{y_2} = \dfrac{3,4 + 3,6 + 4,1}{3} = 3,7$ donc $G_2(5\,;3,7)$.

3. Voir **1.**

4. Graphiquement, on estime que le budget publicitaire de cette entreprise dépassera 50 000 € à partir de $x = 10$, c'est-à-dire à partir de 2023.

5. • Le coefficient directeur de la droite (G_1G_2) est $a = \dfrac{3,7 - 2,8}{5 - 2} = 0,3$.

Donc l'équation réduite de la droite (G_1G_2) est de la forme $y = 0,3x + b$.

$G_1(2\,;2,8) \in (G_1G_2) \iff 2,8 = 0,3 \times 2 + b \iff 2,8 = 0,6 + b \iff b = 2,8 - 0,6 \iff b = 2,2$.

Donc l'équation réduite de la droite (G_1G_2) est de la forme $y = 0,3x + 2,2$.

• On résout l'inéquation $0,3x + 2,2 > 5$.

$0,3x + 2,2 > 5 \iff 0,3x > 2,8 \iff x > \dfrac{2,8}{0,3}$.

Or $\dfrac{2,8}{0,3} \approx 9,3$. C'est donc au bout de 10 ans, c'est-à-dire en 2023, que le budget publicitaire de cette entreprise dépassera 50 000 €.

54 **1.**

Année	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019
Rang de l'année x_i	0	1	2	3	4	5	6
Prix y_i	1050	850	740	650	580	510	480
z_i	0,001	0,001 2	0,001 4	0,001 5	0,001 7	0,002	0,002 1

2. D'après la calculatrice, l'équation réduite de la droite d'ajustement de z en x par la méthode des moindres carrés est $z = 0,000\,19x + 0,001$.

3. $z = \dfrac{1}{y}$ et $z = 0,000\,19x + 0,001$ donc $\dfrac{1}{y} = 0,000\,19x + 0,001$; d'où $y = \dfrac{1}{0,000\,19x + 0,001}$

4. a. L'année 2022 correspond à $x = 9$. On a alors $y = \dfrac{1}{0,000\,19 \times 9 + 0,001}$. Soit $y \approx 369$.

En 2022, le prix de cet appareil est estimé à 369 €.

b. On résout l'inéquation $\dfrac{1}{0,000\,19x + 0,001} < \left(1 - \dfrac{70}{100}\right) \times 1050$.

$$\frac{1}{0,000\,19x + 0,001} < \left(1 - \frac{70}{100}\right) \times 1050 \iff \frac{1}{0,000\,19x + 0,001} < 315 \iff 0,000\,19x + 0,001 > \frac{1}{315}$$

$\Leftrightarrow\ 0{,}000\,19x > \dfrac{1}{315} - 0{,}001 \ \Leftrightarrow\ x > \dfrac{\frac{1}{315} - 0{,}001}{0{,}000\,19}$.

Or $\dfrac{\frac{1}{315} - 0{,}001}{0{,}000\,19} \approx 11{,}4$. C'est donc au bout de 12 ans, c'est-à-dire en 2025, que cet appareil aura perdu 70 % de sa valeur initiale.

55 **1.**

x_i	441	1 849	3 844	5 929	9 604	13 225
d_i	8	20	33	55	102	137

2. a. L'équation réduite de (AB) s'écrit sous la forme $d = ax + b$.

- $a = \dfrac{8{,}9 + 1}{1000 - 10} = 0{,}01$. Donc l'équation réduite de (AB) s'écrit sous la forme $d = 0{,}01x + b$.
- $A(10\,;-1) \in (AB)$: ainsi : $-1 = 0{,}01 \times 10 + b \Leftrightarrow b = -1{,}1$.

Donc la droite (AB) a pour équation réduite $d = 0{,}01x - 1{,}1$.

b. $d = 0{,}01x - 1{,}1$ et $x = v^2$ donc $d = 0{,}01v^2 - 1{,}1$.

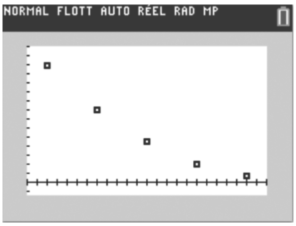
c. Lorsque $v = 150$, on a $d = 0{,}01 \times 150^2 - 1{,}1 = 223{,}9$.

Pour une vitesse de 150 km.h^{-1}, la distance d'arrêt est estimée à 223,9 m.

d. Sur $\mathbb{R}^+$, $d = 180 \Leftrightarrow 0{,}01v^2 - 1{,}1 = 180 \Leftrightarrow v^2 = \dfrac{181{,}1}{0{,}01} \Leftrightarrow v = \sqrt{\dfrac{181{,}1}{0{,}01}}$.

Or, $\sqrt{\dfrac{181{,}1}{0{,}01}} \approx 135$; pour une distance d'arrêt de 180 m, la vitesse est estimée à environ 135 km.h^{-1}.

56 **1.**

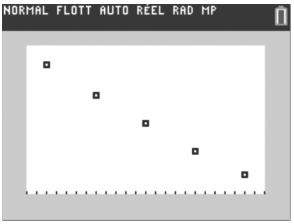


Non un ajustement affine n'est pas envisageable car les points du nuage ne sont pas proches de l'alignement.

2. a.

x_i	50	100	150	200	250
z_i	25,42	20,02	14,97	10,05	5,83

b.



Oui un ajustement affine est envisageable car les points du nuage sont proches de l'alignement.

c. La droite d'ajustement de z en x par la méthode des moindres carrés a pour équation $z = -0{,}1x + 30$.

d. • $z = \sqrt{y}$ et $z = -0{,}1x + 30$ donc $\sqrt{y} = -0{,}1x + 30$; d'où $y = (-0{,}1x + 30)^2$.

• Lorsque $x = 100$, on a $y = (-0{,}1 \times 100 + 30)^2 = 400$; ce qui est cohérent avec le 401 écrit dans le tableau.

e. Lorsque $x = 280$, on a $y = (-0{,}1 \times 280 + 30)^2 = 4$. On estime donc à 4 le nombre de clients prêts à acheter ce produit jusqu'à 280 €.

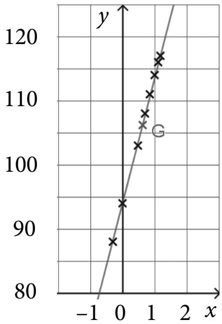
57

Non un ajustement affine n'est pas pertinent car les points du nuage ne sont pas proches de l'alignement.

1.

x_i	–0,30	0	0,48	0,70	0,85	1	1,11	1,18
y_i	88	94	103	108	111	114	116	117

2.



Oui un ajustement affine est pertinent car les points du nuage sont proches de l'alignement.

3. G(0,6275 ; 106,375).

4. La droite d'ajustement de y en x par la méthode des moindres carrés a pour équation $y = 19{,}83x + 93{,}93$.

5. $y = 19{,}83x + 93{,}93$ et $x = \log p$ donc $y = 19{,}83 \log p + 93{,}93$.

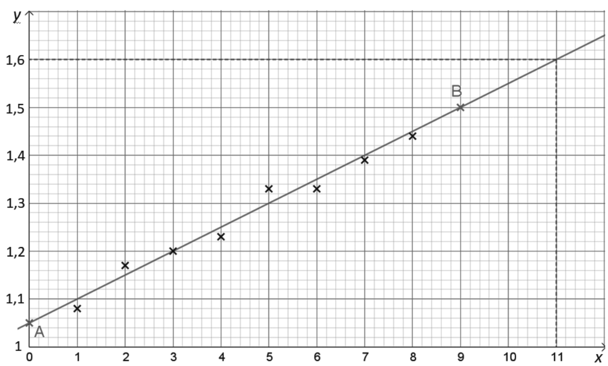
Lorsque $p = 20$, on a alors $y = 19{,}83 \log 20 + 93{,}93 \approx 120$.

Lors d'un concert de hard rock, l'intensité sonore est estimée à 120 dB.

58 **1.**

Année	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018
Rang de l'année : x_i	1	2	3	4	5	6	7	8
P_i	12,1	14,9	15,9	17,1	21,2	21,4	24,7	27,8
y_i	1,08	1,17	1,20	1,23	1,33	1,33	1,39	1,44

2.



3. D'après la calculatrice, l'équation réduite de la droite d'ajustement de y en x par la méthode des moindres carrés est $y = 0{,}05x + 1{,}05$.

Pour la représenter, on détermine les coordonnées de 2 points A et B lui appartenant :

Si $x_A = 0$, alors $y_A = 0{,}05 \times 0 + 1{,}05 = 1{,}05$ donc A(0 ; 1,05).

Si $x_B = 9$, alors $y_B = 0{,}05 \times 9 + 1{,}05 = 1{,}5$ donc B(9 ; 1,5).

4. $y = \log P$ et $y = 0{,}05x + 1{,}05$ donc $\log P = 0{,}05x + 1{,}05$; d'où $P = 10^{0{,}05x + 1{,}05}$.

5. a. L'année 2021 correspond à $x = 11$.

Sur le graphique, on lit $y = 1{,}6$. Or, $y = \log P$ donc $\log P = 1{,}6$. On a alors $P = 10^{1{,}6}$ TWh , soit environ 39,8 TWh.

b. On résout l'inéquation $10^{0{,}05x + 1{,}05} > 52$.

$10^{0{,}05x + 1{,}05} > 52 \Leftrightarrow \log(10^{0{,}05x + 1{,}05}) > \log 52 \Leftrightarrow 0{,}05x + 1{,}05 > \log 52 \Leftrightarrow 0{,}05x > \log 52 - 1{,}05 \Leftrightarrow x > \dfrac{\log 52 - 1{,}05}{0{,}05}$

Or $\dfrac{\log 52 - 1{,}05}{0{,}05} \approx 13{,}3$. C'est donc au bout de 14 ans, c'est-à-dire en 2024 que la capacité de production dépassera 52 TWh.

Pour faire le point

59 **Vrai.**

x_i	1	2	3	4	5	6	7
z_i	0,05	0,07	0,11	0,12	0,14	0,15	0,17

En représentant sur la calculatrice le nuage des points de coordonnées $(x_i ; z_i)$, on observe qu'un ajustement affine est justifié car les points sont proches de l'alignement.

60 **Faux.**

D'après la calculatrice, l'équation réduite de la droite d'ajustement de z en x par la méthode des moindres carrés a pour équation $z = 0{,}02x + 0{,}03$.

61 **Vrai.**

$z = \dfrac{1}{y}$ et $z = 0{,}02x + 0{,}03$. On en déduit que $\dfrac{1}{y} = 0{,}02x + 0{,}03$ et donc que $y = \dfrac{1}{0{,}02x + 0{,}03}$.

62 **Vrai.**

Lorsque $x = 9$ on a $y = \dfrac{1}{0{,}02 \times 9 + 0{,}03} \approx 4{,}762$.

63 **Faux.**

On résout l'équation $\dfrac{1}{0{,}02x + 0{,}03} = 3{,}7$.

$\dfrac{1}{0{,}02x + 0{,}03} = 3{,}7 \Leftrightarrow 0{,}02x + 0{,}03 = \dfrac{1}{3{,}7} \Leftrightarrow 0{,}02x = \dfrac{1}{3{,}7} - 0{,}03 \Leftrightarrow x = \dfrac{\dfrac{1}{3{,}7} - 0{,}03}{0{,}02}$.

Or $\dfrac{\dfrac{1}{3{,}7} - 0{,}03}{0{,}02} \approx 12$. Le nombre d'années de mise en circulation d'un véhicule ayant une cote argus de 3 700 € est donc estimé à 12 ans.

64 Réponse **a.**

65 Réponse **c.**

66 Réponse **c.**

67 Réponse **b.**

68 Réponse **a.**

69 Réponse **b.**

Pour approfondir

70 **1.** G(3,5 ; 101,5).

2. La droite d'ajustement de P en x par la méthode des moindres carrés a pour équation $P = 14{,}8x + 49{,}6$.

3. En 2022, $x = 9$ et lorsque $x = 9$, on a $P = 14{,}8 \times 9 + 49{,}6 = 182{,}8$.

En 2022, le chiffre d'affaires de cette entreprise est donc estimé à 182 800 000 €.

4. $P > 200 \Leftrightarrow 14{,}8x + 49{,}6 > 200 \Leftrightarrow x > \dfrac{200 - 49{,}6}{14{,}8}$.

Or $\dfrac{200 - 49{,}6}{14{,}8} \approx 10{,}2$; c'est donc au bout de $x = 11$, autrement dit en 2024, qu'on peut estimer que le chiffre d'affaires de cette entreprise dépassera 200 000 000 €.

71 **1.**

t_i	0	1	2	3	4	5	6
y_i	2,2	2	1,8	1,6	1,4	1,1	1

2. La droite d'ajustement de y en t par la méthode des moindres carrés a pour équation $y = -0{,}2t + 2{,}2$.

3. $y = \log(n - 3)$ et $y = -0{,}2t + 2{,}2$ donc $\log(n - 3) = -0{,}2t + 2{,}2$; d'où $n = 10^{-0{,}2t + 2{,}2} + 3$.

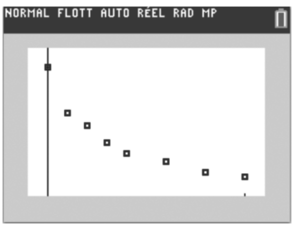
4. Lorsque $t = 8$, on a $n = 10^{-0{,}2 \times 8 + 2{,}2} + 3 \approx 7$.

Au bout de 8 heures, le nombre de particules recueillies en 1 seconde est estimé à 7.

5. $n < 5 \Leftrightarrow 10^{-0{,}2t + 2{,}2} + 3 < 5 \Leftrightarrow 10^{-0{,}2t + 2{,}2} < 2 \Leftrightarrow -0{,}2t + 2{,}2 < \log 2 \Leftrightarrow t > \dfrac{\log 2 - 2{,}2}{-0{,}2}$.

Or $\dfrac{\log 2 - 2{,}2}{-0{,}2} \approx 9{,}5$; c'est donc au bout de 10 heures qu'on peut estimer que le nombre de particules recueillies en 1 seconde deviendra inférieur à 5.

72 **1.**



Non un ajustement affine n'est pas pertinent car les points du nuage ne sont pas proches de l'alignement.

2. a.

t_i	0	1	2	3	4	6	8	10
y_i	2	3,08	3,62	4,69	5,81	7,09	10	12,20

b. La droite d'ajustement de y en t par la méthode des moindres carrés a pour équation $y = 1{,}01t + 1{,}78$.

c. $y = \dfrac{100}{C}$ et $y = 1{,}01t + 1{,}78$ donc $\dfrac{100}{C} = 1{,}01t + 1{,}78$; d'où $C = \dfrac{100}{1{,}01t + 1{,}78}$.

d. Lorsque $t = 8{,}5$, on a $C = \dfrac{100}{1{,}01 \times 8{,}5 + 1{,}78} \approx 9{,}6$.

Au bout de 8 minutes et 30 secondes, la concentration du nitrobenzoate d'éthyle est estimée à environ 9,6 millimoles par litre.

e. $C = 5 \Leftrightarrow \dfrac{100}{1{,}01t + 1{,}78} = 5 \Leftrightarrow 1{,}01t + 1{,}78 = 20 \Leftrightarrow t = \dfrac{20 - 1{,}78}{1{,}01}$.

Or $\dfrac{20 - 1{,}78}{1{,}01} \approx 18$; c'est donc au bout de 18 minutes que l'on peut estimer qu'il restera 5 $mmol.L^{-1}$ de nitrobenzoate d'éthyle.

73 Partie A

1. La droite d'ajustement de y en x par la méthode des moindres carrés a pour équation $y = -399x + 2843$.

2. Lorsque $x = 8$, on a $y = -399 \times 8 + 2\,843 = -349$.

Ce résultat est absurde car y est un prix et ne peut donc être négatif. L'ajustement utilisé ne permet donc pas de modéliser la situation.

Partie B

1.

x_i	0	1	2	3	4	5
y_i	3 000	2 400	1 920	1 536	1 229	983
z_i	3,48	3,38	3,28	3,19	3,09	2,99

2. La droite d'ajustement de z en x par la méthode des moindres carrés a pour équation $z = -0{,}10x + 3{,}48$.

3. $z = \log y$ et $z = -0{,}10x + 3{,}48$ donc $\log y = -0{,}10x + 3{,}48$; d'où $y = 10^{-0{,}10x + 3{,}48}$.

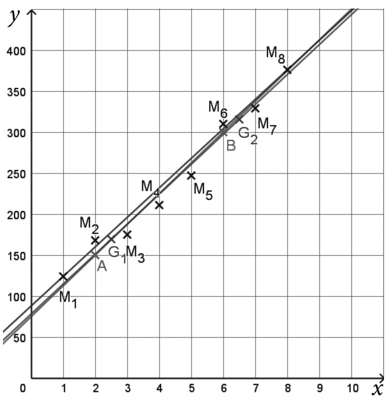
4. Lorsque $x = 8$, on a $y = 10^{-0{,}10 \times 8 + 3{,}48} \approx 479$.

Au bout de 8 ans, le prix de revente de la machine est estimé à environ 479 €.

TP Progression d'une maladie contagieuse

Partie A

1.



2. Oui un ajustement affine est envisageable car les points du nuage sont proches de l'alignement.

Partie B

1. On peut prendre les points A(2 ; 150) et B(6 ; 300).

L'équation réduite de (AB) s'écrit sous la forme $y = ax + b$.

- $a = \dfrac{300 - 150}{6 - 2} = 37{,}5$. Donc l'équation réduite de (AB) s'écrit sous la forme $y = 37{,}5x + b$.
- $A(2 ; 150) \in (AB)$: ainsi : $150 = 37{,}5 \times 2 + b \Leftrightarrow b = 75$.

Donc la droite (AB) a pour équation réduite $y = 37{,}5x + 75$.

2. L'équation réduite de (M_1M_8) s'écrit sous la forme $y = ax + b$.

- $a = \dfrac{376 - 124}{8 - 1} = 36$. Donc l'équation réduite de (M_1M_8) s'écrit sous la forme $y = 36x + b$.
- $M_1(1 ; 124) \in (M_1M_8)$: ainsi : $124 = 36 \times 1 + b \Leftrightarrow b = 88$.

Donc la droite (M_1M_8) a pour équation réduite $y = 36x + 88$.

3. $G_1(2{,}5 ; 169{,}5)$ et $G_2(6{,}5 ; 315{,}5)$.

L'équation réduite de (G_1G_2) s'écrit sous la forme $y = ax + b$.

- $a = \dfrac{315{,}5 - 169{,}5}{6{,}5 - 2{,}5} = 36{,}5$. Donc l'équation réduite de (G_1G_2) s'écrit sous la forme $y = 36{,}5x + b$.
- $G_1(2{,}5 ; 169{,}5) \in (G_1G_2)$: ainsi : $169{,}5 = 36{,}5 \times 2{,}5 + b \Leftrightarrow b = 78{,}25$.

Donc la droite (G_1G_2) a pour équation réduite $y = 36{,}5x + 78{,}25$.

En salle informatique :

1. Pour i allant de 1 à 8, $M_i(x_i ; y_i)$ et $N_i(x_i ; ax_i + b)$.

Donc $(M_iN_i)^2 = (x_i - x_i)^2 + [y_i - (ax_i + b)]^2 = [y_i - (ax_i + b)]^2$.

2. a.

```
def somme(a,b,Lx,Ly):# cette fonction renvoie  la somme des [yi-(axi+b)]^2

    #a et b sont des nombres réels
    #Lx est la liste des xi
    #Ly est la liste des yi

    S=0
    n=len(Lx) #n est la longueur de la liste Lx ou de Ly
    for i in range(n):
        S=S+(Ly[i]-(a*Lx[i]+b))**2
    return(S)
```

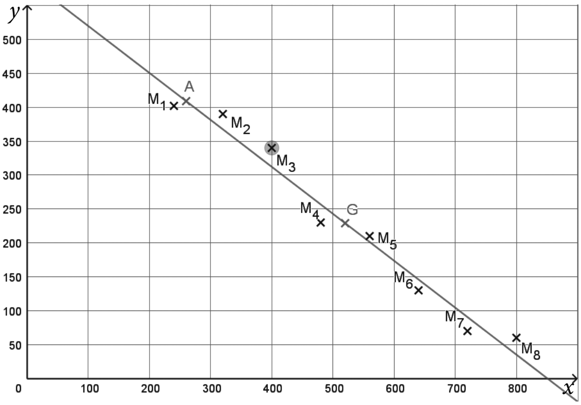
b. Dans cette situation, l'algorithme retourne le couple (36,5 ; 78,25) ; c'est donc la droite de Mayer qui fournit le meilleur ajustement affine du nuage des points.

c. Lorsque $x = 15$, on a $y = 36{,}5 \times 15 + 78{,}25 = 625{,}75$.

Donc au bout de 15 jours, le nombre de malades est estimé à environ 626.

Pour l'épreuve du bac

79 **1.**



2. G(520 ; 229).

3. Voir ci-dessus.

4. • $-\dfrac{9}{13} \times 260 + 589 = 409$ donc A appartient à la droite d'équation $y = -\dfrac{9}{13}x + 589$.

• $-\dfrac{9}{13} \times 520 + 589 = 229$ donc G appartient à la droite d'équation $y = -\dfrac{9}{13}x + 589$.

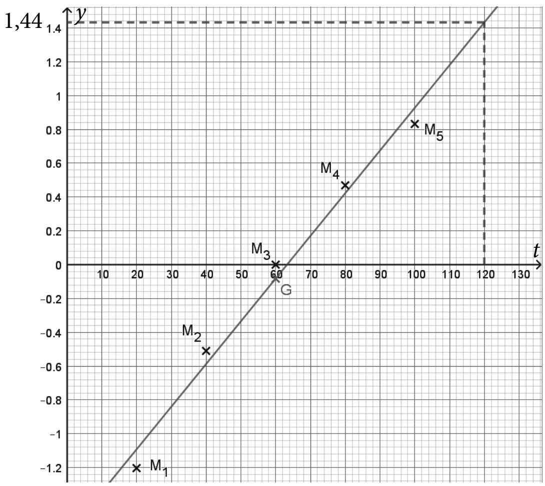
5. Lorsque $x = 500$, on a $y = -0{,}7 \times 500 + 589 = 239$.

En proposant un prix de vente de 500 €, on estime donc à 239 le nombre de montures vendues.

80 **1.**

t_i	20	40	60	80	100
y_i	–1,203	–0,510	0	0,469	0,832

2.



3. G(60 ; –0,0824).

4. a. La droite d'ajustement de y en t par la méthode des moindres carrés a pour équation $y = 0{,}025t - 1{,}597$.

b. $y = 2{,}3\log r$ et $y = 0{,}025t - 1{,}597$ donc $2{,}3\log r = 0{,}025t - 1{,}597$; d'où $r = 10^{\frac{0{,}025t\ -\ 1{,}597}{2{,}3}}$.

5. a. • En 2020, $x = 120$. Graphiquement, on lit que lorsque $x = 120$, $y = 1{,}44$.

On a alors $1{,}44 = 2{,}3\log r$ d'où $r = 10^{\frac{1{,}44}{2{,}3}} \approx 4{,}228$. En 2020, le recul du glacier est donc estimé à environ 4,228 km.

• La longueur du glacier est alors estimée à environ 25,6 – 4,228 soit 21,372 km.

b. $r = 25{,}6 \Leftrightarrow 10^{\frac{0{,}025t - 1{,}597}{2{,}3}} = 25{,}6 \Leftrightarrow \dfrac{0{,}025t - 1{,}597}{2{,}3} = \log 25{,}6 \Leftrightarrow t = \dfrac{2{,}3\log 25{,}6 + 1{,}597}{0{,}025}$.

Or $\dfrac{2{,}3\log 25{,}6 + 1{,}597}{0{,}025} \approx 193{,}4$; c'est donc dans le courant de l'année 2093 que l'on estime que le glacier aura disparu.

81 **1.**

t_i	1	2	3	4	5	6	7	8
y_i	1,03	1,39	1,74	2,11	2,46	2,83	3,19	3,57

2. $G_1(2{,}5 ; 1{,}567\,5)$ et $G_2(6{,}5 ; 3{,}012\,5)$.

• $a = \dfrac{3{,}012\,5 - 1{,}567\,5}{6{,}5 - 2{,}5} \approx 0{,}36$. Donc l'équation réduite de (G_1G_2) s'écrit sous la forme $y = 0{,}36t + b$.

• $G_1(2{,}5 ; 1{,}5675) \in (G_1G_2)$: ainsi : $1{,}567\,5 = 0{,}36 \times 2{,}5 + b \Leftrightarrow b = 0{,}6675$. D'où $b \approx 0{,}67$.

Donc la droite (G_1G_2) a pour équation réduite $y = 0{,}36t + 0{,}67$.

3. $y = \dfrac{1\,500}{1\,500 - N}$ et $y = 0{,}36t + 0{,}67$ donc $\dfrac{1\,500}{1\,500 - N} = 0{,}36t + 0{,}67$; d'où $N = 1\,500\left(1 - \dfrac{1}{0{,}36t + 0{,}67}\right)$

4. a. Lorsque $t = 10$, on a $N = 1\,500\left(1 - \dfrac{1}{0{,}36 \times 10 + 0{,}67}\right) \approx 1\,149$.

Au bout de 10 jours, on peut estimer à 1 149 le nombre de personnes convaincues par ce nouveau téléphone.

b. $N > \dfrac{90}{100} \times 1\,500 \Leftrightarrow 1\,500\left(1 - \dfrac{1}{0{,}36t + 0{,}67}\right) > 1\,350 \Leftrightarrow 0{,}36t + 0{,}67 > 10 \Leftrightarrow t > \dfrac{9{,}33}{0{,}36}$.

Or $\dfrac{9{,}33}{0{,}36} \approx 25{,}9$; c'est donc au bout de 26 jours qu'on peut estimer convaincre au moins 90 % de ce groupe.

82 **1.**

x_i	1	2	3	4	5	6	7
z_i	5,12	7,20	8,40	11,39	14,03	15,57	17,69

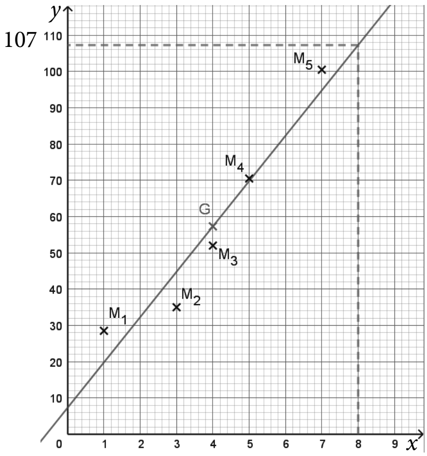
2. La droite d'ajustement de z en x par la méthode des moindres carrés a pour équation $z = 2{,}15x + 2{,}76$.

3. $z = \sqrt{y} - 3$ et $z = 2{,}15x + 2{,}76$ donc $\sqrt{y} - 3 = 2{,}15x + 2{,}76$; d'où $y = (2{,}15x + 5{,}76)^2$.

4. Sur $\mathbb{R}^+$, $y > 900 \Leftrightarrow (2{,}15x + 5{,}76)^2 > 900 \Leftrightarrow x > \dfrac{24{,}24}{2{,}15}$.

Or $\dfrac{24{,}24}{2{,}15} \approx 11{,}3$; c'est donc en 2023 que l'on peut prévoir que l'effectif de ce centre d'appels dépassera 900 employés.

83 **1.**



2. G(4 ; 57,3).

3. a. G(4 ; 57,3) appartient à D ; ainsi : $57{,}3 = 12{,}5 \times 4 + b \Leftrightarrow b = 7{,}3$.

Donc la droite D a pour équation réduite $y = 12{,}5x + 7{,}3$.

b. Voir graphique.

4. 2019 correspond à $x = 8$. Graphiquement, on lit donc qu'en 2019, la consommation des ménages de cette ville est estimée à 107 000 €.

5. a.

x_i	1	3	4	5	7	8
z_i	1,45	1,54	1,72	1,85	2	2,15

b. La droite d'ajustement de z en x par la méthode des moindres carrés a pour équation $z = 0{,}1x + 1{,}31$.

c. $z = \log y$ et $z = 0{,}1x + 1{,}31$ donc $\log y = 0{,}1x + 1{,}31$; d'où $y = 10^{0{,}1x + 1{,}31}$

$$y = 10^{0{,}1x} \times 10^{1{,}31}$$

Or $10^{1{,}31} \approx 20{,}4$ donc on a bien $y = 20{,}4 \times 10^{0{,}1x}$.

d. Lorsque $x = 10$, on a $y = 20{,}4 \times 10^{0{,}1 \times 10} = 204$.

En 2021, on peut donc estimer la consommation des ménages de cette ville à 204 000 €.

Chapitre 6

Probabilités conditionnelles

CAPACITÉS
• Construire un arbre de probabilités associé à une situation aléatoire donnée.
• Interpréter les pondérations de chaque branche d'un arbre en termes de probabilités, et notamment de probabilités conditionnelles.
• Faire le lien entre la définition des probabilités conditionnelles et la multiplication des probabilités des branches du chemin correspondant.
• Utiliser un arbre de probabilités pour calculer des probabilités.
• Calculer la probabilité d'un événement connaissant ses probabilités conditionnelles relatives à une partition de l'univers.

Vérifier les acquis de Première

1. d. **2. c.** **3. d.** **4. c.** **5. a.**

Activités

Activité 1 Un drôle d'arbre

1. $P(\overline{A})=0{,}7$ P(B sachant A) = 0,4 P($\overline{B}$ sachant $\overline{A}$) = 0,8.

2. $P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=P(\mathrm{A})\times P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})=0{,}3\times0{,}4=0{,}12$.

3. De la même manière, on a $P(\overline{\mathrm{A}}\cap\mathrm{B})=P(\overline{\mathrm{A}})\times P_{\overline{\mathrm{A}}}(\mathrm{B})=0{,}7\times0{,}2=0{,}14$.

4. $P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})+P(\overline{\mathrm{A}}\cap\mathrm{B})=0{,}12+0{,}14=0{,}26=P(\mathrm{B})$

Activité 2 Streaming et téléchargement

1. $P(\mathrm{T})=0{,}3$, $P(\mathrm{S})=0{,}7$, $P_{\mathrm{T}}(\mathrm{M})=0{,}4$, $P_{\mathrm{S}}(\mathrm{M})=0{,}2$.

2. a. $\mathrm{T}\cap\mathrm{M}$: « l'élève utilise le téléchargement et lit les vidéos sur son smartphone »
$\mathrm{S}\cap\mathrm{M}$: « l'élève utilise le streaming et lit les vidéos sur son smartphone »

b. $P(\mathrm{T}\cap\mathrm{M})=P(\mathrm{T})\times P_{\mathrm{T}}(\mathrm{M})=0{,}3\times0{,}4=0{,}12$ et $P(\mathrm{S}\cap\mathrm{M})=P(\mathrm{S})\times P_{\mathrm{S}}(\mathrm{M})=0{,}7\times0{,}2=0{,}14$.

3. D'après l'énoncé, on a $P(\mathrm{M})=P(\mathrm{T}\cap\mathrm{M})+P(\mathrm{S}\cap\mathrm{M})=0{,}12+0{,}14=0{,}26$.

4. On cherche à calculer $P_M(T)$. Or, d'après la formule des probabilités conditionnelles, on a

$$P_{\mathrm{M}}(\mathrm{T})=\frac{P(\mathrm{T}\cap\mathrm{M})}{P(\mathrm{M})}=\frac{0{,}12}{0{,}26}=\frac{6}{13}.$$

Activité 3 Un test si fiable ?

1. D'après les données de l'énoncé, on a : $P(\mathrm{M})=0{,}001$, $P_{\mathrm{M}}(\mathrm{T})=0{,}997$, $P_{\overline{\mathrm{M}}}(\overline{\mathrm{T}})=0{,}95$.

Ainsi, on a :

$$P(\mathrm{T})=P(\mathrm{M})\times P_{\mathrm{M}}(\mathrm{T})+P(\overline{\mathrm{M}})\times P_{\overline{\mathrm{M}}}(T)=0{,}001\times 0{,}997+0{,}999\times 0{,}05=0{,}050\ 947$$

2. $P_{\mathrm{T}}(\mathrm{M})=\dfrac{P(\mathrm{M}\cap\mathrm{T})}{P(\mathrm{T})}=\dfrac{0{,}001\times 0{,}997}{0{,}050\ 947}\approx 0{,}02$

3. Ce test n'est absolument pas fiable car $P_{\mathrm{T}}(\mathrm{M})\approx 0{,}02<0{,}95$.

Activité 4 L'indépendance

1. On a : $P(\mathrm{R})=\dfrac{4}{32}=\dfrac{1}{8}$ et $P(\mathrm{N})=\dfrac{20}{32}=\dfrac{5}{8}$. Par ailleurs, si on tire un roi, il est impossible de tirer un nombre ensuite. Ainsi, $P_{\mathrm{R}}(\mathrm{N})=0\neq\dfrac{5}{8}=P(\mathrm{N})$, donc R et N ne sont pas indépendants.

2. a. Il y a 8 cartes cœur, donc $32-8=24$ cartes ne sont pas des cœurs, d'où $P(\mathrm{C})=\dfrac{24}{32}=\dfrac{3}{4}$.

- Sachant que l'on tire un nombre, donc une carte parmi les 7, 8, 9, 10 et As, il y en a 5 parmi ces 20 qui sont des cœurs, donc $20-5=15$ qui ne sont pas des cœurs.

Ainsi, $P_{\mathrm{N}}(\mathrm{C})=\dfrac{15}{20}=\dfrac{3}{4}=P(\mathrm{C})$, donc les événements C et N sont indépendants.

- De même, on a $P_{\overline{\mathrm{N}}}(\mathrm{C})=\dfrac{9}{12}=\dfrac{3}{4}=P(\mathrm{C})$, donc les événements C et $\overline{\mathrm{N}}$ sont indépendants.

b. - Sachant que l'on tire l'un des quatre rois, trois d'entre eux ne sont pas des cœurs.

Ainsi, $P_{\mathrm{R}}(\mathrm{C})=\dfrac{3}{4}=P(\mathrm{C})$, donc les événements C et R sont indépendants.

- De même, on a $P_{\overline{\mathrm{R}}}(\mathrm{C})=\dfrac{21}{28}=\dfrac{3}{4}=P(\mathrm{C})$, donc les événements C et $\overline{\mathrm{R}}$ sont indépendants.

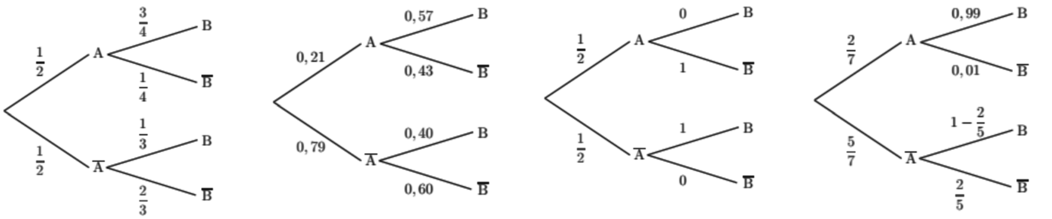
Exercices

Pour acquérir les automatismes

2 $P_{\mathrm{B}}(\mathrm{A})=0{,}25$.

3 $P_{\mathrm{B}}(\mathrm{A})$ doit prendre la valeur $0{,}6$.

4



5 **1.** $P(\mathrm{A})=0{,}15$

$P_{\mathrm{A}}(\overline{\mathrm{B}})=0{,}56$

$P_{\overline{\mathrm{A}}}(\mathrm{B})=0{,}3$

2. Non.

6 **1.** $P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=\dfrac{2}{7}$ et $(\overline{\mathrm{A}}\cap\mathrm{B})=\dfrac{3}{7}$.

2. $P(\mathrm{B})=\dfrac{5}{7}$.

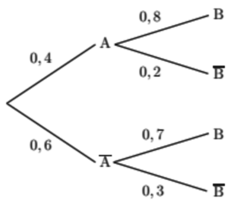
7 **1.** $P(\mathrm{A})\times P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})=\dfrac{1}{6}=P(\overline{\mathrm{A}})\times P_{\overline{\mathrm{A}}}(B)$.

2. $P(\mathrm{B})=\dfrac{1}{3}$.

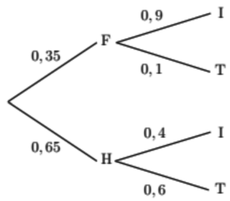
8 **1.** Voir l'arbre ci-contre.

2. $P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=0{,}32$ et $P(\overline{\mathrm{A}}\cap B)=0{,}42$

3. $P(\mathrm{B})=0{,}4\times 0{,}8+0{,}6\times 0{,}7=0{,}74$.



9 Voir l'arbre ci-contre.



10 $P(\mathrm{B})=0{,}5\times 0{,}2+0{,}5\times 0{,}6=0{,}4$.

11 $P(\mathrm{A})=0{,}35+0{,}45=0{,}8$.

12 $P(\mathrm{M})=0{,}8\times 0{,}75+0{,}2\times 0{,}25=0{,}65$.

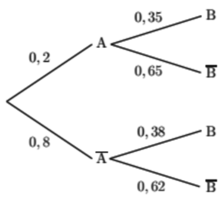
13 Oui, car $P(\mathrm{A})\times P(\mathrm{B})=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{6}=P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})$.

14 Non, car $P_{\mathrm{B}}(\mathrm{A})=0{,}7\neq 0{,}3=P(\mathrm{A})$.

15 A et B sont indépendants donc $P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=P(\mathrm{A})\times P(\mathrm{B})=0{,}6\times 0{,}5=0{,}3$.

Pour commencer

16 **1.** Voir l'arbre ci-contre.



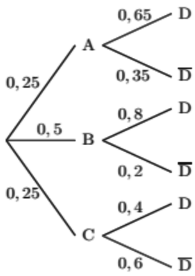
2. $P_{\overline{\mathrm{A}}}(\mathrm{B})=0{,}38$.

3. $P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=P(\mathrm{A})\times P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})=0{,}2\times 0{,}35=0{,}07$.

4. $P(\overline{\mathrm{A}})=1-P(\mathrm{A})=0{,}8$ donc

$P(\mathrm{B})=P(\mathrm{A})\times P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})+P(\overline{\mathrm{A}})\times P_{\overline{\mathrm{A}}}(\mathrm{B})=0{,}2\times 0{,}35+0{,}8\times 0{,}38=0{,}374$.

17 **1.** Voir l'arbre ci-contre.



2. $P(\mathrm{A} \cap \mathrm{D}) = P(\mathrm{A}) \times P_{\mathrm{A}}(\mathrm{D}) = 0{,}162\ 5$.

3. D'après la formule des probabilités totales et l'arbre précédent,

$P(\mathrm{D}) = P(\mathrm{A} \cap \mathrm{D}) + P(\mathrm{B} \cap \mathrm{D}) + P(\mathrm{C} \cap \mathrm{D})$

$= 0{,}162\ 5 + P(\mathrm{B}) \times P_{\mathrm{B}}(\mathrm{D}) + P(\mathrm{C}) \times P_{\mathrm{C}}(\mathrm{D})$

$= 0{,}162\ 5 + 0{,}4 + 0{,}1$

$= 0{,}662\ 5$

4. D'après la formule des probabilités conditionnelles, et en utilisant les résultats des questions 2. et 3., on a $P_{\mathrm{D}}(\mathrm{A}) = \dfrac{P(\mathrm{A} \cap \mathrm{D})}{P(\mathrm{D})} = \dfrac{13}{53}$.

18 **1. Faux.** C'est $P_{\mathrm{B}}(\mathrm{C}) = 0{,}8$.

2. Vrai. $P(\mathrm{A} \cap \mathrm{C}) = 0{,}25 \times 0{,}6 = 0{,}15$.

3. Vrai. $P(\mathrm{C}) = P(\mathrm{A} \cap \mathrm{C}) + P(\mathrm{B} \cap \mathrm{C}) = 0{,}15 + 0{,}75 \times 0{,}2 = 0{,}3$.

4. Vrai. $P_{\mathrm{C}}(\mathrm{A}) = \dfrac{P(\mathrm{A} \cap \mathrm{C})}{P(C)} = \dfrac{0{,}15}{0{,}3} = 0{,}5$.

5. Vrai. $P_{\mathrm{C}}(\overline{\mathrm{A}}) = 1 - P_{\mathrm{C}}(\mathrm{A}) = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$.

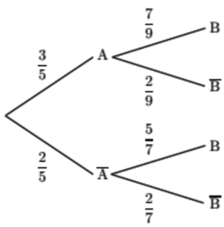
19

1. a. 2. b. 3. a. 4. a.

20

$P(\mathrm{A})$	$P(\mathrm{B})$	$P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$	$P_{\mathrm{B}}(\mathrm{A})$	$P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})$
0,22	0,56	0,196	0,35	0,891
0,033	0,80	0,02	0,025	0,60
$\dfrac{3}{10}$	$\dfrac{7}{32}$	$\dfrac{1}{8}$	$\dfrac{4}{7}$	$\dfrac{5}{12}$
$\dfrac{1}{3}$	$\dfrac{2}{5}$	$\dfrac{2}{7}$	$\dfrac{5}{7}$	$\dfrac{6}{7}$

21 **1.** $P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) = \dfrac{P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})}{P(\mathrm{A})} = \dfrac{\frac{7}{15}}{\frac{3}{5}} = \dfrac{7}{9}$



2. Voir ci-contre

3. $P_{\overline{\mathrm{A}}}(\mathrm{B}) = 1 - P_{\overline{\mathrm{A}}}(\overline{\mathrm{B}}) = \dfrac{5}{7}$

4. $P(\mathrm{B}) = P(\mathrm{A}) \times P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) + P(\overline{\mathrm{A}}) \times P_{\overline{\mathrm{A}}}(\mathrm{B}) = \dfrac{3}{5} \times \dfrac{7}{9} + \dfrac{2}{5} \times \dfrac{5}{7} = \dfrac{79}{105}$

22 L'énoncé donne $P(\mathrm{L}) = 0{,}7$, $P(\mathrm{F}) = 0{,}3$, $P_{\mathrm{L}}(\mathrm{A}) = 0{,}9$, $P_{\mathrm{F}}(\mathrm{A}) = 0{,}1$.

1. L'événement $\mathrm{F} \cap \mathrm{A}$ signifie « l'article est un Fruit et pousse à l'Air libre », et $\mathrm{L} \cap \mathrm{A}$ signifie « l'article est un Légume et pousse à l'Air libre ».

2. Les événements $F \cap A$ et $L \cap A$ forment une partition de l'événement A, donc d'après la formule des probabilités totales, on a :

$P(A) = P(F \cap A) + P(L \cap A) = P(F) \times P_F(A) + P(L) \times P_L(A) = 0{,}3 \times 0{,}1 + 0{,}7 \times 0{,}9 = 0{,}66$

23 $P(A) = 0{,}5$ car A et B sont indépendants si et seulement si $P_B(A) = P(A)$.

24 $P(B) = \frac{3}{5}$ car A et B sont indépendants si et seulement si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

25

1. a. **2. c.** **3. b.** **4. a.**

26 **1. Faux**, $P(B)$ est nécessairement supérieure (ou égale) à $P(A \cap B)$.

2. Faux, car si A et B vérifient les conditions données, alors $P(B) = 3$ ce qui est impossible.

3. Vrai, car si A et B sont indépendants, alors $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0{,}3}{0{,}4} = \frac{3}{4} = P(A)$.

4. Vrai, car $P(\overline{A}) = 0{,}4$, $P(B) = 0{,}5$ et $P(\overline{A} \cap B) = 0{,}2$, donc $\overline{A}$ et B sont indépendants.

27 **1.** $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{2}$ et $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$ donc les événements A et B sont indépendants.

2. $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(C) = \frac{3}{4}$ et $P(A \cap C) = \frac{1}{4}$ donc les événements A et C ne sont pas indépendants.

28 **1.** $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{3}$ et $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$ donc les événements A et B sont indépendants.

2. $P(A) = \frac{6}{13}$, $P(B) = \frac{4}{13}$ et $P(A \cap B) = \frac{2}{13}$ donc les événements A et B ne sont pas indépendants.

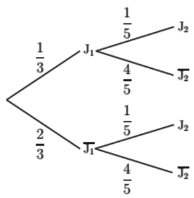
29 **1.** On note S l'événement « l'élève est sportif » et E l'événement « l'élève est externe ».

$P(S) \times P(E) = \frac{40}{100} \times \frac{52}{100} \neq \frac{11}{50} = P(S \cap E)$, donc les événements S et E ne sont pas indépendants.

2. On note $\overline{S}$ l'événement « l'élève est non sportif » et D l'événement « l'élève est demi-pensionnaire ».

$P(\overline{S}) \times P(D) = \frac{60}{100} \times \frac{30}{100} = \frac{18}{100} = P(\overline{S} \cap D)$, donc les événements $\overline{S}$ et D sont indépendants.

30 **1.** Voir l'arbre ci-contre.



2. Puisque chaque joueur lance à son panier indépendamment de l'autre joueur, les événements J_1 et J_2 sont indépendants. Ainsi, on a

$$P(J_1 \cap J_2) = P(J_1) \times P(J_2) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{15}$$

3. Solution 1 (avec arbre) : en utilisant l'arbre de probabilités de la question **1.**, on en déduit que

$$P(\overline{J_1} \cap \overline{J_2}) = P(\overline{J_1}) \times P_{\overline{J_1}}(\overline{J_2}) = \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{8}{15}$$

Solution 2 (sans arbre) : l'événement « aucun des joueurs ne réussit son panier à trois points » est $\overline{J_1} \cap \overline{J_2}$. Or, puisque J_1 et J_2 sont indépendants, $\overline{J_1}$ et $\overline{J_2}$ sont également indépendants. On en déduit que

$$P(\overline{J_1} \cap \overline{J_2}) = P(\overline{J_1}) \times P(\overline{J_2}) = \left(1 - \frac{1}{3}\right) \times \left(1 - \frac{1}{5}\right) = \frac{8}{15}$$

31 **1.** $P(\mathrm{J})\times P(\mathrm{T})=0{,}75\times0{,}6=0{,}45=P(\mathrm{J}\cap\mathrm{T})$, donc J et T sont indépendants.

2. $P(\mathrm{M})\times P(\mathrm{T})=0{,}25\times0{,}6=0{,}15\neq P(\mathrm{M}\cap\mathrm{T})$, donc M et T ne sont pas indépendants.

32 **1.** Les événements I « la face obtenue est un nombre impair » et M « la face obtenue est un multiple de 3 » sont indépendants car : $P(\mathrm{I})\times P(\mathrm{M})=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}=P(\mathrm{I}\cap\mathrm{M})$

On pourrait aussi prendre (par exemple) l'événement Q « la face obtenue porte un chiffre inférieur ou égal à 4 ».

2. Les événements P « la face obtenue est un nombre pair » et I « la face obtenue est un nombre impair » ne sont pas indépendants, car $P(\mathrm{I})=\frac{1}{2}=P(\mathrm{P})$ alors que $P(\mathrm{I}\cap\mathrm{P})=0$.

33 On note P_k l'événement « obtenir pile au k-ième lancer ».

1. $P(\mathrm{P}_1)=P(\mathrm{PP})+P(\mathrm{PF})=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$.

2. $P(\mathrm{P}_2)=P(\mathrm{PP})+P(\mathrm{FP})=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}=\frac{11}{24}$.

3. La probabilité d'avoir deux fois pile est $P(\mathrm{PP})=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{8}$. Or, l'événement PP correspond à l'événement $\mathrm{P}_1\cap\mathrm{P}_2$.

De plus, $P(\mathrm{P}_1)\times P(\mathrm{P}_2)=\frac{1}{2}\times\frac{11}{24}=\frac{11}{48}\neq\frac{3}{8}=P(\mathrm{P}_1\cap\mathrm{P}_2)$: les événements « obtenir pile au 1[er] lancer » et « obtenir pile au 2[e] lancer » sont donc non indépendants.

34 **Partie A**

1. On note F l'événement « l'adhérent est une fille » et M l'événement « l'adhérent est minime ». On a :

$$P(\mathrm{F})\times P(\mathrm{M})=\frac{40}{100}\times\frac{24}{100}=\frac{12}{125}\neq\frac{3}{50}=P(\mathrm{F}\cap\mathrm{M})$$

Donc F et M ne sont pas indépendants.

2. On note G l'événement « l'adhérent est un garçon » et C l'événement « l'adhérent est cadet ». On a :

$$P(\mathrm{G})\times P(\mathrm{C})=\frac{60}{100}\times\frac{42}{100}=\frac{63}{250}\neq\frac{3}{10}=P(\mathrm{G}\cap\mathrm{C})$$

Donc G et C ne sont pas indépendants.

3. On note $\mathrm{F}\cap\mathrm{C}$ l'événement « l'adhérent est une fille et cadet » et $\mathrm{F}\cap\mathrm{M}$ l'événement « l'adhérent est une fille et minime ». Ces événements sont incompatibles car on ne peut pas être à la fois une fille minime et une fille cadette. On a :

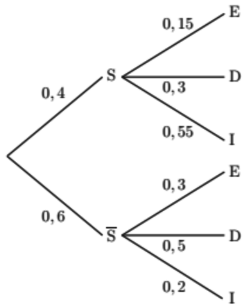
$$P(\mathrm{F}\cap\mathrm{C})\times P(\mathrm{F}\cap\mathrm{M})=\frac{12}{100}\times\frac{6}{100}=\frac{9}{1250}\neq0=P((\mathrm{F}\cap\mathrm{C})\cap(\mathrm{F}\cap\mathrm{M}))$$

Donc $\mathrm{F}\cap\mathrm{C}$ et $\mathrm{F}\cap\mathrm{M}$ ne sont pas indépendants.

Partie B

1.

	Minimes	Cadet	Junior	TOTAL
Filles	6	12	22	40
Garçons	18	30	12	60
TOTAL	24	42	34	100



2. À l'aide de l'arbre et de la formule des probabilités totales, on a

$$P(\mathrm{E}) = P(\mathrm{S}) \times P_{\mathrm{S}}(\mathrm{E}) + P(\overline{\mathrm{S}}) \times P_{\overline{\mathrm{S}}}(\mathrm{E}) = 0{,}24 = \frac{24}{100}$$

ce qui correspond au calcul réalisé à l'aide du tableau précédent.

3. À l'aide de la formule des probabilités conditionnelles, on a :

$$P_{\mathrm{I}}(\mathrm{S}) = \frac{P(\mathrm{S} \cap \mathrm{I})}{P(\mathrm{I})} = \frac{0{,}4 \times 0{,}55}{0{,}4 \times 0{,}55 + 0{,}6 \times 0{,}2} = \frac{11}{17}$$

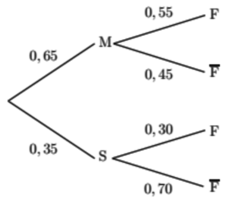
À l'aide du tableau, on a

$$P_{\mathrm{I}}(\mathrm{S}) = \frac{22}{34} = \frac{11}{17}$$

Pour s'entraîner

35 Non, car $P_{\mathrm{B}}(\mathrm{A}) = \dfrac{P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})}{P(\mathrm{B})}$ est une probabilité donc doit être comprise entre 0 et 1. On ne peut donc donner à $P(\mathrm{B})$ qu'une valeur réelle comprise entre 0,5 et 1.

36 **1.** Voir l'arbre ci-contre.



2. $\mathrm{M} \cap \mathrm{F}$ est l'événement « le client vient manger le midi et commande une formule entrée-plat-dessert ». Grâce à l'arbre précédent, on trouve $P(\mathrm{M} \cap \mathrm{F}) = 0{,}375\ 5$.

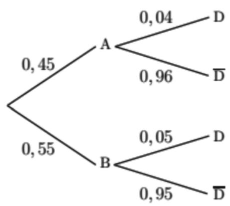
3. D'après l'arbre de la question **1.** et le résultat de la question **2.**, la formule des probabilités totales donne $P(\mathrm{F}) = P(\mathrm{M} \cap \mathrm{F}) + P(\overline{\mathrm{M}} \cap \mathrm{F}) = 0{,}462\ 5$.

4. En utilisant les questions **2.** et **3.**, et la formule des probabilités conditionnelles, on a $P_{\mathrm{F}}(\mathrm{M}) = \dfrac{P(\mathrm{M} \cap \mathrm{F})}{P(\mathrm{F})} \approx 0{,}773$.

37

1. b. **2. a.** **3. c.** **4. b.**

38 **1. Faux.** C'est l'arbre ci-contre qui correspond à la situation.



2. Faux. $P(\mathrm{A} \cap \mathrm{D}) = 0{,}45 \times 0{,}04 = 0{,}018$.

3. Faux. $P(\overline{\mathrm{D}}) = P(\mathrm{A}) \times P_{\mathrm{A}}(\overline{\mathrm{D}}) + P(\mathrm{B}) \times P_{\mathrm{B}}(\overline{\mathrm{D}})$

$= 0{,}45 \times 0{,}96 + 0{,}55 \times 0{,}95 = 0{,}954\ 5$.

4. Faux. $P_{\mathrm{D}}(\mathrm{B}) = \dfrac{P(\mathrm{B} \cap \mathrm{D})}{P(\mathrm{D})} \approx 0{,}6 < 0{,}95$.

39 **1.** Si un employé est en retard au jour 2, la probabilité qu'il soit en retard au jour 3 est $P_{R_2}(R_3)=\frac{1}{20}$. De même, si un employé est à l'heure au jour 2, la probabilité qu'il soit en retard au jour 3 est $P_{\overline{R_2}}(R_3)=\frac{1}{5}$.

2. Par hypothèse, $P(R_1)=0$, ce qui signifie que l'employé était à l'heure au jour 1. Alors, la probabilité qu'il soit en retard au jour 2 est $P(R_2)=\frac{1}{5}$. Ainsi, on a

$$P(R_2\cap R_3)=P(R_2)\times P_{R_2}(R_3)=\frac{1}{5}\times\frac{1}{20}=\frac{1}{100}$$

De même, $P(R_1)=0$, on en déduit que $P(\overline{R_2})=1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$. Ainsi, on a

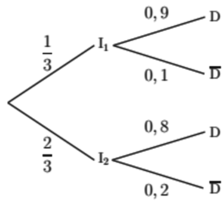
$$P(\overline{R_2}\cap R_3)=P(\overline{R_2})\times P_{\overline{R_2}}(R_3)=\frac{4}{5}\times\frac{1}{5}=\frac{4}{25}$$

3. Puisque $R_2\cap R_3$ et $\overline{R_2}\cap R_3$ forment une partition de R_3, par la formule des probabilités totales, on en déduit que

$$P(R_3)=P(R_2\cap R_3)+P(\overline{R_2}\cap R_3)=\frac{1}{100}+\frac{4}{25}=\frac{17}{100}$$

D'après l'énoncé, on a $P_{\overline{R_3}}(R_4)=\frac{1}{5}$.

40 **1.** En notant I_1 (respectivement I_2) l'événement « l'interrupteur I_1 (respectivement I_2) laisse passer le courant » et D l'événement « la diode émet de la lumière », on peut modéliser la situation par l'arbre de probabilité suivant :



D'après la formule des probabilités totales, on a donc :

$$P(D)=P(I_1)\times P_{I_1}(D)+P(I_2)\times P_{I_2}(D)=\frac{1}{3}\times 0{,}9+\frac{2}{3}\times 0{,}8=\frac{5}{6}$$

2. Sachant que la diode n'éclaire pas, on cherche lequel des deux interrupteurs a la plus grande probabilité de laisser passer le courant. Il suffit de calculer $P_{\overline{D}}(I_1)$ et $P_{\overline{D}}(I_2)$ et de comparer les probabilités obtenues. Grâce à la formule des probabilités conditionnelles et aux résultats de la question précédente, on a :

$$P_{\overline{D}}(I_1)=\frac{P(I_1\cap\overline{D})}{P(\overline{D})}=\frac{\frac{1}{3}\times 0{,}1}{1-\frac{5}{6}}=0{,}2 \quad \text{et} \quad P_{\overline{D}}(I_2)=\frac{P(I_2\cap\overline{D})}{P(\overline{D})}=\frac{\frac{2}{3}\times 0{,}2}{1-\frac{5}{6}}=0{,}8\,.$$

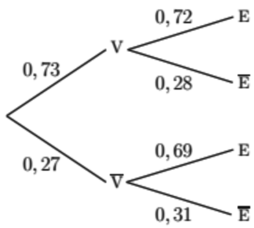
Ainsi, puisque $P_{\overline{D}}(I_1)<P_{\overline{D}}(I_2)$, il est plus probable que ce soit l'interrupteur I_2 qui ait laissé passer le courant.

41 **1.**

	Vacances	Hors vacances	TOTAL
Europe	158	56	214
Hors Europe	61	25	86
TOTAL	219	81	300

On note V l'événement « le client est parti pendant les vacances scolaires » et E l'événement « le client est parti en Europe ».

Voir l'arbre ci-contre.



2. $P(\overline{E})=P(V)\times P_V(\overline{E})+P(\overline{V})\times P_{\overline{V}}(\overline{E})=0{,}2881$.

3. $P_E(\overline{V})=\frac{P(\overline{V}\cap E)}{P(E)}=\frac{0{,}27\times 0{,}69}{1-0{,}2881}\approx 0{,}2617$.

42 **1.** $P(\mathrm{A})\times P(\mathrm{B})=\frac{2}{3}\times\frac{5}{6}=\frac{10}{18}=\frac{2}{9}=P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})$, donc A et B sont indépendants.

Réponse **a.**

2. Même si l'on peut calculer $P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=P(\mathrm{A})\times P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})=\frac{1}{6}$, il nous manque l'information sur $P(\mathrm{B})$. On ne peut donc rien dire sur l'éventuelle indépendance de A et B.

Réponse **c.**

3. A et B sont indépendants et $P(\mathrm{A})\neq 0 \Leftrightarrow P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=P(\mathrm{A})\times P(\mathrm{B})$

$$\Leftrightarrow P(\mathrm{B})=\frac{P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})}{P(\mathrm{A})}=\frac{\frac{5}{12}}{\frac{2}{3}}=\frac{5}{8}.$$

Réponse **b.**

4. Si $P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})=0{,}25$, alors $P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})\neq P(\mathrm{B})$ donc A et B ne peuvent être indépendants.

De même, si $P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=0{,}1$, alors $P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})\neq P(\mathrm{A})\times P(\mathrm{B})$ donc A et B ne peuvent être indépendants.

Cependant, $P(\overline{\mathrm{A}})=0{,}25 \Leftrightarrow P(A)=1-P(\overline{\mathrm{A}})=1-0{,}25=0{,}75$. Ainsi,

$P_{\mathrm{B}}(\mathrm{A})=0{,}75 \Leftrightarrow P_{\mathrm{B}}(\mathrm{A})=0{,}75=P(\mathrm{A}) \Leftrightarrow$ A et B sont indépendants.

Réponse **a.**

43 D'une part, on lit sur l'arbre que $P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})=0{,}4\times 0{,}5=0{,}2$. D'autre part, d'après la formule des probabilités totales, on a

$P(\mathrm{B})=P(\mathrm{A})\times P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})+P(\overline{\mathrm{A}})\times P_{\overline{\mathrm{A}}}(\mathrm{B})=0{,}4\times 0{,}5+0{,}6\times p=0{,}2+0{,}6p$.

Ainsi, $P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})=P(\mathrm{B}) \Leftrightarrow 0{,}2=0{,}2+0{,}6p \Leftrightarrow 0{,}6p=0 \Leftrightarrow p=0$.

44 **1.** A et B sont indépendants donc $P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=P(\mathrm{A})\times P(\mathrm{B})=0{,}35\times 0{,}48=0{,}168$.

2. Grâce à la formule du premier point du **coup de pouce**, on a :

$P(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})=P(\mathrm{A})+P(\mathrm{B})-P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=0{,}35+0{,}48-0{,}168=0{,}662$.

3. Le deuxième point du **coup de pouce** nous dit que puisque A et B sont indépendants, alors A et $\overline{\mathrm{B}}$ sont aussi indépendants. Ainsi, on a :

$P(\mathrm{A}\cap\overline{\mathrm{B}})=P(\mathrm{A})\times P(\overline{\mathrm{B}})=0{,}35\times(1-0{,}48)=0{,}182$.

4. $P(\mathrm{A}\cup\overline{\mathrm{B}})=P(\mathrm{A})+P(\overline{\mathrm{B}})-P(\mathrm{A}\cap\overline{\mathrm{B}})=0{,}35+0{,}52-0{,}182=0{,}688$.

45 On note E l'événement « la face obtenue est un nombre pair » et O l'événement « la face obtenue est un nombre impair ».

1. On a une chance sur deux d'obtenir un nombre pair au premier lancer, donc $P(\mathrm{A})=\frac{1}{2}$.

Sur les $6\times 6=36$ lancers possibles, il n'y a que 4 possibilités d'obtenir une somme égale à 5 avec les numéros obtenus sur les deux dés : $(2\,;3), (3\,;2), (1\,;4), (4\,;1)$.

Donc $P(\mathrm{S})=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$.

L'événement $\mathrm{A}\cap\mathrm{S}$ n'est réalisé que si le premier dé donne 2 et que le deuxième dé donne 3 ou si le premier dé donne 4 et que le deuxième dé donne 1.

Donc $P(\mathrm{A}\cap\mathrm{S})=\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$.

Ainsi, $P(\mathrm{A})\times P(\mathrm{S})=\frac{1}{2}\times\frac{1}{9}=\frac{1}{18}=P(\mathrm{A}\cap\mathrm{S})$, donc les événements A et S sont indépendants.

2. Il n'y a qu'une chance sur six d'obtenir la face numérotée 6 au premier lancer, donc $P(\mathrm{B})=\dfrac{1}{6}$.

Sur les $6\times 6=36$ lancers possibles, il n'y a que 4 possibilités d'obtenir un produit égal à 12 avec les numéros obtenus sur les deux dés : $(2\,;6), (6\,;2), (3\,;4), (4\,;3)$.

Donc $P(\mathrm{M})=\dfrac{4}{36}=\dfrac{1}{9}$.

L'événement $\mathrm{B}\cap\mathrm{M}$ n'est réalisé que si le premier dé donne 6 et le deuxième dé donne 2. Donc $P(\mathrm{B}\cap\mathrm{M})=\dfrac{1}{36}$.

Ainsi, $P(\mathrm{B})\times P(\mathrm{M})=\dfrac{1}{6}\times\dfrac{1}{9}=\dfrac{1}{54}\neq\dfrac{1}{36}=P(\mathrm{B}\cap\mathrm{M})$, donc les événements B et M ne sont pas indépendants.

$\boxed{46}$ **1. Faux.** Les manœuvres C_1 et C_2 ne sont pas différentes, donc ne sont pas indépendantes. De plus, l'événement $\mathrm{C}_1\cap\mathrm{C}_2$ est impossible car si le créneau est réussi au 1er essai, il n'a pas besoin d'être réalisé à un essai suivant.

2. Vrai, car les manœuvres sont différentes donc indépendantes. Ainsi $P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=P(\mathrm{A})\times P(\mathrm{B})=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{4}{7}=\dfrac{4}{21}$.

3. Vrai, car les événements B et C étant indépendants, alors les événements B et $\overline{\mathrm{C}}$ sont également indépendants. Ainsi, $P(\mathrm{B}\cap\overline{\mathrm{C}})=\dfrac{4}{7}\times\dfrac{5}{6}=\dfrac{20}{42}=\dfrac{10}{21}$.

4. Faux. D'une part, puisque les événements B et C sont indépendants, alors $P_{\mathrm{C}}(\mathrm{B})=P(\mathrm{B})=\dfrac{4}{7}$. L'événement C_2 sachant C_1 est l'événement impossible, donc $P_{\mathrm{C}_1}(\mathrm{C}_2)=0$.

$\boxed{47}$ On note E_k l'événement « le stagiaire réussit la k-ième épreuve ».

Solution 1 :

1. Les événements E_1, E_2 et E_3 étant indépendants, on a :

$$P(\mathrm{E}_1\cap\mathrm{E}_2\cap\mathrm{E}_3)=P(\mathrm{E}_1)\times P(\mathrm{E}_2)\times P(\mathrm{E}_3)=0{,}97\times 0{,}95\times 0{,}9=0{,}829\ 35$$

2. Puisque les événements E_1, E_2 et E_3 sont indépendants, il en est de même des événements $\overline{\mathrm{E}_1}$, $\overline{\mathrm{E}_2}$ et $\overline{\mathrm{E}_3}$.

Ainsi, on a :

$$\begin{aligned}P\left(\overline{\mathrm{E}_1}\cap\overline{\mathrm{E}_2}\cap\overline{\mathrm{E}_3}\right)&=P\left(\overline{\mathrm{E}_1}\right)\times P\left(\overline{\mathrm{E}_2}\right)\times P\left(\overline{\mathrm{E}_3}\right)\\&=(1-0{,}97)\times(1-0{,}95)\times(1-0{,}9)\\&=1{,}5\times 10^{-4}\end{aligned}$$

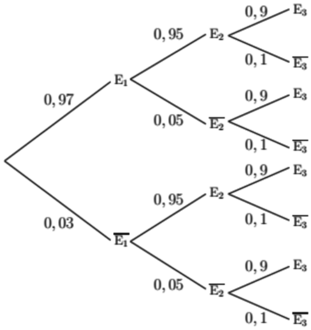
3. On note U l'événement « une seule des trois épreuves est réussie ». Pour que U soit réalisé, il faut que :

- soit E_1 est réalisée mais ni E_2 ni E_3 le sont : c'est l'événement $\mathrm{E}_1\cap\overline{\mathrm{E}_2}\cap\overline{\mathrm{E}_3}$
- soit E_2 est réalisée mais ni E_1 ni E_3 le sont : c'est l'événement $\overline{\mathrm{E}_1}\cap\mathrm{E}_2\cap\overline{\mathrm{E}_3}$
- soit E_3 est réalisée mais ni E_1 ni E_2 le sont : c'est l'événement $\overline{\mathrm{E}_1}\cap\overline{\mathrm{E}_2}\cap\mathrm{E}_3$

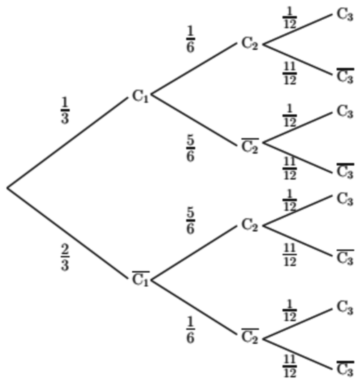
Ainsi, on a :

$$\begin{aligned}P(\mathrm{U})&=P\left(\mathrm{E}_1\cap\overline{\mathrm{E}_2}\cap\overline{\mathrm{E}_3}\right)+P\left(\overline{\mathrm{E}_1}\cap\mathrm{E}_2\cap\overline{\mathrm{E}_3}\right)+P\left(\overline{\mathrm{E}_1}\cap\overline{\mathrm{E}_2}\cap\mathrm{E}_3\right)\\&=0{,}97\times 0{,}05\times 0{,}1+0{,}03\times 0{,}95\times 0{,}1+0{,}03\times 0{,}05\times 0{,}9\\&=9{,}05\times 10^{-3}\end{aligned}$$

Solution 2 (plus simple) : utiliser l'arbre de probabilités ci-dessous :



48 **1. Solution 1 :** utiliser l'arbre de probabilités ci-contre :



$$P(C_1 \cap C_2 \cap C_3) = P(C_1) \times P_{C_1}(C_2) \times P_{C_1 \cap C_2}(C_3) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{12} = \frac{1}{216}$$

Solution 2 : utiliser l'indépendance des événements (caractérisation identique pour plus de 2 événements) :

$$P(C_1 \cap C_2 \cap C_3) = P(C_1) \times P(C_2) \times P(C_3) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{12} = \frac{1}{216}$$

2. Par indépendance des événements C_1 et C_2, on a :

$$P(C_1 \cap C_2) = P(C_1) \times P(C_2) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{18}$$

3. On cherche la probabilité de l'événement C_3, qui est un événement situé en fin de chemin. D'après la formule des probabilités totales, on a :

$$P(C_3) = P(C_1 \cap C_2 \cap C_3) + P(C_1 \cap \overline{C_2} \cap C_3) + P(\overline{C_1} \cap C_2 \cap C_3) + P(\overline{C_1} \cap \overline{C_2} \cap C_3)$$

$$= \frac{1}{216} + \frac{1}{3} \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{12} + \frac{2}{3} \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{12} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{12} = \frac{1}{12}$$

49 Grâce aux arbres ci-dessus, on en déduit que :

$$P(R) = \frac{7}{10} \times \frac{2}{3} = \frac{7}{15}, \quad P(I) = \frac{3}{5} \times \frac{5}{9} = \frac{1}{3}, \quad P(D) = \frac{7}{10} \times \frac{2}{3} = \frac{7}{15}$$

1. L'événement $I \cap R$ correspond à avoir deux boules rouges de numéros impairs. Il n'y a que 4 boules remplissant ces critères. On a donc 4 chances sur 10 d'en tirer une au premier tirage, puis 3 chances sur 9 au deuxième tirage, donc $P(I \cap R) = \frac{4}{10} \times \frac{3}{9} = \frac{12}{90} = \frac{2}{15}$.

$P(I) \times P(R) = \frac{1}{3} \times \frac{7}{15} = \frac{7}{45} \neq \frac{2}{15} = P(I \cap R)$, donc les événements I et R ne sont pas indépendants.

2. L'événement $I \cap D$ correspond à avoir deux boules de numéros impairs de couleurs différentes. On a deux possibilités pour que cet événement se réalise :

- tirer l'une des 4 boules rouges impaires (4 chances sur 10), puis l'une des deux boules noires impaires (2 chances sur 9).

- tirer l'une des 2 boules noires impaires (2 chances sur 10), puis l'une des quatre boules rouges impaires (4 chances sur 9).

Ainsi, $P(I \cap D) = \frac{4}{10} \times \frac{2}{9} + \frac{2}{10} \times \frac{4}{9} = \frac{8}{45}$

$P(I) \times P(D) = \frac{1}{3} \times \frac{7}{15} = \frac{7}{45} \neq \frac{8}{45} = P(I \cap D)$, donc les événements I et D ne sont pas indépendants.

50 **1.** Si A, B et C sont mutuellement indépendants, les relations d'indépendance suivantes sont satisfaites : $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$, $P(A\cap C)=P(A)\times P(C)$, $P(B\cap C)=P(B)\times P(C)$. Ainsi, A et B, A et C, B et C sont indépendants, donc A, B et C sont deux à deux indépendants.

2. a. $P(A)=\frac{1}{2}$, $P(B)=P(PF)+P(FF)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$,

$P(C)=P(PP)+P(FF)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$, $P(A\cap B)=P(PF)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$,

$P(A\cap C)=P(PP)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$, $P(B\cap C)=P(FF)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$, $P(A\cap B\cap C)=0$.

En effet, l'événement $A\cap B\cap C$ est impossible car on ne peut pas avoir à la fois pile au 1^{er} lancer, face au 2^{e} lancer et deux résultats identiques aux deux lancers.

b. On a bien $P(A\cap B)=\frac{1}{4}=P(A)\times P(B)$, $P(A\cap C)=\frac{1}{4}=P(A)\times P(C)$ et

$P(B\cap C)=\frac{1}{4}=P(B)\times P(C)$, donc A, B et C sont deux à deux indépendants.

c. Puisque $P(A\cap B\cap C)=0\neq\frac{1}{8}=P(A)\times P(B)\times P(C)$, les événements A, B et C ne sont pas mutuellement indépendants.

d. On en déduit que si A, B et C sont des événements <u>deux à deux indépendants</u>, ils ne sont <u>pas forcément mutuellement indépendants</u>.

Pour faire le point

51 **Faux.** $P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{0,2}{0,8}=0,25\neq 0,16$.

52 **Faux.** A et B sont indépendants si et seulement si $P_A(B)=P(B)$ (et non $P_A(B)=P(A)$). Si $P(B)\neq 0,2$, A et B ne sont pas indépendants.

53 **1. Faux.** $P(A\cap\overline{C})=0,2\times 0,1=0,02\neq 0,54$.

2. Vrai. $P(C)=P(A\cap C)+P(B\cap C)=0,2\times 0,9+0,8\times 0,175=0,32$.

3. Faux. $P_A(C)=0,9\neq 0,32=P(C)$: A et C ne sont pas indépendants.

4. Vrai. $P_C(A)=\frac{P(A\cap C)}{P(C)}=\frac{0,18}{0,32}=\frac{9}{16}$.

54 **Vrai.** $P(A)=P(A\cap B)+P(A\cap\overline{B})=0,23+0,19=0,42$, donc $P(\overline{A})=1-P(A)=0,58$.

55 Réponse **b.**

56 Réponse **b.**

57 Réponse **c.**

58 Réponse **a.**

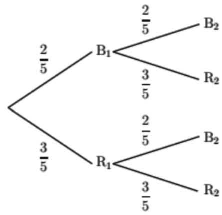
59 Réponse **c.**

Pour approfondir

60 Let us note L the event "The left headlight burns out after the first year" and R the event "The right headlight burns out after the first year". Since the two headlights work independently of each other, then the events L and R are independent. Thus, we have

$P(\mathrm{L}\cap\mathrm{R})=P(\mathrm{R})\times P(\mathrm{L})=0{,}05\times 0{,}05=0{,}002\ 5$.

61 **1.** Voir l'arbre ci-contre dans le cas d'un tirage <u>avec remise</u>.



2. Pour tirer deux jetons bleus, il faut que le 1[er] jeton tiré et que le 2[e] jeton tiré soient bleus. On calcule donc la probabilité de l'événement $\mathrm{B}_1\cap\mathrm{B}_2$.

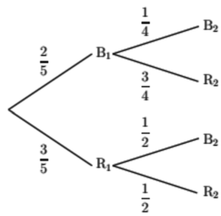
On a $P(\mathrm{B}_1\cap\mathrm{B}_2)=\dfrac{2}{5}\times\dfrac{2}{5}=\dfrac{4}{25}$.

3. Notons M l'événement « les deux jetons tirés sont de même couleur ». M est la réunion disjointe des événements $\mathrm{B}_1\cap\mathrm{B}_2$ et $\mathrm{R}_1\cap\mathrm{R}_2$. On a donc $P(\mathrm{M})=P(\mathrm{B}_1\cap\mathrm{B}_2)+P(\mathrm{R}_1\cap\mathrm{R}_2)\ =\dfrac{4}{25}+\dfrac{9}{25}=\dfrac{13}{25}$

4. • Les événements $\mathrm{B}_1\cap\mathrm{B}_2$ et $\mathrm{R}_1\cap\mathrm{B}_2$ forment une partition de l'événement B_2 . D'après la formule des probabilités totales, on a $P(\mathrm{B}_2)=P(\mathrm{B}_1\cap\mathrm{B}_2)+P(\mathrm{R}_1\cap\mathrm{B}_2)\ =\dfrac{4}{25}+\dfrac{6}{25}=\dfrac{2}{5}$.

• Puisque les événements B_2 et R_2 sont complémentaires, on a $P(\mathrm{R}_2)=1-P(\mathrm{B}_2)=\dfrac{3}{5}$.

5. a. Voir l'arbre ci-contre dans le cas d'un tirage sans remise.



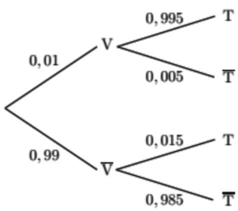
b. $P(\mathrm{B}_1\cap\mathrm{B}_2)=\dfrac{2}{5}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{10}$.

c. $P(\mathrm{M})=P(\mathrm{B}_1\cap\mathrm{B}_2)+P(\mathrm{R}_1\cap\mathrm{R}_2)\ =\ \dfrac{1}{10}+\dfrac{3}{10}=\dfrac{2}{5}$.

d. • $P(\mathrm{B}_2)=P(\mathrm{B}_1\cap\mathrm{B}_2)+P(\mathrm{R}_1\cap\mathrm{B}_2)\ =\dfrac{1}{10}+\dfrac{3}{10}=\dfrac{2}{5}$.

• $P(\mathrm{R}_2)=1-P(\mathrm{B}_2)=\dfrac{3}{5}$.

62 **1.** Voir l'arbre ci-contre.



2. D'après la formule des probabilités totales et l'arbre précédent, on a :

$P(\mathrm{T})=0{,}01\times 0{,}995+0{,}99\times 0{,}015=0{,}024\ 8$.

3. On va calculer la probabilité qu'une personne ait un test positif sachant qu'elle est porteuse du virus. D'après la formule des probabilités conditionnelles, on a : $P_{\mathrm{T}}(\mathrm{V})=\dfrac{P(\mathrm{V}\cap\mathrm{T})}{P(\mathrm{T})}=\dfrac{0{,}01\times 0{,}995}{0{,}024\ 8}=0{,}401\ 2$.

L'affirmation est vérifiée.

On interprète cela par le fait que, puisque seulement 40 % des personnes ayant le virus sont déclarées infectées, le test ne donne pas de résultats satisfaisants concernant les personnes porteuses du virus. *On appelle cela le paradoxe des « faux positifs ».*

4. $P_{\overline{\mathrm{T}}}(\overline{\mathrm{V}})=\dfrac{P(\overline{\mathrm{V}}\cap\overline{\mathrm{T}})}{P(\overline{\mathrm{T}})}=\dfrac{0{,}99\times 0{,}985}{1-0{,}024\ 8}=0{,}999\ 9$.

Ainsi, le test affirme qu'une personne ayant un test négatif a 99,99 % de chances de ne pas être porteuse du virus.

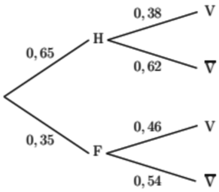
Le test est donc très fiable sur les personnes non porteuses du virus.

63 On note F l'événement « l'employé est une femme », H l'événement « l'employé est un homme », I l'événement « l'employé est ingénieur » et T l'événement « l'employé est technicien ». Les événements $F \cap I$ et $H \cap I$ forment une partition de l'ensemble des ingénieurs. D'après la formule des probabilités totales et les données de l'énoncé, on a :

$P(I) = P(F \cap I) + P(H \cap I) = P(F) \times P_F(I) + P(H) \times P_H(I) = 0{,}35 \times 0{,}9 + 0{,}65 \times 0{,}4 = 0{,}575$

Ainsi, l'entreprise compte 57,5 % d'ingénieurs.

64 **1. a.** Voir l'arbre ci-contre.



b. $P(H \cap V) = 0{,}65 \times 0{,}38 = 0{,}247$.

c. D'après la formule des probabilités totales, la question **1b.** et l'arbre de la question **1a.**, on a

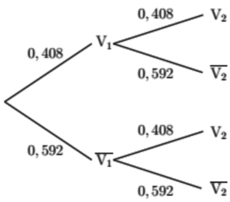
$P(V) = P(H \cap V) + P(F \cap V) = 0{,}247 + 0{,}35 \times 0{,}46 = 0{,}408$.

d. D'après la formule des probabilités conditionnelles et les résultats des questions **1b.** et **1c.**, on a

$P_V(H) = \dfrac{P(H \cap V)}{P(V)} = \dfrac{0{,}247}{0{,}408} \approx 0{,}605$.

Ainsi, puisque 60 % > 50 %, il est vrai que parmi les clients ayant acheté une voiture, plus de la moitié sont des hommes.

2. a. Voir l'arbre ci-contre.



b. D'après l'arbre de la question **2a.**, on a :

$P(V_1 \cap V_2) = 0{,}408 \times 0{,}408 = \dfrac{2601}{15625}$.

c. La probabilité qu'au moins un des clients ait acheté une voiture est **égale à** la probabilité du complémentaire de l'événement $\overline{V_1} \cap \overline{V_2}$ « **aucun client n'a acheté de voiture** ». Or, $P(\overline{V_1} \cap \overline{V_2}) = 0{,}592 \times 0{,}592 = \dfrac{5476}{15625}$.

Ainsi, la probabilité qu'au moins un des clients ait acheté une voiture est $1 - \dfrac{5476}{15625} = \dfrac{10149}{15625}$.

65 **1.** $P(D) = \dfrac{1}{3}$, $P(S_{=7}) = \dfrac{1}{6}$ et $P(D \cap S_{=7}) = \dfrac{1}{18}$.

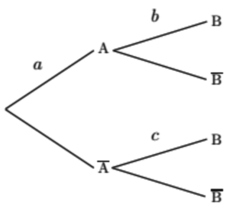
Ainsi, $P(D \cap S_{=7}) = \dfrac{1}{18} = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{6} = P(D) \times P(S_{=7})$ donc les événements D et $S_{=7}$ sont indépendants.

2. $P(E) = \dfrac{1}{2}$, $P(S_{\geq 8}) = \dfrac{11}{36}$ et $P(E \cap S_{\geq 8}) = \dfrac{7}{36}$.

Ainsi, $P(E \cap S_{\geq 8}) = \dfrac{7}{36} \neq \dfrac{11}{36} \times \dfrac{1}{2} = P(E) \times P(S_{\geq 8})$, donc les événements E et $S_{\geq 8}$ ne sont pas indépendants.

TP Tirs au but !

Partie 1



1. Cet algorithme permet de calculer la probabilité d'un événement bilan sur l'arbre de probabilités correspondant avec la formule des probabilités totales pour un arbre comme ci-contre.

2. Si par exemple, on note $a = P(A)$, $b = P_A(B)$ et $c = P_{\overline{A}}(B)$, alors la valeur de p est celle de la probabilité d'un événement bilan donnée (ici $P(B)$).

3. Il faudrait remplacer b par $1-b$ et c par $1-c$.

4. il faudrait rajouter à la partie traitement la ligne « q prend la valeur $a \times b / p$ », que l'on note « $q \leftarrow a \times b / p$ en langage algorithmique », et la ligne « afficher q » en sortie.

Partie 2

1. La cellule B4 avec l'information « réussit un pénalty dans 70 % des cas ».

2. On doit rentrer en cellule B2 la formule « =B4*0,8 ».

3. On saisit en cellule D2 la formule « =$B2+$C2 » (on peut aussi saisir la même formule sans les $ devant la lettre de la colonne).

Cette formule fait référence à la **formule des probabilités totales**.

4. On saisit en cellule B6 la formule « =$B2/$B4 » (on peut aussi saisir la même formule sans les $ devant la lettre de la colonne).

Cette formule fait référence à la **formule des probabilités conditionnelles**.

En salle informatique

1. On peut faire une fonction ou un script. Voici les deux possibilités :

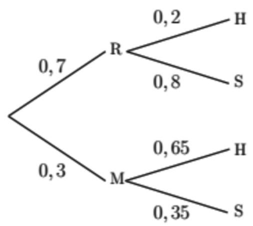
Fonction :

```
from math import *
def probas(a,b,c):
  p=a*b+(1-a)*c
  q=a*b/p
  print(«La probabilité de A est «,float(p))
  print(«la probabilité de A sachant B est «,float(q))
```

Script :

```
from math import *
a=float(input(«donner la valeur de P(A)»))
b=float(input(«donner la valeur de P_A(B)»))
c=float(input(«donner la valeur de P{Abar}(B)»))
p=a*b+(1-a)*c
q=a*b/p
print(«La probabilité de B est «, float(p))
print(«La probabilité de A sachant B est «, float(q))
```

2. L'arbre correspondant à cette situation est le suivant.



Il faut prendre $a=0{,}7$, $b=0{,}2$ et $c=0{,}65$. Il convient également de changer les lettres des événements afin d'obtenir une sortie adaptée aux événements de l'énoncé.

On obtient alors $p=P(H)=0{,}335$ et $q=P_H(R)\approx 0{,}418$.

L'énoncé donne déjà la valeur $P_R(S)=1-b=0{,}8$

3. On sait que $P_H(R)\times P(H)=P_R(H)\times P(R)$ $\quad q\times p=P_R(H)\times a \quad P_R(H)=\dfrac{q\times p}{a}$

Ainsi, en notant une nouvelle variable r et en rajoutant la ligne de code :

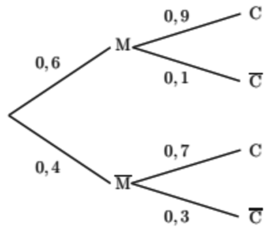
$$r=\frac{q\times p}{a}+1-b$$

puis en rajoutant en affichage la ligne :

print(«La somme des probabilités sachant R est «, float(r))

on obtient bien que $r=1$ (« La somme des probabilités sachant R est 1.0 »).

Pour l'épreuve du Bac



72 **1.** Voir l'arbre ci-contre.

2. $\text{M}\cap\overline{\text{C}}$ est l'événement « le client choisit un menu et ne prend pas de café ».

Sa probabilité est $P(\text{M}\cap\overline{\text{C}})=P(\text{M})\times P_{\text{M}}(\overline{\text{C}})=0{,}6\times0{,}1=0{,}06$.

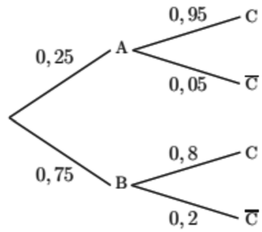
3. $P(\text{M}\cap\text{C})=P(\text{M})\times P_{\text{M}}(\text{C})=0{,}6\times0{,}9=0{,}54$.

4. D'après la formule des probabilités totales, on a :

$P(\text{C})=P(\text{M})\times P_{\text{M}}(\text{C})+P(\overline{\text{M}})\times P_{\overline{\text{M}}}(\text{C})=0{,}6\times0{,}9+0{,}4\times0{,}7=0{,}82$.

5. D'après la formule des probabilités conditionnelles, on a :

$$P_{\text{C}}(\text{M})=\frac{P(\text{M}\cap\text{C})}{P(\text{C})}=\frac{0{,}54}{0{,}82}\approx0{,}66$$



73 **1.** Voir l'arbre ci-contre

2. a. $\text{A}\cap\text{C}$ est l'événement « les fruits utilisés proviennent du fournisseur A et sont retenus pour la fabrication de la confiture ».

Sa probabilité est $P(\text{A}\cap\text{C})=P(\text{A})\times P_{\text{A}}(\text{C})=0{,}25\times0{,}95\approx0{,}24$.

b. $P(\text{A}\cap\text{C})\approx0{,}24\neq0$ donc les événements A et C ne sont pas incompatibles.

Cela signifie que parmi les fruits provenant du fournisseur A, certains sont retenus pour faire de la confiture (ce qui ne serait pas le cas si les événements étaient incompatibles).

3. a. D'après la formule des probabilités totales, on a :

$P(\text{C})=P(\text{A})\times P_{\text{A}}(\text{C})+P(\text{B})\times P_{\text{B}}(\text{C})=0{,}25\times0{,}95+0{,}75\times0{,}8\approx0{,}84$.

b. Solution 1 : $P(\text{A})\times P(\text{C})=0{,}21\neq0{,}24=P(\text{A}\cap\text{C})$, donc les événements A et C ne sont pas indépendants.

Solution 2 : $P_{\text{A}}(\text{C})=0{,}95\neq0{,}84=P(\text{C})$, donc A et C ne sont pas indépendants.

4. $P_{\text{C}}(\text{A})=\dfrac{P(\text{A}\cap\text{C})}{P(\text{C})}\approx\dfrac{0{,}24}{0{,}84}\approx0{,}29$.

Cela signifie que si un fruit est retenu pour faire de la confiture, il y a 29 % de chances qu'il provienne du fournisseur A.

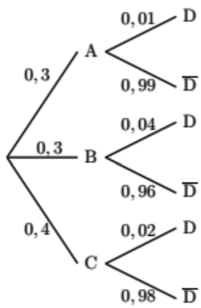
74 **1.**

	Obèse	Non obèse	TOTAL
Ayant un emploi	175	1 745	1 920
N'ayant pas un emploi	110	655	765
TOTAL	285	2 400	2 685

2. a. $P(\mathrm{E}) \approx \dfrac{1\,920}{2\,685} = 0{,}715$, $P(\mathrm{O}) = \dfrac{285}{2\,685} \approx 0{,}106$ et $P(\mathrm{E} \cap \mathrm{O}) = \dfrac{175}{2\,685} \approx 0{,}065$.

b. $P(\mathrm{E}) \times P(\mathrm{O}) \approx 0{,}715 \times 0{,}106 \approx 0{,}076 \neq 0{,}065 = P(\mathrm{E} \cap \mathrm{O})$, donc les événements E et O ne sont pas indépendants.

75 **1.** Voir l'arbre ci-contre.



2. L'événement « Le *hand spinner* choisi provient du fournisseur B et est défectueux » est $\mathrm{B} \cap \mathrm{D}$. Sa probabilité est $P(\mathrm{B} \cap \mathrm{D}) = 0{,}3 \times 0{,}04 = 0{,}012$

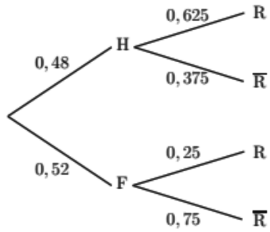
3. D'après la formule des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned} P(\mathrm{D}) &= P(\mathrm{A} \cap \mathrm{D}) + P(\mathrm{B} \cap \mathrm{D}) + P(\mathrm{C} \cap \mathrm{D}) \\ &= 0{,}3 \times 0{,}01 + 0{,}012 + 0{,}4 \times 0{,}02 \\ &= 0{,}023 \end{aligned}$$

4. D'après la formule des probabilités conditionnelles, on a

$$P_{\mathrm{D}}(\mathrm{C}) = \frac{P(\mathrm{C} \cap \mathrm{D})}{P(\mathrm{D})} = \frac{0{,}4 \times 0{,}02}{0{,}023} = \frac{8}{23}$$

76 **1. a.** $P(\mathrm{H}) = \dfrac{96}{200} = 0{,}48$.



b. Voir l'arbre ci-contre.

2. a. $\mathrm{H} \cap \mathrm{R}$ est l'événement « la fiche est celle d'un homme qui suit un régime sans sel ».
Sa probabilité est $P(\mathrm{H} \cap \mathrm{R}) = P(\mathrm{H}) \times P_{\mathrm{H}}(\mathrm{R}) = 0{,}48 \times 0{,}625 = 0{,}3$.

b. D'après la formule des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned} P(\mathrm{R}) &= P(\mathrm{H}) \times P_{\mathrm{H}}(\mathrm{R}) + P\left(\overline{\mathrm{H}}\right) \times P_{\overline{\mathrm{H}}}(\mathrm{R}) \\ &= 0{,}48 \times 0{,}625 + 0{,}52 \times 0{,}25 \\ &= 0{,}43\,. \end{aligned}$$

c. Solution 1 : $P(\mathrm{H} \cap \mathrm{R}) = 0{,}3 \neq 0{,}2064 = 0{,}48 \times 0{,}43 = P(\mathrm{H}) \times P(\mathrm{R})$, donc les événements H et R ne sont pas indépendants.

Solution 2 : $P_{\mathrm{H}}(\mathrm{R}) = 0{,}625 \neq 0{,}43 = P(\mathrm{R})$, donc les événements H et R ne sont pas indépendants.

Chapitre 7

Variables aléatoires discrètes

CAPACITÉS

- Calculer l'espérance d'une variable aléatoire discrète dans des cas simples et l'interpréter.
- Calculer des coefficients binomiaux $\binom{n}{k}$ à l'aide du triangle de Pascal pour $n \leq 10$.
- Reconnaître une situation relevant de la loi binomiale et en identifier le couple de paramètres.
- Lorsque la variable aléatoire X suit une loi binomiale :
  – interpréter l'événement $\{X = k\}$ sur un arbre de probabilités ;
  – calculer les probabilités des événements $\{X = 0\}$, $\{X = 1\}$, $\{X = n - 1\}$, $\{X = n\}$ et de ceux qui s'en déduisent par réunion ;
  – calculer la probabilité de l'événement $\{X = k\}$ à l'aide des coefficients binomiaux.

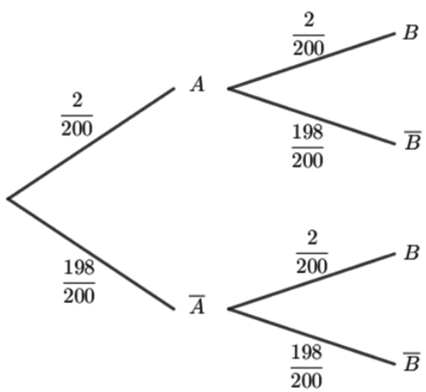
Vérifier les acquis de Première et du chapitre 6

1. a **2. d** **3. b** **4. a** **5. b** **6. a**

Activités

Activité 1 Espérance d'une variable aléatoire et interprétation

1.



2. Les valeurs prises par X sont –4, 46, 96 et 146.

3.

Valeurs de X	$X=-4$	$X=46$	$X=96$	$X=146$
Issues correspondantes	$\overline{A}\cap\overline{B}$	$A\cap\overline{B}$	$\overline{A}\cap B$	$A\cap B$
Probabilités correspondantes	0,9801	0,0099	0,0099	0,0001

4. $E(X)=-2{,}5$.

5. Si un grand nombre de personnes achètent deux billets alors en moyenne chacun perdra 2,5 euros.

Activité 2 Tableur et espérance

1. Cette formule renvoie un nombre aléatoire entre 1 et 6.

2. Tableur.

3. Tableur.

4.

Lancé de dé	Effectifs	Fréquences	Gain associé
1	161	0,161	2
2	155	0,155	2
3	166	0,166	2
4	176	0,176	0
5	183	0,183	0
6	159	0,159	–10

5. La moyenne des gains est –0,626. Élias a tort d'accepter de jouer.

Activité 3 Coefficient binomial et triangle de Pascal

Partie A

1. a. Deux branches partent de chaque nœud.

b. Il y a trois branches.

2. $\binom{3}{0}=1$, $\binom{3}{1}=3$, $\binom{3}{2}=3$, $\binom{3}{3}=1$

Partie B

3.

1	3	3	1

4. $\binom{4}{1}=4$ et $\binom{4}{2}=6$.

Activité 4 Loi binomiale

1. Cette expérience est une répétition de 20 tirages aléatoires et indépendants.

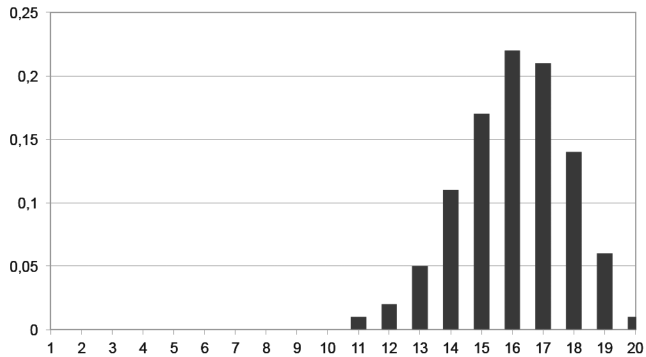
2. Chacune de ces branches comporte k succès et $20-k$ échecs donc sa probabilité est $0{,}8^k\times 0{,}2^{20-k}$.

3. Tableur.

4.

k	Probabilité de k pièces conformes
0	0
1	0
2	0
3	0
4	0
5	0
6	0
7	0
8	0
9	0
10	0
11	0,01
12	0,02
13	0,05
14	0,11
15	0,17
16	0,22
17	0,21
18	0,14
19	0,06
20	0,01

5.



Exercices

Pour acquérir les automatismes

2 $E(X) = 5{,}5$.

3 La valeur manquante est 0,25 et $E(Y) = -7{,}75$.

4

x_i	1	5	10	20
$P(X=x_i)$	$\frac{8}{13}$	$\frac{1}{13}$	$\frac{3}{13}$	$\frac{1}{13}$

$$E(X)=\frac{63}{13}$$

5

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

$E(X)=7.$

6 $\binom{3}{1}$ est le nombre de chemins comportant exactement 1 succès dans un arbre représentant un schéma de Bernoulli de paramètre $n=3$.

$\binom{4}{2}$ est le nombre de chemins comportant exactement 2 succès dans un arbre représentant un schéma de Bernoulli de paramètre $n=4$.

$\binom{6}{0}$ est le nombre de chemins ne comportant que des échecs dans un arbre représentant un schéma de Bernoulli de paramètre $n=6$.

7

1							
1	1						
1	2	1					
1	3	3	1				
1	4	6	4	1			
1	5	10	10	5	1		
1	6	15	20	15	6	1	
1	7	21	35	35	21	7	1

8

$\binom{13}{0}=1$, $\binom{314}{314}=1$, $\binom{2021}{2020}=2021$, $\binom{11111}{1}=11\,111$.

9

$\binom{12}{4}=\binom{11}{3}+\binom{11}{4}=495$, $\binom{12}{5}=\binom{11}{4}+\binom{11}{5}=792$, $\binom{13}{5}=\binom{12}{4}+\binom{12}{5}=1287$.

10

1	7	21	35	35	21	7	1

11

a. $P(X=1)\simeq 0{,}44$

b. $P(X=3)\simeq 0{,}03$

12

a. $P(X=3)\simeq 0{,}21$

b. $P(X<3)\simeq 0{,}17$

13

a. $P(X=5)\simeq 0{,}21$

b. $P(X\geq 6)\simeq 0{,}68$

14

a. $P(X=72)\simeq 0{,}091$

b. $P(X\geq 72)\simeq 0{,}115$

15

a. $P(X=9)\simeq 0{,}043$

b. $P(X=12)\simeq 0{,}250$

c. $P(X\leq 7)\simeq 0{,}004$

16 $E(X)=7$

17 $E(X)=22{,}5$

18 $E(X)=9{,}88$

19 $E(X)=9=E(Y)$

20 Oui, par exemple si X suit la loi binomiale de paramètres $n=2$ et $p=0{,}1$ alors $E(X)=0{,}2$.

Pour commencer

21 **1.** $a+3a+0{,}3+2a+a=1$ donc $a=0{,}1$.

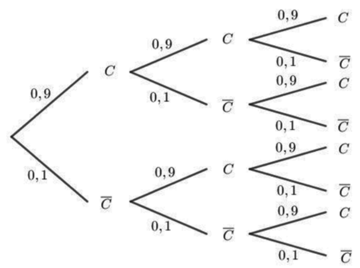
2. $E(X)=3{,}15$.

22 **1.** $E(X)=135{,}86$.

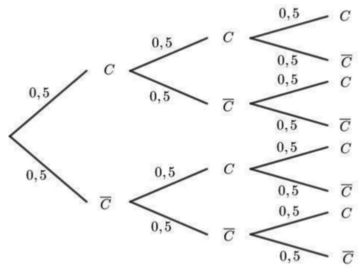
2. Si on produit un grand nombre de pièces, en moyenne le coût de fabrication sera de 135,86 euros par pièce.

23 **1.** Dans chaque arbre on notera C une réponse correcte, et $\overline{C}$ une réponse incorrecte.

Pour Mehdi :



Pour Yvan :



2. Les valeurs de M et Y dépendent du nombre de bonnes réponses. On a donc le tableau suivant :

Nombre de bonnes réponses	0	1	2	3
Valeur de M ou Y correspondantes	–3	0	3	6

3. Cette expérience est la répétition de trois épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes. Le nombre de bonnes réponses est donc une variable aléatoire suivant la loi *B(3 ; 0,9)* pour Mehdi et la loi *B(3 ; 0,5)* pour Yvan. On a alors les tableaux suivants :

Pour Mehdi :

Nombre de bonnes réponses	0	1	2	3
Valeur de M correspondante	–3	0	3	6
Probabilité correspondante	0,001	0,027	0,243	0,729

Pour Yvan :

Nombre de bonnes réponses	0	1	2	3
Valeur de M correspondante	–3	0	3	6
Probabilité correspondante	0,125	0,375	0,375	0,125

4. D'après ce qui précède, l'espérance de M est : $E(M) = -3\times 0{,}001 + 0\times 0{,}027 + 3\times 0{,}243 + 6\times 0{,}729 = 5{,}1$.

De même, l'espérance de Y est : $E(Y) = 1{,}5$.

Si on réalisait un grand nombre d'exercices similaires, en moyenne Mehdi gagnerait 5,1 points à chaque fois, et Yvan gagnerait 1,5 point.

24 **1. Vrai.** Par exemple :

x_i	–1	1
$P(X = x_i)$	0,5	0,5

Alors $E(X) = 0$.

2. Vrai. La moyenne de termes négatifs est négative.

3. Faux. Par exemple :

x_i	–1	0	1
$P(X = x_i)$	0,4	0,2	0,4

Alors $E(X) = 0$ qui est une des valeurs prises par X.

25 **1. a.**

x_i	1	2	3	4	5	6
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{21}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{3}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{6}{21}$

b. $E(X)=\dfrac{13}{3}$

2. a.

y_i	1	2	3	4	5	6
$P(Y=y_i)$	$\dfrac{11}{36}$	$\dfrac{9}{36}$	$\dfrac{7}{36}$	$\dfrac{5}{36}$	$\dfrac{3}{36}$	$\dfrac{1}{36}$

b. $E(Y)=\dfrac{91}{36}$.

26 **1.**

$n=0$	1					
$n=1$	1	1				
$n=2$	1	2	1			
$n=3$	1	3	3	1		
$n=4$	1	4	6	4	1	
$n=5$	1	5	10	10	5	1

2. $\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}=3$, $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=1$, $\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}=6$, $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=1$

3. $\begin{pmatrix}6\\2\end{pmatrix}=15$

27 $\begin{pmatrix}12\\3\end{pmatrix}=220$

28

a. $\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}=3$, $\begin{pmatrix}24\\1\end{pmatrix}=24$, $\begin{pmatrix}14\\13\end{pmatrix}=14$

b. $\begin{pmatrix}17\\0\end{pmatrix}=1$, $\begin{pmatrix}32\\31\end{pmatrix}=32$, $\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}=4$

29 $\begin{pmatrix}12\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11\\5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}11\\4\end{pmatrix}=792$

30

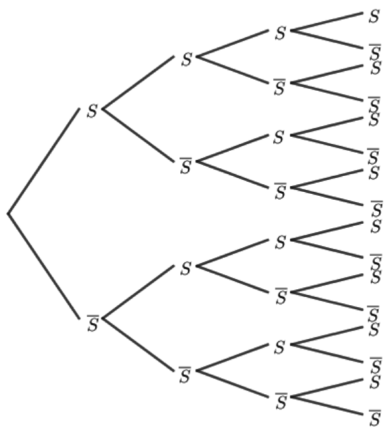
1	9	36	84	126	126	84	36	9	1

31 Il y a $\begin{pmatrix}6\\5\end{pmatrix}=6$ branches comportant exactement 5 succès. Il y a $\begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix}=20$ branches comportant exactement 3 succès.

32

$n=0$	1				
$n=1$	1	1			
$n=2$	1	2	1		
$n=3$	1	3	3	1	
$n=4$	1	4	6	4	1

33 **1.**



2.

$n=0$	1				
$n=1$	1	1			
$n=2$	1	2	1		
$n=3$	1	3	3	1	
$n=4$	1	4	6	4	1

3. $P(X=0)=\binom{4}{0}0{,}3^0\times 0{,}7^4=0{,}7^4$

$P(X=1)=\binom{4}{1}0{,}3^1\times 0{,}7^3=4\times 0{,}3\times 0{,}7^3$

$P(X=2)=\binom{4}{2}0{,}3^2\times 0{,}7^2=6\times 0{,}3^2\times 0{,}7^2$

$P(X=3)=\binom{4}{3}0{,}3^3\times 0{,}7^1=4\times 0{,}3^3\times 0{,}7^1$

$P(X=4)=\binom{4}{4}0{,}3^4\times 0{,}7^0=0{,}3^4$

4. $P(X\geq 2)=1-(P(X=1)+P(X=0))\simeq 0{,}35$

34

k	0	1	2	3	4	5
$\binom{5}{k}$	1	5	10	10	5	1
$P(X=k)$	0,17	0,36	0,31	0,13	0,03	0

35

1. $P(X=2)=\binom{9}{2}0{,}3^2\times(1-0{,}3)^{9-2}=36\times 0{,}3^2\times 0{,}7^7\simeq 0{,}267$

2. $P(X=4)=\binom{9}{4}0{,}3^4\times(1-0{,}3)^{9-4}=126\times 0{,}3^4\times 0{,}7^5\simeq 0{,}172$

36 $P(X=1)\simeq 0{,}21$

37 $P(X\geq 13)\simeq 0{,}58$

38 **1.** $P(X=0)\simeq 0{,}002$, $P(X=1)\simeq 0{,}017$, $P(X=2)\simeq 0{,}064$

2. $P(X\geq 3)=0{,}917$

3. $P_{X\leq 8}(X\geq 2)\simeq 0{,}980$

4. $P_{X>5}(X\leq 10)\simeq 0{,}997$

39 La variable aléatoire X ne suit pas une loi binomiale. En effet, choisir une paire de chaussettes au hasard est une épreuve de Bernoulli, mais ces épreuves ne sont pas indépendantes : si Sofia choisit une des deux paires avec un trou le premier jour, alors la probabilité de choisir une paire avec un trou est plus faible les jours suivants.

40 Oui la variable aléatoire X suit une loi binomiale : le nombre de jaunes contenu dans un œuf est indépendant du contenu des autres œufs. Choisir une boîte de six œufs revient à faire six tirages identiques et indépendants.

41 **1.** Il faut supposer que les choix des 30 arbres sont indépendants : le fait que l'un porte ou non des fruits malodorants n'a aucun lien avec le fait que d'autres portent ou non des fruits malodorants.

2. a. $P(X=0)\simeq 0{,}04$

b. $E(X)=3$ donc en moyenne 3 arbres porteront des fruits dans chaque lot de 30.

42 La variable aléatoire X ne suit pas une loi binomiale car les tirages ne sont pas indépendants : les petits alligators issus de la même portée ont les mêmes parents et partagent donc des gènes. Si l'un est albinos il y a alors de plus fortes chances qu'un de ses frères et sœurs soit également albinos.

43 **1.** X suit une loi binomiale de paramètres $n=6$ et $p=0{,}7$.

2. $P(X=4)\simeq 0{,}324$, $P(X\geq 4)\simeq 0{,}744$

3. $P_{X\geq 2}(X\leq 4)\simeq 0{,}575$

44 **1.** Vérifier les piles des 35 calculatrices est un schéma de Bernoulli de paramètres $n=35$ et $p=0{,}1$.

2. $P(X=0)\simeq 0{,}025$

3. $P(X\leq 5)\simeq 0{,}868$

4. $E(X)=35\times 0{,}1=3{,}5$. Si on vérifiait les piles des calculatrices dans un grand nombre de classes à 35 élèves, en moyenne 3,5 calculatrices par classe auraient des piles déchargées.

45 **a.** $P(X=1)=\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} 0{,}5^1\times 0{,}5^2=3\times 0{,}5^3$

b. $P(X=3)=\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} 0{,}5^3\times 0{,}5^0=0{,}5^3$

c. $P(X<3)=1-P(X=3)=1-0{,}5^3$

d. $E(X)=3\times 0{,}5=1{,}5$

46 **1. Faux.** $E(X)=5$ mais $15\times 0{,}3=4{,}5$.

2. Vrai. Si $p=0$ par exemple.

3. Faux. Par exemple si $n=2$ et $p=\frac{1}{3}$ alors $E(X)=\frac{2}{3}$ n'est pas un entier.

47 **1.** X suit une loi binomiale de paramètres $n=3$ et $p=0{,}7$.

2. $P(X=0)=0{,}027$

3. $P(X\geq 1)=0{,}973$

4. $E(X)=2{,}1$. Si le candidat effectuait un grand nombre de tirages de trois sujets, en moyenne chaque tirage contiendrait 2,1 sujets qu'il aurait préparés.

48 **a.** X suit une loi binomiale de paramètres $n=30$ et $p=\frac{1}{3}$.

b. $P(X\geq 15)\simeq 0{,}0435$

c. $P(X\geq 25)\simeq 0$

b. $E(X)=10$

2. a. X suit une loi binomiale de paramètres $n=30$ et $p=0{,}8$.

$P(X\geq 15)\simeq 0{,}9999$

$P(X\geq 25)\simeq 0{,}4275$

$E(X)=24$

b. Le candidat a raison de s'être préparé.

Pour s'entraîner

49 **1.** Les valeurs possibles prises par X sont 0, 1, 2, 3, 4 et 5.

2. Le tableau suivant donne l'écart entre le résultat du premier dé (dans la colonne 1) et du deuxième dé (dans la ligne 1) :

	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	3	4	5
2	1	0	1	2	3	4
3	2	1	0	1	2	3
4	3	2	1	0	1	2
5	4	3	2	1	0	1
6	5	4	3	2	1	0

Il y a donc 36 tirages possibles, tous avec la même probabilité qui est donc égale à $\frac{1}{36}$.

La loi de probabilité de X est donc :

Valeurs prises par X	0	1	2	3	4	5
Probabilités correspondantes	$\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$	$\frac{10}{36}=\frac{5}{18}$	$\frac{8}{36}=\frac{2}{9}$	$\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$	$\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$	$\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$

3. L'espérance de X est : $E(X)=0\times\frac{1}{6}+1\times\frac{5}{18}+2\times\frac{2}{9}+3\times\frac{1}{6}+4\times\frac{1}{9}+5\times\frac{1}{18}=\frac{35}{18}$.

50 **1. a.** $P(C=0)=0{,}32$

b. $P(F=4)=0{,}12$

2. a. $P(F\geq 5)=0{,}11$

b. $P(C\leq 4)=0{,}78$.

3. a. Les comparaisons sont correctes mais ce n'est pas suffisant pour faire une telle affirmation.

b. Elle devrait également prendre en compte l'espérance : $E(C)>E(F)$ donc en moyenne Clément attrape plus de poissons.

51

Partie A : tableur

Partie B :

5. Les valeurs possibles prises par X sont -10, -6, -2, 8, 12 et 26.

6.

x_i	-10	-6	-2	8	12	26
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{36}$

7. $E(X)=0$.

8. Oui cela confirme le résultat de la partie A.

52 Soit X la variable aléatoire associée au nombre de faces obtenues lors de 92 tirages. X suit une loi binomiale de paramètres $n=92$ et $p=0{,}5$. Alors $P(X=92)=0{,}5^{92}\simeq 2\times 10^{-28}$.

53 **1. a.** Les premières et dernières valeurs de *L2* sont 1.

b. La i ème valeur de *L2* est la somme de la $i-1$ ème valeur et i ème valeur de *L1*, pour i allant de 1 à $n-1$.

c.

```
def suivante(L1):
  L2=[]
  l=len(L1)-1
  for i in range(l):
    L2=L2+[L1[i]+L1[i+1]]
  L2=[1]+L2+[1]
  return(L2)
```

2. a. La première ligne du triangle de Pascal est l'unique valeur : 1.

b.

```
def triangle(n):
    L=[1]
    for i in range(n):
        L=suivante(L)
    return(L)
```

3.

```
for n in range(11) :
    L=triangle(n)
    print(L)
```

Le résultat est :

[1]

[1, 1]

[1, 2, 1]

[1, 3, 3, 1]

[1, 4, 6, 4, 1]

[1, 5, 10, 10, 5, 1]

[1, 6, 15, 20, 15, 6, 1]

[1, 7, 21, 35, 35, 21, 7, 1]

[1, 8, 28, 56, 70, 56, 28, 8, 1]

[1, 9, 36, 84, 126, 126, 84, 36, 9, 1]

[1, 10, 45, 120, 210, 252, 210, 120, 45, 10, 1]

54 **1.** La variable aléatoire X suit la loi $B(4 ; 0,95)$.

2. $P(X=3) \simeq 0{,}171$.

3. $P(X=4) \simeq 0{,}815$.

4. $E(X)=4 \times 0{,}95=3{,}8$. Si on effectuait un grand nombre de séries de quatre vols, il y aurait en moyenne 3,8 vols réussis par série.

55 **1.** X suit une loi binomiale de paramètres $n = 211$ et $p = 0{,}88$.

2. $P(X \geq 186) \simeq 0{,}53$

3. a. $E(X) = 185{,}68$

b. Si un grand nombre de vols sont organisés de la sorte, en moyenne il y aurait 185,68 passagers, ce qui est très proche du nombre maximal de passagers. La compagnie semble donc avoir raison.

4. a. Le bénéfice sera de $200 \times 150 - 500 \times 14 = 23\ 000$ euros.

b. Le bénéfice sera de $211 \times 150 - 500 \times 25 = 19\ 150$ euros.

c. La compagnie reste bénéficiaire même si beaucoup de passagers ne peuvent pas embarquer, elle semble donc avoir raison.

56 **1.** La variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres $n=6$ et $p=\frac{1}{3}$.

2. $P(X=6)=\left(\frac{1}{3}\right)^6 \simeq 0{,}001$.

3. $P(X \leq 3) \simeq 0{,}900$.

4. $E(X)=6\times\frac{1}{3}=2$. Donc si elle effectue un grand nombre de trajets, en moyenne elle rencontrera deux feux rouges par trajet.

57 **1.** **a.** $P(X\geq 1)\simeq 0{,}117\,52$

b. $P(Y\geq 1)\simeq 0{,}187\,42$

2. $P(Z=0)\simeq 0{,}831\,08$

58 **1.** X suit une loi binomiale de paramètres $n=30$ et $p=0{,}1$.

2. $P(X=5)\simeq 0{,}102$

3. $P(X=0)\simeq 0{,}042$

4. $P_{X\geq 2}(X\leq 5)\simeq 0{,}911$

5. $E(X)=3$ donc si l'usager a les mêmes habitudes durant un grand nombre de mois, en moyenne il sera contrôlé 3 fois par mois. Ce qui lui coûtera en moyenne 105 euros d'amendes, alors que l'économie réalisée sur les billets est de 30 euros. Donc en moyenne il perdra 75 euros par mois, ce n'est donc pas rentable.

59 Soit X le nombre de cibles (parmi 5) que Martin Fourcade atteint lors d'une séance de tir. La réussite d'un tir étant indépendante des autres, une séance de tirs est assimilée à un schéma de Bernoulli. X suit donc une loi binomiale de paramètres $n=5$ et $p=0{,}9$. La probabilité qu'il atteigne les cinq cibles est donc : $P(X=5)=0{,}9^5\simeq 0{,}59$.

60 **1.** L'expérience consiste en 4 tirages identiques et indépendants donc X suit une loi binomiale de paramètres $n=4$ et $p=\frac{1}{8}$.

2. $P(X\geq 2)\simeq 0{,}079$

3. $E(X)=0{,}5$ donc si on réalise un grand nombre de parties, alors en moyenne on devinera 0,5 cartes par partie jouée.

4. a. et **b.**

Valeurs de X	0	1	2	3	4
Valeurs de Y	–10	–10	10	290	9990
$P(X=x_i)$	0,586	0,335	0,071	0,007	0

c. $E(Y)=-6{,}47$ donc si on réalise un grand nombre de parties, alors en moyenne on perdra 6,47 francs par partie jouée.

5. Ce tirage a la même probabilité que tous les autres : $\frac{1}{4096}$.

61 **1.** Il faut que dans cette forêt chaque arbre ait la même probabilité d'être infecté. Cette hypothèse est réaliste si la forêt est uniforme et n'est pas trop grande.

2. $P(X\geq 5)\simeq 0{,}083$

3. $P(X=0)\simeq 0{,}078$.

4. $E(X)=2{,}4$

62 **1.** Cette probabilité est $\frac{2}{5}\times 1+\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}=\frac{7}{10}$.

2. a. X suit une loi binomiale de paramètres $n=11$ et $p=\frac{7}{10}$.

b. $P(X=2)\simeq 0$, $P(X=5)\simeq 0{,}06$, $P(X\geq 6)\simeq 0{,}92$.

c. $E(X)=7{,}7$ donc si Hugo mange à la cantine durant un grand nombre de trimestres, alors en moyenne il mangera au moins un repas végétarien par semaine durant 7,7 semaines par trimestre.

63 **Faux.** La somme des probabilités est $2p+4p+3p+2p+p=12p=1$. Ainsi $p=\dfrac{1}{12}$.

64 **Faux.** La valeur de $\begin{pmatrix}17\\16\end{pmatrix}$ est 17.

65 **Faux.** Le coefficient binomial $\begin{pmatrix}8\\5\end{pmatrix}$ est aussi égal à 56.

66 **Faux.** Le coefficient binomial $\begin{pmatrix}252\\1\end{pmatrix}$ est aussi égal à 252.

67 **Faux.** Le coefficient binomial $\begin{pmatrix}314\\1\end{pmatrix}$ est égal à 314.

68 **Vrai.** $P(X=2)=\begin{pmatrix}8\\2\end{pmatrix}0{,}3^2\times(1-0{,}3)^{8-2}=28\times0{,}3^2\times0{,}7^6\simeq0{,}30$.

69 **Faux.** D'après la calculatrice $P(Y\geq4)\simeq0{,}63$.

70 **Vrai.** D'après la calculatrice $P(Z>8)\simeq0{,}35$.

71 **Vrai.** L'espérance d'une variable aléatoire X suivant la loi binomiale $B(100\,;0{,}225)$ est $E(X)=100\times0{,}225=22{,}5$.

72 **1.** Réponse **d.**

2. Réponse **a.**

73 Réponse **d.**

74 **1.** Réponse **a.**

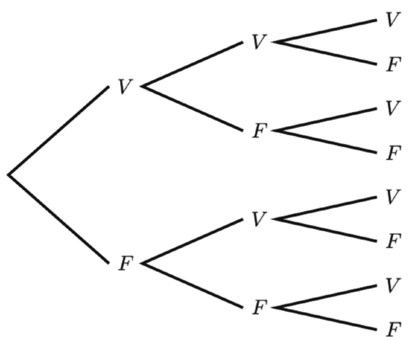
2. Réponse **c.**

3. Réponse **c.**

Pour approfondir

75 **1.** The possible values for X are –1, 1, 2 and 3

2.



3.

x_i	–1	1	2	3
$P(X=x_i)$	0,579	0,347	0,069	0,005

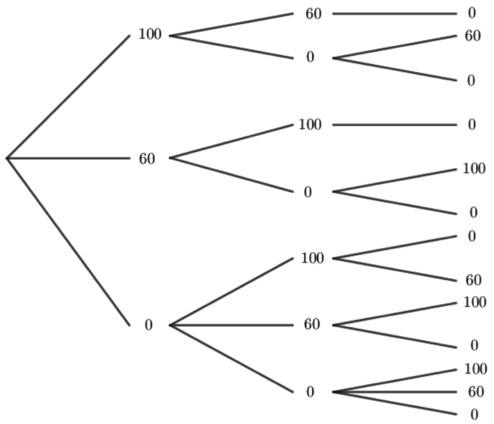
4. a. $P(X=1)\simeq 0{,}347$

b. $P(X\geq 1)\simeq 0{,}421$

5. a. $E(X)\simeq -0{,}079$

b. This game favors the banker.

76 **1.**



x_i	-15	45	85	145
$P(X=x_i)$	$\frac{9653}{9950}$	$\frac{591}{39800}$	$\frac{591}{39800}$	$\frac{3}{19900}$

2. $E(X)=\frac{-63}{5}$ si on répète un grand nombre de fois cette expérience, alors en moyenne on perdra $\frac{-63}{5}$ euros à chaque partie.

77 **1.** Cette probabilité vaut 0,3612.

2. a. $P(X\geq 1)\simeq 1$

b. $P(Y\geq 1)\simeq 9989$

78 **1.** **a.** X suit une loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p=\frac{1}{100}$.

b. $P(X\geq 2)\simeq 0{,}26$

c. $E(X) = 1$ donc si on attendait un grand nombre de siècles (dans les mêmes conditions) il y aurait en moyenne une crue centennale par siècle.

2. Il a tort. Une crue centennale a la même probabilité chaque année.

79 **1.** Il y a 24 combinaisons possibles.

2. a. $P(X\geq 1)\simeq 0{,}19$ et $P(Y\geq 1)\simeq 0{,}35$.

b. 71 essais sont nécessaires.

3. $E(Z)=\frac{5}{4}$

TP La méthode de Monte-Carlo

1. a. L'aire du carré est 1, celle du quart de disque est $\frac{\pi}{4}$.

b. Cette probabilité est $\frac{\pi}{4}$.

2. a. X suit une loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = \frac{\pi}{4}$.

b. $E(X) = 25\pi$

Pour l'épreuve du Bac

86 Partie A

1. $P(\mathrm{A}) = 0{,}6$, $P(\mathrm{B}) = 0{,}4$, $P_A(D) = 0{,}05$, $P(B \cap D) = 0{,}004$

2. a. $P(A \cap D) = 0{,}03$

b. $P(D) = P(A \cap D) + P(B \cap D) = 0{,}034$

3. $P_B(D) = 0{,}01$

Partie B

1. $n = 25$ et $p = 0{,}04$

2. $P(X = 0) \simeq 0{,}36$ le directeur a donc tort.

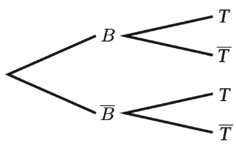
87 **1.** $P(N) = P(E \cap N) + P(F \cap N) + P(G \cap N) = 0{,}06 \times 0{,}024 + 0{,}41 \times 0{,}037 + 0{,}53 \times 0{,}064 \simeq 0{,}051$

2. $P_N(G) = \dfrac{0{,}53 \times 0{,}064}{0{,}051} \simeq 0{,}67 < 0{,}75$. Cette affirmation est fausse.

3. a. $n = 50$, $p = 0{,}051$ et $E(X) = 2{,}55$.

b. $P(X = 3) \simeq 0{,}222$

88 **1.**



2. a. $P(B \cap T) = 0{,}2 \times 0{,}7 = 0{,}14$

b. $P(T) = P(B \cap T) + P(\overline{B} \cap T) = 0{,}2 \times 0{,}7 + 0{,}8 \times 0{,}1 = 0{,}22$

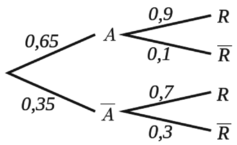
c. $P_T(B) = \dfrac{0{,}2 \times 0{,}7}{0{,}22} = \dfrac{7}{11}$

3. a. X suit une loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = 0{,}22$.

b. $P(X \geq 1) \simeq 0{,}71$

c. $E(X) = 1{,}1$

89 **1.**



2. a. $P(A \cap R) = 0{,}65 \times 0{,}9 = 0{,}585$

b. $P(A \cap \overline{R}) + P(\overline{A} \cap R) = 0{,}65 \times 0{,}1 + 0{,}35 \times 0{,}7 = 0{,}31$

3. a. X suit une loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0{,}31$.

b. $P(X = 12) \simeq 0{,}005$

c. $P(X \geq 2) \simeq 0{,}994$

4. a.

y_i	3120	2760	2400
$P(Y = y_i)$	0,585	0,31	0,105

b. $E(Y) = 2932{,}8$ Si un grand nombre de passagers effectuent ce voyage, le coût moyen d'un trajet sera de 2932,8 euros.

90 **1. Vrai.** Si X est la variable aléatoire associée au nombre d'élèves de l'association parmi les 4 gagnants alors X suit une loi binomiale de paramètres $n = 4$ et $p = 0{,}2$. Alors $P(X \geq 2) \simeq 0{,}181$.

2. Faux. $P(X = 0) \simeq 0{,}410$

3. Faux. Le nombre de gagnants par loterie ne peut pas dépasser 4.

Chapitre 8

Fonction exponentielle de base e

CAPACITÉS

- Utiliser les propriétés algébriques de l'exponentielle pour transformer des expressions.
- Étudier les variations de fonctions somme, produit ou quotient de fonctions exponentielles (du type $x \mapsto e^{kx}$ pour k réel) et de fonctions polynômes.
- Déterminer les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ de fonctions somme, produit ou quotient de fonctions exponentielles et de fonctions polynômes.

Vérifier les acquis de Première et du chapitre 3

1. c **2.** c **3.** c **4.** b **5.** d **6.** d

Activités

Activité 1 Une fonction exponentielle de base particulière

1. Voir fichier TICE

2. $e^0 = 1$ La fonction semble croissante sur $\mathbb{R}$.

Activité 2 « Ne pas dépasser les limites »

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$

$\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)=0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to0-} h(x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to0+} h(x)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} j(x)=0$; $\lim\limits_{x\to-\infty} j(x)=-\infty$

Activité 3 Une relation particulière !

1. a. $g'(x) = f'(x) \times f(-x) - f(x) \times f'(-x) = 0$ car $f'(x) = f(x)$

b. $g'(x) = 0$ donc $g(x) = k$ réel et $g(0) = f(0)$. $f(0) = 1^2 = 1$ donc $g(x) = 1$ et $f(-x) = 1/f(x)$

2. Voir fichier TICE

4. La fonction f égale à sa dérivée et dont l'image de 0 est 1 est la fonction exponentielle $f(x) = e^x$ et $e^{-x} = 1/e^x$

Activité 4 Passera, passera pas ?

Partie A

1. $f(x) < 8{,}5$ car $0{,}5(e^{0{,}12x} + e^{-0{,}12x}) > 0$ et ce maximum est atteint en $x = 0$ et $f(0) = 7{,}5$

2. $f(-8) = 7$ et $f(8) = 7$ donc la hauteur maximale doit être de 6,5 m.

Partie B

3. Si l'image de x par f est supérieure à l'ordonnée du bateau (sa hauteur) alors le vaporetto passe.

4. En tapant B(–6,5) on obtient « le vaporetto passe » car $f(-6) = 7{,}22 > 5$

5. $f(-3) = 7{,}43$ et $f(-1) = 7{,}49$ donc le bateau passe

Exercices

Pour acquérir les automatismes

2 $f(-1) = -3\,e^{-1}$ $f(0{,}5) = -3\,e^{0{,}5}$ $f(1) = -3e$

3 **1.** $f(0) = 3$ **2.** $f(x) > 0$ donc 0 n'a pas d'antécédent **3.** $f(x) = 4$ $x = 0{,}69$

4 **1.** $f(0) = -4$ $f(-0{,}5) = -4\,e^{-0{,}5}$ $f(2{,}5) = -4\,e^{2{,}5}$ **2.** $f(x) < 0$ car $e^x > 0$
3. f est décroissante sur $\mathbb{R}$ car la fonction e^x est croissante sur $\mathbb{R}$

5 $f(x) = k\,e^x$ et $f(0) = -2$ donc $k = -2$ $f(x) = -2e^x$

6 **1.** $f(x) = 3$ $x = 1{,}8$ **2.** $f(x) < 1$ $x \in]-\infty\,;1{,}5[$ et $f(x) > 0$ pour $x \in]1\,;+\infty[$

7 $e^{7{,}5}$

8 $e^{-1{,}1}$

9 $e^{1{,}5}$

10 0

11 $4\,e^{-2x} + 4\,e^{-x}\,e^x + e^{2x} = 4\,e^{-2x} + e^{2x} + 4$

12 $f'(x) = 2\,e^x - 2x$

13 $f'(x) = e^x$ $g'(x) = -e^{-x}$

14 $f'(x) = -3\,e^x - 5$

15 $f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

16 $f'(x) = -4\,e^x - 3 < 0$ donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

17 $y = f'(0)(x - 0) + f(0) = 6x + 7$

18 $f(1) = ke = -2$ donc $k = -2e^{-1}$ d'où $f(x) = -2\,e^{x-1}$

19 $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x - e = +\infty$

20 $\lim\limits_{x\to+\infty} -3x-2e^{x}-e \;=-\infty$

21 $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x}-e \;=-e$

22 $\lim\limits_{x\to-\infty} (e^{x}-x)(x+e^{x})=-\infty$ car $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x}=0$

23 $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^{x}-2}{e^{x}+2}=-1$ car $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x}=0$

24 $f'(x)=6\,\mathrm{e}^{-3x+2}$

25 $f'(x)=\mathrm{e}^{-3x}-3x\,\mathrm{e}^{-3x}=\mathrm{e}^{-3x}\,(1-3x)$

26 $f'(x)=-16\,\mathrm{e}^{4x}<0$ donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

27 $y=f'(0)(x-0)+f(0)=-0{,}5x+0{,}5$

28 La courbe de f est la bleue car $f(0)=2$ et celle de g est la rose car $g(0)=-2$

29 $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-2x}-x=-\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-2x}=0$

30 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{2}\left(2-\dfrac{e^{-x}}{x^{2}}\right)=+\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{-x}}{x^{2}}=0$

31 $\lim\limits_{x\to-\infty} -e^{-2x}-2x \;=+\infty$

Pour commencer

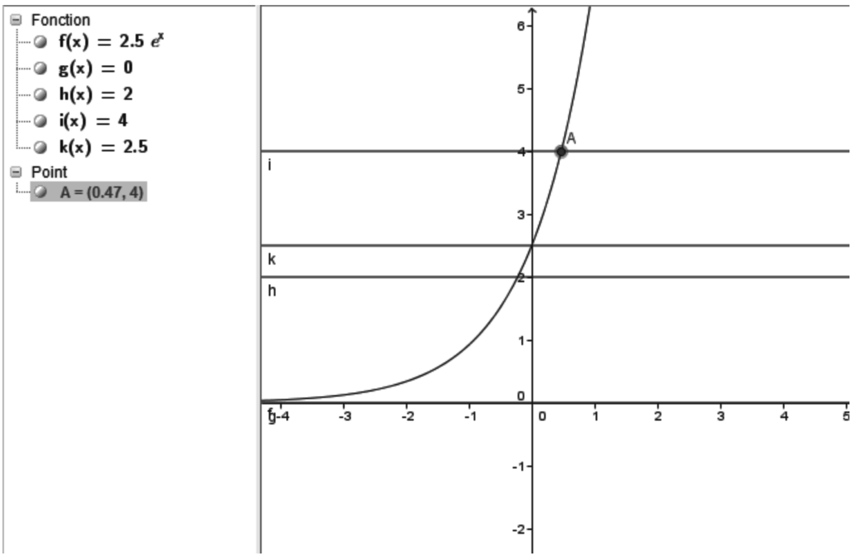
32 f est strictement décroissante car $-3{,}5<0$ et $g(x)=\mathrm{e}^{x}$ est croissante.

33 $u_{n+1}=\mathrm{e}^{n+1}=\mathrm{e}.\mathrm{e}^{n}=\mathrm{e}.u_{\mathrm{n}}$ donc u_n est une suite géométrique de raison $\mathrm{e}>1$ donc u_n est une suite croissante.

34 **a.** $5\mathrm{e}^{x}+3>0$ **b.** $-1-\mathrm{e}^{x}<0$ **c.** $\mathrm{e}^{x}(\mathrm{e}^{x}+2)>0$

35 **a.** f est croissante sur $\mathbb{R}$ **b.** g est décroissante sur $\mathbb{R}$ **c.** h est décroissante sur $\mathbb{R}$

36



a. $f(x) = 0$ n'a pas de solution. **b.** $f(x) = 2$ pour $x \approx -0{,}2$ **c.** $f(x) > 2{,}5$ pour $x > 0$ **d.** $f(x) < 4$ pour $x < 0{,}47$

37 **1.** $f(0) = -0{,}5\,\mathrm{e}^0 = -0{,}5$. $f(-1) = -0{,}5\,\mathrm{e}^{-1}$

2. Sur la calculatrice, pour trouver l'antécédent de –3, menu table ou sur Casio solvN($f(x)$=–3x).

On obtient la solution de l'équation $-0{,}5\,\mathrm{e}^x = -3$ soit $\mathrm{e}^x = 6$ d'où $x = \ln 6 = 1{,}791$.

3. $f'(x) = -0{,}5\,\mathrm{e}^x = f(x) < 0$ donc f est strictement décroissante car $-0{,}5 < 0$ et $\mathrm{e}^x > 0$.

38 f est strictement négative donc $f(x) = 2$ n'a pas de solution.

39 **1.** resol(3) : résout l'inéquation $2\mathrm{e}^x > 3$ $x > 0{,}4054651081$

Resol(–1) : résout l'inéquation $2\mathrm{e}^x > -1$ x réel

2. Dans la boucle while (2*(exp(x) != 0,5) $x = -1{,}386294361$

40 **1. c** **2. c** **3. b**

41 **1. Vrai** **2. Vrai** **3. Vrai**

42 $\dfrac{e^1}{e^{5,25}} = e^{1-5,25} = e^{-4,25}$

43 **a.** $\mathrm{e}^{3,9}$ **b.** e^3

44 **a.** $\mathrm{e}^{11,25}$ **b.** $\mathrm{e}^{3,9}$

45 $\mathrm{e}^{3,3}$

46 $\mathrm{e}^{2,2}$

47 $\dfrac{e^{3,5}}{e^{2,2}} = e^{1,3}$

48 $\mathrm{e}^{-1,2+0,5} = \mathrm{e}^{-0,7}$

49 $3{,}608\,.10^{-9}$

50 $\mathrm{e}^{1,8}.4.\mathrm{e}^{-3} = 4\,\mathrm{e}^{-1,2}$

51 $\left(\dfrac{729}{64}e^3 \times e^{1,5}\right) = \dfrac{729}{64}\ \mathrm{e}^{4,5}$ $\dfrac{e^{4,5}}{e^{1,25}} = e^{3,25}$

52 $A = \mathrm{e}^7$ $B = \dfrac{e^{-1}}{e^5} = e^{-6}$ $C = \mathrm{e}^{-6,3}.\mathrm{e}^{6,2} = \mathrm{e}^{-0,1}$ $D = e^{-0,5} \times e^{\frac{5}{3}} = e^{\frac{7}{6}}$

53 $f(1) \times f(-2{,}5) \times f(3) = 2\mathrm{e} \times 2\mathrm{e}^{-2,5} \times 2\mathrm{e}^3 = 2\mathrm{e}^{1,5}$

54 $\mathrm{e}^{2x} + 0{,}5\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x - 0{,}5 = \mathrm{e}^{2x} - 0{,}5\,\mathrm{e}^x - 0{,}5$

55 $\left(\dfrac{e^{2+0,5x}}{e^{2-0,5x}}\right) = \mathrm{e}^{2+0,5x+0,5x-2} = \mathrm{e}^x$

56 **1. b** **2.** $3\mathrm{e}^{4,7}$ **3. b**

57 **1. Faux** **2. Faux** **3. Faux**

58 $f'(x) = 3\,e^x + 2 > 0$ donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

59 **a.** $f'(x) = -2\,e^x + 4x$ **b.** $g'(x) = 0{,}5\,e^x + 2\,e^x = 2{,}5\,e^x$ **c.** $h'(x) = 4\,e^x(2e-1)$

60 **a.** $f(x) = uv(x)$ avec $u(x) = 2x$ et $v(x) = e^x$.
$u'(x) = 2$ et $v'(x) = e^x$ d'où $f'(x) = 2e^x + 2e^x(2x) = 2e^x(1 + x)$.
b. $g(x) = uv(x)$ avec $u(x) = e^x$ et $v(x) = 3 - x$.
$u'(x) = e^x$ et $v'(x) = -1$ d'où $g'(x) = e^x(3 - x) + e^x(-1) = e^x(3 - x - 1) = e^x\,(2 - x)$.
c. $h'(x) = uv(x)$ avec $u(x) = e^x + 1$ et $v(x) = e^x - 1$
$u'(x) = e^x$ et $v'(x) = e^x$ d'où $h'(x) = e^x(e^x - 1) + e^x(e^x + 1) = e^x(e^x - 1 + e^x + 1) = e^x\,(2e^x) = 2e^{2x}$.

61 **a.** $f'(x)=\dfrac{2xe^x-2e^x}{x^2}=\dfrac{2e^x(x-2)}{x^2}$ **b.** $g'(x)=\dfrac{2e^x-2xe^x}{e^{2x}}=\dfrac{2e^x}{e^{2x}}(1-x)=2\,e^{-x}(1-x)$

c. $h'(x)=\dfrac{e^{2x}-e^x(e^x+2)}{e^{2x}}=\dfrac{e^x(e^x-e^x-2)}{e^{2x}}=-2\,e^{-x}$

62 **a.** $f'(x)=\dfrac{5e^x\left(e^x+1\right)-5e^x(e^x)}{\left(e^x+1\right)^2}=\dfrac{5e^x(e^x+1-e^x)}{(e^x+1)^2}=\dfrac{5e^x}{(e^x+1)^2}$ **b.** $h'(x)=\dfrac{-2e^{x+1}}{\left(e^x+2\right)^2}$

63 **a.** $f'(x) = 2e^x + 3 > 0$ donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
b. $g'(x) = -2e^x < 0$ donc g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

64 **a.** $f'(x) = e^x + xe^x = e^x\,(1 + x)$ or $e^x > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $1 + x$ et $1 + x > 0$ pour $x > -1$ donc f est strictement croissante sur $]-1\,;+\infty[$ et décroissante sur $]-\infty\,;-1[$

b. $g'(x)=\dfrac{-e^x}{(e^x+1)^2} < 0$ donc g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

c. $h'(x)=\dfrac{e^x}{(e^x+2)^2} > 0$ donc h est strictement croissante.

65 $f'(x) = e^x(x - 1) + e^x = e^x\,x$ et $y = f'(1)(x - 1) + f(1) = e(x - 1) = ex - e$

66 **1.** $f'(x) = -2\,e^{-x} < 0$ donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
2. f est strictement positive donc 0 n'a pas d'antécédents par f.
3. $y = f'(0)x + f(0) = -2x + 2$

67 $f(0) = b = -1$ et $f'(0) = 0$ et $f'(x) = e^x\,(ax - 1) + e^x\,a = e^x\,(ax + a - 1)$ et $f'(0) = a - 1 = 0$ donc $a = 1$
$f(x) = e^x(x - 1)$ $f(1) = 0$ $f(-1) = -2e^{-1}$ $f(-0{,}5) = -1{,}5\,e^{-0{,}5}$ $f(3{,}5) = 2{,}5\,e^{3{,}5}$

68 **1. b** **2. b** **3. a**

69 **1. Vrai** **2. Faux** **3. Vrai**

70 $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x(1-e^x) = 0$

71 **a.** $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x(1-e^x) = -\infty$

b. $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x+1+x = +\infty$

c. $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x\left(1-\dfrac{2}{e^x}\right)= \lim\limits_{x\to-\infty} e^x-2 = -2$

72 **a.** $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x}(1-e^{x}) = +\infty$

b. $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x}+1-x = +\infty$

c. $\lim\limits_{x\to-\infty} (e^{x}+2)(e^{x}-3) = -6$

73 **a.** $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^{x}-2}{e^{x}+1} = -2$

b. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2}{e^{-x}} = 0$

c. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3}{e^{-x}} + \dfrac{e^{-x}}{3} = +\infty$

74 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -2$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 3$

75 **1. Vrai** **2. Faux** (5) **3. Faux** (–1)

76 **1. b** **2. a**

77 $f'(x) = -6\,e^{3x} < 0$ donc f strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

78 **a.** $f'(x) = 2\,e^{2x} + 2x \times 2\,e^{2x} = e^{2x}(2 + 4x)$

b. $g'(x) = -3\,e^{5x} - 3x \times 5\,e^{5x} = e^{5x}(-3 - 15x)$

c. $h'(x) = -0{,}5\,e^{-4x} - 0{,}5\,x \times (-4)\,e^{-4x} = e^{-4x}(-0{,}5 + 2x)$

d. $k(x) = 2xe^{-2x}$ $k'(x) = 2e^{-2x}(1 - 2x)$

79 **a.** $f'(x) = -4e^{2x} + 4x$

b. $g'(x) = \dfrac{-3}{2}\,e^{-3x} + 2\,e^{0{,}5x}$

c. $f'(x) = -4\,e^{-x}(2e - 1)$

80 **a.** $f'(x) = 2\,e^{x+2}$

b. $g'(x) = -\,e^{-x}(3 - x) - e^{-x} = e^{-x}(-3 + x - 1) = e^{-x}(-4 + x)$

c. $h'(x) = -2(e^{2x} + e^{-2x})$

81 **a.** $f'(x) = \dfrac{-4xe^{-2x} - 2e^{-2x}}{x^2} = \dfrac{-2e^{-2x}(2x+1)}{x^2}$

b. $g'(x) = \dfrac{2e^{2x} - 2x \times 2e^{2x}}{(e^{2x})^2} = \dfrac{2(1-2x)}{e^{2x}}$

c. $h'(x) = 4\,e^{4x} + 2\,e^{x}$

82 **a.** $f'(x) = \dfrac{-5e^{-x}\left(e^{2x}+1\right) - 10e^{-x} \times e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2} = \dfrac{-5e^{-x}(1+3e^{2x})}{(e^{2x}+1)^2}$

b. $h'(x) = \dfrac{-6e^{3x+1}}{(e^{-3x}+2)^2}$

83 **a.** $f'(x) = 10\,e^{5x} + 3 > 0$ donc f est strictement croissante.

b. $g'(x) = 8\,e^{-4x} > 0$ donc g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

84 **a.** $f'(x) = e^{0,25x} + x \times 0,25\, e^{0,25x} = e^{0,25x}\,(1 + 0,25x)$ or $e^{0,25x} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $1 + 0,25x$ et sur $\mathbb{R}$, $1 + 0,25x > 0$ pour $x > -4$ donc $f'(x) > 0$ pour $x > -4$ donc f est strictement croissante sur $]-4\,;+\infty[$ et décroissante sur $]-\infty\,;-4[$.

b. $g'(x) = \dfrac{e^{-x}}{(e^{-x}+1)^2} > 0$ donc g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

c. $h'(x) = \dfrac{2e^{2x}(e^x+2) - e^{2x}(e^x)}{(e^x+2)^2} = \dfrac{e^{2x}(2e^x+4-e^x)}{(e^x+2)^2} = \dfrac{e^{2x}(e^x+4)}{(e^x+2)^2} > 0$ donc h est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

85 $h'(x) = -3\,e^{-3x}\,(x + 1) + e^{-3x} = e^{-3x}\,(-3x - 3 + 1) = e^{-3x}\,(-3x - 2)$

$y = f'(0)x + f(0) = -2x + 1$

86 **1.** $f'(x) = -2\,e^{-2x} < 0$ donc f est strictement décroissante et positive.

2. Comme $f > 0$ donc 0 n'a pas d'antécédents.

3. $y = -2x + 1$

87 **1. b** **2. b** **3. b**

88 **1. Faux** **2. Vrai** **3. Vrai**

89 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

90 **a.** $+\infty$ **b.** $+\infty$ **c.** $+\infty$

91 **a.** $-\infty$ **b.** $-\infty$ **c.** $+\infty$

92 **a.** 0 **b.** $-\infty$ **c.** 0

93 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ graphiquement.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ car $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-2x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x + 2 = -\infty$

94 **1. b** **2. b** **3. a**

95 **1. Vrai** **2. Vrai** **3. Faux**

Pour s'entraîner

96 **1.** $\lim\limits_{x\to-\infty} (3x-2)e^x = 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} (3x-2)e^x = +\infty$

2. $f'(x) = 3e^x + e^x(3x - 2) = e^x(3 + 3x - 2) = e^x(3x + 1)$.

3. $e^x > 0$ et $3x + 1 > 0$ pour $x > \dfrac{-1}{3}$ donc $f'(x) > 0$ sur $\left]\dfrac{-1}{3}\,;+\infty\right]$

f est croissante sur $\left]\dfrac{-1}{3}\,;+\infty\right]$ et décroissante sur $\left]-\infty\,;\dfrac{-1}{3}\right]$.

4. Point P : intersection avec axe des abscisses : $f(x) = 0$ pour $x = \dfrac{2}{3}$. On a : $P\left(\dfrac{2}{3}\,;0\right)$.

Point N : intersection avec axe des ordonnées : $f(0) = -2$. On a : N $(0\,;-2)$.

5. $y = f'(0)(x - 0) + f(0) = x - 2$

97 **1.** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ car $f(x) = \dfrac{x\left(\dfrac{e^x}{x}\right)}{x\left(1+\dfrac{1}{x}\right)} = \dfrac{\left(\dfrac{e^x}{x}\right)}{1+\dfrac{1}{x}}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ car $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$

2. $f'(x) = \dfrac{e^x(x+1) - e^x}{(x+1)^2} = \dfrac{xe^x}{(x+1)^2}$

3. $f'(x) > 0$ pour $x > 0$ donc f est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$ et décroissante sur $]-\infty\,;0[$

4. $y = 1$

98 **1.** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

2. $f'(x) = 2 + e^x > 0$ donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

3. $y = f'(0)\,(x - 0) + f(0) = 3x + 3$

99 **1.** **a.** $f'(x) = a\,e^x + (ax + b)e^x = e^x(ax + a + b)$

b. $f(0) = 1$ donc $b = 1$ et $f'(0) = 3$ donc $a + b = 3$ et donc $a = 2$

2. **a.** $f'(x) = e^x(2x + 3)$

b. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$

c. $f'(x)$ est du signe de $2x + 3$ or $2x + 3 > 0$ pour $x > \dfrac{-3}{2}$ donc f est strictement croissante sur $\left]\dfrac{-3}{2}\,;+\infty\right[$ et décroissante sur $\left]-\infty\,;\dfrac{-3}{2}\right[$.

100 **1.** **a.** $f'(0) = -1$ $f'(-1) = 0$

b. $T : y = -x + 2$

c. $f(x) > 0$ sur $]-2\,;+\infty[$ et $f'(x) > 0$ sur $]-2\,;-1[$

d. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

2. **a.** $f'(x) = \dfrac{e^x - (x+2)e^x}{e^{2x}} = \dfrac{(-x-1)}{e^x}$

b. $f'(x)$ est du signe de $-x-1$ or $-x-1 > 0$ pour $x < -1$ donc f croissante sur $]-\infty\,;-1[$.

c. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ car $f(x) = \dfrac{x\left(1+\dfrac{2}{x}\right)}{x\left(\dfrac{e^x}{x}\right)} = \dfrac{\left(1+\dfrac{2}{x}\right)}{\left(\dfrac{e^x}{x}\right)}$

101 **1.** **a.** $f(-2) = e^{-2} > 0$ et $f(2) = e^2 - 4 < 0$

b. $f'(x) = e^x - 1 > 0$ pour $x > 0$ donc f est strictement croissante sur $]\,0\,;+\infty\,[$ et décroissante sur $]-\infty\,;0\,[$.

c. $f(0) = -1$ le minimum donc l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions de signes contraires.

2. **a.**

	a	b	$a - b > 0{,}1$	$(a + b)/2$	$f((a+b)/2).f(a)$
E1	0	2	oui	1	0,28
E2	1	2	oui	1,5	−0,28

	a	b	$a - b > 0,1$	$(a + b)/2$	$f((a+b)/2).f(a)$
E3	1	1 ,5	oui	1,25	–0,0675
E4	1	1,25	oui	1,125	0,0123
E5	1,125	1,25	oui	1,1875	0,00401
E6	1,125	1,1875	non	1,15625	$-9,54\ 10^{-4}$

La valeur approchée est 1,15625.

b. Tant que $b - a > 10^{-5}$

c. Dans le programme Python : $a = -2 \quad b = 0$

102 **1.** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

2. a. $f'(x) = 4e^{2x} - 5e^x = e^x(4e^x - 5)$.

b. $e^x > 0$ et $(4e^x - 5) > 0$ pour $e^x > \frac{5}{4}$ donc pour $x > \ln\frac{5}{4}$

3. f est strictement croissante sur $\left]\ln\frac{5}{4} ; +\infty\right[$ et décroissante sur $\left]0 ; \ln\frac{5}{4}\right[$

103 **1.** $f'(x) = a\,e^{cx} + c(ax + b)e^{cx} = e^{cx}(a + cax + cb)$

2. $f(0) = b = 0 \quad f'(0) = a = 10 \quad f'(1) = 10 + 10c = 0$ donc $c = -1$

3. a. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

b. $f'(x) = e^{-x}(10 - 10x)$ et $f'(x) > 0$ pour $x < 1$ donc f est strictement décroissante sur $] 1 ; +\infty [$ et croissante sur $] -\infty ; 1[$.

104 **1.** $R'(t) = 150 - 750 \times 0,1\, e^{0,1t} = 150 - 75e^{0,1t}$

$150 - 75e^{0,1t} > 0 \Leftrightarrow 2 > e^{0,1t} \Leftrightarrow \ln 2 > 0,1t \Leftrightarrow t < 10\ln 2$

2. $R'(t) > 0$ pour $t < 10\ln 2$ soit sur $[0 ; 10 \ln 2[$ et $R(t)$ est strictement croissante sur cet intervalle. Pour $t > 10 \ln 2$ soit sur $]10\ln 2 ; 10[$, $R(t)$ est strictement décroissante.

105 **1.** $f(0) = \dfrac{20}{1+2e^0} = \dfrac{20}{3}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 20$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} 2e^{-x} = 0$

2. $f'(x) = \dfrac{20 \times -2 \times -0,3e^{-0,3x}}{\left(1+2e^{-0,3x}\right)^2} = \dfrac{12e^{-0,3x}}{\left(1+2e^{-0,3x}\right)^2}$

3. $f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$.

106 **Partie A**

1. $f'(x) = e^x + 1 > 0$ **2.** $f(0) = 3 \quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

3. $f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $[0 ; +\infty [$.

4. Le minimum vaut $3 > 0$ donc $f > 0$.

Partie B

1. $g'(x) = 1 - \dfrac{e^x - (3+x)e^x}{e^{2x}} = \dfrac{2+x+e^x}{e^x} = f(x) \times e^{-x} > 0$

2. g est strictement croissante sur $[0 ; +\infty [$

3. $y = 3x - 3$

107 **1. Vrai** **2. Faux** **3. Vrai** ($y = 5x - 3$) **4. Vrai** $f(0) = -3$

108 **1.** $A(1{,}5) = 0{,}909$

$A(10/3) = 0{,}6729$

2. $A'(t) = \mathrm{e}^{-0{,}6t+0{,}4}\,(1 - 0{,}6t) > 0$ pour $t < 10/6$ donc $A(t)$ est croissante sur $[\,0\,;\,10/6[$

3. À la calculatrice $t = 4{,}22$ h

109 **1.** $T(2) = 109{,}39$°C

2. $T'(t) = -14{,}4\,\mathrm{e}^{-0{,}12t} < 0$ donc T est décroissante.

3. $\lim\limits_{x \to +\infty} T(t) = 15$

Pour faire le point

110 **Faux**

111 **Faux**

112 **Vrai**

113 **Faux**

114 **Vrai**

115 **Faux**

116 **Vrai**

117 **Faux**

118 **Faux**

119 **Faux**

120 Réponse **a.**

121 Réponse **b.**

122 Réponse **b.**

123 Réponse **a.**

124 Réponse **a.**

125 Réponse **a.**

126 Réponse **b.**

Pour approfondir

127 **1.** $T(0) = 25$

2. $T(t) = 400$ pour $t = 1{,}29$

3. $T'(t) = -20\,\mathrm{e}^{-0{,}05t} < 0$ donc $T(t)$ est strictement décroissante pour $t > 0$

128 **1.** $f(0) = 10$ et $f(4) = 37{,}93$

2. $f'(x) = (10/3)\ e^{(1/3)x} > 0$ donc f est strictement croissante

3. $f(8) = 143{,}91$ $f(9) = 200{,}85$ donc le taux d'augmentation entre 2018 et 2019 est $\dfrac{(200{,}85-143{,}91)}{143.91} = 39{,}57\%$

4. Voir fichier TICE.

129 **1.** $G(2) = 3{,}934$ $G(7) = 8{,}26$

2. $G(t) = 8$ pour $t = 6{,}43$ jours

3. $\lim\limits_{t\to+\infty} G(t) = 10$ le maximum d'hectares brûlés est de 10.

130 **1.** $q'(t) = 1{,}2\ e^{-0{,}2t} > 0$ donc q est strictement croissante sur I. La charge du condensateur croit en fonction du temps.

2. $\lim\limits_{t\to+\infty} q(t) = 6$. La charge sera à long terme de 6.

3. $q(t) > 5{,}5$ pour $t > 12{,}4$. La charge sera supérieure à 5,5 pour $t > 12{,}4$ secondes.

131 **1.** $I = [0\ ;+\ \infty[$

2. $T(0) = 10$

3. $T'(\mathrm{t}) = 20\ e^{-0{,}5t} - 0{,}5(20t + 10)e^{-0{,}5t} = e^{-0{,}5t}(15 - 10t)$ or $T'(t) > 0$ pour $t < 1{,}5$ donc T est strictement croissante sur $[\ 0\ ; 1{,}5[$ et décroissante sur $]\ 1{,}5\ ; +\ \infty\ [$

4. $\lim\limits_{t\to+\infty} T(t) = 0$

5. $T(t) = 10$ pour $t = 4{,}67$

132 **1.** $C_1'(t) = 8{,}1816\ e^{0{,}084t}$ et $C_2'(\mathrm{t}) = \dfrac{992\times 12{,}3\times 0{,}155}{(1+12{,}3e^{-0{,}155t})^2} = \dfrac{1891{,}248}{(1+12{,}3e^{-0{,}155t})^2}$

C'_1 et C'_2 sont positives donc C_1 et C_2 sont strictement croissantes sur I.

2. $\lim\limits_{t\to+\infty} C_1(t) = +\ \infty$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} C_2(t) = 992$

Pour le B1 la croissance ne s'arrête jamais tandis que pour le B2 la croissance se stabilise à 992 g.

3. $C_1(40) = 2804{,}07$ g et $C_2(40) = 967{,}84$ g donc B2 se rapproche le plus de la mesure.

133 $C(x) = \dfrac{0{,}01e^{x+2}}{x}$ **1.** $C(0{,}5) = 0{,}2436$

2. $C(x) = 4$ pour $x = 0{,}02$ ou pour $x = 5{,}73$

3. $C'(x) = \dfrac{0{,}01xe^{x+2} - 0{,}01e^{x+2}}{x^2} = \dfrac{0{,}01e^{x+2}(x-1)}{x^2}$

Or $C'(x) > 0$ pour $x > 1$.

4. C est strictement croissante sur $[1\ ; 10]$

TP S'approcher de e !

1. a. $A_n\ (nh\ ; e^{nh})$

b. $A_0\ (0\ ; 1)$ $A_1(h\ ; e^h)$

$y = x + 1$

2. a. $B_1(h\ ; 1+h)$

b. $B_2\ (2h\ ; (1+h)^2)$

c. $B_n\,(nh\,;\,(1+h)^n)$

3. $e = \lim\limits_{n\to+\infty} (1+\frac{1}{n})^n$

Pour l'épreuve du Bac

136 **1.** $f(1) = 0{,}25\ e^{0,4} = 0{,}373$ et $f(5) = 1{,}84$

2. $f(8) = 6{,}13$. La durée de chargement d'une vidéo pour 8000 internautes est de 6,13 s.

3. $f'(c) = 0{,}1\ e^{0,4c} > 0$ donc f est strictement croissante sur $[1\,;\,10]$.

4. Il faut résoudre l'inéquation $f(c) > 3$ soit pour $c > 6{,}21$

5. Dans la boucle while : 0,25 exp(0,4*x)<k

137 **1. a.** $f(1) = 0{,}2$

b. $f(52) = 30{,}12$

c. $f'(x) = 0{,}1\ e^{0,05t} + 0{,}1 > 0$ pour tout $x > 0$ donc f est strictement croissante pour $x > 0$.

2. a. Ce résultat indique le moment où le nombre d'adhérents dépassera le million.

b. Voir fichier corrigé TICE.

138 **1.** $f(0) = 2$ $f(24) = 1{,}6.\ 10^{-4}$

2. $f'(t) = e^{-0,5t} - 0{,}5\ (t+2)e^{-0,5t} = -0{,}5te^{-0,5t}$

3. Sur $[0\,;\,24]$ $f'(t) < 0$ donc f est strictement décroissante.

4. $f(t) > 0{,}1$ pour $t < 9{,}48$

139 **1.** $U(t) = 10\ e^{-0,4t}$ $U(10) = 0{,}183$

2. $U'(t) = -4\ e^{-0,4t} < 0$ donc U est décroissante.

3. À la calculatrice $t = 1{,}73$.

140 **1.** $f(0) = 35$ $f(50) = 2{,}87$

2. $t = -91{,}8\ \%$ soit un taux annuel moyen de $-4{,}87\ \%$.

3. $f'(x) = -1{,}75\ e^{-0,05x} < 0$ donc f est décroissante et la population menacée mais f est positive strictement donc 0 n'a pas d'antécédents et l'espèce ne va pas disparaitre complètement.

4. $f(x) < 10$ pour $x > 25{,}05$. Au bout de 25 ans la population passera en dessous de 10 millions.

5. Dans la boucle while (35exp(–0,05*x)>k)

Puis faire resol(10).

141 **1.** $s(1) = 4{,}6$

2. $\dfrac{s(t+1)}{s(t)} = e^{\frac{1}{3}}$ donc $t = 39{,}56\ \%$

3. a. $s(14) = 350{,}93$ **Faux**

b. **Faux** 2703%

c. **Faux**

142 **Partie A**

1. a. $b = 4$

b. $a = -0{,}5$ (AB) : $y = -0{,}5x + 4$

2. a. $f'(x) = (0{,}5x - 1)\,e^{0{,}25x} + 0{,}25(0{,}25\,x^2 - x + 2)e^{0{,}25x} = e^{0{,}25x}\,(0{,}5x - 1 + 0{,}0625x^2 - 0{,}25x + 0{,}5) = e^{0{,}25x}(0{,}0625x^2 + 0{,}25x - 0{,}5) = 0{,}0625e^{0{,}25x}(x^2 + 4x - 8)$

b. $f(0) = 2 + 2 = 4$ donc B appartient à la courbe de f.

$y = f'(0)(x - 0) + f(0) = -0{,}5x + 4$

Partie B

1. L'équation a un discriminant de $48 > 0$ d'où deux solutions $x = -2 + 2\sqrt{3}$ et $x' = -2 - 2\sqrt{3}$

2. Sur $[0 ; 4]$ $f'(x)$ est du signe de $x^2 + 4x - 8$ et $x^2 + 4x - 8 > 0$ pour $-2 + 2\sqrt{3} < x < 4$

3. Donc f est croissante sur $[-2 + 2\sqrt{3}\ ; 4]$ et décroissante sur $[0 ; -2 + 2\sqrt{3}\ ]$

4. Le minimum local de f sur $[0 ; 4]$ est $f(-2 + 2\sqrt{3}) = 3{,}5455 > 3{,}5$

143 Partie A

1. $g(0) = b + 1 = 4$ donc $b = 3$

2. $g'(0) = a - 1 = 0$ donc $a = 1$

Partie B

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

2. a. $f(x) = e^{-x}\ (xe^x + 3e^x + 1)$

b. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

3. a. $f'(x) = 1 - e^{-x}$ et $f'(x) > 0$ pour $1 > e^{-x}$ pour $x > 0$

b. f est strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$ et décroissante sur $]-\infty\ ; 0[$

144 **1. a.** $V(1200) = 2969$

b. $V(0) = 0$

2. a. $f'(x) = 36000(-0{,}002\,e^{-0{,}002x} + 0{,}004\,e^{-0{,}004x}) = 72\,e^{-0{,}002x}(2\,e^{-0{,}002x} - 1)$

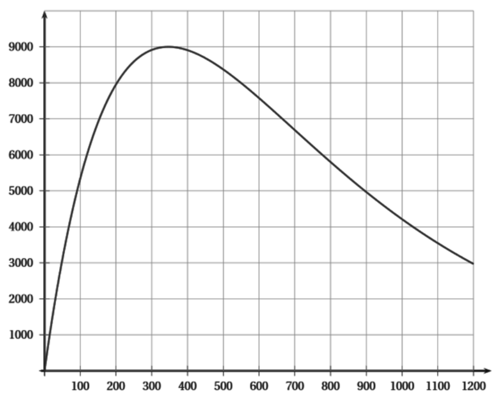
b. $g(500\ln 2) = 2\,e^{-0{,}002.500\ln 2} - 1 = 0$

c. $g(x) > 0$ pour $x < 500\ln 2$ et $g(x) < 0$ pour $x > 500\ln 2$

d. $f'(x)$ est du signe de g.

e. Sur $[0 ; 1200]$ f est croissante pour $x < 500\ln 2$ et décroissante pour $x > 500\ln 2$

f. Courbe de f.



3. a. le volume maximal est atteint pour $x = 500\ln 2$ soit $V(x) = 9000$.

b. $v = 500\ln 2 = 346{,}57$.

Partie B

1. a. $T_0 = 72$ min

b. $T_{eff} = 33{,}97$ min

c. 350/33 = 10,6 soit 11 outils.

d. Le temps de vie d'un outil est inversement proportionnel à la vitesse de coupe.

145 **1.** $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 14{,}29$. À long terme il y aura 14,29 µg d'analgésique dans le sang.

2. a. $f'(t) = 2{,}0006\ \mathrm{e}^{-0{,}14t} > 0$ donc f est strictement croissante.

3. $y = 2{,}0006x$

4. Cette quantité n'est jamais atteinte car $f(t) < 14{,}29$ et f est croissante.

5. $T = 4{,}951$ min

6. $f(25) = 13{,}85$ soit une baisse de 3 %.

146 **1. a.** $f'(t) = 0{,}34\ \mathrm{e}^{0{,}17t} > 0$ donc f est strictement croissante sur [0 ; 13].

b. $f(t) > 15$ pour $t > 11{,}85$ min

2. $0 < k < 0{,}17$

147 **1.** 38,25 g

2. 25% de 9 g = 2,25 g

3. a. $f(2) = 22{,}74$ g

b. $f(8) = 4{,}77 > 2{,}25$ donc abricot non sec.

c. il faut résoudre $f(t) < 2{,}25$ soit $t > 10{,}9$ min.

4. Temps pour masse de 38,25 – 5 = 33,25

$f(t) = 33{,}25$ pour $t = 0{,}54$ h

Temps pour masse de 2,25 + 5 : 6,3967 h

Le temps nécessaire à la perte des 5 derniers grammes est de 10,897 – 6,397 = 4,5 h

Il aurait fallu que le temps pour perdre les 5 derniers grammes soit 0,54 × 15 = 8,1 pour que l'affirmation soit vraie.

Chapitre 9

Fonction logarithme népérien

CAPACITÉS

• Utiliser les propriétés algébriques de la fonction logarithme népérien pour transformer des expressions.

• Résoudre des équations et des inéquations d'inconnue x du type $e^{ax} = b$; $e^{ax} > b$; $\ln(x) = b$; $\ln(x) > b$.

• Étudier des fonctions somme, produit ou quotient de fonctions polynômes et de la fonction $x \mapsto \ln(x)$.

Vérifier les acquis de Seconde ou de Première

1. b **2. c** **3. b** **4. a** **5. b** **6. c** **7. b** **8. c**

Activités

Activité 1 De l'exponentielle à une nouvelle fonction

1. $x = 0$.

2. a. $x \approx 1{,}6$; **b.** Non car pour tout x réel, $e^x > 0$.

3. Non car pour tout x réel, $e^x > 0$.

4. Il semble n'y avoir qu'une seule solution.

5. Il semble que $x \approx 0{,}7$.

6. On trouve 0,69 à 0,01 près.

Activité 2 Quand multiplier revient à additionner (ou presque)…

1. En face de 8 : 2,0794 ; en face de 15 : 2,708 ; en face de 18 : 2,8904.

2. On doit mettre 0.

3. Ici, on ne peut pas compléter la case en face de 17 car 17 est un nombre premier.

4. $\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$.

5. $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$.

6. Les valeurs sont arrondies à 0,01 près.

x	1	2	5	10	17	19	20	100
$\ln(x)$	0	0,69	1,61	2,30	2,83	2,94	3,00	4,61

La fonction semble croissante.

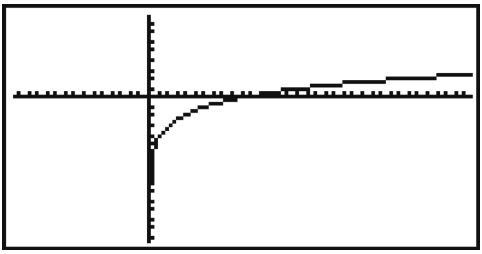
Activité 3 Limites en 0 et en $+\infty$ de la fonction ln

1. a. Les résultats sont arrondis à 0,1 près.

x	0,1	0,01	0,001	0,000 1	10^{-5}	10^{-6}	10^{-8}	10^{-12}	10^{-15}	10^{-20}	10^{-50}	10^{-99}
$\ln(x)$	−2,3	−4,6	−6,9	−9,2	−11,5	−13,8	−18,4	−27,6	−34,5	−46,1	−115,1	−228,0

On observe sur la seconde ligne que les images sont de plus en plus petites.

b.



Il semble que la courbe se rapproche de plus en plus de l'axe des ordonnées, axe d'équation $x = 0$.

c. Comme la fonction ln est croissante sur $]0\,;+\infty[$, on a : $\ln(x) < \ln(e^{-100})$ d'où $\ln(x) < -100$.

d. Pour que $\ln(x) < -1000$, il faut choisir x tel que : $0 < x < e^{-1000}$.

De même, pour que $\ln(x) < -10^6$, il faut choisir x tel que $0 < x < e^{-10^6}$.

e. Comme la fonction ln est croissante sur $]0\,;+\infty[$, on a donc $\ln(x) < \ln\left(e^{-10^p}\right)$, d'où $\ln(x) < -10^p$.

2. a. Les valeurs sont arrondies à 0,1 près.

x	10	100	1000	10 000	10^5	10^6	10^8	10^{12}	10^{15}	10^{20}	10^{50}	10^{99}
$\ln(x)$	2,3	4,6	6,9	9,2	11,5	13,8	18,4	27,6	34,5	46,1	115,1	228,0

b. La fonction ln est croissante sur $]0\,;+\infty[$.

c. Si $x > 10^p$, alors $\ln(x) > \ln(10^p)$; d'où $\ln(x) > p\ln(10)$.

d. En choisissant $a = e^{\mathrm{A}}$, on a bien : si $x > a$, alors $\ln(x) > \ln(e^{\mathrm{A}})$ d'où $\ln(x) > \mathrm{A}$.

Activité 4 Résoudre une équation grâce à la fonction logarithme népérien

1. $\dfrac{Vf - Vi}{Vi} = \dfrac{7{,}7 - 6{,}16}{6{,}16} = 0{,}25$.

2. Le coefficient multiplicateur entre deux années consécutives est $1 + \dfrac{t}{100}$. On applique successivement et 20 fois ce même coefficient, le coefficient multiplicateur global est donc égal à $\left(1+\dfrac{t}{100}\right)^{20}$.

3. $\left(1+\dfrac{t}{100}\right)^{20} = 1{,}25$

$\Leftrightarrow \ln\left(\left(1+\dfrac{t}{100}\right)^{20}\right) = \ln(1{,}25)$

$\Leftrightarrow 20\ln\left(1+\dfrac{t}{100}\right) = \ln(1{,}25)$

$\Leftrightarrow \ln\left(1+\dfrac{t}{100}\right) = \dfrac{\ln(1{,}25)}{20}$

4. $\ln\left(1+\dfrac{t}{100}\right)=\dfrac{\ln(1,25)}{20} \Leftrightarrow e^{\ln\left(1+\frac{t}{100}\right)}=e^{\frac{\ln(1,25)}{20}} \Leftrightarrow 1+\dfrac{t}{100}=e^{\frac{\ln(1,25)}{20}} \Leftrightarrow \dfrac{t}{100}=e^{\frac{\ln(1,25)}{20}}-1$.

À l'aide de la calculatrice, on obtient $\dfrac{t}{100}\approx 0{,}0112$. Donc $t \approx 1{,}1$ % à 0,1% près.

Exercices

Pour acquérir les automatismes

2 Réponse **c.**

3 réponse **a.**

4 réponse **b.**

5 **a.** Pas de solution réelle. **b.** pas de solution réelle. **c.** pas de solution réelle.

6 **a.** $x=0$; **b.** $x=\dfrac{ln2}{2}$; **c.** $x=-\ln3$.

7 **a.** pas de solution réelle ; **b.** $x>\ln2$; **c.** $x<-\dfrac{ln2}{3}$.

8 **a.** $x=e^{-3}$; **b.** $x=1$; **c.** $x=e^2$.

9 **a.** $x>0{,}5$; **b.** $x>0$; **c.** $0<x<0{,}25$.

10 $f'(x)=\dfrac{1}{x}$; $g'(x)=-\dfrac{3}{x}$.

11 $f'(x)=1+\dfrac{2}{x}$; $g'(x)=8x-\dfrac{1}{x}$.

12 $f'(x)=\dfrac{1}{x}+2$; $g'(x)=x^2(3\ln(x)+1)$.

13 $f'(x)=x(2\ln(x)+1)$; $g'(x)=-\ln(x)-1$.

14 $f'(x)=-\ln(x)$; $g'(x)=\dfrac{2\ln(x)}{x}$.

15 $f'(x)=\dfrac{1-\ln(x)}{x^2}$; $g'(x)=\dfrac{\ln(x)-3}{x^2}$.

16 $f'(x)=\dfrac{-1}{x(\ln(x))^2}$; $g'(x)=\dfrac{1+\frac{3}{x}-\ln(x)}{(x+3)^2}$.

17 $f'(x)=3+\ln(x)$; $g'(x)=2x\ln(x)+x-\dfrac{2}{x}$

18 **a.** $\ln(\sqrt{2})<\ln(\sqrt{3})$. ; **b.** $\ln(2\pi)>\ln(3{,}3)$. ; **c.** $\ln\left(\dfrac{5}{6}\right)>\ln\left(\dfrac{5}{7}\right)$.

19 **a.** $\ln(0{,}002)<\ln(0{,}02)$. **b.** $\ln(2\times10^{-3})>\ln(2\times10^{-4})$. **c.** $\ln(0{,}999)>\ln(99\times10^{-2})$.

20 $\ln(0{,}02) < \ln(0{,}19) < \ln(1{,}99) < \ln(2) < \ln(2{,}02)$.

21 **a.** $\ln(0{,}05) < 0$; **b.** $\ln(2{,}5) > 0$; **c.** $\ln(0{,}999) < 0$; **d.** $\ln(1{,}0001) > 0$; **e.** $\ln(100) > 0$.

22 $A = \ln(10\,000) = 4(\ln(5) + \ln(2))$; $B = \ln\left(\frac{125}{8}\right) = 3(\ln(5) - \ln(2))$; $C = \ln(0{,}1) = -\ln(2) - \ln(5)$;
$D = \ln\left(\sqrt{12\,500}\right) = \frac{5}{2}\ln(5) + \ln(2)$.

23 $A = \ln\left(\sqrt{e}\right) = 0{,}5$; $B = \ln\left(\frac{1}{e}\right) = -1$; $C = \ln(e^3) + \ln\left(\frac{1}{e^3}\right) = 0$.

24 $D = 2\ln(e^5) - 5\ln\left(\frac{1}{e^2}\right) = 20$; $E = 4 - 3\ln\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = \frac{11}{2}$.

25 **a.** $\log(125) = \frac{3\ln 5}{\ln 5 + \ln 2}$; **b.** $\log(50) = \frac{2\ln(5)+\ln(2)}{\ln(2)+\ln(5)}$;
c. $\log(0{,}25) = \frac{-2\ln(2)}{\ln(2)+\ln(5)}$; **d.** $\log(32) = \frac{5\ln(2)}{\ln(2)+\ln(5)}$.

Pour commencer

26 **1.** La fonction ln est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et pour tout $x > 0$, $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.

2. La fonction ln est croissante sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

27 Pour tout $x > 0$, $-\sqrt{x}$ est négatif, donc $\ln(-\sqrt{x})$ n'existe pas.

28 **1.** Oui car $e^0 = 1$.
2. Oui car $\ln(1) = 0$.

29 **a.** $x = -0{,}5$; **b.** $x = -1$; **c.** $x = 1$.

30 **a.** $2e^{-x+1} > 2 \Leftrightarrow e^{-x+1} > 1 \Leftrightarrow -x+1 > 0 \Leftrightarrow x < 1$; $\mathcal{S}_{\mathbb{R}} =]-\infty\,; 1[$.
b. $-3e^{2x} + 6 < 0 \Leftrightarrow e^{2x} > 2 \Leftrightarrow 2x > \ln 2 \Leftrightarrow x > \frac{\ln 2}{2}$; $\mathcal{S}_{\mathbb{R}} =]\frac{\ln 2}{2}\,; +\infty[$.

c. $e^{x^2} > 1 \Leftrightarrow x^2 > 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}^*$; $\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^*$.

31 **a.** $x = 1$; **b.** $x = \sqrt{e}$; **c.** $x = e - 1$.

32 **a.** $x \in]\,0\,;+\infty[$; **b.** $x \in]\,1\,;+\infty[$; **c.** $x \in]-\infty\,;-1[$

33 **a.** $e^{2\times 0} - 2e^0 + 1 = 1 - 2 + 1 = 0$.
b. $(e^x - 1)^2 = (e^x)^2 - 2\times e^x + 1 = e^{2x} - 2e^x + 1$.
Résoudre $e^{2x} - 2e^x + 1 = 0$ équivaut donc à résoudre $(e^x - 1)^2 = 0$.
c. $(e^x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$. $\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \{0\}$.

34 **a.** $e^{2x} - 2e^x - 3 = 0 \Leftrightarrow (e^x)^2 - 2e^x - 3 = 0 \Leftrightarrow X^2 - 2X - 3 = 0$ avec $X > 0$.
b. $(X+1)(X-3) = X^2 - 3X + X - 3 = X^2 - 2X - 3$.
$X^2 - 2X - 3 = 0 \Leftrightarrow (X+1)(X-3) = 0 \Leftrightarrow X = -1$ ou $X = 3$.

c. On résout $e^x = -1$ et $e^x = 3$. $e^x = -1$ n'admet pas de solution réelle.
$e^x = 3 \Leftrightarrow x = \ln 3$.
Conclusion $\mathscr{S}_{\mathbb{R}} = \{ln3\}$.

35 réponse **b.**

36 **1. Vrai** car $\ln(5^2) - 2\ln(5) = 2\ln(5) - 2\ln(5) = 0$.
2. Faux car la fonction ln n'est pas définie en -3.
3. Vrai car $e^{-2\times 0} + e^{2\times 0} = 1+1 = 2$.
4. Faux. Un contre-exemple : 0,5 n'est pas solution.

37 **1.** $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$.
2. F est dérivable sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ et $F'(x) = 1 \times \ln(x) + x \times \dfrac{1}{x} - 1 = \ln(x)$.

38 **a.** $f'(x) = -\dfrac{3}{x} + 2x - 3$.
b. On peut écrire que, pour tout $x > 0$, $f(x) = 2\ln(x)$ d'où $f'(x) = \dfrac{2}{x}$.
c. $f'(x) = \dfrac{2\ln(x)}{x}$.

39 **a.** $f'(x) = \dfrac{1}{x} - 8x + 3$.
b. $f'(x) = \dfrac{2}{x} - 3x^2 - 5$.
c. $f'(x) = \dfrac{\pi}{x}$.

40 **a.** $f'(x) = 2\ln(x) + (2x-1)\times\dfrac{1}{x} = 2\ln(x) + 2 - \dfrac{1}{x}$.
b. $f'(x) = \dfrac{-\frac{1}{x}}{(\ln(x))^2} = -\dfrac{1}{x(\ln(x))^2}$.
c. $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x}\times x - \ln(x)\times 1}{x^2} = \dfrac{1-\ln(x)}{x^2}$.

41 **a.** $f'(x) = x(2\ln(x)+1)$.
b. $f'(x) = 2x\ln(x) + x + \dfrac{1}{x}$.
c. $f'(x) = \dfrac{x(1-\ln(x))+1}{x(x+1)^2}$.

42 Réponse **c.**

43 F est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ comme somme de deux fonctions dérivables sur $]0\,;+\infty[$.
Et, pour tout $x > 0$, $F'(x) = \dfrac{1}{x} + 2x - 1 = f(x)$.

44 Réponse **b.**

45 Réponse **c.**

46 Réponse **b.**

47 Réponse **b.**

48 F est dérivable sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ et $F'(x) = 1\times\ln(x) + x \times \dfrac{1}{x} - 1 = \ln(x)$.

49 **1.** La fonction ln est croissante sur $]0\,;+\infty[$.

2. Si $x > 1$, alors on a $\ln(x) > \ln(1)$ puisque la fonction ln est croissante sur $]0\,;+\infty[$. D'où $\ln(x) > 0$.

50 **1.** $f'(x) = -3 \times \dfrac{1}{x}$; $\dfrac{1}{x} > 0$ sur $]0\,;+\infty[$. Donc $f'(x) < 0$ sur $]0\,;+\infty[$.

f est donc décroissante sur $]0\,;+\infty[$.

2. $2\sqrt{2} < 3$; comme f est décroissante sur $]0\,;+\infty[$, alors $f(2\sqrt{2}) > f(3)$.

51 $f'(x) = \dfrac{2}{x} + 2x$. Pour tout $x > 0$, $\dfrac{2}{x} + 2x > 0$, donc f est croissante sur $]0\,;+\infty[$.

52 $\ln(0{,}2) < \ln\left(\dfrac{1}{2}\right) < \ln((\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)) < \ln\left(\sqrt{2}\right) < \ln(2)$.

53 **1.** Pour tout entier naturel n, $\ln(a^n) = n\ln(a)$. Par propriété, $\ln(x^2) = 2\ln(x)$.

2. $\ln(a \times b \times c) = \ln(a) + \ln(b \times c) = \ln(a) + \ln(b) + \ln(c)$.

54 $A = 2\ln(2) + \ln(3)$;

$B = \dfrac{1}{2}(3\ln(2) + \ln(3))$.

$C = 4\ln(2) - 3\ln(3)$.

55 **a.** $3 + \ln(e^2) = 5$;

b. $\ln\left(\sqrt{e^5}\right) = 2{,}5$;

c. $\ln\left(\dfrac{1}{e^2}\right) - 4 = -6$.

56 $A = \ln 3 - \ln\left(\dfrac{1}{9}\right) = \ln 3 + \ln(3^2) = \ln 3 + 2\ln 3 = 3\ln 3$

$B = 2\ln\left(\sqrt{2}\right) - \dfrac{1}{3}\ln(8) = 2 \times \dfrac{1}{2}\ln 2 - \dfrac{1}{3}\ln(2^3) = \ln 2 - \dfrac{1}{3} \times 3\ln(2) = 0$;

$C = \ln\left(\sqrt{27}\right) + 2\ln 4 - \dfrac{1}{2}\ln 9 - \ln 8 = \dfrac{1}{2}\ln(3^3) + 2\ln(2^2) - \dfrac{1}{2}\ln(3^2) - \ln(2^3) = \dfrac{1}{2} \times 3\ln(3) + 2 \times 2\ln(2) - \dfrac{1}{2} \times 2\ln(3)$

$-3\ln(2)$

$C = \dfrac{1}{2}\ln 3 + \ln 2$.

$D = \dfrac{e^{\ln 3}}{e^{2\ln 3}} = \dfrac{3}{3^2} = \dfrac{1}{3}$.

57 $S = \ln\left(\frac{1}{2}\right) + \ln\left(\frac{2}{3}\right) + \ln\left(\frac{3}{4}\right) + \ldots + \ln\left(\frac{98}{99}\right) + \ln\left(\frac{99}{100}\right) = \ln(1) - \ln(100) = -\ln(100)$

58 **1.** $A(x) = 2\ln x - \ln(3x) = \ln(x^2) - \ln(3x) = \ln\left(\frac{x^2}{3x}\right) = \ln\left(\frac{x}{3}\right) = B(x)$ ($x > 0$ donc non nul).

2. $A(x) = \ln(2x) - \frac{1}{2}\ln x = \ln(2x) - \ln(\sqrt{x}) = \ln\left(\frac{2x}{\sqrt{x}}\right) = \ln\left(2\sqrt{x}\right) = B(x)$.

3. $A(x) = 4\ln(x) + \ln(2x) - \ln 4 - \ln(x^3) = \ln\left(\frac{x^4 \times 2x}{4 \times x^3}\right) = \ln\left(\frac{2x^5}{4x^3}\right) = B(x)$.

59 $D = 2\ln(e^5) - 5\ln\left(\frac{1}{e^2}\right) = 10\ln e + 10\ln e = 20$.

$E = 4 - 3\ln\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = 4 + 3\ln(\sqrt{e}) = 4 + \frac{3}{2} = \frac{11}{2}$.

60 **1.** $\log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}$.

2. Comme $\ln(x) > 0$, alors $\frac{\ln(x)}{\ln(10)} < \ln(x)$ puisque $\ln(10) > 1$. D'où $\log(x) < \ln(x)$ pour $x > 1$.

61 **1.** $\ln(100) = \ln(10) \times \log(100) \approx 4{,}6$.

2. $\ln(10\,000) = \ln(100^2) = 2\ln(100) \approx 9{,}2$.

3. $\ln(10^{-2}) = -\ln(10^2) \approx -4{,}6$.

62 **1.** $\ln(10^{100}) = 100\ln(10)$.

2. $\log(10^{100}) = \frac{\ln(10^{100})}{\ln(10)} = \frac{100\ln(10)}{\ln(10)} = 100$. On retrouve le résultat immédiatement avec la définition du logarithme décimal.

63 **a.** $\log(x) = \frac{1}{\ln(10)} \times \ln(x)$ donc $\log'(x) = \frac{1}{\ln(10)} \times \frac{1}{x} = \frac{1}{x\ln(10)}$.

b. Comme $x > 0$ et $\ln(10) > 0$, $\frac{1}{x\ln(10)} > 0$. Donc $\log'(x) > 0$ pour tout $x > 0$. La fonction logarithme décimal est donc croissante sur $]0\,;+\infty[$.

64 $f(x) = x^2 - 14x + 15 + 20\ln x$.

1. On a : $f'(x) = 2x - 14 + 20 \times \frac{1}{x} = \frac{2x^2 - 14x + 20}{x}$. Or, $2(x-2)(x-5) = 2x^2 - 14x + 20$ d'où le résultat $f'(x) = \frac{2(x-2)(x-5)}{x}$.

2. Comme $x \in [1\,;10]$, $x > 0$. Le signe de $f'(x)$ est donc du même signe que le numérateur $2(x-2)(x-5)$.

On a le tableau de signes suivants pour $2(x-2)(x-5)$:

x	1		2		5		10
$2(x-2)(x-5)$		+	0	−	0	+	

D'où le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle [1 ; 10] :

x	1		2		5		10
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
f	$f(1)$	↗	$f(2)$	↘	$f(5)$	↗	$f(10)$

65 **1.** **a.** D'après sa courbe, la fonction f est décroissante sur $]0\,;+\infty[$. Sa fonction dérivée est donc négative sur $]0\,;+\infty[$. La courbe Γ représente une fonction négative. C'est donc Γ qui représente la fonction dérivée de la fonction f.

b. La fonction F est donc représentée par la courbe $\mathscr{C}$. $F(1) = 1$ d'après le graphique.

2. a. $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{-1-x}{x^2}$.

b. Pour tout $x > 0$, $x^2 > 0$. Pour $x > -1$, $-x-1 < 0$. Pour tout $x > 0$, on a donc $f'(x) < 0$.

f est donc décroissante sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	−	
f	‖	↘	

3. a. H est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ par produit et somme de fonctions dérivables sur cet intervalle.

$H'(x) = 1 - 1 \times \ln(x) - (x-1)\times\dfrac{1}{x} = 1 - \ln(x) - 1 + \dfrac{1}{x} = f(x)$.

b. F est donc définie par $F(x) = H(x) + C$, où C est une constante réelle. On a vu que $F(1) = 1$.

On a donc $C = 1 - H(1) = 1 - 1 = 0$. $F(x) = H(x)$. Donc $H(x) = x - (x-1)\ln(x)$.

66 **1.** On résout $f(x) = 0$ qui équivaut à $1 + \ln(x) = 0$ puisque $x > 0$. $\ln(x) = -1$ pour $x = \dfrac{1}{e}$. Il y a un seul point d'intersection, de coordonnées $\left(\dfrac{1}{e}\,;0\right)$.

2. $f'(x) = \dfrac{-\ln(x)}{x^2}$; pour tout $x > 0$, $x^2 > 0$. Le signe de $f'(x)$ dépend du signe de $-\ln(x)$. D'où le tableau de variations :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	+	0	−	
f	‖	↗	1	↘	

3. L'équation réduite est $y = 1$.

Pour s'entraîner

67 **1.** Bob cherche à calculer les images par la fonction f telle que $f(x) = \ln\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)+\ln\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)$.

2. Le programme affiche toujours le résultat 0 car

$\ln\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)+\ln\left(\sqrt{1+x^2}-x\right) = \ln\left(\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)\times\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)\right) = \ln(1) = 0.$

Affichage de quelques lignes de la console à la fin du programme :

```
Console Python
L'image de 4 par f vaut 0.0
L'image de 5 par f vaut -0.0
L'image de 6 par f vaut -0.0
L'image de 7 par f vaut 0.0
L'image de 8 par f vaut -0.0
```

68 Partie A

1. $f(0{,}5) \approx 0{,}8$ et $f'(0{,}5) \approx 0{,}7$.

2. $f(x) = 0$ semble avoir pour solution $x = 0$ et $x \approx 2{,}7$.

$f(x) > 0$ pour $x \in\ ]0\,;2{,}7[$.

3. Équation de la tangente au point d'abscisse 1 : $y = 1$.

4.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	||	+	0	−	
f	||	↗	1	↘	

Partie B

1. $f(0{,}5) = 0{,}5(1-\ln(0{,}5)) = 0{,}5 + 0{,}5\ln(2) \approx 0{,}84$ à 0,01 près.

$f'(x) = -\ln(x)$ donc $f'(0{,}5) = -\ln(0{,}5) = \ln(2) \approx 0{,}69$ à 0,01 près.

2. $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $1-\ln(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = e$.

Tableau de signes de $f(x)$:

x	0		e		$+\infty$
Signe de $1 - \ln(x)$	||	+		−	
Signe de $f(x)$	||	+		−	

3. Équation de la tangente au point d'abscisse 1 :

$y = f'(1)(x-1) + f(1)$; $f'(1) = 0$ et $f(1) = 1$. D'où l'équation $y = 1$.

4. $f'(x) = -\ln(x)$.

Si $x > 1$, alors $-\ln(x) < 0$ et si $0 < x < 1$, alors $-\ln(x) > 0$. Cela confirme le tableau de variations conjecturé dans la partie A.

69 **1.** $f(x) = \dfrac{x^2}{4} - 1 - 2\ln x$ donc $f'(x) = \dfrac{2x}{4} - 2\times\dfrac{1}{x} = \dfrac{x}{2} - \dfrac{2}{x} = \dfrac{x^2-4}{2x}$.

2. Pour tout $x > 0$, $2x > 0$. On étudie le signe de $x^2 - 4 = (x+2)(x-2)$ sur $]-\infty\,;+\infty[$.

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$(x-2)(x+2)$		+	0	−	0	+	

D'où le tableau de variation de f sur $]0\,;+\infty[$:

x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
f	‖	↗	$f(2)$	↘	

3. L'équation réduite de la tangente au point d'abscisse 1 est donnée par : $y=f'(1)(x-1)+f(1)$.

$f'(1)=\dfrac{1^2-4}{2\times 1}=\dfrac{-3}{2}$ et $f(1)=\dfrac{1^2}{4}-1-2\ln 1=\dfrac{-3}{4}$.

On a donc $y=\dfrac{-3}{2}(x-1)-\dfrac{3}{4}=-\dfrac{3}{2}x+\dfrac{3}{2}-\dfrac{3}{4}$; l'équation est donc $y=-\dfrac{3}{2}x+\dfrac{3}{4}$.

4. a. $g'(x)=1\times\ln(x)+x\times\dfrac{1}{x}-1=\ln(x)$.

b. Une primitive de f est : $\dfrac{x^3}{12}-x-2\,g(x)+\mathrm{C}$, où C est une constante réelle.

$F(x)=\dfrac{x^3}{12}-x-2\,g(x)+C$, avec $F(1)=0$. On a donc $\dfrac{1}{12}-1-2\,(1\times\ln 1-1)+C=0$. $\dfrac{13}{12}+C=0$ d'où $C=-\dfrac{13}{12}$.

$F(x)=\dfrac{x^3}{12}-x-2\,(x\ln(x)-x)-\dfrac{13}{12}=\dfrac{x^3}{12}+x-2\,x\ln(x)-\dfrac{13}{12}$.

70 **1.** Réponse **b**

2. Réponse **b**

3. Réponse **b**

4. Réponse **b**

71 **1.**

x	1	2	3	4	5	6	7
$f(x)$	−1,5	−0,4	−0,7	−0,9	−0,6	0,3	2

2. a.

$$f'(x)=\frac{(x-2)(x-4)}{x}$$

b. Sur I, $x>0$; le signe de $f'(x)$ dépend du signe du numérateur $(x-2)(x-4)$.

On a le tableau de signes suivant :

x	1		2		4		7
$(x-2)(x-4)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

f est donc croissante sur les intervalles $[1\,;2]$ et $[4\,;7]$ et décroissante sur $[2\,;4]$.

D'où le tableau de variations :

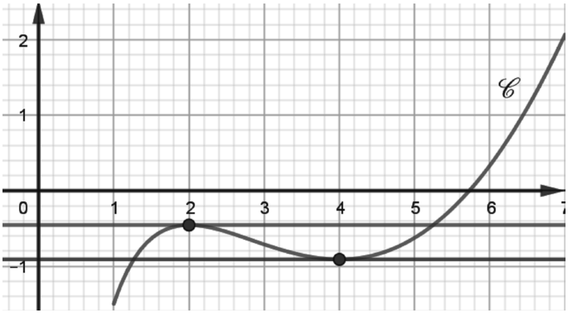
x	1		2		4		7
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$f(1)$	↗	$f(2)$	↘	$f(4)$	↗	$f(7)$

3. D'après l'étude des variations de f, $f'(x)$ s'annule en $x = 2$ et en $x = 4$.

Le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ de f est donc nul en $x = 2$ et en $x = 4$.

La courbe $\mathscr{C}$ admet donc deux tangentes parallèles à l'axe des abscisses, aux points d'abscisses 2 et 4.

4. a. Figure d'après GeoGebra :



b. D'après la figure ci-dessus, on lit que l'équation $f(x) = 0$ ne semble admettre qu'une seule solution dans l'intervalle I. On lit $x \approx 5{,}7$.

72 Partie A

1. $f(1) = 2$ et $f'(4) = 0$.

2. $f'(x) = a + b \times \frac{1}{x} = a + \frac{b}{x}$. $f'(4) = a + \frac{b}{4}$.

3. On a $f(1) = 2$ donc $a + 1 = 2$ d'où a $= 1$.

$f'(4) = 0$ d'où $a + \frac{b}{4} = 0 \Rightarrow 1 + \frac{b}{4} = 0 \Rightarrow \frac{b}{4} = -1$ d'où $b = -4$.

Partie B

1. $f'(x) = a + \frac{b}{x}$ d'après la partie A donc $f'(x) = 1 - \frac{4}{x}$.

2. On a $f'(x) = 1 - \frac{4}{x} = \frac{x-4}{x}$. $x > 0$ donc le signe de $f'(x)$ est le même que celui de $x - 4$.

$x - 4 > 0 \Leftrightarrow x > 4$.

On a le tableau de variation suivant :

x	0		4		$+\infty$
$f'(x)$	‖	–	0	+	
f	‖	↘	$f(4)$	↗	

73 **1.** C2=B2*1,2–500

2. $u_{n+1} = 1{,}2u_n - 500$.

La suite (u_n) n'est pas géométrique car $\frac{u_1}{u_0} \neq \frac{u_2}{u_1}$.

3. $v_n = u_n - 2\,500$.

4. a. Il semble que la suite (v_n) soit géométrique.

b. $v_{n+1} = u_{n+1} - 2500 = 1{,}2u_n - 3000 = 1{,}2\,(u_n - 2500) = 1{,}2v_n$. La suite (v_n) est géométrique de raison 1,2.

$v_n = v_0 \times 1{,}2^n = 12\,500 \times (1{,}2)^n$.

c. $u_n = v_n + 2500$ donc $u_n = 12\,500 \times (1{,}2)^n + 2500$.

d. On cherche le plus petit entier n tel que $u_n > 500\,000$.

On résout l'inéquation :

$12\,500 \times (1{,}2)^n + 2500 > 500\,000$

$\Leftrightarrow (1{,}2)^n > \dfrac{497\,500}{12\,500} \Leftrightarrow n\ln(1{,}2) > \ln(39{,}8) \Leftrightarrow n > \dfrac{\ln(39{,}8)}{\ln(1{,}2)}$.

La calculatrice donne: $\dfrac{\ln(39{,}8)}{\ln(1{,}2)} \approx 20{,}2$ à 0,1 près. La culture contiendra plus de 500 000 bactéries au bout de 21 minutes.

74 **1.** $N(2T) = N_0 \times e^{-\lambda 2T} = N_0 \times e^{-\frac{ln2}{T}\times 2T} = N_0 \times e^{-2ln2} = N_0 \times e^{-ln2^2} = N_0 \times e^{-ln4} = \dfrac{N_0}{e^{ln4}} = \dfrac{N_0}{4}$.

2. Le nombre de noyaux radioactifs de carbone 14 devient égal au quart de la valeur initiale au bout de $2T$ soit $2 \times 5730 = 11\,460$ ans.

3. Pour le carbone 14 : $\lambda = \dfrac{ln2}{5{,}73} \approx 0{,}12097$ à 10^{-5} près.

Pour le plutonium 239 : $\lambda = \dfrac{ln2}{24} \approx 0{,}02888$ à 10^{-5} près.

4. Pour le carbone 14 la loi exponentielle est : $N(t) = N_0 \times e^{-0{,}12097t}$.

Pour le plutonium 239 la loi exponentielle est : $N(t) = N_0 \times e^{-0{,}02888t}$.

5. On résout $N(t) < 0{,}1N_0 \Leftrightarrow N_0 \times e^{-0{,}02888t} < 0{,}1\,N_0 \Leftrightarrow e^{-0{,}02888t} < 0{,}1 \Leftrightarrow -0{,}02888t < \ln(0{,}1)$

Ce qui équivaut à : $t > \dfrac{\ln(0{,}1)}{-0{,}02888}$ soit $t > 79{,}72$. Le nombre de noyaux radioactifs de plutonium 239 sera inférieur à 10% de sa valeur initiale au bout d'environ 80 000 ans.

6. On résout $N(t) = 0{,}1\,N_0$.

Cela équivaut à $N_0 \times e^{-0{,}12097t} = 0{,}1N_0 \Leftrightarrow e^{-0{,}12097t} = 0{,}1 \Leftrightarrow -0{,}12097t = \ln(0{,}1)$ d'où $t = \dfrac{\ln(0{,}1)}{-0{,}120907} \approx 19{,}034$

Le fragment humain a un âge d'environ 19 000 ans à 100 ans près.

75 **1.** $\text{pH} = -\log(2\times 10^{-6}) = -\log(2) - \log(10^{-6}) = -\log(2) + 6$.

2. On cherche la concentration en ions oxonium telle que $-\log([H_3O^+]) = 7$. On a : $[H_3O^+] = 10^{-7}$.

3. Si pH = 6,3, alors $[H_3O^+] = 10^{-6{,}3} \approx 5 \times 10^{-7}$ mol.L^{-1}.

4. Si la concentration est divisée par 10, le pH augmente de 1.

Si la concentration est divisée par 100, le pH augmente de 2.

5. Si le pH diminue de 1, la concentration est multipliée par 10.

Si le pH diminue de 2, la concentration est multipliée par 100.

76 **1.** $u_{n+1} = 0{,}95u_n$ donc la suite (u_n) est une suite géométrique de raison 0,95 et de premier terme $u_0 = 12\,000$.

2. $u_n = 12\,000 \times (0{,}95)^n$.

3. a.

```
n ← 0
u ← 12000
Tant que u > 6000 faire :
        u ← u×0,95
        n ← n+1
FinTantque
Afficher n.
```

b. La calculatrice affiche 14.

c. On cherche la plus petite valeur de n telle que $12\,000 \times (0{,}95)^n < 6000$.

On résout l'inéquation :

$12\,000 \times (0{,}95)^n < 6000 \Leftrightarrow (0{,}95)^n < 0{,}5 \Leftrightarrow n\ln(0{,}95) < \ln(0{,}5) \Leftrightarrow n > \dfrac{\ln(0{,}5)}{\ln(0{,}95)}$.

Comme $\dfrac{\ln(0{,}5)}{\ln(0{,}95)} \approx 13{,}5$, l'équipement aura perdu la moitié de sa valeur initiale au bout de 14 ans.

77 **1.** $160 \times 0{,}75 = 120$. L'intensité lumineuse du rayon à la sortie d'une plaque de verre est de 120 cd.

2. On a $I_{n+1} = 0{,}75 I_n$. La suite (I_n) est une suite géométrique de raison 0,75.

3. Pour tout entier naturel n, $I_n = 160 \times (0{,}75)^n$.

4. On cherche la plus petite valeur de n telle que $I_n \leq 40$.

On résout l'inéquation :

$160 \times (0{,}75)^n \leq 40 \Leftrightarrow (0{,}75)^n \leq 0{,}25 \Leftrightarrow n\ln(0{,}75) \leq \ln(0{,}25) \Leftrightarrow n \geq \dfrac{\ln(0{,}25)}{\ln(0{,}75)}$.

$\dfrac{\ln(0{,}25)}{\ln(0{,}75)} \approx 4{,}8$.

Le nombre minimal de plaques que le rayon doit traverser pour avoir une intensité sortante inférieure ou égale à 40 cd est de 5.

78 **1.** $P_e = RI_e$ et $P_s = RI_s$ donc $\dfrac{P_s}{P_e} = \dfrac{I_s^2}{I_e^2}$ d'où $10\log\left(\dfrac{P_s}{P_e}\right) = 10\log\left(\dfrac{I_s^2}{I_e^2}\right) = 10 \times 2\log\left(\dfrac{I_s}{I_e}\right) = 20\log\left(\dfrac{I_s}{I_e}\right)$.

Donc $G_p = G_I$.

De même, $\dfrac{P_s}{P_e} = \dfrac{U_s^2}{U_e^2}$ donc $10\log\left(\dfrac{P_s}{P_e}\right) = 10\log\left(\dfrac{U_s^2}{U_e^2}\right) = 20\log\left(\dfrac{U_s}{U_e}\right)$.

Donc $G_p = G_U$.

Conclusion : $G_p = G_I = G_U$.

2. Si la tension est multipliée par 10 entre l'entrée et la sortie, on a donc $U_S = 10U_e$.

$G_U = 20\log\left(\dfrac{U_s}{U_e}\right) = 20\log\left(\dfrac{10U_e}{U_e}\right) = 20\log(10) = 20$. Le gain en tension est de 20 dB.

3. Si $G_P = 3$ dB, alors $10\log\left(\dfrac{P_s}{P_e}\right) = 3$ donc $\log\left(\dfrac{P_s}{P_e}\right) = 0{,}3$. D'où $\dfrac{P_s}{P_e} = 10^{0{,}3} \approx 2$. Cela signifie que la puissance a été multipliée par 2 entre l'entrée et la sortie.

4. Si G_I est négatif, cela signifie que $\log\left(\dfrac{I_s}{I_e}\right)$ est négatif, et donc que le rapport $\dfrac{I_s}{I_e}$ est inférieur à 1. L'intensité en sortie est donc inférieure à l'intensité en entrée.

Pour faire le point

79 **Faux**, la fonction ln est définie sur $]0\,;+\infty[$

80 **Vrai** $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$, et pour tout $x > 0$, $\ln'(x) > 0$.

81 **Faux** $\lim\limits_{x\to 0} ln(x) = -\infty$

82 **Vrai** $\ln(2e) - 2\ln(8) - \ln\left(\dfrac{1}{16}\right) = \ln(2) + \ln(e) - 2\ln(2^3) + \ln(16) = \ln(2) + \ln(e) - 2\times3\ln(2) + \ln(2^4)$

$= \ln(2) + \ln(e) - 2\times3\ln(2) + 4\ln(2) = -\ln 2 + 1$

83 **Vrai** $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$

84 **Faux** $f'(x) = (2x+1)\ln(x) + (x^2+x)\times\dfrac{1}{x} = (2x+1)\ln(x) + x + 1$

85 **Vrai** $\ln(2x) > -1$ équivaut à $2x > e^{-1}$ soit $x > \dfrac{1}{2e}$.

86 **Faux** $e^{0^2+1} = e^1 = e$

87 **Vrai** $f'(x) = \dfrac{3}{x}$ donc $f'(x) = \dfrac{3}{1} = 3$.

88 Réponse **a**

89 Réponse **d**

90 Réponse **c**

91 Réponse **b**

92 Réponse **d**

Pour approfondir

93 **1.** $\mathrm{lb}(2^n) = \dfrac{\ln(2^n)}{\ln 2} = \dfrac{n\ln 2}{\ln 2} = n$.

2. $\dfrac{ln10}{ln2} \times \log x = \dfrac{ln10}{ln2} \times \dfrac{lnx}{ln10} = \dfrac{lnx}{ln2} = \mathrm{lb}x$.

3. $\ln x = \ln 2 \times \mathrm{lb}x$.

94 **1.** $f'(x) = -\dfrac{1}{x}\times\ln(x) + (2-\ln(x))\times\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{x}(-\ln(x)+2-\ln(x)) = \dfrac{2(1-\ln(x))}{x}$.

2. $x > 0$, le signe de $f'(x)$ est donc celui de $1-\ln(x)$, 2 étant positif.

$1-\ln(x) > 0 \Leftrightarrow x < e$.

D'où le tableau de variations :

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
f	‖	↗	1	↘	

3. a. $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = e^2$. La courbe $\mathscr{C}$ coupe l'axe des abscisses en A(1 ; 0) et B(e^2 ; 0).

b. $f'(1) = 2$.

95 **1. a.** La capacité pulmonaire semble maximale à l'âge de 20 ans.

b. Un adulte a une capacité pulmonaire inférieure à celle d'un enfant de 10 ans à partir d'environ 77 ans.

2. a. $f'(x) = 110 \times \dfrac{\frac{1}{x}\times x-(lnx-2)\times 1}{x^2} = 110 \times \dfrac{1-lnx+2}{x^2} = \dfrac{110(3-lnx)}{x^2}$.

b. Pour tout $x \in [10 ; 100]$, $x^2 > 0$. 110 est aussi positif, le signe de $f'(x)$ est celui de $3 - \ln(x)$.

$3 - \ln(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq e^3$.

D'où le tableau de variations :

x	10		e^3		100
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$11(\ln 10-2)$	$\nearrow$	$\dfrac{110}{e^3}$	$\searrow$	$1{,}1(\ln 100-2)$

c. D'après le tableau, la valeur maximale de f est $\dfrac{110}{e^3}$, qui est environ égal à 5,48 à 0,01 près.

$\boxed{96}$ **1.** $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x}\times(x-1)-\ln x\times 1}{(x-1)^2} = \dfrac{1-\frac{1}{x}-\ln x}{(x-1)^2}$.

2. a. $g'(x) = \dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x} = \dfrac{1-x}{x^2}$. Sur $]1\,;+\infty[$, $1-x<0$ et $x^2>0$. Pour tout $x\in]1\,;+\infty[$, $g'(x)<0$. Donc g est décroissante sur $]1\,;+\infty[$. $g(1)=0$.

b. Comme g est décroissante sur $]1\,;+\infty[$ et que $g(1)=0$, on a donc pour tout $x>1$, $g(x)<0$.

$f'(x) = \dfrac{1-\frac{1}{x}-\ln x}{(x-1)^2} = \dfrac{g(x)}{(x-1)^2}$. Pour tout $x\in]1\,;+\infty[$, $g(x)<0$ et $(x-1)^2>0$.

D'où $f'(x)<0$.

f est donc décroissante sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$.

TP Le plus court chemin

1. $AM^2 = (x-0)^2 + (\ln x - 2)^2$ car M a pour coordonnées $(x\,;\ln x)$. D'où $AM^2 = f(x)$.

2. a. $g'(x) = 2x + \dfrac{1}{x}$. Pour tout $x\in[0{,}1\,;4]$, $g'(x)>0$, donc g est croissante sur l'intervalle $[0{,}1\,;4]$.

b. $g(1)=-1$ et $g(2) = 2+\ln(2)$. Comme g est croissante sur $[0{,}1\,;4]$, on a bien $1<\alpha<2$.

La calculatrice donne $\alpha\approx 1{,}3$ à 0,1 près.

c. Comme g est croissante sur $[0{,}1\,;4]$, et que $g(\alpha)=0$, on a :

x	$0{,}1$		α		4
$g(x)$		$-$	0	$+$	

3. a. $f'(x) = 2x + 2\times\dfrac{1}{x}\times(\ln x-2) = \dfrac{2x^2+2\ln x-4}{x} = \dfrac{2(x^2+\ln x-2)}{x} = \dfrac{2g(x)}{x}$.

b. $x\in[0{,}1\,;4]$, donc $x>0$. Comme $2>0$, le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$.

D'où le tableau de variation de f :

x	$0{,}1$		$\alpha\approx 1{,}3$		4
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	

c. f admet un minimum en $x=\alpha$.

En salle informatique

Partie 1

2. La distance la plus courte semble être environ 2,171 unités soit environ 21,71 m.

Partie 2

1. Ce programme permet d'obtenir un encadrement d'amplitude 0,01 de la solution à l'équation $g(x) = 0$.

2. Programme modifié :

```
from math import*
def g(x):
    return x**2-2+log(x)
def balayage(n):
    a=10**(-n)
    x=1
    while g(x)<0:
        x=x+a
    print('la solution cherchée est encadrée par',round(x-a,n),'et',round(x,n))
```

Pour l'épreuve du Bac

98 **1.** Réponse **b**

2. Réponse **c**

3. Réponse **b**

4. Réponse **a**

99 **1.** $f(3) = 6{,}63$. Pour 300 objets produits, le coût de production par objet est d'environ 6,63 €.

2.

x	1	2	3	4	5	6	8	10
$f(x)$	29	13,36	6,63	4,73	6,37	11,00	28,09	54,75

3. $f'(x) = 2x - 2 - 24 \times \dfrac{1}{x} = \dfrac{2x^2 - 2x - 24}{x} = \dfrac{2(x-4)(x+3)}{x}$.

4. Sur l'intervalle $[1 ; 10]$, $x > 0$ et $x + 3 > 0$. Le signe de $f'(x)$ est donc celui de $(x-4)$.

D'où le tableau de variation de f :

x	1		4		10
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	$f(4)$	$\nearrow$	

5. f atteint son minimum en $x = 4$. Le coût de fabrication par objet est minimal pour 400 objets produits.

$f(4) \approx 4{,}73$. Le coût minimum est d'environ 4,73 €.

6. a. $f(x) \geq 20$ pour $x \in [1 ; 1{,}5] \cup [7{,}2 ; 10]$.

b. Pour que l'entreprise soit bénéficiaire en vendant chaque objet à 20 €, elle doit produire de manière à ce que le coût par objet soit inférieur à 20 €. Elle doit donc produire entre 150 et 720 objets.

100 Partie A

1. Il semble y avoir deux solutions.

2. $f'(x) = 0$ pour $x \approx 2$.

3. $f'(x) = -2$. L'équation réduite de la tangente au point d'abscisse 1 est : $y = -2x + 2$.

Partie B

1. $f(1) = 2 \times 1 - 2 \; - 4\ln 1 = 0$.

2. $f'(x) = 2 - 4 \times \dfrac{1}{x} = \dfrac{2x-4}{x} = \dfrac{2(x-2)}{x}$.

3. $x > 0$, $2 > 0$ le signe de $f'(x)$ est celui de x–2. $x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$.

D'où le tableau de variation de f :

x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
f	‖	$\searrow$	$2 - 4\ln 2$	$\nearrow$	

4. La calculatrice donne $3{,}5 < a < 3{,}6$.

5. L'équation réduite est $y = f'(1)(x-1) + f(1)$. $f'(1) = -2$ et $f(1) = 0$.

L'équation est donc $y = -2x + 2$.

101 Partie A

1. a. $f(1) = -1$.

b. $f'(1) = -2$.

c. T a pour équation $y = -2x + 1$.

2. a. $f'(x) = \dfrac{2}{x} - \dfrac{a}{x^2}$.

b. $f'(1) = -2$ donne $2 - a = -2$. Donc $a = 4$.

$f(1) = -1$ donne $a + b = -1$. Donc $b = -1 - 4 = -5$.

Partie B

1. a. $f'(x) = \dfrac{2}{x} - \dfrac{4}{x^2} = \dfrac{2x-4}{x^2}$.

b. Comme $x^2 > 0$ pour $x \in \,]0\,;+\infty[$, le signe de $f'(x)$ est celui de $2x$–4.

$2x - 4 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$.

D'où le tableau de signes de $f'(x)$:

x	0		2		$+\infty$
Signe de $f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	

2. Tableau de variation de f :

x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
f	‖	$\searrow$	$2\ln 2 - 3$	$\nearrow$	

102 Partie A

1. Le niveau sonore N du bruit entendu à 10 mètres de la source sonore, de puissance P égale à 2,6 watts est donné par $N = 120 + 4\ln\left(\frac{2,6}{13\times10^2}\right) \approx 95$ à 1 unité près.

Le niveau sonore N du bruit entendu à 10 mètres de la source sonore, de puissance P égale à 2,6 watts est égal à environ 95 dB.

2. On résout l'équation :

$120 + 4\ln\left(\frac{P}{13\times10^2}\right) = 84 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{P}{13\times10^2}\right) = -9 \Leftrightarrow \frac{P}{13\times10^2} = e^{-9} \Leftrightarrow P = 1300 \times e^{-9}$.

La puissance P est égale à environ 0,16 W à 0,01 près.

Partie B

1. a. $N = 120 + 4\ln\left(\frac{0,026}{13D^2}\right) = 120 + 4\ln\left(\frac{0,026}{13}\right) - 4\ln(D^2) = 120 + 4\ln(0,002) - 4\ln(D^2)$.

b. $120 + 4\ln(0,002) \approx 95,14$ à 0,01 près d'après la calculatrice donc N peut être approximée par :
$95,14 - 4\ln(D^2)$ soit $95,14 - 8\ln(D)$.

2. a. $f'(x) = -\frac{8}{x}$.

b. Si $x \in [0,1 ; 20]$, alors $x > 0$. Donc pour tout $x \in [0,1 ; 20]$, $f'(x) < 0$.

c. f est décroissante sur l'intervalle $[0,1 ; 20]$.

3. $f(3) \approx 86,4$ donc le niveau sonore du bruit est de 86,4 dB. Le risque est faible mais l'ouvrier doit mettre des protections contre le bruit d'après la législation.

4. On résout l'inéquation $f(x) < 90$.

Elle équivaut à :

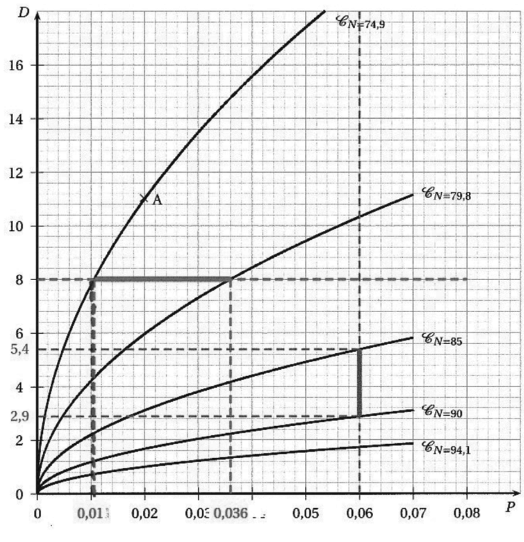
$95,14 - 8\ln(x) < 90 \Leftrightarrow \ln(x) > 0,6425 \Leftrightarrow x > e^{0,6425}$.

$e^{0,6425} \approx 1,90$ donc un ouvrier sort de la zone de risque élevé au-delà de 1,90 m.

Partie C

1. D'après le graphique, pour un bruit de puissance 0,06 W, pour que le niveau sonore soit situé entre 85 et 90 dB, il faut être situé entre 2,9 et 5,4 m de la source (voir segment vertical bleu et les projections sur l'axe des ordonnées).

2. D'après le graphique (voir le segment horizontal rouge et les projections sur l'axe des abscisses), pour une source sonore située à 8 m, il faut une puissance minimale de 0,01 W et une puissance maximale de 0,036 W pour obtenir un niveau sonore situé entre 74,9 dB et 79,8 dB.



103 **1.** Réponse **b**

2. Réponse **b**

3. Réponse **b**

4. Réponse **b**

5. Réponse **d**

104 **Partie A**

a. $f(1) = 1$ et $f'(1) = 0$.

b. $f(2) > 0$ et $f'(2) < 0$.

Partie B

1. $\ln(e) - e + 2 = 3 - e$ donc R appartient bien à la courbe (L).

2. a. $f'(x) = \dfrac{1}{x} - 1 = \dfrac{1-x}{x}$.

b. Sur l'intervalle $[0{,}1 ; 4]$, $x > 0$. De plus, $1 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1$.

On en déduit le tableau de signes de $f'(x)$:

x	$0{,}1$		1		4
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	

c.

x	$0{,}1$		1		4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$1{,}9 + \ln 0{,}1$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$2\ln 2 - 2$

3. On cherche x réel tel que $\ln x - x = 2$, ce qui équivaut à $f(x) = 0$. Il y a deux solutions réelles, $a \approx 0{,}158$ et $c \approx 3{,}146$.
$\ln(c)$ est du même signe que c puisque $c > 1$, alors que $\ln(a)$ est négatif, contrairement à a.
Le nombre x cherché est le nombre a.

105 **1.** $f(300) \approx 45{,}00$ dB à 0,01 près. L'information 1 est correcte.

2. a. $f(x) < 40$ équivaut à :

$100 - 4{,}328\ln(1101x) < 40$

$\Leftrightarrow \ln(1101x) > \dfrac{60}{4{,}328}$

$\Leftrightarrow x > \dfrac{e^{\frac{60}{4{,}328}}}{1101}$.

b. Il faut déterminer les valeurs de x telles que $f(x) < 40$, soit $x > \dfrac{e^{\frac{60}{4{,}328}}}{1101}$. Or $\dfrac{e^{\frac{60}{4{,}328}}}{1101} \approx 953$ à 1 unité près.

Il faut donc vivre à plus de 953 mètres de l'éolienne pour ne pas être exposé à ce risque.

c.

x	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000	1200
$f(x)$	49,8	46,8	45	43,8	42,8	42	41,3	40,8	40,2	39,8	39

d. D'après le tableau de valeurs, il y a bien une baisse de 3 dB à chaque fois que la distance double.

Exemples : pour $x = 100$ et $x = 200$: $f(200) = f(100) - 3$.

De même, pour $x = 500$ et $x = 1000$, $f(1000) = f(500) - 3$.

106 **1.** $r(1) = 7$.

2. a. $r'(x) = 1 + 2 \times \dfrac{1}{x} = \dfrac{x+2}{x}$.

b. Sur [1 ; 5], $x > 0$ et $x + 2 > 0$. Donc $r'(x) > 0$. r est donc croissante sur l'intervalle [1 ; 5].

3. a. On obtient à la calculatrice $\alpha \approx 2{,}318$.

b. On a $r(\alpha) = 10$ et r est croissante sur [1 ; 5]. Pour tout $x \geq \alpha$, on a $r(x) \geq 10$.

Il faut donc vendre au minimum 2318 voitures pour réaliser une recette supérieure à 100 000 euros.

107 **1. a.** $f'(x) = \dfrac{\left(1-\dfrac{1}{x}\right)\times x-(x+2-\ln(x))\times 1}{x^2} = \dfrac{x-1-x-2+\ln(x)}{x^2} = \dfrac{-3+\ln(x)}{x^2}$.

b. $-3+\ln(x) > 0 \Leftrightarrow x > e^3$. $e^3 \in [1 ; 25]$.

c.

x	1		e^3		25
$f'(x)$		–	0	+	
f	3	↘	$\approx 0{,}950$	↗	$\approx 0{,}951$

d. $2{,}31 < \alpha < 2{,}32$.

2. a. La fonction f atteint sa valeur minimale en $x = e^3$. $e^3 \approx 20$. Il faut donc fabriquer environ 2000 pièces pour que le coût soit minimal.

Le coût moyen de fabrication d'une pièce est alors d'environ 0,95 €.

b. $2{,}31 < \alpha < 2{,}32$ où $f(\alpha) = 1{,}5$.

D'après le tableau de variation de f :

Si $1 < x < 2{,}32$, alors $1{,}5 < f(x) < 3$.

Si $x > 2{,}32$, alors $0{,}951 < f(x) < 1{,}5$.

Il faut donc fabriquer au minimum 2 320 pièces pour que le coût moyen de fabrication d'une pièce soit inférieur à 1,50 euro.

Chapitre 10

Composition de fonctions

CAPACITÉS

- Identifier la composée de deux fonctions dans une expression simple.
- Calculer la dérivée des fonctions composées usuelles.
- Calculer des primitives de fonctions de la forme $u'f(u)$ en fonction d'une primitive de f et de la fonction u.

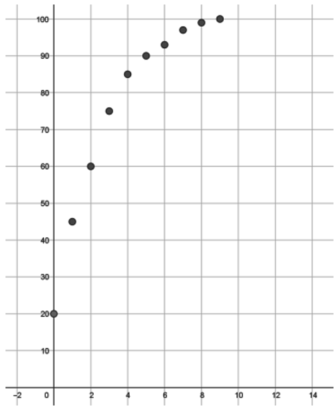
Vérifier les acquis de Première ou du tronc commun

1. c **2.** b **3.** c **4.** a **5.** c **6.** a **7.** c

Activités

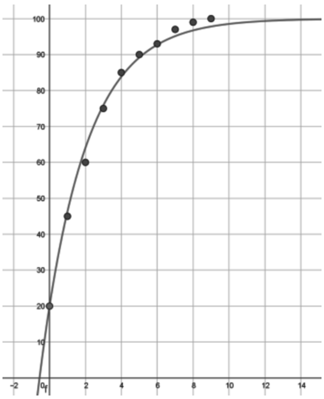
Activité 1 Ça chauffe

1.



2. a. $f'(t) = -80 \times (-0{,}4) \times e^{-0{,}4t} = 32e^{-0{,}4t}$.

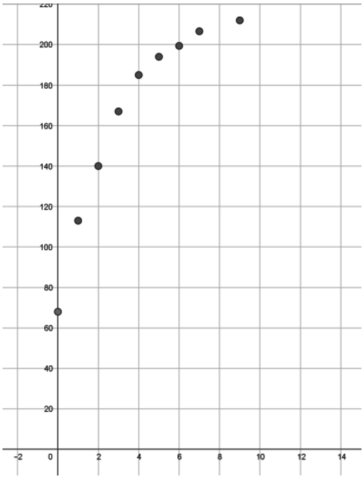
b.



3. a.

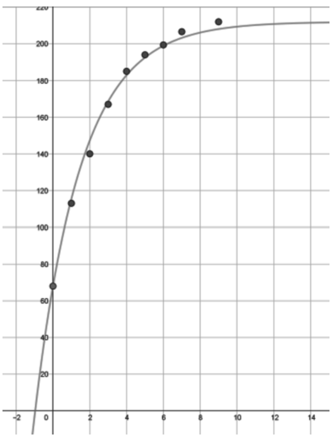
t (min)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
T (°F)	68	113	140	167	185	194	199,4	206,6	210,2	212

b.



c. $g(x)=1{,}8x+32$

d. $h(t)=1{,}8\times f(t)+32=1{,}8\times\left(100-80e^{-0{,}4t}\right)+32=212-144e^{-0{,}4t}$.



Activité 2 Consommation d'essence d'une automobile

1. 100 km est la distance parcourue pour x litres consommés, pour obtenir la distance parcourue avec un litre, il suffit de diviser 100 par x d'où $g(x)=\dfrac{100}{x}$.

1. a.

x	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130
$f(x)$	4,376	4,4	4,496	4,664	4,904	5,216	5,6	6,056	6,584	7,184
$d(x)$	22,85	22,73	22,24	21,44	20,39	19,17	17,86	16,51	15,19	13,92

b. $d(x)=g(f(x))=\dfrac{100}{f(x)}$

Activité 3 Dérivées des fonctions composées

Partie A

1. Posons $u(x)=x^n$ et $v(x)=\dfrac{1}{x}$. Alors $f(x)=v(u(x))$; $u'(x)=nx^{n-1}$ et $v'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$. Donc :

$f'(x)=u'(x)\times v'(u(x))=nx^{n-1}\times\left(-\dfrac{1}{(x^n)^2}\right)=-\dfrac{nx^{n-1}}{x^{2n}}=-\dfrac{n}{x^{n+1}}$.

2. Posons $f(x)=x^n$.

Si $n\geq 0$, alors $f'(x)=nx^{n-1}$.

Si $n<0$, posons $m=-n$; m est un entier positif. $f(x)=x^n=\dfrac{1}{x^{-n}}=\dfrac{1}{x^m}$ donc

$f'(x)=-\dfrac{m}{x^{m+1}}=\dfrac{n}{x^{-n+1}}=nx^{n-1}$.

La formule est donc vraie pour tout entier relatif n.

Partie B

1. $f(x)=v\circ u(x)=v(u(x))=(4x+8)^3$

2. a. $u'(x)=4$; $v'(x)=3x^2$; $v'(u(x))=3(4x+8)^2$.

b. $f'(x)=u'(x)\times v'(u(x))=4\times 3(4x+8)^2=12(4x+8)^2$.

Remarque : $f(x)=(4x+8)^3=(4x+8)\times(4x+8)^2=(4x+8)\times\left(16x^2+64x+64\right)=64x^3+384x^2+768x+512$

Donc $f'(x)=192x^2+768x+768$. Or $12(4x+8)^2=12\left(16x^2+64x+64\right)=192x^2+768x+768$.

On retrouve le même résultat, cependant le résultat initial permet de déterminer immédiatement le signe de $f'(x)$, ce qui n'est pas vrai avec celui obtenu après développement.

3. Posons $f(x)=u^n(x)=(u(x))^n$. $f(x)=v\circ u(x)$ avec $v(x)=x^n$.

$v'(x)=nx^{n-1}$ et $v'(u(x))=n\times(u(x))^{n-1}$. Donc

$f'(x)=u'(x)\times n\times(u(x))^{n-1}=nu'(x)(u(x))^{n-1}$ et $\left(u^n\right)'=nu'u^{n-1}$

Partie C

1. Soient f, g, h, et k les fonctions définies par $f(x)=\cos x$, $g(x)=\sin x$, $h(x)=\mathrm{e}^{u(x)}$ et $k(x)=\ln(u(x))$. On a :

$f(x)=\cos(u(x))=v\circ u(x)$ avec $v(x)=\cos x$;

$g(x)=\sin(u(x))=v\circ u(x)$ avec $v(x)=\sin x$;

$h(x)=e^{u(x)}=v \circ u(x)$ avec $v(x)=e^x$;
$k(x)=\ln(u(x))=v \circ u(x)$ avec $v(x)=\ln x$.

2. $f(x)=\cos(u(x))$; $v'(x)=-\sin x$; donc $f'(x)=-u'(x)\sin(u(x))$.
$g(x)=\sin(u(x))$; $v'(x)=\cos x$; donc $g'(x)=u'(x)\cos(u(x))$.
$h(x)=e^{u(x)}$; $v'(x)=e^x$; donc $h'(x)=u'(x)e^{u(x)}$.
$k(x)=\ln(u(x))$; $v'(x)=\dfrac{1}{x}$ donc $k'(x)=\dfrac{u'(x)}{u(x)}$.

En résumé : $(\cos u)'=-u'\sin u$; $(\sin u)'=u'\cos u$; $\left(e^u\right)'=u'e^u$; $(\ln u)'=\dfrac{u'}{u}$.

3. On pose $u(x)=ax+b$, alors $u'(x)=a$. En appliquant les formules ci-dessus, on obtient :
Si $f(x)=\cos(ax+b)$ alors $f'(x)=-a\sin(ax+b)$.
Si $g(x)=\sin(ax+b)$ alors $g'(x)=a\cos(ax+b)$.
Si $h(x)=e^{ax+b}$ alors $h'(x)=ae^{ax+b}$.
Si $k(x)=\ln(ax+b)$ alors $k'(x)=\dfrac{a}{ax+b}$.

Activité 4 Recherche de primitives

1. a. $g'(x)=aF'(ax+b)=af(ax+b)$ car F est une primitive de f, autrement dit, f est la fonction dérivée de F.

b. $f(ax+b)=\dfrac{1}{a}g'(x)$ donc une primitive de la fonction $x \mapsto f(ax+b)$ est la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{a}g(x)$ soit $x \mapsto \dfrac{1}{a}F(ax+b)$

2. Une primitive de la fonction $x \mapsto u'(x)u^n(x)$ est la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{n+1}u^{n+1}(x)$.
Une primitive de la fonction $x \mapsto \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ est la fonction $x \mapsto \ln(u(x))$.
Une primitive de la fonction $x \mapsto u'(x)\sin(u(x))$ est la fonction $x \mapsto -\cos(u(x))$.
Une primitive de la fonction $x \mapsto u'(x)\cos(u(x))$ est la fonction $x \mapsto \sin(u(x))$.
Une primitive de la fonction $x \mapsto u'(x)e^{u(x)}$ est la fonction $x \mapsto e^{u(x)}$.

Exercices

Pour acquérir les automatismes

2 $f(x)=\sin(2x-\pi)=v \circ u(x)$ avec $u(x)=2x-\pi$ et $v(x)=\sin x$.
$g(x)=(3x+8)^3=v \circ u(x)$ avec $u(x)=3x+8$ et $v(x)=x^3$.

3 $h(x)=e^{x^2-5}=v \circ u(x)$ avec $u(x)=x^2-5$ et $v(x)=e^x$.
$k(x)=(\cos x)^2=v \circ u(x)$ avec $u(x)=\cos x$ et $v(x)=x^2$.

4 **a.**

x	-10	-3	0	$\sqrt{3}$	5	150
$u(x)$	-48	-13	2	$5\sqrt{3}+2$	27	752
$v \circ u(x)$	2304	169	4	$20\sqrt{3}+79$	729	$565\,504$

b.

x	−10	−3	0	$\sqrt{3}$	5	150
$v(x)$	100	9	0	3	25	62 500
$u \circ v(x)$	502	47	2	17	127	112 502

c. On constate pour les valeurs du tableau que $v \circ u(x) \neq u \circ v(x)$. On en conclut : si u et v sont deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$, en général, $v \circ u \neq u \circ v$.

5 **a.**

x	−5	−3	0	10
$u(x)$	−26	−12	9	79
$v \circ u(x)$	−17 576	−1 728	729	493 039

b.

x	−5	−3	0	10
$v(x)$	−125	−27	0	1 000
$u \circ v(x)$	−866	−180	9	7 009

c. On constate pour les valeurs du tableau que $v \circ u(x) \neq u \circ v(x)$. On en conclut : si u et v sont deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$, en général, $v \circ u \neq u \circ v$.

6 **a.** $v \circ u(x) = (5x+2)^2$; $u \circ v(x) = 5x^2 + 2$

b.

x	−10	−3	0	$\sqrt{3}$	5	150
$v \circ u(x)$	2 304	169	4	$20\sqrt{3}+79$	729	565 504
$u \circ v(x)$	502	47	2	17	127	112 502

7 **a.** $v \circ u(x) = (8-x)^3$; $u \circ v(x) = 8 - x^3$

b.

x	−5	−3	0	10
$v \circ u(x)$	2197	1331	512	−8
$u \circ v(x)$	133	35	8	−992

8 $f'(x) = 2 \times 4 \times (4x+5) = 8(4x+5) = 32x + 40$

9 $f'(x) = 4 \times 7 \times (7x-5)^3 = 28(7x-5)^3$

10 $f'(x) = 2\cos x \sin x$

11 $f'(x) = 3 \times e^x \times \left(e^x\right)^2 = 3\left(e^x\right)^3$

12 $f'(x) = 3e^{3x}$

13 $f'(x) = 4e^{4x+8}$

14 $f'(x) = (2x+2)e^{x^2+2x}$

15 $f'(x) = -\sin x \times e^{\cos x}$

16 $f(x) = -2\sin(2x)$

17 $f'(x) = 3\cos(3x)$

18 $f'(x) = 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$

19 $f'(x) = -3\sin\left(3x + \frac{\pi}{3}\right)$

20 $f'(x) = \frac{4}{4x} = \frac{1}{x}$

21 $f'(x) = \frac{2}{2x-4} = \frac{1}{x-2}$

22 $f'(x) = \frac{2x}{x^2-4}$

23 $F(x) = \frac{1}{3}(4x+3)^3$

24 $F(x) = e^{5x-3}$

25 $F(x) = -\cos(2x - \pi)$

26 $F(x) = \sin(4x+1)$

27 $F(x) = \ln(5x+2)$

28 $F(x) = \ln(5-2x)$

29 $F(x) = \ln\left(x^2+1\right)$

Pour commencer

30

$x \overset{u}{\mapsto} 4x \overset{v}{\mapsto} (4x)^2$

Donc $v \text{ o } u(x) = v(u(x)) = (4x)^2 = 16x^2$

31 $f(x) = v \text{ o } u(x)$ avec $u(x) = 3x+8$ et $v(x) = x^3$.

$g(x) = v \text{ o } u(x)$ avec $u(x) = 5x^2 - 2x + 3$ et $v(x) = x^4$.

32 $h(x) = v \text{ o } u(x)$ avec $u(x) = \sin x$ et $v(x) = x^3$.

$k(x) = v \text{ o } u(x)$ avec $u(x) = x^2 + 4$ et $v(x) = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$

33 $f(x) = v \text{ o } u(x)$ avec $u(x) = -x$ et $v(x) = e^x$.

$g(x) = v \text{ o } u(x)$ avec $u(x) = 2x^2 - 5x$ et $v(x) = e^x$.

34 $h(x) = v \circ u(x)$ avec $u(x) = \sin x$ et $v(x) = x^2 + 1$.
$k(x) = v \circ u(x)$ avec $u(x) = \cos x$ et $v(x) = 2x^2 + 3x + 2$

35 **1.** Réponse **b** : $v \circ u(x) = e^{x^2+2}$.
2. Réponse **a** : $g \circ f(x) = (2x+5)^3$.

36 **1. Vrai.**
2. Faux : $g \circ f(x) = e^{x^2} \neq \left(e^x\right)^2$.

37 **a.** $v \circ u\,(x) = 2(2x-5)^2$ donc $v \circ u\,(0) = 50$; $v \circ u\,(5) = 50$ et $v \circ u\,(-2) = 162$.
b. $u \circ v(x) = 2 \times 2x^2 - 5 = 4x^2 - 5$ donc $u \circ v(0) = -5$; $u \circ v(5) = 95$ et $u \circ v(-2) = 11$.
c. On constate que $v \circ u \neq u \circ v$

38

x	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$f(x)$	–3	$-\frac{3\sqrt{3}}{2}$	0	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	3	0
$g \circ f(x)$	$\frac{\pi}{3} - 6$	$\frac{\pi}{3} - 3\sqrt{3}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3} + 3\sqrt{3}$	$\frac{\pi}{3} + 6$	$\frac{\pi}{3}$

x	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$g(x)$	$\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3}$	π	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{3}$
$f \circ g(x)$	$-\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	0	$-\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$

39 **1.** $v \circ u(t) = 2(7t+9)^3$
2. $u \circ v(t) = 14t^3 + 9$

t	0	1	–1	5	10
$v \circ u(t)$	1 458	8 192	16	170 368	986 078
$u \circ v(t)$	9	23	–5	1 759	14 009

40 **1.** $f \circ g(t) = e^{t+5}$
2. $g \circ f(t) = e^t + 5$

t	–5	$\frac{4}{3}$	0	$-\frac{5}{3}$
$f \circ g(t)$	1	$e^{\frac{19}{3}}$	e^5	$e^{\frac{10}{3}}$
$g \circ f(t)$	$e^{-5} + 5$	$e^{\frac{4}{3}} + 5$	6	$e^{-\frac{5}{3}} + 5$

41 **a.** $v \circ u(x)=3(4x-8)^2$ $u \circ v(x)=12x^2-8$

b. $v \circ u(2)=0$ et $u \circ v(2)=40$; $v \circ u(2)\neq u \circ v(2)$ donc $v \circ u\neq u \circ v$.

42 $v \circ u(t)=\dfrac{1}{4t^4}$ et $u \circ v(t)=\dfrac{4}{t^4}$ donc $v \circ u\neq u \circ v$.

43 **a.** $v \circ u(x)=\ln\left((x-2)^2+4\right)=\ln\left(x^2-4x+8\right)$ $u \circ v(x)=\ln\left(x^2+4\right)-2$

b. $v \circ u(2)=2\ln 2$ et $u \circ v(2)=\ln 8-2$; $v \circ u(2)\neq u \circ v(2)$ donc $v \circ u\neq u \circ v$.

44 $u'(x)=2$; $v'(x)=2x$; $v'(u(x))=2(2x+7)$

donc $(v \circ u)'(x)=2\times 2(2x+7)=8x+28$.

45 **a.** $u'(x)=3$; $v'(x)=4x$; $v'(u(x))=4(3x-4)$

donc $(v \circ u)'(x)=3\times 4(3x-4)=36x-48$.

b. $u'(x)=4x-1$; $v'(x)=3x^2$; $v'(u(x))=3\left(2x^2-x\right)^2$

donc $(v \circ u)'(x)=(4x-1)\times 3\left(2x^2-x\right)^2=3(4x-1)\left(2x^2-x\right)^2$.

46 **a.** $u'(x)=3$; $v'(x)=\mathrm{e}^x$; $v'(u(x))=\mathrm{e}^{3x-4}$ donc $(v \circ u)'(x)=3\mathrm{e}^{3x-4}$.

b. $u'(x)=4x-1$; $v'(x)=\mathrm{e}^x$; $v'(u(x))=\mathrm{e}^{2x^2-x}$ donc $(v \circ u)'(x)=(4x-1)\mathrm{e}^{2x^2-x}$.

47 **a.** $v \circ u\,(x)=\sin(2x+\pi)$; $(v \circ u)'\,(x)=2\cos(2x+\pi)$.

b. $v \circ u\,(x)=\cos\left(4x-\dfrac{\pi}{3}\right)$; $(v \circ u)'(x)=-4\sin\left(4x-\dfrac{\pi}{3}\right)$

48 **a.** $v \circ u\,(x)=\sin\left(\mathrm{e}^x\right)$; $(v \circ u)'\,(x)=\mathrm{e}^x\cos\left(\mathrm{e}^x\right)$.

b. $v \circ u\,(x)=\mathrm{e}^{\cos x}$; $(v \circ u)'(x)=-\sin(x)\mathrm{e}^{\cos x}$

49 **1.** Réponse **c.**

2. Réponse **b**

50 **1. Vrai.**

2. Faux car $g'(x)=3\mathrm{e}^{3x}$.

3. Vrai.

51 **a.** $f'(x)=2(6x+5)(3x^2+5x-3)$.

b. $f'(x)=10x(x^2-5)^4$.

c. $f'(x)=2\cos x(2+\sin x)$.

52 **a.** $f'(x)=2(3+\mathrm{e}^x)(3x+\mathrm{e}^x)$. **b.** $f'(x)=3(3x+4)\left(\dfrac{3}{2}x^2+4x-\dfrac{7}{3}\right)^2$.

c. $f'(x)=2(-\sin x+\cos x)(\cos x+\sin x)$.

53 **a.** $f'(x)=-4\mathrm{e}^{4x}$. **b.** $f'(x)=10\mathrm{e}^{5x-3}$. **c.** $f'(x)=-2x\mathrm{e}^{x^2-4}$.

54 **a.** $f'(x)=\sin(x)\mathrm{e}^{1-\cos x}$. **b.** $f'(x)=4\cos(x)\mathrm{e}^{2+2\sin x}$. **c.** $f'(x)=-(\cos x-\sin x)\mathrm{e}^{\sin x+\cos x}$.

55 **a.** $f'(x)=6\sin\left(2x+\dfrac{3\pi}{4}\right)$ **b.** $f'(x)=4x\cos\left(x^2\right)$. **c.** $f'(x)=-6x\sin\left(x^2-1\right)$.

56 **a.** $f'(x) = -\dfrac{4x}{\left(x^2+1\right)^2}$. **b.** $f'(x) = -\dfrac{9}{(x+3)^4}$.

57 **a.** $f'(t) = -\dfrac{12}{(2t-5)^3}$. **b.** $g'(t) = -\dfrac{\cos t}{\sin^2 t}$.

58 **a.** $f'(x) = \dfrac{5\left(x^2-1\right) - 2x(5x-4)}{\left(x^2-1\right)^2} = \dfrac{-5x^2+8x-5}{\left(x^2-1\right)^2}$.

b. $g'(x) = \dfrac{-2\left(x^2+2\right) - 2x(4-2x)}{(x^2+2)^2} = \dfrac{2x^2-8x-4}{(x^2+2)^2}$.

59 **a.** $f'(t) = \dfrac{-\sin t \times \sin t - \cos t \times \cos t}{\sin^2 t} = \dfrac{-\sin^2 t - \cos^2 t}{\sin^2 t} = \dfrac{-1}{\sin^2 t}$.

b. $g'(x) = \dfrac{-\sin t \times \sin t - (1+\cos t) \times \cos t}{\sin^2 t} = \dfrac{-\sin^2 t - \cos t - \cos^2 t}{\sin^2 t} = \dfrac{-1-\cos t}{\sin^2 t}$.

60 **a.** $f'(x) = \dfrac{4}{4x-2} = \dfrac{2}{2x-1}$. **b.** $f'(x) = \dfrac{3}{5+3x}$.

61 **a.** $g'(t) = \dfrac{2t}{t^2+2}$. **b.** $g'(t) = -\dfrac{4t}{1-t^2}$.

62 **a.** $u'(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x}$. **b.** $v'(t) = \dfrac{\cos t}{\sin t}$.

63 **a.** e^u. **b.** $-\cos u$. **c.** $\sin u$. **d.** $\dfrac{1}{2}u^2$. **e.** $\dfrac{1}{5}u^5$. **f.** $\dfrac{1}{n}u^n$.

64 **1.** Réponse **c.**

2. Réponse **b.**

3. Réponse **a.**

65 **1. Faux**, car $F(x) = \dfrac{1}{3}\left(3x^2-4\right)^3$, à une constante près.

2. Faux car $F'(x) = -6xe^{5-3x^2} \neq \left(5-3x^2\right)e^{5-3x^2}$.

66 **a.** $F(x) = \dfrac{1}{3}(5x-1)^3$. **b.** $F(x) = \dfrac{1}{4}\left(x-\dfrac{5}{3}\right)^4$. **c.** $F(x) = \dfrac{1}{2}\left(x^2+4\right)^2$

67 On cherche une primitive de $u'\,u^n$.

a. $F(x) = \dfrac{1}{3}\left(x^2+x+1\right)^3$ **b.** $F(x) = \dfrac{1}{2}(x^3-1)^2$. **c.** $F(x) = \dfrac{1}{3}\left(x^3+3x\right)^3$.

68 **a.** $F(x) = e^{2x+3}$. **b.** $F(x) = e^{x^2+2}$. **c.** $F(x) = e^{x^3+2x}$.

69 **a.** $F(x) = -\cos(3x+2)$. **b.** $F(x) = \sin\left(x^2-1\right)$. **c.** $F(x) = \sin\left(x^2+x+1\right)$.

70 On cherche une primitive de $\dfrac{u'}{u}$.

a. $F(x) = \ln\left(x^2+3\right)$ **b.** $F(x) = \ln(3-4x)$ **c.** $F(x) = \ln\left(x^2+x+1\right)$.

71 **a.** $F(x) = \ln\left(e^x+1\right)$. **b.** $F(t) = \ln(1+\sin t)$. **c.** $F(t) = \dfrac{1}{2}\ln(1+\cos 2t)$.

$\boxed{72}$ **1.** $u'(x)=e^x$; $f(x)=(u(x))^2$ donc $f'(x)=2u'(x)u(x)=2e^x\times e^x=2(e^x)^2$.

2. a. $f(x)=(e^x)^2=e^x\times e^x=e^{2x}$.

b. $f'(x)=2e^{2x}$; or $2(e^x)^2=2e^{2x}$. On retrouve bien le même résultat.

$\boxed{73}$ **1.** Posons $u(x)=x^2+1$, alors $u'(x)=2x$. On a bien $f=u'u^2$.

On en déduit une primitive de f : $F(x)=\frac{1}{3}(x^2+1)^3$.

2. $f(x)=2x(x^4+2x^2+1)=2x^5+4x^3+2x$. Par conséquent un primitive de f est $G(x)=\frac{1}{3}x^6+x^4+x^2$.

3. $F(x)-G(x)=\left[\frac{1}{3}(x^2+1)^3\right]-\left[\frac{1}{3}x^6+x^4+x^2\right]=\left[\frac{1}{3}x^6+x^4+x^2+\frac{1}{3}\right]-\left[\frac{1}{3}x^6+x^4+x^2\right]=\frac{1}{3}$.

F et *G* sont deux primitive de *f*, on constate qu'elles diffèrent d'une constante, en accord avec le cours. On remarque donc que deux méthodes pour trouver une primitive d'une fonction peuvent conduire à des résultats différents.

Pour s'entraîner

$\boxed{74}$ **a.** $f=v\circ u$ avec $u(x)=3x^2-5x+9$ et $v(x)=x^4$.

b. $g=v\circ u$ avec $u(x)=\dfrac{5x^2+3}{x^2+1}$ et $v(x)=x^3$.

$\boxed{75}$ **a.** $h=v\circ u$ avec $u(x)=3+\sin x$ et $v(x)=x^3$.

b. $k=v\circ u$ avec $u(x)=e^{2x}+4$ et $v(x)=x^3$.

$\boxed{76}$ **a.** $f=v\circ u$ avec $u(x)=3x$ et $v(x)=2e^x$.

b. $g=v\circ u$ avec $u(x)=x^2+4x-3$ et $v(x)=4e^x$.

$\boxed{77}$ **a.** $h=v\circ u$ avec $u(t)=\dfrac{\pi}{3}-4t$ et $v(t)=\sin t$.

b. $k=v\circ u$ avec $u(t)=\sin t$ et $v(x)=\dfrac{1+t}{3+t}$.

$\boxed{78}$ **a.** $f=v\circ u$ avec $u(x)=3x^2+8$ et $v(x)=\ln x$.

b. $g=v\circ u$ avec $u(x)=\ln x$ et $v(x)=3x^2+5$.

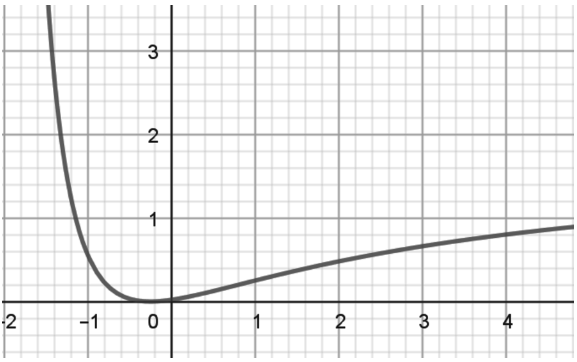
$\boxed{79}$ **1. a.** $u(x)=\dfrac{4x+1}{3x+7}$; $f=u^2$

b. La fonction u est définie et dérivable sur I car la valeur qui annule le dénominateur, $-\dfrac{7}{3}$, n'est pas dans I ; la fonction carré est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc f est dérivable sur I.

$$f'(x)=2u'(x)u(x)=2\times\frac{25}{(3x+7)^2}\times\frac{4x+1}{3x+7}=\frac{50(4x+1)}{(3x+7)^3}$$

2. Sur I, $3x+7$ est strictement positif donc $f'(x)$ est du signe de $4x+1$.

x	$-\frac{7}{3}$		$-\frac{1}{4}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	



80 **1.** $f = v \circ u$ avec $u(x)=\dfrac{1}{x}$ et $v(x)=\sin x$.

2. u est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et v sur $\mathbb{R}$ donc, par composition, f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$.

3. $u'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$, $v'(x)=\cos x$ donc $f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$

81 **a.** Posons $u(x)=\mathrm{e}^x$. $f=u^3$ donc $f'(x)=3u'(x)u^2(x)=3\mathrm{e}^x\left(\mathrm{e}^x\right)^2=3(\mathrm{e}^x)^3$.

b. $f(x)=\left(\mathrm{e}^x\right)^3=\mathrm{e}^{3x}$ donc $f'(x)=3\mathrm{e}^{3x}$

c. On a bien $3\left(\mathrm{e}^x\right)^3=3\mathrm{e}^{3x}$ donc les deux écritures correspondent à la même fonction.

82 **1.** $f(x)=\ln(\sin x)$ est définie et dérivable dès que $\sin x$ est strictement positif, ce qui est vrai sur l'intervalle $]0\,;\pi[$.

2. $f'(x)=\dfrac{\cos x}{\sin x}$.

3. $\cos x$ est positif sur $\left]0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$ et négatif sur $\left]\dfrac{\pi}{2}\,;\pi\right[$. Puisque $\sin x$ est strictement positif sur l'intervalle $]0\,;\pi[$, $f'(x)$ est du signe de $\cos x$. Par conséquent $f'(x)$ est positif sur $\left]0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$ et négatif sur $\left]\dfrac{\pi}{2}\,;\pi\right[$.

4.

x	0		$\dfrac{\pi}{2}$		π
$f'(x)$	||	$+$	0	$-$	||
$f(x)$	||	$\nearrow$	0	$\searrow$	||

83 **1.** $f'(x)=\dfrac{2x-2}{x^2-2x+2}$

2. b.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

84 **a.** $F(x)=\frac{1}{3}(3x+1)^3+4x$. **b.** $F(x)=\frac{1}{8}\left(2x-\frac{1}{4}\right)^4$. **c.** $F(x)=\frac{1}{12}\left(3x^2-5\right)^2$.

85 On cherche une primitive de $u'\,u^n$.

a. $F(x)=\frac{1}{4}(x^2+2x+1)^4$. **b.** $F(x)=\frac{1}{2}\left(x^3+3\right)^2$. **c.** $F(x)=\frac{1}{3}\left(x^3+x+2\right)^3$.

86 **a.** $F(x)=\frac{2}{5}\mathrm{e}^{5x-5}$. **b.** $F(x)=\mathrm{e}^{x^2+2x+1}$. **c.** $F(x)=\mathrm{e}^{\sin x}$.

87 **a.** $F(x)=\frac{1}{4}\cos(4x+\pi)$. **b.** $F(x)=2\sin\left(x^2+\frac{\pi}{3}\right)$. **c.** $F(x)=\frac{1}{2}\sin\left(x^2+2x+1\right)$.

88 **a.** $F(x)=\frac{5}{2}\ln\left(x^2+7\right)$. **b.** $F(x)=\frac{3}{2}x^2+\ln\left(x^2+2x-3\right)$. **c.** $F(x)=\ln(\sin x)$.

89 On cherche une primitive de $\frac{u'}{u}$.

a. $F(x)=\ln\left(\mathrm{e}^x+3\right)$. **b.** $F(x)=\frac{1}{2}\ln\left(\mathrm{e}^{2x}+3\right)$. **c.** $F(x)=-\ln(\cos x)$.

90 **1.** **a.** $g'(x)=4x+1$. Si $x<-\frac{1}{4}$ alors $g'(x)<0$ et si $x>-\frac{1}{4}$ alors $g'(x)>0$; $g\left(-\frac{1}{4}\right)=0$.

b. $g(-1)=0$ et $g\left(\frac{1}{2}\right)=0$.

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{4}$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$			$-$		0		$+$		
$g(x)$		↘	0	↘	$-\frac{9}{8}$	↗	0	↗	

2. a. D'après le tableau de variation de la fonction g, $2x^2+x-1$ est strictement positif, donc non nul sur l'intervalle I. On en déduit que f est définie sur I.

b. $\frac{3}{x+1}+\frac{2}{2x-1}=\frac{3(2x-1)+2(x+1)}{(x+1)(2x-1)}=\frac{6x-3+2x+2}{2x^2-x+2x-1}=\frac{8x-1}{2x^2+x-1}=f(x)$.

c. Soit F une primitive de f, $F(x)=3\ln(x+1)+\ln(2x-1)$.

91 **a.** Pour tout x réel, $x^2\geq 0$ et $x^4\geq 0$ $\left(x^4=\left(x^2\right)^2\right)$, donc $x^4+3x^2+2\geq 2$.

Le dénominateur de $f(x)$ n'est jamais nul donc f est définie sur $\mathbb{R}$.

b. $\frac{2x}{x^2+1}+\frac{x}{x^2+2}=\frac{2x\left(x^2+2\right)+x(x^2+1)}{(x^2+1)(x^2+2)}=\frac{3x^3+5x}{x^4+3x^2+2}=f(x)$.

$F(x)=\ln\left(x^2+1\right)+\frac{1}{2}\ln\left(x^2+2\right)$.

c. $f(x)=x\left[\frac{2}{x^2+1}+\frac{1}{x^2+2}\right]$. Or $\frac{2}{x^2+1}+\frac{1}{x^2+2}>0$ donc f est du signe de x.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$F'(x)=f(x)$		$-$	0	$+$	
$F(x)$		↘	$\frac{1}{2}\ln 2$	↗	

92 **1.** $2+\dfrac{1}{x+2}=\dfrac{2(x+2)+1}{x+2}=\dfrac{2x+5}{x+2}=f(x)$.

2. $F(x)=2x+\ln(x+2)+C$ où C est une constante.

$F(2)=4 \Leftrightarrow 4+\ln 4+C=4 \Leftrightarrow C=-\ln 4$ et $F(x)=2x+\ln(x+2)-\ln 4$.

93 **a.** $u(x)=\ln x$ donc $u'(x)=\dfrac{1}{x}$.

b. $f(x)=u'(x)\times u(x)$ donc $F(x)=\dfrac{1}{2}(u(x))^2=\dfrac{1}{2}(\ln x)^2$

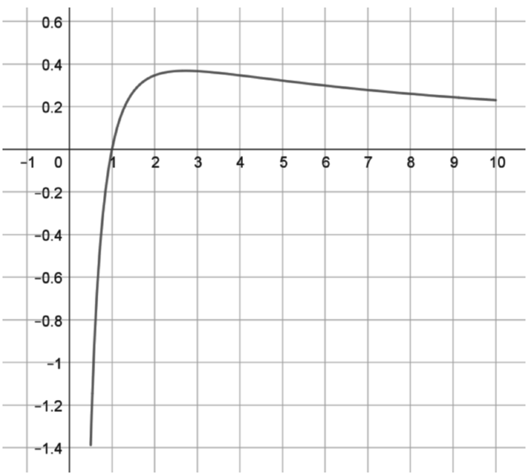
94 **1.** **a.** $f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}\times\ln x+\dfrac{1}{x}\times\dfrac{1}{x}=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$.

$f'(x)$ est du signe de $1-\ln x$ donc $f'(x)>0$ si $x<e$ et $f'(x)<0$ si $x>e$.

x	$\frac{1}{2}$		e		10
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$2\ln\frac{1}{2}$	↗	$\frac{1}{e}$	↘	$\frac{\ln 10}{10}$

b.

x	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4	6	10
$f(x)$	$-1,37$	0	0,35	0,37	0,35	0,30	0,23



2. a. $g'(x)=\frac{1}{2}\times 2\times\frac{1}{x}\times\ln x=\frac{1}{x}\ln x$.

b. $F(x)=\frac{1}{2}(\ln x)^2+C$. Or $F(1)=0$ donc $C=0$ et $F(x)=\frac{1}{2}(\ln x)^2$.

95 Partie A

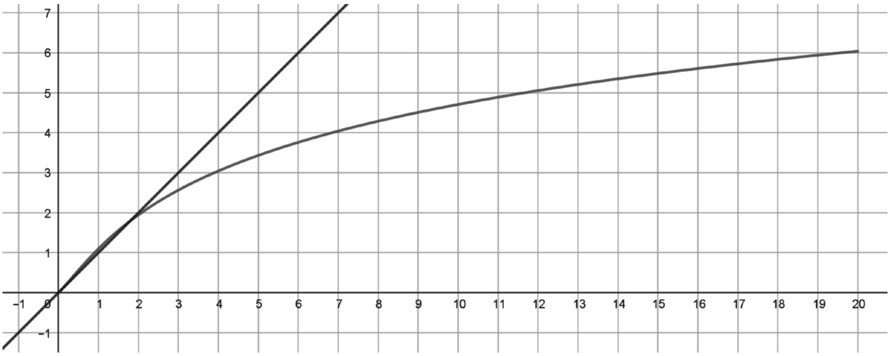
1. Pour $x>0$, $x^2+x+1\geq 1$ donc f est bien définie sur l'intervalle I.

2. $f'(x)=\frac{2x+1}{x^2+x+1}$. $f'(x)$ est du signe de $2x+1$ donc positif pour x positif.

x	0 20
$f'(x)$	+
$f(x)$	0 ↗ ln421

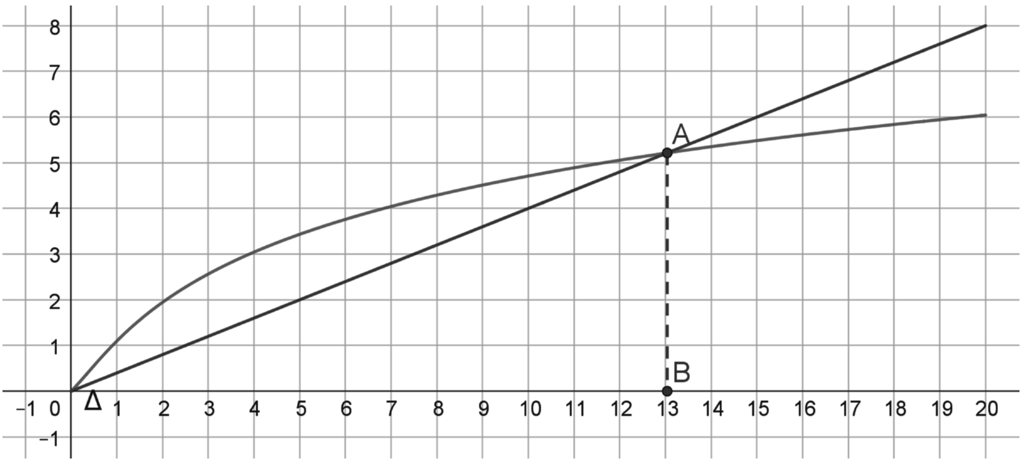
3. $f(0)=0$ et $f'(0)=1$ donc l'équation de la droite d est $y=x$.

4.



Partie B

1.



2. Si $x=4$, $b(4)=g(4)-f(4)=0{,}4\times 4-\ln 21\approx -1{,}44$; l'entreprise n'est pas bénéficiaire car $b(x)<0$

Si $x=15$, $b(15)=g(15)-f(15)=0{,}4\times 15-\ln 241\approx 0{,}51$; l'entreprise est bénéficiaire car $b(x)>0$.

Le point A a pour abscisse 13,04 au centième près ; pour être bénéficiaire, l'entreprise doit vendre au moins 14 appartements.

96 **1. a.**

t	0	1	5	10	15	20
$f(t)$	21	36,4	124,9	125,0	125	125

b. $f'(t)=-104\times\left((-0{,}16\times 2t)e^{-0{,}16t^2}\right)=33{,}28te^{-0{,}16t^2}$. $f'(t)$ est strictement positif sur l'intervalle $[0\,;60]$.

c.

x	0		60
$f'(x)$		+	
$f(x)$	21	$\nearrow$	125

2. a. Au bout de 9 min, la température est $f(9)\approx 125°$.

b. Le point d'intersection entre la courbe C_f et la droite d'équation $y=120$ a pour abscisse 4,36 (à 10^{-2} près). La température de l'étuve dépasse 120° au bout de 4,36 min, soit 4 min 22 s. La stérilisation sera efficace au bout de 7 min 22 s.

97 **1. a.** $f'(t)=39\times(-0{,}04)e^{-0{,}04t}=-1{,}56e^{-0{,}04t}$

b.

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		+	
$f(x)$	90	$\searrow$	

2. La température de l'eau va décroître dans le moteur.

3. Le ventilateur s'arrêtera si la température de l'eau redevient inférieure à 50°C.

$f(x)=50 \Leftrightarrow 39e^{-0{,}04t}+51=50 \Leftrightarrow 39e^{-0{,}04t}=-1$. Cette équation n'a pas de solution donc le ventilateur ne s'arrêtera pas.

98 **1.** 1 kg = 1 000 000 mg.

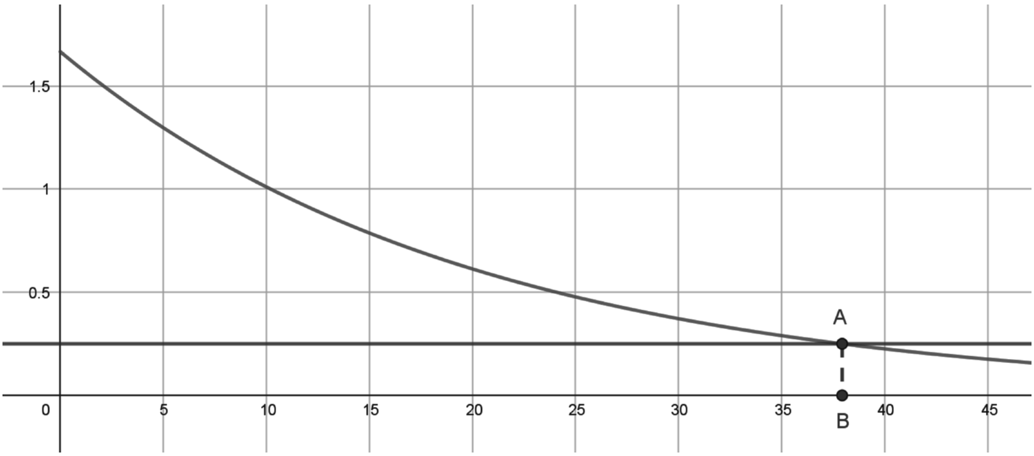
$\dfrac{1\,000\,000}{600\,000}=\dfrac{5}{3}\approx 1{,}66$. La concentration de chlore est de 1,66 milligramme par litre.

2. a. $f'(t)=\dfrac{5}{3}\times(-0{,}05)\times e^{-0{,}05t}=-\dfrac{1}{12}e^{-0{,}05t}$.

$f'(t)$ est strictement négatif donc la fonction f est décroissante.

t	0 $\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad$ $+\infty$
$f'(t)$	$-$
$f(t)$	$\frac{5}{3}$ $\searrow$

b. & c.



d. *Graphiquement* : le point A a pour abscisse environ 38, la piscine pourra rouvrir au bout de 38 heures.

Algébriquement : $f(t)=0{,}25 \Leftrightarrow \frac{5}{3}\mathrm{e}^{-0{,}05t}=0{,}25 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-0{,}05t}=0{,}15 \Leftrightarrow t=\frac{\ln(0{,}15)}{-0{,}05}$.

Donc $t \approx 38$.

Pour faire le point

99 **Vrai**

100 **Vrai** car $g(x)=2\ln\left(x^2-4\right)=\ln\left[\left(x^2-4\right)^2\right]$

101 **Vrai**

102 **Vrai**

103 **Faux**

104 **Vrai**

105 **Vrai** car $f(x)$ est du signe de x.

106 Réponse **c**

107 Réponse **b**

108 Réponse **c**

109 Réponse **c**

110 Réponse **b**

111 Réponse **b**

Pour approfondir

112 **1.**

$$\begin{cases} f(0)=-1 \\ f(1)=\dfrac{5}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b-1=-1 \\ a+b-\dfrac{1}{3}=\dfrac{5}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=0 \\ a+0-\dfrac{1}{3}=\dfrac{5}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=0 \end{cases}$$

Then $f(x)=2x-\dfrac{1}{2x+1}$

2. $F(x)=x^2-\dfrac{1}{2}\ln(2x+1)$

113 Voir fichier

114 **1. a.** $(x+1)^2=x^2+2x+1$ donc $(x+1)^4=\left[(x+1)^2\right]^2=\left(x^2+2x+1\right)^2$

b. $f(x)=x^4+4x^3+6x^2+4x+1$.

2. a. $f'(x)=4(x+1)^3$.

b. $f'(x)=4x^3+12x^2+12x+4$

c. $4(x+1)^3=4(x+1)\left(x^2+2x+1\right)=4\left(x^3+3x^2+3x+1\right)=4x^3+12x^2+12x+4$

Les deux expressions sont égales.

3. a. La forme factorisée permet de connaître le signe de $f'(x)$. $f'(x)$ est du signe de $x+1$.

b.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

115 **1.** $(x+1)\left(x^2-x+1\right)=x^3-x^2+x+x^2-x+1=x^3+1$. L'égalité est vérifiée.

2. a. Avec $x=0$, on obtient : $-3=b-2$ donc $b=-1$

b. Avec $x=1$, on obtient : $0=a-1-1$ donc $a=2$.

c. $\dfrac{2x-1}{x^2-x+1}-\dfrac{2}{x+1}=\dfrac{(2x-1)(x+1)-2\left(x^2-x+1\right)}{\left(x^2-x+1\right)(x+1)}=\dfrac{2x^2+2x-x-1-2x^2+2x-2}{x^3+1}=\dfrac{3x-3}{x^3+1}=f(x)$.

3. a. Une primitive de f est la fonction $x\mapsto \ln\left(x^2-x+1\right)-2\ln(x+1)$.

b. $F(x)=\ln\left(x^2-x+1\right)-2\ln(x+1)+C$.

F s'annule pour $x=1$ donc $F(1)=-2\ln 2+C$. $C=2\ln 2$ et
$F(x)=\ln\left(x^2-x+1\right)-2\ln(x+1)+2\ln 2$.

116 **1.** Graphiquement $f(0)=4$.

$f(0)=4 \Leftrightarrow 4=a-\dfrac{1+1}{2} \Leftrightarrow a=5$.

2. $f(-x)=5-\dfrac{e^{0,2\times(-x)}+e^{-0,2\times(-x)}}{2}=5-\dfrac{e^{-0,2x}+e^{0,2x}}{2}=f(x)$.

Les points M et M′ d'abscisses respectives x et $-x$ ont la même ordonnée, ils sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées, par conséquent l'axe des ordonnées est axe de symétrie de la courbe.

3. $f'(x) = -\dfrac{0{,}2e^{0{,}2x} - 0{,}2e^{-0{,}2x}}{2} = \dfrac{0{,}2e^{-0{,}2x} - 0{,}2e^{0{,}2x}}{2} = 0{,}2\dfrac{e^{-0{,}2x}\left(1 - e^{0{,}4x}\right)}{2} = 0{,}1\left(e^{-0{,}2x}\left(1 - e^{0{,}4x}\right)\right)$

Donc $f'(x) = \dfrac{1}{10}e^{-0{,}2x}\left(1 - e^{0{,}4x}\right)$

4. $f'(0) = 0$. Puisque $f(0) = 4$, l'équation de la tangente à $\mathscr{C}$ en son point d'abscisse 0 est $y = 4$.

5. $f'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - e^{0{,}4x} > 0 \Leftrightarrow e^{0{,}4x} < 1 \Leftrightarrow 0{,}4x < \ln 1 \Leftrightarrow x < 0$.

6.

x	-8		0		8
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	α	$\nearrow$	4	$\searrow$	α

Avec $\alpha \approx 2{,}42$

7.

x	4	5,5	8
$f(x)$	3,66	3,33	2,42

La hauteur maximale d'un véhicule motorise est $f(4) - 0{,}5 \approx 3{,}16$ (mètres)

8. $F(x) = 5x - \dfrac{\dfrac{e^{0{,}2x}}{0{,}2} + \dfrac{e^{-0{,}2x}}{-0{,}2}}{2} + C = 5x - \dfrac{e^{0{,}2x} - e^{-0{,}2x}}{0{,}4} + C$. Or $F(0) = 0$ donc $C = 0$ et

$F(x) = 5x - \dfrac{e^{0{,}2x} - e^{-0{,}2x}}{0{,}4}$.

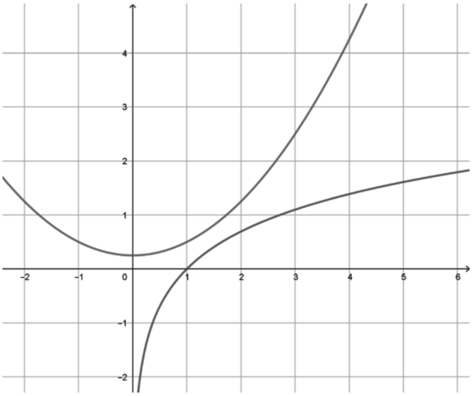
TP Une courbe bien composée !

1. $u'(x) = 0{,}5x$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$u'(x)$		$-$	0	$+$	
$u(x)$		$\searrow$	$0{,}25$	$\nearrow$	

2. $v'(x) = \dfrac{1}{x}$

x	0		$+\infty$
$v'(x)$	$\|\|$	$+$	
$v(x)$	$\|\|$	$\nearrow$	

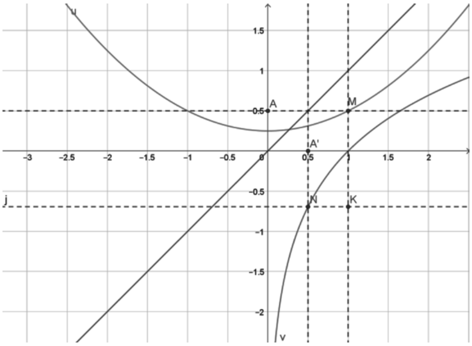


3. b. $M(1\,;0{,}5)$ donc $A(0\,;0{,}5)$.

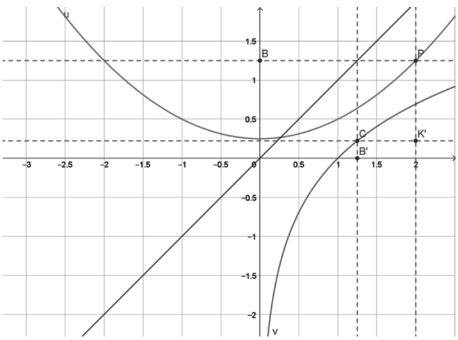
c. $A'(0{,}5\,;0)$.

d. $N(0{,}5\,;\ln 0{,}5)$

e. $f(1)=v(u(1))=v(0{,}5)=v(y_M)=v(y_A)=v(x_{A'})=v(x_N)=y_N$.



4.



Pour l'épreuve du Bac

119 Partie A

1. a. $f'(t)=-0{,}008\times 10\mathrm{e}^{-0{,}008t}=-0{,}08\mathrm{e}^{-0{,}008t}$.

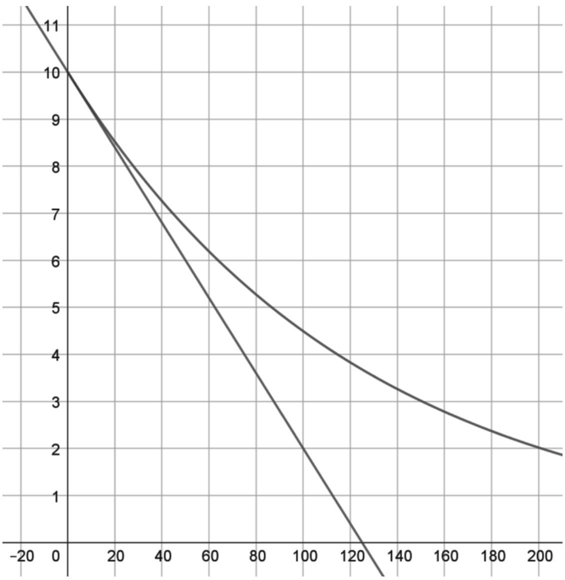
Pour tout t de $\mathbb{R}^+$, $f'(t)<0$.

b.

t	0 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(t)$	$-$
$f(t)$	10 ↘

2. $f(0)=10$ et $f'(0)=-0{,}08$. L'équation de la tangente est $y=-0{,}08t+10$.

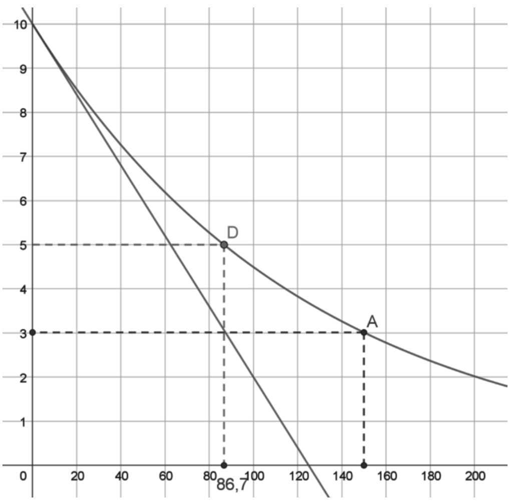
3.



Partie B

1. À l'instant $t=0$, la concentration est égale à $f(0)$ soir 10 mol.L^{-1}.

2. 2 heures et demie correspondent à 150 min.



Graphiquement, la concentration au bout de 2 heures et demie est de 3 mol.L^{-1}.

3. La concentration atteint la moitié de sa valeur initiale au bout de 86,7 min, soit 1 h 26 min 42 s.

4. $f(t)=\dfrac{10}{100} \Leftrightarrow 10\mathrm{e}^{-0{,}008t}=0{,}1 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-0{,}008t}=0{,}01 \Leftrightarrow t=-\dfrac{\ln 0{,}01}{0{,}008}$.

Donc $t\approx 576$. La réaction est terminée au bout de 576 min soit 9 h 35 min.

Partie C

$F(t)=\dfrac{10}{-0{,}008}\mathrm{e}^{-0{,}008t}+C=-1250\mathrm{e}^{-0{,}008t}$.

$F(0) = -1250 + C = 0$ donc $F(t) = -1250\mathrm{e}^{-0{,}008t}+1250$

$\boxed{120}$ **1. a.** $f'(x)=\mathrm{e}^{1-\frac{x^2}{2}}+x\times(-x)\mathrm{e}^{1-\frac{x^2}{2}}=\left(1-x^2\right)\mathrm{e}^{1-\frac{x^2}{2}}$.

b. En factorisant $1-x^2$, on obtient $f'(x)=(1-x)(1+x)\mathrm{e}^{1-\frac{x^2}{2}}$.

c. Sur $[0\,;+\infty[$, $1 + x$ est strictement positif donc $f'(x)$ est du signe de $1 - x$.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\sqrt{e}$	$\searrow$	0

2. a. $u'(x)=-x$

b. Remarquons que $f(x)=-u'(x)\mathrm{e}^{u(x)}$ donc une primitive F de f est :

$F(x)=-\mathrm{e}^{u(x)}+C=-\mathrm{e}^{1-\frac{x^2}{2}}+C$.

$F(0) = 0 = -\mathrm{e} + C$ donc $C = 1$

3. a. $g'(x)=\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\dfrac{(1-x)(1+x)\mathrm{e}^{1-\frac{x^2}{2}}}{x\mathrm{e}^{1-\frac{x^2}{2}}}=\dfrac{1-x^2}{x}$.

b. $g(x)=\ln\left(x\mathrm{e}^{1-\frac{x^2}{2}}\right)=\ln x+\ln\mathrm{e}^{1-\frac{x^2}{2}}=\ln x+1-\dfrac{x^2}{2}$.

c. D'où $g'(x)=\dfrac{1}{x}-x=\dfrac{1-x^2}{x}$. On retrouve le même résultat qu'à la question **3.a.**

$\boxed{121}$ **1.** $\mathrm{e}^{-2x}=\dfrac{1}{\mathrm{e}^{2x}}=\dfrac{1}{\left(\mathrm{e}^{x}\right)^2}$ donc $f(x)=2-10x\mathrm{e}^{-2x}=2-\dfrac{10x}{\left(\mathrm{e}^{x}\right)^2}=2-\dfrac{10}{\mathrm{e}^{x}}\times\dfrac{x}{\mathrm{e}^{x}}$.

2. a. $f'(x)=-10\mathrm{e}^{-2x}-10x\times(-2)\times\mathrm{e}^{-2x}=(-10+20x)\mathrm{e}^{-2x}=(20x-10)\mathrm{e}^{-2x}$.

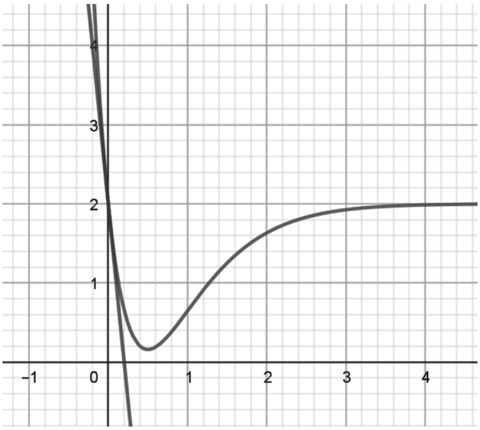
b. $f'(x)$ est du signe de $20x-10$ d'où :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$2-5\mathrm{e}^{-1}$	$\searrow$	0

c. La courbe $\mathscr{C}$ admet une tangente horizontale au point $\mathrm{B}\left(\frac{1}{2}\,;\,2-5\mathrm{e}^{-1}\right)$.

3. et 4. $f(0)=2$ et $f'(0)=-10$ donc l'équation de la tangente est $y=-10x+2$.

5.



6. a. $g'(x)=-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}+\left(-\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\right)\times(-2)\times\mathrm{e}^{-2x}=x\mathrm{e}^{-2x}$.

b. $F(x)=2x-10g(x)=2x-10\left(-\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\right)\mathrm{e}^{-2x}=2x+\left(5x+\frac{5}{2}\right)\mathrm{e}^{-2x}$.

c. Soit G la primitive de f qui s'annule pour $x=0$, $G(x)=F(x)+C$.

$G(0)=F(0)+C \Leftrightarrow 0=\frac{5}{2}+C$. Donc $C=-\frac{5}{2}$ et $G(x)=2x+\left(5x+\frac{5}{2}\right)\mathrm{e}^{-2x}-\frac{5}{2}$.

122 Partie A

1. a. $f'(t)=0{,}12\times3{,}5\mathrm{e}^{0{,}12t}=0{,}42\mathrm{e}^{0{,}12t}$.

b. L'exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$ donc f' est strictement positive sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

c.

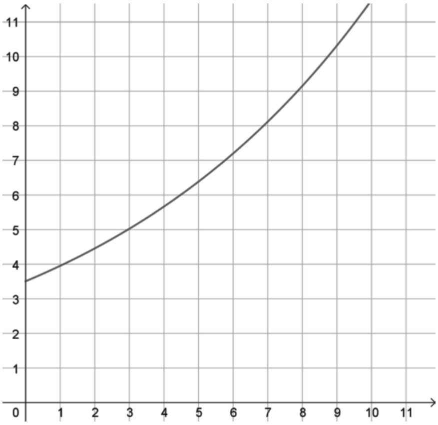
t	0		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	
$f(t)$	$3{,}5$	$\nearrow$	

2. $f(0)=3{,}5$ et $f'(0)=0{,}42$ donc l'équation de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 est $y=0{,}42t+3{,}5$.

3.

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f(t)$	3,5	3,95	4,45	5,02	5,66	6,38	7,19	8,11	9,14	10,31	11,62

4.

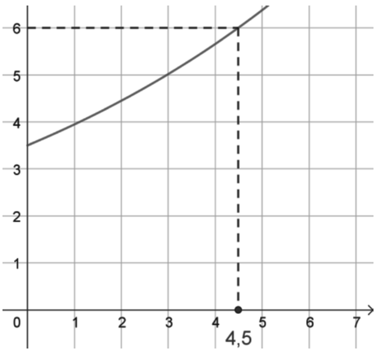


Partie B

1. $f(t)=6 \Leftrightarrow 3{,}5\mathrm{e}^{0{,}12t}=6 \Leftrightarrow t=\dfrac{\ln\left(\dfrac{6}{3{,}5}\right)}{0{,}12}$. On en déduit $t\approx 4{,}49$.

Le milieu contiendra 6 millions de cellules à l'instant 4 h 30 min.

2.



123 Partie A

1. Appliquons la formule $(\ln u)'=\dfrac{u'}{u}$ avec $u(x)=ax^2+bx$.

$u'(x)=2ax+b$ donc $f'(x)=\dfrac{2ax+b}{ax^2+bx}$.

$$\begin{cases} f(1)=0 \\ f'(1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln(a+b)=0 \\ \dfrac{2a+b}{a+b}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=1 \\ \dfrac{a+1}{1}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=2 \end{cases} \text{ donc } f(x)=\ln\left(-x^2+2x\right).$$

Partie B

1. Sur l'intervalle $]0\,;2[$, x et $2 - x$ sont strictement positifs donc $g(x)>0$.

2. $g'(x)=-2x+2$.

$f(x)=\ln(g(x))$ donc $f'(x)=\dfrac{g'(x)}{g(x)}=\dfrac{-2x+2}{g(x)}$.

3. $f'(x)$ est du signe de $-2x + 2$ car $g(x) > 0$. Donc

x	0		1		2
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$		$\nearrow$	0	$\searrow$	

Partie C

1. $F'(x)=\ln x+x\times\dfrac{1}{x}+\ln(2-x)+(x-2)\times\dfrac{-1}{2-x}-2$

$\ln x+1+\ln(2-x)+1-2=\ln x+\ln(2-x)=\ln[x(2-x)]=\ln\left(2x-x^2\right)=f(x)$.

Pour tout x de l'intervalle $]0\,;2[$ $F'(x)=f(x)$, alors F est une primitive de f.

2. Soit G la primitive de f qui s'annule pour $x = 1$.

$G(x)=F(x)+C$; on a alors :

$G(1)=F(1)+C \Leftrightarrow 0=1\times 0+(-1)\times\ln 1-2+C \Leftrightarrow C=2$.

$G(x)=x\ln x+(x-2)\ln(2-x)-2x+2$.

Chapitre 11

Intégration

CAPACITÉS
- Calculer l'intégrale d'une fonction sur un intervalle $[a\,;b]$.
- Calculer la valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle $[a\,;b]$.
- Calculer une aire sous une courbe ou entre deux courbes.

Vérifier les acquis de Première et des chapitres précédents

1. c **2.** c **3.** b **4.** b **5.** a **6.** b **7.** c

Activités

Activité 1 Aire sous une voûte avec GeoGebra

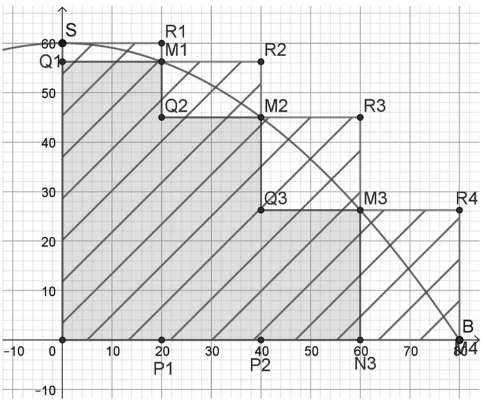
1. $\mathscr{C}$ Passe par B(80 ; 0) donc $f(80)=0$.

$\mathscr{C}$ a pour sommet S(0 ; 60) donc $f(0)=60$ et $f'(0)=0$.

Or $f'(x)=2ax+b$ On en déduit :

$$\begin{cases} f(0)=60 \\ f(80)=0 \\ f'(0)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=60 \\ 6400a+80b+c=0 \\ b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6400a+60=0 \\ b=0 \\ c=60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\dfrac{3}{320} \\ b=0 \\ c=60 \end{cases}$$

2. a.



b. Aires des polygones : $\mathscr{A}_1=2550$. et $\mathscr{A}_2=3750$.

$\mathcal{A}$, l'aire sous la voute, vérifie $2\mathcal{A}_1 < \mathcal{A} < 2\mathcal{A}_2$ donc $5100 < \mathcal{A} < 7500$.

Activité 2 Aire avec des trapèzes

3. On partage le segment OB en K segments de même longueur.
La longueur a de chacun est $a = \dfrac{\mathrm{OB}}{K} = \dfrac{80}{K}$.

4. a. $K = 4$ donc $a = \dfrac{80}{4} = 20$.

c. $\mathcal{A} = 1162{,}5 + 1012{,}5 + 712{,}5 + 262{,}5 = 3150$.

5. a. Quand on fait varier n de 1 à 20, la surface sous la courbe est presque partout coloriée.

b. $\mathcal{A}' = 3198$.

6. Lorsque K augmente, la somme augmente et semble se stabiliser vers environ 3200.
L'aire sous la voute vaut environ $2 \times 3200 = 6400$.

Activité 3 Aire sous la courbe d'une fonction positive

1. e. $F(x) = \dfrac{\mathrm{AB} + \mathrm{MN}}{2} \times \mathrm{AM} = \dfrac{3 + 0{,}5x + 3}{2} \times x = 0{,}25x^2 + 3x$.

f est la fonction dérivée de F ; F est une primitive de f.

2. c. G semble être la fonction logarithme népérien.
g est la fonction dérivée de G ; G est une primitive de g.

Activité 4 Valeur moyenne d'une fonction

1. a. L'intégrale est égale à l'aire d'un triangle rectangle ; la distance parcourue est : $\dfrac{5 \times 5}{2} = 12{,}5$ m.

b. $v_{moy} = \dfrac{12{,}5}{5} = 2{,}5$ m.s^{-1}.

c. $\dfrac{1}{5}\displaystyle\int_0^5 v(t)dt = \dfrac{1}{5} \times 12{,}5 = 2{,}5 = v_{moy}$.

2. Entre les instants $t_2 = 5$ et $t_3 = 18$, la distance parcourue est égale à : $5 \times (18 - 5) = 65$ m.

Entre les instants $t_1 = 0$ et $t_3 = 18$, la distance parcourue est égale à : $12{,}5 + 65 = 77{,}5$ m.

La vitesse moyenne entre les instants $t_1 = 0$ et $t_3 = 18$ est : $v_{moy} = \dfrac{77{,}5}{18} \approx 4{,}3$ m.s^{-1}.

Entre les instants $t_3 = 18$ et $t_4 = 20$, la distance parcourue est égale à : $\dfrac{5 \times 2}{2} = 5$ m.

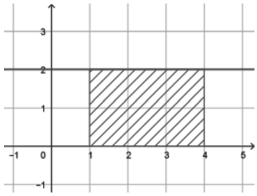
Entre les instants $t_1 = 0$ et $t_4 = 20$, la distance parcourue est égale à : $12{,}5 + 65 + 5 = 82{,}5$ m.

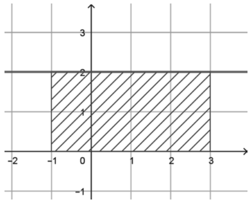
La vitesse moyenne entre les instants $t_1 = 0$ et $t_4 = 20$ est $v_{moy} = \dfrac{82{,}5}{20} \approx 4{,}125$ m.s^{-1}.

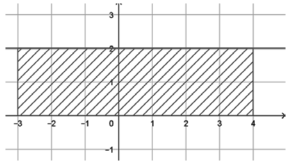
Exercices

Pour acquérir les automatismes

2 **a.** $\displaystyle\int_1^4 f(x)\mathrm{d}x = 2\times 3 = 6$. **b.** $\displaystyle\int_{-1}^3 f(x)\mathrm{d}x = 2\times 4 = 8$. **c.** $\displaystyle\int_{-3}^4 f(x)\mathrm{d}x = 2\times 7 = 14$.







3 **a.** $\displaystyle\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x = 3\times 2 = 6$. **b.** $\displaystyle\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x = 3\times 3 = 9$. **c.** $\displaystyle\int_3^6 f(x)\mathrm{d}x = \frac{3\times 3}{2} = \frac{9}{2} = 4{,}5$.

4 **a.** $\displaystyle\int_1^3 (2x)\mathrm{d}x = \left[x^2\right]_1^3 = 9-1 = 8$.

b. $\displaystyle\int_1^3 (4x+1)\mathrm{d}x = \left[2x^2+x\right]_1^3 = 21-3 = 18$.

c. $\displaystyle\int_0^2 x^2\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{8}{3}$.

d. $\displaystyle\int_1^3 \left(3x^2+1\right)\mathrm{d}x = \left[x^3+x\right]_1^3 = 30-2 = 28$

5 **a.** $\displaystyle\int_1^2 (3x)\mathrm{d}x = \left[\frac{3}{2}x^2\right]_1^2 = 6-\frac{3}{2} = \frac{9}{2} = 4{,}5$.

b. $\displaystyle\int_1^3 (x-1)\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2}-x\right]_1^3 = \frac{3}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right) = 2$.

c. $\displaystyle\int_0^2 \mathrm{e}^x\mathrm{d}x = \left[\mathrm{e}^x\right]_0^2 = \mathrm{e}^2-1$.

d. $\displaystyle\int_1^3 \frac{1}{x}\mathrm{d}x = [\ln x]_1^3 = \ln 3$

6 **a.** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,\mathrm{d}x = [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1-0 = 1$.

b. $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin x\,\mathrm{d}x = [-\cos x]_0^{\pi} = 1-(-1) = 2$.

c. $\displaystyle\int_0^2 \mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x = \left[\frac{\mathrm{e}^{2x}}{2}\right]_0^2 = \frac{\mathrm{e}^4}{2}-\frac{1}{2} = \frac{\mathrm{e}^4-1}{2}$.

d. $\displaystyle\int_1^3 \frac{2}{x}\mathrm{d}x = [2\ln x]_1^3 = 2\ln 3$

7 **a.** $f'(x) = 2x+2$.

b. $\displaystyle I = \int_0^3 (2x+2)\mathrm{d}x = \left[x^2+2x\right]_0^3 = 15-0 = 15$.

8 **a.** $\displaystyle g'(x) = 1+\frac{1}{x}$.

b. $\displaystyle J = \int_1^3 \left(1+\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x = [x+\ln x]_1^3 = 3+\ln 3-1 = 2+\ln 3$.

9 $\displaystyle\frac{1}{5-3}\int_3^5 (4x-5)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[2x^2-5x\right]_3^5 = \frac{1}{2}(25-3) = 11$.

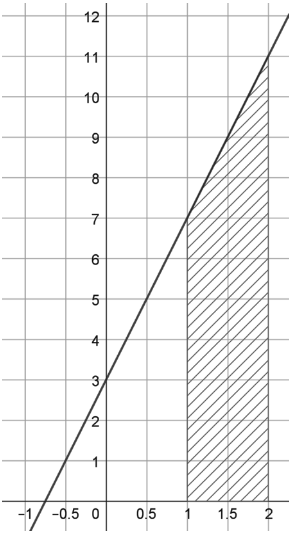
10 $\displaystyle\frac{1}{2-0}\int_0^2 \mathrm{e}^x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[\mathrm{e}^x\right]_0^2 = \frac{\mathrm{e}^2-1}{2}$.

11 $\dfrac{1}{\pi-0}\displaystyle\int_0^{\pi}\sin x\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{\pi}[-\cos x]_0^{\pi}=\dfrac{1}{\pi}(1-(-1))=\dfrac{2}{\pi}$.

12 $\displaystyle\int_{-2}^{2}\left(4-x^2\right)\mathrm{d}x=\left[4x-\frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{2}=\frac{16}{3}-\left(-\frac{16}{3}\right)=\frac{32}{3}$.

13 **a.** $\displaystyle\int_1^2(4x+3)\mathrm{d}x=\left[2x^2+3x\right]_1^2=14-5=9$.

b.



On calcule l'aire d'un trapèze : $\dfrac{7+11}{2}\times 1=9$.

14 Graphiquement, on remarque que les deux courbes se coupent aux points d'abscisses –2 et 1. On constate aussi que, sur l'intervalle $[-2\,;1]$, $f(x)\geq g(x)$.

$$\int_{-2}^{1}\left[\left(5-x^2\right)-(x+3)\right]\mathrm{d}x=\int_{-2}^{1}\left(-x^2-x+2\right)\mathrm{d}x=\left[-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+2x\right]_{-2}^{1}=\frac{7}{6}-\left(-\frac{10}{3}\right)=\frac{27}{6}=\frac{9}{2}\ .$$

15 Graphiquement, on remarque que les deux courbes se coupent au point d'abscisse 1. On constate aussi que, pour $x\geq 1$, $f(x)\geq g(x)$.

$$\int_1^3(f(x)-g(x))\mathrm{d}x=\int_1^3\left(2-\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x=[2x-2\ln x]_1^3=6-2\ln 3-2=4-2\ln 3\ .$$

Pour commencer

16 Aire de ABCD : $\dfrac{(\mathrm{AB}+\mathrm{CB})}{2}\times\mathrm{CD}=\dfrac{(1+4)}{2}\times 3=\dfrac{15}{2}=4{,}5$.

Aire de BCE $\dfrac{\mathrm{CB}\times\mathrm{CE}}{2}=\dfrac{4\times 1}{2}=2$

17 **a.** $I=\displaystyle\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x=5\times(3-1)=10$.

b. $J = 5 \times 4 = 20$.

c. $K = 15$.

d. $L = 5 \times (2030 - 2020) = 50$.

e. $M = 10$.

f. $N = 5 \times \left(\sqrt{2} - 0\right) = 5\sqrt{2}$.

18 **a.** $I = \int_{1}^{5} f(x)\mathrm{d}x = 4 \times (5-1) = 16$.

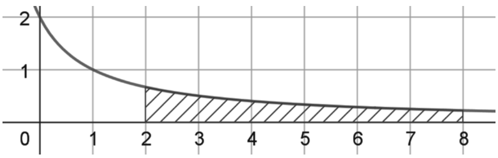
b. $J = \int_{0}^{5} f(x)\mathrm{d}x = 4 \times (5-0) = 20$.

c. $K = \int_{-4}^{0} f(x)\mathrm{d}x = \dfrac{4 \times 4}{2} = 8$.

d. $L = \int_{-4}^{5} f(x)\mathrm{d}x = 8 + 20 = 28$.

19 $\int_{-1}^{1} \left(-x^2 + 1\right)\mathrm{d}x$ est l'aire de la partie de plan limitée par la courbe et l'axe des abscisses.

20 **1.**



2. $\int_{2}^{8} h(x)\mathrm{d}x = \int_{2}^{8} \dfrac{2}{x+1}\mathrm{d}x = 2[\ln(x+1)]_2^8 = 2(\ln 9 - \ln 3) = 2\ln 3$.

21 L'aire, exprimée en unités d'aire, de la partie colorée est égale à : $\int_{0}^{1} \mathrm{e}^x \mathrm{d}x = \left[\mathrm{e}^x\right]_0^1 = e - 1$

22 **1.** $\int_{-2}^{-1} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-2}^{-1} \left(-2x^2 - 4x\right)\mathrm{d}x$

2. $\int_{-2}^{-1} \left(-2x^2 - 4x\right)\mathrm{d}x = \left[-\dfrac{2}{3}x^3 - 2x^2\right]_{-2}^{-1} = -\dfrac{4}{3} - \left(-\dfrac{8}{3}\right) = \dfrac{4}{3}$.

23 La courbe $\mathscr{C}_f$ coupe l'axe de abscisses en –4 et 4 et est au-dessus entre ces deux valeurs, donc l'aire est égale à :

$$\int_{-4}^{4} \left(4 - \frac{x^2}{4}\right)\mathrm{d}x = \left[4x - \frac{x^3}{12}\right]_{-4}^{4} = \frac{32}{3} - \left(-\frac{32}{3}\right) = \frac{64}{3} .$$

24 **1.** $I = \int_{0}^{3} x\mathrm{d}x = \left[\dfrac{x^2}{2}\right]_0^3 = \dfrac{9}{2} = 4{,}5$.

2. L'intégrale est égale à l'aire du triangle colorié soit : $\dfrac{3 \times 3}{2} = \dfrac{9}{2}$.

25 Aire de rectangles hachurés :

$0{,}5 \times (\ln 1{,}5 + \ln 2 + \ln 2{,}5)$.

Aire des rectangles coloriés :

$0{,}5 \times (\ln 1{,}5 + \ln 2 + \ln 2{,}5 + \ln 3)$.

Soit $I=\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x$:

$0{,}5\times(\ln 1{,}5+\ln 2+\ln 2{,}5)<I<0{,}5\times(\ln 1{,}5+\ln 2+\ln 2{,}5+\ln 3)$.

On en déduit que 1,00 < I < 1,56.

Remarque : on démontre que $I=3\ln 3-2\approx 1{,}30$

26 **a.** $\dfrac{u^{n+1}}{n+1}$. **b.** e^u . **c.** $-\cos u$. **d.** $\sin u$. **e.** $\ln u$.

27 **a.** $\int_1^3(2x+1)\mathrm{d}x=\left[x^2+x\right]_1^3=12-2=10$; **b.** $\int_0^3\left(3x^2+4x+1\right)\mathrm{d}x=\left[x^3+2x^2+x\right]_0^3=48$.

28 **a.** $\int_0^2 3\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\left[3\mathrm{e}^x\right]_0^2=3\mathrm{e}^2-3$; **b.** $\int_0^3\mathrm{e}^{x+3}\mathrm{d}x=\left[\mathrm{e}^{x+3}\right]_0^3=\mathrm{e}^6-\mathrm{e}^3$.

29 **a.** $\int_{\ln 2}^{\ln 3}\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\left[\mathrm{e}^x\right]_{\ln 2}^{\ln 3}=3-2=1$; **b.** $\int_0^{\ln 3}\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x=\left[\dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{2}\right]_0^{\ln 3}=\dfrac{9}{2}-\dfrac{1}{2}=4$.

30 **a.** $\int_1^3\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x=[\ln x]_1^3=\ln 3$; **b.** $\int_0^3\dfrac{1}{x+1}\mathrm{d}x=[\ln(x+1)]_0^3=\ln 4=2\ln 2$.

31 **a.** $\int_1^e\dfrac{1}{2x}\mathrm{d}x=\left[\dfrac{\ln x}{2}\right]_1^e=\dfrac{1}{2}$; **b.** $\int_0^3\dfrac{2}{x+1}\mathrm{d}x=[2\ln(x+1)]_0^3=2\ln 4=4\ln 2$.

32 **a.** $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin x\mathrm{d}x=[-\cos x]_0^{\frac{\pi}{4}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}-(-1)=1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; **b.** $\int_0^{\frac{2\pi}{3}}\cos\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)\mathrm{d}x=\left[\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)\right]_0^{\frac{2\pi}{3}}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

33 **a.** $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin(3x)\mathrm{d}x=\left[-\dfrac{1}{3}\cos(3x)\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\dfrac{\sqrt{2}}{6}+\dfrac{1}{3}$;

b. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)\mathrm{d}x=\left[\dfrac{1}{2}\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}-\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

34 **a.** $\int_1^3\dfrac{2x}{x^2+1}\mathrm{d}x=\left[\ln\left(x^2+1\right)\right]_1^3=\ln 10-\ln 2=\ln\left(\dfrac{10}{2}\right)=\ln 5$.

b. $\int_1^2\dfrac{3x^2+1}{x^3+x}\mathrm{d}x=\left[\ln\left(x^3+x\right)\right]_1^2=\ln 10-\ln 2=\ln\left(\dfrac{10}{2}\right)=\ln 5$.

c. $\int_1^3\dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}\mathrm{d}x=\left[\ln\left(\mathrm{e}^x+1\right)\right]_1^3=\ln\left(\mathrm{e}^3+1\right)-\ln(e+1)$.

d. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\dfrac{\cos x}{\sin x}\mathrm{d}x=[\ln(\sin x)]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}=\ln\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)-\ln\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=\ln\left(\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{3}{2}$.

35 **a.** $\int_0^{\ln 3} 2e^{2x}\,dx = \left[e^{2x}\right]_0^{\ln 3} = 9-1=8$.

b. $\int_0^{\ln 3} 2xe^{x^2+1}\,dx = \left[e^{x^2+1}\right]_0^{\ln 3} = e^{(\ln 3^2+1)} - e$.

c. $\int_{-1}^{1} 3x^2e^{x^3+1}\,dx = \left[e^{x^3+1}\right]_{-1}^{1} = e^2-1$.

d. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, e^{\sin x}\,dx = \left[e^{\sin x}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = e-1$.

36 **a.** $\int_{-1}^{1}(x+3)^2dx = \frac{1}{3}\left[(x+3)^3\right]_{-1}^{1} = \frac{64}{3}-\frac{8}{3}=\frac{56}{3}$.

b. $\int_0^2 3(3x-5)^2dx = \left[\frac{(3x-5)^3}{3}\right]_0^2 = \frac{1}{3}-\left(-\frac{125}{3}\right)=\frac{126}{3}=42$.

c. $\int_0^2 2(2x+1)^3dx = \left[\frac{(2x+1)^4}{4}\right]_0^2 = \frac{625}{4}-\frac{1}{4}=\frac{624}{4}=156$.

d. $\int_0^1 2x\left(x^2+1\right)^2dx = \left[\frac{\left(x^2+1\right)^3}{3}\right]_0^2 = \frac{125}{3}-\frac{1}{3}=\frac{124}{3}$.

37 **1.** $f'(x)=2e^x+(2x-3)e^x=(2x-1)e^x$.

2. $\int_0^{\frac{3}{2}}(2x-1)e^xdx = \left[(2x-3)e^x\right]_0^{\frac{3}{2}} = 0-(-3)=3$.

38 **1.** $f'(x)=e^{2x}+(x+1)\times 2e^{2x}=(1+2x+2)e^{2x}=(2x+3)e^{2x}=g(x)$.

2. $J=\int_{-1}^{0}(2x+3)e^{2x}dx=\left[(x+1)e^{2x}\right]_{-1}^{0}=1$

39 **1.** $f'(x)=2x\ln x+x^2\times\frac{1}{x}-x=2x\ln x=g(x)$.

2. $I=\int_1^e 2x\ln x\,dx=\left[x^2\ln x-\frac{x^2}{2}\right]_1^e=\frac{e^2}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{e^2+1}{2}$.

40 $\int_a^b f(x)\,dx+\int_b^c f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx$.

41 **1.** $\frac{3}{x-2}-\frac{2}{x+1}=\frac{3(x+1)}{(x-2)(x+1)}-\frac{2(x-2)}{(x+1)(x-2)}=\frac{(3x+3)-(2x-4)}{(x-2)(x+1)}=\frac{x+7}{x^2-x-2}$

2. $I=\int_3^5\frac{3}{x-2}\,dx=[3\ln(x-2)]_3^5=3\ln 3-3\ln 1=3\ln 3$.

3. $J=\int_3^5\frac{2}{x+1}\,dx=[2\ln(x+1)]_3^5=2\ln 6-2\ln 4$.

4. $K=I-J=3\ln 3-2\ln 6+2\ln 4=3\ln 3-2\ln 3-2\ln 2+4\ln 2=\ln 3+2\ln 2=\ln 12$.

42 $\int_0^4 f(x)\,dx=\int_0^1 f(x)\,dx+\int_1^3 f(x)\,dx+\int_3^4 f(x)\,dx=\int_0^1 x^2\,dx+\int_1^3 1\,dx+\int_3^4(-x+4)\,dx$.

$=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1+[x]_1^3+\left[-\frac{x^2}{2}+4x\right]_3^4=\frac{1}{3}+2+\frac{1}{2}=\frac{17}{6}$.

43 **a.** $\int_{-\pi}^{\pi}(1+\cos x)\mathrm{d}x=[x+\sin x]_{-\pi}^{\pi}=2\pi$.

b. $\int_{-\pi}^{\pi}g(x)\mathrm{d}x=1{,}5\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=1{,}5\times 2\pi=3\pi$. $\int_{-\pi}^{\pi}h(x)\mathrm{d}x=-2{,}5\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=-2{,}5\times 2\pi=-5\pi$.

44 $m=\dfrac{1}{3-1}\int_{1}^{3}f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\int_{1}^{3}f(x)\mathrm{d}x$.

45 **1.** $d=\int_{0}^{7}f(t)\mathrm{d}t=\int_{0}^{1}f(t)\mathrm{d}t+\int_{1}^{5}f(t)\mathrm{d}t+\int_{5}^{7}f(t)\mathrm{d}t$

$d=\int_{0}^{1}t\mathrm{d}t+\int_{1}^{5}1\mathrm{d}t+\int_{5}^{7}(-0{,}5t+3{,}5)\mathrm{d}t=\left[\dfrac{t^2}{2}\right]_0^1+[t]_1^5+\left[-\dfrac{t^2}{4}+3{,}5t\right]_5^7$

$d=\dfrac{1}{2}+4+1=5{,}5$.

Remarque : pour calculer les intégrales, on peut aussi utiliser des considérations géométriques.

2. $v=\dfrac{1}{7}\int_{0}^{7}f(t)\mathrm{d}t=\dfrac{5{,}5}{7}=\dfrac{11}{14}$ (km.min^{-1})

46 $m=\dfrac{1}{2-(-2)}\int_{-2}^{2}(4-x^2)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{4}\left[4x-\dfrac{x^3}{3}\right]_{-2}^{2}=\dfrac{1}{4}\times\dfrac{32}{3}=\dfrac{8}{3}$.

47 $m=\dfrac{1}{3-(-3)}\int_{-3}^{3}(2x-x^3)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{6}\left[x^2-\dfrac{1}{4}x^4\right]_{-3}^{3}=0$.

48 $m=\dfrac{1}{1-(-1)}\int_{-1}^{1}(1+\mathrm{e}^{2x})\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\left[x+\dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{2}\right]_{-1}^{1}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\mathrm{e}^2}{2}-\dfrac{\mathrm{e}^{-2}}{2}+2\right)=\dfrac{\mathrm{e}^2}{4}-\dfrac{\mathrm{e}^{-2}}{4}+1$.

49 $m=\dfrac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}(2\sin x+3\cos x)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2\pi}[-2\cos x+3\sin x]_0^{2\pi}$

$m=\dfrac{1}{2\pi}[(-2+0)-(-2+0)]=0$.

50 $\mathscr{A}=-\int_{-1}^{4}f(x)\mathrm{d}x$.

51 **1.** $\int_{0}^{\frac{3\pi}{2}}\cos x\,\mathrm{d}x=[\sin x]_0^{\frac{3\pi}{2}}=-1$.

2. La fonction cosinus est négative sur l'intervalle $\left[\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{2}\right]$ donc :

$\mathscr{A}=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,\mathrm{d}x-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\cos x\,\mathrm{d}x=[\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}}-[\sin x]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}=1-(-2)=3$

52 **1.** $\int_0^4 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^4 \left(\frac{x}{2}-2\right)\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{4}-2x\right]_0^4 = -4$.

2. $f(x) \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x}{2}-2 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x}{2} \leq 2 \Leftrightarrow x \leq 4$

3. Puisque f est négative sur l'intervalle $[0\,;4]$, l'aire colorée est égale à $-\int_0^4 f(x)\mathrm{d}x = 4$.

4. On calcule l'aire d'un triangle : $\frac{4\times 2}{2} = 4$.

53 **1.** $f(x) = x^2-16 = (x-4)(x+4)$.

Si $-2 \leq x \leq 2$, alors $x-4 \leq 0$ et $x+4 \geq 0$. On en déduit que $f(x) \leq 0$.

2. $\mathcal{A} = -\int_{-2}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{-2}^{2}(x^2-16)\mathrm{d}x = -\left[\frac{x^3}{3}-16x\right]_{-2}^{2} = -\left(-\frac{88}{3}-\frac{88}{3}\right) = \frac{176}{3}$.

54 **1.** $f(1) = g(1) = 0$ donc A(1 ; 0).

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2-5x+4 = x-1 \Leftrightarrow x^2-6x+5 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-5) = 0$

On retrouve que le point A a pour abscisse 1 et on en déduit que B a pour abscisse 5.

$f(5) = g(5) = 4$ donc B (5 ; 4).

2. $\mathcal{A} = \int_1^5 [g(x)-f(x)]\mathrm{d}x = \int_1^5 (-x^2+6x-5)\mathrm{d}x = \left[-\frac{x^3}{3}+3x^2-5x\right]_1^5 = \frac{25}{3}-\left(-\frac{7}{3}\right) = \frac{32}{3}$

Pour s'entraîner

55 On calcule des aires.

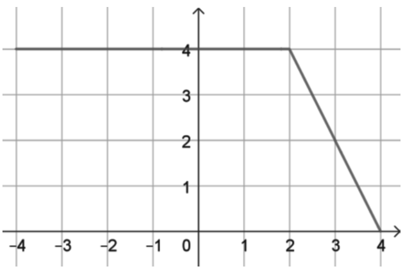
a. $I = \int_{-4}^{-2} f(x)\mathrm{d}x = \frac{2\times 2}{2} = 2$ (aire d'un triangle).

b. $J = \int_{-2}^{-1} f(x)\mathrm{d}x = \frac{2+4}{2}\times 1 = 3$ (aire d'un trapèze)

c. $K = \int_{-1}^{3} f(x)\mathrm{d}x = 4\times 3 + \frac{4+2}{2}\times 1 = 15$

d. $L = \int_{-4}^{5} f(x)\mathrm{d}x = I+J+K+\int_3^5 f(x)\mathrm{d}x = 2+3+15+2\times 2 = 24$.

56



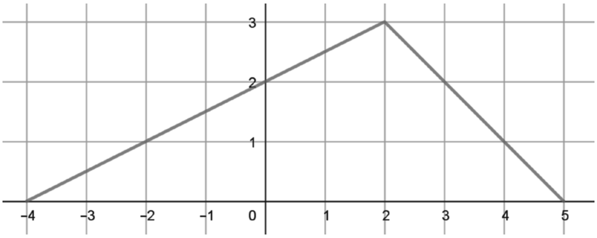
a. $I=\int_{-4}^{-2} g(x)\mathrm{d}x=4\times 2=8$.

b. $J=\int_{-4}^{3} g(x)\mathrm{d}x=4\times 6+\frac{4+2}{2}\times 1=24+3=27$.

c. $K=\int_{3}^{4} f(x)\mathrm{d}x=\frac{2\times 1}{2}=1$.

d. $L=\int_{-4}^{4} f(x)\mathrm{d}x=4\times 6+\frac{4\times 2}{2}=28.$

57 **1.**



2. a. On calcule l'aire d'un triangle. $\int_{-4}^{-2} h(x)\mathrm{d}x=\frac{2\times 1}{2}=1$.

b. On calcule l'aire d'un triangle. $\int_{-4}^{2} h(x)\mathrm{d}x=\frac{6\times 3}{2}=9$.

c. On calcule l'aire d'un triangle. $\int_{2}^{5} h(x)\mathrm{d}x=\frac{3\times 3}{2}=\frac{9}{2}$.

d. On calcule l'aire d'un triangle. $\int_{-4}^{5} h(x)\mathrm{d}x=\frac{9\times 3}{2}=\frac{27}{2}$.

Remarque : $\int_{-4}^{5} h(x)\mathrm{d}x=\int_{-4}^{2} h(x)\mathrm{d}x+\int_{2}^{5} h(x)\mathrm{d}x$

58 **1.** $\int_{1}^{5} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x=[\ln x]_1^5=\ln 5$.

2. L'intégrale est l'aire de la partie du plan limitée par la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=5$.

59 $\int_{0}^{\ln 2} \left(\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{x}\right)\mathrm{d}x=\left[\frac{\mathrm{e}^{2x}}{2}-\mathrm{e}^{x}\right]_0^{\ln 2}=0-\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$

60 **1.** **a.** $\mathscr{A}=f(1)+f(2)+f(3)=15+12+7=34$.

2. a.

$X \leftarrow 0$
$S \leftarrow 0$
Tant que $X \leq 4$
$\quad S \leftarrow (16-X^2)+S$
$\quad X \leftarrow X+1$
Fin Tant que

b. $\mathcal{A} = f(0)+f(1)+f(2)+f(3) = 16+15+12+7 = 50$.

c. $\int_0^4 (16-x^2)\mathrm{d}x = \left[16x - \frac{x^3}{3}\right]_0^4 = \frac{128}{3} \approx 42$.

On a bien $34 < \int_0^4 (16-x^2)\mathrm{d}x < 50$.

3. Calcul de S_1.

$X \leftarrow 4/N$
$S \leftarrow 0$
Tant que $X \leq 4$
$\quad S \leftarrow (16-X^2)\times 4/N+S$
$\quad X \leftarrow X+4/N$
Fin Tant que

Calcul de S_2.

$X \leftarrow 0$
$S \leftarrow 0$
Tant que $X \leq 4$
$\quad S \leftarrow (16-X^2)\times 4/N+S$
$\quad X \leftarrow X+4/N$
Fin Tant que

n	4	10	20	50	100
S_1	34	39,36	41,04	42,02	42,35
S_2	50	45,76	44,24	43,30	42,99

Plus n augmente, plus l'encadrement de S est précis.

61 **1.** $g'(x) = \ln x + x \times \frac{1}{x} = \ln x + 1$.

2. $f(x) = \ln x + 1 + 2x$ donc $F(x) = x \ln x + x^2$.

3. $I = \int_1^e (\ln x + 2x + 1)\mathrm{d}x = \left[x \ln x + x^2\right]_1^e = \left(e\ln e + e^2\right) - (1 \times \ln 1 + 1) = e^2 + e - 1$.

62 **1.** $F'(x) = 1 - \cos^2 x + \sin^2 x = 1 - \left[1 - \sin^2 x\right] + \sin^2 x = 2\sin^2 x = f(x)$.

2. $J = \int_0^{2\pi} 2\sin^2 x\mathrm{d}x = [x - \sin x\cos x]_0^{2\pi} = 2\pi$.

63 **1.** $F'(x) = \ln x + x \times \frac{1}{x} - 1 = \ln x + 1 - 1 = \ln x = f(x)$.

Donc F est une primitive de f.

2. $I=\int_1^e \ln x\,dx=[x\ln x-x]_1^e=1$.

64 **1.** $\frac{1}{3-x}+\frac{1}{3+x}=\frac{3+x}{(3-x)(3+x)}+\frac{3-x}{(3+x)(3-x)}=\frac{6}{9-x^2}$.

2. $I=\int_{-2}^{2}\frac{1}{3-x}dx=[-\ln(3-x)]_{-2}^{2}=\ln 5$.

3. $J=\int_{-2}^{2}\frac{1}{3+x}dx=[\ln(3+x)]_{-2}^{2}=\ln 5$.

4. $\int_{-2}^{2}\frac{6}{9-x^2}dx=I+J=2\ln 5$ donc $\int_{-2}^{2}\frac{1}{9-x^2}dx=\frac{2\ln 5}{6}=\frac{\ln 5}{3}$

65 **a.** $\int_0^{\pi} f(x)dx=\int_0^{\pi}\sin x\,dx=[-\cos x]_0^{\pi}=-(-1)-(-1)=2$.

$\int_{\pi}^{2\pi} f(x)dx=\int_{\pi}^{2\pi}-\sin x\,dx=[\cos x]_{\pi}^{2\pi}=1-(-1)=2$.

b. $\int_0^{2\pi} f(x)dx=\int_0^{\pi} f(x)dx+\int_{\pi}^{2\pi} f(x)dx=2+2=4$

66 **a.** $\int_1^3 f(x)dx=\int_1^3 x^2dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^3=\frac{26}{3}$.

$\int_1^3 g(x)dx=\int_1^3 x\,dx=\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^3=4$.

b. $\int_1^3 4x^2dx=4\times\int_1^3 f(x)dx=4\times\frac{26}{3}=\frac{104}{3}$.

$\int_1^3 5x\,dx=5\times\int_1^3 g(x)dx=5\times 4=20$.

$\int_1^3\left(4x^2-5x\right)dx=\int_1^3 4x^2dx-\int_1^3 5x\,dx=\frac{104}{3}-20=\frac{44}{3}$.

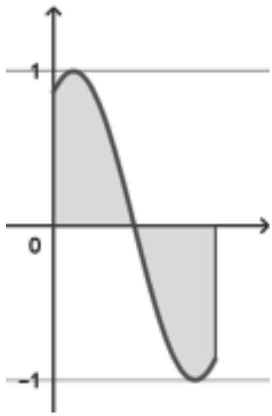
67 **1.** $m_1=\frac{1}{2-(-2)}\int_{-2}^{2}\left(1-\frac{x}{2}\right)dx=\frac{1}{4}\left[x-\frac{x^2}{4}\right]_{-2}^{2}=1$.

$m_2=\frac{1}{6-3}\int_3^6\left(1-\frac{x}{2}\right)dx=\frac{1}{3}\left[x-\frac{x^2}{4}\right]_3^6=-\frac{15}{4}$.

$m_3=\frac{1}{4-0}\int_0^4\left(1-\frac{x}{2}\right)dx=\frac{1}{4}\left[x-\frac{x^2}{4}\right]_0^4=0$.

2. La fonction f est négative pour $x > 2$ et positive pour $x < 2$. Il s'en suit : $m_1>0$ et $m_2<0$.

68 $m=\frac{1}{\frac{\pi}{3}-0}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin\left(4x+\frac{\pi}{3}\right)dx=\frac{3}{\pi}\left[-\frac{1}{4}\cos\left(4x+\frac{\pi}{3}\right)\right]_0^{\frac{\pi}{3}}=0$.



69 **1.** On calcule l'aire d'un triangle. $\int_{-3}^{4} f(x)\mathrm{d}x = \frac{(4-(-3))\times 5}{2} = \frac{35}{2}$.

2. $m = \frac{1}{4-(-3)}\int_{-3}^{4} f(x)\mathrm{d}x = \frac{5}{2}$

70 **1.** $I = \int_{0}^{2} f(x)\mathrm{d}x = \int_{0}^{2}\left(\frac{x}{2}-1\right)\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{4}-x\right]_0^2 = -1$.

$J = \int_{2}^{6} f(x)\mathrm{d}x = \int_{2}^{6}\left(\frac{x}{2}-1\right)\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{4}-x\right]_2^6 = 4$.

2. Puisque f est négative sur l'intervalle [0 ; 2], l'aire colorée est égale à $-I+J=1+4=5$

71 **a.** $2-\frac{1}{x+1} = \frac{2(x+1)-1}{x+1} = \frac{2x+1}{x+1} = f(x)$.

b. $\mathscr{A} = \int_{0}^{6}(1-f(x))\mathrm{d}x = \int_{0}^{6}\left(-1+\frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x$

$= [-x+\ln(x+1)]_1^6 = (-6+\ln 7)-(-1+\ln 2) = -5+\ln\left(\frac{7}{2}\right)$.

72 **a.** $V'(t) = -10\times 20\mathrm{e}^{-10t} = -200\mathrm{e}^{-10t}$.

$V'(t)<0$ donc la fonction V est décroissante sur $[0\,;+\infty[$.

t	0	$+\infty$
$V'(t)$	−	
$V(t)$	20 ↘	

b. $V(t)\geq 0{,}02 \Leftrightarrow 20\mathrm{e}^{-10t}\geq 0{,}02 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-10t}\geq 0{,}001 \Leftrightarrow -10t\geq \ln 0{,}001 \Leftrightarrow t\leq \frac{\ln 1000}{10} \Leftrightarrow t\leq \frac{3\ln 10}{10}$.

On remarquera que $\ln 0{,}001 = -\ln 1000$ car $0{,}001 = \frac{1}{1000}$.

c. $I(t)=CV'(t)=0{,}0001\times\left(-200\mathrm{e}^{-10t}\right)=-0{,}02\ \mathrm{e}^{-10t}$.

d. $W=\int_0^{0{,}69} RI^2(t)\mathrm{d}t=\int_0^{0{,}69} 1000\times\left(-0{,}02\ \mathrm{e}^{-10t}\right)^2\mathrm{d}t=\int_0^{0{,}69} 0{,}4\mathrm{e}^{-20t}\mathrm{d}t=\left[-0{,}02\mathrm{e}^{-20t}\right]_0^{0{,}69}=0{,}02\left(1-\mathrm{e}^{-13{,}8}\right)$.

73 **1.** Puisque la température du laboratoire est supérieure à celle de l'extérieur et en l'absence de chauffage, la température du laboratoire va décroitre ; la fonction f est décroissante sur l'intervalle $[0\,;9]$.

2. $f'(t)=-0{,}12\times 9\mathrm{e}^{-0{,}12t}=-1{,}08\mathrm{e}^{-0{,}12t}$; $f'(t)<0$ donc f est décroissante sur $[0\,;9]$.

3. $f(9)\approx 14{,}1$.

a. Au bout de 9 heures, c'est-à-dire à 7 h du matin, la température de laboratoire est de 14,1°C.

4. Au bout de 6,76 heures, c'est-à-dire à 4 h 45 min, la température du laboratoire es inférieure à 15°C.

5. $f(t)<15 \Leftrightarrow 9\mathrm{e}^{-0{,}12t}+11<15 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-0{,}12t}<\frac{4}{9} \Leftrightarrow -0{,}12t<\ln\left(\frac{4}{9}\right) \Leftrightarrow t>-\frac{\ln\left(\frac{4}{9}\right)}{0{,}12}$

b. D'où $t>6{,}76$.

6. $E=\int_0^9 g(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^9 0{,}7\mathrm{e}^{-0{,}12t}\mathrm{d}t=\left[\frac{0{,}7\mathrm{e}^{-0{,}12t}}{-0{,}12}\right]_0^9=\frac{0{,}7-0{,}7\mathrm{e}^{-1{,}08}}{0{,}12}$

7. $E\approx 3{,}8$ kWh

74 **1.** $f(x)=80-20\mathrm{e}^{0{,}025x}$.

- $f(0)=80-20=60$; la condition 1 est vérifiée.
- $f(30)=80-20\mathrm{e}^{0{,}75}>35$ car $80-20\mathrm{e}^{0{,}75}\approx 37{,}66$. La condition 2 est vérifiée.
- $f'(x)=-0{,}5\mathrm{e}^{0{,}025x}$; donc $f'(x)<0$; la condition 3 est vérifiée.

2. $a\approx 55{,}5$. $\mathrm{OA}\approx 55{,}5$ donc $\mathrm{OA}\leq 60$.

3. a. $F'(x)=80-800\times 0{,}025\mathrm{e}^{0{,}025x}=80-20\mathrm{e}^{0{,}025x}=f(x)$. F est une primitive de f.

b. $J=\int_0^{55{,}5} f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{55{,}5}\left(80-20\mathrm{e}^{0{,}025x}\right)\mathrm{d}x=\left[80x-800\mathrm{e}^{0{,}025x}\right]_0^{55{,}5}$

$=\left(4440-800\mathrm{e}^{1{,}3875}\right)-(-800)=5240-800\mathrm{e}^{1{,}3875}$.

c. $J\approx 2036{,}14$.

4. a. En raison de la symétrie, la surface est égale à $2J$, soit environ 4072,28 m².

b. Surface recouverte avec un bidon : $68\times 0{,}2=13{,}6$ m².

Nombre de bidons : $4072{,}28\div 13{,}6\approx 299{,}4$. Il faut 300 bidons.

Pour faire le point

75 **Vrai**

76 **Faux**

77 **Faux**

78 **Faux**

79 **Vrai**

80 **Vrai** car e^x est positif.

81 **Faux** car $x^2 - 1 < 0$ sur l'intervalle $[-1\ ;\ 1]$

82 Réponse **b**

83 Réponse **d**

84 Réponse **a**

85 Réponse **a**

86 Réponse **d**

87 Réponse **b**

Pour approfondir

88 **1.** **a.** For $x > 0$, $\dfrac{1}{x} > 0$ and $e^{2x} > 0$ then $f(x) > 0$.

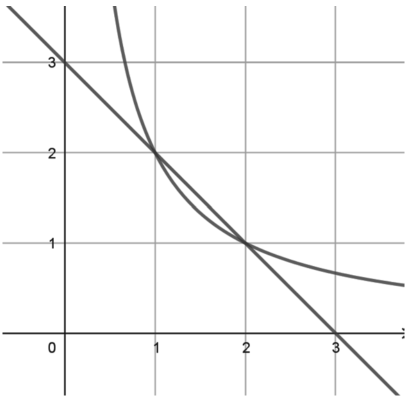
b. $\displaystyle\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x = \left[\ln x + \frac{1}{2}e^{2x}\right]_1^2 = \ln 2 + \frac{e^4}{2} - \frac{e^2}{2}$.

2. a. For $x = 1$, $\dfrac{2}{x} = 2$ and $3 - x = 2$.

For $x = 2$, $\dfrac{2}{x} = 1$ and $3 - x = 1$.

The curve $y = \dfrac{2}{x}$ and the straight line $y = 3 - x$ intersect where $x = 1$ and $x = 2$.

b. If $1 \leq x \leq 2$ then $\dfrac{2}{x} \leq 3 - x$.



$$\int_1^2 \left(3 - x - \frac{2}{x}\right)\mathrm{d}x = \left[3x - \frac{x^2}{2} - 2\ln x\right]_1^2 = (6 - 2 - 2\ln 2) - \left(3 - \frac{1}{2} - 0\right) = \frac{3}{2} - 2\ln 2$$

89 **1.** $I = \displaystyle\int_0^{\pi}\left(2\sin\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{2}{\pi}x\right) = \left[-4\cos\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x^2}{\pi}\right]_0^{\pi} = (0 - \pi) - (-4 - 0) = 4 - \pi$.

2. I représente l'aire de la partie coloriée, c'est-à-dire la partie du plan limitée par la courbe $\mathscr{C}_f$ et la droite Δ.

90 **1.** $f(x)=0 \Leftrightarrow (2-\ln x)\ln x=0 \Leftrightarrow (\ln x=2 \text{ ou } \ln x=0) \Leftrightarrow (x=\mathrm{e}^2 \text{ ou } x=1)$.

2. $F'(x)=-(\ln x^2)-2x\times\frac{1}{x}\times\ln x+4\ln x+4x\times\frac{1}{x}-4$

$=-(\ln x^2)-2\ln x+4\ln x+4-4=2\ln x-(\ln x^2)=(2-\ln x)\ln x$.

3. Graphiquement, la fonction f est positive entre 0 et e² donc l'aire du domaine D est égale à :

$$\int_1^{\mathrm{e}^2}(2-\ln x)\ln x\,\mathrm{d}x=\left[-(\ln x^2)+4x\ln x-4x\right]_1^{\mathrm{e}^2}=\left(-4+4e^2\times 2-4e^2\right)-(-4)=4e^2.$$

91 **1.** $f'(t)=-25\times(-0{,}5)\mathrm{e}^{-0{,}5t}=12{,}5\mathrm{e}^{-0{,}5t}$. $f'(t)$ est strictement positif donc f est croissante sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

2. L'aire est proche de celle d'un trapèze qui a pour aire $\frac{10+15}{2}\times 1=12{,}5$.

3. a. $F(t)=25\left(t+\frac{\mathrm{e}^{-0{,}5t}}{0{,}5}\right)=25\left(t+2\mathrm{e}^{-0{,}5t}\right)$.

b. $\int_1^2 f(t)\mathrm{d}t=\int_1^2 25\left(1-\mathrm{e}^{-0{,}5t}\right)\mathrm{d}t=\left[25\left(t+2\mathrm{e}^{-0{,}5t}\right)\right]_1^2$

$=\left(25\left(2+2\mathrm{e}^{-1}\right)\right)-\left(25\left(1+2\mathrm{e}^{-0{,}5}\right)\right)=25+50\mathrm{e}^{-1}-50\mathrm{e}^{-0{,}5}\approx 13{,}1$.

C'est l'aire de la partie du plan comprise entre la courbe Γ, l'axe des abscisses et les droites d'équation $t=1$ et $t=2$.

c. $\int_0^6 f(t)\mathrm{d}t=\int_0^6 25\left(1-\mathrm{e}^{-0{,}5t}\right)\mathrm{d}t=\left[25\left(t+2\mathrm{e}^{-0{,}5t}\right)\right]_0^6$

$=\left(25\left(6+2\mathrm{e}^{-3}\right)-25(0+2)\right)=100+50\mathrm{e}^{-3}\approx 102{,}5$.

La distance parcourue pendant les six premières secondes est donc $100+50\mathrm{e}^{-3}$ mètres soit environ 102,5 mètres.

92 **1.** La fonction f est positive sur les intervalles $[0\,;4]$ et $[6\,;10]$, négative sur l'intervalle $[4\,;6]$ donc l'aire $\mathcal{A}$ est égale à :

$$\mathcal{A}=\int_0^4 f(x)\mathrm{d}x-\int_4^6 f(x)\mathrm{d}x+\int_6^{10} f(x)\mathrm{d}x$$

$$\mathcal{A}=\int_0^3 x\mathrm{d}x+\int_3^4\left(x^2-10x+24\right)\mathrm{d}x-\int_4^6\left(x^2-10x+24\right)\mathrm{d}x+\int_6^7\left(x^2-10x+24\right)\mathrm{d}x+\int_7^{10}(10-x)\mathrm{d}x$$

$$\mathcal{A}=\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^3+\left[\frac{x^3}{3}-5x^2+24x\right]_3^4-\left[\frac{x^3}{3}-5x^2+24x\right]_4^6+\left[\frac{x^3}{3}-5x^2+24x\right]_6^7+\left[10x-\frac{x^2}{2}\right]_7^{10}$$

$$\mathcal{A}=\frac{9}{2}+\frac{4}{3}-\left(-\frac{4}{3}\right)+\frac{4}{3}+\frac{9}{2}=13$$

2. $m=\frac{1}{10}\int_0^{10} f(x)\mathrm{d}x$; or :

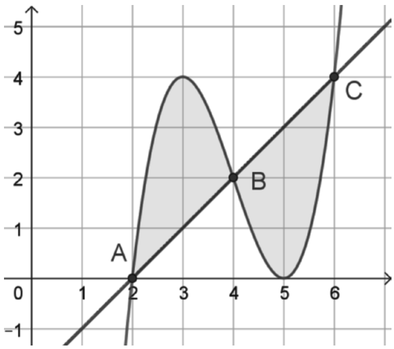
$$\int_0^{10} f(x)\mathrm{d}x=\int_0^3 x\mathrm{d}x+\int_3^7\left(x^2-10x+24\right)\mathrm{d}x+\int_7^{10}(10-x)\mathrm{d}x$$

$$=\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^3+\left[\frac{x^3}{3}-5x^2+24x\right]_3^7+\left[10x-\frac{x^2}{2}\right]_7^{10}=\frac{9}{2}+\frac{4}{3}+\frac{9}{2}=\frac{31}{3}.$$

On en déduit :

$$m=\frac{1}{10}\int_0^{10} f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{10}\times\frac{31}{3}=\frac{31}{30}$$

93 **a.**



A(2 ; 0) ; B(4 ; 2) et C(6 ; 4).

b. $f(x) < g(x) \Leftrightarrow (x < 2 \text{ ou } 4 < x < 6)$

c. $\mathscr{A} = \int_2^4 (f(x) - g(x))\mathrm{d}x + \int_4^6 (g(x) - f(x))\mathrm{d}x$

$= \int_2^4 \left(\left(x^3 - 12x^2 + 45x - 50\right) - (x-2)\right)\mathrm{d}x + \int_4^6 \left((x-2) - \left(x^3 - 12x^2 + 45x - 50\right)\right)\mathrm{d}x$

$= \int_2^4 \left(x^3 - 12x^2 + 44x - 48\right)\mathrm{d}x + \int_4^6 \left(-x^3 + 12x^2 - 44x + 48\right)\mathrm{d}x$

$= \left[\frac{x^4}{4} - 4x^3 + 22x^2 - 48x\right]_2^4 + \left[-\frac{x^4}{4} + 4x^3 - 22x^2 + 48x\right]_4^6 = 4 + 4 = 8$.

d. $m_1 = \frac{1}{2}\int_2^4 f(x)\mathrm{d}x = \int_2^4 \left(x^3 - 12x^2 + 45x - 50\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[\frac{x^4}{4} - 4x^3 + \frac{45}{2}x^2 - 50x\right]_2^4$

$= \frac{1}{2} \times 6 = 3$.

$m_2 = \frac{1}{2}\int_2^4 g(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_2^4 (x-2)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}x^2 - 2x\right]_2^4 = \frac{1}{2} \times 2 = 1$.

TP Méthode de Monte-Carlo

1. Aire du carré OABC : $2 \times 4 = 8$.

2. $\begin{cases} 0 \le x \le 2 \\ 0 \le y \le 4 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 0 \le x \le 2 \\ 0 \le y \le 4 - x^2 \end{cases}$

En salle informatique :

1. a. *N* représente le nombre total de points aléatoires. *S* représente le nombre de points situés dans la surface coloriée.

b. L'algorithme permet de connaître la proportion de points situés dans la surface coloriée.

c. On multiplie le résultat obtenu par la surface du rectangle OABC.

d. On ajoute la ligne : 8*S/N.

2. $\mathcal{A} \approx 5{,}3$.

3. $\int_1^2 (4-x^2)\mathrm{d}x = \left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{16}{3} \approx 5{,}33$.

4. On utilise l'algorithme :

```
N←1000
S←0
Pour i allant de 1 à N
        x← valeur aléatoire entre –2 et 2
        y← valeur aléatoire entre 0 et 1
          Si 1/(x²+1) > y
          S←S+1
          Fin Si
Fin Pour
```

Et pour obtenir l'intégrale, on ajoute dans la programme print(4**S*/*N*)

Fichier Python Calculatrice Casio 90+E

```
from random import
n=1000
s=0
for i in range(n):
        x=2*random()
        y=random()
        if 1/(1+x**2)>y :
          s=s+1
print(4*s/n)
```

Fichier Python ordinateur

```
import random
n=1000
s=0
for i in range(n):
  x=random.uniform(-2,2)
  y=1*random.random()
  if 1/(x**2+1)>y:
    s=s+1
print(4*s/n)
```

TP Méthodes des trapèzes et de Simpson

1. Aire de ABB_0O : $\frac{1+f(0{,}2)}{2} \times 0{,}2 \approx 0{,}198$.

2. On place sur la courbe les points C, D, E d'abscisses respectives 0,4 ; 0,6 et 0,8 et sur l'axe des abscisses les points C_0, D_0, E_0 d'abscisses respectives 0,4 ; 0,6 et 0,8. On calcule les aires des trapèzes BCC_0B_0, CDD_0C_0, DEE_0D_0 et EFF_0E_0.

L'aire est environ égale à la somme des aires des cinq trapèzes.

$\mathscr{A} \approx 0{,}198 + 0{,}1906 + 0{,}1773 + 0{,}1605 + 0{,}1424 = 0{,}8688 \approx 0{,}869$.

3. $\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x \approx 2 \times 0{,}8688 = 1{,}7376 \approx 1{,}74$.

En salle informatique :

$\int_{0}^{0,2} g_1(x)\mathrm{d}x = 0{,}1993$

Appelons g_2, g_3, g_4 et g_5 les fonctions définies comme g_1 sur les intervalles $[0{,}2\ ;0{,}4]$, $[0{,}4\ ;0{,}6]$, $[0{,}6\ ;0{,}8]$, $[0{,}8\ ;1]$. On obtient :

$J \approx 0{,}1993 + 0{,}1911 + 0{,}1776 + 0{,}1606 + 0{,}1424 = 0{,}8710$ donc $J \approx 0{,}871$.

Pour l'épreuve du Bac

96 **1.** Si $-1 \leq x \leq 2$ alors $f(x) \geq 0$; si $2 \leq x \leq 2{,}5$ alors $f(x) \leq 0$.

2. $\mathscr{A} = \int_{-1}^{2} f(x)\mathrm{d}x - \int_{2}^{2,5} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{2}\left(-x^3 + 2x^2\right)\mathrm{d}x - \int_{2}^{2,5}\left(-x^3 + 2x^2\right)\mathrm{d}x$

$\mathscr{A} = \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{2}{3}x^3\right]_{-1}^{2} - \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{2}{3}x^3\right]_{2}^{2,5} = \frac{9}{4} - \left(-\frac{131}{192}\right) = \frac{563}{192} \approx 2{,}93$

97 ### Partie A

3. $f'(1) = 0$.

4. a. $f'(x) = 2ax + \frac{1}{x}$ donc $f'(1) = 2a + 1$.

b. $f'(1) = 0 \Leftrightarrow 2a + 1 = 0 \Leftrightarrow a = -0{,}5$.

Partie B

1. $F'(x) = 11 - \frac{1}{2}x^2 + \ln x + x \times \frac{1}{x} = 11 - 0{,}5x^2 + \ln x + 1 = 12 - 0{,}5x^2 + \ln x = f(x)$

2. a. B a pour coordonnées $(5\ ; f(5))$, donc l'ordonnée de B est :

$f(5) = 12 - 0{,}5 \times 5^2 + \ln 5 = \ln 5 - 0{,}5$.

La fonction g est constante, donc pour tout x, $g(x)$ est égal à l'ordonnée de B, soit :

$g(x) = \ln 5 - 0{,}5$.

b. Graphiquement, on constate que $f(x) \geq g(x)$ pour tout x de l'intervalle $[2\ ;5]$.

$\mathscr{A} = \int_{2}^{5}(f(x) - g(x))\mathrm{d}x = \int_{2}^{5}\left(\left(12 - 0{,}5x^2 + \ln x\right) - (\ln 5 - 0{,}5)\right)\mathrm{d}x$

$\mathscr{A} = \left[11x - \frac{1}{6}x^3 + x\ln x\right]_{2}^{5} - [(\ln 5 - 0{,}5)x]_2^5$

$\mathscr{A} = \left(5\ln 5 + \frac{205}{6}\right) - \left(2\ln 2 + \frac{62}{3}\right) - 3(\ln 5 - 0{,}5) = 2\ln 5 - 2\ln 2 + 15$.

c. $\mathcal{A} \approx 16{,}83258$ donc $\mathcal{A} \approx 16{,}8\ \text{m}^2$.

Masse de la voile : $16{,}8 \times 0{,}26 = 4{,}368$ kg donc la voile pèse moins de 5 kg.

98 Partie A

$n = 50 \geq 30$; $np = 50 \times 0{,}48 = 24 \geq 5$ et $n(1-p) = 50 \times (1-0{,}48) = 26 \geq 5$.

Sous ces conditions, l'intervalle de fluctuation asymptotique à 95 % de la fréquence est l'intervalle

$$I = \left[0{,}48 - 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}48(1-0{,}48)}{50}}\ ;\ 0{,}48 + 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}48(1-0{,}48)}{50}}\right] = [0{,}34\ ;\ 0{,}62].$$

La fréquence de l'échantillon $\frac{29}{50}$ appartient à l'intervalle I, donc au seuil de 5 %, on ne remet pas en cause l'affirmation du laboratoire.

Partie B

1. a. $f'(t) = \dfrac{8 \times (t^2+1) - 8t \times 2t}{(t^2+1)^2} = \dfrac{8-8t^2}{(t^2+1)^2} = \dfrac{8(1-t^2)}{(t^2+1)^2} = \dfrac{8(1-t)(1+t)}{(t^2+1)^2}$.

Sur $[0\ ;+\infty[$, $1+t$ et $(t^2+1)^2$ sont positifs donc le signe de $f'(t)$ est celui de $1-t$.

t	0		1		$+\infty$
$f'(t)$		+	0	−	
$f(t)$	0	↗	4	↘	

b. D'après le tableau de variation de f, la concentration de l'antibiotique sera maximale au bout d'une heure. La concentration est alors égale à $f(1) = 4$ mg.L^{-1}.

2. a. $f(t) - 2{,}4 = \dfrac{8t}{t^2+1} - \dfrac{2{,}4t^2+2{,}4}{t^2+1} = \dfrac{-2{,}4t^2+8t-2{,}4}{t^2+1}$

b. $\dfrac{0{,}8(3-t)(3t-1)}{t^2+1} = \dfrac{0{,}8(-3t^2+10t-3)}{t^2+1} = \dfrac{-2{,}4t^2+8t-2{,}4}{t^2+1} = f(t) - 2{,}4$.

c. On étudie le signe de $f(t) - 2{,}4$.

t	0		$\frac{1}{3}$		3		$+\infty$
$3-t$		+		+	0	−	
$3t-1$		−	0	+		+	
$f(t)-2{,}4$		−	0	+	0	−	

La concentration est supérieure à sa CMI lorsque $f(t) - 2{,}4$ est positif, c'est-à-dire sur l'intervalle $\left[\frac{1}{3}\ ;3\right]$, la durée est $3 - \frac{1}{3} = \frac{8}{3}\text{h} = 2\ \text{h}\ 40\ \text{min}$.

3. a. $F(t) = 4\ln(t^2+1)$ ($f(t)$ est de la forme $\frac{u'}{u}$)

b. $J = \displaystyle\int_0^{12} f(t)\mathrm{d}t = \left[4\ln(t^2+1)\right]_0^{12} = 4\ln 145$.

c. $m = \dfrac{1}{12}J = \dfrac{4\ln 145}{12} = \dfrac{\ln 145}{3} \approx 1{,}66$ mg.L^{-1}.

99 **1.** $f(-1)=4$; $f'(-1)=-1$.

2. La fonction g est positive sur l'intervalle $[0{,}1\,;5]$ donc l'aire est égale à :

$$\int_1^4 g(x)\mathrm{d}x=\int_1^4\left(\frac{1}{x}+x+1\right)\mathrm{d}x=\left[\ln x+\frac{x^2}{2}+x\right]_1^4=(2\ln 2+12)-\left(\frac{3}{2}\right)=2\ln 2+\frac{21}{2}\ .$$

3. La courbe $\mathscr{C}_1$ est celle de la fonction h, et $\mathscr{C}_2$ celle de H. Ainsi h est négative sur $]0\,;1]$ et positive sur $]1\,;+\infty[$.

Il s'en suit que H est décroissante sur $]0\,;1]$ et croissante sur $]1\,;+\infty[$.

100 Partie A

1. $\mathscr{C}$ passe par A(0 ; 3) donc $f(0)=3$.

2. $f(0)=3 \Leftrightarrow b=3$.

Partie B

1. $f'(x)=(2x-1{,}5)\mathrm{e}^x+\left(x^2-1{,}5x\right)\mathrm{e}^x=\left(x^2+0{,}5x-1{,}5\right)\mathrm{e}^x$.

2. a. $(x-1)(x+1{,}5)=x^2+1{,}5x-x-1{,}5=x^2+0{,}5x-1{,}5$

b. Puisque e^x est strictement positif, $f'(x)$ est du signe de $x^2+0{,}5x-1{,}5$.

x	$-\infty$		$-1{,}5$		1		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+1{,}5$		$-$	0	$+$		$+$	$-$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

c.

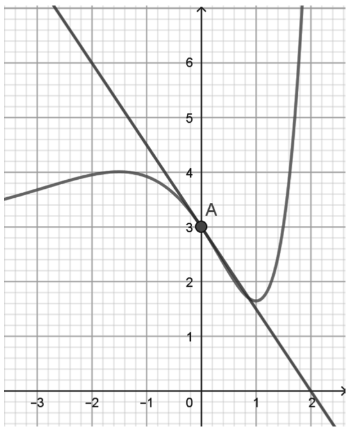
x	$-\infty$		$-1{,}5$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	$3+4{,}5\mathrm{e}^{-1{,}5}$	$\searrow$	$3-\dfrac{e}{2}$	$\nearrow$	

3. $f(0)=3$ et $f'(0)=-1{,}5$ donc T a pour équation $y=-1{,}5x+3$.

4. a.

x	-5	-4	-3	-2	$-1{,}5$	-1	$-0{,}5$	0	$0{,}5$	1	$1{,}5$	2
$f(x)$	3,2	3,4	3,7	3,9	4	3,9	3,6	3	2,2	1,6	3	10,4

b.



Partie C

1. $F'(x)=(2x-3{,}5)e^x+\left(x^2-3{,}5x+3{,}5\right)e^x+3=\left(x^2-1{,}5x\right)e^x+3=f(x)$.

F est bien une primitive de f.

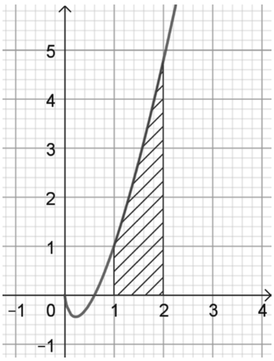
2. La fonction f est positive sur l'intervalle $[0\,;1]$ donc :

$$A=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=[F(x)]_0^1=(e+3)-3{,}5=e-0{,}5\approx 2{,}22.$$

$\boxed{101}$ **1.** $f'(x)=2x\ln x+x^2\times\dfrac{1}{x}=2x\ln x+x=f(x)$.

2. $\mathscr{A}=\displaystyle\int_1^2(2x\ln x+x)\mathrm{d}x=[F(x)]_1^2=4\ln 2\approx 2{,}77$.

3. La fonction f est positive sur l'intervalle $[1\,;2]$ donc $\mathscr{A}$ représente l'aire de la partie du plan limitée par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=2$.



$\boxed{102}$ **1.** $f'(t)=-200\times(-0{,}02)e^{-0{,}02t}=4e^{-0{,}02t}$.

L'exponentielle étant positive, on en déduit que $f'(t)$ est positif pour tout réel positif t. f est croissante sur $[0\,;+\infty[$.

2. $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)=200$.

3. La moitié de la quantité limite d'antidouleur est $200\div 2=100$.

$f(24)\approx 76$, donc le débit de perfusion n'est pas satisfaisant.

4. a. $F(t)=-\dfrac{1}{0{,}02}\left(-200e^{-0{,}02t}\right)+200t=10\,000e^{-0{,}02t}+200t$.

b. $I=\displaystyle\int_0^{10}f(t)\mathrm{d}t=[F(t)]_0^{10}=\left(10\,000e^{-0{,}2}+2000\right)-10\,000=10\,000e^{-0{,}2}-8000$

$I\approx 187{,}3$.

c. $\dfrac{1}{10}\displaystyle\int_0^{10}f(t)\mathrm{d}t\approx 18{,}7$

$\boxed{103}$ **Partie A**

1. a. $-1\le x\le -0{,}8$ ou $0\le x\le 1{,}5$.

b. $-1\le x\le 1{,}5$

2. a. La tangente a pour coefficient directeur : $a=\dfrac{7-1}{2-0}=3$.

Elle a pour équation : $y=3x+1$.

b. $f'(1)=3$.

Partie B

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-2x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 5x=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

2. $f'(x)=-2\mathrm{e}^{-2x}+5$.

Étude du signe de $f'(x)$:

$f'(x)\geq 0 \Leftrightarrow -2\mathrm{e}^{-2x}+5\geq 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-2x}\leq 2{,}5 \Leftrightarrow -2x\leq \ln 2{,}5 \Leftrightarrow x\geq -0{,}5\ln 2{,}5$.

3.

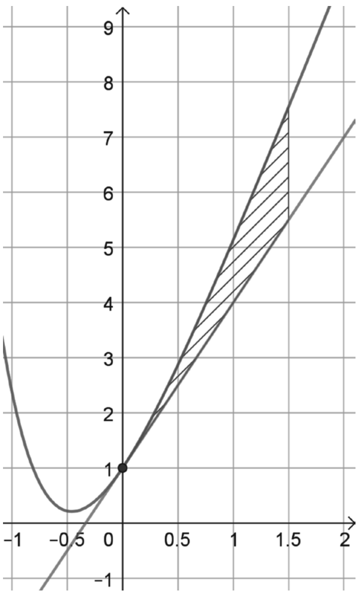
x	$-\infty$		$-0{,}5\ln 2{,}5$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$2{,}5-2{,}5\ln 2{,}5$	$\nearrow$	$+\infty$

4. a. L'équation $f(x)=2$ a deux solutions, l'une inférieure à $-0{,}5\ln 2{,}5$ et l'autre supérieure à $-0{,}5\ln 2{,}5$.

b. Elles ont pour valeurs approchées 0,29 et 0,96.

Partie C

1.



3. a. Soit G une primitive de g. $G(x)=-0{,}5\mathrm{e}^{-2x}+x^2-x$.

b. $\mathcal{A}=\displaystyle\int_0^{1,5}(f(x)-(3x+1))\mathrm{d}x=\int_0^{1,5}\left(\mathrm{e}^{-2x}+2x-1\right)\mathrm{d}x=\int_0^{1,5}g(x)\mathrm{d}x$

c. $\mathcal{A}=\displaystyle\int_0^{1,5}g(x)\mathrm{d}x=[G(x)]_0^{1,5}=\left(-0{,}5\mathrm{e}^{-3}+0{,}75\right)-(-0{,}5)=-0{,}5\mathrm{e}^{-3}+1{,}25\approx 1{,}23$

104 **1.** Partageons en deux triangles, un situé à gauche de la droite d'équation $x = 1$, l'autre à droite. L'aire de celui de gauche vaut environ 0,5, celle de celui de droite environ 2. Donc $\mathcal{A} \approx 2{,}5$.

2. $f(1)=1$ et $f'(1)=0$.

3. $f(x)=\frac{4}{x}-3+4\ln x$ donc $f'(x)=-\frac{4}{x^2}+\frac{4}{x}$.

$f(1)=4-3=1$ et $f'(1)=-4+4=0$ donc f répond aux conditions.

4. $F'(x)=4\ln x+\frac{4x+4}{x}-7=4\ln x+4+\frac{4}{x}-7=\frac{4}{x}-3+4\ln x=f(x)$.

F est bien une primitive de f.

5. $f(3)=4\ln 3-\frac{5}{3}$

$$\mathcal{A}=\int_{0{,}45}^{3}\left(\left(4\ln 3-\frac{5}{3}\right)-f(x)\right)\mathrm{d}x=\left[\left(4\ln 3-\frac{5}{3}\right)x-F(x)\right]_{1{,}45}^{3}\approx 11{,}61-9=2{,}6 \ .$$

105 **1.** $F'(x)=\frac{1}{12}\left(x^2+6-6\ln x\right)+\frac{x}{12}\left(2x-\frac{6}{x}\right)=\frac{x^2}{12}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\ln x+\frac{2x^2}{12}-\frac{1}{2}=\frac{x^2}{4}-\frac{1}{2}\ln x=f(x)$.

2. $I=\int_1^e f(x)\mathrm{d}x=[F(x)]_1^e=\frac{\mathrm{e}^3}{12}-\frac{7}{12}=\frac{\mathrm{e}^3-7}{12}$

Chapitre 12

Equations différentielles

CAPACITÉS
- Vérifier qu'une fonction donnée est solution d'une équation différentielle.
- Déterminer l'ensemble des solutions d'une équation différentielle du type : $y' = ay + b$.
- Déterminer la solution d'une équation différentielle du type : $y' = ay + b$ vérifiant une condition initiale $y(x_0)$ donnée.

Vérifier les acquis de Première et du chapitre 8

1. c **2. c** **3. b** **4. b** **5. d** **6. b** **7. c** **8. b**

Activités

Activité 1 La solution pour découvrir ces nouvelles équations !

1. $f'(x) = 3e^{3x}$ et $f'(x) - 3f(x) = 3e^{3x} - 3e^{3x} = 0$

2. $g'(x) = -6\,e^{3x}$ et $g'(x) - 3g(x) = 0$

3. Réponse **c.** $k(x)$

4. $v'(x) = 3k\,e^{3x}$ et $3k\,e^{3x} - 3k\,e^{3x} = 0$

Activité 2 Sur les traces des solutions

Voir fichier TICE.

Activité 3 Résoudre une équation différentielle par approximations

1. $B(x_A + h\,; f(x_A + h)(h + 1))$

2. Voir fichier TICE.

Activité 4 Désintégration radioactive

Partie 1

1. $N(t) = k\ e^{-\lambda t}$

2. $t = \ln 2/\ \lambda$

Partie 2

1. $N(t) = N_0\ e^{-\lambda t}$

2. Voir fichier TICE Python.

3. $\ln 2\ /9{,}8486\ 10^{-10} = 703$ millions

Exercices

Pour acquérir les automatismes

2 $f'(x) = 8\,e^{-2x}$ et $8\,e^{-2x} + (-8e^{-2x}) = 0$

Les autres solutions sont les fonctions $g(x) = k\,e^{-2x}$

3 $f'(x) = -2\,e^{-x}$ et $f'(x) + f(x) = 0$

4 $f'(x) = 15\,e^{3x} = 3f(x)$ donc $a = 3$

5 **a.** $f(x) = k\,e^{-8x}$ **b.** $f(x) = k\,e^{0,5x}$

6 **a.** $f(x) = k\,e^{-(1/3)x}$ **b.** $f(x) = k\,e^{7x}$

7 **a.** $f(x) = k\,e^{-(2/3)x}$ **b.** $f(x) = k\,e^{-1,5x}$

8 **a.** $f(x) = k\,e^{5x}$ **b.** $f(x) = k\,e^{0,2x}$

9 **a.** $v(t) = k\,e^{-t}$ **b.** $u(r) = k\,e^{-2t}$

10 **a.** $m(x) = k\,e^{4x}$ **b.** $p(x) = k\,e^{2,5x}$

11 **a.** $f(x) = k\,e^{0,25x}$ **b.** $f(x) = k\,e^{-x\sqrt{2}}$

12 **a.** $f(x) = k\,e^{\frac{\pi x}{3}}$ **b.** $f(x) = k\,e^{-\ln 3x}$

13 **a.** $f(x) = k\,e^{-x}$ **b.** $f(x) = k\,e^{0,25x}$

14 $f(x) = k\,e^{-3x} + \dfrac{1}{3}$

15 $f(x) = k\,e^{-0,5x} + 4$

16 $f(x) = k\,e^{-3x} - \dfrac{1}{3}$

17 $f(x) = k\,e^{-x\sqrt{3}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

18 **a.** $f(x) = k\,e^{-2\ln 3x} + \dfrac{1}{2}$ **b.** $f(x) = k\,e^{\frac{x\sqrt{2}}{2}} - 1$

19 **a.** $f(x) = k\,e^{-x} + 2$ **b.** $f(x) = k\,e^{-4x} - \dfrac{1}{2}$

20 **a.** $f(x) = k\,e^{x} - 5$ **b.** $f(x) = k\,e^{x} - 1$

21 **a.** $f(x) = k\,e^{-x} + 7$ **b.** $f(x) = k\,e^{-2x} + 2$

22 **a.** $f(x) = k\,e^{-0,001x} + 1000$ **b.** $f(x) = k\,e^{-(6/5)x} + 5$

23 **a.** $f(x) = k\,e^{x} - e$ **b.** $f(x) = k\,e^{-x} + 9$

24 $f(x) = k\,e^{-(2/3)x} + \dfrac{1}{2}$

25 $f(x) = k\,e^{-2x} + \dfrac{\pi}{2}$

26 **a.** $f(x) = k\,e^{0,5x} - 4$ **b.** $f(x) = k\,e^{-0,5x} + 6$

27 $f(x) = 3\,e^{2,5x} - 0,2$ $f(x) = 4\,e^{2,5x} - 0,2$ $f(x) = 5\,e^{2,5x} - 0,2$

28 $b = -50$

29 $f(x) = k\,e^{x} - 3$ $f(1) = 0$ donc $f(x) = 3\,e^{x-1} - 3$

30 $f(x) = k\,e^{3x}$ $f(1) = 2$ donc $f(\mathrm{x}) = 2e^{3x-3}$

31 $f(x) = k\,e^{-1,5x}$ $f(-1) = -1$ donc $f(x) = -\,e^{-1,5x-1,5}$

32 $v(x) = k\,e^{4x}$ $v(2) = 1$ donc $v(x) = e^{4x-8}$

33 $f(x) = k\,e^{-x\ln 3}$ $f(1) = 1$ donc $f(x) = 3e^{x\ln 3}$

34 $f(x) = k\,e^{0,25x} - 4$ $f(4) = 4$ donc $f(x) = 8e^{0,25x-1} - 4$

35 $f(x) = k\;e^{2x} - \dfrac{3}{2}$ $f(\ln 2) = 1$ donc $f(x) = \dfrac{5}{4}e^{2x-2} - \dfrac{3}{2}$

36 $t(x) = k\,e^{-x} + 7$ $t(0) = 1$ donc $t(x) = -\,6e^{-x} + 7$

37 $f(x) = k\;e^{\frac{x\sqrt{2}}{2}} - 1$ $f(\,\pi\,) = 1$ donc $f(x) = 2\,e^{\frac{-\pi\sqrt{2}}{2}}\;e^{\frac{x\sqrt{2}}{2}} - 1$

38 $f(x) = k\,e^{-2x} - 0,5$ $f'(3) = 1$ donc $f(x) = 1,5e^{-2x+6} - 0,5$

39 $f(x) = k\,e^{-0,5x} + 2$ $f(\ln 2) = 1$ donc $f(x) = -\,0,5\,e^{-0,5x+0,5} + 2$

40 $f(x) = k\,e^{-3x} + 0,5$ $f(-2) = 0$ donc $f(x) = -\,0,5e^{-3x-6} + 0,5$

41 $f(x) = k\,e^{4x} + \dfrac{1}{8}$ $f'(1) = 1$ donc $f(x) = 0,875e^{4x-4} + \dfrac{1}{8}$

Pour commencer

42 $f'(x) = -6\,e^{-2x}$ et $f'(x) + 2f(x) = 0$

43 $f'(x) = 0,5\,e^{0,5x}$ et $f'(x) - 0,5f(x) = 0$

44 $f'(x) = -20\,e^{-10x} = -10f(x)$ et $f'(x) = -10f(x)$

45 $f'(x) = -10e^{2,5x}$ et $f'(x) - 2,5\,f(x) = 0$

46 $f'(x) = 2\,e^{2x-3}$ et $f'(x) - 2f(x) = 0$

47 $f'(x) = e^{-x}$ $a = 1$ l'équation dont f est solution est $y' + y = 0$

48 $f'(x) = -16e^{4x}$ $a = -4$ l'équation dont f est solution est $y' - 4y = 0$

49 $f'(x) = 2e^{2+x}$ $a = -1$ l'équation dont f est solution est $y' - y = 0$

50 $f'(x) = -24e^{-4x+2}$ $a = -4$ l'équation dont f est solution est $y' - 4y = 0$

51 **1. Faux 2. Faux 3. Vrai**

52 $f(x) = ke^{7x}$

53 $f(x) = ke^{2x}$

54 $f(x) = ke^{2x/3}$

55 $f(x) = ke^{(1/3)x}$

56 $f(x) = ke^{-x}$

57 $g(x) = ke^{-12x}$

58 $f(x) = ke^{x}$

59 $x(t) = ke^{-0,4t}$

60 $f(x) = ke^{\ln 4\, x}$

61 $f(x) = Ce^{-kx}$

62 $f(x) = k\,e^{2x}$ $f(-1) = 1$ donc $f(x) = e^{2x+2}$

63 $f(x) = k\,e^{-11x}$ $f(0) = -1$ donc $f(x) = -e^{-11x}$

64 $f(x) = ke^{0,5x}$ $f(2\ln 2) = ke^{\ln 2} = 1$ donc $f(x) = 0,5e^{0,5x}$

65 $f(x) = k\,e^{0,5x}$ $f(0) = 0,5$ donc $f(x) = 0,5e^{0,5x}$

66 $f(x) = k\,e^{-\ln 3x}$ $f(1) = 2$ donc $f(x) = 6e^{-\ln 3x}$

67 $f'(x) = -4ke^{-4x}$ et $f'(x) + 4f(x) = 12$

68 $f'(x) = 0,5\,e^{0,5x}$ et $f'(x) - 0,5f(x) = 1$

69 $f'(x) = -20\,e^{-10x}$ et $f'(x) + 10f(x) = 10$

70 $f'(x) = -10\,e^{2,5x}$ et $f'(x) - 2,5f(x) = 5$

71 $f'(x) = 4\,e^{-2x}$ et $f'(x) + 2f(x) = 10$

72 **1. c 2. b 3. b** $f(x) = -2\,e^{x-1} - 1$ et $f(1) = -3$

73 **1. Vrai 2. Faux 3. Faux 4. Vrai**

74 $f'(x) = e^{-x}$ donc $f'(x) + f(x) = 5$ d'où l'équation dont est solution est : $y' + y = 5$.

75 $f'(x) = -16\,e^{4x}$ l'équation dont f est une solution est $y' - 4y = 8$

76 $f'(x) = 2\,e^{2+x}$ l'équation dont f est une solution est $y' - y = 0,5$

77 $f'(x) = -2e^{-x}$ l'équation dont f est une solution est $y' + y = 1$

78 $f(x) = k\,e^{3x} - (2/3)$

79 $f(x) = k\,e^{-2x} + 1$

80 $f(x) = ke^{2x/3} - 2$

81 $f(x) = k\,e^{-10x} + 0{,}01$

82 $i(x) = k\,e^{-x} + 3{,}5$

83 $m(x) = k\,e^{-4x/3} + 0{,}5$

84 $f(x) = k\,e^{x} + \ln 2$

85 $f(x) = C\,e^{(-k'/k)x} + (1/k')$

86 $f(x) = k\,e^{-0{,}4x} + 2{,}5$

87 $f(x) = k\,e^{-7x} - (1/7)$

88 $f(x) = k\,e^{-0{,}5x} + 40$

89 $f(x) = k\,e^{x2\ln 2} - 1{,}5$

90 $f(x) = Ce^{-kx} + (1/k)$

91 $f(x) = k\,e^{2x} - 1{,}5$ $\quad f(-1) = 1$ donc $f(x) = 2{,}5e^{2x+2} - 1{,}5$

92 $f(x) = k\,e^{-11x} + 1$ $\quad f(0) = -1$ donc $f(x) = -2e^{-11x} + 1$

93 $t(x) = k\,e^{-3x} + (2/3)$ $\quad t(0) = 1$ donc $f(x) = (1/3)e^{-3x} + (2/3)$

94 $f(x) = k\,e^{0{,}5x} - 1$ $\quad f(2\ln 2) = 1$ donc $f(x) = e^{0{,}5x} - 1$

95 $f(x) = k\,e^{-2x} - 3$ $\quad f(0) = 1$ donc $f(x) = 4e^{-2x} - 3$

96 $f(x) = k\,e^{0{,}5x} + 1$ $\quad f(0) = 0{,}5$ donc $f(x) = -\,0{,}5e^{0{,}5x} + 1$

97 $f(x) = k\,e^{-x} + 10^{-2}$ $\quad f(\ln 2) = 1$ donc $f(x) = 1{,}98e^{-x} + 10^{-2}$

98 $f(x) = k\,e^{-\ln 3x} - (5/\ln 3)$ $\quad f(1) = 2$ donc $f(x) = (6 + (15/\ln 3))e^{-\ln 3x} - (5/\ln 3)$

99 $f(x) = k\,e^{-10x} + 0{,}2$ $\quad f(0) = \log 2$ donc $f(x) = (\log 2 - 0{,}2)e^{-10x} + 0{,}2$

100 $v(x) = k\,e^{5x} - 2{,}4$ $\quad v'(0) = 1$ donc $v(x) = 0{,}2e^{5x} - 2{,}4$

Pour s'entraîner

101 **1.** L'équation devient $y' - 2{,}5y = 0$ d'où la solution $h(x) = ke^{2{,}5x}$.
2. $f(2) = ke^{5} = 1$ d'où $k = e^{-5}$ donc $f(x) = e^{-5} \times e^{2{,}5x} = e^{2{,}5x-5}$.
3. $g(0) = 1$ donc $k = 1$ d'où $g(x) = e^{2{,}5x.}$
4. $f'(x) = e^{2{,}5x-5} > 0$ donc f est strictement croissante sur $[-4\,;\,2]$. $g'(x) = 2{,}5e^{2{,}5x} > 0$ donc g est strictement croissante sur $[-4\,;\,2]$.

102 **1.** $f'(x) = k\,e^{-2x}$

2. $f(x) = k\,e^{-2x}$ $f(0) = 1$ donc $f(x) = e^{-2x}$

3. $g(x) = k\,e^{-2x}$ $g'(1) = 2$ donc $g(x) = -e^{-2x+2}$

103 **1. a** **2. c** **3. b** **4. a**

104 **1. Vrai** **2. Vrai** **3. Faux**

105 **1.** $f'(1) - 3f(1) = 0$ donc $f(1) = (1/3)\,f'(1) = 2/3$

2. $f(x) = k\,e^{3x}$ $k = (2/3)\,e^{-3}$

106 $f'(x) = -20\,e^{-4x}$ donc f est solution de l'équation $y' + 4y = 0$

107 **1.** Les solutions de E sont $f(x) = ke^{1,5x}$.

2. Courbe bleue : $f(0) = 4$ donc $k = 4$ et $f(x) = 4e^{1,5x}$.

Courbe orange : $g(0) = -2$ donc $k = -2$ et $g(x) = -2e^{1,5x.}$

108 **1.** $f(0) = 3$ donc $k = 3$

2. $f(x) = 3\,e^{ax}$ $f(1) = 3e^{-2} = 3e^{a}$ donc $a = -2$

3. $y' + 2y = 0$

109 **a.** $f(x) = k\,e^{0,25x}$ **b.** $g(x) = k\,e^{-x}$ **c.** $p(x) = k\,e^{2,5x}$

110 **1.** $f(x) = e^{-3x}$ et $g(x) = 2\,e^{-3x}$

2. $f(x) + g(x) = 3\,e^{-3x}$ est aussi solution de E.

3. Soit $h(x) = kf(x)$ $h'(x) = kf'(x)$ et $h'(x) + 3h(x) = 0$

111 **a.** $f(x) = k\,e^{x} - 3$

b. Courbe rose : $f(x) = e^{x} - 3$ courbe bleue : $g(x) = -2e^{x} - 3$

112 **1.** $y' - 4y = 4$ $f(x) = ke^{4x} - 1$ et $f(0) = 1 = k - 1$ donc $k = 2$ soit $f(x) = 2e^{4x} - 1$.

2. $y' - 5,5y = -2$ $f(x) = ke^{5,5x} + 4/11$ et $f(-2) = -3 = ke^{-11} + 4/11$ donc

$k = \left(-3 - \dfrac{4}{11}\right)e^{11} = \dfrac{-37}{11}e^{11}$

d'où $f(x) = \dfrac{-37}{11}e^{11}e^{5,5x} + \dfrac{4}{11}$

113 **1.** $f(x) = k\,e^{1,25x} - 0,4$

2. $f(0) = 2$ $f(x) = 2,4\,e^{1,25x} - 0,4$

3. $f'(x) = 3\,e^{1,25x} > 0$ donc f est strictement croissante sur $[\,-4\,;\,2]$.

114 **1.** $f'(1) - 2f(1) = 1$ or $f'(1) = 2$ d'où $f(1) = 0,5$.

2. $f(x) = ke^{2x}$ et $f(1) = 0,5 = ke^{2}$ donc $k = 0,5e^{-2}$ et $f(x) = 0,5e^{2x-2}$

115 **1.** $f(x) = k\,e^{0,5x} - 0,5$

2. $f(x) = 1,5\,e^{0,5x} - 0,5$

3. $g(x) = 2\,e^{0,5x} - 0,5$

4. $k'(1) = 1$ $k(x) = 2e^{0,5x-0,5} - 0,5$

116 $a = -2$ $b = 2$

117 $y' + y = 3$

118 $y' - 2\ln 3y = 0$ $f(x) = ke^{2\ln 3x}$ et $f(0) = k$ donc $f(x) = 5e^{2\ln 3x}$.

119 **1.** $f'(1) = 2 + 3f(1) = 2 + 6 = 8$

2. $y = 8(x-1) + 2 = 8x - 6$

3. $f(x) = k\,e^{3x} - (2/3)$ et $f(1) = 2$ donc $k = (8/3)e^{-3}$

120 **1.** $a = -1$ $b = -3$

2. $u(t) = 4 = 2\,e^{t} + 3$ $2e^{t} = 1$ donc $t = -\ln 2$

3. $u'(t) = 2e^{t} > 0$ donc $u(t)$ est strictement croissante sur $[0\,;10]$.

121 $f(x)$ solution de $y' + y = -2$

$g(x)$ solution de $y' = -6y + 4$

$h(x)$ solution de $2y' - 5y - 3 = 0$

$k(x)$ = solution de $y' - 3y = 9$

122 $f(x) = k\,e^{-2x} + 1$ et $f(0) = 3$ donc $k = 2$

123 $f(x) = e^{-0,2x} + 2$ $g(x) = 2\,e^{-0,2x} + 2$

On ne peut pas résoudre l'équation $f(x) = g(x)$ donc les deux courbes n'ont pas de point commun.

124 **1.** $f(x) = k\,e^{2x} - (b/2)$

2. $f(0) = k - b/2 = 1$ donc si $k = 1$ $b = 0$

125 **1.** $f'(x) = -9\,e^{-3x}$

2. $-9a\,e^{-3x} + 3b\,e^{-3x} + b + c = 0$ donc par exemple on peut prendre $a = 1$ $b = 3$ $c = -3$

126 $f(x) = -2\,e^{-x} + 3$ solution de l'équation $y' + y = 3$

127 $N(t) = k\,e^{-t}$ $N(0) = 1$ d'où $N(t) = e^{-t}$

128 $f(x) = k\,e^{-0,1x} + 10$

Courbe bleue : $f(0) = 20$ $k = 10$

Courbe rose : $f(0) = 0$ $k = -10$

Courbe orange : $f(0) = -10$ $k = 30$

129 **1.** $f(x) = k\,e^{-0,05x} + 400$

2. $f(0) = 0$ $k = -400$

3. a. $f'(x) = 20\,e^{-0,05x} > 0$ donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

b. $f(x) = 100 = 400 - 400\,e^{-0,05x}$ $e^{-0,05x} = 0,75$ $x = -\ln 0,75/0,05 = 5,75$

130 $h = -2/3$

131 **1.** $f'(0) = 2 - c$

2. $y = (2-c)x + c$

3. $f(x) = ke^{-x} + 2$ et $f(0) = c$ donc $k = c - 2$

132 **1.** $g(x) = 2e^{-2x}$ donc g est solution de l'équation $y' + 2y = 0$

2. $f'(x) = 0,5 - 4\,e^{-2x}$ $f''(x) = 8e^{-2x}$

3. $f''(x) + 2f'(x) = 1$

133 **1.** $g(t) = ke^{-2x} + 0{,}002\,25$ $g(0) = 0{,}001$ $k = -0{,}001\,25$

2. $f(t) = 1/g(t)$

3. $f'(t) = \dfrac{-2\times 0{,}0025}{(0{,}0045-0{,}0025e^{-2t})^2} < 0$ donc f est décroissante sur $[0\,;+\infty[$

4. $f(0) = 1000$ donc il faut résoudre $f(t) = 500$ et on trouve $t = 0{,}804$ h $= 48{,}24$ minutes

134 **1.** $f(x) = ke^{0{,}5x} - 0{,}5$ $f(0) = 1$ $k = 1{,}5$

2. $a = 6$ $b = -1{,}5$

135 f est solution de l'équation $y' + 3y = 0$

g est solution de $y' + y = 1$

h est solution de l'équation $y' - 2y = 8$

136 **1.** Voir fichier TICE.

2. $f(x) = k\,e^{-x} + 2$

$y = f'(0)x + f(0) = -k\,x + k + 2$ et si $x = 1$ $y = 2$ donc toutes les tangentes ont le point commun M(1 ; 2).

137 **1.** $f(x) = ke^{x} - 1$ et $f'(x) = ke^{x} > 0$ pour $k > 0$

2. $f'(x) = 0 = ke^{x}$ impossible.

138 **1.** $v(t) = \mathrm{k}e^{-10t} + 14$

2. $v(0) = 0$ $k = -14$

3. $\lim\limits_{t\to+\infty} v(t) = 14$

4. $v(t) < 1$ $-14e^{-10t} + 14 < 1$ $t > 7{,}41\ 10^{-3}$

139 **1.** $T(t) = ke^{-0{,}1t} + 80$

2. $T(0) = 240$ $k = 160$

3. $T'(t) = -16e^{-0{,}1t} < 0$ donc T est décroissante.

4. $T(t) = 100$ $160\,e^{-0{,}1t} = 100$ $t = 4{,}7$ Au bout de 4,7 secondes la température atteindra 100°C.

140 **1.** $Q(t) = ke^{-at}$ et $Q(0) = 5$ donc $k = 5$

2. Il faut résoudre $5\,e^{-2a} = 2{,}5$ soit $-2a = \ln 0{,}5$ $a = \ln 2/2$

3. $Q(t) < 1 \Leftrightarrow t > -2\ln 0{,}2/\ln 2$ $t > 4{,}64$ h

141 **1.** $T(t) = C\,e^{-kt} + t_1$

2. $T(0) = 5$ $C = 5 - t_1$

3. $T(t) = (5-t_1)e^{-kt} + t_1$ $T(6) = 70 = (5 - t_1)e^{-6k} + t_1$ $e^{-6k} = \dfrac{70-t_1}{5-t_1}$ $k = \ln\dfrac{70-t_1}{5-t_1}\ /{-6}$

142 **1.** $d(t) = k\,e^{-0{,}086t} + 200$ et $d(0) = 0$ $k = -200$

2. Il faut résoudre $d(t) = 120$ soit $200 - 200e^{-0{,}086t} = 120$ $t = 10{,}65$ années.

Pour faire le point

143 **Vrai**

144 **Vrai**

145 **Vrai**

146 **Vrai**

147 **Faux**

148 **Faux**

149 **Faux**

150 **Faux**

151 **Faux**

152 Réponse **b.**

153 Réponse **c.**

154 Réponse **a.**

155 Réponse **c.**

156 Réponse **a.**

157 Réponse **a.**

158 Réponse **c.**

Pour approfondir

159 **1.** $f(x) = ke^{1,5x} - (4/3)$

2. $f(0) = 1$ donc $k = 7/3$

160 **1. a.** $N(t)= k\,e^{t} + 2$

b. $N(0) = 170$ donc $k = 168$

2. $N(t) = k\,e^{at} + (2/a)$ et $N(6) = 9$ $ke^{6a} = 9 - 2/a$ donc $k = (9-2/a)e^{-6a}$

161 **1.** $f(x) = ke^{-x}$

2. $f(0) = 1$ donc $k = 1$

3. $Vm(f) = \int_2^3 e^{-x}dx = e^{-2} - e^{-3}$

162 **a.** $f(x) = k\,e^{-0,05x} + 0,41$ et $f(0) = 400$ donc $k = 399,59$

b. $f(x) = ke^{-x} + 18$ $f(0) = 1$ $k = -17$

163 **1. a.** $u(t) = k\,e^{(-1/3)t}$

b. $u(0) = 12$ donc $k = 12$

2. $u(t) < 1,2$ pour $t > (\ln 0,1/(-1/3))$ pour $t > 6,9$

3. $Vm(u) = (1/t_1)\int_0^{t_1} u(t)dt = (1/t_1)[-36\,e^{-(1/3)t1} + 36] = 4,7$

4. $W = 7,5\ 10^{-5}\ (144\,e^{(-2/3)t})$

$Wm = 0,5\int_0^2 7,5\ 10^{-5}\ (144\,e^{\frac{-2t}{3}})dt = 0,5[7,5\ 10^{-5}\ (216\,e^{(-2/3)2}) - 7,5\ 10^{-5}\ (216)] = -0,002$

164 $I(t) = ke^{-0,4t}$ et $I(0) = 3$ $k = 3$

165 **1.** $u(t) = k\,e^{\frac{-t}{RC}} + E$

2. $u(0) = 0{,}2\,E \quad k = -0{,}8\,E$

3. $u(1) = 4 = -0{,}8E\ e^{\frac{-1}{RC}} + E$ donc $E = \dfrac{4}{1-0{,}8e^{\frac{-1}{RC}}} = 4$

4. $u(t) = 200 = -80\ \mathrm{e}^{-10000000t} + 100 \qquad t = 2{,}23\ 10^{-8}$

TP Comment fonctionne une bobine RL ?

Partie 1

1. $i(t) = k\mathrm{e}^{-10t} + 0{,}09$

2. $i(0) = 0 \quad k = -0{,}09$

3. $i'(t) = 0{,}9\ \mathrm{e}^{-10t} > 0$ donc $i(t)$ est strictement croissante sur $[0\ ;+\infty[$

4. $Im(t) = 0{,}08955$

Partie 2 $\quad i(t) = -0{,}05\mathrm{e}^{-20t} + 0{,}05$

Partie 3 $\quad U = 1000$

Voir fichier TICE.

Pour l'épreuve du Bac

168 **1.** $S(t) = k\mathrm{e}^{-0{,}01t} + 39$

2. $S(0) = 0{,}12 \quad k = -38{,}88$

3. $S(60) = 17{,}66$

4. $S(t) < 3{,}9$ pour $t < -100 \times \ln(35{,}1/38{,}88) \approx 10{,}2$

169 **1.** L'équation devient $u' + (1/RC)u = 0$

2. $U(t) = k\ \mathrm{e}^{-10t} \quad U(0) = 10$ donc $k = 10$

3. $U(10) = 10\ \mathrm{e}^{-100}$

4. $U(t) = 9{,}5$ pour $t = 5{,}12\ 10^{-3}$

170 **1.** La solution sur $[0\ ;+\infty[$ de l'équation différentielle $y' + 1{,}5y = -52{,}5$ vérifiant la condition initiale $f(0) = 5$ est la fonction définie sur $[0\ ;+\infty[$ par $f(t) = k \times \mathrm{e}^{-1{,}5t} - 35$ telle que

$k\mathrm{e}^0 - 35 = 5 \Leftrightarrow k = 40$

2. $f(0{,}5) = -16{,}11 \qquad f(2) = -33$

3. $f(t) < -24$ pour $t \geq -\ln(0{,}275)/1{,}5 \approx 0\ {,}86$

171 **1.** a $g(x) = k\ \mathrm{e}^{-0{,}035x}$

b. $g(0) = 7$ donc $k = 7$ et le coefficient d'atténuation est 0,035.

2. $g'(x) = -0{,}245\ \mathrm{e}^{-0{,}035x} < 0$ donc g est strictement décroissante sur $[0\ ;+\infty[$

a. $g(100) = 0{,}2114$ donc possibilité de détecter le signal.

b. Il faut résoudre $g(x) < 0{,}08$ soit $t > 127{,}76$ m.

172 **1.** L'équation devient $U' + (1/RC)U = (1\ /RC)\ E$ et $1/RC = 10$

2. a. $U(t) = k\ \mathrm{e}^{-10t} + 10$

b. Si $U(0) = 0$ alors $k = -10$

3. a. Environ 0,3 s.

b. Il faut résoudre $U(t) = 9{,}5 = -10\ e^{-10t} + 10 \quad t = -\ln 0{,}05/10 = 0{,}3$ s.

173 **1.** $g(t) = k\ e^{-0{,}04t} + 20$ et $g(0) = 100$ donc $k = 80$

2. a. $g(30) = 44{,}1$ donc la grand-mère n'a pas bien évalué le temps.

b. Il faut résoudre $g(t) = 37$ soit $t = (-1/0{,}04)\ln(17/80) \approx 38{,}72$

174 **1.** $f(t) = ke^{-0{,}12t}$

2. $f(0) = 100$ donc $k = 100$

3. $f(2) = 79$

4. $f(t) = 80$ pour $t = -\ln(0{,}8)/0{,}12 \approx 1{,}86$

175 **1.** $f(x) = k\ e^{-0{,}12x}$

2. $f(0) = 1013{,}25 = k$

3. $f(0{,}15) = 995{,}18$

4. Il faut résoudre $f(x) = 900$ soit $x = -\ln(900/1013{,}25)/0{,}12 \approx 0{,}988$

176 **1.** $f(t) = k\ e^{-0{,}065t} + 30$

2. $f(0) = 1400$ donc $k = 1370$

3. $f'(t) = -89{,}05\ e^{-0{,}065t} < 0$ donc f est décroissante.

4. Il faut résoudre $f(t) < 650$ soit pour $t > -\ln(62/137)/0{,}065 \approx 12{,}2$

177 **1.** $1/RC = 1{,}25$

2. et 3. $U(t) = ke^{-1{,}25t}$ et $U(0) = 5{,}6 = k$

4. $U'(t) = -7e^{-1{,}25t} < 0$ donc U est décroissante.

5. Il faut résoudre $U(t) = 2{,}072$ et $t = \ln 0{,}37/-1{,}25 = 0{,}8$

178 **1.** En développant.

2. $T(t) = ke^{at} + 20$

3. $T(0) = -18$ d'où $k = -38$ et $T(15) = 1$ d'où $a = -\ln 2/15 = -0{,}046$

4. $T(30) = 10{,}5$ donc inexacte.

Il faut résoudre $T(t) = 15$ soit $t = -15 \times \ln(5/38)/\ln 2 \approx 43{,}9$

Soit 44 minutes.

179 **1.** $f(t) = k\ e^{-0{,}25t}$

2. $f(0) = 54{,}7 = k$

3. $f(31) = 0{,}0236$

180 **1.** $T(h) = k\ e^{0{,}025h}$

2. $T(800) = 2000 = ke^{20}$ donc $k = 2000e^{-20}$

3. a. $T(575) = 5431{,}91$

b. $T'(h) = 0{,}0033\ e^{0{,}025h} > 0$ donc T est strictement croissante.

181 **1.** $f(t) = k\ e^{-0{,}55t} + 22$

2. $f(0) = 0$ donc $k = -22$

3. $t = 1{,}26$ h

4. $f(6) = 21{,}19$ proche de 22 (100%).

182 **1.** $g'(x) = -0{,}035\ g(x)$ et $g(0) = 7$

2. $g'(x) < 0$ donc g est décroissante.

3. $g(100) = 0{,}211$

4. Il faut résoudre $g(t) < 0{,}08$ soit $t > 127{,}76$ km.

183 **Partie A**

1. $f(x) = k\ e^{-x}$

2. $f(0) = -1 = k$

Partie B

1. $h'(x) = 2e^{-x} - (2x-1)e^{-x} = e^{-x}(-2x+3)$ et $h'(x) + h(x) = e^{-x}(2x - 1 + 3 - 2x) = 2e^{-x}$

2. $h'(x) = e^{-x}(-2x+3)$ et $h'(x) = 2e^{-x} - (2x-1)e^{-x}$

3. $h'(x) > 0$ pour $x < 1{,}5$ donc h est croissante sur $[0\ ; 1{,}5[$ et décroissante sur $]1{,}5\ ; +\infty[$

184 **Partie A**

1. $f(x) = ke^{-x}$

2. $f(1) = 1/e = k/e$ donc $k = 1$

Partie B

1. $h'(x) = -e^{-x} - 1$ et $h'(x) + h(x) = g(x)$

2. $h'(x) = -e^{-x} - 1$ et $h'(x) = g(x) - h(x)$

3. $h'(x) < 0$ pour tout x de $[0\ ; +\infty[$ donc h est décroissante sur $[0\ ; +\infty[$

185

1. $f(x) = k\ e^{-mx} + 20$

2. $f(0) = 0$ donc $k = -20$

3. $v(t) = -20\ e^{-0{,}035t} + 20$

4. $v'(t) = 0{,}7\ e^{-0{,}035t} > 0$ donc v est strictement croissante.

186

1. $f(t) = ke^{-0{,}25t}$

2. $f(0) = 54{,}7 = k$

3. $f(19) = 0{,}473$ mg/L.

Chapitre 13

Nombres complexes

CAPACITÉS

• Passer de la forme algébrique à une forme exponentielle et inversement.
• Transformer à l'aide des formules d'addition $a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)$ en $A\cos(\omega t + \varphi)$ et inversement.
• Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes une équation du premier degré ou du type $z^2 = a$ pour a réel.
• Interpréter géométriquement les transformations du type $z \mapsto z + b$, (b étant un nombre complexe quelconque) et $z \mapsto az$ lorsque a est un nombre réel non nul ou un nombre complexe de module 1.

Vérifier les acquis de Première

1. c **2. d** **3. b** **4. a** **5. c** **6. d**

Activités

Activité 1 L'écriture exponentielle d'un nombre complexe non nul

1. $e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i$.

2. $e^{i\frac{5\pi}{6}} = \cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

3. $z = |z|[\cos\theta + i\sin\theta] = |z|e^{i\theta} = re^{i\theta}$.

4. $|z_1| = 2\sqrt{2}$ $\theta_1 = -\frac{\pi}{4}$ $z_1 = 2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$

$|z_2| = 2$ $\theta_2 = -\frac{2\pi}{3}$ $z_2 = 2e^{-i\frac{2\pi}{3}}$

Activité 2 Les formules d'addition et de duplication des sinus et cosinus

1. a. $e^{i\theta'} = \cos\theta' + i\sin\theta'$.

b. $e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = (\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta') + i(\cos\theta\sin\theta' + \cos\theta'\sin\theta)$.

2. $e^{i(\theta+\theta')} = \cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta')$.

3. $\cos(\theta+\theta') = \cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta'$ et $\sin(\theta+\theta') = \cos\theta\sin\theta' + \cos\theta'\sin\theta$.

4. $\cos(\theta-\theta') = \cos(\theta+(-\theta')) = \cos\theta\cos(-\theta') - \sin\theta\sin(-\theta') = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'$ car la fonction cosinus est paire et la fonction sinus est impaire.

$\sin(\theta-\theta') = \sin(\theta+(-\theta')) = \cos\theta\sin(-\theta') + \cos(-\theta')\sin\theta = \sin\theta\cos\theta' - \cos\theta\sin\theta'$.

5. $\cos(2\theta) = \cos(\theta+\theta) = \cos\theta\cos\theta - \sin\theta\sin\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$.

$\sin(2\theta) = \sin(\theta+\theta) = \cos\theta\sin\theta + \cos\theta\sin\theta = 2\sin\theta\cos\theta$.

Remarque : à partir de $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$, on démontre que $\cos(2\theta) = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta$.

Activité 3 Le saut à l'élastique

1. $A\cos(\omega t + \varphi) = A\cos(\omega t)\cos\varphi - A\sin(\omega t)\sin\varphi$.

2. $a\cos(\omega t) = A\cos(\omega t)\cos\varphi$ donc $a = A\cos\varphi$.

$b\sin(\omega t) = -A\sin(\omega t)\sin\varphi$ donc $b = -A\sin\varphi$.

3. $a^2 + b^2 = (A\cos\varphi)^2 + (-A\sin\varphi)^2 = A^2$. Donc $A = \sqrt{a^2+b^2}$.

4. $\cos\varphi = \dfrac{a}{A}$ et $\sin\varphi = \dfrac{-b}{A}$.

5. $|z| = \sqrt{a^2+b^2} = A$. On note $\theta = \arg z$. $\cos\theta = \dfrac{a}{A} = \cos\varphi$ et $\sin\theta = \dfrac{-b}{A} = \sin\varphi$. Donc $\theta = \varphi$.

Conclusion : $A = |z|$ et $\varphi = \arg z$.

6. a. $z = 50 - 20$ i. $|z| = 10\sqrt{29}$ et $\arg z = -0{,}38$ (en radians).

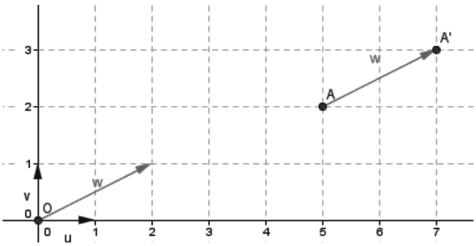
b. $\cos(t - 0{,}38) = \dfrac{1}{\sqrt{29}}$.

$\cos(t - 0{,}38) = \cos(1{,}38)$ donc $t - 0{,}38 = 1{,}38$ donc $t = 1{,}76$.

Valentin aura parcouru 10 mètres au bout de 1,76 secondes.

Activité 4 Les transformations du plan

1. a.

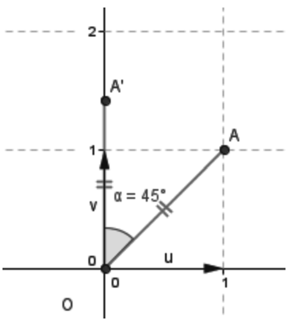


b. $z' = 7 + 3$ i.

c. $z' = z + b$.

d. Utiliser le fichier GeoGebra.

2. a. b.



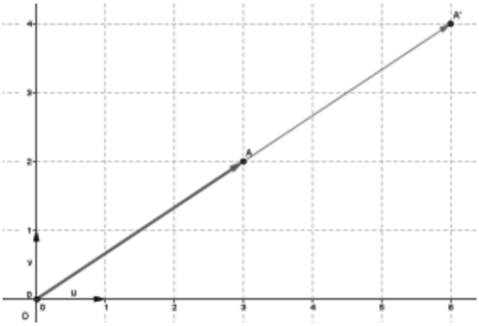
c. $z' = i\sqrt{2}$.

$e^{i\frac{\pi}{4}}(1+i)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(1+i)=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}=i\sqrt{2}$.

d. $z'=e^{i\theta}\times z$.

e. Utiliser le fichier GeoGebra.

3. a. b.



c. $z'=k\times z$.

d. Utiliser le fichier GeoGebra.

Exercices

Pour acquérir les automatismes

2 $-1,\quad i,\quad -i,\quad -1$

3 $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i,\quad \frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2},\quad \frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2},\quad 1$

4 $-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2},\quad -\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2},\quad -\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i,\quad -i$

5 $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i,\quad \frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2},\quad \frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2},\quad i$

6 $-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2},\quad -\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2},\quad -\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i,\quad -i$

7 $2e^{i0},\quad 3e^{i\pi},\quad 1e^{i\frac{\pi}{2}},\quad 6e^{-i\frac{\pi}{2}}$

8 $1e^{i\frac{\pi}{2}},\quad 3e^{-i\frac{\pi}{2}},\quad 5e^{i0},\quad 6e^{i\pi}$

9 $\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}},\quad \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}},\quad \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}},\quad \sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}}$

10 $2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}},\quad 2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}},\quad 4\sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}},\quad 4e^{i\pi}$

11 $2e^{i\frac{\pi}{6}},\quad 2e^{-i\frac{\pi}{6}},\quad 2e^{-i\frac{2\pi}{3}},\quad 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$

12 $2e^{i\frac{\pi}{4}},\quad 2e^{-i\frac{\pi}{4}},\quad 2e^{-i\frac{3\pi}{4}},\quad 2e^{i\frac{3\pi}{4}}$

13 $2e^{i\frac{\pi}{3}},\quad 2e^{-i\frac{\pi}{3}},\quad 2e^{-i\frac{5\pi}{6}},\quad 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$

14 $\cos(\pi+x)=-\cos x \qquad \sin(\pi+x)=-\sin x$

15 $\cos(\pi - x) = -\cos x \qquad \sin(\pi - x) = \sin x$

16 $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$

17 $\cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right) = \cos\frac{\pi}{6}\cos x - \sin\frac{\pi}{6}\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x$

$\sin\left(\frac{\pi}{6} + x\right) = \sin\frac{\pi}{6}\cos x + \sin x\cos\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x$

18 $\cos^2\frac{\pi}{12} = \frac{1}{2}\left(1 + \cos\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$

$\sin^2\frac{\pi}{12} = \frac{1}{2}\left(1 - \cos\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{2-\sqrt{3}}{4}$

$0 < \frac{\pi}{12} < \frac{\pi}{2}$ donc $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$ et $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$.

19 $\cos^2\frac{5\pi}{12} = \frac{1}{2}\left(1 + \cos\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{2-\sqrt{3}}{4}$

$\sin^2\frac{5\pi}{12} = \frac{1}{2}\left(1 - \cos\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$

$0 < \frac{5\pi}{12} < \frac{\pi}{2}$ donc $\cos\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$ et $\sin\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$.

20 $F(x) = 2\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin(2x)\right) + 5x = x + \frac{1}{2}\sin(2x) + 5x = 6x + \frac{1}{2}\sin(2x)$

21 $F(x) = 3\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin(2x)\right) - 2x = \frac{3}{2}x - \frac{3}{4}\sin(2x) - 2x = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}\sin(2x)$

22 $F(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin(2x) + x^2 - 3x = x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{1}{4}\sin(2x)$

23 $F(x) = x^3 - 2\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin(2x)\right) = x^3 - x + \frac{1}{2}\sin(2x)$

24 C'est la translation de vecteur $\vec{w}$ d'affixe 2.

25 C'est l'homothétie de centre O et de rapport 2.

26 $|i| = 1$ et $\arg i = \frac{\pi}{2}$. C'est la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

27 $z' = 1 + i + 2 + 3\,i = 3 + 4\,i$.

28 $z' = 2 + 2\,i + 1 - 2\,i = 3$

29 $z' = 3\,(2 + 4\,i) = 6 + 12\,i$

30 $z' = 2\,(1 - 2\,i) = 2 - 4\,i$

31 $z' = e^{-i\frac{\pi}{2}} \times (1-i) = -i(1-i) = -i + i^2 = -1 - i$

32 $z' = e^{i\frac{\pi}{2}} \times (2-i) = i(2-i) = 2i - i^2 = 1 + 2i$

Pour commencer

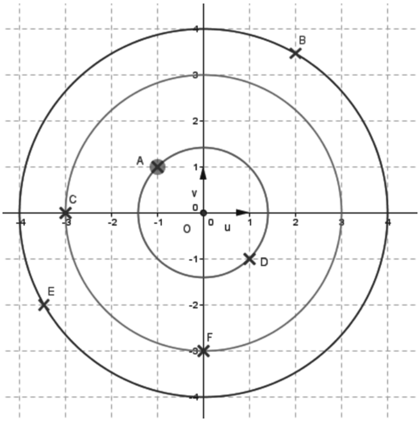
33 **1.** $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$.

2. $z=(r\cos\theta)+i\,(r\sin\theta)$.

34 **a.** $\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ **b.** $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$ **c.** 5 i **d.** – 4 **e.** $-\frac{\sqrt{6}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$ **f.** $i\sqrt{3}$

35 **a.** 2 + 2 i **b.** $-4\sqrt{3}-4i$ **c.** – 6 i **d.** – 4 i **e.** $-\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ **f.** 1

36 **1.**



$z_A=\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$, $z_B=4e^{i\frac{\pi}{3}}$, $z_C=3e^{i\pi}$, $z_D=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$, $z_E=4e^{-i\frac{5\pi}{6}}$, $z_F=3e^{-i\frac{\pi}{2}}$

2. $z_A=-1+i$, $z_B=2+2i\sqrt{3}$, $z_C=-3$, $z_D=1-i$, $z_E=-2\sqrt{3}-2i$, $z_F=-3i$

37 **a.** $-5\sqrt{3}+5i$ **b.** $-4\sqrt{2}-4i\sqrt{2}$ **c.** $\frac{21\sqrt{2}}{2}+i\frac{21\sqrt{2}}{2}$ **d.** $24i$ **e.** $\sqrt{3}+i\sqrt{3}$ **f.** 10

38 **a.** $z=1+\mathrm{i}$. $|z|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$.

On note $\theta=\arg(z)$. $\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}=\sin\theta$. Donc $\theta=\frac{\pi}{4}$.

$z=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

b. $z=-2\mathrm{i}$. $|z|=\sqrt{0^2+(-2)^2}=2$.

On note $\theta=\arg(z)$. $\cos\theta=\frac{0}{2}=0$ et $\sin\theta=-\frac{2}{2}=-1$. Donc $\theta=-\frac{\pi}{2}$.

$z=2e^{-i\frac{\pi}{2}}$.

c. $z=-5$. $|z|=\sqrt{(-5)^2+0^2}=5$.

On note $\theta=\arg(z)$. $\cos\theta=-\frac{5}{5}=-1$ et $\sin\theta=\frac{0}{5}=0$. Donc $\theta=\pi$.

$z=5e^{i\pi}$.

d. $z=-\sqrt{3}-i$. $|z|=\sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2+(-1)^2}=\sqrt{4}=2$.

On note $\theta=\arg(z)$. $\cos\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\theta=-\frac{1}{2}$. Donc $\theta=-\frac{5\pi}{6}$.

$z=2e^{-i\frac{5\pi}{6}}$.

e. $z=-2+2\mathrm{i}$. $|z|=\sqrt{(-2)^2+2^2}=\sqrt{4\times2}=2\sqrt{2}$.

On note $\theta=\arg(z)$. $\cos\theta=-\frac{2}{2\sqrt{2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\theta=\frac{2}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. Donc $\theta=\frac{3\pi}{4}$.

$z = 2\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$.

f. $z = -1 + i\sqrt{3}$. $|z| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$.

On note $\theta = \arg(z)$. $\cos\theta = -\dfrac{1}{2}$ et $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Donc $\theta = \dfrac{2\pi}{3}$.

$z = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

39 **1.** $z = 2\sqrt{3}e^{i\frac{5\pi}{6}}$

2. a. $2\sqrt{3}e^{-i\frac{5\pi}{6}}$ **b.** $2\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{6}}$ **c.** $2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$

40 **1. Faux** $z_1 \times z_2 = 6\sqrt{2}e^{-i\frac{7\pi}{12}}$

2. Vrai $z_1 \times z_3 = 6\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

3. Faux $\dfrac{z_1}{z_3} = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}}$

4. Vrai $z_2 \times {z_3}^2 = 8e^{i\frac{2\pi}{3}}$

41 **a.** $4\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{3}}$ **b.** $16e^{-i\frac{2\pi}{3}}$ **c.** $3e^{-i\frac{\pi}{8}}$ **d.** $1e^{i\frac{4\pi}{5}}$

42 **a.** $\dfrac{3}{5}e^{i\frac{5\pi}{12}}$ **b.** $\dfrac{5\sqrt{3}}{3}e^{i\pi}$ **c.** $\dfrac{\sqrt{3}}{3}e^{i\frac{7\pi}{12}}$ **d.** $5\sqrt{3}e^{-i\frac{3\pi}{4}}$

43 **a.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{5\pi}{12}}$ **b.** $\dfrac{1}{2}e^{-i\frac{5\pi}{6}}$ **c.** $1e^{-i\frac{\pi}{3}}$ **d.** $2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$

44 $\cos(\theta - \theta') = \cos(\theta + (-\theta')) = \cos\theta\cos(-\theta') - \sin\theta\sin(-\theta') = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'$ car la fonction cosinus est paire et la fonction sinus est impaire.

45 **1.** $\cos\dfrac{7\pi}{12} = \cos\left(\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\pi}{4}\right) = \cos\dfrac{\pi}{3}\cos\dfrac{\pi}{4} - \sin\dfrac{\pi}{3}\sin\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2} \times \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$

$\sin\dfrac{7\pi}{12} = \sin\left(\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\pi}{4}\right) = \sin\dfrac{\pi}{3}\cos\dfrac{\pi}{4} + \sin\dfrac{\pi}{4}\cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \times \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$

2. $\dfrac{5\pi}{12} = \pi - \dfrac{7\pi}{12}$

$\cos\dfrac{5\pi}{12} = -\cos\dfrac{7\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ et $\sin\dfrac{5\pi}{12} = \sin\dfrac{7\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$

46 **a.** $\cos\left(\dfrac{\pi}{6} - x\right) = \cos\dfrac{\pi}{6}\cos x + \sin\dfrac{\pi}{6}\sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos x + \dfrac{1}{2}\sin x$

b. $\sin\left(\dfrac{\pi}{6} - x\right) = \sin\dfrac{\pi}{6}\cos x - \sin x\cos\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2}\cos x - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x$

c. $\cos\left(\dfrac{\pi}{4} + x\right) = \cos\dfrac{\pi}{4}\cos x - \sin\dfrac{\pi}{4}\sin x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos x - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin x$

d. $\sin\left(\dfrac{\pi}{4} + x\right) = \sin\dfrac{\pi}{4}\cos x + \sin x\cos\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos x + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin x$

47 **1.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \cos\dfrac{\pi}{4} = \cos\left(2 \times \dfrac{\pi}{8}\right) = 2\cos^2\dfrac{\pi}{8} - 1$

Donc $\cos^2\dfrac{\pi}{8} = \dfrac{2 + \sqrt{2}}{4}$. On obtient alors $\cos\dfrac{\pi}{8} = \dfrac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$ car $0 < \dfrac{\pi}{8} < \dfrac{\pi}{2}$.

$\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\cos\dfrac{\pi}{4}=\cos\left(2\times\dfrac{\pi}{8}\right)=1-2\sin^2\dfrac{\pi}{8}$

Donc $\sin^2\dfrac{\pi}{8}=\dfrac{2-\sqrt{2}}{4}$. On obtient alors $\sin\dfrac{\pi}{8}=\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ car $0<\dfrac{\pi}{8}<\dfrac{\pi}{2}$.

2. $\dfrac{3\pi}{8}=\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{\pi}{4}$

$$\cos\frac{3\pi}{8}=\cos\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{8}\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

$\dfrac{5\pi}{8}=\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{\pi}{2}$

$$\cos\frac{5\pi}{8}=\cos\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\frac{\pi}{8}=-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

$\dfrac{7\pi}{8}=\pi-\dfrac{\pi}{8}$

$$\cos\frac{7\pi}{8}=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{8}\right)=-\cos\frac{\pi}{8}=-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

3. $\cos^2\dfrac{\pi}{8}+\cos^2\dfrac{3\pi}{8}+\cos^2\dfrac{5\pi}{8}+\cos^2\dfrac{7\pi}{8}=\dfrac{2+\sqrt{2}}{4}+\dfrac{2-\sqrt{2}}{4}+\dfrac{2-\sqrt{2}}{4}+\dfrac{2+\sqrt{2}}{4}=\dfrac{8}{4}=2$

$\boxed{48}$ **1.** On pose $z=\sqrt{3}+i$

$|z|=\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+1^2}=\sqrt{4}=2=A$.

On note $\theta=\arg(z)$. $\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\theta=\dfrac{1}{2}$. Donc $\theta=\dfrac{\pi}{6}=\varphi$.

De plus $\omega=1$.

Donc $f(t)=2\cos\left(t+\dfrac{\pi}{6}\right)$.

2. $f(t)=1$ devient $2\cos\left(t+\dfrac{\pi}{6}\right)=1$, soit $\cos\left(t+\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{1}{2}$.

On sait que $\dfrac{1}{2}=\cos\dfrac{\pi}{3}$.

L'équation à résoudre s'écrit alors : $\cos\left(t+\dfrac{\pi}{6}\right)=\cos\dfrac{\pi}{3}$.

On obtient alors : $\begin{cases} t+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{3}+2k\pi \\ t+\dfrac{\pi}{6}=-\dfrac{\pi}{3}+2k\pi \end{cases}$ où $k\in\mathbb{Z}$ d'où : $\begin{cases} t=\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{6}+2k\pi \\ t=-\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{6}+2k\pi \end{cases}$ où $k\in\mathbb{Z}$

soit $\begin{cases} t=\dfrac{\pi}{6}+2k\pi \\ t=-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi \end{cases}$ où $k\in\mathbb{Z}$.

En prenant $k=0$, on obtient alors les deux solutions appartenant à $]-\pi\,;\pi]$ qui sont $-\dfrac{\pi}{2}$ et $\dfrac{\pi}{6}$.

L'ensemble des solutions est : $S=\left\{-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{6}\right\}$.

$\boxed{49}$ **1.** $z=1+i\sqrt{3}$

$A=|z|=2$ et $\varphi=\arg z=\frac{\pi}{3}$

$f(t)=2\cos\left(t+\frac{\pi}{3}\right)$

2. $2\cos\left(t+\frac{\pi}{3}\right)=2$ donne $\cos\left(t+\frac{\pi}{3}\right)=1=\cos 0$.

On obtient alors : $t+\frac{\pi}{3}=0+2k\pi$ où $k\in\mathbb{Z}$ d'où : $t=-\frac{\pi}{3}+2k\pi$ où $k\in\mathbb{Z}$

En prenant $k=0$, on obtient alors la solution appartenant à $]-\pi\,;\pi]$ qui est $-\frac{\pi}{3}$.

L'ensemble des solutions est : $S=\left\{-\frac{\pi}{3}\right\}$.

$\boxed{50}$ **1.** $z=1-i$

$A=|z|=\sqrt{2}$ et $\varphi=\arg z=-\frac{\pi}{4}$

$f(t)=\sqrt{2}\cos\left(3t-\frac{\pi}{4}\right)$

2. $\sqrt{2}\cos\left(3t-\frac{\pi}{4}\right)=1$ donne $\cos\left(3t-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}=\cos\frac{\pi}{4}$.

On obtient alors : $\begin{cases}3t-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}+2k\pi\\ 3t-\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{4}+2k\pi\end{cases}$ où $k\in\mathbb{Z}$ d'où : $\begin{cases}t=\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3}\\ t=\frac{2k\pi}{3}\end{cases}$ où $k\in\mathbb{Z}$

On obtient alors les solutions appartenant à $]-\pi\,;\pi]$ qui sont $-\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$, 0, $\frac{2\pi}{3}$, $-\frac{2\pi}{3}$.

L'ensemble des solutions est : $S=\left\{-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{6}\,;\frac{5\pi}{6}\,;0\,;\frac{2\pi}{3}\,;-\frac{2\pi}{3}\right\}$.

$\boxed{51}$ $f(t)=3\cos(2t)\cos\frac{\pi}{3}-3\sin(2t)\sin\frac{\pi}{3}=\frac{3}{2}\cos(2t)-\frac{3\sqrt{3}}{2}\sin(2t)$.

$\boxed{52}$ $f(t)=2\cos(3t)\cos\frac{5\pi}{6}+2\sin(3t)\sin\frac{5\pi}{6}=-\sqrt{3}\cos(3t)+\sin(3t)$

$\boxed{53}$ $f(t)=\sqrt{3}\cos t\cos\frac{\pi}{4}+\sqrt{3}\sin t\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{6}}{2}\cos t+\frac{\sqrt{6}}{2}\sin t$

$\boxed{54}$ $f(t)=4\sin t\cos\frac{3\pi}{4}-4\sin\frac{3\pi}{4}\cos t=-2\sqrt{2}\sin t-2\sqrt{2}\cos t$

$\boxed{55}$ **1.** $\cos(2\theta)=2\cos^2\theta-1$ donc $2\cos^2\theta=1+\cos(2\theta)$ d'où $\cos^2\theta=\frac{1}{2}(1+\cos(2\theta))$.

2. $\cos(2\theta)=1-2\sin^2\theta$ donc $2\sin^2\theta=1-\cos(2\theta)$ d'où $\sin^2\theta=\frac{1}{2}(1-\cos(2\theta))$.

$\boxed{56}$ $\cos^2\frac{\pi}{12}=\frac{1}{2}\left(1+\cos\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{2+\sqrt{3}}{4}$

$0<\frac{\pi}{12}<\frac{\pi}{2}$ donc $\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$

$\sin^2\frac{\pi}{12}=\frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{2-\sqrt{3}}{4}$

$0<\frac{\pi}{12}<\frac{\pi}{2}$ donc $\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$

57 **1.** $\cos^2\frac{11\pi}{12}=\frac{1}{2}\left(1+\cos\frac{11\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{2+\sqrt{3}}{4}$

$\sin^2\frac{11\pi}{12}=\frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{11\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{2-\sqrt{3}}{4}$

2. $\frac{\pi}{2}<\frac{11\pi}{12}<\pi$ donc $\cos\frac{11\pi}{12}=-\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$ et $\sin\frac{11\pi}{12}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$

3. $\cos\left(-\frac{11\pi}{12}\right)=\cos\frac{11\pi}{12}=-\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$ et $\sin\left(-\frac{11\pi}{12}\right)=-\sin\frac{11\pi}{12}=-\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$

58 $\cos^2\theta=\frac{1}{2}(1+\cos(2\theta))=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(2\theta)$

Une primitive de la fonction $f(\theta)=\cos^2(2\theta)$ sur $\mathbb{R}$ est la fonction $F(\theta)=\frac{1}{2}\theta+\frac{1}{4}\sin(2\theta)$.

59 **a.** $F(x)=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin(2x)-6x=-\frac{11}{2}x-\frac{1}{4}\sin(2x)$.

b. $F(x)=2\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin(2x)\right)-8x=-7x+\frac{1}{2}\sin(2x)$.

60 **a.** $F(x)=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin(2x)+x^2-4x=x^2-\frac{9}{2}x-\frac{1}{4}\sin(2x)$.

b. $f(x)=3x^2-4(\cos^2x+\sin^2x)=3x^2-4$

$F(x)=x^3-4x$

61 $F(x)=3\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin(2x)\right)-x^2-7x+\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin(2x)=-x^2-5x+\frac{1}{2}\sin(2x)$.

62 $f(x)=3\left(\sin^2x+\cos^2x\right)+x=3+x$.

$F(x)=\frac{1}{2}x^2+3x$.

63 $f(x)=8(\cos^2x+\sin^2x)=8$ donc $F(x)=8x$.

64 $F(x)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin(2x)-x+k=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin(2x)+k$ où k est une constante réelle à déterminer.

$F(0)=2$ donne $k=2$.

D'où $F(x)=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin(2x)+2$.

65 Une primitive de $x\mapsto\sin^2x$ est $x\mapsto\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin(2x)$.

Donc une primitive de $x\mapsto 2\sin^2x$ est $x\mapsto x-\frac{1}{2}\sin(2x)$.

Une primitive de $x\mapsto 4$ est $x\mapsto 4x$.

Les primitives de la fonction f sont les fonctions F telles que : $F(x)=x-\frac{1}{2}\sin(2x)-4x+k$ où k est une constante réelle à déterminer.

D'où $F(x)=-\frac{1}{2}\sin(2x)-3x+k$.

De plus, $F(\pi)=0$ donne $-\frac{1}{2}\sin(2\pi)-3\pi+k=0$, soit $k=3\pi$.

La primitive, sur $\mathbb{R}$, de la fonction f qui s'annule en π est la fonction F telle que :

$F(x)=-\frac{1}{2}\sin(2x)-3x+3\pi$.

66 $F(x)=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin(2x)+\frac{1}{2}x^2-2x+k=\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{2}x+\frac{1}{4}\sin(2x)+k$ où k est une constante réelle à déterminer.

$F(0)=0$ donne $k=0$.

Donc $F(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{2}x+\frac{1}{4}\sin(2x)$.

67 $F(x)=x^3-x+\frac{1}{2}\sin(2x)+k$ où k est une constante réelle à déterminer.

$F(0)=0$ donne $k=0$.

Donc $F(x)=x^3-x+\frac{1}{2}\sin(2x)$.

68 **1.** C'est la translation de vecteur $\vec{w}$ d'affixe b.

2. C'est l'homothétie de centre O et de rapport a.

3. C'est la rotation de centre O et d'angle θ où $\theta=\arg a$.

69 C'est la translation de vecteur $\vec{w}$ d'affixe 2 + 3 i.

70 C'est l'homothétie de centre O et de rapport – 5.

71 C'est la rotation de centre O et d'angle $\theta=-\frac{\pi}{6}$.

72 C'est la translation de vecteur $\vec{w}$ d'affixe – 4 – i.

73 C'est l'homothétie de centre O et de rapport 4.

74 C'est la rotation de centre O et d'angle $\theta=-\frac{3\pi}{2}$.

75 $z'=3+5i-4-2i=-1+3i$.

76 L'écriture complexe de cette translation qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M′ d'affixe z' est : $z'=z-1-3$ i.

Avec $z=4-3$ i, on obtient $z'=4-3$ i $-1-3$ i $=3-6$ i.

M′, image de M d'affixe $z=4-3$ i par cette translation a pour affixe $z'=3-6$ i.

77 $z'=5(4+8i)=20+40i$.

78 $z'=\frac{1}{2}(4-2i)=2-i$.

79 $z'=e^{-i\frac{\pi}{3}}(\sqrt{3}-i)=\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(\sqrt{3}-i)=-2i$.

80 $z'=e^{-i\frac{5\pi}{6}}(2-2i\sqrt{3})=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)(2-2i\sqrt{3})=-2\sqrt{3}+2i$.

81 **1.** Cette équation a une seule solution.

2. $z=-\frac{b}{a}$.

82 **a.** $z=-4-2i$. **b.** $z=3-5i$. **c.** $z=2i$.

83 **a.** $3z=6+3i$ donc $z=\dfrac{6+3i}{3}=2+i$.

b. $iz=-1+i$ donc $z=\dfrac{(-1+i)(-i)}{i(-i)}=1+i$.

c. $(-1+2i)z=-1$ donc $z=\dfrac{-1(-1-2i)}{(-1+2i)(-1-2i)}=\dfrac{1}{5}+\dfrac{2}{5}i$.

84 **a.** $(-2+3i)z=-2-5i$ donc $z=\dfrac{(-2-5i)(-2-3i)}{(-2+3i)(-2-3i)}=-\dfrac{11}{13}+\dfrac{16}{13}i$.

b. $z+2-i=0$ ou $2z-4+6i=0$.

Donc $z=-2+i$ ou $z=\dfrac{4-6i}{2}=2-3i$.

c. $z+1=(2-i)z-(2-i)$

donc $(-2+i+1)z=-2+i-1$

donc $(-1+i)z=-3+i$

donc $z=\dfrac{(-3+i)(-1-i)}{(-1+i)(-1-i)}=2+i$.

85 **1.** $z^2=\left(\sqrt{a}\right)^2$ donne $z=\sqrt{a}$ ou $z=-\sqrt{a}$.

2. $z^2=0$ donne $z=0$.

3. $z^2=\left(i\sqrt{-a}\right)^2$ donne $z=i\sqrt{-a}$ ou $z=-i\sqrt{-a}$.

86 **a.** $z=\sqrt{2}$ ou $z=-\sqrt{2}$.

b. $z=\sqrt{16}=4$ ou $z=-\sqrt{16}=-4$.

c. $z=\sqrt{64}=8$ ou $z=-\sqrt{64}=-8$.

d. $z=\sqrt{4}=2$ ou $z=-\sqrt{4}=-2$.

87 **a.** $z^2=(3i)^2$ donne $z=3i$ ou $z=-3i$.

b. $z^2=\left(2i\sqrt{3}\right)^2$ donne $z=2i\sqrt{3}$ ou $z=-2i\sqrt{3}$.

c. $z^2=-16=(4i)^2$ donne $z=4i$ ou $z=-4i$.

d. $z^2=\left(\dfrac{5}{2}i\right)^2$ donne $z=\dfrac{5}{2}i$ ou $z=-\dfrac{5}{2}i$.

88 **a.** $z^2=\left(i\sqrt{5}\right)^2$ donne $z=i\sqrt{5}$ ou $z=-i\sqrt{5}$.

b. $z^2=\left(2\sqrt{2}\right)^2$ donne $z=2\sqrt{2}$ ou $z=-2\sqrt{2}$.

c. $z^2=(3i)^2$ donne $z=3i$ ou $z=-3i$.

d. $z^2=25$ donne $z=5$ ou $z=-5$.

Pour s'entraîner

89 **1.** Réponse **d** **2.** $-\dfrac{29\pi}{84}$ **3.** Réponse **a** **4.** Réponse **d**

90 **1. Vrai**

2. Faux $\dfrac{z_1}{z_2}=3e^{-i\frac{11\pi}{12}}$.

3. Vrai

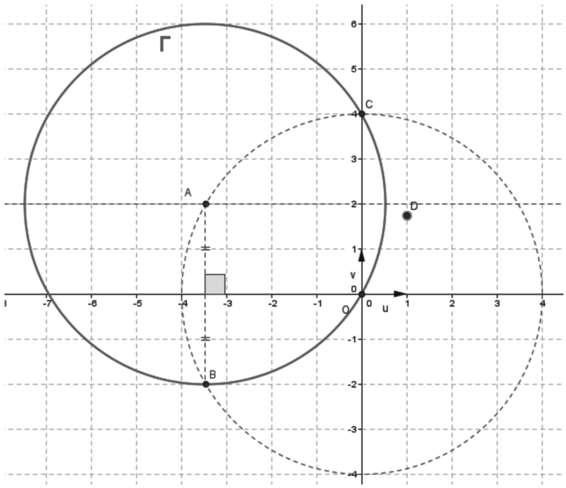
4. Faux $\arg z = -\dfrac{3\pi}{4}$.

91 **1.** $z_A = 4e^{i\frac{5\pi}{6}}$ $\quad z_B = 4e^{-i\frac{5\pi}{6}}$

2. a. $|4i + 2\sqrt{3} - 2i| = |2\sqrt{3} + 2i| = 4$ donc $C \in \Gamma$.

b. $|z_M - z_A| = 4$ donne $AM = 4$. Γ est le cercle de centre A et de rayon 4.

c.



3. a. $z_D = 1 + i\sqrt{3}$.

b. A, B, C et D ne sont pas alignés.

92 **1.** Réponse **c** **2.** Réponse **b** **3.** Réponse **a** **4.** Réponse **d**
5. Réponse **c** **6.** Réponse **d**

93 **1.** $|z_B| = \sqrt{(4\sqrt{3})^2 + 4^2} = \sqrt{64} = 8$.

On note $\theta_B = \arg(z_B)$. $\cos\theta_B = \dfrac{4\sqrt{3}}{8} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\theta_B = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2}$. Donc un argument de z_B est $\dfrac{\pi}{6}$.

Une forme exponentielle de z_B est $z_B = 8e^{i\frac{\pi}{6}}$.

2. $z_C = \overline{z_B}$. Deux nombres complexes conjugués ont même module mais des arguments opposés. Il est donc inutile de calculer le module et un argument de z_C.

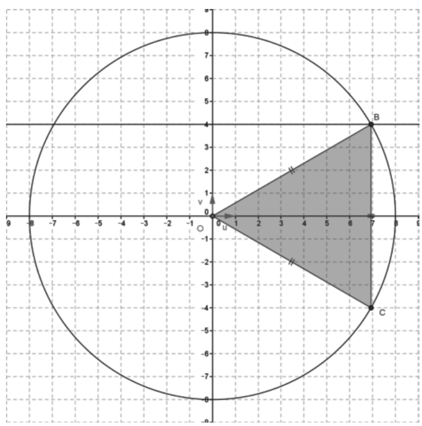
On obtient : $z_C = 8e^{-i\frac{\pi}{6}}$.

3. $|z_B| = 8$, donc $OB = 8$. Le point B appartient au cercle de centre O et de rayon 8.

La partie imaginaire de z_B est égale à 4, donc le point B appartient à la droite d'équation $y = 4$.

Le cercle de centre O et de rayon 8 et la droite d'équation $y = 8$ ont deux points communs. Mais la partie réelle de z_B est positive, d'où la position de B sur le graphique.

Enfin, $z_C = \overline{z_B}$. Donc C est le symétrique de B par rapport à l'axe des réels (ou axe des abscisses).

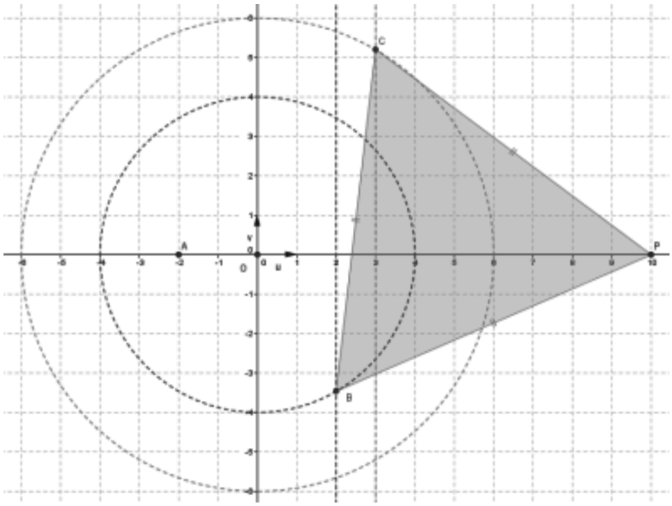


4. $OB = |z_B| = 8$; $OC = |z_C| = 8$.

BC = $|z_C - z_B| = \left|4\sqrt{3} - 4i - \left(4\sqrt{3} + 4i\right)\right| = |-8\,i| = 8$.

OB = OC = BC, donc le triangle OBC est équilatéral.

94 **1.**



2. $z_B = 4e^{-i\frac{\pi}{3}}$ et $z_C = 6e^{i\frac{\pi}{3}}$.

3. Voir la figure.

Pour le point B, on prendra le point d'intersection du cercle de centre O et de rayon 4 avec la droite d'équation $x = 2$ et d'ordonnée négative.

Pour le point C, on prendra le point d'intersection du cercle de centre O et de rayon 6 avec la droite d'équation $x = 3$ et d'ordonnée positive.

4. BC $= |z_C - z_B| = |1 + 5i\sqrt{3}| = 2\sqrt{19}$.

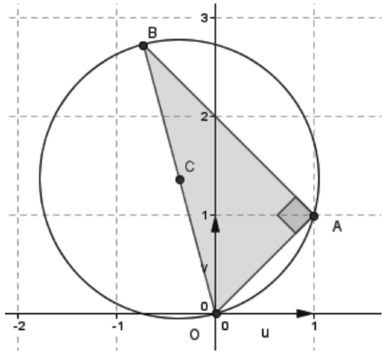
CP $= |z_P - z_C| = |7 - 3i\sqrt{3}| = 2\sqrt{19}$.

PB $= |z_B - z_P| = |-8 - 2i\sqrt{3}| = 2\sqrt{19}$.

BC = CP = PB donc le triangle BCP est équilatéral.

95 **1. a.** $|a| = \sqrt{2}$ et $\arg a = \dfrac{\pi}{4}$. $|b| = 2\sqrt{2}$ et $\arg b = \dfrac{7\pi}{12}$.

b.



2. a. OA $= |a| = \sqrt{2}$ OB $= |b| = 2\sqrt{2}$ et AB $= |b - a| = |-\sqrt{3} + i\sqrt{3}| = \sqrt{6}$.

OA^2 + AB^2 = OB^2. D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle OAB est rectangle en A.

b. Soit C le centre du cercle circonscrit au triangle OAB, C est alors le milieu du segment [OB].

On note c l'affixe de ce point C.

$c=\frac{b}{2}=\frac{1-\sqrt{3}}{2}+i\frac{1+\sqrt{3}}{2}$.

Soit r le rayon de ce cercle. $r=\frac{OB}{2}=\sqrt{2}$.

96 **1.** $|z_1|=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$.

On note $\theta_1=\arg(z_1)$. $\cos\theta_1=\frac{2}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}=\sin\theta_1$. Donc $\theta_1=\frac{\pi}{4}$.

$z_1=2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

$|z_2|=\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}=2$.

On note $\theta_2=\arg(z_2)$. $\cos\theta_2=\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\theta_2=-\frac{1}{2}$. Donc $\theta_2=-\frac{\pi}{6}$.

$z_2=2e^{-i\frac{\pi}{6}}$.

2. $\frac{z_1}{z_2}=\frac{2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}{2e^{-i\frac{\pi}{6}}}=\frac{2\sqrt{2}}{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)}=\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{12}}$.

3. $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\sqrt{2}$ et $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\frac{5\pi}{12}$.

4. $\frac{z_1}{z_2}=\frac{(2+2i)(\sqrt{3}+i)}{(\sqrt{3}-i)(\sqrt{3}+i)}=\frac{2\sqrt{3}+2i+2i\sqrt{3}+2i^2}{(\sqrt{3})^2+1^2}=\frac{2\sqrt{3}-2}{4}+\mathrm{i}\frac{2+2\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}+1}{2}$.

5. $\frac{5\pi}{12}$ est un argument de $\frac{z_1}{z_2}$.

Donc $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)=\frac{Re\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}{\left|\frac{z_1}{z_2}\right|}=\frac{\frac{\sqrt{3}-1}{2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

Et $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)=\frac{Im\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}{\left|\frac{z_1}{z_2}\right|}=\frac{\frac{\sqrt{3}+1}{2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}+1}{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}+1}{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

97 **1.** $|a|=\sqrt{2}$ et $\arg a=\frac{\pi}{4}$.

$|b|=2\sqrt{2}$ et $\arg b=\frac{7\pi}{12}$.

2. $b=(1+i)(1+i\sqrt{3})=(1-\sqrt{3})+i(1+\sqrt{3})$.

3. $\frac{7\pi}{12}=\arg b$ donc $\cos\frac{7\pi}{12}=\frac{Re(b)}{|b|}=\frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$.

98 **1.** $OA=|z_A|=2\sqrt{3}$ et $OB=|z_B|=2\sqrt{3}$

OA = OB donc le triangle OAB est isocèle en O.

2. a. $e^{i\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$.

b. $z_B=(3-i\sqrt{3})\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}+i\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}$.

3. a. $z_A = 2\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{6}}$.

b. $z_B = e^{i\frac{\pi}{4}} \times 2\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{6}} = 2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{12}}$.

4. $\frac{\pi}{12} = \arg z_B$.

$$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{Re(z_B)}{|z_B|} = \frac{\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$$

$$\sin\frac{\pi}{12} = \frac{Im(z_B)}{|z_B|} = \frac{\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

99 **1.** $h'(x) = -3a\sin(3x) + 3b\cos(3x)$

$h''(x) = -9a\cos(3x) - 9b\sin(3x)$.

$h''(x) + 9h(x) = 0$ donc la fonction h est bien solution de l'équation différentielle (E).

2. a. $f(0) = 1$ et $f'(0) = -3\sqrt{3}$.

b. $f(x) = a\cos(3x) + b\sin(3x)$ et $f'(x) = -3a\sin(3x) + 3b\cos(3x)$

$f(0) = 1$ donne $a = 1$.

$f'(0) = -3\sqrt{3}$ donne $3b = -3\sqrt{3}$ donc $b = -\sqrt{3}$.

$f(x) = \cos(3x) - \sqrt{3}\sin(3x)$.

c. $2\cos\left(3x+\frac{\pi}{3}\right) = 2\left(\cos(3x)\cos\frac{\pi}{3} - \sin(3x)\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\cos(3x) - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(3x)\right) = f(x)$.

3. a. $f\left(\frac{7\pi}{18}\right) = 2\cos\left(\frac{7\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\right) = 2\cos\frac{3\pi}{2} = 0$.

$f\left(\frac{13\pi}{18}\right) = 2\cos\left(\frac{13\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\right) = 2\cos\frac{5\pi}{2} = 0$.

$\frac{7\pi}{18}$ et $\frac{13\pi}{18}$ sont deux solutions de l'équation $f(x) = 0$.

$\frac{\pi}{18}$ et $-\frac{5\pi}{18}$ sont deux autres solutions de l'équation $f(x) = 0$.

b. $$\frac{1}{\frac{13\pi}{18}-\frac{7\pi}{18}}\int_{\frac{7\pi}{18}}^{\frac{13\pi}{18}} 2\cos\left(3x+\frac{\pi}{3}\right)dx = \frac{3}{\pi}\times 2\left[\frac{1}{3}\sin\left(3x+\frac{\pi}{3}\right)\right]_{\frac{7\pi}{18}}^{\frac{13\pi}{18}} = \frac{2}{\pi}\left(\sin\frac{5\pi}{2} - \sin\frac{3\pi}{2}\right) = \frac{4}{\pi}.$$

100 **1.** $f(0) = \frac{1}{2}(\cos 0 + \sin 0) = \frac{1}{2} = 0{,}5$.

$f'(t) = \frac{1}{2}(-3\sin(3t) + 3\cos(3t))$ donc $f'(0) = \frac{1}{2}(-3\sin 0 + 3\cos 0) = \frac{3}{2} = 1{,}5$.

2. $\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(3t-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos(3t)\cos\frac{\pi}{4} + \sin(3t)\sin\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(3t) + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(3t)\right)$

$= \frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos(3t) + \sin(3t)) = \frac{1}{2}(\cos(3t) + \sin(3t)) = f(t)$. La vérification est faite.

3. $f(t) = 0$ devient $\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(3t-\frac{\pi}{4}\right) = 0$, soit $\cos\left(3t-\frac{\pi}{4}\right) = 0$.

On sait que $0 = \cos\frac{\pi}{2}$.

L'équation à résoudre s'écrit alors : $\cos\left(3t-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{2}$.

On obtient alors : $\begin{cases} 3t-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+2k\pi \\ 3t-\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{2}+2k\pi \end{cases}$ où $k\in\mathbb{Z}$ d'où : $\begin{cases} 3t=\frac{3\pi}{4}+2k\pi \\ 3t=-\frac{\pi}{4}+2k\pi \end{cases}$ où $k\in\mathbb{Z}$

soit $\begin{cases} t=\frac{\pi}{4}+\frac{2k\pi}{3} \\ t=-\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3} \end{cases}$ où $k\in\mathbb{Z}$.

L'ensemble des solutions est : $S=\left\{\frac{\pi}{4}\,;\frac{11\pi}{12}\,;\frac{7\pi}{12}\right\}$.

4. À partir de $t = 0$, le mobile repasse à sa position d'équilibre lorsque $f(t) = 0$ à nouveau donc pour $t=\frac{\pi}{4}$, c'est-à-dire au bout de 0,785 secondes (arrondi au millième).

101 **1.** $z_B=1e^{-i\frac{2\pi}{3}}$.

2. $z'=e^{-i\frac{2\pi}{3}}\times z$.

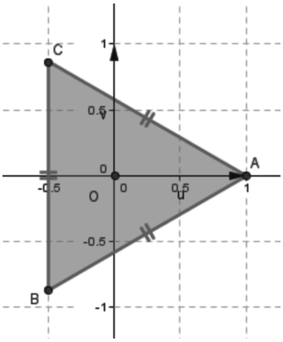
3. $z_C=e^{-i\frac{2\pi}{3}}\times z_B=e^{-i\frac{4\pi}{3}}=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$

4. $z_C=\overline{z_B}$ donc les points B et C sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses $(O\,;\vec{u})$.

De plus A $\in(O\,;\vec{u})$ donc AB = AC.

AB = $\left|-\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right|=\sqrt{3}$ et BC = $\left|i\sqrt{3}\right|=\sqrt{3}$.

AB = AC = BC donc le triangle ABC est équilatéral.



102 **1.** $z_A=4e^{i\frac{5\pi}{6}}$ et $z_B=4e^{-i\frac{5\pi}{6}}$

2. a. $z_C=e^{-i\frac{\pi}{3}}\times z_A=4e^{i\frac{\pi}{2}}=4i$.

b. $z_{\overrightarrow{OC}}=z_C=4i$.

$z_{\overrightarrow{BA}}=z_A-z_B=4i$.

$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{BA}$ donc le quadrilatère OCAB est un parallélogramme.

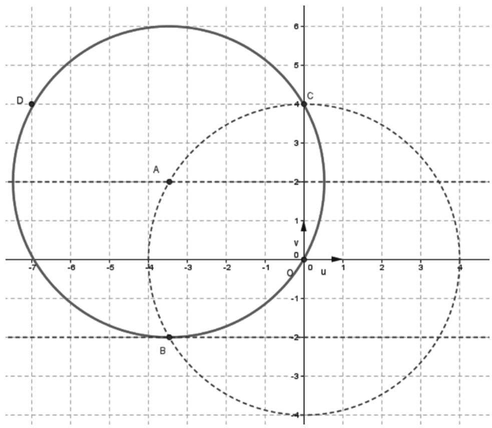
OC = OB = 4 donc le parallélogramme OCAB est un losange.

3. a. $\left|z_C+2\sqrt{3}-2i\right|=\left|4i+2\sqrt{3}-2i\right|=4$. Donc C $\in\Gamma$.

b. $2\sqrt{3}-2i=-z_A$.

M $\in\Gamma$ si et seulement si $|z_M-z_A|=4$ si et seulement si AM = 4 si et seulement si M appartient au cercle de centre A et de rayon 4.

c.



4. a. Voir la figure précédente.

b. $z_D=z_C-7=-7+4i$.

$|-7+4i+2\sqrt{3}-2i|=|(-7+2\sqrt{3})+2i|=\sqrt{(-7+2\sqrt{3})^2+4}=\sqrt{49-28\sqrt{3}+12+4}=\sqrt{65-28\sqrt{3}}$.

$\sqrt{65-28\sqrt{3}}\neq 4$ donc D $\notin\Gamma$.

$\boxed{103}$ **1.** $z_B=\dfrac{1}{\dfrac{3}{2}+\dfrac{3}{2}i}=\dfrac{2}{3+3i}=\dfrac{2(3-3i)}{(3+3i)(3-3i)}=\dfrac{6-6i}{3^2+3^2}=\dfrac{6}{18}-\dfrac{6}{18}i=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{3}i$.

2. $|z_A|=\sqrt{\left(\dfrac{3}{2}\right)^2+\left(\dfrac{3}{2}\right)^2}=\sqrt{2\times\left(\dfrac{3}{2}\right)^2}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

Notons θ_A un argument de z_A. $\cos\theta_A=\dfrac{\dfrac{3}{2}}{\dfrac{3\sqrt{2}}{2}}=\dfrac{3}{2}\times\dfrac{2}{3\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\sin\theta_A$. Donc $\theta_A=\dfrac{\pi}{4}$.

$z_A=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

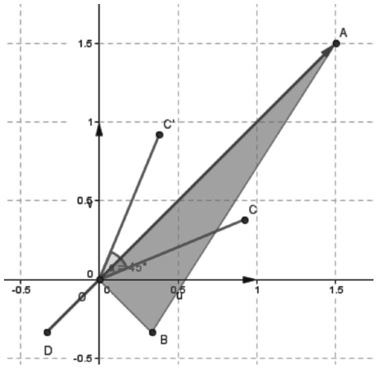
$|z_B|=\sqrt{\left(\dfrac{1}{3}\right)^2+\left(-\dfrac{1}{3}\right)^2}=\sqrt{2\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

Notons θ_B un argument de z_B. $\cos\theta_B=\dfrac{\dfrac{1}{3}}{\dfrac{\sqrt{2}}{3}}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{3}{\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\theta_B=\dfrac{-\dfrac{1}{3}}{\dfrac{\sqrt{2}}{3}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Donc $\theta_B=-\dfrac{\pi}{4}$.

$z_B=\dfrac{\sqrt{2}}{3}e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

3. a.



b. $\left(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}\right) = \left(\overrightarrow{OB}, \vec{u}\right) + \left(\vec{u}, \overrightarrow{OA}\right) = \left(\vec{u}, \overrightarrow{OA}\right) - \left(\vec{u}, \overrightarrow{OB}\right) = \arg(z_A) - \arg(z_B) = \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}$.

Donc le triangle OAB est rectangle en O.

4. a. $z_{C'} = \dfrac{1}{e^{-i\frac{\pi}{8}}} = e^{i\frac{\pi}{8}}$.

b. $e^{i\frac{\pi}{4}} \times z_C = e^{i\frac{\pi}{4}} \times e^{-i\frac{\pi}{8}} = e^{i\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{8}\right)} = e^{i\frac{\pi}{8}} = z_{C'}$.

Donc C′ est bien l'image de C par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

5. $t_{\vec{w}} : D \mapsto A$. donc $z_A = z_D + z_{\vec{w}}$. On a alors $z_{\vec{w}} = z_A - z_D = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}i + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}i = \frac{11}{6} + \frac{11}{6}i$.

L'affixe du vecteur de translation est $\frac{11}{6} + \frac{11}{6}i$.

104 **1.** $iz + \sqrt{3} - 3i = 0$

$iz = -\sqrt{3} + 3i$

$z = \dfrac{-\sqrt{3} + 3i}{i} = \dfrac{\left(-\sqrt{3} + 3i\right)(-i)}{i(-i)} = 3 + i\sqrt{3}$

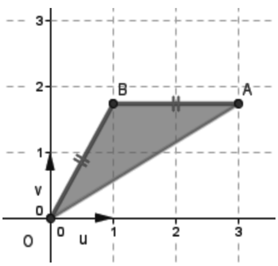
2. a. $|a| = \sqrt{3^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

On note θ un argument de *a*. $\cos\theta = \dfrac{3}{2\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \dfrac{1}{2}$. Donc $\theta = \dfrac{\pi}{6}$.

$a = 2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$.

b. $b = 2e^{i\frac{\pi}{3}} = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 + i\sqrt{3}$.

c.



d. OA = $|a| = 2\sqrt{3}$; OB = $|b| = 2$.

AB = $|b - a| = \left|1 + i\sqrt{3} - 3 - i\sqrt{3}\right| = |-2| = 2$.

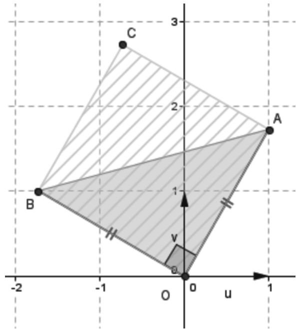
OB = AB donc le triangle BOA est isocèle en B.

105 **1.** $z(1-i\sqrt{3})=4$ équivaut à $z=\dfrac{4(1+i\sqrt{3})}{(1-i\sqrt{3})(1+i\sqrt{3})}=1+i\sqrt{3}$.

2. a. $z_1=2\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$

$z_2=2\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi}{2}\right)\right)=2\left(\cos\dfrac{5\pi}{6}+i\sin\dfrac{5\pi}{6}\right)$.

b.



c. OA = $|z_1|=2$ et OB = $|z_2|=2$.

AB = $\left|-\sqrt{3}+i-(1+i\sqrt{3})\right|=2\sqrt{2}$.

OA = OB et OA^2 + OB^2 = AB^2. D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle OAB, isocèle en O, est aussi rectangle en O.

3. a. $z_3=(1-\sqrt{3})+i(1+\sqrt{3})$.

b. Voir la figure.

c. Soit I le milieu du segment [AB], $z_I=\dfrac{z_1+z_2}{2}=\dfrac{z_3+0}{2}$, donc I est aussi le milieu du segment [OC].

Le triangle OAB étant isocèle et rectangle en O, le quadrilatère OACB est un carré.

Pour faire le point

106 **Vrai**

$f(x)=2\cos\left(\dfrac{x}{3}-\dfrac{\pi}{3}\right)=2\left[\cos\dfrac{x}{3}\cos\dfrac{\pi}{3}+\sin\dfrac{x}{3}\sin\dfrac{\pi}{3}\right]=2\left[\dfrac{1}{2}\cos\left(\dfrac{1}{3}x\right)+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(\dfrac{1}{3}x\right)\right]=\cos\left(\dfrac{1}{3}x\right)+\sqrt{3}\sin\left(\dfrac{1}{3}x\right)$.

107 **Vrai**

$f(0)=2\cos\left(\dfrac{0}{3}-\dfrac{\pi}{3}\right)=2\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)=2\times\dfrac{1}{2}=1$

108 **Vrai**

$f'(x)=2\times\left[-\dfrac{1}{3}\sin\left(\dfrac{x}{3}-\dfrac{\pi}{3}\right)\right]=-\dfrac{2}{3}\sin\left(\dfrac{x}{3}-\dfrac{\pi}{3}\right)$.

109 **Faux**

$f''(x)=-\dfrac{2}{3}\times\left[\dfrac{1}{3}\cos\left(\dfrac{x}{3}-\dfrac{\pi}{3}\right)\right]=-\dfrac{2}{9}\cos\left(\dfrac{x}{3}-\dfrac{\pi}{3}\right)$.

$f''(x)-9f(x)=-\dfrac{2}{9}\cos\left(\dfrac{x}{3}-\dfrac{\pi}{3}\right)-9\times2\cos\left(\dfrac{x}{3}-\dfrac{\pi}{3}\right)=-\dfrac{164}{9}\cos\left(\dfrac{x}{3}-\dfrac{\pi}{3}\right)$.

110 **Faux**

$\mu=\dfrac{1}{\pi-0}\displaystyle\int_0^{\pi}2\cos\left(\dfrac{x}{3}-\dfrac{\pi}{3}\right)dx=\dfrac{2}{\pi}\left[3\sin\left(\dfrac{x}{3}-\dfrac{\pi}{3}\right)\right]_0^{\pi}=\dfrac{6}{\pi}\left(\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{3}\right)-\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\right)=\dfrac{6}{\pi}\left(0+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=\dfrac{6\sqrt{3}}{2\pi}=\dfrac{3\sqrt{3}}{\pi}$.

111 **Vrai**

$f(x) = 0$ donne $2\cos\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{3}\right) = 0$ soit $\cos\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{3}\right) = 0$. Mais $0 = \cos\frac{\pi}{2}$.

On doit alors résoudre $\cos\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{2}$.

Les solutions sont de la forme :

$$\begin{cases} \frac{x}{3} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ \frac{x}{3} - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases} \text{ avec } k \in \mathbb{Z}.$$

On a alors $\begin{cases} \frac{x}{3} = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \\ \frac{x}{3} = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \end{cases}$ avec $k \in \mathbb{Z}$. D'où $\begin{cases} x = \frac{5\pi}{2} + 6k\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} + 6k\pi \end{cases}$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Sur l'intervalle $[-\pi\,;\pi]$, l'unique solution est $-\frac{\pi}{2}$.

112 Réponse **a**

$(1 + i)z - 3 + i = 0$

$$z = \frac{3-i}{1+i} = \frac{(3-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{3-3i-i+i^2}{1^2+1^2} = \frac{2-4i}{2} = \frac{2}{2} - \frac{4}{2}i = 1-2i\ .$$

113 Réponse **c**

$|-1+i| = \sqrt{(-1)^2+1^2} = \sqrt{2}$.

On note θ un argument de $-1 + i$. $\cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. $\theta = \frac{3\pi}{4}$.

Donc $-1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$.

114 Réponse **b**

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2e^{i\frac{2\pi}{3}}}{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}} = \frac{2}{\sqrt{2}}e^{i\left(\frac{2\pi}{3}-\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)} = \sqrt{2}e^{i\frac{11\pi}{12}}\ .$$

115 Réponse **a**

$$z' = e^{i\frac{\pi}{6}} \times \left(-1+i\sqrt{3}\right) = \left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)\left(-1+i\sqrt{3}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)\left(-1+i\sqrt{3}\right)$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i - \frac{1}{2}i + \frac{\sqrt{3}}{2}i^2 = -\sqrt{3} + i\ .$$

116 Réponse **a**

$AB = |z_B - z_A| = \left|1+i\sqrt{3}-3-i\sqrt{3}\right| = |-2| = 2$.

$BC = |z_C - z_B| = \left|1-i\sqrt{3}-1-i\sqrt{3}\right| = \left|-2i\sqrt{3}\right| = 2\sqrt{3}$.

$AC = |z_C - z_A| = \left|1-i\sqrt{3}-3-i\sqrt{3}\right| = \left|-2-2i\sqrt{3}\right| = \sqrt{(-2)^2+\left(-2\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4+12} = 4$.

$AB^2 + BC^2 = 2^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2 = 4 + 12 = 16 = 4^2 = AC^2$.

D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en B.

117 Réponse **b**

$z' = z + z_{\vec{w}} = z - 2 - 3\,i$.

Pour approfondir

118 **1.** $|z_1|=\sqrt{2}$, $\quad \arg z_1=\frac{\pi}{4}$.

$|z_2|=2$, $\quad \arg z_2=-\frac{\pi}{3}$.

2. $z_1=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ $\quad z_2=2e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

3. a. $z_1\times z_2=2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{12}}$.

b. $\frac{z_1}{z_2}=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}$.

c. $z_1{}^2=2e^{i\frac{\pi}{2}}$.

d. $z_2{}^3=8e^{i\pi}$.

e. $\frac{z_1{}^2}{z_2{}^3}=\frac{1}{4}e^{-i\frac{\pi}{2}}$.

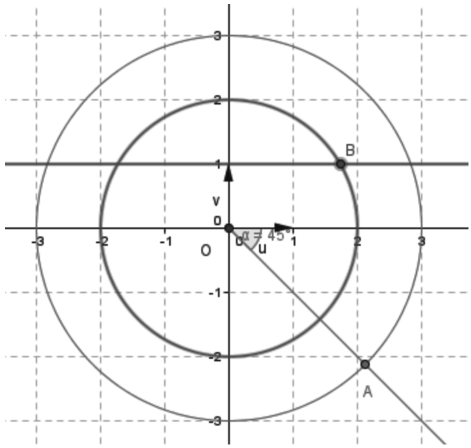
119 **1. Vrai** $z^3=-8$. **2. Faux** $\arg z=\frac{\pi}{3}$. **3. Faux** $z=2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{4}}$. **4. Faux** $\overline{z_1}=\sqrt{6}-i\sqrt{6}$.

120 **1.** Réponse **a.** **2.** Réponse **c.** **3.** Réponse **a.** **4.** Réponse **d.**

121 **1.** $z_1=\frac{3\sqrt{2}}{2}-i\frac{3\sqrt{2}}{2}=3e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

$z_2=\sqrt{3}+i=2e^{i\frac{\pi}{6}}$.

2.



3. $z_1\times z_2=\frac{3\sqrt{6}+3\sqrt{2}}{2}+i\frac{3\sqrt{2}-3\sqrt{6}}{2}$.

4. $|z_1\times z_2|=6$ et $\arg(z_1\times z_2)=-\frac{\pi}{12}$.

5. $-\frac{\pi}{12}=\arg(z_1\times z_2)$

$$\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)=\frac{Re(z_1\times z_2)}{|z_1\times z_2|}=\frac{\frac{3\sqrt{6}+3\sqrt{2}}{2}}{6}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}=\cos\frac{\pi}{12}.$$

$$\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)=\frac{Im(z_1\times z_2)}{|z_1\times z_2|}=\frac{\frac{3\sqrt{2}-3\sqrt{6}}{2}}{6}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}.$$

$$\sin\frac{\pi}{12}=-\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

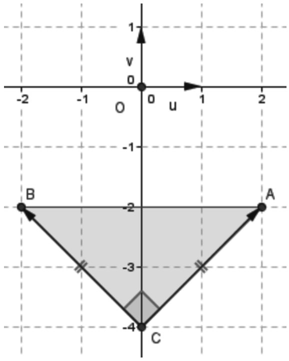
122 **1. a.** $z_1 = \dfrac{(2-6i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = 2-2i$.

b. $z_1 = 2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

c. $z_2 = 2\sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}}$

$z_2 = -2-2i$.

2. a.



b. $z_{\overrightarrow{CA}} = 2+2i$ donc $\overrightarrow{CA}(2\,;2)$

$z_{\overrightarrow{CB}} = -2+2i$ donc $\overrightarrow{CA}(-2\,;2)$

$\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA} = 2\times(-2)+2\times 2 = 0$.

c. $\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA} = 0$ donc $(CA)\perp(CB)$. Le triangle ABC est rectangle en C.

De plus, CA = $\left|z_{\overrightarrow{CA}}\right| = 2\sqrt{2} = \left|z_{\overrightarrow{CB}}\right|$ = CB.

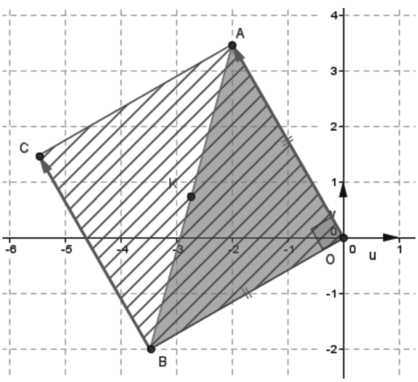
Le triangle ABC est aussi isocèle en C.

123 **1.** $z_B = -2\sqrt{3}-2i$.

2. a. $|z_A| = |z_B| = 4$

b. OA = $|z_A|$ = 4 = $|z_B|$ = OB.

3.



4. a. $\arg(z_A) = \dfrac{2\pi}{3}$ $\qquad$ $\arg(z_B) = -\dfrac{5\pi}{6}$.

b. $\left(\vec{u}, \overrightarrow{OA}\right) = \arg(z_A) = \dfrac{2\pi}{3}$ $\qquad$ $\left(\vec{u}, \overrightarrow{OB}\right) = \arg(z_B) = -\dfrac{5\pi}{6}$.

5. OA = OB donc le triangle OAB est isocèle en O.

$$(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})=(\overrightarrow{OA},\vec{u})+(\vec{u},\overrightarrow{OB})=(\vec{u},\overrightarrow{OB})-(\vec{u},\overrightarrow{OA})=-\frac{5\pi}{6}-\frac{2\pi}{3}=-\frac{3\pi}{2}.$$

Donc le triangle OAB est aussi rectangle en O.

6. a. $z_K=\dfrac{z_A+z_B}{2}=(-1-\sqrt{3})+i(-1+\sqrt{3})$.

b. Voir figure.

7. a. Voir figure.

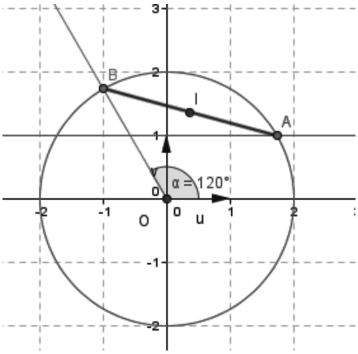
b. $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{BC}$ donc $z_{\overrightarrow{OA}}=z_{\overrightarrow{BC}}$. On obtient donc $z_A=z_C-z_B$.

D'où $z_C=z_A+z_B=(-2-2\sqrt{3})+i(-2+2\sqrt{3})$.

Dans le parallélogramme OACB, le triangle OAB est isocèle et rectangle en O donc le quadrilatère OACB est un carré.

TP Étude d'une configuration géométrique

1. Cette figure doit être réalisée « à la main » par les élèves.



2. $z_B=1+i\sqrt{3}$.

$$z_I=\frac{z_A+z_B}{2}=\frac{-1+\sqrt{3}}{2}+i\frac{1+\sqrt{3}}{2}.$$

3. $|z_I|=\sqrt{\dfrac{(-1+\sqrt{3})^2}{4}+\dfrac{(1+\sqrt{3})^2}{4}}=\sqrt{\dfrac{1-2\sqrt{3}+3+1+2\sqrt{3}+3}{4}}=\sqrt{2}$.

4. $z_A=2e^{i\frac{\pi}{6}}$ et $z_B=2e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

$$(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})=(\overrightarrow{OA},\vec{u})+(\vec{u},\overrightarrow{OB})=(\vec{u},\overrightarrow{OB})-(\vec{u},\overrightarrow{OA})=\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}.$$

De plus, OA = OB = 4 donc le triangle OAB est isocèle et rectangle en O.

Donc $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OI})=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})=\dfrac{\pi}{4}$.

D'où $(\vec{u},\overrightarrow{OI})=(\vec{u},\overrightarrow{OA})+(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OI})=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{5\pi}{12}$.

$\arg z_I=\dfrac{5\pi}{12}$.

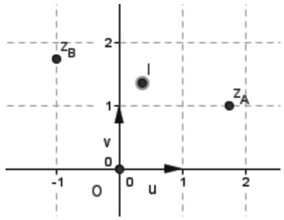
5. $z_I=\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{12}}$.

6. $\dfrac{5\pi}{12}=\arg z_I$ donc $\cos\dfrac{5\pi}{12}=\dfrac{Re(z_I)}{|z_I|}=\dfrac{\frac{-1+\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{2}}=\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$.

On a aussi $\sin\frac{5\pi}{12} = \frac{Im(z_I)}{|z_I|} = \frac{\frac{1+\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{2}} = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$.

En salle informatique

1.



2.

```
from cmath import*
a=complex(3**0.5,1)
b=rect(2,2*pi/3)
c=(a+b)/2
print(c)
print(polar(c))
```

Cet algorithme donne la forme algébrique de l'affixe *c* du point C, milieu du segment [AB], d'affixes respectives *a* et *b*.

Puis il donne le module et un argument de *c*, exprimé en radians.

Attention : Il ne faut pas oublier de saisir « from cmath import* ».

Voici les réponses obtenues :

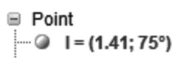
```
(0.3660254037844388+1.3660254037844388j)
(1.4142135623730951, 1.3089969389957472)
```

3. $z_I = \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{-1+\sqrt{3}}{2} + i\frac{1+\sqrt{3}}{2}$

4. Voir figure.

5. $|z_I| = \sqrt{\frac{(-1+\sqrt{3})^2}{4} + \frac{(1+\sqrt{3})^2}{4}} = \sqrt{\frac{1-2\sqrt{3}+3+1+2\sqrt{3}+3}{4}} = \sqrt{2}$.

6.



Un argument de z_I a pour valeur 75°. En radians, $\arg z_I = \frac{75\pi}{180} = \frac{5\pi}{12}$.

On retrouve bien les résultats trouvés à la question 2 de la première partie du TP.

7. $z_I = \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{12}}$.

8. À la calculatrice, on obtient : $\cos\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ et $\sin\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$. On retrouve bien les résultats trouvés à la question 6 de la première partie du TP.

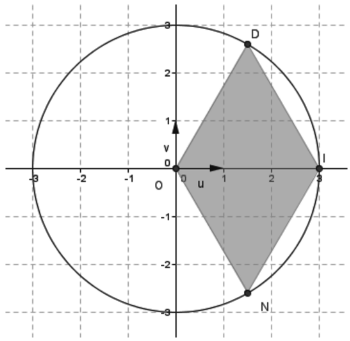
Pour l'épreuve du Bac

125 **1.** $z_I = 3e^{i0}$. $z_D = 3e^{i\frac{\pi}{3}}$. $z_N = 3e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

2. $OI = |z_I| = 3$; $OD = |z_D| = 3$; $ON = |z_N| = 3$.

OI = OD = ON = 3 donc I, D et N appartiennent au cercle de centre O et de rayon 3.

3.



4. ID $= |z_D - z_I| = \left|\frac{3}{2} + i\frac{3\sqrt{3}}{2} - 3\right| = \left|-\frac{3}{2} + i\frac{3\sqrt{3}}{2}\right| = |-z_N| = 3$

IN $= |z_N - z_I| = \left|\frac{3}{2} - i\frac{3\sqrt{3}}{2} - 3\right| = \left|-\frac{3}{2} - i\frac{3\sqrt{3}}{2}\right| = |-z_D| = 3$

ID = IN = 3.

$z_{\overrightarrow{OD}} = z_D = \frac{3}{2} + i\frac{3\sqrt{3}}{2}$ et $z_{\overrightarrow{NI}} = z_I - z_N = \frac{3}{2} + i\frac{3\sqrt{3}}{2}$

Donc $z_{\overrightarrow{OD}} = z_{\overrightarrow{NI}}$. Donc $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{NI}$.

Le quadrilatère ODIN est un parallélogramme avec deux côtés consécutifs (ID et IN) égaux.

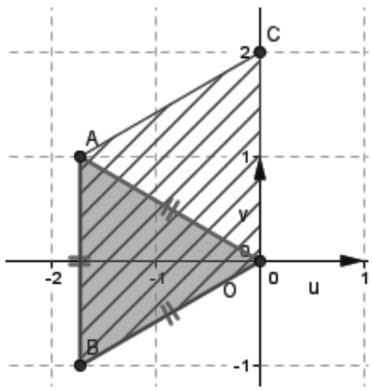
Donc le quadrilatère ODIN est un losange.

$\boxed{126}$ **1. a.** $|z_A| = 2, \quad \arg z_A = \frac{5\pi}{6}$.

$|z_B| = 2, \quad \arg z_B = -\frac{5\pi}{6}$.

b. $z_A = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$.

c.



d. OA = OB = 2.

AB $= |z_B - z_A| = |-2i| = 2$.

OA = OB = AB donc le triangle ABC est équilatéral.

2. a. Voir figure.

b. $z_{\overrightarrow{OB}} = -\sqrt{3} - i$.

$z_{\overrightarrow{CA}} = z_A - z_C = -\sqrt{3} + i - 2i = -\sqrt{3} - i$.

$z_{\overrightarrow{OB}} = z_{\overrightarrow{CA}}$ donc $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{CA}$.

Le quadrilatère OBAC est un parallélogramme. De plus, OB = 2 et OC = $|z_C| = |2i| = 2$.

On a donc OB = OC donc le parallélogramme OBAC est un losange.

127 **1.** $z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$.

2. $z_2 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} - i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

3. $z_1 \times z_2 = 2e^{i\frac{\pi}{3}} \times e^{-i\frac{\pi}{4}} = 2e^{i\frac{\pi}{12}} = 2 \times z_3$.

4. $z_3 = \dfrac{1}{2}(1+i\sqrt{3})\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} - i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + i\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

5. $\dfrac{\pi}{12} = \arg(z_3)$ et $|z_3| = 1$.

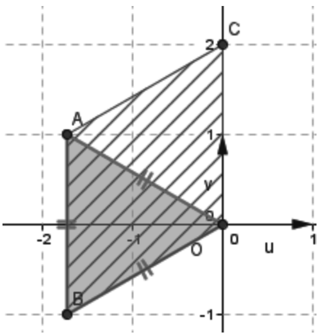
Donc $\cos\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}{1} = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}{1} = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

128 **1.** Réponse **b.** **2.** Réponse **c.** **3.** Réponse **d.** **4.** Réponse **c.**

129 **1. a.** $|z_A| = 2, \quad \arg z_A = \dfrac{5\pi}{6}$. $|z_B| = 2, \quad \arg z_B = -\dfrac{5\pi}{6}$.

b. $z_A = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$.

c.



d. OA = OB = 2. AB = $|z_B - z_A| = |-2i| = 2$.

OA = OB = AB donc le triangle ABC est équilatéral.

2. a. Voir figure.

b. $z_{\overrightarrow{OB}} = -\sqrt{3} - i$.

$z_{\overrightarrow{CA}} = z_A - z_C = -\sqrt{3} + i - 2i = -\sqrt{3} - i$.

$z_{\overrightarrow{OB}} = z_{\overrightarrow{CA}}$ donc $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{CA}$.

Le quadrilatère OBAC est un parallélogramme. De plus, OB = 2 et OC = $|z_C| = |2i| = 2$.

On a donc OB = OC donc le parallélogramme OBAC est un losange.

130 **1. c.** **2. c.** **3. b.** **4. a.** **5. b.** **6. d.**

131 $\dfrac{1}{LC} = \dfrac{1}{200 \times 10^{-3} \times 125 \times 10^{-6}} = 40\,000$.

(E) $q''(t) + 40\,000q(t) = 0$.

1. a. $h(t)=a\cos(200t)+b\sin(200t)$.

$h'(t)=-200a\sin(200t)+200b\cos(200t)$.

$h''(t)=-40\,000a\cos(200t)-40\,000b\sin(200t)$.

$h''(t)+40\,000h(t)=0$.

Donc h est bien solution de l'équation différentielle (E).

b. On sait que $q(t)=a\cos(200t)+b\sin(200t)$

$q(0)=a\cos(0)+b\sin(0)=a=10^{-3}$.

$q'(t)=-200a\sin(200t)+200b\cos(200t)$.

Donc $q'(0)=-200a\sin(0)+200b\cos(0)=200b=0$ et donc $b=0$.

Donc $q(t)=10^{-3}\cos(200t)$.

2. $u(t)=q''(t)=-40\,000\times10^{-3}\cos(200t)=-40\cos(200t)$.

3.

$$U_{eff}{}^2=\frac{100}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{100}}1600\cos^2(200t)dt$$

$$=\frac{160\,000}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{100}}\frac{1+\cos(400t)}{2}dt=\frac{80\,000}{\pi}\left[t+\frac{1}{400}\sin(400t)\right]_0^{\frac{\pi}{100}}=\frac{80\,000}{\pi}\left[\frac{\pi}{100}+\frac{1}{400}\sin(4\pi)\right]=800$$

$U_{eff}=\sqrt{800}=20\sqrt{2}$.

132 **1.** $h(x)=a\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)+b\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$.

$h'(x)=-\frac{\pi}{2}a\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)+\frac{\pi}{2}b\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$.

$h''(x)=-\frac{\pi^2}{4}a\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)-\frac{\pi^2}{4}b\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$.

$4h''(x)+\pi^2h(x)=0$.

Donc h est bien solution de l'équation différentielle $4y''+\pi^2y=0$.

2. $g(x)=a\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)+b\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$.

$\frac{\sqrt{2}}{2}=g\left(\frac{1}{2}\right)=a\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+b\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}a+\frac{\sqrt{2}}{2}b=\frac{\sqrt{2}}{2}(a+b)$ donc $a+b=1$.

$0=g'\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{\pi}{2}a\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\pi}{2}b\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\pi\sqrt{2}}{4}a+\frac{\pi\sqrt{2}}{4}b=\frac{\pi\sqrt{2}}{4}(-a+b)$ donc $-a+b=0$.

On a donc $a=b$ et $a+b=1$. On trouve donc $a=b=\frac{1}{2}$.

D'où $g(x)=\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)+\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$.

3. $\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)+\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)=g(x)$.

4. $g(x)=-\frac{1}{2}$ équivaut à $\cos\left(\frac{\pi}{2}x-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}=\cos\frac{3\pi}{4}$.

D'où $\begin{cases}\frac{\pi}{2}x-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}+2k\pi\\ \frac{\pi}{2}x-\frac{\pi}{4}=-\frac{3\pi}{4}+2k\pi\end{cases}$ *où* $k\in\mathbb{R}$ soit $\begin{cases}\frac{\pi}{2}x=\pi+2k\pi\\ \frac{\pi}{2}x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi\end{cases}$ *où* $k\in\mathbb{R}$, d'où $\begin{cases}x=2+2k\\ x=-1+2k\end{cases}$ *où* $k\in\mathbb{R}$

$S=\{-2\,;-1\,;2\}$.

5. $\mu=\dfrac{1}{1-0}\displaystyle\int_0^1 g(x)dx=\int_0^1\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{2}x-\dfrac{\pi}{4}\right)dx=\left[\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{2}{\pi}\sin\left(\dfrac{\pi}{2}x-\dfrac{\pi}{4}\right)\right]_0^1=\dfrac{\sqrt{2}}{\pi}\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)-\dfrac{\sqrt{2}}{\pi}\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)=2\times\dfrac{\sqrt{2}}{\pi}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{2}{\pi}$.

$\boxed{133}$ **1.** $\sin\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{3}\right)=\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{\pi}{3}-\sin\dfrac{\pi}{3}\cos\dfrac{x}{2}=\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{x}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\dfrac{x}{2}=g(x)$.

2. $g(0)=\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

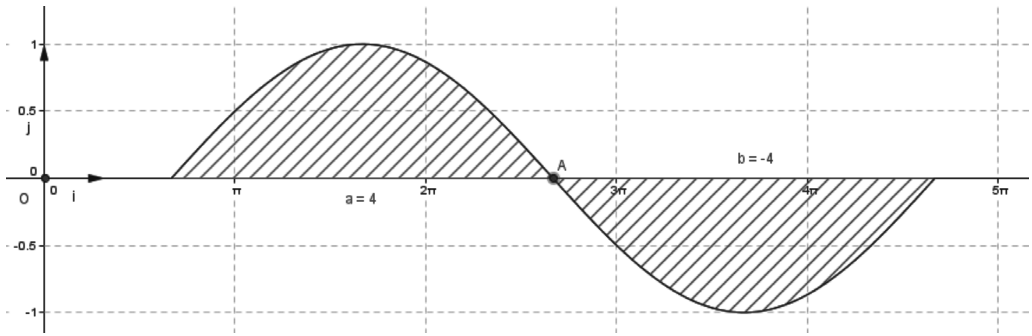
$g'(x)=\dfrac{1}{2}\cos\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{3}\right)$ donc $g'(0)=\dfrac{1}{2}\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{1}{4}$.

3. a. $\mu=\dfrac{1}{\dfrac{14\pi}{3}-\dfrac{2\pi}{3}}\displaystyle\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{14\pi}{3}}\sin\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{3}\right)dx=\dfrac{1}{4\pi}\left[-2\cos\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{3}\right)\right]_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{14\pi}{3}}=-\dfrac{1}{2\pi}(\cos(2\pi)-\cos 0)=0$

b.

x	$\dfrac{2\pi}{3}$	$\dfrac{5\pi}{3}$	$\dfrac{8\pi}{3}$	$\dfrac{11\pi}{3}$	$\dfrac{14\pi}{3}$
$\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{3}$	0	$\dfrac{\pi}{2}$	π	$\dfrac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{3}\right)$	0	1	0	–1	0

c.



d. La valeur de μ est cohérente avec le graphique car la courbe a un centre de symétrie A $\left(\dfrac{8\pi}{3}\,;0\right)$.

$\displaystyle\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{8\pi}{3}} g(x)dx=-\int_{\frac{8\pi}{3}}^{\frac{14\pi}{3}} g(x)dx$ et donc $\displaystyle\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{14\pi}{3}} g(x)dx=0$.

$\boxed{134}$ **1.** $f(0)=\cos 0+\sin 0=1$.

$f'(x)=-\sin x+\cos x$ donc $f'(0)=-\sin 0+\cos 0=1$.

$f'(0)$ représente le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0 et d'ordonnée $f(0)=1$.

2. Cherchons les deux réels A et φ tels que $f(x)=1\cos x+1\sin x=A\cos(x+\varphi)$

On pose $z=1-i$.

$A=|z|=\sqrt{2}$ et $\varphi=\arg z=-\dfrac{\pi}{4}$.

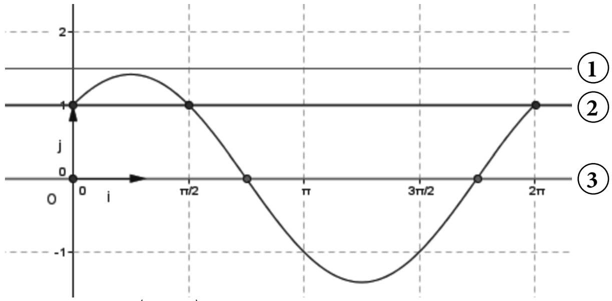
D'où $f(x)=\sqrt{2}\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$.

3. a. L'équation $f(x)=1{,}5$ n'admet pas de solutions sur l'intervalle $[0\,;2\pi]$. (Tracé **1**)

b. L'équation $f(x)=1$ admet 3 solutions sur l'intervalle $[0\,;2\pi]$. (Tracé **2**)

c. L'équation $f(x)=0$ admet 2 solutions sur l'intervalle $[0\,;2\pi]$. (Tracé **3**)

Graphique

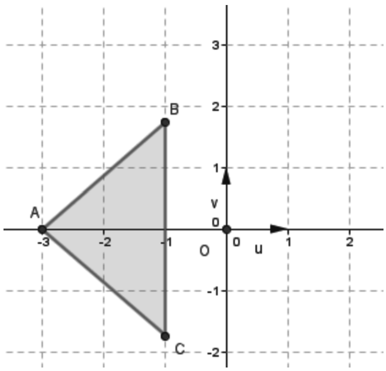


4. $f(x)=0$ équivaut à $\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=0=\cos\dfrac{\pi}{2}$.

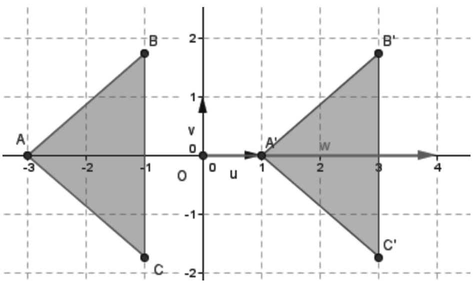
On obtient alors $\begin{cases} x-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi \\ x-\dfrac{\pi}{4}=-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi \end{cases}$ *où* $k\in\mathbb{R}$, ce qui donne $\begin{cases} x=\dfrac{3\pi}{4}+2k\pi \\ x=-\dfrac{\pi}{4}+2k\pi \end{cases}$ *où* $k\in\mathbb{R}$

Les solutions de l'équation $f(x)=0$ sur l'intervalle $[0\,;2\pi]$ sont $\dfrac{3\pi}{4}$ et $\dfrac{7\pi}{4}$.

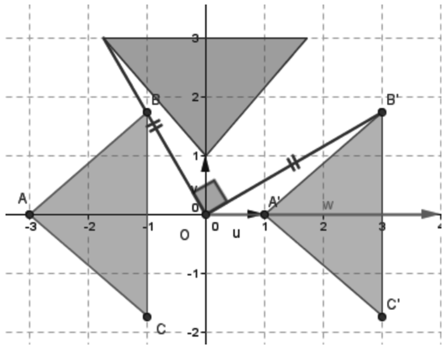
135 **1.**



2.

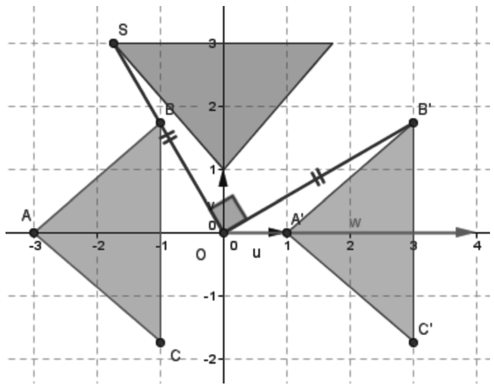


3.



On est face à la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

4.



On peut conjecturer que les points O, B et S sont alignés.

5. $z_{B'} = z_B + 4 = 3 + i\sqrt{3}$.

$z_{B'} = 2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$.

6. $z_S = e^{i\frac{\pi}{2}} \times z_{B'} = 2\sqrt{3} \times e^{i\frac{\pi}{2}} \times e^{i\frac{\pi}{6}} = 2\sqrt{3}e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)} = 2\sqrt{3}e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

7. $z_B = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

$(\vec{u}, \overrightarrow{OB}) = \arg z_B = \dfrac{2\pi}{3} = \arg z_S = (\vec{u}, \overrightarrow{OS})$ donc les points O, B et S sont alignés.

136 **1. a.** $|z_A| = 2, \quad \arg z_A = \dfrac{\pi}{3}$.

b. $z_A = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$.

c. Voir la figure complète en fin d'exercice.

2. a. $z_B = e^{i\frac{\pi}{3}} \times z_A = e^{i\frac{\pi}{3}} \times 2e^{i\frac{\pi}{3}} = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

b. $z_B = 2\left(\cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right) = 2\left(-\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 + i\sqrt{3}$.

c. Voir la figure complète en fin d'exercice.

3. OA = $|z_A| = 2 = |z_B|$ = OB.

AB = $|z_B - z_A| = |-1 + i\sqrt{3} - (1 + i\sqrt{3})| = |-2| = 2$.

OA = OB = AB donc le triangle ABC est équilatéral.

Remarque : on aurait pu aussi déterminer une mesure en radians de l'angle $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ qui équivaut à l'angle de la rotation soit $\dfrac{\pi}{3}$.

4. a. $z_C = e^{i\frac{\pi}{4}} \times z_A = e^{i\frac{\pi}{4}} \times 2e^{i\frac{\pi}{3}} = 2e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)} = 2e^{i\frac{7\pi}{12}}$.

b. Voir la figure complète en fin d'exercice. On utilise le fait que le point C est l'image du point A par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$.

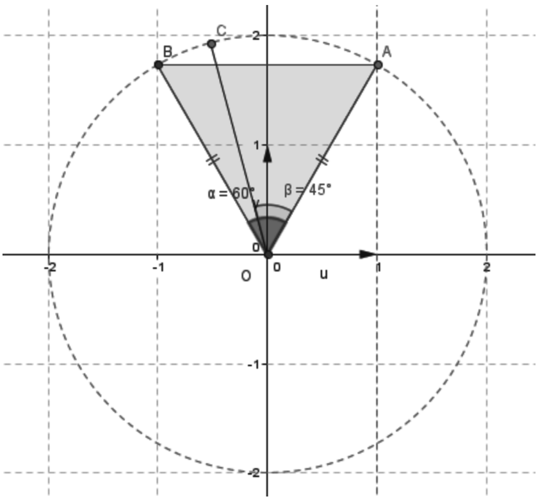
c. $z_C = z_A \times e^{i\frac{\pi}{4}} = z_A \times \left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right) = z_A \times \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

D'où $z_C = \left(1+i\sqrt{3}\right)\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$.

d. $\dfrac{7\pi}{12} = \arg z_C$.

$$\cos\frac{7\pi}{12} = \frac{Re(z_C)}{|z_C|} = \frac{\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}.$$

$$\sin\frac{7\pi}{12} = \frac{Im(z_C)}{|z_C|} = \frac{\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}.$$



N° éditeur : XXXXXXX
Dépôt légal : août 2020
N°d'imprimeur : XXXX
Imprimé en juillet 2020 par XXXX

COLLECTION ALGOMATHS

MATHS

Enseignement commun + spécialité STI2D/STL

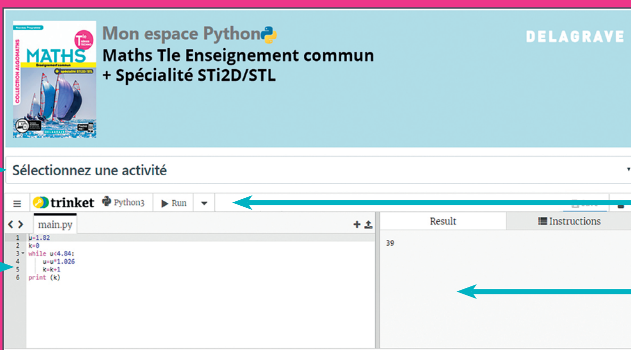
Tle SÉRIES TECHNO

Avec Mon Espace Python en ligne

lienmini.fr/10446-133

Je sélectionne l'activité ou l'exercice du manuel.

Affichage du programme : je complète ou modifie le programme.



J'enregistre le programme.

Affichage des résultats du programme.

ISBN : 978-2-206-10495-9

Cet ouvrage a été imprimé sur du papier provenant de forêts gérées durablement.

DELAGRAVE

www.editions-delagrave.fr