Correction des exercices du chapitre 1 : Fonctions, dérivation et fonction inverse

15 **1.** $+\infty$ et 0.

2. $+\infty$ et 0.

18 **1.** $f(x) = 4 + (-39) \times \dfrac{1}{x}$.

2. • D'après le cours, $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x} = 0$.

On en déduit que $\lim\limits_{x \to -\infty} -39 \times \dfrac{1}{x} = -39 \times 0 = 0$ et donc que $\lim\limits_{x \to -\infty} 4 + (-39) \times \dfrac{1}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 4 + 0 = 4$.

• D'après le cours, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \dfrac{1}{x} = -\infty$.

On en déduit que $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} -39 \times \dfrac{1}{x} = +\infty$ et donc que $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} 4 + (-39) \times \dfrac{1}{x} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = +\infty$.

20 **1.** $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = +\infty$ $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

2. La droite d'équation $x = 0$ est asymptote verticale à la courbe et la droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale à la courbe en $-\infty$ et en $+\infty$.

2 **a.** 0 **b.** 0 **c.** 1 **d.** –8 **e.** 9

3 **a.** 0 **b.** 0 **c.** 7 **d.** –20

4 **a.** $+\infty$ **b.** $-\infty$ **c.** $+\infty$ **d.** $-\infty$ **e.** $+\infty$ **f.** $+\infty$

40 $f(x) = -2 + 4 \times \dfrac{1}{x}$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} -2 + 4 \times \dfrac{1}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -2 + 4 \times 0 = -2$; $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} -2 + 4 \times \dfrac{1}{x} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = -\infty$;

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} -2 + 4 \times \dfrac{1}{x} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} -2 + 4 \times \dfrac{1}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -2 + 4 \times 0 = -2$.

41 **1.** Réponse **b.** **2.** Réponse **a.** **3.** Réponse **b.** **4.** Réponse **a.**

5 **a.** $f'(x) = -\dfrac{26}{x^2}$. **b.** $g'(x) = \dfrac{12}{x^2}$. **c.** $h'(x) = \dfrac{1}{x^2}$.

9 **a.** $f'(x) = x^2 + x - 6 - \dfrac{13}{x^2}$. **b.** $g'(t) = \dfrac{5}{t^2} + 12t^2 - \dfrac{1}{2}t - \dfrac{9}{10}$.

10 **a.** $f'(x) = -\dfrac{24}{x^2}$ et $f'(-2) = -6$. **b.** $g'(x) = -3 + \dfrac{9}{x^2}$ et $g'(1) = 6$.

29 **1.** Réponse **b.** **2.** Réponse **c.** **3.** Réponse **a.**

30 **a.** $f(x) = x - 100 + \dfrac{6\,400}{x} = x - 100 + 6\,400 \times \dfrac{1}{x}$.

Donc $f'(x) = 1 + 6\,400 \times \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = 1 - \dfrac{6\,400}{x^2} = \dfrac{x^2 - 6\,400}{x^2} = \dfrac{x^2 - 80^2}{x^2} = \dfrac{(x-80)(x+80)}{x^2} = (x - 80)\,\dfrac{x+80}{x^2}$.

b. $f(x) = 2x - 3 + \dfrac{50}{x} = 2x - 3 + 50 \times \dfrac{1}{x}$.

Donc $f'(x) = 2 + 50 \times \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = 2 - \dfrac{50}{x^2} = \dfrac{2x^2 - 50}{x^2} = \dfrac{2(x^2 - 25)}{x^2} = \dfrac{2(x^2 - 5^2)}{x^2} = \dfrac{2(x-5)(x+5)}{x^2} = 2(x - 5)\dfrac{x+5}{x^2}$.

31 **1.** $f'(x) = \dfrac{1{,}5}{x^2}$.

2. Sur $]-\infty\,;0[$, $f'(x) > 0$.

3. La fonction f est strictement croissante sur $]-\infty\,;0[$.

34 **1.** $f'(x) = 0{,}16 - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{0{,}16x^2 - 1}{x^2} = \dfrac{0{,}16(x^2 - 6{,}25)}{x^2} = \dfrac{0{,}16(x-2{,}5)(x+2{,}5)}{x^2}$.

2. Sur $]0\,;+\infty[$, $\dfrac{0{,}16(x+2{,}5)}{x^2} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $x - 2{,}5$. Et $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2{,}5$.

3. La fonction f est donc strictement décroissante sur $]0\,;2{,}5]$ et strictement croissante sur $[2{,}5\,;+\infty[$.

35 **1.** $f(x) = \dfrac{4}{x} + 2x^2 = 4 \times \dfrac{1}{x} + 2x^2$.

Donc $f'(x) = 4 \times \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) + 2 \times 2x = -\dfrac{4}{x^2} + 4x = \dfrac{-4 + 4x^3}{x^2}$.

Or $\dfrac{4(x-1)(x^2+x+1)}{x^2} = \dfrac{(4x-4)(x^2+x+1)}{x^2} = \dfrac{4x^3 + 4x^2 + 4x - 4x^2 - 4x - 4}{x^2} = \dfrac{-4 + 4x^3}{x^2}$.

Donc on a bien $f'(x) = \dfrac{4(x-1)(x^2+x+1)}{x^2}$.

2. Sur $]0\,;+\infty[$, $4 > 0$, $x^2 + x + 1 > 0$ et $x^2 > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $x - 1$.

Et, $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$.

3. On en déduit que la fonction f est strictement décroissante sur $]0\,;1]$ et strictement croissante sur $[1\,;+\infty[$.

49 **1.** $c(v) = 0{,}06v + \dfrac{150}{v} = 0{,}06v + 150 \times \dfrac{1}{v}$.

Donc $c'(v) = 0{,}06 \times 1 + 150 \times \left(-\dfrac{1}{v^2}\right) = 0{,}06 - \dfrac{150}{v^2} = \dfrac{0{,}06v^2 - 150}{v^2} = \dfrac{0{,}06(v^2 - 2\,500)}{v^2} = \dfrac{0{,}06(v^2 - 50^2)}{v^2}$

$= \dfrac{0{,}06(v-50)(v+50)}{v^2}$

2. Sur $[10\,;130]$, $0{,}06 > 0$, $v + 50 > 0$ et $v^2 > 0$ donc $c'(v)$ est du signe de $v - 50$.

Et, $c'(v) \geq 0 \Leftrightarrow v - 50 \geq 0 \Leftrightarrow v \geq 50$. D'où :

v	10		50		130
$c'(v)$		$-$	0	$+$	
$c(v)$	15,6	$\searrow$	6	$\nearrow$	$\frac{582}{65}$

3. a. Pour que sa consommation en essence soit minimale, ce véhicule doit rouler à 50 km.h^{-1}.

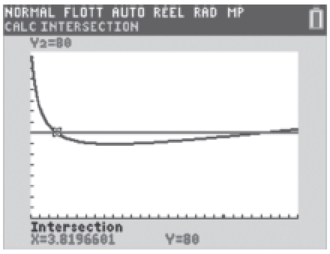
b. Sa consommation minimale est 6 litres.

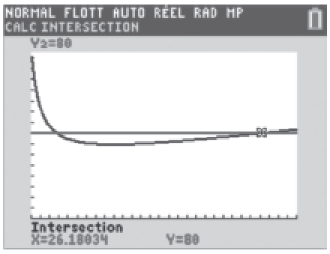
50 **1.** **a.** $C(20) = 1\,500$.

b. $\dfrac{1\,500}{20} = 75$.

2. a.

Le coût unitaire est inférieur à 80 € lorsque le nombre de tables produites appartient à [4 ; 26].





b. $C_U(q) = q + 50 + \dfrac{100}{q}$ donc $C'_U(q) = 1 - \dfrac{100}{q^2} = \dfrac{(q-10)(q+10)}{q^2}$.

c. Sur [1 ; 30], $\dfrac{(q+10)}{q^2} > 0$ donc $C'_U(q)$ est du signe de $q - 10$. Et $C'_U(q) \geq 0 \Leftrightarrow q \geq 10$. D'où :

q	1		10		30
$C'_U(q)$		$-$	0	$+$	
$C_U(q)$	151	↘	70	↗	$\frac{250}{3}$

d. Pour que le coût unitaire soit minimal, l'entreprise doit produire 10 tables. Le coût minimal unitaire est 70 €.

51 **1.** L'extension est un rectangle donc son aire est égale à xy.

On sait également que cette aire est égale à 722. On a donc $xy = 722$; d'où $y = \dfrac{722}{x}$.

2. a. $l(x) = x + 2y = x + 2 \times \dfrac{722}{x} = x + \dfrac{1\,444}{x}$.

b. $l(x) = x + \dfrac{1\,444}{x} = x + 1\,444 \times \dfrac{1}{x}$.

Donc $l'(x) = 1 + 1\,444 \times \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = 1 - \dfrac{1\,444}{x^2} = \dfrac{x^2 - 1\,444}{x^2} = \dfrac{x^2 - 38^2}{x^2} = \dfrac{(x-38)(x+38)}{x^2}$.

c. Sur [20 ; 60], $x + 38 > 0$ et $x^2 > 0$ donc $l'(x)$ est du signe de $x - 38$.

Et, $l'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x - 38 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 38$. D'où :

x	20		38		60
$l'(x)$		$-$	0	$+$	
$l(x)$	92,2	↘	76	↗	$\frac{1\,261}{15}$

d. • La longueur de la clôture est donc minimale lorsque $x = 38$. On a alors $y = \dfrac{722}{38} = 19$.

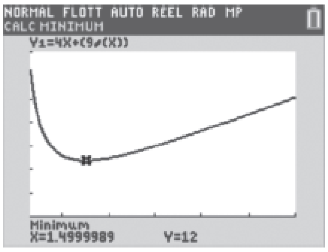
Les dimensions de l'extension rendant la longueur de la clôture minimale sont donc 38 mètres et 19 mètres.

• La longueur minimale de la clôture est 76 mètres.

Le prix, en euros, du grillage de la clôture est donc $76 \times 15 = 1\,140$ et celui du goudron du sol est $722 \times 25 = 18\,050$.

Or, $1\,140 + 18\,050 = 19\,190$ donc le prix à payer par le responsable de la jardinerie pour cette extension est 19 190 €.

52 **1.** D'après la calculatrice, il faut produire 1,5 tonne de farine pour que le coût unitaire soit minimal.



2. a. $C'_U(q) = 4 - \dfrac{9}{q^2} = \dfrac{4q^2 - 9}{q^2} = \dfrac{4(q-1{,}5)(q+1{,}5)}{q^2}$.

b. Sur $[0{,}3\ ;\ 6]$, $\dfrac{(q+1{,}5)}{q^2} > 0$ donc $C'_U(q)$ est du signe de $q - 1{,}5$. Et $C'_U(q) \geq 0 \Leftrightarrow q \geq 1{,}5$.

c.

q	0,3		1,5		6
$C'_U(q)$		–	0	+	
$C_U(q)$	31,2	↘	12	↗	25,5

d. Il faut donc produire 1,5 tonne de farine pour que le coût unitaire soit minimal. Ce coût unitaire minimal est 1 200 €.

63 **1. a.** $C_M(x) = 0{,}5x + 2 + \dfrac{200}{x}$.

b. $C'_M(x) = 0{,}5 - \dfrac{200}{x^2} = \dfrac{0{,}5x^2 - 200}{x^2} = \dfrac{0{,}5(x-20)(x+20)}{x^2}$.

c. Sur $[1\ ;\ 50]$, $\dfrac{0{,}5(x+20)}{x^2} > 0$ donc $C'_M(x)$ est du signe de $x - 20$. Et $C'_M(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 20$. D'où :

x	1		20		50
$C'_M(x)$		–	0	+	
$C_M(x)$	202,5	↘	22	↗	31

d. Il faut donc produire 20 litres de produit chimique pour que le coût moyen soit minimal.

2. a. $C_m(10) = C(11) - C(10) = 12{,}5$.

b. $C'(x) = x + 2$ donc $C'(10) = 12$. $C'(10)$ et $C_m(10)$ sont proches.

c. D'après les économistes, résoudre l'équation $C_M(x) = C_m(x)$ revient à résoudre l'équation $C_M(x) = C'(x)$.

Sur $\mathbb{R}^*$, $C_M(x) = C'(x) \Leftrightarrow 0{,}5x + 2 + \dfrac{200}{x} = x + 2 \Leftrightarrow \dfrac{200}{x} = 0{,}5x \Leftrightarrow x^2 = 400 \Leftrightarrow x = 20$. On retrouve le résultat du **1.d.**