Ch 9 : Nombres complexes (partie 1)

I. Définition et propriétés

1) Définition et vocabulaire

Définition : Il existe un ensemble de nombres, noté $\mathbb{C}$, appelé **ensemble des nombres complexes** qui possède les propriétés suivantes :
- $\mathbb{C}$ contient $\mathbb{R}$.
- Dans $\mathbb{C}$, on définit une addition et une multiplication qui suivent les mêmes règles de calcul que dans $\mathbb{R}$.
- Il existe dans $\mathbb{C}$ un nombre i tel que $i^2=-1$.
- Tout élément z de $\mathbb{C}$ s'écrit de manière unique sous la forme $z=a+ib$ avec a et b réels.

Vocabulaire :
- L'écriture $a+ib$ d'un nombre complexe z est appelée la **forme algébrique** de z.
- Le nombre a s'appelle la **partie réelle** et la nombre b s'appelle la **partie imaginaire**.

Exemples :
Les nombres suivants sont des nombres complexes :
- $3+4i$: 3 est la partie réelle et 4 est la partie imaginaire
- $-2-i$: -2 est la partie réelle et -1 est la partie imaginaire
- $\frac{i}{3}$: 0 est la partie réelle et $\frac{1}{3}$ est la partie imaginaire.

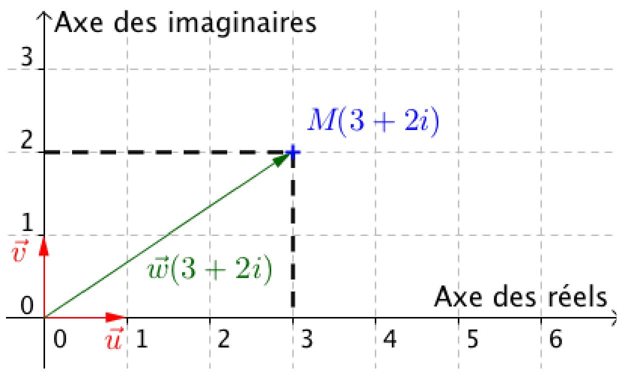
Remarques :
- Si $b=0$ alors z est un nombre réel.
- Si $a=0$ alors z est un nombre **imaginaire pur**.

2) Plan complexe

Dans la suite du chapitre, on munit le plan d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.

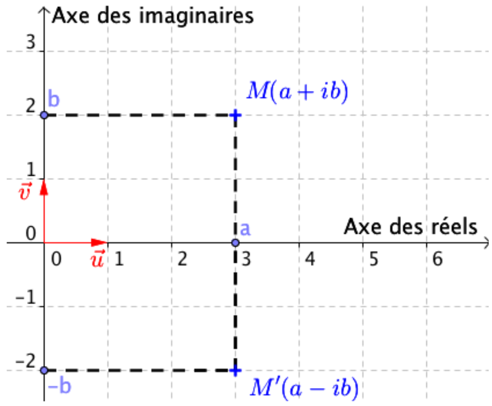
Définition :
A tout point $M(a;b)$ et à tout vecteur $\vec{w}(a;b)$, on associe le nombre complexe $z=a+ib$ appelé **affixe** du point M et **affixe** du vecteur $\vec{w}$.
On note M(z) et $\vec{w}(z)$.

Exemples:



II. Conjugué d'un complexe

Définition : Soit un nombre complexe $z=a+ib$.
On appelle **nombre complexe conjugué** de z, le nombre, noté $\bar{z}$, égal à $a-ib$.



Exemples :
- $z=4+5i$ et $\bar{z}=4-5i$
- On peut également noter :
$\overline{7-3i}=7+3i$; $\bar{i}=-i$; $\bar{5}=5$

Remarque :
Les points d'affixes z et $\bar{z}$ sont symétriques par rapport à l'axe des réels.

Propriétés :

a) $\overline{z+z'}=\bar{z}+\overline{z'}$ b) $\overline{z \times z'}=\bar{z}\times\overline{z'}$ c) $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\overline{z'}}$ avec $z' \neq 0$

Propriété : Soit $z=a+ib$ un nombre complexe alors $z\bar{z}=a^2+b^2$.

III. Forme trigonométrique d'un complexe

1) Module d'un nombre complexe

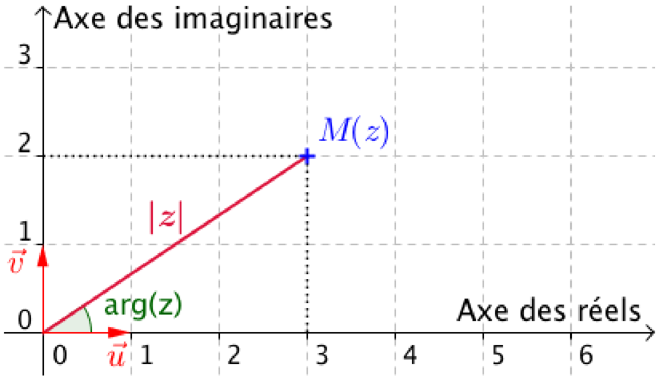
Définition : Soit un nombre complexe $z=a+ib$.
On appelle **module** de z, le nombre réel positif, noté $|z|$, égal à $\sqrt{a^2+b^2}$.

M est un point d'affixe z.
Alors le module de z est égal à la distance
la longueur OM.

Propriétés : a) $|zz'|=|z||z'|$ b) $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$

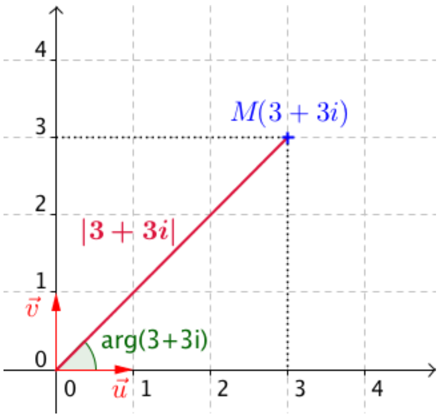
2) Argument d'un nombre complexe

Définition : Soit un point M d'affixe z non nulle.
On appelle **argument** de z, noté arg(z) une mesure, en radians, de l'angle $\left(\vec{u};\overrightarrow{OM}\right)$.



Remarques :
- Un nombre complexe non nul possède une infinité d'arguments de la forme $arg(z)+2k\pi$, $k\in Z$.
On note : $arg(z)[2\pi]$
- 0 n'a pas d'argument car dans ce cas l'angle $\left(\vec{u};\overrightarrow{OM}\right)$ n'est pas défini.

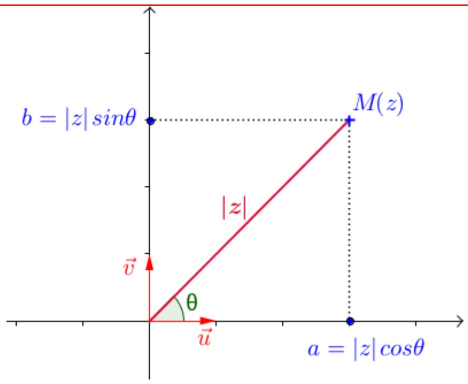
Exemple :



Soit $z=3+3i$.
Alors $|z|=|3+3i|=\sqrt{3^2+3^2}=3\sqrt{2}$ et
$arg(z)=\frac{\pi}{4}[2\pi]$

3) Forme trigonométrique d'un nombre complexe

Définition : On appelle **forme trigonométrique** d'un nombre complexe z non nul l'écriture $z=|z|(\cos\theta+i\sin\theta)$ avec $\theta=arg(z)$.



Exemple : Le nombre complexe $z=3+3i$ s'écrit sous forme trigonométrique :
$z=3\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$

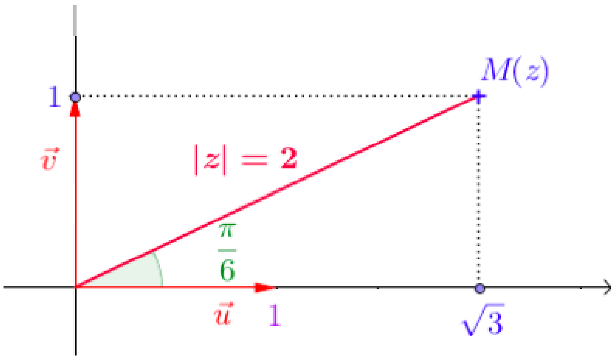
Méthode : Passer de la forme trigonométrique à la forme algébrique

Écrire le nombre complexe $z=3\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$ sous sa forme algébrique.

$$\begin{aligned} z&=3\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)\\ &=3(0+i\times 1)=3i \end{aligned}$$

<u>Méthode :</u> Passer de la forme algébrique à la forme trigonométrique

Écrire le nombre complexe $z=\sqrt{3}+i$ sous sa forme trigonométrique.



- On commence par calculer le module de z :
$|z|=\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+1^2}=\sqrt{3+1}=2$
- En calculant $\frac{z}{|z|}$, on peut identifier plus facilement la partie réelle de z et sa partie imaginaire :
$\frac{z}{|z|}=\frac{\sqrt{3}+i}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$

On cherche donc un argument θ de z tel que : $\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\theta=\frac{1}{2}$.

Comme $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$, on a :

$$\frac{z}{|z|}=\frac{z}{2}=\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

Donc :
$$z=2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$$