<u>Vecteurs directeurs et équations cartésiennes d'une droite</u>

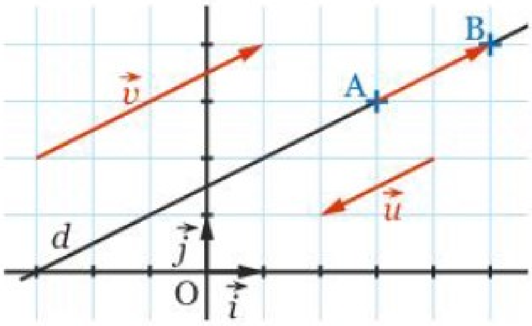
I Vecteurs directeurs

Définition

On appelle **vecteur directeur** d'une droite d tout représentant du vecteur $\overrightarrow{AB}$ où A et B sont deux points quelconques distincts de la droite d.

EXEMPLE

Dans l'image ci-contre, les vecteurs $\overrightarrow{AB}(2\,;1)$, $\vec{u}(-2\,;-1)$ et $\vec{v}(4\,;2)$ sont des vecteurs directeurs de la droite d.



II Equations cartésiennes d'une droite

Théorème

Dans un repère orthonormé, les coordonnées de l'ensemble des points $M(x\,;y)$ d'une droite vérifient une relation $ax+by+c=0$, où a, b et c sont des nombres réels.

DÉMONSTRATION

Soient $P(x_P\,;y_P)$ et $Q(x_Q\,;y_Q)$ deux points de d.

Alors, pour tout point $M(x\,;y)$ appartenant à d :

$\overrightarrow{PM}(x-x_P\,;y-y_P)$ et $\overrightarrow{PQ}(x_Q-x_P\,;y_Q-y_P)$ sont colinéaires.

On a donc $\det\left(\overrightarrow{PM}\,;\overrightarrow{PQ}\right)=0$

c'est-à-dire $(x-x_P)(y_Q-y_P)-(y-y_P)(x_Q-x_P)=0$.

Donc $x(y_Q-y_P)-x_P(y_Q-y_P)-y(x_Q-x_P)+y_P(x_Q-x_P)=0$.

Donc $(y_Q-y_P)x+(x_P-x_Q)y+(y_Px_Q-x_Py_Q)=0$.

En posant $a=y_Q-y_P$, $b=x_P-x_Q$ et $c=x_Qy_P-x_Py_Q$, on a donc $ax+by+c=0$.

Définition

La relation $ax + by + c = 0$ s'appelle **équation cartésienne** de la droite d.

Propriété

Le vecteur $(-b\,;a)$ est un vecteur directeur de la droite d'équation $ax + by + c = 0$.

EXEMPLE

La droite (AB) a pour équation $5x + 4y - 11 = 0$ et le vecteur $\overrightarrow{AB}(-4\,;5)$ est un vecteur directeur.

3) Application

Dans un repère $(O\,;\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ on considère les points A(1 ; 2) et B(4 ; - 2)

On cherche à déterminer une équation cartésienne de la droite (AB).

Soit M(x ; y) un point de la droite (AB). On a $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x - 1 \\ y - 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$

M $\in$ (AB) si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires c'est-à-dire si et seulement si $\det(\overrightarrow{AM}\,;\overrightarrow{AB}) = 0$ c'est-à-dire si et seulement si $-4(x - 1) - 3(y - 2) = 0$

$$-4x + 4 - 3y + 6 = 0$$

$$-4x - 3y + 10 = 0$$

Une équation cartésienne de la droite (AB) est donc $-4x - 3y + 10 = 0$