Ch 2 : Produit scalaire

I. Définition et propriétés

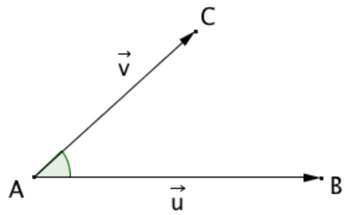
1) Norme d'un vecteur

Définition : Soit un vecteur $\vec{u}$ et deux points A et B tels que $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$.
La **norme du vecteur** $\vec{u}$, notée $\|\vec{u}\|$, est la distance AB.

2) Définition du produit scalaire

Définition : Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan.
On appelle **produit scalaire** de $\vec{u}$ par $\vec{v}$, noté $\vec{u}.\vec{v}$, le nombre réel définit par :

- $\vec{u}.\vec{v}=0$, si l'un des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est nul
- $\vec{u}.\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos(\vec{u};\vec{v})$, dans le cas contraire.



$\vec{u}.\vec{v}$se lit "$\vec{u}$ scalaire $\vec{v}$".

Remarque :
Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont deux représentants des vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ alors :
$\vec{u}.\vec{v}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\|\overrightarrow{AB}\|\times\|\overrightarrow{AC}\|\times\cos\widehat{BAC}$

Attention : Le produit scalaire de deux vecteurs est **un nombre réel**.

3) Propriétés du produit scalaire

Propriété : Pour tout vecteur $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a : $\vec{u}.\vec{v}=\vec{v}.\vec{u}$

Pour tous vecteurs$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, on a :
1) $\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}.\vec{v}+\vec{u}.\vec{w}$ 2) $\vec{u}.(k\vec{v})=k\vec{u}.\vec{v}$, avec k un nombre réel.

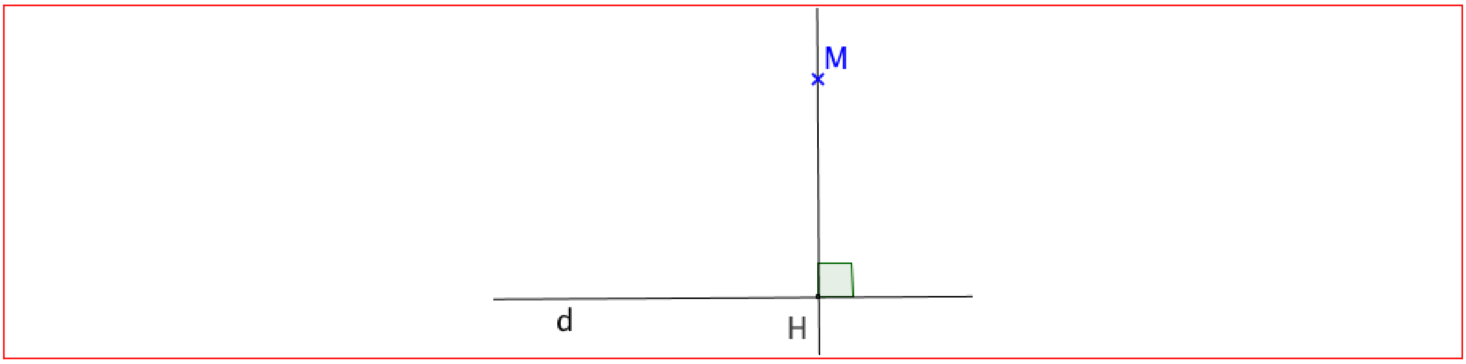
II. Produit scalaire et orthogonalité

1) Vecteurs orthogonaux

Propriété : Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u}.\vec{v}=0$.

2) Projection orthogonale

Définition : Soit une droite d et un point M du plan.
Le **projeté orthogonal** du point M sur la droite d est le point d'intersection H de la droite d avec la perpendiculaire à d passant par M.

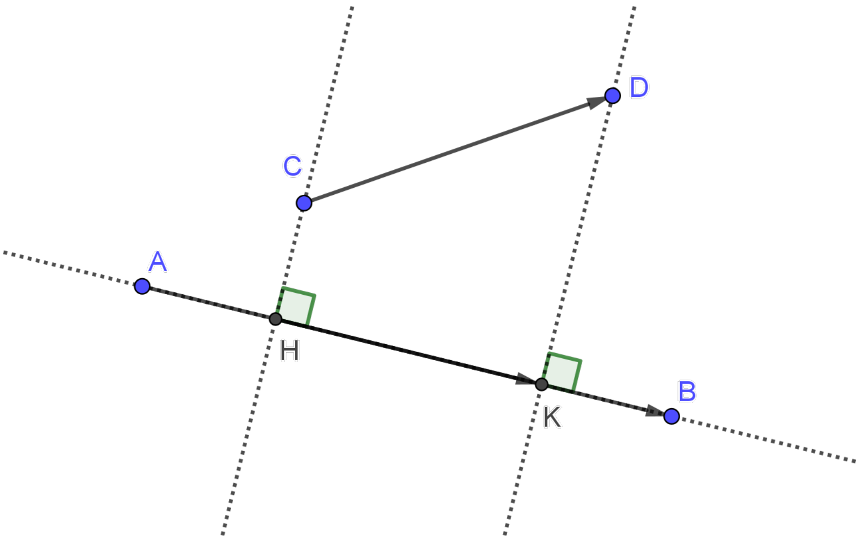


Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls.

Soient A,B,C et D des points du plan tels que $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$ et $\overrightarrow{CD}=\vec{v}$.

Soit H le projeté orthogonal de C sur (AB). Soit K le projeté orthogonal de D sur (AB).

Le vecteur $\overrightarrow{HK}$ est appelé projeté orthogonal de $\vec{v}$ sur (AB).

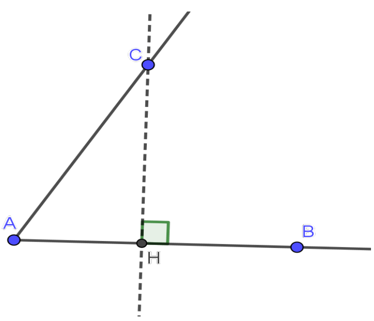


Propriété : $\vec{u}\cdot\vec{v}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{HK}=\begin{cases} AB\times HK & \text{si } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{HK} \text{ ont même sens} \\ -AB\times HK & \text{si } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{HK} \text{ sont de sens opposés} \end{cases}$

<u>On retiendra que</u> : lorsque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires :

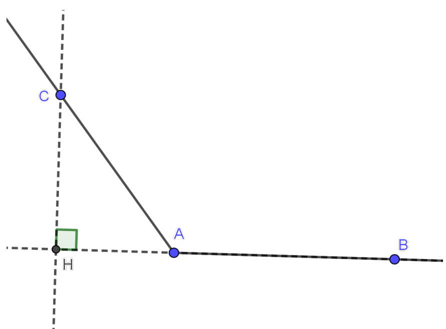
- $\vec{u}.\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|$ si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont même sens
- $\vec{u}.\vec{v}=-\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|$ si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont des sens contraires

<u>remarque :</u> on a donc $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}>0$ lorsque $\widehat{BAC}$ est aigu, et $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}<0$ lorsque $\widehat{BAC}$ est obtus :



$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\times AH>0$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-AB\times AH<0$



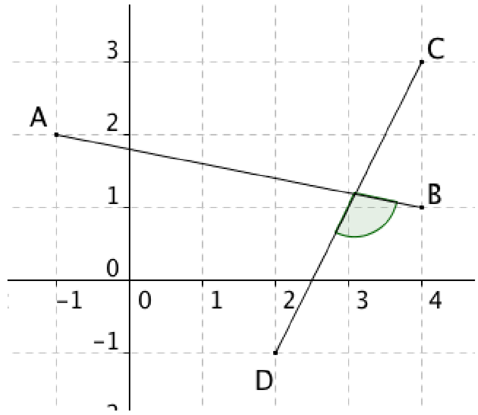
III. Produit scalaire dans un repère orthonormé

Le plan est muni d'un repère **orthonormé** $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Propriété : Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de coordonnées respectives $(x;y)$ et $(x';y')$.
On a : $\vec{u}.\vec{v}=xx'+yy'$ et $\|\vec{u}\|^2=x^2+y^2$.

Méthode : Déterminer un angle à l'aide du produit scalaire

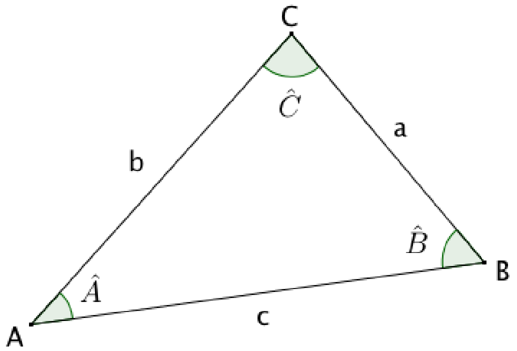
Calculer la mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD})$ en lisant
Les coordonnées de A, B, C et D ;



IV. Théorème d'Al Kashi

Théorème : Dans un triangle ABC, on a, avec les notations de la figure :

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\widehat{A}$$



A noter : Si le triangle ABC est rectangle, on retrouve le théorème de Pythagore.

Méthode : Appliquer le théorème d'Al Kashi

On considère la figure ci-contre, calculer la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$ au degré près.