Ch 2 : Suites arithmétiques

I. Rappels et expression du terme général d'une suite arithmétique

1) Exemple

On considère la liste des trois nombres suivants : –2, 5 et 12.
Dans cet ordre, ces nombres peuvent-ils être les termes consécutifs d'une suite arithmétique ?
Pour y répondre, il faut s'assurer que la différence entre deux termes consécutifs reste la même.
12 – 5 = 7
5 – (–2) = 7
Cette différence reste égale à 7.
–2, 5 et 12 sont bien les termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison 7.

Si on note (u_n) cette suite, on a : $u_{n+1}=u_n+7$.

2) Forme explicite d'une suite arithmétique

Méthode : Exprimer une suite arithmétique en fonction de *n*

Pour préparer une course, un athlète décide de s'entraîner de façon progressive. Il commence son entraînement au « jour 0 » par un petit footing d'une longueur de 3000 m. Au « jour 1 », il court 3150 m. Au « jour 2 », il court 3300 m puis ainsi de suite en parcourant chaque jour 150 m de plus que la veille.
On note u_n la distance parcourue au « jour *n* » d'entraînement.

1) Calculer u_3 et u_4.

2) Quelle est la nature de la suite (u_n) ? On donnera son premier terme et sa raison.

3) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.

4) Donner la variation de la suite (u_n).

5) Exprimer u_n en fonction de *n*.

1) u_0= 3000
u_1 = 3150
u_2 = 3300
u_3 = 3450
u_4 = 3600

2) (u_n) est une suite arithmétique de premier terme u_0 = 3000 et de raison r = 150.
On parle ici de **croissance linéaire**.

3) $u_{n+1}=u_n+150$

4) r = 150 > 0 donc la suite (u_n) est croissante.

Propriété : Si (u_n) est une suite arithmétique de raison r, on a :
$$u_n=u_0+nr$$
$$u_n=u_1+(n-1)r$$

5) Après 1 jour, il parcourt : $u_1=3000+150\times1$
Après 2 jours, il parcourt : $u_2=3000+150\times2$
Après 3 jours, il parcourt : $u_3=3000+150\times3$
De manière générale, après n jours, il parcourt : $u_n=3000+150n$

II. Somme des termes d'une suite arithmétique

Méthode : Calculer la somme des termes d'une suite arithmétique

On reprend le contexte de la méthode du paragraphe I.
1) Quelle distance aura-t-il parcourue **au total** lorsqu'il sera au « jour 15 » de son entraînement ?
2) Quelle distance aura-t-il parcourue **au total** entre le « jour 8 » et le « jour 12 » ?

1) La distance parcourue au total au « jour 15 » d'entraînement est :
$$S=u_0+u_1+u_2+\ldots+u_{15}$$

Propriété :
Somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique :
$$Somme=nombre\,de\,termes\times\frac{1\,er\,terme+dernier\,terme}{2}$$

Ainsi :
$$Somme=16\times\frac{u_0+u_{15}}{2}=16\times\frac{3000+3000+150\times15}{2}=16\times\frac{8250}{2}=66000$$

Pour vérifier, on peut utiliser la calculatrice :

Sur TI :
- Pour accéder au catalogue : « 2nde » puis « 0 ».
- Appuyer sur « ln » pour accéder aux fonctionnalités commençant par « S ».
- Choisir « som(» ou « somme(» ou « sum(» (suivant les modèles).
- Procéder de même pour afficher « suite(» ou « seq(» (suivant les modèles).
- Et compléter pour afficher : **som(suite(3000+150X,X,0,15))**

La calculatrice affiche 66 000. Ce qui signifie que l'athlète a parcouru 66 000 m soit
66 km au « jour 15 » d'entraînement.

Pour noter une telle somme, on peut utiliser le symbole $\sum$:

$u_0+u_1+u_2+\ldots+u_{15}=\sum_{k=0}^{15} u_k=66000$

2) La distance parcourue au total entre le « jour 8 » et le « jour 12 » d'entraînement est :

$u_8+u_9+u_{10}+u_{11}+u_{12}=\sum_{k=8}^{12} u_k$

$$Somme=5\times\frac{u_8+u_{12}}{2}=5\times\frac{3000+150\times 8+3000+150\times 12}{2}=5\times\frac{9000}{2}=22500$$

Pour vérifier, on saisit sur la calculatrice :

Sur TI : **som(suite(3000+150X,X,8,12))**

La calculatrice affiche 22 500. Ce qui signifie que l'athlète a parcouru 22 500 m soit 22,5 km au total entre le « jour 8 » et le « jour 12 »d'entraînement.

$u_8+u_9+u_{10}+u_{11}+u_{12}=\sum_{k=8}^{12} u_k=22500$

III. Moyenne arithmétique de deux nombres

Méthode : Calculer une moyenne arithmétique de deux nombres

1) Calculer la moyenne arithmétique des nombres –3 et 19.
2) Peut-on affirmer que chaque terme d'une suite arithmétique est la moyenne arithmétique du terme qui le précède et du terme qui le suit.

En mathématiques, la **moyenne arithmétique** d'une liste de nombres est la somme des valeurs divisée par le nombre de valeurs.

1) La moyenne arithmétique d'une suite de valeurs est donc la moyenne que l'on connaît depuis le collège.
Soit ici :

$m=\frac{-3+19}{2}=\frac{16}{2}=8$

2) Si on note u_n le terme d'une suite arithmétique, on a : $u_{n+1}=u_n+r$, où r est la raison de la suite.

Et on a également : $u_n = u_{n-1} + r$ donc $u_{n-1} = u_n - r$

La moyenne arithmétique du terme qui précède u_n et du terme qui le suit est égale à :

$$m = \frac{u_{n-1} + u_{n+1}}{2} = \frac{u_n - r + u_n + r}{2} = \frac{2u_n}{2} = u_n$$

Donc u_n est la moyenne arithmétique du terme qui le précède et du terme qui le suit.

RÉSUMÉ	(u_n) une **suite arithmétique** - de **raison** r - de **premier terme** u_0.	**Exemple :** $r = -0{,}5$ et $u_0 = 4$
Définition	$u_{n+1} = u_n + r$	$u_{n+1} = u_n - 0{,}5$ La différence entre un terme et son précédent est égale à –0,5.
Propriété	$u_n = u_0 + nr$ $u_n = u_1 + (n-1)r$	$u_n = 4 - 0{,}5n$
Variations	Si $r > 0$: (u_n) est croissante. Si $r < 0$: (u_n) est décroissante.	$r = -0{,}5 < 0$ La suite (u_n) est décroissante.
Somme des termes consécutifs	$Somme = nombre\,de\,termes \times \frac{1\,er\,terme + dernier\,terme}{2}$	$u_3 + \ldots + u_{10} = 8 \times \frac{u_3 + u_{10}}{2}$
Représentation graphique	Remarques : Les points de la représentation graphique sont alignés. On parle de croissance linéaire.