Fonctions de référence

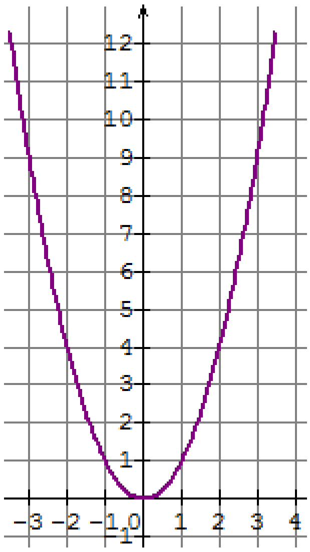
I Fonction carré

1) Définition

La fonction carré est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.

2) Représentation graphique

x	- 3	- 2	- 1	- 0,5	0	0,5	1	2	3
$f(x)$	9	4	1	0.25	0	0.25	1	4	9



Cette courbe représentative est <u>une parabole</u>

Pour tout x réel on a $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$ $\qquad f$ est une fonction paire sur $\mathbb{R}$

Cela ce traduit graphiquement par le fait que dans un repère orthogonal la courbe représentative de f est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

3) Sens de variation

x	$-\infty$		0		$+\infty$
variations de $f(x) = x^2$		↘	0	↗	

Démonstration :

Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$ (on a donc $a - b < 0$)

$f(a) - f(b) = a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

1^ier^ cas : Si a et b sont positifs ou nuls

Dans ce cas $a + b > 0$ et comme $a - b < 0$ on en déduit que $(a - b)(a + b) < 0$

Ainsi $f(a) - f(b) < 0$ d'où $f(a) < f(b)$ et f est strictement croissante sur $[\,0\,;+\infty\,[$

2^ième^ cas : Si a et b sont négatifs ou nuls

Dans ce cas $a + b < 0$ et comme $a - b < 0$ on en déduit que $(a - b)(a + b) > 0$

Ainsi $f(a) - f(b) > 0$ d'où $f(a) > f(b)$ et f est strictement décroissante sur $]-\infty\,;0\,]$

4) Comparaison de deux carrés

Le sens de variation de la fonction carré permet d'établir la propriété :

Pour tous nombres a et b positifs, $0 < a < b$ si et seulement si $a^2 < b^2$
Pour tous nombres a et b négatifs, $a < b < 0$ si et seulement si $a^2 > b^2$

Exemples : $3^2 < 5^2$ car $0 < 3 < 5$ et $(-2)^2 < (-3)^2$ car $-3 < -2 < 0$

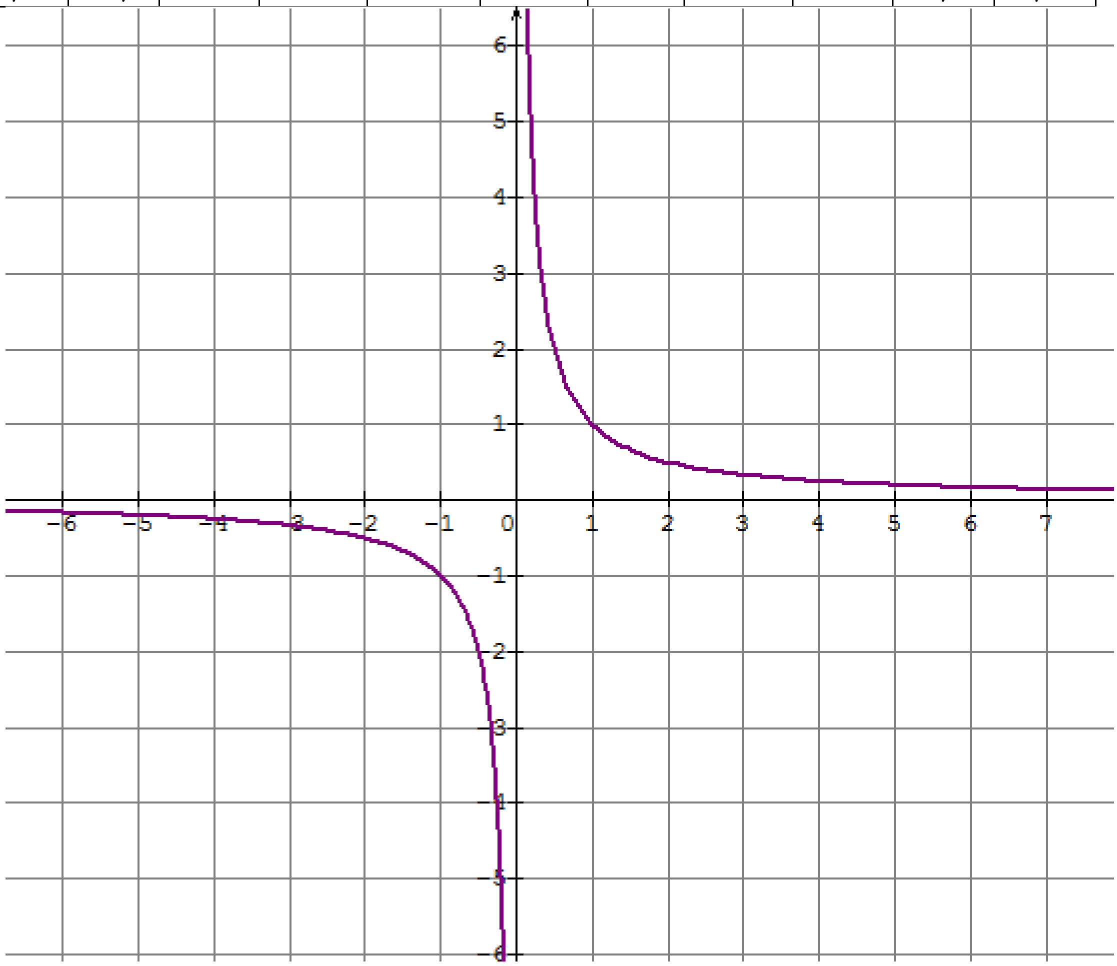
II Fonction inverse

1) Définition

La fonction inverse est la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $g(x) = \dfrac{1}{x}$.

2) Représentation graphique

x	- 4	- 2	- 1	- 0,5	- 0,25	0	0,25	0,5	1	2	4
$g(x)$	- 0,25	- 0,5	- 1	- 2	- 4	xxxxx	4	2	1	0,5	0,25



Cette courbe représentative est une hyperbole

Pour tout x réel non nul on a $g(-x) = \dfrac{1}{-x} = -\dfrac{1}{x} = -g(x)$ g est une fonction impaire sur $\mathbb{R}^*$

Cela ce traduit graphiquement par le fait que dans un repère la courbe représentative de g est symétrique par rapport à l'origine du repère.

3) Sens de variation

x	$-\infty$		0		$+\infty$
variations de $g(x) = \dfrac{1}{x}$		$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$	

Démonstration :
Soient a et b deux nombres réels non nuls tels que $a < b$

$$g(a) - g(b) = \frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b - a}{ab}$$

Lorsque a et b sont de même signe $a\,b$ est strictement positif.
D'autre part $b - a > 0$ (car $a < b$) et on déduit donc que $g(a) - g(b) > 0$ c'est-à-dire que $g(a) > g(b)$
Ainsi g est strictement décroissante sur $]-\infty\,;\,0[$ et sur $]0\,;\,+\infty[$

4) Comparaison de deux inverses

Le sens de variation de la fonction inverse permet d'établir la propriété :

Pour tous nombres a et b de même signe, $a < b$ si et seulement si $\dfrac{1}{a} > \dfrac{1}{b}$

Exemples : $\dfrac{1}{3} > \dfrac{1}{5}$ car $0 < 3 < 5$ et $\dfrac{1}{-2} < \dfrac{1}{-3}$ car $-3 < -2 < 0$

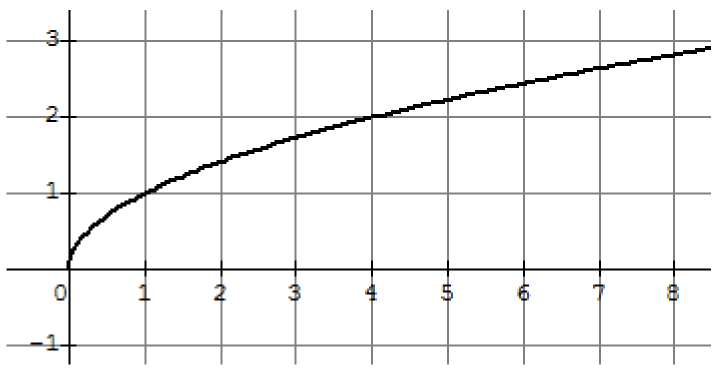
5) Fonctions homographiques

Définition : Soient a, b, c et d des nombres réels avec $c \neq 0$.
On appelle fonction homographique toute fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$ par $f(x) = \dfrac{ax + b}{cx + d}$
Sa courbe représentative est une hyperbole.

III Fonction racine carrée

1) Définition
La fonction racine carrée est la fonction qui à tout réel $x \geqslant 0$ associe sa racine carrée $\sqrt{x}$.
Autrement dit **la fonction racine carrée est définie sur $[0\,;\,+\infty[$** par $h(x) = \sqrt{x}$

2) Représentation graphique



3) Sens de variation

x	0 $+\infty$
fonction racine carrée $h(x) = \sqrt{x}$	0 ↗

Démonstration :

Soient a et b deux nombres réels tels que $0 \leqslant a < b$

$$h(a) - h(b) = \sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{a - b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$$

$0 \leqslant a < b$ donc $a - b < 0$ et $\sqrt{a} + \sqrt{b} > 0$

On en déduit donc que $h(a) - h(b) < 0$ c'est-à-dire que $h(a) < h(b)$

Ainsi h est strictement croissante sur $[\, 0 \,;\, +\infty \,[$

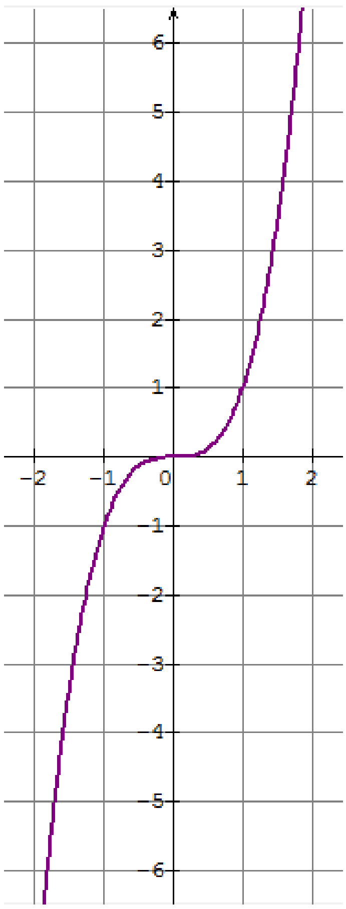
IV Fonction cube

1) Définition

La fonction cube est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $k(x) = x^3$.

2) Représentation graphique

x	- 3	- 2	- 1	- 0,5	0	0,5	1	2	3
$k(x)$	- 27	- 8	- 1	- 0,125	0	0,125	1	8	27



Pour tout x réel on a $k(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -k(x)$ k est une fonction impaire sur $\mathbb{R}$

Cela ce traduit graphiquement par le fait que dans un repère la courbe représentative de k est symétrique par rapport à l'origine du repère.

3) Sens de variation

x	$-\infty$	$+\infty$
variations de $k(x) = x^3$	↗	

La fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

Démonstration :
Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$ (on a donc $a - b < 0$)

$k(a) - k(b) = a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

1^ier cas : Si a et b sont positifs ou nuls
Dans ce cas $a^2 + ab + b^2 > 0$ et comme $a - b < 0$ on en déduit que $(a - b)(a^2 + ab + b^2) < 0$
Ainsi $k(a) - k(b) < 0$ d'où $k(a) < k(b)$ et k est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$

2^ième cas : Si a et b sont négatifs ou nuls
Dans ce cas on a aussi $a^2 + ab + b^2 > 0$ et comme $a - b < 0$ on en déduit que $(a - b)(a^2 + ab + b^2) < 0$
Ainsi $k(a) - k(b) < 0$ d'où $k(a) < k(b)$ et k est strictement croissante sur $]-\infty ; 0]$

Propriété : Pour tout réel a, l'équation $x^3 = a$ admet exactement une solution que l'on appelle racine cubique de a et que l'on note $\sqrt[3]{a}$

Exemple : $\sqrt[3]{125} = 5$ car $5^3 = 125$

V Position relatives des courbes sur $\mathbb{R}^+$

Théorème : Soit x un réel positif ou nul.
- Si $0 < x < 1$, alors $x > x^2 > x^3$
- Si $x > 1$ alors $x < x^2 < x^3$
- Si $x = 0$ ou $x = 1$ alors $x = x^2 = x^3$

Théorème : Soit x un réel positif ou nul.
- Si $0 < x < 1$, alors $\sqrt{x} > x$
- Si $x > 1$ alors $\sqrt{x} < x$
- Si $x = 0$ ou $x = 1$ alors $\sqrt{x} = x$