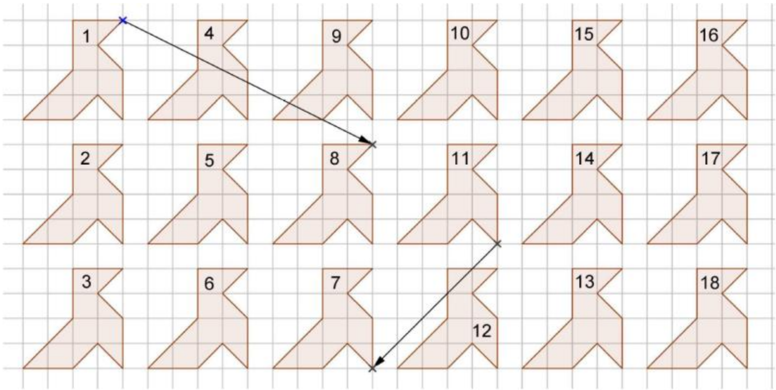
Chapitre 9 : Translations et vecteurs

I Notion de vecteurs

1) Translation

Activité 1 : 1) On considère la translation qui transforme la cocotte 1 en la cocotte 8.



Par cette translation, quelles seraient les images de :

La cocotte 5 ? La cocotte 4 ? La cocotte 10 ?

2) On considère maintenant la translation qui transforme la cocotte 11 en la cocotte 7.

Par cette nouvelle translation, quelles seraient les images de :

La cocotte 5 ? La cocotte 14 ? La cocotte 10 ? La cocotte 4 ? La cocotte 16 ?

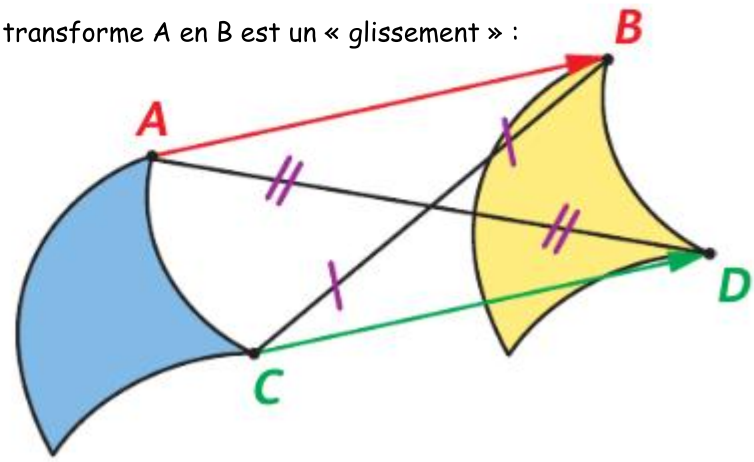
Définition : Soient A et B deux points du plan. La translation qui transforme A en B associe à tout point C du plan, l'unique point D tel que les segments [AD] et [BC] aient même milieu.

On dit que D est l'image de C par cette translation.

Autrement dit : D est l'image de C par la translation qui transforme A en B si et seulement si ABDC est un parallélogramme (éventuellement aplati)

Lorsque A et B sont distincts, la translation qui transforme A en B est un « glissement » :

- dans la direction de la droite (AB) ;
- dans le sens de A vers B ;
- de longueur AB.



Propriétés : Une translation conserve :

- les longueurs
- l'alignement
- les mesures d'angles
- les aires

2) Vecteurs

Définition : La translation qui transforme A en B est appelée translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$

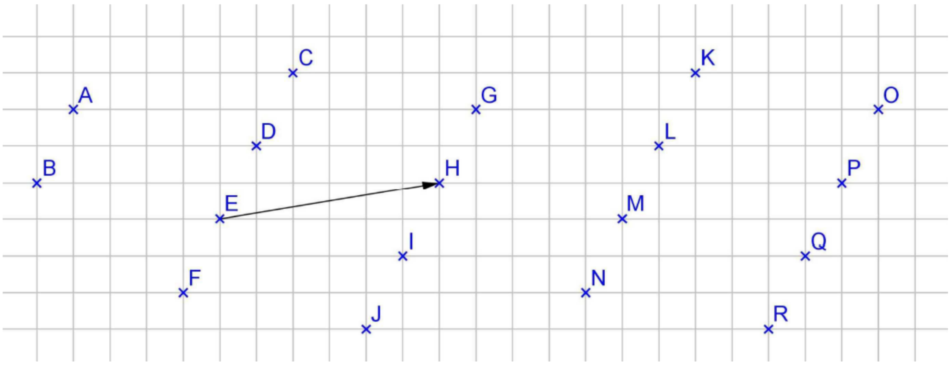
Ce vecteur $\overrightarrow{AB}$ est caractérisé par :

- sa direction : celle de la droite (AB)
- son sens : celui de A vers B
- sa norme, notée $\|\overrightarrow{AB}\|$: la longueur AB.

Remarques :

- Lorsque les points A et B sont distincts, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est représenté sur une figure par une flèche depuis A vers B.
- Le point A est appelé origine du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
- Le point B est appelé extrémité du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

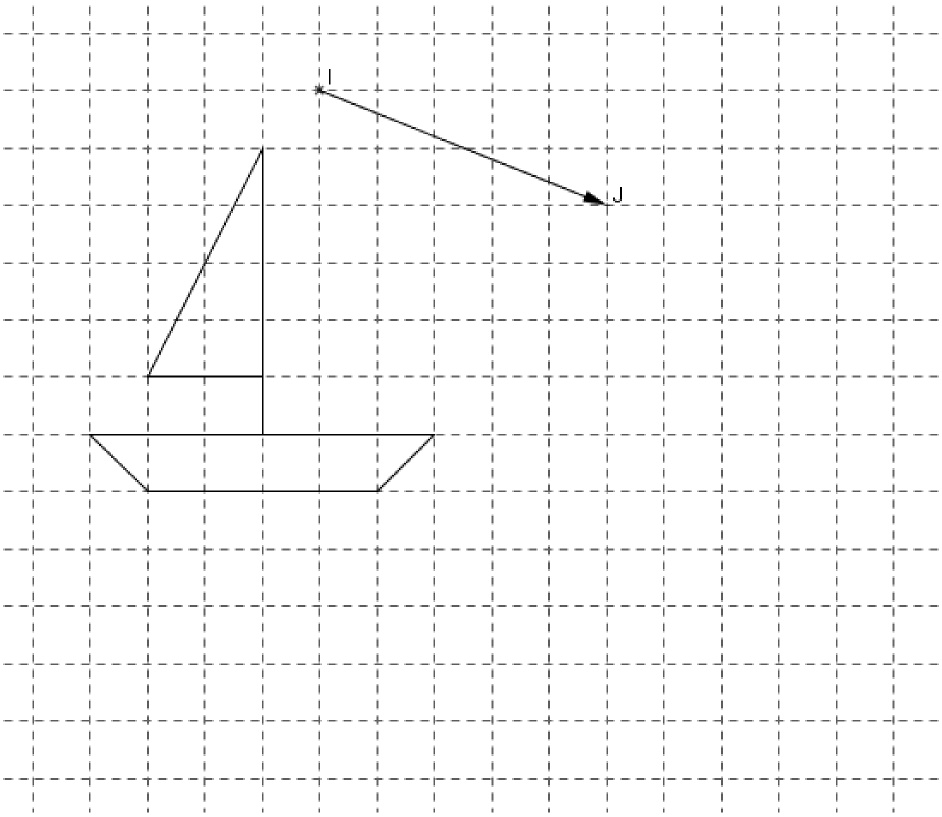
Activité 2 : 1)



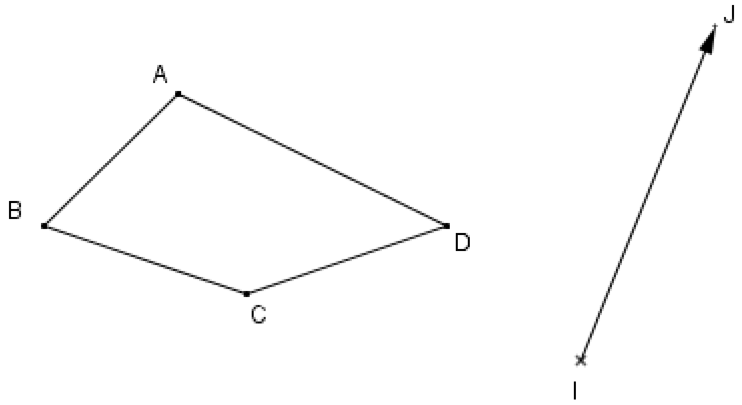
Par la translation de vecteur $\overrightarrow{EH}$: Quelle est l'image de M ? de I ? de B ? de L ? de J ?

Par la translation de vecteur $\overrightarrow{DM}$: Quelle est l'image de C ? de H ? de B ? de I ? de E ?

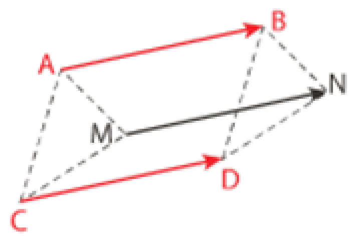
2) Construire l'image de la figure ci-dessous par la translation de vecteur $\overrightarrow{IJ}$



3) Construire l'image du quadrilatère ABCD par la translation de vecteur $\overrightarrow{IJ}$.



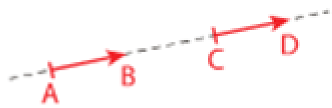
3) Vecteurs égaux



ABDC parallélogramme

<u>Définition :</u> Dire que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux signifie que la translation qui transforme A en B associe au point C le point D.

On note $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

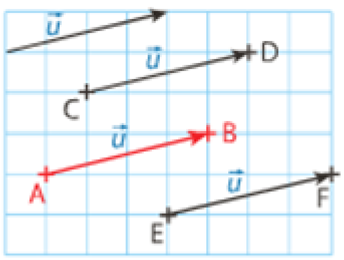


ABDC parallélogramme aplati

<u>Propriété :</u> Deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux si et seulement si le quadrilatère ABDC est un parallélogramme éventuellement aplati.

4) Représentants d'un vecteur

Soit $\overrightarrow{AB}$ un vecteur. On peut tracer à partir de n'importe quel point du plan un vecteur égal au vecteur $\overrightarrow{AB}$:



On note alors ce vecteur à l'aide d'une seule lettre : $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF}$

$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont alors des représentants du vecteur $\overrightarrow{u}$.

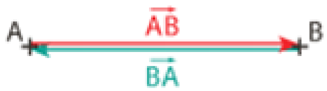
5) Vecteurs particuliers

• Le vecteur nul, noté $\overrightarrow{0}$, est associé à la translation qui transforme A en A, B en B, C en C …

Ainsi $\overrightarrow{0} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{CC} = …$

• Le vecteur opposé au vecteur $\overrightarrow{AB}$ est le vecteur associé à la translation qui transforme B en A.

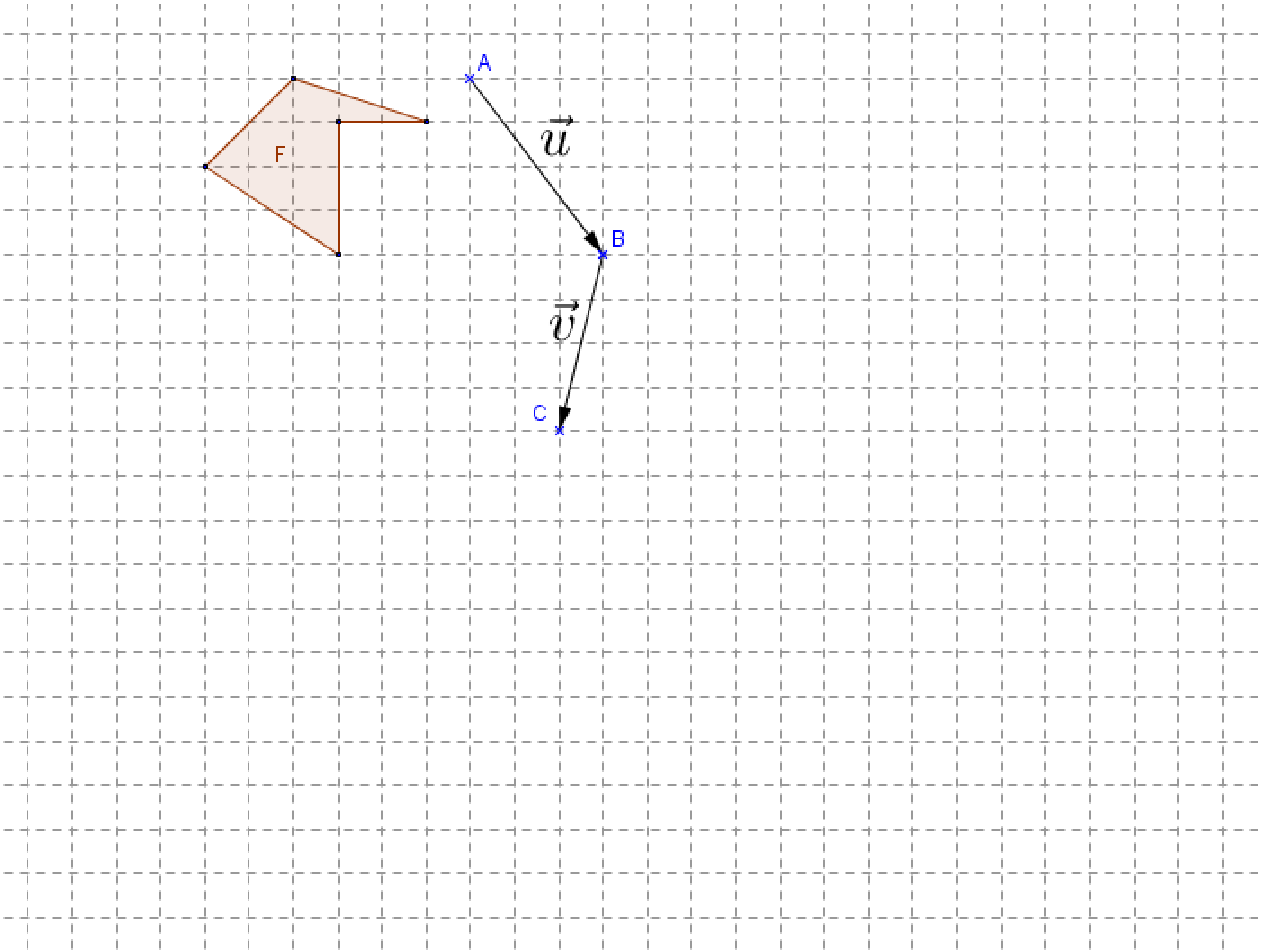
C'est le vecteur $\overrightarrow{BA}$ et on note $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$



II Somme de deux vecteurs

1) Découverte

Activité 3 : Somme de deux vecteurs



1) Construire F' l'image de la figure F par la translation de vecteur $\vec{u}$ puis F'' l'image de la figure F' par la translation de vecteur $\vec{v}$

2) Conjecturer la nature de la transformation qui transforme F en F''.

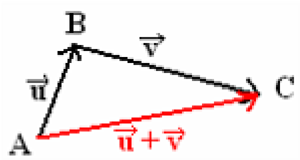
3) Démontrer la conjecture précédente.

Définition : La somme de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur associé à la translation correspondant à l'enchainement des translations de vecteur $\vec{u}$ et de vecteur $\vec{v}$.

On note ce vecteur $\vec{u} + \vec{v}$.

2) Représentation de la somme de deux vecteurs

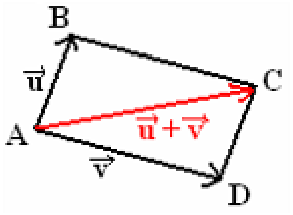
1[er] cas :



Relation de Chasles

Quels que soient les points A, B et C du plan on a $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$

2$^{\text{ième}}$ cas :



Quels que soient les points A, B, C et D du plan :
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ si et seulement si ABCD est un parallélogramme.

3$^{\text{ième}}$ cas : Si on ne se trouve pas dans l'un des deux premiers cas on s'y ramène en utilisant d'autres représentants des vecteurs dont on étudie la somme.

3) Propriétés

Propriétés : Quels que soient les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ du plan on a :

1) $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}$ 2) $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{u}$ 3) $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) + \overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w})$

4) Différence de deux vecteurs

On note $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$ le vecteur $\overrightarrow{u} + (-\overrightarrow{v})$