Ch 1 : Fonctions, dérivation et fonction inverse

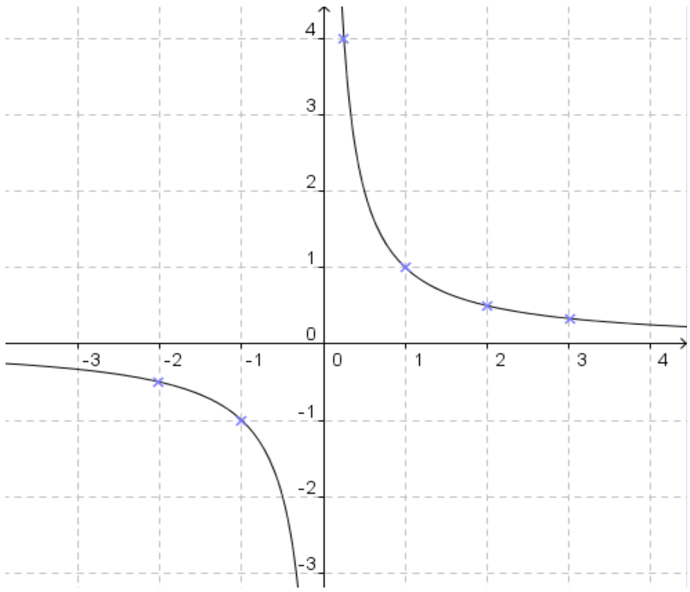
I. Définition et allure de la courbe

1) Définition

Définition : La **fonction inverse** f est définie sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ par $f(x)=\dfrac{1}{x}$.

2) Représentation graphique

x	-2	-1	0,25	1	2	3
$f(x)$	$-0{,}5$	-1	4	1	0,5	$\approx 0{,}33$



Remarque :

La courbe d'équation $y=\dfrac{1}{x}$ de la fonction inverse, appelée **hyperbole** de centre O, est symétrique par rapport à l'origine.

II. Dérivée et sens de variation

1) Dérivée

Propriété : (rappel)

La dérivée de la fonction inverse f est définie sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ par $f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$

Démonstration (pour les experts) :

Soient a et h deux réels non nuls, le taux d'accroissement de f entre a et a+h est:

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{\frac{1}{a+h}-\frac{1}{a}}{h} = \frac{\frac{a}{a(a+h)}-\frac{a+h}{a(a+h)}}{h} = \frac{\frac{-h}{a(a+h)}}{h} = -\frac{1}{a(a+h)}$$

Or : $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\left(\dfrac{-1}{a(a+h)}\right) = -\dfrac{1}{a^2}$

Pour tout nombre a, le nombre dérivé de la fonction f en a est égal à $-\dfrac{1}{a^2}$.

Ainsi, pour tout x de $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, on a : $f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$.

2) Variations

Propriété : La fonction inverse est décroissante sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$.

Démonstration :

Pour tout x de $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, $f'(x)<0$. On en déduit que f est décroissante sur chaque intervalle sur lequel f' reste négative.

Donc f est décroissante sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$.

III. Comportement de la fonction inverse aux bornes de son ensemble de définition

1) En $+\infty$

On s'intéresse aux valeurs de $f(x)$ lorsque x devient de plus en plus grand.

x	5	10	100	10000	...
$f(x)$	0,2	0,1	0,01	0,00001	?

On constate que $f(x)$ se rapproche de 0 lorsque x devient de plus en plus grand.

On dit que la limite de f lorsque x tend vers $+\infty$ est égale à 0 et on note :

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

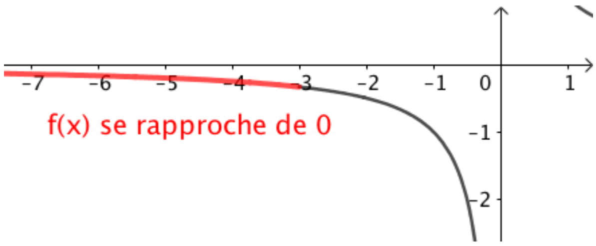
Graphiquement, pour des valeurs de plus en plus grandes, la courbe de f se rapproche de plus en plus de l'axe des abscisses.

2) En $-\infty$

On s'intéresse aux valeurs de $f(x)$ lorsque x devient de plus en plus « grand dans les négatifs »

x	...	-10000	-100	-10	-5
$f(x)$	?	-0,00001	-0,01	-0,1	-0,2

On constate que $f(x)$ se rapproche de 0 lorsque x devient de plus en plus « grand dans les négatifs ».
On dit que la limite de f lorsque x tend vers $-\infty$ est égale à 0 et on note :
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$.



Graphiquement, pour des valeurs de plus en plus « grandes dans les négatifs », la courbe de f se rapproche de plus en plus de l'axe des abscisses.

On dit que l'axe des abscisses est une **asymptote horizontale** à la courbe de la fonction inverse en $-\infty$ et en $+\infty$.

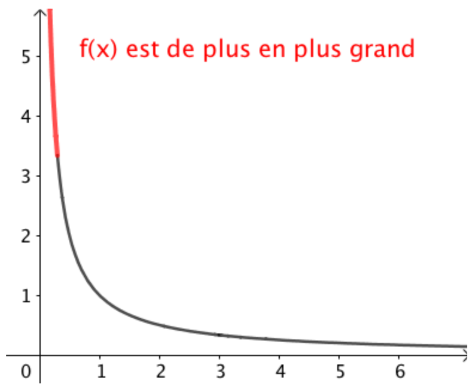
3) Au voisinage de 0

L'image de 0 par la fonction f n'existe pas. On s'intéresse cependant aux valeurs de $f(x)$ lorsque x se rapproche de 0.

x	-0,5	-0,1	-0,01	-0,001	...	0,001	0,01	0,1	0,5
$f(x)$	-2	-10	-100	-1000	?	1000	100	10	2

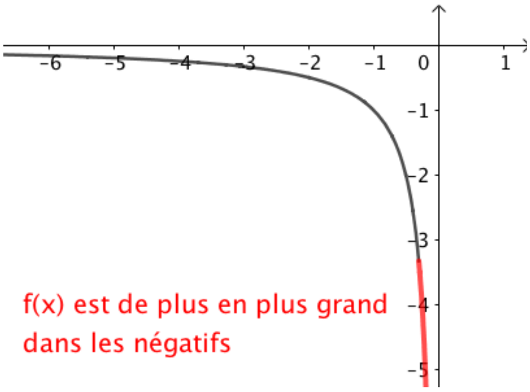
A l'aide de la calculatrice, on constate que :
- Pour $x>0$: $f(x)$ devient de plus en plus grand lorsque x se rapproche de 0.

On dit que la limite de f lorsque x tend vers 0 pour $x>0$ est égale à $+\infty$ et on note :



$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x)=+\infty.$

Graphiquement, pour des valeurs positives, de plus en plus en proches de 0, la courbe de f se rapproche de plus en plus de l'axe des ordonnées.



- Pour $x<0$: $f(x)$ devient de plus en plus « grand dans les négatifs » lorsque x se rapproche de 0.

On dit que la limite de f lorsque x tend vers 0 pour $x<0$ est égale à $-\infty$ et on note :

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} f(x)=-\infty.$

Graphiquement, pour des valeurs négatives, de plus en plus en proches de 0, la courbe de f se rapproche de plus en plus de l'axe des ordonnées.

On dit que l'axe des ordonnées est une **asymptote verticale** à la courbe de la fonction inverse.

<u>Méthode :</u> Étudier une fonction obtenue par combinaisons linéaires de la fonction inverse et d'une fonction polynomiale

Soit la fonction f définie sur $R\setminus\{0\}$ par $f(x)=1-2x-\dfrac{2}{x}$

1) Calculer la fonction dérivée de f.
2) Déterminer le signe de f' en fonction de x.
3) Dresser le tableau de variations de f.
4) Vérifier en comparant à la représentation graphique donnée par la calculatrice.

1) On a : $f(x)=1-2x-2\times\dfrac{1}{x}$

Donc : $f'(x)=-2-2\times\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)$

$$=-2+\frac{2}{x^2}$$

$$=\frac{-2x^2}{x^2}+\frac{2}{x^2}$$

$$=\frac{2-2x^2}{x^2}$$

Rappels sur les formulas de dérivation :

$(f+g)'=f'+g'$	
$(kf)'=kf'$ $a\in R$	

Fonction f	Dérivée f'
$f(x)=a,\ a\in R$	$f'(x)=0$
$f(x)=ax,\ a\in R$	$f'(x)=a$

2) On commence par résoudre l'équation $f'(x)=0$.

Soit : $2-2x^2=0$

Donc : $2=2x^2$

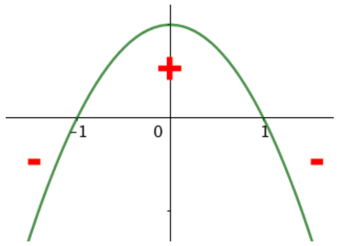
Soit : $x^2=1$

Et donc : $x=1$ ou $x=-1$.

f' est du signe du numérateur car le dénominateur est positif.

Le numérateur est une fonction du second degré représentée par une parabole sont les branches sont tournées vers le bas ($a=-2$ est négatif).

Elle est donc d'abord négative (avant $x=-1$) puis positive (entre $x=-1$ et $x=1$) et à nouveau négative (après $x=1$).



3) On dresse alors le tableau de variations :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
f		$\searrow$	5	$\nearrow$	$\Vert$	$\nearrow$	-3	$\searrow$	

En effet : $f(-1)=1-2\times(-1)-\dfrac{2}{-1}=5$

$f(1)=1-2\times1-\dfrac{2}{1}=-3$

4) En testant, pour des valeurs négatives de plus en plus en proches de 0, $f(x)$ devient de plus en plus grand. Pour des valeurs positives, $f(x)$ devient de plus en plus « grand dans les négatifs ».

L'axe des ordonnées est une asymptote verticale à la courbe de la fonction f.