Equations de droites – Système linéaire de deux équations à deux inconnues

I Equations de droites

1) Rappels sur les fonctions affines

Définition : Une fonction affine f est une fonction définie pour tout nombre réel x par $f(x) = ax + b$ où a et b sont des réels donnés.

a est appelé coefficient directeur, b est appelé ordonnée à l'origine.

Propriété : La représentation graphique d'une fonction affine est une droite

2) Equations de droites

Propriété : Dans un repère $(O\ ;\ \vec{i}\ ,\ \vec{j})$ toute droite (d) non parallèle à l'axe des ordonnées est la représentation graphique d'une fonction affine.

Elle admet donc une équation de la forme $y = mx + p$ où m et p sont des nombres réels

m est appelé coefficient directeur de la droite et p est appelé ordonnée à l'origine.

Démonstration

La droite (d) n'étant pas parallèle à l'axe des ordonnées, elle le coupe en un point A.

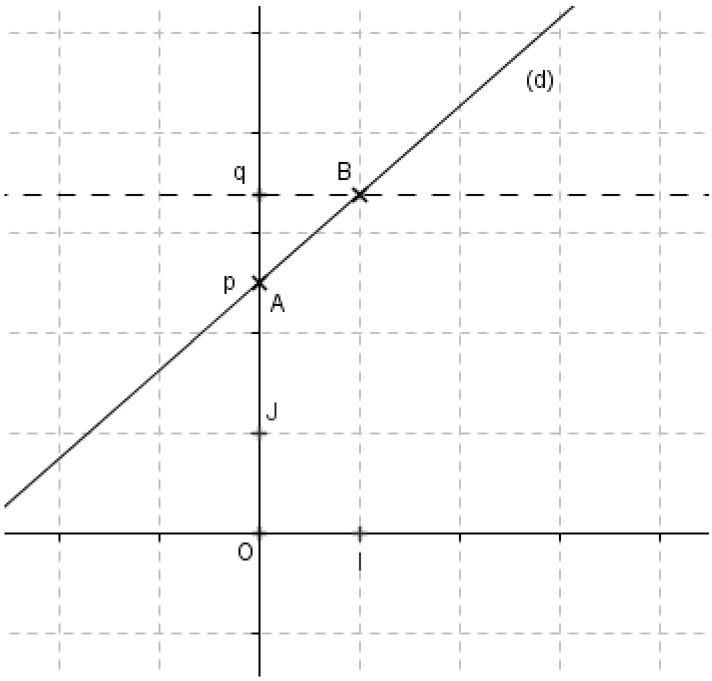
Elle coupe aussi la parallèle à l'axe des ordonnées passant par le point I(1 ; 0). On note B le point d'intersection.

On a donc A(0 ; p) et B(1 ; q)

Soit f la fonction affine définie par $f(x) = (q - p)x + p$

On a $f(0) = p$ et $f(1) = q$

La représentation graphique de f est donc la droite (AB) et donc $y = mx + p$ est l'équation de la droite (d).



Propriété : Dans un repère $(O\ ;\ \vec{i}\ ,\ \vec{j})$ **toute droite (d) parallèle à l'axe des ordonnées** admet une équation de la forme $x = c$ où c est un nombre réel.

Démonstration

La droite (d) est parallèle à l'axe des ordonnées donc elle coupe l'axe des abscisses en un point A(c ; 0).

Un point M appartient à (d) si et seulement si son abscisse est égale à celle de A.

La droite (d) admet donc comme équation $x = c$.

3) Coefficient directeur d'une droite

Propriété : : Dans un repère $(O\ ;\ \vec{i}\ ,\ \vec{j}\ )$ soient A(x_A ; y_A) et B(x_B ; y_B) avec $x_A \neq x_B$. Le coefficient directeur de la droite (AB) est donné par la relation : $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

Démonstration

$x_A \neq x_B$ donc (AB) n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées donc elle admet une équation de la forme $y = mx + p$.

On a $y_A = m\,x_A + p$ et $y_B = m\,x_B + p$ donc :

$$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{m\,x_B + p - (m\,x_A + p)}{x_B - x_A} = \frac{m\,x_B + p - m\,x_A - p}{x_B - x_A} = \frac{m\,(x_B - x_A)}{x_B - x_A} = m$$

4) Applications

Dans un repère $(O\ ;\ \vec{i}\ ,\ \vec{j}\ )$ on considère les points A(1 ; 2) et B(4 ; - 2)

On cherche à déterminer une équation de la droite (AB).

On remarque que $x_A \neq x_B$ donc la droite (AB) a une équation de la forme $y = mx + p$

Méthode 1 :

• On détermine le coefficient directeur m :

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-2-2}{4-1} = \frac{-4}{3}$$

• On détermine l'ordonnée à l'origine p :

On a $y_A = m\,x_A + p$ donc $2 = \dfrac{-4}{3} \times 1 + p$. On en déduit $p = 2 + \dfrac{4}{3} = \dfrac{10}{3}$

Ainsi la droite (AB) a pour équation $y = \dfrac{-4}{3}x + \dfrac{10}{3}$

Méthode 2 : En utilisant des vecteurs colinéaires

Soit M(x ; y) un point de la droite (AB). On a $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$

M $\in$ (AB) si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires c'est-à-dire si et seulement si $-4(x-1) - 3(y-2) = 0$

On a donc $-4x + 4 - 3y + 6 = 0$

$-4x - 3y + 10 = 0$ (équation cartésienne de (AB))

$-3y = 4x - 10$

$y = \dfrac{-4}{3}x + \dfrac{10}{3}$ (équation réduite de (AB))

5) Positions relatives de deux droites

Théorème : Dans un repère $(O ; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ soient (d) et (d') deux droites d'équations $y = mx + p$ et $y = m'x + p'$.
(d) et (d') sont parallèles si et seulement si $m = m'$

II Systèmes linéaires de deux équations à deux inconnues

1) Définition

Soient a, b, c, a', b' et c' des nombres réels donnés.

Résoudre le système linéaire (S) : $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$, c'est trouver tous les couples de réels $(x ; y)$ appelé solutions du système qui vérifient les deux équations.

Exemple : On considère le système (S) : $\begin{cases} 3x - 2y = 7 \\ x + 3y = -5 \end{cases}$

Le couple (1 ; - 2) est une solution de (S) car $3\times1 - 2 \times (-2) = 7$ et $1 + 3 \times(-2) = -5$

2) Interprétation graphique

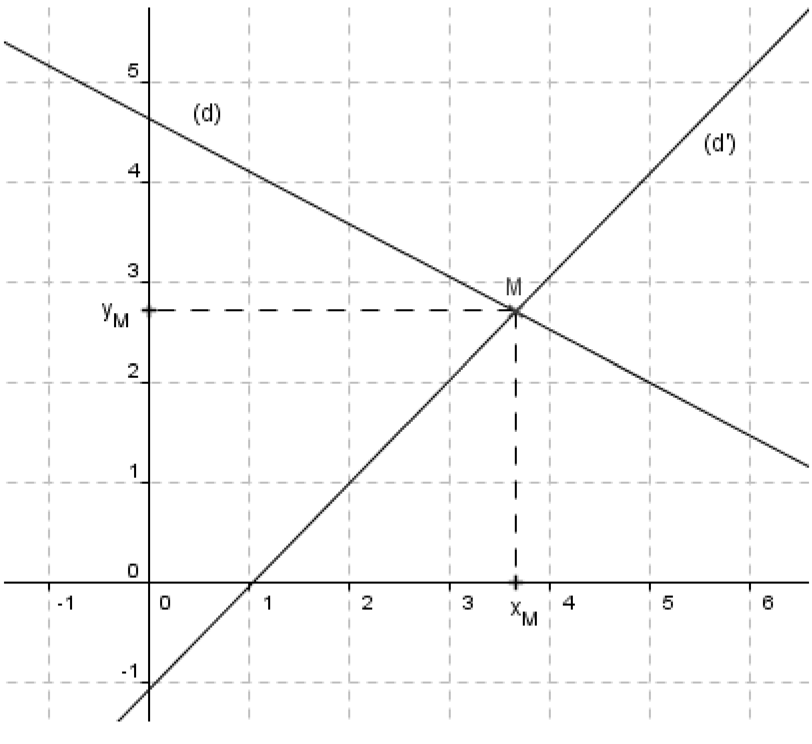
Soit (S) : $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$, où a, b, c, a', b' et c' sont des nombres réels donnés avec $b \neq 0$ et $b' \neq 0$.

(S) équivaut à $\begin{cases} y = \dfrac{-a}{b}x + \dfrac{c}{b} \\ y = \dfrac{-a'}{b'}x + \dfrac{c'}{b'} \end{cases}$.

Soit (d) la droite d''équation : $y = \dfrac{-a}{b}x + \dfrac{c}{b}$ et (d') celle d'équation : $y = \dfrac{-a'}{b'}x + \dfrac{c'}{b'}$

Premier cas :

Si les droites (d) et (d') n'ont pas le même coefficient directeur c'est-à-dire lorsque $ab' - a'b \neq 0$ alors elles sont sécantes en un unique point M dont le couple de coordonnées $(x_M ; y_M)$ est l'unique couple solution du système (S)

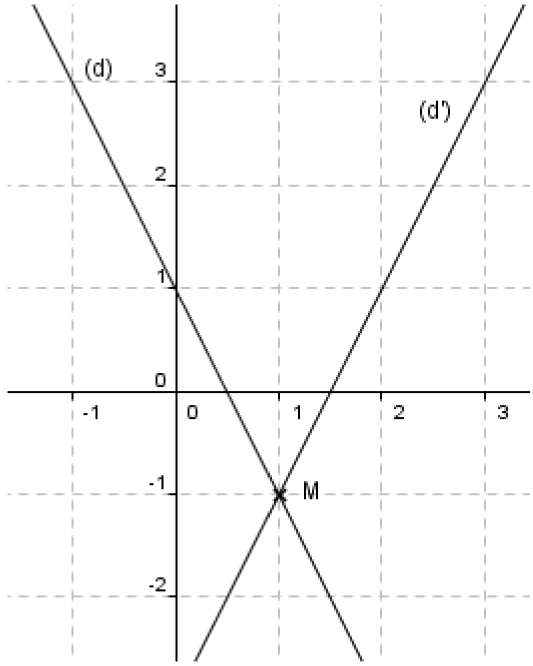


Deuxième cas :

Si les droites (d) et (d') ont le même coefficient directeur c'est-à-dire lorsque $ab' - a'b = 0$ alors elles sont :

- soient strictement parallèles et dans ce cas le système n'admet pas de solutions.
- soient confondues et dans ce cas le système admet une infinité de solutions qui sont les couples de coordonnées des points de la droite d'équation $y = \frac{-a}{b}x + \frac{c}{b}$

Remarque : Si $b = 0$ où $b' = 0$ on peut raisonner de manière analogue en utilisant des droites parallèles à l'axe des ordonnées.



Exemple : Soit (S) : $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ -2x + y = -3 \end{cases}$

$ab' - a'b = 2\times1 - (-2)\times1 = 4 \neq 0$ donc le système admet un unique couple solution.

On considère les droites (d) d'équation $y = 1 - 2x$

et (d') d'équation $y = 2x - 3$

On lit graphiquement les coordonnées du point d'intersection M : (1 ; - 1)

On vérifie que (1 ; - 1) est bien solution du système :

$2\times1 - 1 = 1$ et $-2\times1 - 1 = -3$

Le couple (1 ; - 1) est donc la solution du système (S).

3) Méthodes de résolution

a) Par substitution

On utilise cette méthode lorsqu'une inconnue s'exprime très facilement en fonction de l'autre.

Exemple :

(S) : $\begin{cases} x - 3y = -13 \\ 8x - 5y = -9 \end{cases}$

$ab' - a'b = 1 \times (-5) - 8 \times (-3) = 19 \neq 0$ donc le système admet une unique solution.

On remarque que dans l'équation de la première ligne x s'exprime facilement en fonction de y.

(S) $\Leftrightarrow \begin{cases} x - 3y = -13 \\ 8x - 5y = -9 \end{cases}$

On remplace x par $3y - 13$ dans l'équation de la deuxième ligne.

(S) $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y - 13 \\ 8(3y - 13) - 5y = -9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y - 13 \\ 19y - 104 = -9 \end{cases}$

La deuxième inconnue est une équation à une inconnue. On la résout en déterminant y.

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y - 13 \\ 19y = 95 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y - 13 \\ y = \dfrac{95}{19} = 5 \end{cases}$$

On détermine x à l'aide de la première équation en remplaçant y par la valeur trouvée.

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3\times5 - 13 = 2 \\ y = 5 \end{cases}$$

Le couple (2 ; 5) est l'unique solution de (S)

Application :

Résoudre (S) : $\begin{cases} 3x - 2y = -12 \\ 2x + y = -1 \end{cases}$

b) Par combinaison linéaire

Cette méthode est à privilégier dans la majorité des situations…

Exemple :

Soit (S) : $\begin{cases} 2x - 3y = 8 & (L_1) \\ 5x + 4y = -3 & (L_2) \end{cases}$

$ab' - a'b = 2\times4 - 5\times(-3) = 23 \neq 0$ donc le système admet une unique solution.

On multiplie la première équation par 5 et la deuxième par – 2 de manière à obtenir des coefficients de x opposés.

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} 10x - 15y = 40 & 5\times(L_1) \\ -10x - 8y = 6 & -2\times(L_2) \end{cases}$$

On additionne les deux équations membres à membres de manière à éliminer l'inconnue x et on « garde » dans le système l'une des équations.

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} -23y = 46 \\ 2x - 3y = 8 \end{cases}$$

On termine la résolution en déterminant y puis x.

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{46}{-23} = -2 \\ -10x - 8\times(-2) = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2 \\ -10x + 16 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2 \\ -10x = -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2 \\ x = \dfrac{-10}{-10} = 1 \end{cases}$$

Le couple (1 ; - 2) est la solution du système.

Application :

Résoudre (S) : $\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ 5x + 3y = 2 \end{cases}$

c) Cas particuliers

• Système n'admettant pas de solutions :

Soit (S) : $\begin{cases} -2x + y = 4 \\ 4x - 2y = 2 \end{cases}$

On a $ab' - a'b = -2\times(-2) - 4\times 1 = 0$ donc soit le système n'admet pas de solutions soit il admet une infinité de solutions.

(S) $\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x + 4 \\ 4x - 2(4 + 2x) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x + 4 \\ -8 = 2 \quad \text{impossible} \end{cases}$ (S) n'admet donc pas de solutions.

Graphiquement cette situation se traduit par des droites parallèles.

• Système admettant une infinité de solutions :

Soit (S) : $\begin{cases} -2x + y = 4 \\ 4x - 2y = -8 \end{cases}$

On a $ab' - a'b = -2\times(-2) - 4\times 1 = 0$ donc soit le système n'admet pas de solutions soit il admet une infinité de solutions.

(S) $\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x + 4 \\ 4x - 2(4 + 2x) = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x + 4 \\ -8 = -8 \end{cases}$ (S) admet donc une infinité de solutions qui sont les couples de coordonnées des points de la droite d'équation $y = 2x + 4$

Graphiquement cette situation se traduit par deux droites confondues.

Exercice 1 : Résoudre ces systèmes :

a) $\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x + 4y = 24 \\ x + 5y = 19 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x + 4y = 9 \\ 5x + 6y = 14 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x + 3y = -11 \\ 3x - 5y = 12 \end{cases}$

Exercice 2 :

1) Résoudre le système suivant : $\begin{cases} 2x + 3y = 30 \\ x - y = 5 \end{cases}$

2) Le CDI d'un collège a acheté deux exemplaires d'une même bande dessinée et trois exemplaires du même livre de poche pour la somme de 30 euros.

Une bande dessinée coûte 5 euros de plus qu'un livre de poche.

Quel est le prix en euros d'une bande dessinée ?

Quel est le prix en euros d'un livre de poche ?

Exercice 3 :

Une personne dispose de 8 euros ; elle peut dépenser cette somme soit en achetant 10 croissants et un cake, soit en achetant 4 croissants et 2 cakes.

Calculer le prix d'un croissant et celui d'un cake.