Probabilités

I Langage des probabilités

1) Exemples de situations aléatoires

Situation 1 : On lance une fois un dé cubique non truqué et on note le nombre de points figurant sur la face supérieure lorsque le dé s'est immobilisé.

Situation 2 : On lance une fois un dé cubique non truqué portant un disque vert sur trois faces, un disque rouge sur une face, la lettre H sur une face et le chiffre 2 sur une face ; on note le résultat obtenu sur la face supérieure du dé lorsqu'il s'est immobilisé.

Situation 3 : On tire au hasard une carte d'un jeu de 32 cartes.

Dans chacune de ces situations on dispose de certaines informations mais le résultat ne peut pas être prévu à l'avance car le hasard intervient : il s'agit ……………………………………………

2) Univers

Définition : Dans une expérience aléatoire, **l'univers est l'ensemble de tous les résultats possibles.**

En général l'univers est noté Ω.

Exemples :

Dans la situation 1 : Ω_1 =……………………………

Dans la situation 2 : Ω_2 =……………………………

Ω_3 est l'ensemble des 32 cartes du jeu.

3) Évènements

Définition : **Un évènement est une partie de l'univers.**

Exemple :

Dans la situation 1 « Obtenir un nombre strictement supérieur à 4 » correspond à l'ensemble A = …………………

Remarques :

- L'univers Ω est un cas particulier d'événement, on l'appelle ……………………………………………

- L'ensemble vide $\varnothing$ est appelé ……………………………………………, aucune issue ne le réalise.

- Certains événements ne comporte qu'un seul élément on les appelle ……………………………………………………

Exemple : Dans la situation 1, {5} est l'événement élémentaire « obtenir la face 5 lors du lancer du dé ».

- **l'événement contraire de A est noté $\overline{A}$** et il est constitué des éléments de Ω n'appartenant pas à A.

Exemple : Dans la situation 1 si $A = \{5, 6\}$ alors $\overline{A}$ =

II Calcul des probabilités

1) Définitions et exemples

Définition : Soit Ω un univers fini.

Définir une **loi de probabilité** sur Ω, c'est associer à chaque issue x_i un nombre p_i, positif ou nul de telle façon que $p_1 + p_2 + … + p_n = 1$.

Ce nombre p_i est appelé probabilité de l'issue x_i.

Définition : La probabilité d'un événement A est noté P(A) et est égale à la somme des probabilités des issues qui le réalisent.

Propriétés :
1) $P(\varnothing) = 0$ 2) $P(\Omega) = 1$ 3) Pour tout événement A on a $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$

2) Cas particulier : équiprobabilité

a) Définition :

L'équiprobabilité correspond au cas où tous les événements élémentaires ont la même probabilité.

Exemples : Les situations 1 et 3 ………………………………………………………………………
La situation 2 ………………………………………………………………

b) Probabilité d'un événement élémentaire

Théorème : Dans le cas d'une situation d'équiprobabilité, la probabilité d'un événement élémentaire est égale a

$$\frac{1}{\text{nombre d'éléments de } \Omega}$$

Exemple : Dans la situation 3 l'événement A : « Obtenir le roi de cœur » a pour probabilité …………

c) Probabilité d'un événement quelconque

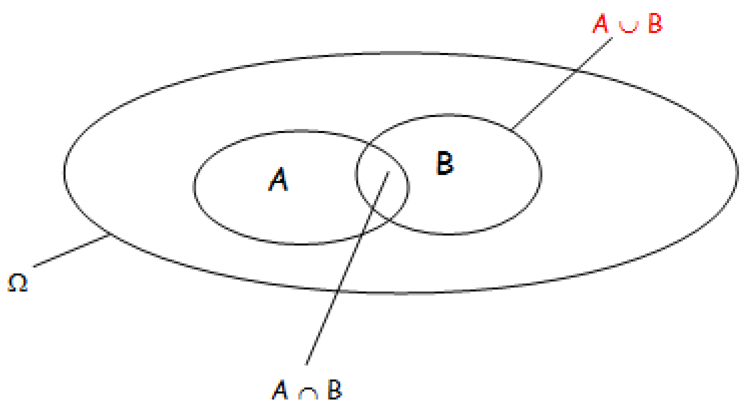
Théorème : Dans le cas d'une situation d'équiprobabilité, la probabilité d'un événement A est :

$$P(A) = \frac{\text{nombre d'éléments de } A}{\text{nombre d'éléments de } \Omega} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$$

Exemple : Dans la situation 3 l'événement A : « Obtenir un roi » a pour probabilité …………

3) Propriétés

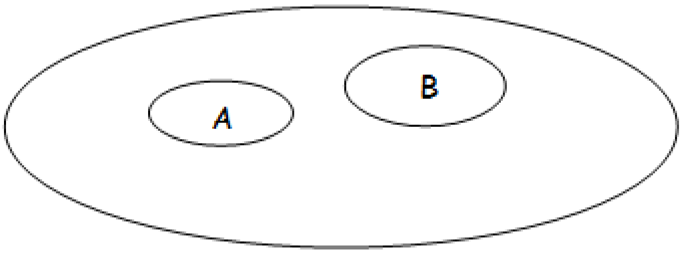
Définition : Soient A et B deux événements
L'intersection de A et B est l'événement, noté $A \cap B$ formé des issues qui réalisent à la fois **l'événement A et l'événement B**
La réunion de A et B est l'événement, noté $A \cup B$ formé des issues qui réalisent à la fois l'événement **A ou l'événement B**, c'est-à-dire au moins l'un des deux.



a) Probabilité de la réunion d'événements disjoints

Définition : Deux événements A et B sont **disjoints** (on dit aussi **incompatibles**) si et seulement si $A \cap B = \varnothing$

Ici A et B sont disjoints



Exemple :

Dans la situation 1 on considère : $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{5, 6\}$ et $C = \{3,4\}$

A et B sont disjoints car $A \cap B =$

Par contre $A \cap C =$ donc les événements A et C ne sont pas incompatibles.

On s'intéresse à la probabilité de l'événement $A \cup B$:

On a $A \cup B =$

Donc $P(A \cup B) =$ et on remarque que $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Théorème : Pour tous événements **disjoints** A et B on a $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

b) Probabilité d'un événement contraire

Théorème : Pour tout événement A on a : $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

Exemple : Si $P(A) = 0{,}2$ alors $P(\overline{A}) =$

c) Cas général

Toujours dans la situation 1 on considère $A = \{1, 2, 3\}$ et $C = \{3,4\}$.

On a déjà vu que A et C ne sont pas disjoints. $A \cap C = \{3\}$

$P(A) =$

$P(C) =$

$P(A \cap C) =$

On a $A \cup C =$

donc $P(A \cup C) =$ et on remarque que $P(A \cup C) = P(A) + P(C) - P(A \cap C)$.

Théorème : **Pour tous événements A et B on a $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$**