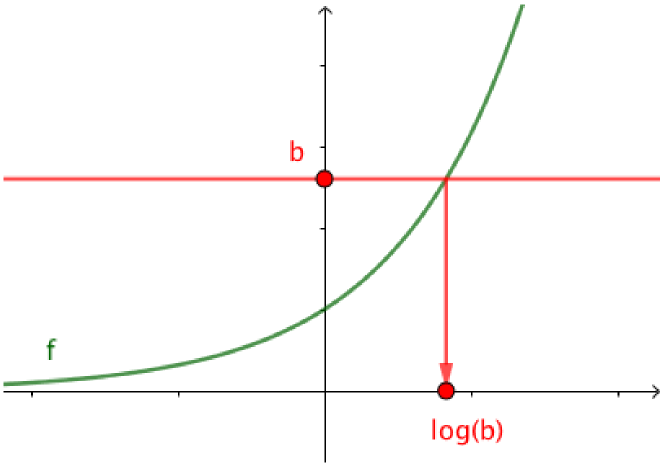
Ch 8 : Fonction logarithme décimal

I. Définition et sens de variation

1) Définition :

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=10^x$.
L'équation $10^x=b$, avec $b>0$, admet une unique solution dans $\mathbb{R}$.
Cette solution se note $\log b$.



Définition : On appelle **logarithme décimal** d'un réel strictement positif b, l'unique solution de l'équation $10^x=b$. On la note $\log b$.
La **fonction logarithme décimal**, notée **log**, est la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$x \longmapsto \log(x)$$

Remarques :

- $10^x=b \Leftrightarrow x=\log b$

  Exemples : $10^5=100\,000 \Leftrightarrow 5=\log(100\,000)$ et $10^{-2}=0{,}01 \Leftrightarrow -2=\log(0{,}01)$

  $5{,}3=\log(t) \Leftrightarrow t=10^{5{,}3}$

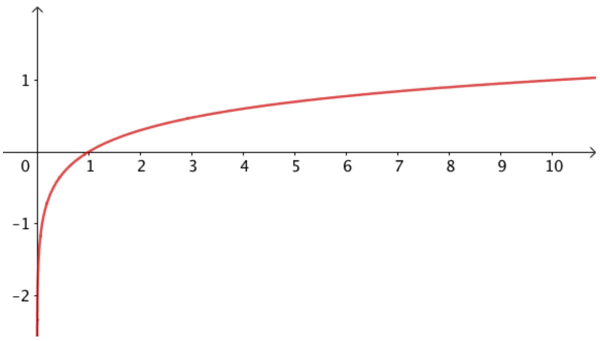
- Pour tout nombre réel x, $\log(10^x)=x$

  Exemples : log(10^5) = 5 et log 10^{-2} = -2

Cas particuliers :

- log (1) = 0
- log (10)= 1
- Pour tout entier relatif n, log (10^n) = n

2) Représentation graphique et sens de variation :



Propriété : La fonction logarithme décimal est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

Ainsi $a \leqslant b \Leftrightarrow \log(a) \leqslant \log(b)$

Remarque : on peut appliquer le log dans une inégalité entre deux nombres strictement positifs sans modifier le sens de l'inégalité.

3) Signe :

x	0		1		+ ∞
log(x)		-	0	+	

II. Propriétés algébriques

Théorème : Pour tous nombres réels strictement positifs a et b, log(ab) = log(a) + log(b)

Exemple : log(200) = log(2x100) = log(2) + log(100) = log(2) + log (10^2) = log(2) + 2

Propriétés : a et b sont deux réels strictement positifs et n esdt un entier relatif • log(a^n) = nlog(a) • log($\frac{1}{a}$) = -log(a) • log($\frac{a}{b}$) = log(a) – log(b)

Propriété : Soit a un nombre réel strictement positif. Pour tout nombre réel x :

$$\log(a^x) = x\log(a)$$

Exemples :

$\log(3^5) = 5\log(3)$ $\log\left(\frac{1}{4}\right) = -\log(4)$ $\log\left(\frac{7}{9}\right) = \log(7) - \log(9)$

$\log\left(\frac{3^2}{2^3}\right) = \log(3^2) - \log(2^3) = 2\log(3) - 3\log(2)$

Simplifier les expressions suivantes :

$A = \log\left(2-\sqrt{2}\right) + \log\left(2+\sqrt{2}\right)$

$B = 2\log 3 + \log 2 - 4\log 3$

$C = \log 10^3 - \log\frac{1}{5}$

III. Équations du type $a^x = b$ ou $x^a = b$ et inéquations du type $a^x < b$ ou $x^a < b$

Propriétés : Soit x et y deux réels strictement positifs

$\log(x) = \log(y) \Leftrightarrow x = y$ $\log(x) < \log(y) \Leftrightarrow x < y$

Exemples :

Résoudre l'équation $2^x = 100$

$$2^x = 100 \Leftrightarrow \log(2^x) = \log(100) \Leftrightarrow x\log(2) = \log(10^2) = 2$$

Ainsi $x = \dfrac{2}{\log(2)}$

Résoudre l'inéquation $5^x < 0{,}0001$

$$5^x < 0{,}0001 \Leftrightarrow \log(5^x) < \log(10^{-4}) \Leftrightarrow x\log(5) < -4$$

Ainsi $x < \dfrac{-4}{\log(5)}$ (on divise par log(5) qui est positif donc le sens de l'inégalité est conservé)

Rappel :

- Lorsqu'on multiplie ou divise les deux membres d'une inégalité par un nombre strictement **positif**, on **conserve** le sens de l'inégalité.
- Lorsqu'on multiplie ou divise les deux membres d'une inégalité par un nombre strictement **négatif**, on **renverse** le sens de l'inégalité.

Applications :

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $6^x=2$

2) Résoudre dans $]0;+\infty[$ l'équation : $x^5<3$