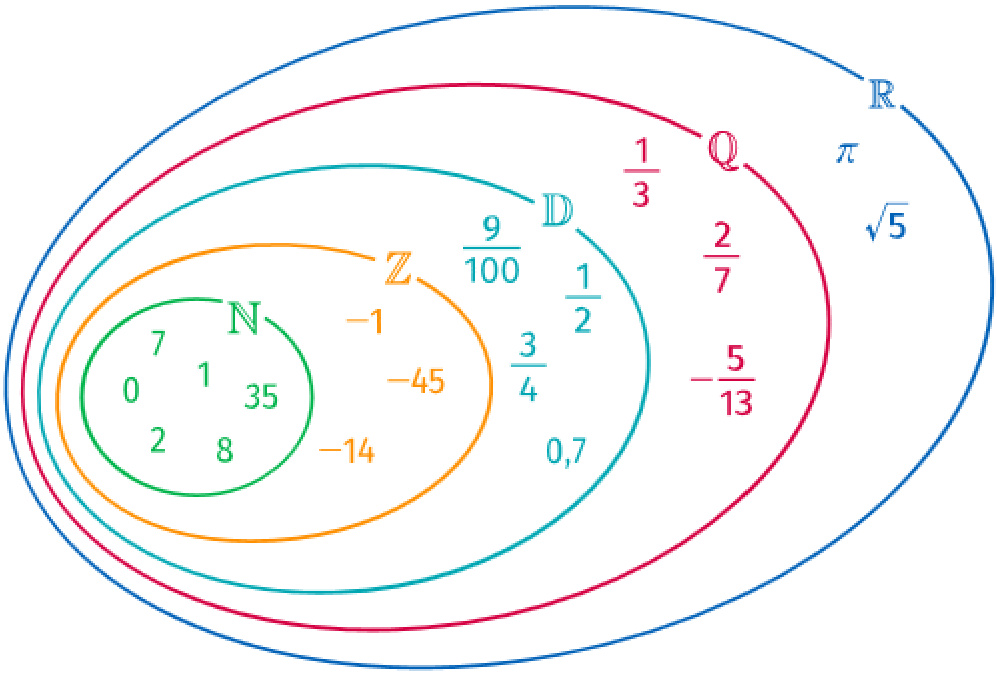
Chapitre 1 : Nombres et calculs

Ensembles de nombres, intervalles, calcul numérique

## I Ensembles de nombres




### 1) Les entiers

Définitions : • Les entiers naturels sont les nombres 0, 1, 2, 3…

L'ensemble des entiers naturels est noté $\mathbb{N}$.

• L'ensemble des entiers relatifs est formé des entiers naturels et de leurs opposés. On le note $\mathbb{Z}$.

Remarque : Tout entier naturel est un entier relatif. Ainsi, on a $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$

### 2) Les décimaux et les rationnels

Définitions : • L'ensemble des nombres décimaux est l'ensemble des nombres qui peuvent s'écrire sous la forme $\frac{a}{10^n}$ où $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$.

L'ensemble des nombres décimaux est noté D.

• L'ensemble des nombres rationnels est l'ensemble des nombres qui peuvent s'écrire sous la forme $\frac{a}{b}$ où $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$

L'ensemble des nombres décimaux est noté $\mathbb{Q}$.

Remarques : Tout entier relatif est un nombre décimal. On a $\mathbb{Z} \subset$ D.

Tout nombre décimal est un nombre rationnel. On a D $\subset \mathbb{Q}$.

Propriété : $\frac{1}{3}$ est un nombre rationnel qui n'est pas décimal

Démonstration : On raisonne par l'absurde :

Si $\frac{1}{3}$ est un nombre décimal alors il existe un entier relatif $a$ et un entier naturel $n$ tel que $\frac{1}{3} = \frac{a}{10^n}$

On a alors $3a = 10^n$ et par suite $10^n$ est un multiple de 3 ce qui est impossible car la somme des chiffres de $10^n$ est 1.

Conclusion : $\frac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal

3) Les nombres réels

Définition : L'ensemble des abscisses des points d'une droite graduée est appelé l'ensemble des nombres réels et on le note $\mathbb{R}$.

Propriété : $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel

Démonstration : On raisonne par l'absurde :

Si $\sqrt{2}$ est un nombre rationnel alors $\sqrt{2}$ peut s'écrire sous la forme d'une fraction irréductible $\frac{a}{b}$ où $a$ est un entier relatif et $b$ est un entier naturel non nul.

En élevant au carré on obtient $2 = \frac{a^2}{b^2}$ et donc que $a^2 = 2\, b^2$

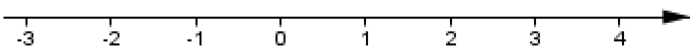
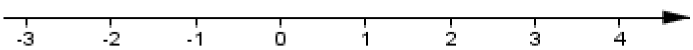
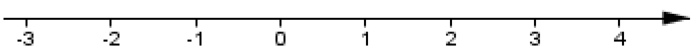
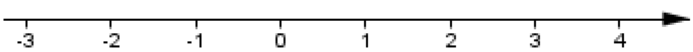
| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $b$ se termine par | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| $b^2$ se termine par | | | | | | | | | | |
| $2b^2$ se termine par | | | | | | | | | | |
| $a$ se termine par | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| $a^2$ se termine par | | | | | | | | | | |

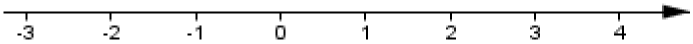
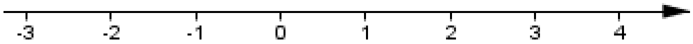
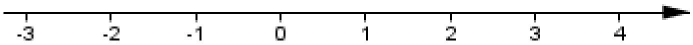
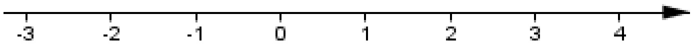
$a$ se termine par 0 et $b$ se termine donc par 0 ou par 5 ce qui contredit que la fraction $\frac{a}{b}$ soit irréductible.

II Intervalles de $\mathbb{R}$ et inégalités

1) Intervalles de $\mathbb{R}$

Activité 1 : Compléter le tableau :

| Inégalité (s) correspondante (s) à l'intervalle. | Représentation de l'intervalle sur un axe | Notation de l'intervalle. |
|---|---|---|
| $-1 \leq x \leq 2$ |  | |
| $-1 < x < 2$ |  | |
| $-1 \leq x < 2$ |  | |
| $-1 < x \leq 2$ |  | |

| | | |
|---|---|---|
| $x \leq 2$ |  | |
| $x < 2$ |  | |
| $x > -1$ |  | |
| $x \geq -1$ |  | |

<u>Remarque :</u> Soient a et b deux réels , la notation [ a ; b ] sous entend que a < b

<u>intervalles particuliers :</u>

$\mathbb{R}$ = ] - ∞ ; + ∞ [ $\quad$ $\mathbb{R}^+$ = [ 0 ; + ∞[ $\quad$ $\mathbb{R}^*_+$ = ] 0 ; + ∞ [

$\mathbb{R}^-$ = ] - ∞ ; 0 ] $\quad$ $\mathbb{R}^*_-$ = ] - ∞ ; 0 [

<u>Définitions :</u> Soient I et J deux intervalles

- L'intersection de I et J est l'ensemble des réels qui appartiennent à la fois à I et à J. On la note I ∩ J.
- La réunion de I et J est l'ensemble des réels qui appartiennent à la fois à I et à J. On la note I ∪ J.

<u>Exemples :</u> I = ] - ∞ ; 5 ] et J = [3 ; 7 [

I ∩ J = [3 ; 5] $\quad$ I ∪ J = ] - = ] - ∞ ; 7 [

<u>2) Inégalités</u>

Propriétés : Soient $a$, $b$, $c$ et $k$ des nombres réels

- Ajouter ou soustraire un même nombre aux deux membres d'une inégalité conserve l'ordre de l'inégalité

Si $a < b$ alors $a + c < b + c$ et $a - c < b - c$

- Multiplier ou diviser par un même nombre strictement positif conserve l'ordre de l'inégalité

Si $k > 0$ et $a < b$ alors $k \times a < k \times b$ et $\frac{a}{k} < \frac{b}{k}$

- Multiplier ou diviser par un même nombre strictement négatif change l'ordre de l'inégalité

Si $k > 0$ et $a < b$ alors $k \times a > k \times b$ et $\frac{a}{k} > \frac{b}{k}$

<u>Exemples :</u> Soient $m$ et $p$ deux nombres réels tels que $m < p$

Compléter : $\quad$ $m + 5$ … $p + 5$ $\quad$ $\frac{m}{3}$ … $\frac{p}{3}$ $\quad$ $-2m$ … $-2p$ $\quad$ $m - 4$ … $p - 4$