Chapitre 3 : Notion de fonction

I Notion de fonction :

1) Activités d'introduction

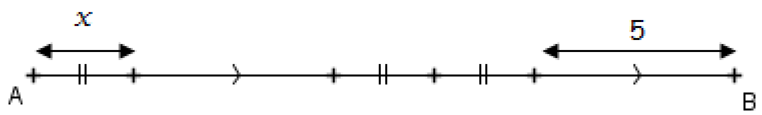
Activité 1 : Associer un nombre à un autre

On considère les instructions suivantes, que l'on peut appliquer à tout nombre réel :
- instruction A : « retrancher 5 »
- instruction B : « multiplier par 3 »
- instruction C : « élever au carré »

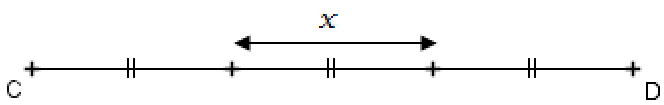
On considère un nombre x et on se propose d'appliquer successivement ces instructions dans un certain ordre. Associer chacune des successions d'instructions suivantes à une expression à exprimer en fonction de x :

1) Instructions A – C – B
2) Instructions B – A – C
3) Instructions C – B – A
4) Instructions C – B – A – B

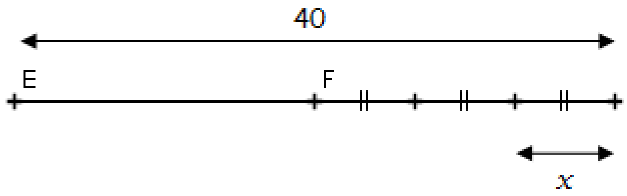
Activité 2 : Exprimer un nombre « en fonction » d'un autre



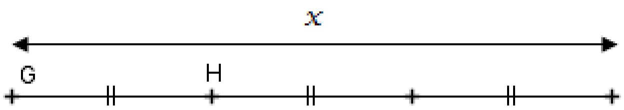
Longueur considérée : AB



Longueur considérée : CD



Longueur considérée : EF



Longueur considérée : GH

1) Exprimer « en fonction de x » chacune des longueurs considérées.

2) Calculer chaque longueur dans le cas $x = 10$ puis dans le cas $x = \frac{2}{7}$

Activité 3 : Relier deux quantités par une formule

Un cinéma propose pour la saison 2014 – 2015, deux tarifs différents :
- le tarif « normal », correspondant à 7 € la place ;
- le tarif « abonné » : le spectateur doit acheter une carte annuelle à 16 € qui lui permet ensuite de payer 4 € la place.

On appelle x le nombre de places achetées par un spectateur, N le prix qu'elle paierait au tarif normal et A le prix qu'elle paierait au tarif abonné.

1) Calculer les prix à payer pour l'achat de trois tickets au tarif normal et au tarif abonné. Quelle ligne du tableur résume ces résultats ?

2) Exprimer, en fonction de x, les prix N et A.

3) a) Indiquer la formule à entrer dans la cellule B2 qui, copiée vers le bas » permet d'obtenir les prix au tarif normal.

b) Indiquer la formule à entrer dans la cellule C2 qui, copiée vers le bas » permet d'obtenir les prix au tarif abonné.

	A	B	C
1	x	N	A
2	1	7	20
3	2	14	24
4	3	21	28
5	4	28	32
6	5	35	36
7	6	42	40
8	7	49	44
9	8	56	48
10	9	63	52
11	10	70	56
12	11	77	60
13	12	84	64

Définition : Définir une fonction f c'est se donner un ensemble de nombres D et associer à chacun des nombres x appartenant à D, une seule valeur y que l'on note $f(x)$ et que l'on appelle image de x par la fonction f.

Remarque : la fonction f est parfois notée $f : x \mapsto f(x)$

Exemple : On peut considérer la fonction f définie sur [- 1 ; 2] et qui à tout nombre x appartenant à [-1 ; 2] fait correspondre le nombre $f(x) = x^2 - 1$. On peut noter cette fonction $f : x \mapsto x^2 - 1$

Définition : L'ensemble D est appelé ensemble de définition de la fonction f, c'est l'ensemble des valeurs sur lesquelles on définit la fonction f. On le note souvent D_f.

Exemples :

1) Dans l'exemple précédent D_f = [- 1 ; 2] .

2) $g(x) = \dfrac{1}{x - 1}$, g est définie pour tout nombre réel différent de 1 donc $D_g = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

3) $h(x) = \sqrt{x - 3}$, h n'est définie que pour les réels x tels que $x - 3 \geq 0$ c'est à dire $x \geq 3$ donc $D_h = [\,3 ; +\infty\,[$

2) Image et antécédent par une fonction

Activité 4 : Image et antécédent par une fonction

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 4$

1) Calculer l'image de 1 par la fonction f.

$f(1) = 1^2 - 4 = -3$ « on dira que l'image de 1 par la fonction f est - 3 »

2) Déterminer le ou les nombres qui ont pour image 0 par la fonction f.

$f(2) = 0$ et $f(-2) = 0$

On dira que 2 et - 2 sont des antécédents de 0 par la fonction f.

Déterminer le ou les nombres qui ont pour image – 4 par la fonction f.

$f(0) = -4$

On dira que 0 est un antécédent de - 4 par la fonction f.

3) Trouver les antécédents de – 5 par f.

Il n'y en a pas car $f(x) = x^2 - 4 \geq -4$.

Tous les nombres n'ont pas forcément un antécédent par f.

Définition : Etant donné un nombre réel y, on appelle antécédent(s) de y par la fonction f le ou les nombres réels $x \in D_f$ qui ont pour image y c'est à dire tels que $f(x) = y$.

Activité 5 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x^2 - 1$

Utiliser la calculatrice pour répondre aux questions suivantes :

1) Calculer les images de $\dfrac{2}{3}$ et $\sqrt{3}$ par la fonction f.

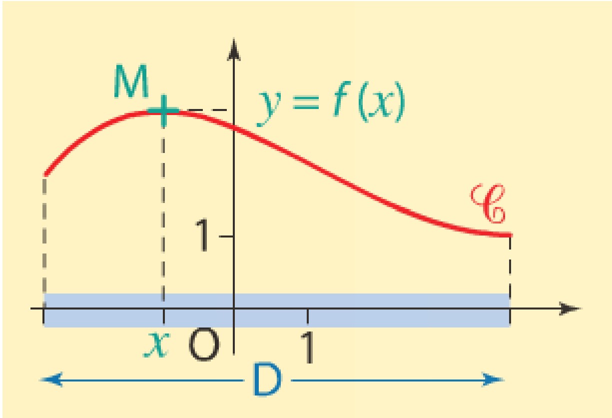
2) – 2 est-il un antécédent de – 3 par f ? $f(-2) = -21$ donc non

3) 1 est-il un antécédent de – 3 par f ? $f(1) = -3$ donc oui.

II Représentation graphique d'une fonction.

1) Définition

Dans un repère du plan, la ligne formée de l'ensemble des points de coordonnées (x ; $f(x)$) avec $x \in D_f$ est appelée courbe représentative de la fonction f, on la note C_f .



On dit que courbe représentative de la fonction f a pour équation $y = f(x)$ dans le repère choisi.

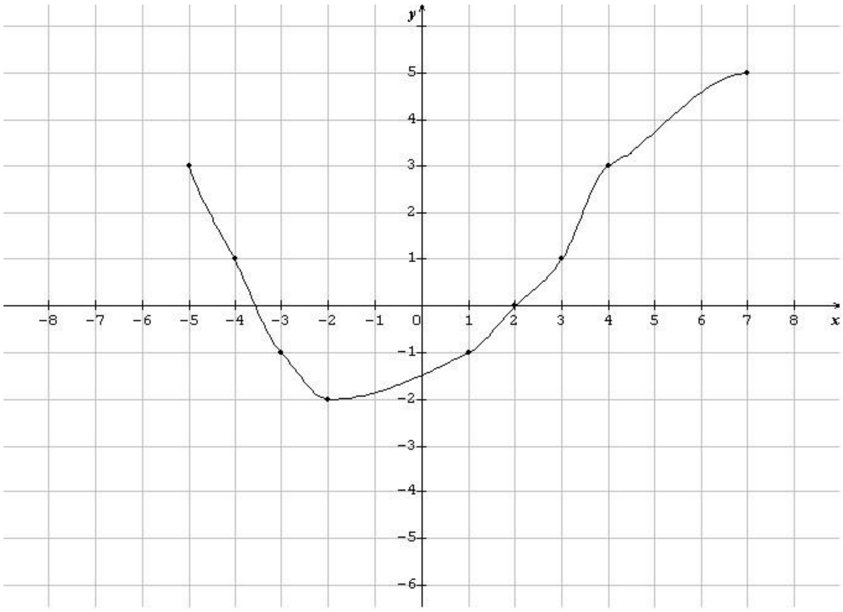
2) Lectures graphiques :

Activité 6 :

Recherche d'images :

Exemples :
sur la courbe ci - contre :

$f(2) = 0$
$f(-2) = -2$
$f(4) = 3$
$f(1) = -1$
$f(-4) = 1$

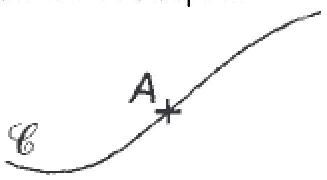


- Recherche d'antécédent(s) :

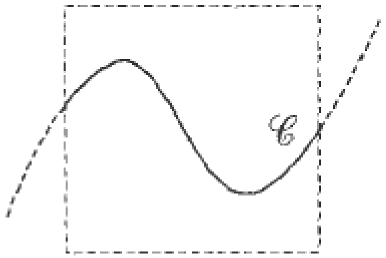
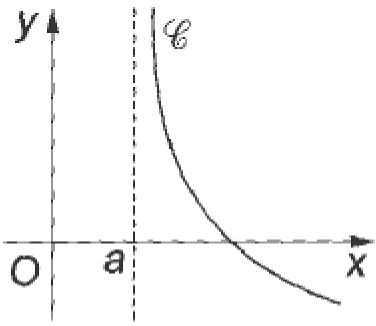
Exemples :
Sur la courbe ci - contre :

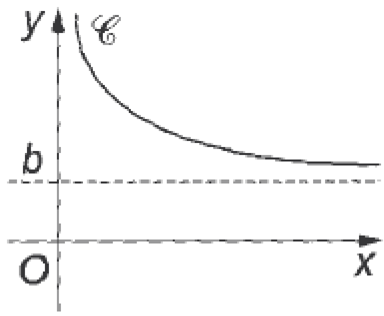
- 4 et 3 sont les deux antécédents de 1 par la fonction f
7 est le seul antécédent de 5 par la fonction f
- 4 n'a pas d'antécédent par la fonction f.

Conventions graphiques : Voici quelques conventions utilisées afin de noter des informations sur la courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction f :

<table>
<tr>
<td>Lorsqu'un point A sur la courbe est connu avec précision, il est noté par une croix ou un point :

</td>
<td>Lorsqu'un point A est l'extrémité de la courbe, il est noté par un gros point :

</td>
<td>Lorsqu'un point A à l'extrémité d'une courbe n'appartient pas à la courbe, il est noté par un crochet ouvert.

</td>
</tr>
<tr>
<td>Une courbe est donnée dans une fenêtre : s'il n'y a pas d'extrémités, la courbe garde la même allure quand on la prolonge :

</td>
<td>Une droite verticale (parfois en pointillés) signifie que si on prolonge la courbe, elle ne coupe pas la droite :


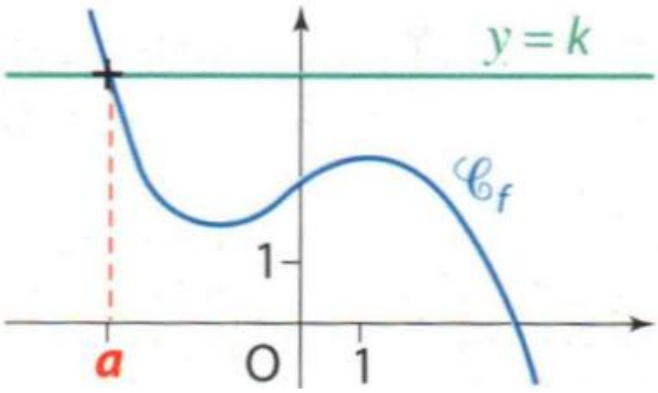
a n'appartient pas à l'ensemble de définition</td>
<td>Une droite horizontale en pointillés signifie que si on prolonge la courbe, elle ne coupe pas cette droite.

</td>
</tr>
</table>

3) Résolution graphique d'équations

Equation $f(x)$ = k avec k réel

On repère le nombre k sur l'axe des ordonnées puis on trace la droite parallèle à l'axe des abscisses.
Si cette droite coupe $\mathscr{C}_f$ alors on lit les abscisses des points d'intersection, sinon l'équation n'a pas de solutions.

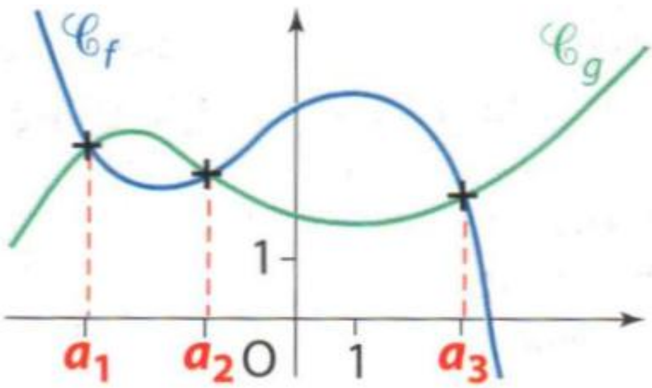
Remarque : si k = 0 alors les solutions sont les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des abscisses.



L'équation $f(x)$ = k a pour seule solution le nombre a.

Equation $f(x)$ = $g(x)$

Les solutions sont les abscisses des points d'intersection des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$



L'équation $f(x)$ = $g(x)$ a trois solutions : a_1, a_2, a_3.

III Parité d'une fonction

Activité 7 :

1) On considère la fonction f définie sur [- 4 ; 4] par $f(x) = 4 - \dfrac{5}{1+x^2}$

a) Montrer que pour tout $x \in [-4 ; 4]$ on a $f(-x) = f(x)$

b) Observer à l'aide de la calculatrice la représentation graphique de f et proposer une conjecture sur cette représentation graphique.

c) Démontrer cette conjecture.

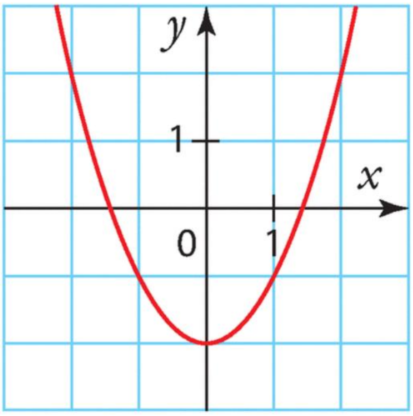
2) On considère la fonction g définie sur [- 3 ; 3] et qui pour tout $x \in [-3 ; 3]$ vérifie $g(-x) = -g(x)$.

a) Compléter le tableau de valeurs ci-dessous :

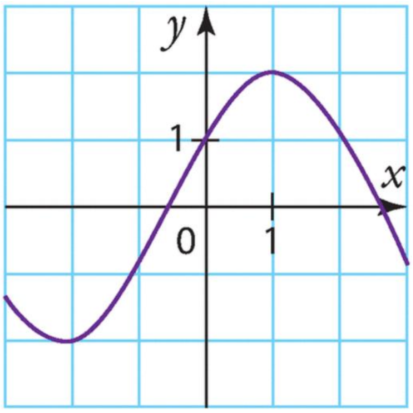
x	- 3	- 2	- 1	0	1	2	3
$g(x)$	14			0	9	- 3	

b) Parmi les courbes représentatives suivantes laquelle représente une fonction qui possède la même propriété que celle de la fonction g ?

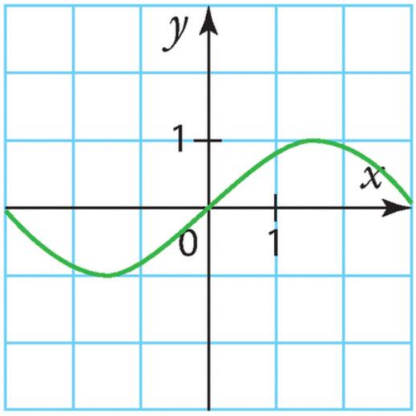
courbe n°1



courbe n°2



courbe n°3



Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle I centré en 0.
On dit que f est :

- paire sur I lorsque, pour tout $x \in$ I, $f(-x) = f(x)$
- impaire sur I lorsque, pour tout $x \in$ I, $f(-x) = -f(x)$

Propriétés :

f est paire sur I si, et seulement si, sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
f est impaire sur I si, et seulement si, sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'origine du repère.

TICE : Représentations graphiques : TP calculatrice/ Tableur
1) Faire un tableau de valeurs 2) Afficher une courbe 3) Reproduire sur papier libre