Ch 9: Nombres complexes: exercices

A l'issue de ce travail je dois être capable de :

- Calculer et interpréter géométriquement la partie réelle, la partie imaginaire, le conjugué, le module, et un argument d'un nombre complexe.
- Passer de la forme algébrique à la forme trigonométrique et vice-versa.

Exercice 1 :

Vrai ou Faux — **Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifier.**

	V	F
95 On considère le nombre complexe $z = -2 - 2i\sqrt{3}$. Le module de z est égal à -4.		
96 On considère le nombre complexe $z = -2 - 2i\sqrt{3}$. Un argument de z est $\frac{4\pi}{3}$.		
97 On considère le nombre complexe $z = 2 + 2i$. On a : $\left\lvert\frac{1}{z}\right\rvert = \lvert z\rvert$.		
98 On considère le nombre complexe $z = 2 - 2i$. On a : $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = \arg(z)$.		
99 On considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = -2 - 2i$, $z_B = 5 + i$ et $z_C = 3i$. Le triangle ABC est isocèle en B.		
100 On considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = 2 - 2i$, $z_B = 5 + 2i$ et $z_C = 1$. Le triangle ABC est rectangle en C.		
101 On considère les nombres complexes $z = -2 - 2i\sqrt{3}$ et $z' = 3 + 4i$. Le module de $z \times z'$ est égal à 20.		
102 On considère les nombres complexes $z = 6 + 8i$ et $z' = -3 + 4i$. Le module de $\frac{z}{z'}$ est égal à 2.		

QCM — **Indiquer dans chaque cas la bonne réponse.**

103 On considère le nombre complexe $z = -1 - i\sqrt{3}$. L'écriture trigonométrique du nombre complexe z est :
a. $\left[2\,;-\frac{\pi}{6}\right]$ **b.** $\left[2\,;-\frac{2\pi}{3}\right]$ **c.** $\left[\sqrt{2}\,;-\frac{2\pi}{3}\right]$.

104 Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$. On considère les points A et B d'affixes respectives z_A et z_B avec : $z_A = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$ et $z_B = -1 - i\sqrt{3}$. Le triangle OAB est :
a. équilatéral **b.** rectangle et isocèle **c.** isocèle

105 Le nombre complexe z de module $2\sqrt{3}$ et dont un argument est $\frac{2\pi}{3}$ a pour forme algébrique :
a. $\sqrt{3} - 3i$ **b.** $-\sqrt{3} + 3i$ **c.** $-3 + i\sqrt{3}$.

106 Le nombre complexe $z = 1 + i\sqrt{3}$ a pour nombre complexe conjugué :
a. $-1 - i\sqrt{3}$ **b.** $-1 + i\sqrt{3}$ **c.** $1 - i\sqrt{3}$.

107 Soit $z = \sqrt{3} + i$ et $z' = -\sqrt{3} + i$. Le nombre complexe $\frac{z}{z'}$ a pour module :
a. -1 **b.** 1 **c.** i.

108 Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$, on considère les points I, D et S d'affixes respectives : $z_I = \sqrt{3} - i$, $z_D = -\sqrt{3} + i$, $z_S = -\sqrt{3} - i$.
L'affixe du point T, tel que le quadrilatère STID est un parallélogramme, est :
a. $-3\sqrt{3} + i$ **b.** $2\sqrt{3} - 2i$ **c.** $\sqrt{3} - 3i$.

Exercice 2 :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.
On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes et i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

1. On considère l'équation (E) d'inconnue $z : (2-i)z = 2-6i$.

a. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E). On notera z_1 la solution de (E) que l'on écrira sous forme algébrique.

b. Déterminer le module et un argument de z_1. En déduire la forme trigonométrique de z_1.

c. Soit z_2 le nombre complexe défini par : $z_2 = -iz_1$.
Déterminer la forme algébrique puis la forme trigonométrique de z_2.

2. Soit A, B et C les points du plan d'affixes respectives : $z_A = 2-2i$, $z_B = -2-2i$ et $z_C = -4i$.

a. Placer les points A, B et C dans le plan complexe.

b. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$.

c. Déterminer la nature du triangle ABC.

Exercice 3 :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ L'unité graphique est 2 cm.
On considère les points A, B, C, D et K d'affixes respectives : $a = 2+2i$, $b = 1+i\sqrt{3}$, $c = 2-2i$, $d = 3-i\sqrt{3}$ et $k = 2$.

1. Construction du quadrilatère ABCD.

a. Déterminer la forme trigonométrique des nombres complexes a et b.

b. Démontrer que le point K est le milieu du segment [AC] et le milieu du segment [BD].

c. Placer les points A, C et K, puis construire B et D.

2. Nature du quadrilatère ABCD.

a. Démontrer que les points A, B, C et D appartiennent à un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

b. Démontrer que le quadrilatère ABCD est un rectangle.