Equation réduite d'une droite

I Rappels sur les fonctions affines

Définition : Une fonction affine f est une fonction définie pour tout nombre réel x par $f(x) = ax + b$ où a et b sont des réels donnés.

a est appelé coefficient directeur, b est appelé ordonnée à l'origine.

Propriété : La représentation graphique d'une fonction affine est une droite

II Equation réduite d'une droite et coefficient directeur d'une droite

Propriété : Dans un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ toute droite (d) non parallèle à l'axe des ordonnées est la représentation graphique d'une fonction affine.

Elle admet donc une équation de la forme $y = m\,x + p$ où m et p sont des nombres réels

m **est appelé coefficient directeur de la droite et** p **est appelé ordonnée à l'origine.**

Démonstration

La droite (d) n'étant pas parallèle à l'axe des ordonnées, elle le coupe en un point A.

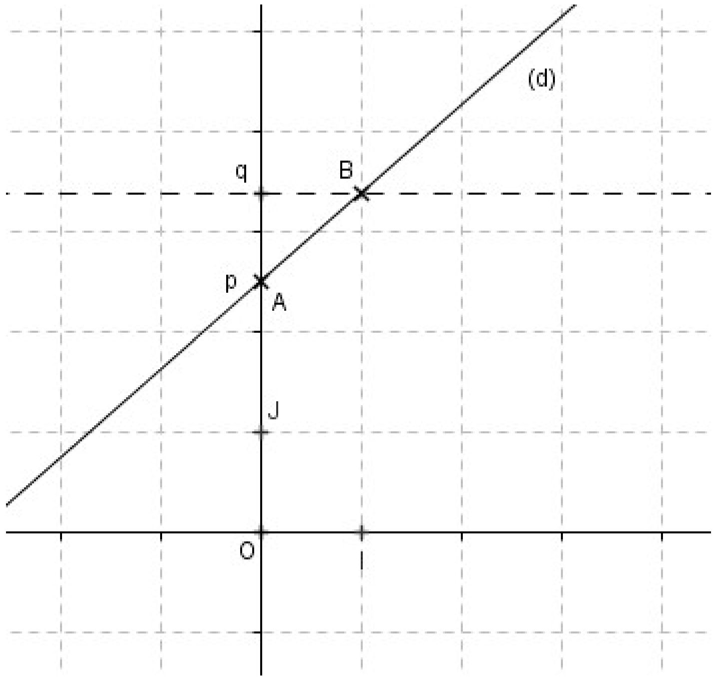
Elle coupe aussi la parallèle à l'axe des ordonnées passant par le point I(1 ; 0). On note B le point d'intersection.

On a donc A(0 ; p) et B(1 ; q)

Soit f la fonction affine définie par $f(x) = (q - p)x + p$

On a $f(0) = p$ et $f(1) = q$

La représentation graphique de f est donc la droite (AB) et donc $y = mx + p$ est l'équation de la droite (d).



Propriété : Dans un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ **toute droite (d) parallèle à l'axe des ordonnées** admet une équation de la forme $x = c$ où c est un nombre réel.

Démonstration

La droite (d) est parallèle à l'axe des ordonnées donc elle coupe l'axe des abscisses en un point A(c ; 0).

Un point M appartient à (d) si et seulement si son abscisse est égale à celle de A.

La droite (d) admet donc comme équation $x = c$.

III Coefficient directeur d'une droite

Propriété : Dans un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ soient $A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$ avec $x_A \neq x_B$. Le coefficient directeur de la droite (AB) est donné par la relation : $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

Démonstration

$x_A \neq x_B$ donc (AB) n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées donc elle admet une équation de la forme $y = mx + p$.

On a $y_A = m\,x_A + p$ et $y_B = m\,x_B + p$ donc :

$$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{m\,x_B + p - (m\,x_A + p)}{x_B - x_A} = \frac{m\,x_B + p - m\,x_A - p}{x_B - x_A} = \frac{m\,(x_B - x_A)}{x_B - x_A} = m$$

IV Applications

Dans un repère $(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j})$ on considère les points A(1 ; 2) et B(4 ; - 2)

On cherche à déterminer l'équation réduite de la droite (AB).

On remarque que $x_A \neq x_B$ donc la droite (AB) a une équation de la forme $y = mx + p$

Méthode 1 : en déterminant le coefficient directeur puis l'ordonnée à l'origine de la droite (AB)

• On détermine le coefficient directeur m :

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-2-2}{4-1} = -\frac{4}{3}$$

• On détermine l'ordonnée à l'origine p :

On a $y_A = m\,x_A + p$ donc $2 = \frac{-4}{3} \times 1 + p$ car A (1 ; 2)

on en déduit $p = 2 + \frac{4}{3} = \frac{10}{3}$

Ainsi la droite (AB) a pour équation réduite $y = \frac{-4}{3}x + \frac{10}{3}$

Méthode 2 : en utilisant une équation cartésienne de la droite (AB)

• Soit M(x ; y) un point de la droite (AB). On a $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$

M $\in$ (AB) si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires c'est-à-dire si et seulement si det($\overrightarrow{AM}$; $\overrightarrow{AB}$) = 0 c'est-à-dire si et seulement si $-4(x-1) - 3(y-2) = 0$

$$-4x + 4 - 3y + 6 = 0$$

$$-4x - 3y + 10 = 0$$

Une équation cartésienne de la droite (AB) est donc $-4x - 3y + 10 = 0$

• On utilise cette équation cartésienne pour déterminer l'équation réduite de la droite (AB) en « isolant y » :

$$-4x - 3y + 10 = 0$$

$$-3y = 4x - 10$$

$y = \frac{-4}{3}x + \frac{10}{3}$ qui est l'équation réduite de la droite (AB)

V Positions relatives de deux droites

Théorème : Dans un repère $(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j})$ soient (d) et (d') deux droites d'équations $y = m\,x + p$ et $y = m'\,x + p'$.

(d) et (d') sont parallèles si et seulement si $m = m'$