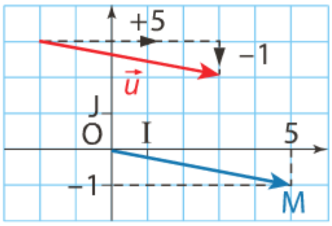
Chapitre 12 : Coordonnées d'un vecteur – Vecteurs colinéaires

I Coordonnées d'un vecteur

1) Définition

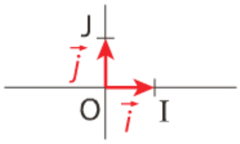
$(O ; I, J)$ est un repère et $\vec{u}$ est un vecteur donné. La translation de vecteur $\vec{u}$ associe au point O un unique point M. On sait que $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$.



Le vecteur $\vec{u}$ a pour coordonnées $(5 ; -1)$.

DÉFINITION Dans un repère $(O ; I, J)$, les coordonnées d'un vecteur $\vec{u}$ sont les coordonnées du point M tel que $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$.

Autre notation d'un repère
Bien souvent, au lieu de noter $(O ; I, J)$ un repère, on le note $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ avec $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$ et $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$.



PROPRIÉTÉ Deux vecteurs sont égaux si, et seulement si, ils ont les mêmes coordonnées dans un repère.

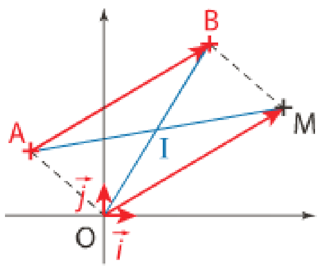
Autrement dit, dans un repère, **les vecteurs $\vec{u}(x ; y)$ et $\vec{v}(x' ; y')$ sont égaux, si, et seulement si, $x = x'$ et $y = y'$.**

DÉMONSTRATION
La translation de vecteur $\vec{u}$ associe, au point O, le point M.
La translation de vecteur $\vec{v}$ associe, au point O, le point M'.
Ainsi, $\vec{u} = \vec{v}$ si, et seulement si, M = M', c'est-à-dire M et M' ont les mêmes coordonnées, autrement dit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont les mêmes coordonnées.

2) Coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$

PROPRIÉTÉ Dans un repère, $A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$ sont deux points.
Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $(x_B - x_A ; y_B - y_A)$.

DÉMONSTRATION
Dans un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, on note M le point tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OM}$ c'est-à-dire tel que les segments [OB] et [AM] ont le même milieu I.



$x_I = \frac{x_B}{2}$ et $y_I = \frac{y_B}{2}$. Or, on a aussi $x_I = \frac{x_A + x_M}{2}$ et $y_I = \frac{y_A + y_M}{2}$.

On en déduit que $x_M = 2x_I - x_A = 2\frac{x_B}{2} - x_A = x_B - x_A$.

De même, $y_M = y_B - y_A$. Or le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées celles de M c'est-à-dire $(x_B - x_A ; y_B - y_A)$.

EXEMPLE
A(−15 ; 50), **B(28 ; 26)**. Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont (43 ; −24).

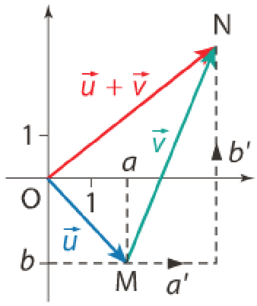
En effet : $\underbrace{x_B - x_A}_{\text{abscisse de l'extrémité – abscisse de l'origine}} = 28 - (-15) = 43$ et $\underbrace{y_B - y_A}_{\text{ordonnée de l'extrémité – ordonnée de l'origine}} = 26 - 50 = -24$

II Coordonnées de la somme de deux vecteurs

PROPRIÉTÉ Dans un repère, on donne les vecteurs $\vec{u}(a\,;b)$ et $\vec{v}(a'\,;b')$.
Alors les coordonnées du vecteur $\vec{u}+\vec{v}$ sont $\boldsymbol{(a+a'\,;b+b')}$.

DÉMONSTRATION

Dans un repère d'origine O, la translation de vecteur $\vec{u}\,(a\,;b)$ associe au point O, le point M $(a\,;b)$.
La translation de vecteur $\vec{v}(a'\,;b')$ associe au point M, le point N.
Alors $\vec{u}+\vec{v}=\overrightarrow{ON}$; on cherche donc les coordonnées de N.
Les coordonnées de $\overrightarrow{MN}$ sont $(x_N-a\,;y_N-b)$. Or $\overrightarrow{MN}=\vec{v}$ c'est-à-dire $x_N-a=a'$ et $y_N-b=b'$. Donc $x_N=a+a'$ et $y_N=b+b'$.
D'où $\vec{u}+\vec{v}(a+a'\,;b+b')$.



EXEMPLE

$\vec{u}(-3\,;5)$ et $\vec{v}(10\,;-8)$. Alors $\vec{u}+\vec{v}(7\,;-3)$.
En effet : $-3+10=7$ et $5+(-8)=-3$.

PROPRIÉTÉS Pour tous vecteurs $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$:
(1) $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$ **(2)** $\vec{u}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{u}=\vec{u}$ **(3)** $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$

III Produit d'un vecteur par un réel

Définition : Soit k un nombre réel et $\vec{u}$ $(x\,;\,y)$ un vecteur dans un repère.
Le vecteur $k\vec{u}$ est le vecteur de coordonnées $(kx\,;\,ky)$.

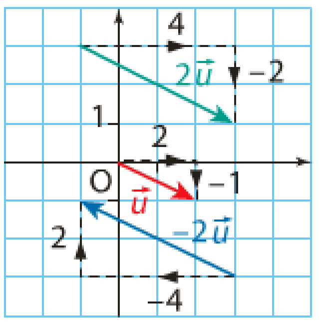
Remarque sur la notation : Le vecteur $\vec{v}$ obtenu par multiplication du vecteur $\vec{u}$ par le réel k, ne se note pas $k\times\vec{u}$ mais $k\cdot\vec{u}$ (utilisation du point $\cdot$) ou plus simplement $k\vec{u}$.

Propriété : $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ est un vecteur non nul donné et k est un réel. Le point C tel que $\overrightarrow{AC}=k\,\vec{u}$ est tel que :
- **Si $k>0$**, C $\in$ [AB] et AC = kAB.
- **Si $k<0$**, C est aligné avec A et B, mais C $\notin$ [AB] et AC = $-k$AB.

Propriétés :

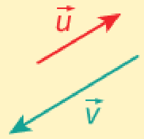
* Pour tout vecteur $\vec{u}$, $0\cdot\vec{u}=\vec{0}$, $1\cdot\vec{u}=\vec{u}$, $-1\cdot\vec{u}=-\vec{u}$.	* Pour tout réel k, $k\cdot\vec{0}=\vec{0}$.	* Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, pour tous réels a et b, $a\cdot(b\cdot\vec{u})=(a\times b)\cdot\vec{u}$ $(a-b)\cdot\vec{u}=a\cdot\vec{u}-b\cdot\vec{u}$ $a\cdot(\vec{u}-\vec{v})=a\cdot\vec{u}-a\cdot\vec{v}$

Exemple :



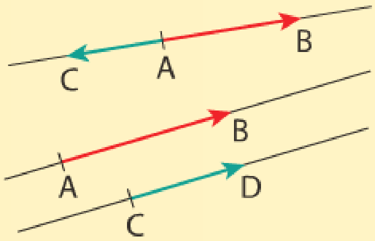
IV Colinéarité de deux vecteurs

DÉFINITION • Dire que deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** signifie qu'il existe un nombre réel λ tel que $\vec{v} = \lambda \vec{u}$.
• Le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur.



PROPRIÉTÉS • Trois points A, B, C sont alignés si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

• Deux droites (AB) et (CD) sont parallèles si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.



<u>Définition :</u> Soient $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs du plan.

Le **déterminant** de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est le nombre réel $xy' - yx'$. On le note det ($\overrightarrow{u}$; $\overrightarrow{v}$)

Propriété : Traduction analytique de la colinéarité

Deux vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont colinéaires si et seulement si leur déterminant est nul c'est-à-dire si et seulement si $xy' - yx' = 0$

<u>Deux Applications fondamentales :</u>

- <u>Parallélisme de 2 droites :</u>

Soient les points A (5 ; 3) ; B (10 ; 7) ; C (3 ; - 2) ; D (13 ; 6)

Pour savoir si les droites (AB) et (CD) sont parallèles on détermine si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires ou non.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} 10 \\ 8 \end{pmatrix}$ et $5\times 8 - 4\times 10 = 0$

Donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires et (AB) // (CD).

- <u>Alignement de 3 points :</u>

Soient les points A (1 ; 3) ; B (- 3 ; - 5) ; C(6 ; 13)

Pour savoir si les points A, B et C sont alignés on détermine si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires ou non.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -4 \\ -8 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix}$ et $-4\times 10 - (-8)\times 5 = 0$

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires et les points A, B, et C sont donc alignés.