Ch 9: Nombres complexes: exercices : correction

A l'issue de ce travail je dois être capable de :

- Calculer et interpréter géométriquement la partie réelle, la partie imaginaire, le conjugué, le module, et un argument d'un nombre complexe.
- Passer de la forme algébrique à la forme trigonométrique et vice-versa.

Exercice 1 :

95 **Faux.** $z = \sqrt{(-2)^2 + \left(-2\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4+12} = \sqrt{16} = 4$.

Remarque : on aurait pu aussi dire que le nombre propose est négatif. D'après le cours, un module est un nombre réel positif.

96 **Vrai.** On reprend la réponse du module de l'exercice 95. Notons ϑ un argument de z.

$\cos\vartheta = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$ et $\sin\vartheta = \frac{-2\sqrt{3}}{4} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. On obtient $\vartheta = \frac{4\pi}{3}$.

97 **Faux.** $|z| = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$. $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|\bar{z}|} = \frac{1}{|z|} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$. $\left|\frac{1}{z}\right| \neq |z|$.

98 **Vrai.** $|z| = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

Notons ϑ un argument de z. $\cos\vartheta = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\vartheta = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ On obtient $\vartheta = -\frac{\pi}{4}$.

$\frac{1}{\bar{z}} = \frac{1}{2+2i} = \frac{2-2i}{8} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}i$. $\left|\frac{1}{\bar{z}}\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

Notons ϑ' un argument de $\frac{1}{\bar{z}}$. $\cos\vartheta' = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{\sqrt{2}}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\vartheta' = -\frac{\frac{1}{4}}{\frac{\sqrt{2}}{4}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. On obtient $\vartheta' = -\frac{\pi}{4}$.

99 **Faux.** $AB = |5+i+2+2i| = |7+3i| = \sqrt{49+9} = \sqrt{58}$. $BC = |3i - 5 - i| = |-5+2i| = \sqrt{25+4} = \sqrt{29}$.
$AB \neq BC$.

100 **Vrai.** $AB = |5+2i-2+2i| = |3+4i| = \sqrt{9+16} = 5$.

$BC = |1-5-2i| = |-4-2i| = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.

$AC = |1-2+2i| = |-1+2i| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$.

$AC^2 + BC^2 = AB^2$.

D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en B.

101 **Vrai.** $|z| = \sqrt{(-2)^2 + (-2\sqrt{3})^2} = \sqrt{16} = 4$ $\quad |z'| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$ $\quad |z \times z'| = |z| \times |z'| = 4 \times 5 = 20.$

102 **Vrai.** $|z| = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10$ $\quad |z'| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$ $\quad \left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|} = \frac{10}{5} = 2$.

103 Réponse **b.**

104 Réponse **c.**

105 Réponse **b.**

106 Réponse **c.**

107 Réponse **b.**

108 Réponse **a.**

Exercice 2 :

1. a. $z_1 = \frac{2-6i}{2-i} = \frac{(2-6i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{4+2i-12i-6i^2}{2^2+(-1)^2} = \frac{10-10i}{5} = 2-2i$.

b. $|z_1| = \sqrt{2^2+(-2)^2} = 2\sqrt{2}$.

On note $\vartheta_1 = \arg(z_1)$. $\cos\vartheta_1 = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\vartheta_1 = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Donc $\vartheta_1 = -\frac{\pi}{4}$.

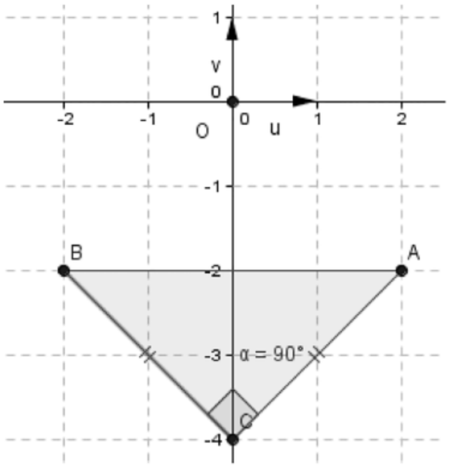
Une forme trigonométrique de z_1 est : $z_1 = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$.

c. $z_2 = -i(2-2i) = -2-2i$. $\qquad |z_2| = \sqrt{(-2)^2+(-2)^2} = 2\sqrt{2}$.

On note $\vartheta_2 = \arg(z_2)$. $\cos\vartheta_2 = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\vartheta_2 = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Donc $\vartheta_2 = -\frac{3\pi}{4}$.

Une forme trigonométrique de z_2 est : $z_2 = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right)$.

2. **a.**



b. $\overrightarrow{CA}(2-0;-2-(-4))$ donc $\overrightarrow{CA}(2;2)$ $\overrightarrow{CB}(-2-0;-2-(-4))$ donc $\overrightarrow{CB}(-2;2)$

$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=2\times(-2)+2\times 2=0$.

c. $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=0$ donc les droites (CA) et (CB) sont perpendiculaires en C. On peut conclure que le triangle ABC est rectangle en C.

De plus, $\|\overrightarrow{CA}\|=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$ et $\|\overrightarrow{CB}\|=\sqrt{(-2)^2+2^2}=2\sqrt{2}$.

Donc CA=CB. Le triangle ABC est aussi isocèle en C.

Exercice 3 :

1. a. $|a|=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$. On pose $\vartheta_a=\arg(a)$ $\cos\vartheta_a=\frac{2}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}=\sin\vartheta_a$. Donc $\vartheta_a=\frac{\pi}{4}$.

$a=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$.

$|b|=\sqrt{1^2+\sqrt{3}^2}=2$. On pose $\vartheta_b=\arg(b)$ $\cos\vartheta_b=\frac{1}{2}$ et $\sin\vartheta_b=\frac{\sqrt{3}}{2}$. Donc $\vartheta_b=\frac{\pi}{3}$.

$b=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$.

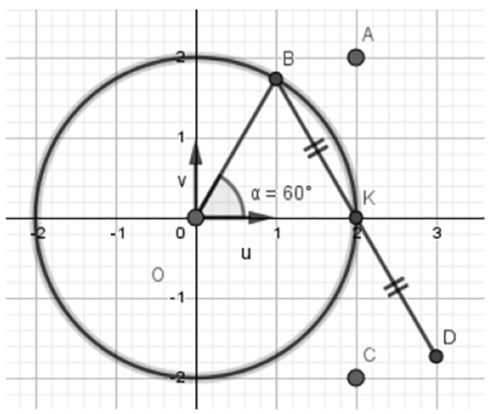
b. Soit I le milieu du segment [AC].

$z_I=\frac{a+c}{2}=\frac{2+2i+2-2i}{2}=2=k$. Donc I et K sont confondus et K est bien le milieu de [AC].

Soit J le milieu du segment [BD].

$z_J=\frac{b+d}{2}=\frac{1+i\sqrt{3}+3-i\sqrt{3}}{2}=2=k$. Donc J et K sont confondus et K est bien le milieu de [BD].

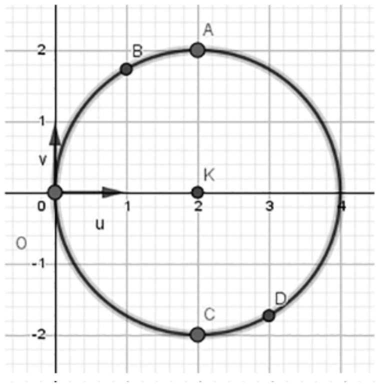
c.



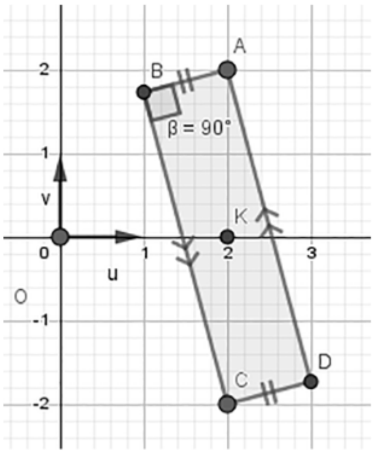
2. **a.** $KA = |a - k| = |2i| = 2$ $KB = |b - k| = |-1 + i\sqrt{3}| = 2$

$KC = |c - k| = |-2i| = 2$ $KD = |d - k| = |1 - i\sqrt{3}| = 2$

KA = KB = KC = KD = 2. A, B, C et D sont sur le cercle de centre K et de rayon 2.



b.



Les diagonales [AC] et [BD] se coupent en leur milieu K donc ABCD est un parallélogramme.

$AB = |b - a| = \left|-1 + i\left(\sqrt{3} - 2\right)\right| = \sqrt{(-1)^2 + \left(\sqrt{3} - 2\right)^2} = \sqrt{8 - 4\sqrt{3}}$.

$BC = |c - b| = \left|1 + i\left(-\sqrt{3} - 2\right)\right| = \sqrt{1^2 + \left(-\sqrt{3} - 2\right)^2} = \sqrt{8 + 4\sqrt{3}}$.

$AC = |c - a| = |-4i| = 4$.

$AB^2 + BC^2 = 16 = AC^2$. D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en B.
Donc le parallélogramme ABCD admet un angle droit au sommet B. C'est donc un rectangle.
De plus, $AB \neq BC$. ABCD est donc bien un rectangle.