

Ch 8 : Fonction logarithme décimal

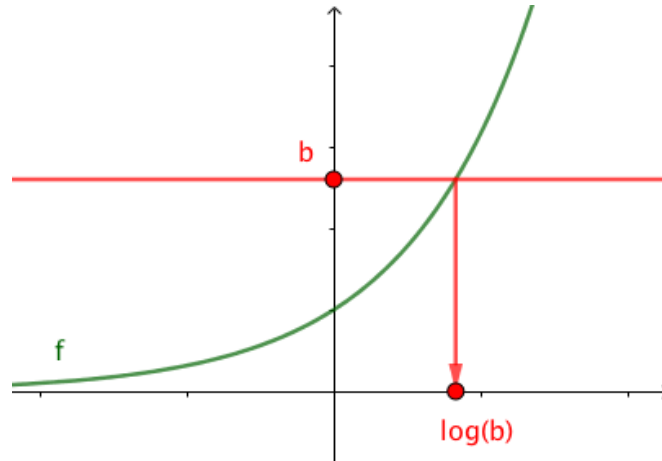
I. Définition et sens de variation

1) Définition :

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x)=10^x$.

L'équation $10^x=b$, avec $b>0$, admet une unique solution dans \mathbb{R} .

Cette solution se note $\log b$.



Définition : On appelle **logarithme décimal** d'un réel strictement positif b , l'unique solution de l'équation $10^x=b$. On la note $\log b$.

La **fonction logarithme décimal**, notée **log**, est la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$x \longmapsto \log(x)$$

Remarques :

- $10^x=b \Leftrightarrow x=\log b$

Exemples : $10^5=100\,000 \Leftrightarrow 5=\log(100\,000)$ et $10^{-2}=0,01 \Leftrightarrow -2=\log(0,01)$

$$5,3=\log(t) \Leftrightarrow t=10^{5,3}$$

- Pour tout nombre réel x , $\log(10^x)=x$

Exemples : $\log(10^5)=5$ et $\log 10^{-2}=-2$

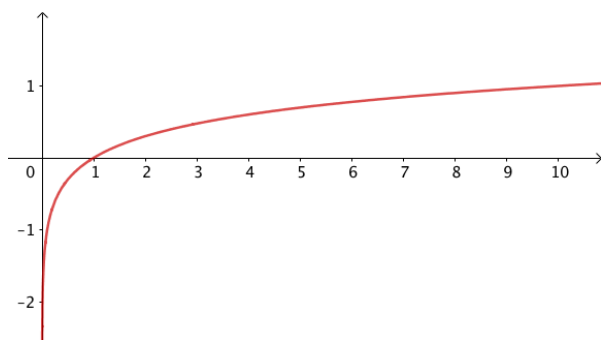
Cas particuliers :

- $\log(1)=0$

- $\log(10)=1$

- Pour tout entier relatif n , $\log(10^n)=n$

2) Représentation graphique et sens de variation :



Propriété : La fonction logarithme décimal est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

Ainsi $a \leq b \Leftrightarrow \log(a) \leq \log(b)$

Remarque : on peut appliquer le log dans une inégalité entre deux nombres strictement positifs sans modifier le sens de l'inégalité.

3) Signe :

| x | 0 | 1 | $+\infty$ |
|--------|---|---|-----------|
| log(x) | - | 0 | + |

II. Propriétés algébriques

Théorème : Pour tous nombres réels strictement positifs a et b,

$$\log(ab) = \log(a) + \log(b)$$

Exemple : $\log(200) = \log(2 \times 100) = \log(2) + \log(100) = \log(2) + \log(10^2) = \log(2) + 2$

Propriétés : a et b sont deux réels strictement positifs et n esdt un entier relatif

- $\log(a^n) = n\log(a)$
- $\log\left(\frac{1}{a}\right) = -\log(a)$
- $\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b)$

Propriété : Soit a un nombre réel strictement positif. Pour tout nombre réel x :

$$\log(a^x) = x \log(a)$$

Exemples :

$$\log(3^5) = 5 \log(3) \quad \log\left(\frac{1}{4}\right) = -\log(4) \quad \log\left(\frac{7}{9}\right) = \log(7) - \log(9)$$

$$\log\left(\frac{3^2}{2^3}\right) = \log(3^2) - \log(2^3) = 2 \log(3) - 3 \log(2)$$

Simplifier les expressions suivantes :

$$A = \log(2 - \sqrt{2}) + \log(2 + \sqrt{2})$$

$$B = 2 \log 3 + \log 2 - 4 \log 3$$

$$C = \log 10^3 - \log \frac{1}{5}$$

$$A = \log(2 - \sqrt{2}) + \log(2 + \sqrt{2})$$

$$= \log((2 - \sqrt{2}) \times (2 + \sqrt{2}))$$

$$= \log(4 - 2) = \ln 2$$

Pour $a > 0$ et $b > 0$:

$$\log(a) + \log(b) = \log(ab)$$

$$B = 2 \log 3 + \log 2 - 4 \log 3$$

$$= \log 3^2 + \log 2 - \log(3^4)$$

Pour $a > 0$ et n entier naturel :

$$\log(a^n) = n \log(a)$$

$$= \log(3^2 \times 2) - \log(3^4)$$

$$= \log \frac{3^2 \times 2}{3^4}$$

Pour $a > 0$ et $b > 0$:

$$\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b)$$

$$= \log \frac{2}{9}$$

$$C = \log 10^3 + \log \frac{1}{5}$$

Pour $b > 0$:

$$\log\left(\frac{1}{a}\right) = -\log(a)$$

$$= \log 10^3 - \log 5$$

$$= 3 \log 10 - \log 5$$

$$= 3 \times 1 - \log 5$$

$$= 3 - \log 5$$

III. Équations du type $a^x = b$ ou $x^a = b$ et inéquations du type $a^x < b$ ou $x^a < b$

Propriétés : Soit x et y deux réels strictement positifs

$$\log(x) = \log(y) \Leftrightarrow x = y$$

$$\log(x) < \log(y) \Leftrightarrow x < y$$

Exemples :

Résoudre l'équation $2^x = 100$

$$2^x = 100 \Leftrightarrow \log(2^x) = \log(100) \Leftrightarrow x \log(2) = \log(10^2) = 2$$

Ainsi $x = \frac{2}{\log(2)}$

Résoudre l'inéquation $5^x < 0,0001$

$$5^x < 0,0001 \Leftrightarrow \log(5^x) < \log(10^{-4}) \Leftrightarrow x \log(5) < -4$$

Ainsi $x < \frac{-4}{\log(5)}$ (on divise par $\log(5)$ qui est positif donc le sens de l'inégalité est conservé)

Rappel :

- Lorsqu'on multiplie ou divise les deux membres d'une inégalité par un nombre strictement **positif**, on **conserve** le sens de l'inégalité.
- Lorsqu'on multiplie ou divise les deux membres d'une inégalité par un nombre strictement **négatif**, on **renverse** le sens de l'inégalité.

Applications :

1) Résoudre dans \mathbb{R} l'équation : $6^x = 2$

2) Résoudre dans $]0; +\infty[$ l'équation : $x^5 < 3$

1) $6^x = 2$

$$\log 6^x = \log 2$$

$$x \log 6 = \log 2$$

$$x = \frac{\log 2}{\log 6}$$

2) $x^5 < 3$

$$\log(x^5) < \log 3$$

$$5 \log x < \log 3$$

$$\log x < \frac{1}{5} \log 3$$

$$\log x < \log 3^{\frac{1}{5}}$$

$$x < 3^{\frac{1}{5}} \quad \text{L'ensemble solution est }]0; 3^{\frac{1}{5}}[.$$

(Remarque : $3^{\frac{1}{5}}$ se lit "racine cinquième de 3" et peut se noter $\sqrt[5]{3}$.)