Ch 6 : Fonction exponentielle de base a

I. Définition et propriétés

1) Définition et premières propriétés

On considère la suite géométrique de raison a définie par $u_n = a^n$.
Elle est définie pour tout entier naturel n.
En prolongeant son ensemble de définition pour tout réel strictement positif, on définit la fonction exponentielle de base a.
Ainsi par exemple :
Pour une suite géométrique de raison $a = 2$ et de premier terme 1, on a par exemple : $u_4 = 2^4$.
Pour la fonction correspondante, on a :
$f(4) = 2^4$ mais on a également :
$f(1{,}3) = 2^{1{,}3}$.
Et de façon générale, $f(x) = 2^x$ pour tout réel x positif.

La fonction f est appelée fonction exponentielle de base 2.

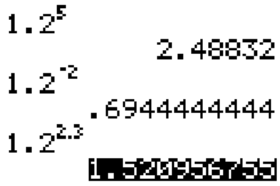
Propriété : $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$

L'ensemble de définition des fonctions exponentielles peut ainsi être étendu aux valeurs de x négatives.

Définition : La fonction $x \longmapsto a^x$ définie sur $\mathbb{R}$, avec $a > 0$,
s'appelle **fonction exponentielle de base** a.

Exemple :
La fonction exponentielle de base 1,2 est définie sur R par $x \longmapsto 1{,}2^x$.

Remarque : Avec la calculatrice, il est possible de calculer des valeurs d'une fonction exponentielle.



Propriété : La fonction exponentielle de base a est strictement positive sur $\mathbb{R}$.

2) Propriétés algébriques

Propriétés :

a) $a^0=1$ et $a^1=a$

b) $a^{x+y}=a^x\times a^y$

c) $a^{x-y}=\frac{a^x}{a^y}$

d) $(a^x)^n=a^{nx}$, avec *n* un entier relatif.

Méthode : Simplifier une expression

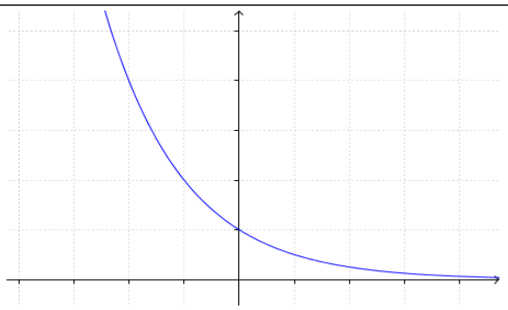
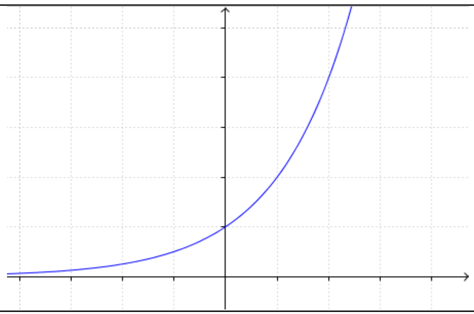
Simplifier les expressions suivantes :

$A=4^{-3}\times 4^{-5}$ $B=\frac{3^3\times 3^{-2,5}}{9^5}$ $C=\left(4{,}8^{-2,1}\right)^3\times 4{,}8^{6,2}$

II. Variations des fonctions exponentielles

1) Sens de variation de $x\to a^x$:

Propriétés:

$0<a<1$	$a>1$
$x\to a^x$est strictement décroissante sur ℝ	$x\to a^x$ est strictement croissante sur ℝ
	

Remarques :

- Si $a=1$ alors la fonction exponentielle est constante. En effet, dans ce cas, $a^x=1^x=1$
- Quelle que soit la valeur de a, la fonction exponentielle passe par le point (0 ; 1). En effet, $a^0=1$.

2) Sens de variation de $x \to ka^x$:

Propriétés : Soient k réel et a réel strictement positif :

Si $k>0$ et $0<a<1$ alors $f(x)=ka^x$ est strictement décroissante sur ℝ
et $a>1$ alors $f(x)=ka^x$ est strictement croissante sur ℝ

Si $k<0$ et $0<a<1$ alors $f(x)=ka^x$ est strictement croissante sur ℝ
et $a>1$ alors $f(x)=ka^x$ est strictement décroissante sur ℝ

Méthode : Utiliser une fonction exponentielle

Suite à une infection, le nombre de bactéries contenues dans un organisme en fonction du temps (en heures) peut être modélisé par la fonction f définie sur [0 ; 10] par : $f(x)=50000 \times 1{,}15^x$.

a) À l'aide de la calculatrice, donner un arrondi au millier près du nombre de bactéries après 3h puis 5h30.
b) Déterminer les variations de f sur [0 ; 10].
c) À l'aide de la calculatrice, déterminer au bout de combien de temps le nombre de bactéries a doublé ?

III. Taux d'évolution moyen

Méthode : Calculer un taux d'évolution moyen

Entre 2012 et 2015, le prix du gaz a augmenté de 25 %. Calculer le taux d'évolution moyen annuel.

On note *t* le taux d'évolution moyen annuel.
Le coefficient multiplicateur correspondant à une augmentation **sur un an** est égal à :

$$1+\frac{t}{100}$$

Le coefficient multiplicateur correspondant à une augmentation **sur trois ans** (de 2012 à 2015) est égal à :

$$\left(1+\frac{t}{100}\right)\times\left(1+\frac{t}{100}\right)\times\left(1+\frac{t}{100}\right)=\left(1+\frac{t}{100}\right)^3$$

Or, sur trois années, le prix a augmenté de 25 % donc ce coefficient multiplicateur est également égal à : $1{,}25$.
On a donc :

$$\left(1+\frac{t}{100}\right)^3=1{,}25$$

$$1+\frac{t}{100}=1{,}25^{\frac{1}{3}}$$

$$\frac{t}{100}=1{,}25^{\frac{1}{3}}-1$$

$$t=100\times\left(1{,}25^{\frac{1}{3}}-1\right)$$

$$t\approx7{,}72\,\%$$

Propriété :
Si $x^n=a$ alors $x=a^{\frac{1}{n}}$

Le taux d'évolution moyen annuel est environ égal 7,72%.

Remarque : $a^{\frac{1}{n}}$ est appelé la **racine n-ième** de a.
On peut également noté $\sqrt[n]{a}$.
On a par exemple : Si $x^2=a$ alors $x=\sqrt[2]{a}=\sqrt{a}$!