Projektna naloga pri predmetu Statistika

Beno Učakar
Profesor: doc. dr. Martin Raič

1. naloga

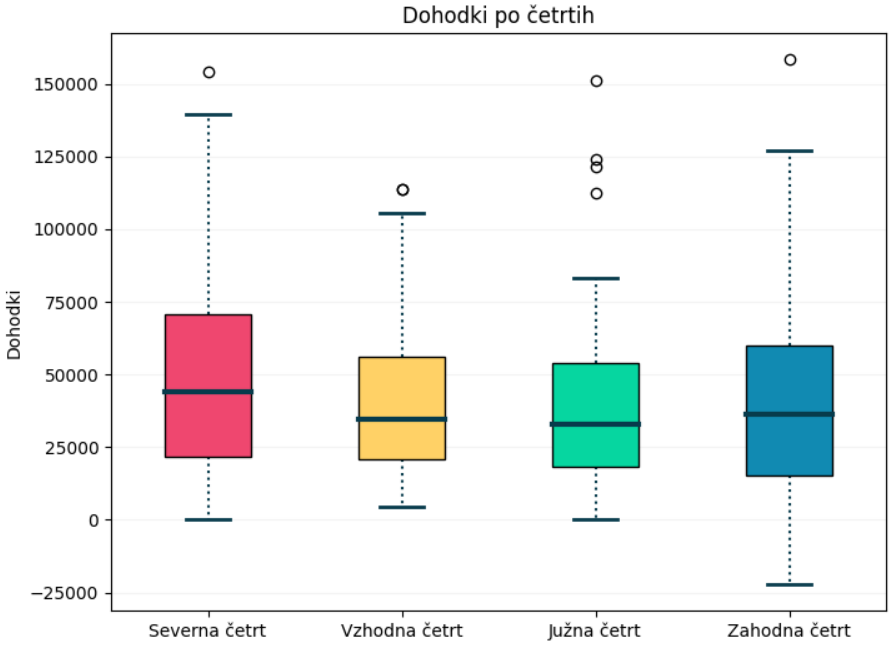
Nalogo rešujemo s pomočjo programa **naloga1.py**. Ta generira škatle z brki in za zadnji del naloge vrne:

```
S četrtmi pojasnjena varianca dohodka družin Kibergrada
znaša 9252923, residualna varianca pa znaša 1017132747.
Pojasnjeni standardni odklon dohodka med četrtmi znaša 3042.
Povprečni dohodki znašajo 45759 v severni, 41235 v vzhodni,
37473 v južni in 42158 v zahodni četrti.
```

Preučevali bomo skupni dohodek družin v mestu Kibergrad. Imamo informacije o 43.886 družinah, ki so v enem od štirih četrti. Število družin v severni, vzhodni, južni oziroma zahodni četrti je 10.149, 10.390, 13.457 oziroma 9.890.

Primer (a)

Iz vsake četrti izberemo slučajni vzorec velikosti 100. Na podlagi teh vzorcev narišemo škatle z brki za dohodke po četrtih, ki so prikazane na sliki 1.



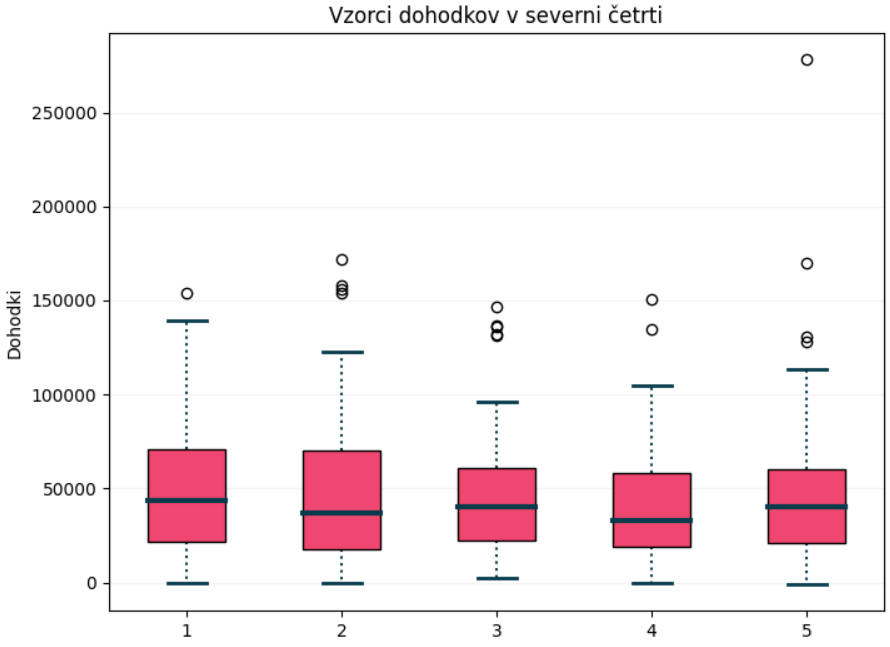
Slika 1: Škatle z brki za dohodke po četrtih.

Najprej naredimo nekaj splošnih opazk. Opazimo, da je variacija dohodkov znotraj severne in zahodne četrti nekoliko višja kot v vzhodni in južni četrti. Ker so prvi, drugi in tretji kvartil ter maksimum v severni četriti izmed vseh četrti največji, sklepamo, da so v povprečju dohodki v severni četrti malenkost višji od ostalih. V vzhodni in južni četrti je porazdelitev nekoliko nagnjena k višjim dohodkom. Južna četrt ima največ osamelcev, dohodki pa so izmed vseh četrti najmanj razpršeni.

Na podlagi opaženega, sklepamo, da so dohodki v severni četrti nekoliko višji kot v ostalih. Pravtako pa se zdi, da je varianca povprečnega dohodka med četrtmi relativno majhna. Glede na to da smo iz vsake četrti izbrali zgolj 100 vzorcev, populacija četrti pa je v povprečju 10.000, ti podatki niso nujno reprezentativni. Zato s tem sklepom postopamo previdno.

Primer (b)

Iz severne četrti vzamemo še 4 vzorce velikosti 100. Tudi za te vzorce narišemo škatle z brki prikazane na sliki 2.



Slika 2: Škatle z brki za dohodke v severni četrti.

Mediane vseh škatel ležijo nad 40.000, tako da sklepamo da večina dohodkov znaša več kot toliko. Dohodki osamelcev znašaja v povprečju 150.000. Nasploh opazimo nekoliko več variacije med premožnejšimi prebivalci severne četriti.

Primer (c)

Naj bo N velikost populacije Kibergrada, N_i velikost populacije i-te četrti in $w_i = \frac{N_i}{N}$ velikostni deleži četrti. Nadaljnje naj bo μ_i povprečni dohodek in σ_i^2 varianca dohodka i-te četrti, μ povprečni dohodek in σ^2 varianca dohodka celotne populacije ter σ_p^2 in σ_n^2 pojasnjena in nepojasnjena varianca celotne populacije. Pojasnjeno in nepojasnjeno varianco pri stratificiranem vzorčenju lahko izrazimo kot

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{4} w_i \mu_i^2 - \mu^2 \qquad \sigma_n^2 = \sum_{i=1}^{4} w_i \sigma_i^2.$$

Program **naloga1.py** vrne, da pojasnjena varianca znaša 9.252.923, nepojasnjena varianca pa znaša 1.017.132.747. Pojasnjeni standardni odklon dohodka med četrtmi znaša 3.042, kar je malo v primerjavi s povprečnimi dohodki četrti, ki znšajo 45.759 v severni, 41.235 v vzhodni, 37.473 v južni

in 42.158 v zahodni četrti. To potrjuje hipotezo, da je razlika povprečnega dohodka družine med četrtmi majhna.

2. naloga

Nalogo rešujemo s pomočjo programa **naloga2.py**. Ta generira črtne grafikone in vrne naslednje podatke:

```
Cenilka za parameter geometrijske
porazdelitve znaša 0.358.
Nepristranska cenilka za parameter geometrijske
porazdelitve znaša 0.356.
```

Primer (a)

Najprej uvedimo nekaj oznak. Če je $k \in \{1, \ldots, 12\}$ število skokov ptic, naj bo S_k frekvenca tega opažanja. Podatke z novimi oznakami predstavimo v spodnji tabeli.

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
S_k	48	31	20	9	6	5	4	2	1	1	2	1

Tabela 1: Frekvence števila skokov.

Skupno število opaženih skokov označimo z S, število vseh opažanj pa z N. Velja

$$N = \sum_{k=1}^{12} S_k \qquad S = \sum_{k=1}^{12} kS_k.$$

V našem primeru znaša $N = 130$ in $S = 363$.

Želimo poiskati geometrijsko porazdelitev, ki se najbolje prilega tem podatkom. Naj bo število skokov pri i-tem opažanju slučajna spremenljivka $K_i \sim \mathrm{Geom}(p)$ in predpostavimo, da so spremenljivke K_i med sabo neodvisne. Iščemo cenilko za parameter p. Dikcija *se nejbolje prilega* nam namigne, da iščemo cenilko po metodi največjega verjetja.

Verjetnostna funkcija geometrijske porazdelitve $\mathrm{Geom}(p)$ je

$$\mathrm{P}(K = k) = p(1-p)^{k-1}.$$

Verjetje lahko torej izrazimo kot

$$\mathrm{L}(p \mid K_1, \ldots, K_N) = p^N (1-p)^{S-N}.$$

Ko logaritmiramo, dobimo

$$\mathrm{l}(p \mid K_1, \ldots, K_N) = N \ln(p) + (S-N) \ln(1-p).$$

Če izraz odvajamo po p, enačimo z 0 in malo računamo, pridemo do cenilke

$$\hat{p} = \frac{N}{S}.$$

Omenimo še, da bi isto cenilko dobili, če bi postopali po metodi momentov. V našem primeru ta cenilka znaša

$$\hat{p} = \frac{130}{363} \approx 0,358.$$

Iskana geometrijska porazdelitev je $\text{Geom}(\hat{p})$.

Primer (b)

Ob predpostavki, da so $K_i \sim \text{Geom}(\hat{p})$, poračunamo verjetnosti p_k, da pri enem opažanju pride do k skokov. Pričakovano vrednosti frekvenc določimo s pomočjo programa **naloga2.py** po predpisu

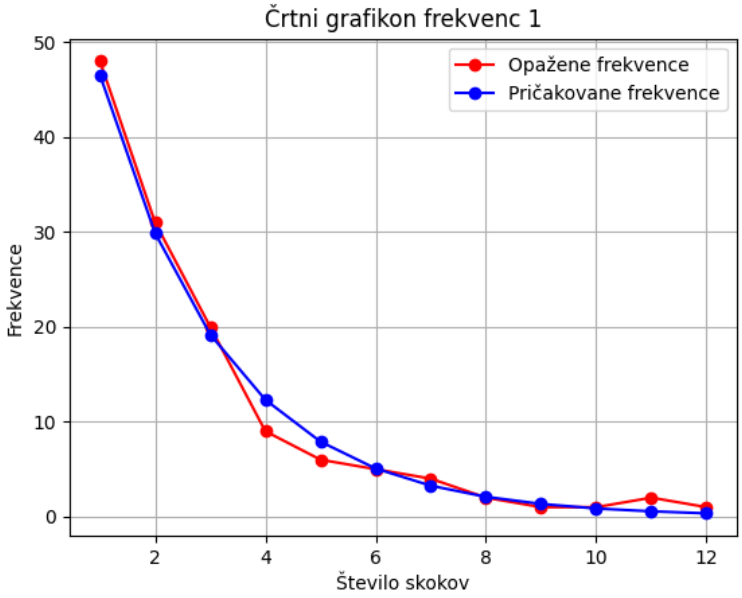
$$\hat{S}_k = p_k N.$$

Dobimo spodnjo tabelo.

k	1	2	3	4	5	6
p_k	0,3580	0,2298	0,1476	0,0947	0,0608	0,0390
$\hat{S}_k$	46,54	29,87	19,19	12,31	7,90	5,07
k	7	8	9	10	11	12
p_k	0,0251	0,0161	0,0103	0,0066	0,0043	0,0027
$\hat{S}_k$	3,26	2,09	1,34	0,86	0,56	0,35

Tabela 2: Pričakovane frekvence skokov.

Te podatke združimo v črtni grafikon prikazan na sliki 3.



Slika 3: Črtni grafikon opaženih in pričakovanih frekvenc.

Zdi se, da se pričakovane frekvence dobro prilegajo opaženim. Ponekod pride do odstopanja, ki pa je lahko posledica dejstva, da pričakovane frekvence $\hat{S}_k$ niso cela števila.

Primer (c)

Opazimo, da je slučajna spremenljivka $S = \sum_{i=1}^{N} K_i$ vsota N neodvisnih spremenljivk s porazdelitvijo Geom(p) in je zato porazdeljena negativno binomsko NegBin(N, p). Pričakovano vrednost cenilke $\hat{p}$ lahko torej zapišemo kot

$$\mathrm{E}(\hat{p}) = \mathrm{E}\left(\frac{N}{S}\right) = \sum_{k=N}^{\infty} \frac{N}{k} \binom{k-1}{N-1} p^N (1-p)^{k-N}.$$

Ta izraz je mogoče zapisati kot vsota racionalne in logaritemske funkcije parametra p, vsekakor pa cenilka ni nepristranska. Točno izražavo tu izpostimo, omenimo pa, da se zaplete predvsem zaradi faktorja $\frac{1}{k}$.

Raje poglejmo, kaj je pričakovana vrednost slučajne spremenljivke $\frac{1}{S-1}$.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}\left(\frac{1}{S-1}\right) &= \sum_{k=N}^{\infty} \frac{1}{k-1}\binom{k-1}{N-1} p^N (1-p)^{k-N} \\
&= \sum_{k=N}^{\infty} \frac{1}{N-1}\binom{k-2}{N-2} p^N (1-p)^{k-N} \\
&= \frac{p^N}{N-1} \sum_{k=N}^{\infty} \binom{k-2}{k-N} (1-p)^{k-N} \\
&= \frac{p^N}{N-1} \sum_{k=N}^{\infty} \binom{-N+1}{k-N} (-1)^{k-N} (1-p)^{k-N} \\
&= \frac{p^N}{N-1} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-N+1}{k} (-1)^{k} (1-p)^{k} \\
&= \frac{p^N}{N-1} p^{-N+1} = \frac{p}{N-1}
\end{aligned}
$$

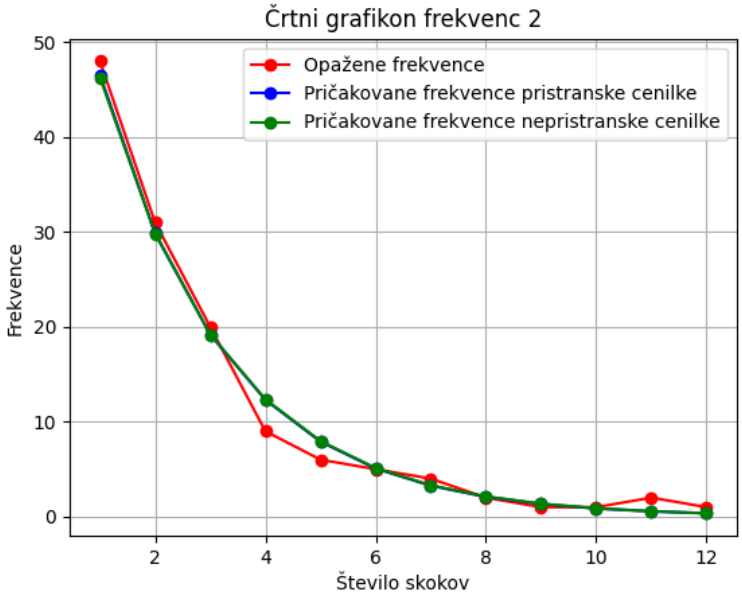
Za novo cenilko parametra p izberemo

$$\tilde{p} = \frac{N-1}{S-1}.$$

Zgornji izračun pokaže, da je to res nepristranska cenilka. V našem primeru znaša

$$\tilde{p} = \frac{129}{362} \approx 0,356.$$

S pomočjo programa **naloga2.py** ponovno izračunamo pričakovane frekvence. Na sliko 3 dorišemo še črtni grafikon novih frekvenc in tako dobimo sliko 4.



Slika 4: Črtni grafikon opaženih ter pričakovanih frekvenc s pristransko in nepristransko cenilko.

Opazimo da se črtna grafikona prvotne in nepristranske cenilke skoraj popolnoma ujemata.

3. naloga

Nalogo rešujemo s pomočjo programa **naloga3.py**. Ta generira histogram in vrne naslednje podatke:

```
Studentova statistika znaša 19.29739 in ima
107 prostorskih stopenj.
Širina stolpcev po modificiranem Freedman-Diaconisovem
pravilu znaša 20.499.
Studentova statistika znaša 0.09837 in ima
(2, 43) prostorskih stopenj.
```

Naj bo P_i^1 prvi in P_i^2 drugi izmerjen pulz i-tega študenta. Za vsakega študenta izračunamo spremembo pulza $\Delta P_i = P_i^2 - P_i^1$. To statistiko bomo obravnavali v nadaljevanju.

Primer (a)

Študente razdelimo v dve skupini glede na to ali so bili med meritvama pulzov deležni obremenitve ali ne. Za $i = 1, \ldots, n$ spremembo pulza i-

tega študenta, ki je bil deležen obremenitve, označimo z X_i. Podobno za $j = 1, \ldots, m$ spremembo pulza j-tega študenta, ki ni bil deležen obremenitve, označimo z Y_j. Predpostavimo, da so razlike pulzov X_i porazdeljene normalno s porazdelitvijo $\mathrm{N}(\mu_X, \sigma^2)$, razlike pulzov Y_j pa normalno s porazdelitvijo $\mathrm{N}(\mu_Y, \sigma^2)$.

Testiramo ničelno hipotezo

$$H_0 : \mu_X = \mu_Y$$

proti enostranski alternativni hipotezi

$$H_1 : \mu_X > \mu_Y.$$

V ta namen opravimo T-test na testni statistiki

$$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{s_p \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}},$$

kjer je

$$s_p^2 = \frac{n\sigma_X^2 + m\sigma_Y^2}{n + m - 2},$$

σ_X^2 in σ_Y^2 pa sta vzorčni varianci skupin. Program **naloga3.py** vrne, da statistika T znaša 19,29739 in ima 107 prostorskih stopenj. Iz tabel razberemo, da znašata

$$F^{-1}_{\mathrm{Student}(60)}(0.05) = 1{,}671 \quad \text{in} \quad F^{-1}_{\mathrm{Student}(60)}(0.01) = 2{,}390.$$

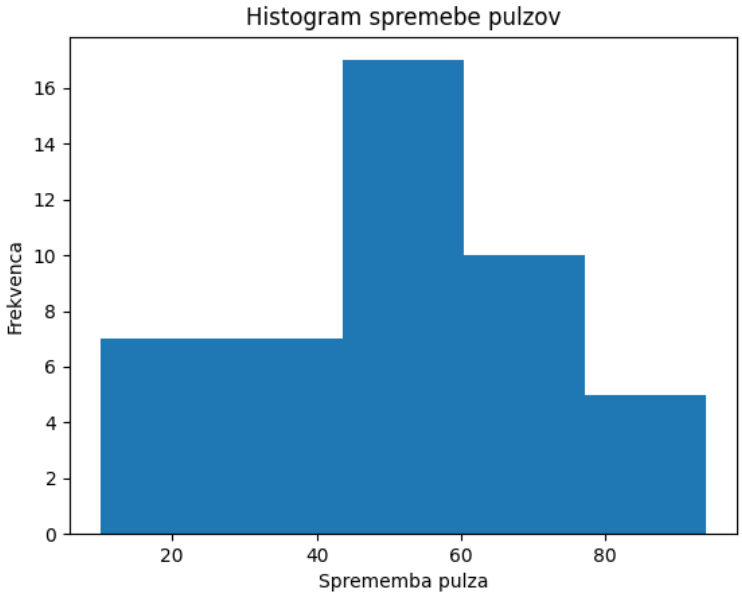
Ker funkcija $F^{-1}_{\mathrm{Student}(k)}$ pada v odvisnosti od parametra k, velja

$$T > F^{-1}_{\mathrm{Student}(107)}(0.05) \quad \text{in} \quad T > F^{-1}_{\mathrm{Student}(107)}(0.01).$$

Ničelno hipotezo zavrnemo pri stopnji tveganja 0,05 in 0,01. Zanesljivo lahko trdimo, da obremenitev vpliva na spremembo pulza.

Primer (b)

Za spremembe pulzov študentov, ki so bili določeni za obremenitev, narišemo histogram, ki je prikazan na sliki 5. Širine stolpcov so določene v skladu z modificiranem Freedman-Diaconisovem pravilu in znašajo 20,499.



Slika 5: Histogram spremembe pulzov pri študentih, ki so bili določeni za obremenitev.

Po predpostavki, naj bi bile spremembe pulzov pri študentih, ki so bili določeni za obremenitev, normalno porazdeljene. Iz zgornjega histograma pa je razvidno, da je nekoliko več študentov imelo spremembo pulza pod 30, kot pa bi pričakovali od normalne porazdelitve. Zdi se, da je res nekaj študentov goljufalo.

Primer (c)

Vseh N študentov, ki so bili deležni obremenitve, glede na njihovo vadbo razdelimo v $k = 3$ skupine. Z X_{ij} označimo spremembo pulza j-tega študenta i-te skupine. Predpostavimo model

$$X_{ij} = \mu + \alpha_i + \epsilon_{ij},$$

kjer je μ pričakovana vrednost vseh meritev, α_i odstopanje od pričakovane vrednosti i-te skupine in ϵ_{ij} šum, za katere pa predpostavimo, da so med sabo neodvisni in porazdeljeni normalno $\mathrm{N}(0, \sigma^2)$.

Testiramo ničelno hipotezo

$$H_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$$

proti alternativni hipotezi

$$H_1 : \text{Niso vsi } \alpha_i = 0.$$

V ta namen opravimo ANOVA F-test na statistiki

$$F = \frac{\frac{SS_B}{k-1}}{\frac{SS_W}{N-k}},$$

kjer je

$$SS_B = \sum_{i=1}^{k} N_i(\bar{X}_i - \bar{X})^2 \quad \text{in} \quad SS_W = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{N_i}(X_{ij} - \bar{X}_i)^2.$$

Tu smo z N_i označili velikost i-te skupine, z $\bar{X}_i$ vzorčno povprečje i-te skupine in z $\bar{X}$ vzorčno povprečje vseh meritev. Program **naloga3.py** vrne, da statistika F znaša $0,09837$ in ima $(2, 43)$ prostorskih stopenj. Iz tabel razberemo, da znašata

$$F^{-1}_{\text{Fisher}(2,60)}(0.05) = 3{,}15 \quad \text{in} \quad F^{-1}_{\text{Fisher}(2,60)}(0.01) = 4{,}98.$$

Ker funkcija $F^{-1}_{\text{Fisher}(2,k)}$ pada v odvisnosti od parametra k, velja

$$F < F^{-1}_{\text{Fisher}(2,43)}(0.05) \quad \text{in} \quad F < F^{-1}_{\text{Fisher}(2,43)}(0.01).$$

Tako ne moremo niti pri stopnji tveganja 0,05 niti pri 0,01 zavrniti ničelne hipoteze. Nimamo dovolj podatkov, da bi lahko trdili, da vadba vpliva na spremembo pulza.