Partage équitable

Benjamin PETIT

10 juin 2015

Introduction

Le but de ce TIPE est de proposer un aperçu du problème de partage équitable, qui consiste à étudier la possibilité d'une répartition d'une ressource hétérogène entre plusieurs agents aux préférences différentes, respectant des contraintes dites d'équité. Ce problème est central en économie théorique, et est lié à d'autres domaines des mathématiques riches en applications tels que l'optimisation et la théorie des jeux. Nous nous intéressons en particulier aux diverses formes que peuvent prendre les contraintes d'équité, plus ou moins fortes, démontrons l'existence, sous certaines conditions, d'allocations équitables, et proposons une étude approfondie d'algorithmes d'approximation d'allocations équitables. Nous aurons recours à deux approches reflétant l'étendue du domaine étudié ; l'une purement combinatoire, l'autre analytique.

1 Une approche continue du problème de partage équitable

Considérons le problème simple du partage d'un gâteau, représenté par l'intervalle $X = [0, 1]$, entre $n \geq 1$ convives représentés par l'ensemble $\{1, ..., n\}$. Chaque joueur i est doté d'une **fonction de valuation** notée v_i, supposée continue par morceaux, à valeurs positives, et d'intégrale normalisée, c'est-à-dire telle que $\int_0^1 v_i(t)dt = 1$. On appellera **part** toute réunion finie X_i d'intervalles de X, que l'on pourra également représenter par son indicatrice f_i. Une **allocation** du gâteau sera une n-liste $A = (X_1, ..., X_n)$ de parts deux à deux disjointes. On dira alors que, dans l'allocation A, le joueur i **reçoit** la part X_i. La **valuation de la part** i **de l'allocation** A **au sens du joueur** j sera alors : la quantité $U_{i,j}(A) = \int_0^1 f_i(t)v_j(t)dt = \int_{X_j} v_j$, que l'on notera plus simplement $U_i(A)$ lorsque $i = j$ (on omettra éventuellement de préciser l'allocation concernée lorsque cela ne fait aucun doute). On notera à problème de partage (joueurs et fonctions de valuation) fixé, Ω l'**ensemble des allocations**.

1.1 Garantir une équité au sens faible : équité proportionnelle et procédure de Dubins-Spanier

Lors du partage d'une ressource entre plusieurs joueurs, il est naturel qu'il ne peut y avoir d'équité si l'un d'entre eux se sent spolié, c'est-à-dire si celui-ci se voit remettre une part valant, à son sens, moins d'un n-ième de la valeur totale du gâteau. Il semble donc logique de définir la notion **d'équité proportionnelle** :

Définition. (*Equité proportionnelle*)
Une allocation $A = (X_1, ..., X_n)$ est dite **proportionnelle** si, et seulement si, $\forall i \in \{1, ..., n\}, U_i \geq \frac{1}{n}$.

Grâce à la continuité (par morceaux) des fonctions de valuation et à leur normalisation, il est possible de démontrer de façon algorithmique l'existence d'une allocation proportionnelle du gâteau :

Algorithme. *(Dubins-Spanier, 1961)*

Imaginons le déplacement progressif d'un couteau de gauche à droite au-dessus du gâteau. Pour chaque position du couteau, les joueurs estiment la valuation de la part située entre la dernière coupe et celle-ci (lorsque aucune coupe n'a encore été réalisée, la position initiale est vue comme la dernière coupe). Dès que, pour l'un des joueurs, la valuation de cette part devient égale à $\frac{1}{n}$, cette part est attribuée au joueur correspondant (ou à l'un des joueurs correspondants, s'il y en a plusieurs), et la procédure reprend avec les joueurs suivants.

Cette procédure conduit, dans sa formalisation, à l'existence d'allocations proportionnelles. Elle est représentée en figure 3.1.

Nous proposons une implémentation discrétisée de cet algorithme dans le langage Python, qui consiste à effectuer le même travail de façon approximative en découpant le segment $[0,1]$ en une subdivision régulière à N segments, et à calculer les intégrales correspondantes par une méthode de Riemann, satisfaisante pour N suffisamment grand (précision linéaire en $1/N$). En figure 3.2 se trouvent quelques représentations graphiques des résultats obtenus pour des fonctions simples, puis pour des fonctions à accroissements aléatoires. Les différentes couleurs représentent les différentes parts allouées aux joueurs. On remarquera que l'algorithme n'est que peu sensible à la régularité des fonctions considérées.

Sur ces exemples, on observe que l'algorithme laisse une part non négligeable du gâteau non allouée, se contentant d'allouer à chaque joueur une part de valuation $1/n$ (à la précision du calcul près). Il est possible, en augmentant la valuation minimale souhaitée pour une part (en commençant à $1/n$ et en augmentant peu à peu) et en exécutant l'algorithme pour chacune de ces valeurs, d'obtenir un algorithme allouant la totalité du gâteau à une précision arbitraire près, donnant sur tous les exemples étudiés une valuation strictement supérieure (souvent de près de 20 à 30%) à $1/n$. Cette optimisation est représentée en figure 3.3.

1.2 De la maximisation des gains

Au vu des résultats des simulations précédentes, et en particulier de la possibilité qu'il semble y avoir de dépasser $1/n$ comme valuation minimale d'une part acceptable dans les cas étudiés, nous pouvons raisonnablement nous demander quelle est la meilleure valuation minimale que l'on peut garantir à tous les joueurs à la fois pour un problème de partage fixé. Nous avons en réalité affaire ici à un problème de recherche d'un maxmin, qui relève du domaine de l'optimisation continue.

Définition. *(Maxmin d'un problème de partage)*

On appelle, à problème de partage fixé, maxmin de ce problème le réel :

$$\beta = sup_{A\in\Omega}\ min_{i\in\{1,\dots,n\}} U_i(A)$$

Remarquons que l'algorithme de Dubins-Spanier ne garantit pas que le paramètre minimal menant à l'allocation de tout le gâteau, et donc à l'impossibilité d'augmenter ce paramètre à nouveau, soit optimal (on peut notamment étudier le cas de fonctions affines par morceaux bien choisies). En particulier, cet algorithme souffre de la contigüité des parts allouées, ce qui l'empêche de fournir certaines allocations à intervalles disjoints, parfois bien plus avantageuses. Cela nécessitera plus loin la mise en place d'un autre algorithme afin de pallier à ce problème. Nous pouvons néanmoins donner un premier encadrement sur β, qui repose sur le théorème ci-dessous :

Théorème. *On a l'encadrement suivant :*

$$\frac{1}{n} \leq \beta \leq \frac{1}{n}\int_0^1 sup_{1\leq i\leq n} v_i(t)dt$$

Afin d'obtenir de meilleurs encadrements, on peut passer d'un modèle discret d'allocations à un modèle continu d'allocations. Plus précisément, on définit les allocations continues, qui consistent en une allocation partielle de chaque point du gâteau à un joueur donné :

Définition. *(Allocation continue)*

Une allocation continue à n joueurs est un élément de l'ensemble :

$$A_n = \{(f_i)_{i\in\{1,...,n\}} \in CPM([0,1])^n | \sum_{i=1}^{n} f_i = 1\}$$

Nous avons alors obtenu le résultat d'approximation uniforme suivant :

Theorem. On suppose les v_i continues par morceaux, et qu'il existe une allocation continue $A = (f_i)_{i\in\{1,...,n\}}$ telle que $\forall i \in \{1,...,n\}, U_i \geq \alpha$ pour α réel. Alors, pout tout $\epsilon > 0$, il existe une allocation discrète $A' = (f'_i)_{i\in\{1,...,n\}}$ telle que $\forall i \in \{1,...,n\}, U'_i \geq \alpha - \epsilon$.

Ainsi, on peut utiliser ce théorème pour démontrer l'encadrement suivant (l'application de l'inégalité de Cauchy-Schwarz garantit que le minorant obtenu est supérieur à $1/n$), sur β :

Théorème. *On a, si* $\forall t \in \{1,...,n\}, \sum_{j=1}^{n} v_j(t) > 0$*, l'encadrement :*

$$inf_{1\leq i\leq n} \int_0^1 \frac{v_i^2(t)}{\sum_{j=1}^{n} v_j(t)} dt \leq \beta \leq \frac{1}{n} \int_0^1 sup_{1\leq i\leq n} v_i(t) dt$$

Notre théorème d'approximation uniforme nous a également permis de démontrer le résultat original suivant, dont la négation garantit une équité strictement proportionnelle (les inégalités larges deviennent strictes) sous la condition de non-annulation des valuations et de leur continuité :

Théorème. *Si les* v_i *sont continues, et* $\forall t \in [0,1], v_i(t) > 0$*, alors :*

$$\beta(P) = 1/n \Leftrightarrow \forall (i,j) \in \{1,...,n\}^2, v_i = v_j$$

En réalité, si le maxmin était réalisé par une allocation (ce qui n'est pas nécessairement vrai, étant donné la définition du maxmin par une borne supérieure, ce qui est en réalité un peu abusif quant à l'appellation de cette quantité), dans le cas de fonctions de valuation strictement positives, on obtiendrait, en reprenant le schéma de re-répartition de la preuve précédente, que toutes les valuations seraient égales à β. Nous serions ici dans le cas de ce qu'on appelle un **optimum de Pareto** : il est impossible d'augmenter strictement la valuation de la part d'un joueur sans en défavoriser un autre. Ces optima de Pareto correspondent à une forme d'équité bien plus forte qu'une simple équité proportionnelle, rencontrée le plus souvent en économie et en théorie des jeux.

1.3 Une minoration algorithmique du maxmin

Nous proposons un algorithme permettant d'obtenir d'excellentes minorations du maxmin, fondé sur la méthode d'approximation uniforme développée plus haut. Il consiste en un découpage de X en N parts, puis en une réorganisation de ces parts par ordre décroissant de $\frac{sup_i v_i}{\sum_j v_j}$, avant l'application classique de l'algorithme de Dubins-Spanier. Cela permet d'optimiser la consommation du gâteau, en utilisant les parts par ordre d'importance relative pour les joueurs. Nous obtenons les encadrements donnés en Table 1 (Annexe), qui prouvent que la minoration par $1/n$ est strictement dépassée.

2 Existence d'allocations sans envie

Un autre paramètre qui décrit le degré d'équité d'une allocation est lié à la notion d'envie. Celle-ci décrit la jalousie des joueurs les uns envers les autres. On dira par exemple qu'un joueur i envie un joueur j si la part X_j allouée au joueur j a une plus grande valuation pour le joueur i que sa propre part. Autrement dit, i préférerait avoir la part de j. Notre but dans cette partie est de montrer l'existence d'allocations sans envie, c'est-à-dire d'allocations dans lesquelles tout joueur préfère sa part à celle d'un autre. Nous adopterons un modèle ensembliste, qui permettra de donner un résultat plus général, avant de l'appliquer au cas précédent.

2.1 Théorème de Su

Dans cette partie, une allocation sera la donnée de $(n-1)$ coups de couteau repérés par leur position dans $X = [0, 1]$, délimitant n parts. Une allocation A sera représentée par le vecteur X_A de $\mathbb{R}^{n-1}$ représentant la longueur des $(n-1)$ premières parts que celle-ci délimite (suffisant, car la somme des longueurs est égale à 1). L'ensemble des allocations sera toujours noté Ω.

Chaque joueur k sera donc doté d'une fonction de choix, ensembliste, notée $\Phi_k : \Omega \to P(\{1, ..., n\})$, qui à une allocation donnée associe les parts que ce joueur serait prêt à accepter. Nous faisons les hypothèses suivantes sur celles-ci :

Hypothèse. *(1) - Tout joueur préfère une part non vide à une part vide.*

(2) - Si A_k est une suite convergente d'allocations du gâteau (c'est-à-dire si (X_{A_k}) converge au sens de toute norme sur $\mathbb{R}^{n-1}$ vers un certain vecteur X_A), alors si un joueur préfère pour tout $k \in \mathbb{N}$ la part i de l'allocation X_{A_k}, il préfère également la part i de l'allocation limite X_A. Autrement dit, les ensembles de préférence des joueurs sont des fermés.

Une allocation sans envie sera alors définie ainsi :

Définition. *(Allocation sans envie)*
On appellera **allocation sans envie** toute allocation A vérifiant $\forall k \in \{1, ..., n\},\ k \in \Phi_k(A)$.

Des considérations de géométrie simpliciale (subdivisions barycentriques, triangulation par le lemme de Sperner) et de topologie permettent alors de démontrer le théorème suivant, vu dans Su (1999) :

Théorème. *(Su, 1999)*
Sous réserve des hypothèses précédentes, il existe une allocation sans envie du gâteau.

2.2 Application : une démonstration originale du théorème de Brouwer

Formellement, une allocation sans envie peut être vue comme une sorte de point fixe des fonctions de choix. De plus, la démonstration du théorème de Su utilise des outils de géométrie simpliciale proches de ceux mis en oeuvre dans la démonstration de théorèmes de point fixe tels que le fameux théorème de Brouwer (1912). Nous proposons une preuve originale du théorème de Brouwer à partir du théorème de Su, dont le théorème de Brouwer apparaît comme un corollaire "trivial" (au sens où nous prendrons des fonctions de choix toutes égales).

Théorème. *(Brouwer, 1912)*
Toute fonction continue d'un compact convexe non vide de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même admet un point fixe.

3 Une approche combinatoire : détermination explicite d'allocations

Le problème de partage équitable peut également prendre un aspect plus combinatoire, reposant sur le problème suivant comment assigner à chacun des joueurs et de façon équitable une part d'une ressource qui n'est plus continûment sécable comme précédemment, mais plutôt formée d'éléments atomiques. Ce problème intervient de façon récurrente dans la vie quotidienne. Par exemple, il est courant de devoir diviser des tâches entre plusieurs personnes, qui peuvent les apprécier ou non. Si ce problème est facile à résoudre dans des cas simples, lorsqu'un grand nombre de données sont à prendre en compte, il peut être très complexe de trouver une allocation équitable.

La détermination effective d'une telle allocation représente donc un enjeu algorithmique important. Mais la difficulté d'un tel problème réside également dans le fait qu'il est coûteux de vérifier qu'une allocation équitable est possible. En pratique, il n'existe pas vraiment de critère simple et algorithmiquement efficace permettant d'en vérifier l'existence.

3.1 Une formalisation : le problème des mariages

Considérons le problème suivant, dit des "mariages" : nous cherchons à marier n femmes et n hommes. A chaque femme k est associé un ensemble de préférence $P_k \subset \{1, ..., n\}$, contenant les indices des hommes qu'elle serait prête à épouser. Une allocation est alors une permutation σ de $\{1, ..., n\}$, dans laquelle $\sigma(k)$ désigne, pour tout $k \in \{1, ..., n\}$, l'homme qu'épouse la femme k. Une allocation sera dite **équitable** si $\forall k \in \{1, ..., n\}, \sigma(k) \in A_k$.

Nous démontrons alors le résultat suivant, qui donne une condition nécessaire et suffisante sur l'existence d'une allocation équitable, en utilisant le permanent d'une matrice carrée et le théorème de Frobenius-König :

Théorème. *(Hall, 1935)*
Il existe une allocation équitable si, et seulement si, $\forall P \subset \{1, ..., n\}, |\bigcup_{k \in P} A_k| \geq |P|$.

3.2 L'apport de la théorie des graphes : problèmes de couplage dans un graphe biparti

Le critère précédent, s'il satisfait à l'intuition, est malheureusement inefficace d'un point de vue algorithmique. En effet, la complexité d'un algorithme qui l'utiliserait pour vérifier l'existence d'une allocation équitable serait en $O(2^n)$, ce qui le rendrait rapidement impraticable pour des valeurs de n un peu élevées. Cet algorithme repose sur une idée proche de l'algorithme naïf permettant de trouver une allocation équitable, qui consiste à tester toutes les allocations possibles jusqu'à éventuellement en trouver une satisfaisante, en complexité factorielle. Cet algorithme, que nous avons programmé dans le langage Python, est totalement inutilisable pour des valeurs de n supérieures à 15. Nous proposons donc d'utiliser les puissants outils apportés par la théorie des graphes, et de voir notre problème de partage équitable comme un problème de recherche de couplage parfait sur un graphe biparti.

Définition. *(Graphe biparti)*
On appelle (ici) **graphe biparti** tout triplet (G, X, Y) où $G = (S, A)$ est un graphe orienté tel que toute arête de A ait une extrémité dans X, et l'autre dans Y.

Définition. *(Couplage)*
Un **couplage** d'un graphe biparti est une partie M de A vérifiant : $\forall((a_1, a_2), (b_1, b_2)) \in M^2, a_1 \neq b_1 \textit{ et } a_2 \neq b_2$. Un **couplage maximal** est un couplage de cardinal maximal (éventuellement nul). On dira que (G, X, Y) admet un **couplage parfait** s'il admet un couplage tel que tout sommet de G soit l'extrémité d'une arête de M. Un sommet de G sera au contraire dit **libre** s'il n'est l'extrémité d'aucune arête de M.

3.3 Détermination exacte d'allocations équitables : algorithme de Hopcroft-Karp

Définition. *(Chemin alterné)*
En notant X' et Y' l'ensemble des sommets libres de X et Y, on appelle **chemin alterné** pour le couplage M dans le graphe biparti (G, X, Y) un chemin simple de X' à Y' dans $G' = (S, A')$, où $A' = A \bigcup \{(a_2, a_1) \in S^2 \mid (a_1, a_2) \in M\}$.

En trouvant un chemin alterné pour un couplage, il est possible d'augmenter la taille de celui-ci en inversant les arêtes utilisées et les arêtes libres de ce chemin : les arêtes utilisées sont libérées, et les arêtes libres sont ajoutées au couplage. Cette procédure est représentée en figure 3.4.

La réciproque du résultat précédent est également vraie. En effet, nous démontrons le théorème suivant :

Théorème. *(Berge, 1957)*
Un couplage M est maximal si, et seulement si, il n'admet pas de chemin alterné.

De ce résultat naît l'algorithme suivant, fondé sur un principe dû à Hopcroft et Karp, qui permet de trouver un couplage maximal (et donc éventuellement un couplage parfait - i.e. une allocation équitable) dans un graphe biparti, en un temps polynômial.

Algorithme. *(Hopcroft-Karp, 1973)*
Le couplage M est initialisé à $\emptyset$.
A chaque étape, on recherche, tant que c'est possible et en utilisant un parcours en profondeur ou en largeur, un chemin alterné. Ce chemin alterné est alors utilisé pour augmenter la taille de M de 1 *(cf schéma)*

La complexité d'un tel algorithme est globalement cubique en n, ce qui le rend infiniment plus intéressant que l'algorithme naïf de calcul des allocations équitables. Nous proposons une implémentation de celui-ci en Python, qui se révèle utilisable pour le traitement du cas $n = 10\ 000$ (quelques heures de calcul), et quasiment immédiat (au plus quelques secondes de calcul) pour $n \leq 1000$, sur des problèmes générés aléatoirement. Nous vérifions expérimentalement la complexité prévue.

Conclusion

L'étude théorique des problèmes de partage équitable permet d'obtenir de démontrer l'existence d'allocations à l'équité forte, et d'accéder à des méthodes efficaces de détermination d'équilibres approchés et exacts.

Annexes

Partie I

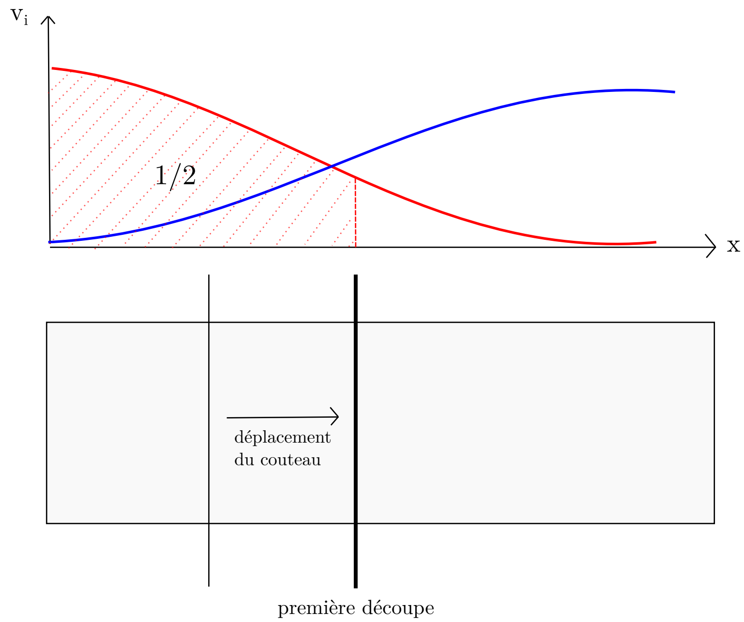

FIGURE 3.1 – Application de la procédure de Dubins-Spanier pour deux joueurs

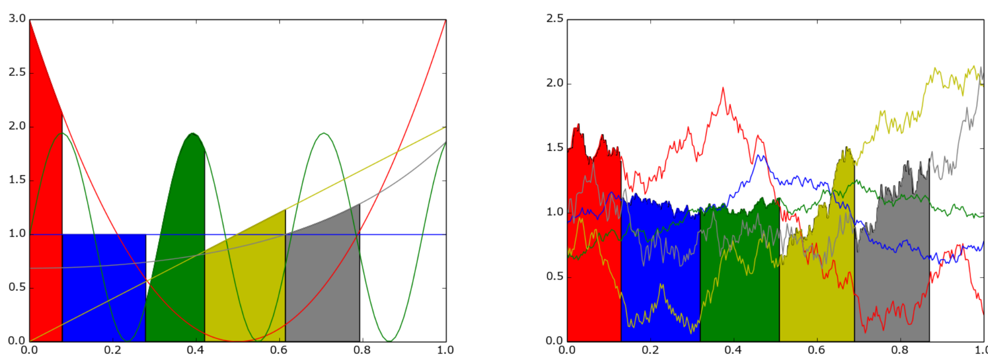

FIGURE 3.2 – Un exemple d'application de l'algorithme de Dubins-Spanier à des fonctions usuelles.

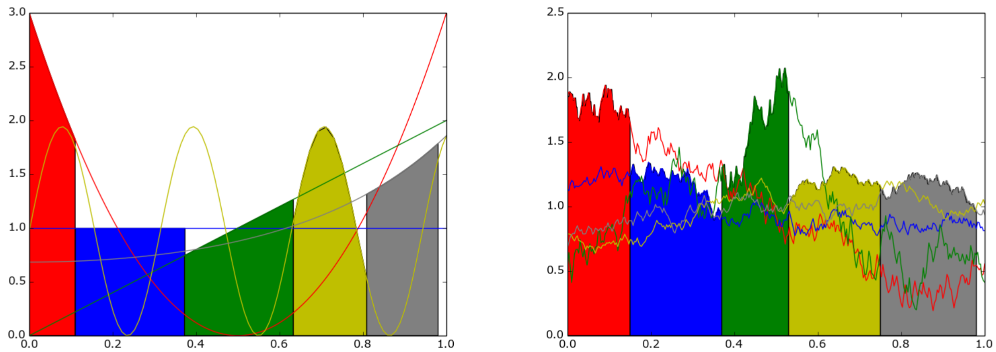

FIGURE 3.3 – Un exemple d'application de notre optimisation pour les mêmes fonctions

Nombre de points \ Valuations	(1) - 5 fonctions	(2) - 3 fonctions	(3) - 2 fonctions
N=100	$0,2901 \leq \beta \leq 0,3257$	$0,440 \leq \beta \leq 0,4822$	$0,662 \leq \beta \leq 0,671$
N=1000	$0,2931 \leq \beta \leq 0,3257$	$0,452 \leq \beta \leq 0,4822$	$0,664 \leq \beta \leq 0,671$
N=10000	$0,294 \leq \beta \leq 0,3257$	$0,453 \leq \beta \leq 0,4822$	$0,665 \leq \beta \leq 0,671$

Table 1: Quelques encadrements de β obtenus à l'aide de l'algorithme décrit en 1.3

Détail des fonctions :

(1) - $x \mapsto (x-\frac{1}{2})^2$, $x \mapsto 1$, $x \mapsto sin(10x)+1$, $x \mapsto 2x$, $x \mapsto e^{x^2}$ à normalisation près.

(2) - $x \mapsto (x-\frac{1}{2})^2$, $x \mapsto 2x$, $x \mapsto e^{x^2}$ à normalisation près.

(3) - $x \mapsto e^{x^2}$, $x \mapsto sin(10x)+1$ à une normalisation près.

Les majorations obtenues correspondent à $\frac{1}{n}\int_0^1 sup_i v_i(t)dt$.

Partie III

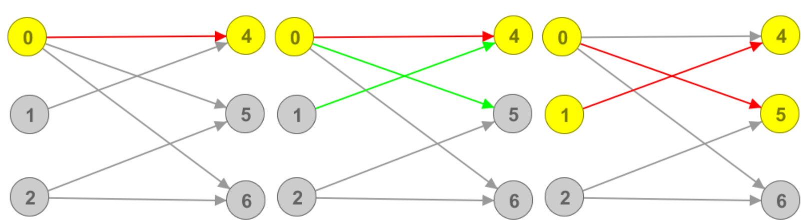

FIGURE 3.4 – Chemin alterné, utilisation en augmentation d'un couplage

Références

[1] A. D. Procaccia, *Cake cutting algorithms*, Carnegie Mellon University, 2013, disponible à https ://www.cs.cmu.edu/~arielpro/papers/cakechapter.pdf

[2] U. Endriss, *Cake cutting algorithms*, University of Amsterdam, 2009, disponible à https ://staff.fnwi.uva.nl/u.endriss/teaching/comsoc/2009/slides/comsoc-cakes.pdf

[3] S. J. Brams, M. A. Jones, C. Kamler, *Better ways to cut a cake*, Notices of the AMS, 2006, 53(11), p. 1314

[4] F. E. Su, *Rental Harmony : Sperner's Lemma in fair division*, American Mathematical Monthly, 1999, 106, p. 930-942

[5] H. R. Varian, *Equity, envy, efficiency*, Journal of Economic Theory, 1974, 9, p. 63-91

[6] Y. Cohler, *Optimal Envy-Free Cake-Cutting,* Thèse de Harvard University, 2011, disponible à http ://www.eecs.harvard.edu/econcs/pubs/cohler_thesis.pdf

[7] R. B. Bapat, T. E. S. Raghavan, *Nonnegative matrices and applications*, Encyclopedia of Mathematics and its applications, 1997, 64, p. 62, Cambridge University Press

[8] S. Leonardi, P. Sankowski, *Matching Algorithms*, Universita Di Roma, 2013, disponible à http ://www.dis.uniroma1.it/~leon/tcs/lecture2.pdf