

Rapport sur les Splines Hermite

Votre Nom

December 1, 2024

Contents

1	Introduction	2
2	Description mathématique du problème	2
3	Réponses aux questions du sujet	2
4	Résultats obtenus	9
5	Comparaison des méthodes	19
6	Observations et remarques	20
7	Conclusion	20

1 Introduction

Ce rapport traite de l'interpolation à l'aide des splines Hermite cubiques, une méthode permettant de créer des courbes lisses reliant un ensemble de points donnés, avec des tangentes estimées ou imposées. Nous détaillerons les aspects mathématiques, les étapes d'implémentation, les résultats obtenus, ainsi qu'une comparaison avec d'autres méthodes d'interpolation comme les polynômes de Lagrange et les splines cubiques C^2 .

2 Description mathématique du problème

Le problème consiste à interpoler un ensemble de points (P_k, u_k) par une courbe spline Hermite cubique $P(u)$ satisfaisant les conditions suivantes :

- $P(u_k) = P_k$: la courbe passe par les points donnés.
- $P'(u_k) = m_k$: les tangentes sont spécifiées ou estimées.

La spline Hermite cubique est définie par morceaux :

$$P|_{[u_k, u_{k+1}]}(u) = P_k H_0(t) + P_{k+1} H_1(t) + (u_{k+1} - u_k) m_k H_2(t) + (u_{k+1} - u_k) m_{k+1} H_3(t),$$

où $t = \frac{u - u_k}{u_{k+1} - u_k}$ est le paramètre local, et $H_i(t)$ sont les polynômes de base de Hermite définis par :

$$\begin{aligned} H_0(t) &= 2t^3 - 3t^2 + 1, & H_1(t) &= -2t^3 + 3t^2, \\ H_2(t) &= t^3 - 2t^2 + t, & H_3(t) &= t^3 - t^2. \end{aligned}$$

La solution comprend :

- L'implémentation des splines Hermite en utilisant la méthode proposée (**Cardinal splines**) et une autre méthode (**Kochanek–Bartels spline**) avec visualisation des résultats.
- Une analyse comparative avec d'autres méthodes d'interpolation (interpolation Lagrange et splines cubiques C^2).
- Une évaluation de la qualité des courbes à l'aide de la courbure $\kappa(u)$.

3 Réponses aux questions du sujet

Question 0) Pour démontrer que la formule de la spline Hermite garantit l'interpolation des points P_k et des tangentes m_k , considérons la définition suivante de la spline Hermite sur l'intervalle $[u_k, u_{k+1}]$:

$$P|_{[u_k, u_{k+1}]}(u) = P_k H_0(t) + P_{k+1} H_1(t) + (u_{k+1} - u_k) m_k H_2(t) + (u_{k+1} - u_k) m_{k+1} H_3(t),$$

où $t = \frac{u - u_k}{u_{k+1} - u_k} \in [0, 1]$ est le paramètre local, et les polynômes de base de Hermite $H_i(t)$ sont définis comme suit :

$$\begin{aligned} H_0(t) &= 2t^3 - 3t^2 + 1, & H_1(t) &= -2t^3 + 3t^2, \\ H_2(t) &= t^3 - 2t^2 + t, & H_3(t) &= t^3 - t^2. \end{aligned}$$

Vérification des points

À $u = u_k$, $t = 0$. La formule devient :

$$P(u_k) = P_k H_0(0) + P_{k+1} H_1(0) + (u_{k+1} - u_k) m_k H_2(0) + (u_{k+1} - u_k) m_{k+1} H_3(0).$$

En remplaçant les valeurs des polynômes de Hermite à $t = 0$:

$$H_0(0) = 1, \quad H_1(0) = 0, \quad H_2(0) = 0, \quad H_3(0) = 0,$$

on obtient :

$$P(u_k) = P_k.$$

À $u = u_{k+1}$, $t = 1$. La formule devient :

$$P(u_{k+1}) = P_k H_0(1) + P_{k+1} H_1(1) + (u_{k+1} - u_k) m_k H_2(1) + (u_{k+1} - u_k) m_{k+1} H_3(1).$$

En remplaçant les valeurs des polynômes de Hermite à $t = 1$:

$$H_0(1) = 0, \quad H_1(1) = 1, \quad H_2(1) = 0, \quad H_3(1) = 0,$$

on obtient :

$$P(u_{k+1}) = P_{k+1}.$$

Vérification des tangentes

La dérivée de $P(u)$ par rapport à t est donnée par :

$$P'(u) = P_k H'_0(t) + P_{k+1} H'_1(t) + (u_{k+1} - u_k) m_k H'_2(t) + (u_{k+1} - u_k) m_{k+1} H'_3(t).$$

À $u = u_k$, $t = 0$. La dérivée devient :

$$P'(u_k) = P_k H'_0(0) + P_{k+1} H'_1(0) + (u_{k+1} - u_k) m_k H'_2(0) + (u_{k+1} - u_k) m_{k+1} H'_3(0).$$

En remplaçant les valeurs des dérivées des polynômes de Hermite à $t = 0$:

$$H'_0(0) = 0, \quad H'_1(0) = 0, \quad H'_2(0) = 1, \quad H'_3(0) = 0,$$

on obtient :

$$P'(u_k) = m_k.$$

À $u = u_{k+1}$, $t = 1$. La dérivée devient :

$$P'(u_{k+1}) = P_k H'_0(1) + P_{k+1} H'_1(1) + (u_{k+1} - u_k) m_k H'_2(1) + (u_{k+1} - u_k) m_{k+1} H'_3(1).$$

En remplaçant les valeurs des dérivées des polynômes de Hermite à $t = 1$:

$$H'_0(1) = 0, \quad H'_1(1) = 0, \quad H'_2(1) = 0, \quad H'_3(1) = 1,$$

on obtient :

$$P'(u_{k+1}) = m_{k+1}.$$

Conclusion

La formule de la spline Hermite garantit :

- L'interpolation des points : $P(u_k) = P_k$ et $P(u_{k+1}) = P_{k+1}$.
- Le respect des tangentes : $P'(u_k) = m_k$ et $P'(u_{k+1}) = m_{k+1}$.

Ainsi, la courbe est de classe C^1 et satisfait les conditions d'interpolation spécifiées.

Question 1) La spline Hermite sur l'intervalle $[u_k, u_{k+1}]$ est définie par :

$$P|_{[u_k, u_{k+1}]}(u) = P_k H_0(t) + P_{k+1} H_1(t) + m_k H_2(t) + m_{k+1} H_3(t),$$

où $t = \frac{u - u_k}{u_{k+1} - u_k}$ est le paramètre local, et les polynômes de Hermite cubiques sont :

$$H_0(t) = 2t^3 - 3t^2 + 1, \quad H_1(t) = -2t^3 + 3t^2,$$

$$H_2(t) = t^3 - 2t^2 + t, \quad H_3(t) = t^3 - t^2.$$

En supposant $u_k = k$, on a $u_{k+1} - u_k = 1$. La formule Hermite devient alors :

$$P|_{[u_k, u_{k+1}]}(t) = P_k H_0(t) + P_{k+1} H_1(t) + m_k H_2(t) + m_{k+1} H_3(t).$$

Substituons $H_i(t)$ dans l'équation :

$$P|_{[u_k, u_{k+1}]}(t) = P_k(2t^3 - 3t^2 + 1) + P_{k+1}(-2t^3 + 3t^2) + m_k(t^3 - 2t^2 + t) + m_{k+1}(t^3 - t^2).$$

En regroupant les termes en t^3 , t^2 , t , et les constantes :

$$P|_{[u_k, u_{k+1}]}(t) = (2P_k - 2P_{k+1} + m_k + m_{k+1})t^3 + (-3P_k + 3P_{k+1} - 2m_k - m_{k+1})t^2 + (P_k + m_k)t + P_k.$$

La courbe Bézier cubique est définie comme :

$$P(t) = b_0 B_0^3(t) + b_1 B_1^3(t) + b_2 B_2^3(t) + b_3 B_3^3(t),$$

où $B_i^3(t)$ sont les polynômes de Bernstein :

$$B_0^3(t) = (1-t)^3, \quad B_1^3(t) = 3t(1-t)^2, \quad B_2^3(t) = 3t^2(1-t), \quad B_3^3(t) = t^3.$$

Pour convertir la spline Hermite dans cette forme, identifions les points de contrôle (b_0, b_1, b_2, b_3) .

- À $t = 0$: $P(t) = P_k$. Donc :

$$b_0 = P_k.$$

- À $t = 1$: $P(t) = P_{k+1}$. Donc :

$$b_3 = P_{k+1}.$$

- Point intermédiaire lié à m_k : À partir des termes t^3, t^2, t , nous voyons que m_k affecte directement le contrôle autour de P_k . En développant autour de $t = 0$, on trouve :

$$b_1 = P_k + \frac{1}{3}m_k.$$

- Point intermédiaire lié à m_{k+1} : De même, m_{k+1} influence le contrôle autour de P_{k+1} . En développant autour de $t = 1$, on trouve :

$$b_2 = P_{k+1} - \frac{1}{3}m_{k+1}.$$

Substituons ces points dans la forme Bézier. La spline Hermite devient :

$$P|_{[u_k, u_{k+1}]}(t) = P_k B_0^3(t) + \left(P_k + \frac{1}{3}m_k\right) B_1^3(t) + \left(P_{k+1} - \frac{1}{3}m_{k+1}\right) B_2^3(t) + P_{k+1} B_3^3(t).$$

La spline Hermite sur $[u_k, u_{k+1}]$, avec une paramétrisation équidistante $u_k = k$, est équivalente à une courbe Bézier cubique avec les points de contrôle suivants :

$$b_0 = P_k, \quad b_1 = P_k + \frac{1}{3}m_k, \quad b_2 = P_{k+1} - \frac{1}{3}m_{k+1}, \quad b_3 = P_{k+1}.$$

Cette transition explicite garantit que les deux formulations respectent les propriétés d'interpolation et de continuité.

Question 2) La spline Hermite peut être réécrite en termes de polynômes de Bernstein $B_i^3(t)$, facilitant son interprétation géométrique via des polygones de contrôle. Voici une illustration montrant deux polygones de contrôle consécutifs ainsi que la courbe associée.

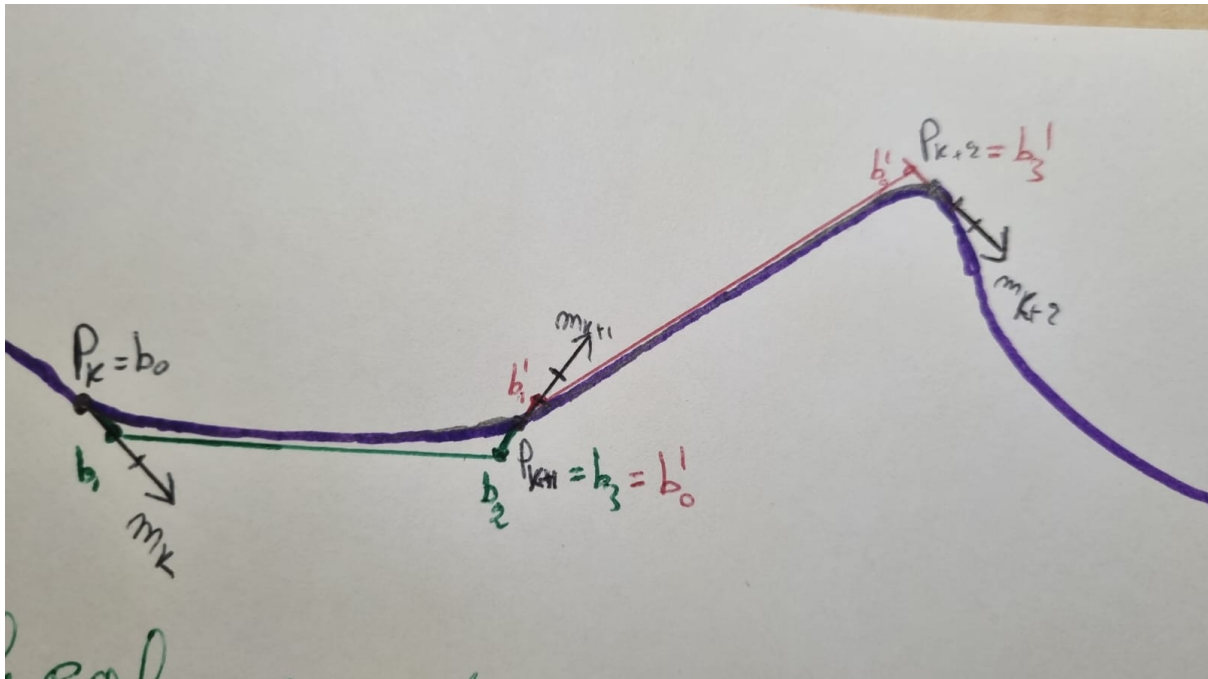


Figure 1: Polygones de contrôle et courbes Bézier consécutives. Les points b_0, b_1, b_2, b_3 et leurs indices sont annotés, ainsi que les paramètres u_k, u_{k+1}, u_{k+2} .

Pour mieux comprendre la signification des différentes couleurs et annotations utilisées dans la figure, consultez la légende ci-dessous.

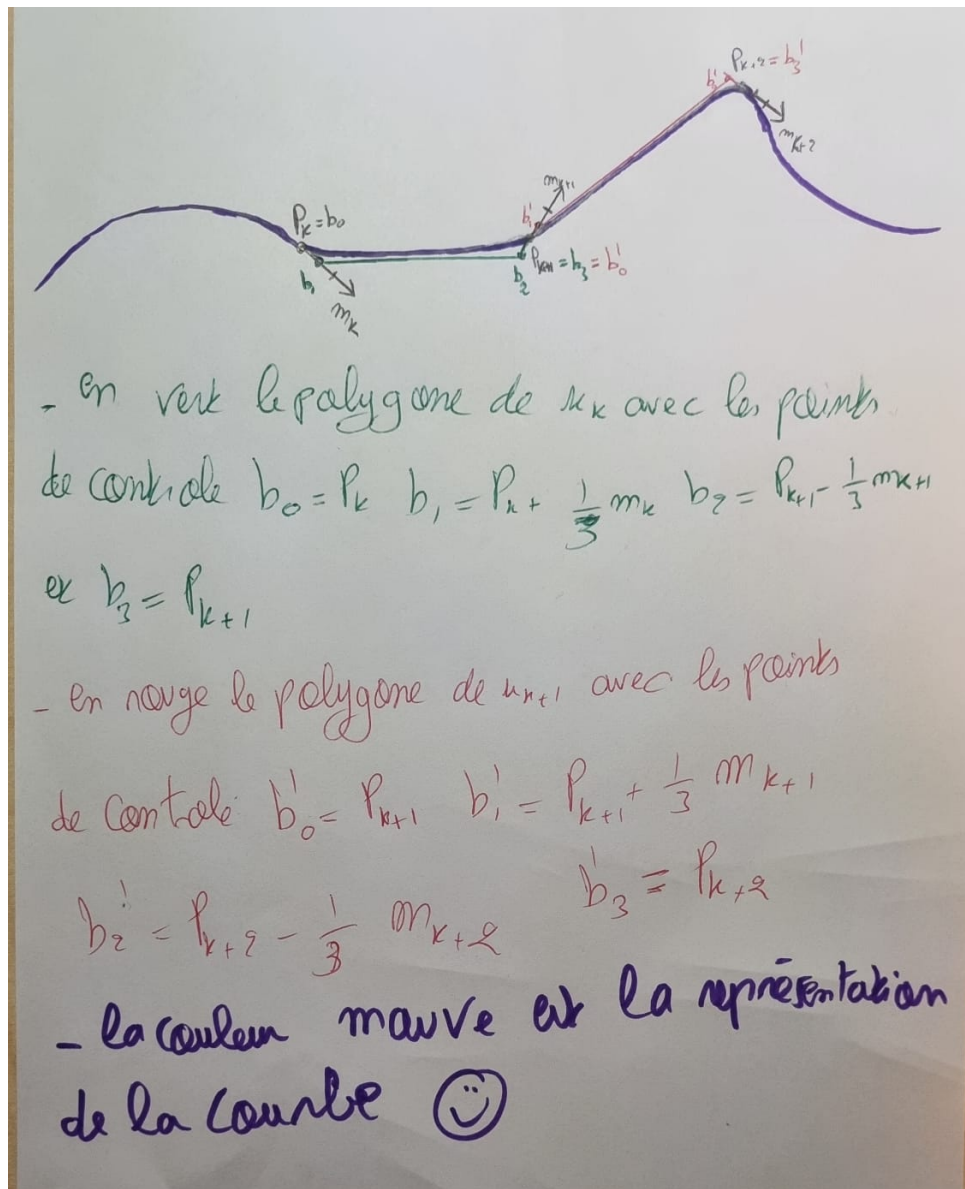


Figure 2: Légende des couleurs et annotations : chaque couleur représente un polygone de contrôle ou une courbe Bézier distincte, et les indices correspondent aux points de contrôle.

Question 3) Lorsque les tangentes m_0 et m_N ne sont pas données par l'utilisateur, on les estime de la manière suivante:

$$m_0 = (1 - c) \frac{(P_1 - P_0)}{u_1 - u_0}$$

$$m_N = (1 - c) \frac{(P_N - P_{N-1})}{u_N - u_{N-1}}$$

Ce choix permet de conserver la direction locale des segments voisins et assure une continuité de la courbe aux extrémités. Cette méthode est simple à calculer et est efficace, car elle se base directement sur les points voisins, sans nécessiter de points supplémentaires. Cette approche équilibre bien la flexibilité et la stabilité des extrémités de la courbe.

Question 4) Voir la fonction *draw_curve_methode_1* qui implémente les splines Hermite en utilisant la fonction *calculate_derivatives_methode_1* pour calculer les dérivées.

4.1) Lorsque l'on fait varier le paramètre c , on observe que la forme de la courbe change : pour $c = 0$, la courbe devient plus lisse et suit de près les points d'origine (courbe de type Catmull-Rom), tandis que pour $c = 1$, la courbe est plus tendue avec des segments plus droits, car les tangentes aux extrémités sont nulles. En résumé, c contrôle la tension et la souplesse de la courbe.

4.2) La qualité du résultat obtenu avec les Cardinal splines dépend du choix du paramètre c . En général, les Cardinal splines produisent une courbe lisse qui suit bien les points d'origine, ce qui les rend adaptées pour des applications nécessitant une interpolation douce. Cependant, si le paramètre c est mal choisi, il peut apparaître des ondulations non désirées, surtout si la courbe est trop tendue ou si les points d'origine sont éloignés. De plus, les Cardinal splines préservent généralement la forme globale décrite par les points à interpoler, mais si le polygone d'origine est convexe, la spline peut parfois devenir non convexe en fonction de la configuration des points et de la valeur de c . Pour garantir une spline convexe, il est important de contrôler soigneusement le paramètre c et d'assurer que la courbe reste dans les limites souhaitées par les points.

4.3) Oui, le choix des tangentes m_k est en effet déterminant pour la forme de la spline. Les **Kochanek–Bartels** splines offrent une alternative aux **Cardinal splines** en permettant un contrôle supplémentaire sur la tension, la continuité et l'assouplissement de la courbe. Ces splines utilisent un paramètre de tension t , un paramètre de biais b et un paramètre de continuité c . Ces paramètres varient entre -1 et 1 et permettent de rendre la courbe plus flexible ou plus tendue, et de mieux contrôler les variations locales.

$$m_k = (1-t)(1+b)(1+c)\frac{P_k - P_{k-1}}{u_k - u_{k-1}} + (1-t)(1-b)(1-c)\frac{P_{k+1} - P_k}{u_{k+1} - u_k}, \quad k = 1, \dots, N-1$$

Pour $c = b = t = 0$, on retrouve les courbes splines connues sous le nom **Catmull-Rom**. Voir la fonction *draw_curve_methode_2* qui implémente les splines Hermite en utilisant la fonction *calculate_derivatives_methode_2* pour calculer les dérivées avec cette nouvelle méthode.

Question 5)

5.1 Observation sur le tracé de la courbure $\kappa(u)$ La courbure $\kappa(u)$ mesure les variations locales de la courbe en fonction de u . Une courbure élevée indique des changements brusques dans la géométrie de la courbe, tandis qu'une courbure proche de zéro correspond à des sections presque linéaires.

Une observation typique d'un tracé de courbure peut inclure :

- **Continuité** : Une courbure continue et douce indique une spline bien construite, sans angles vifs ni discontinuités.
- **Évaluation locale** : Les variations locales de la courbure révèlent les zones où la spline subit des changements géométriques importants, aidant à diagnostiquer des points problématiques.

Un tracé de courbure est considéré comme un indicateur de qualité pour une courbe, car il permet de détecter visuellement les zones problématiques et d'évaluer la continuité et la fluidité de la géométrie.

5.2 Impact des tangentes m_k sur la qualité Ce nouveau choix des tangentes m_k n'améliore pas nécessairement la qualité de la spline par rapport à la méthode précédente puisque l'ensemble des courbes produites par le premier choix des tangentes m_k reste toujours inclu dans l'ensemble des courbes produites par le deuxième choix des tangentes.

Or, l'utilisation des tangentes Kochanek–Bartels donne plus de liberté de choix et permet parfois d'obtenir une spline plus fluide et cohérente géométriquement, en réduisant les variations locales indésirables.

Question 6) Utilisez votre programme pour créer un dessin d'un objet de votre choix.

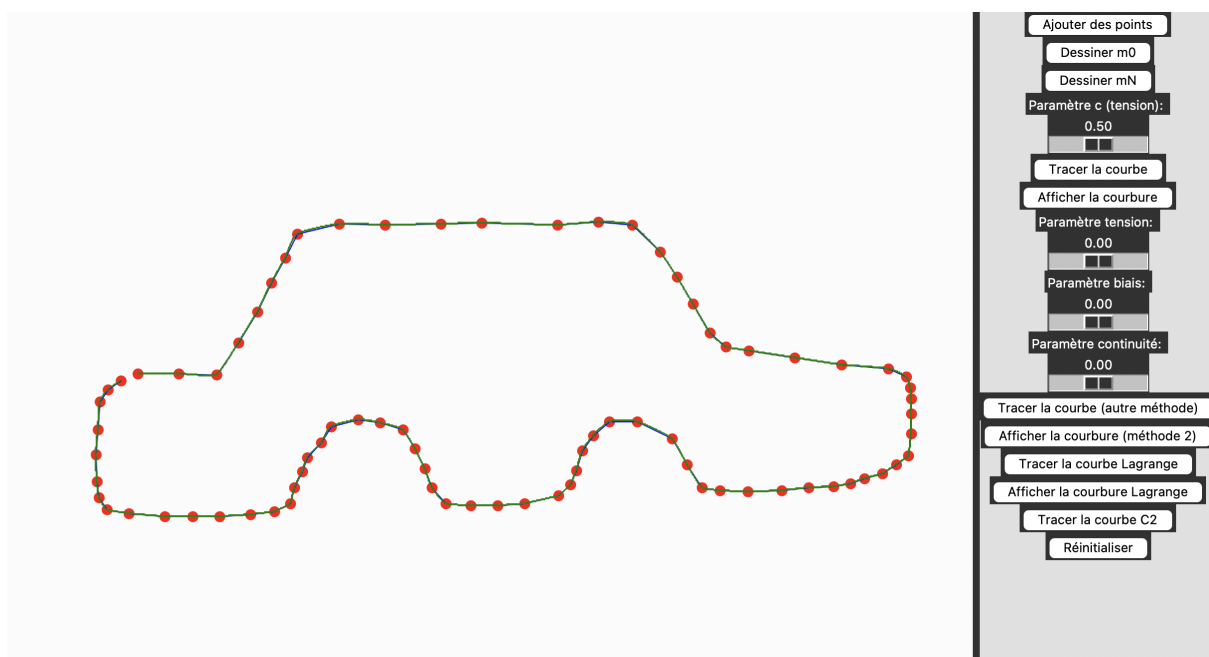


Figure 3: Dessin d'une voiture réalisé à l'aide du programme.

Question 7)

7.a Voir la fonction `draw_lagrange_curve` qui trie les points et trace la courbe après l'utilisation de la fonction `aitken_neville` pour l'interpolation.

7.b Voir la fonction `draw_c2_curve` qui trace la courbe à l'aide des fonctions `spline_cubic_evaluate` et `calculate_spline_cubic`.

Question 8) Voir la fonction `superposer` qui permet de superposer les courbes d'interpolation pour le même ensemble de points à l'entrée.

Question 9) Comparaison des méthodes d'interpolation

Splines Hermite avec Cardinal Splines Les splines Hermite utilisant des Cardinal Splines permettent de créer des courbes lisses avec une continuité de la première dérivée. Elles sont simples à implémenter et idéales pour des courbes naturelles. Cependant, elles offrent moins de flexibilité dans la forme de la courbe par rapport à d'autres méthodes. Elles constituent un bon compromis lorsque la continuité de la première dérivée est suffisante.

Splines Hermite avec Kochanek–Bartels Les splines Hermite avec Kochanek–Bartels offrent un contrôle précis sur la courbure grâce aux paramètres de tension, biais et continuité. Cette méthode permet d'obtenir des courbes flexibles adaptées aux besoins de modélisation avancée. Cependant, le choix approprié des paramètres est crucial pour obtenir une courbe de qualité.

Interpolation Lagrange (Aitken-Neville) L'interpolation Lagrange, implémentée à l'aide de l'algorithme Aitken-Neville, est simple à comprendre et à coder. Cependant, elle devient instable lorsque le nombre de points augmente, ce qui peut entraîner des oscillations non souhaitées dans la courbe. Elle est donc préférable pour des séries de points de petite taille.

Splines Cubiques C2 Les splines cubiques C2 assurent une continuité de la courbure et créent des courbes très lisses. Elles nécessitent des calculs plus complexes, mais offrent une solution optimale pour les courbes douces. Elles sont idéales pour obtenir une transition fluide et naturelle entre les segments de la courbe.

Conclusion Parmi les méthodes analysées, les **splines C2** et **Kochanek–Bartels** sont préférées pour des courbes lisses et contrôlées. Les **cardinal splines** conviennent bien pour des courbes simples et naturelles. L'**interpolation Lagrange** reste limitée et n'est conseillée que pour de petits ensembles de points.

4 Résultats obtenus

Les graphiques suivants illustrent les courbes obtenues avec différents paramètres et méthodes :

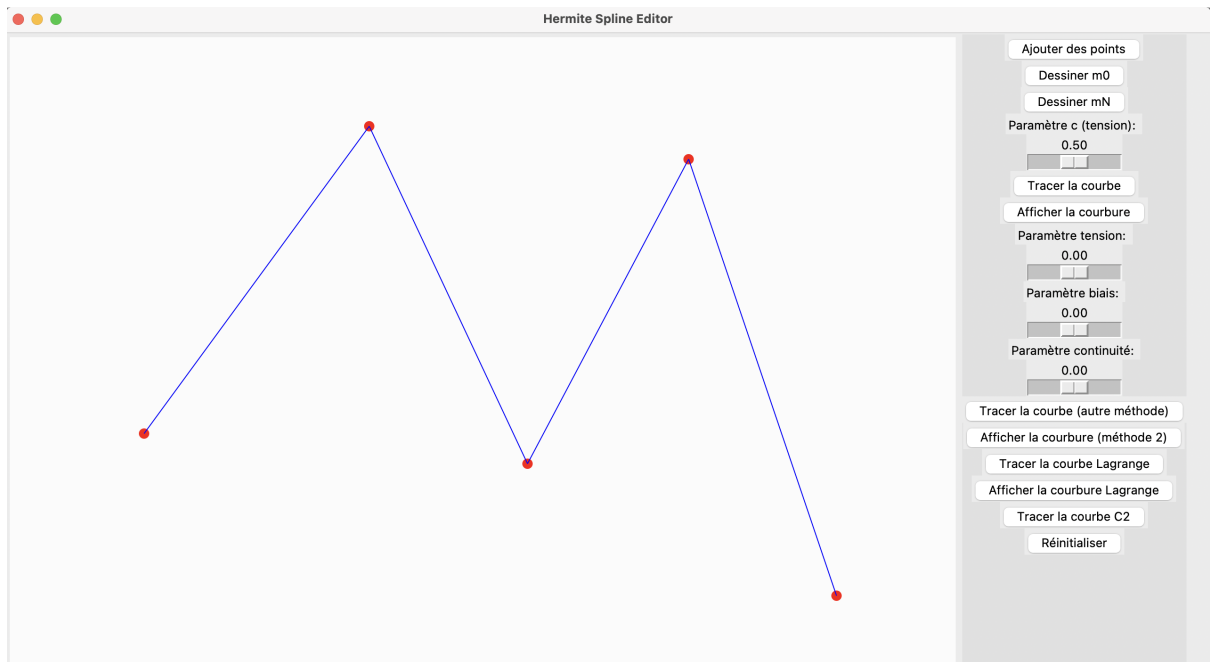


Figure 4: L'emplacement initiale des points

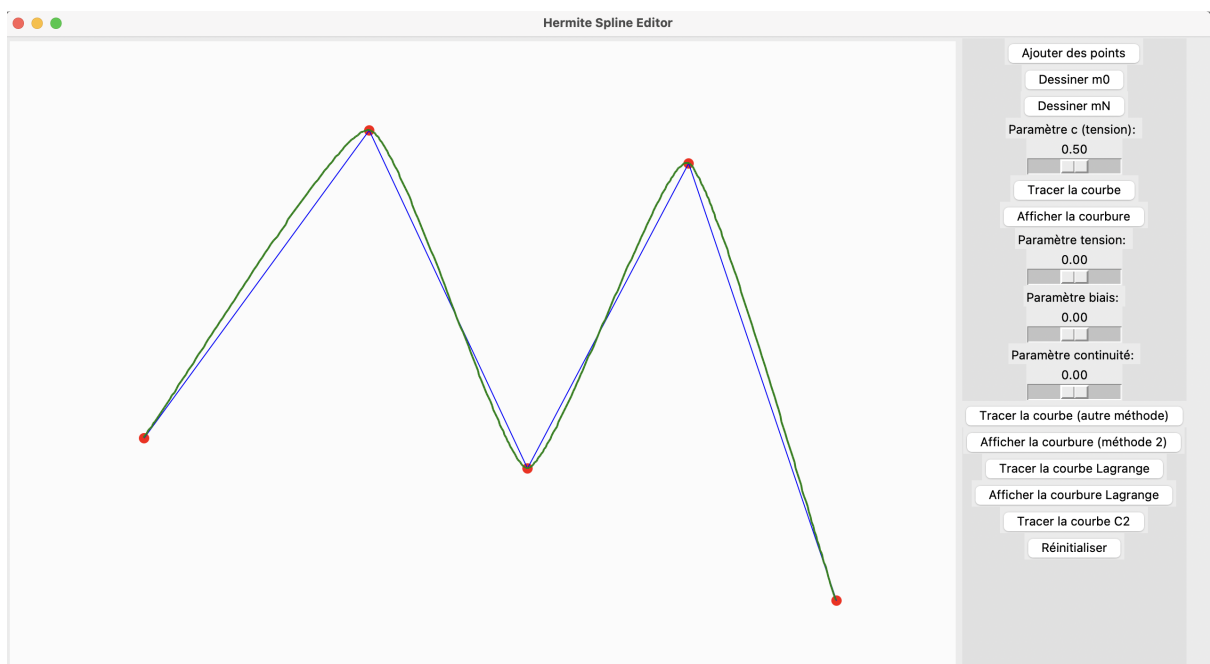


Figure 5: Spline Hermite avec un ensemble de points tracé par la méthode 1 des splines Hermite normales.

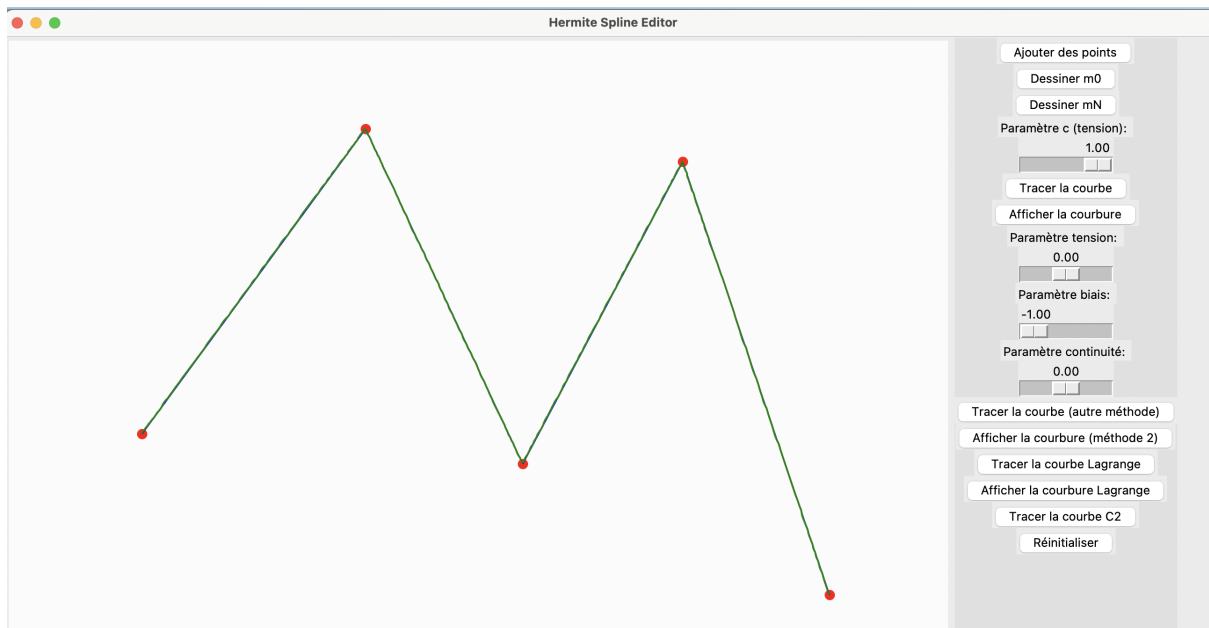


Figure 6: Effet de $c = 1$ sur la courbe obtenue.

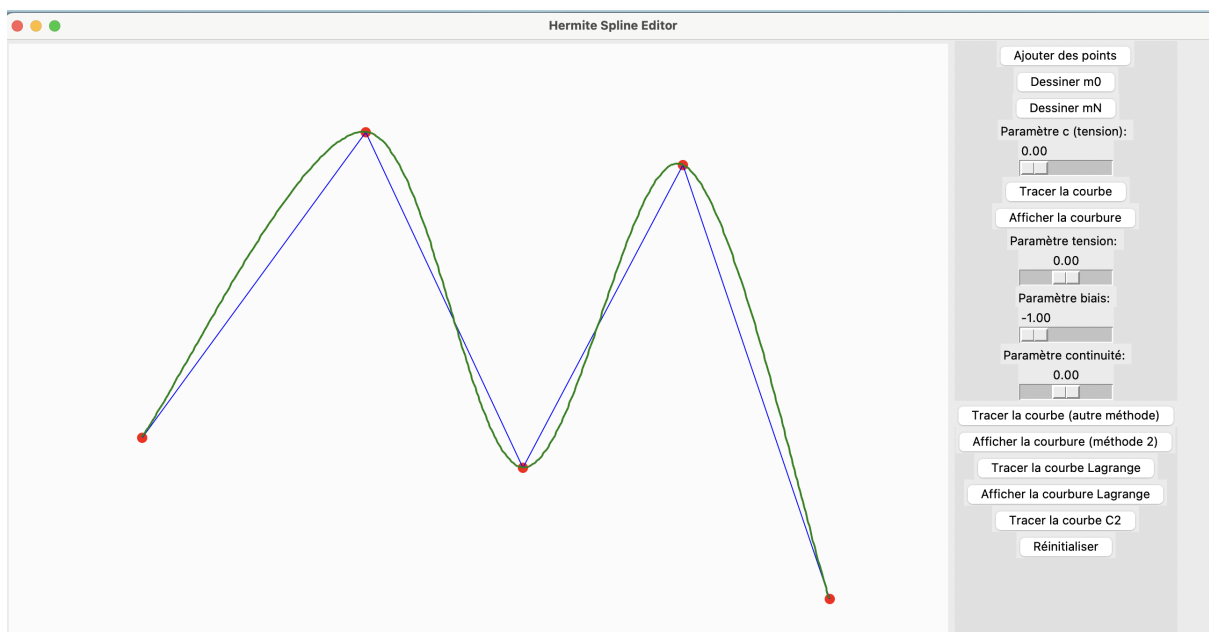


Figure 7: Effet de $c = 0$ sur la courbe obtenue.

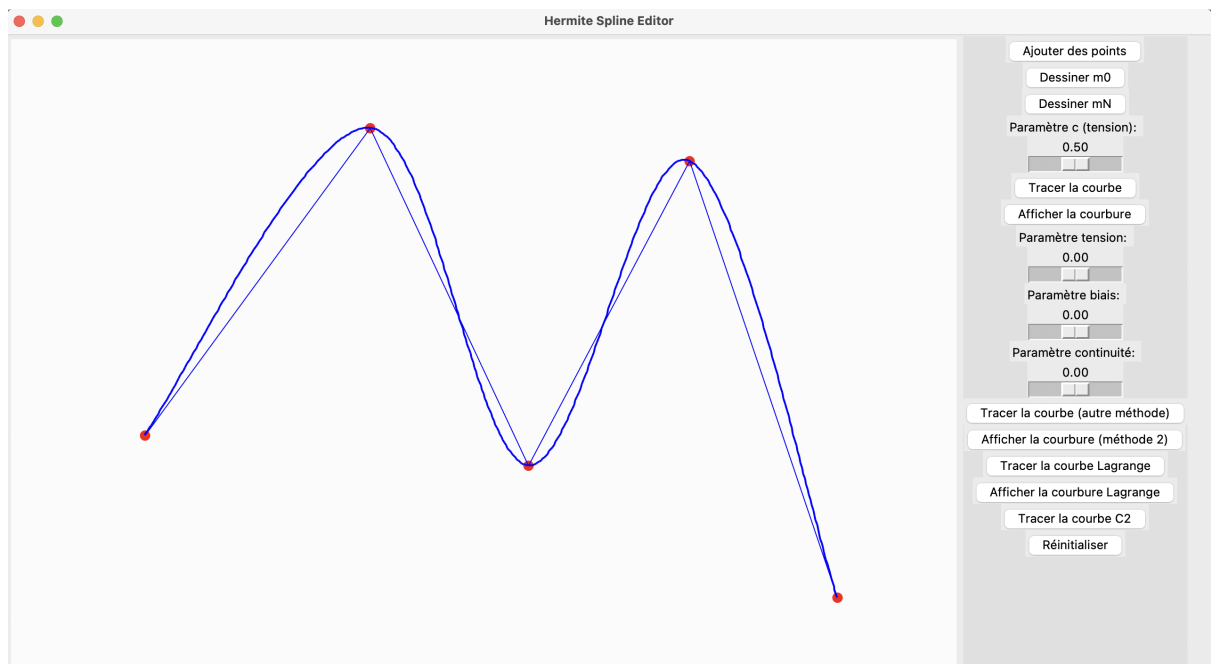


Figure 8: Courbe tracée avec une autre méthode.

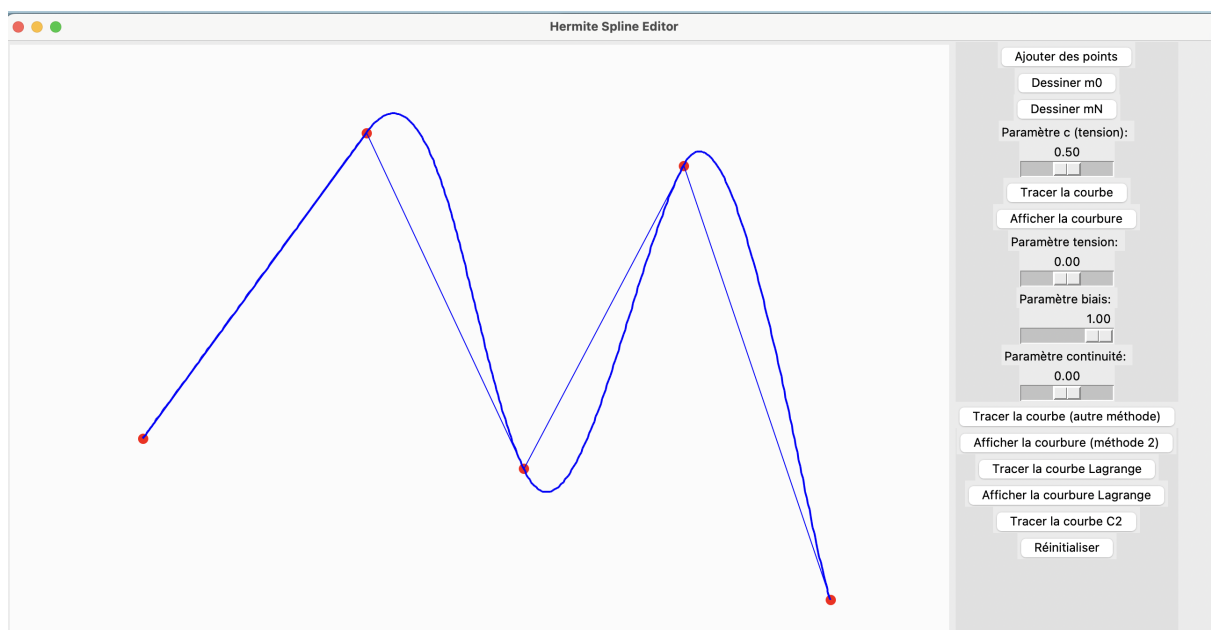


Figure 9: Effet du biais avec une valeur de 1

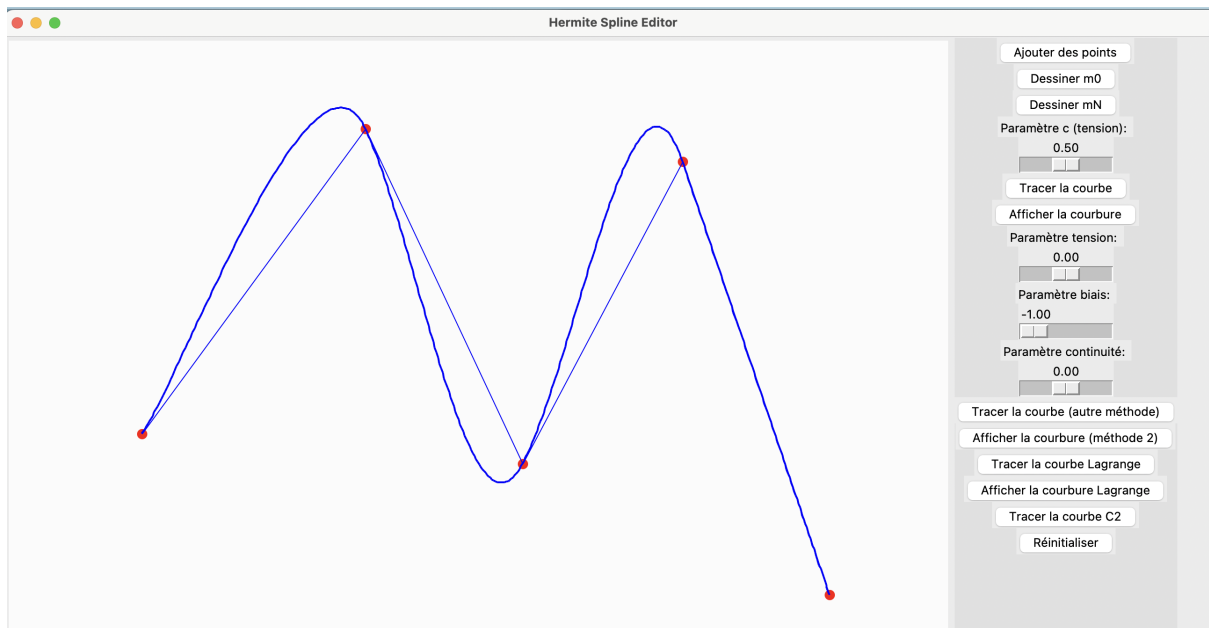


Figure 10: Effet du biais avec une valeur de -1

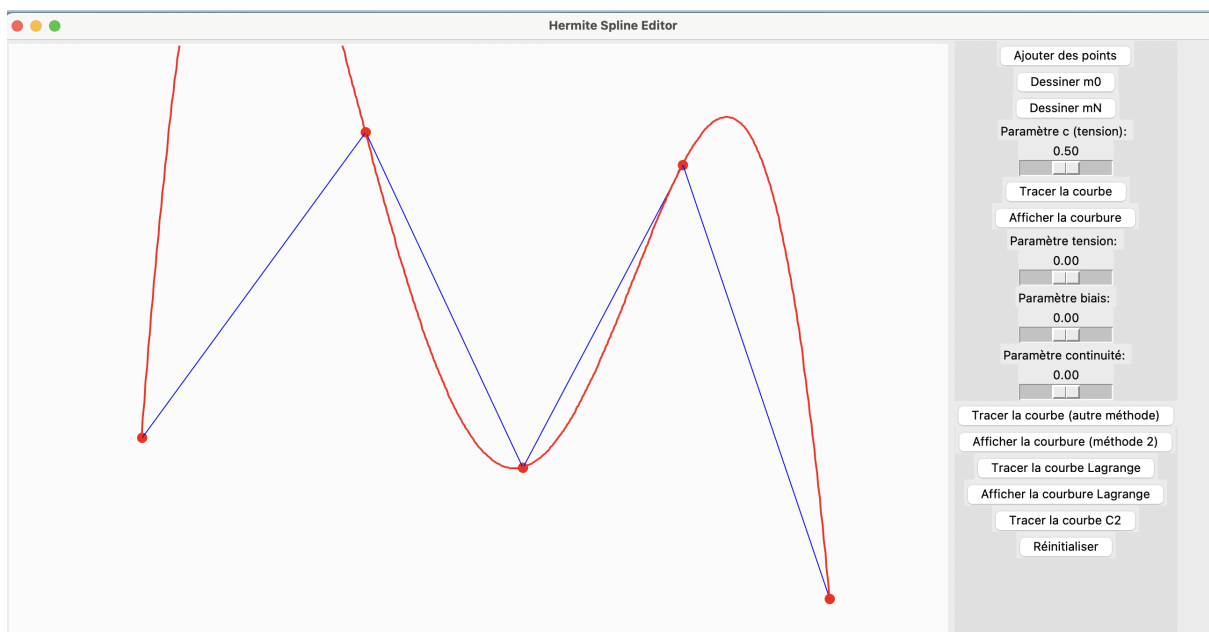


Figure 11: Courbe obtenue avec la méthode de Lagrange.

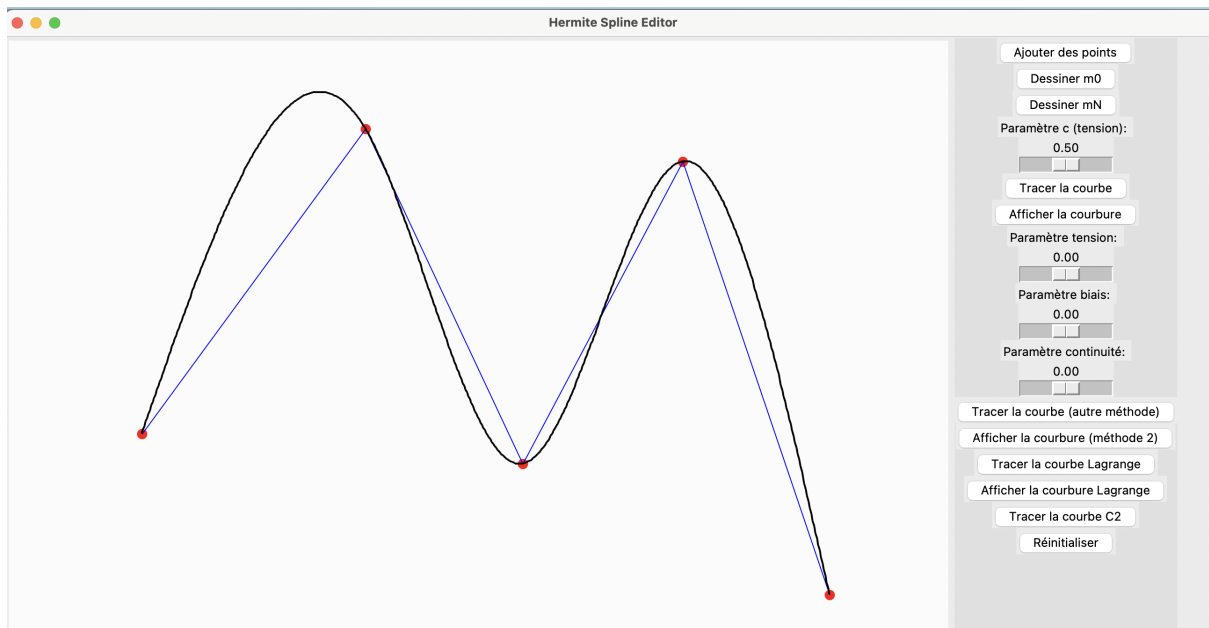


Figure 12: Courbe obtenue avec la méthode des splines cubiques C^2 .

Nouveau exemple:

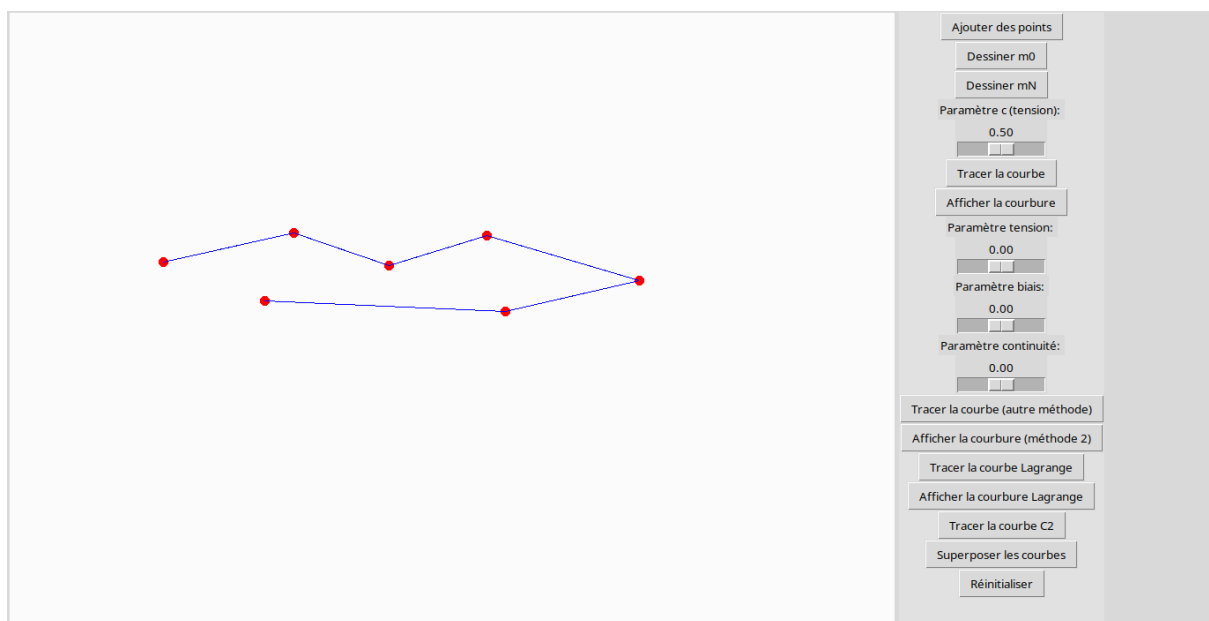


Figure 13: Emplacement initiale des points.

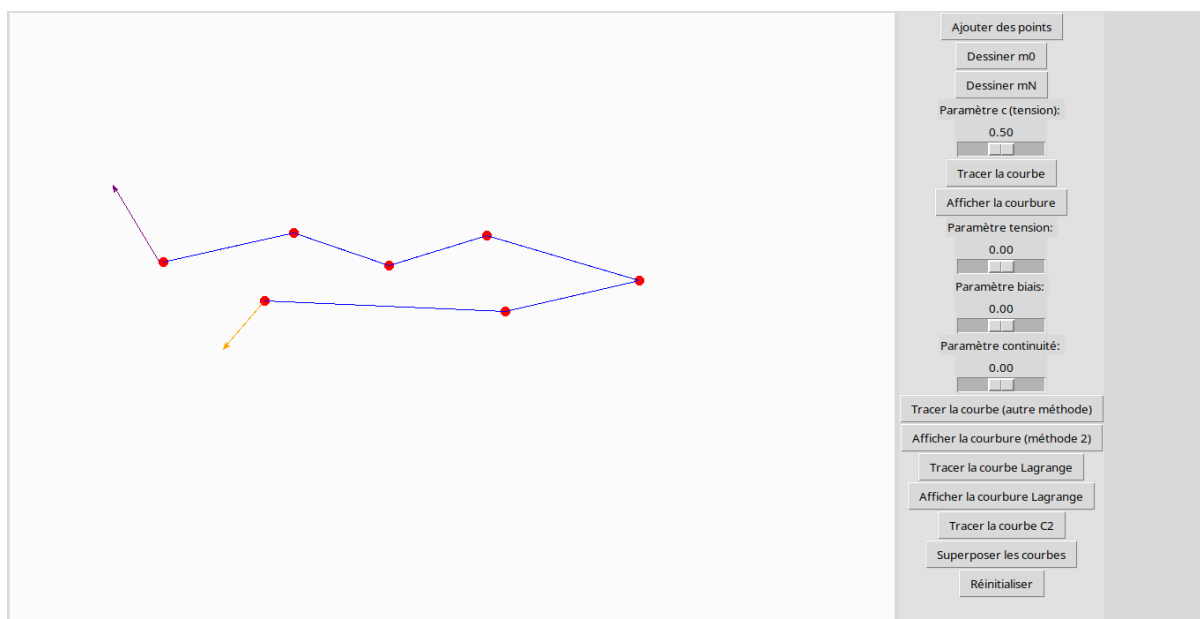


Figure 14: On choisit m_0 et m_N .

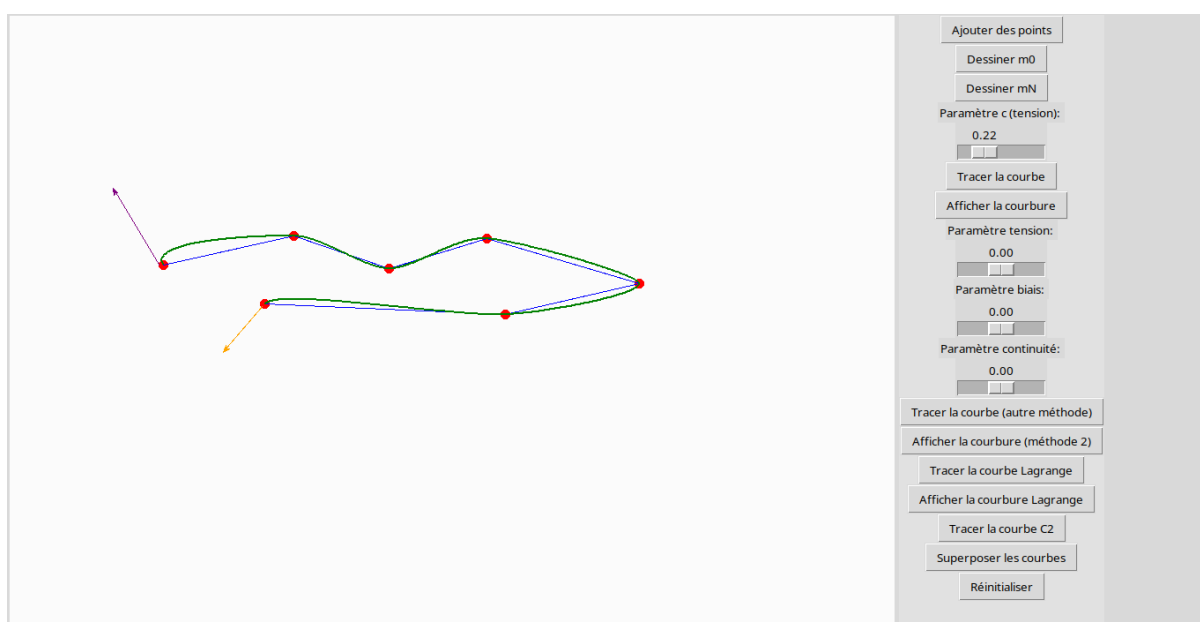


Figure 15: Méthode 1 avec $c = 0.22$

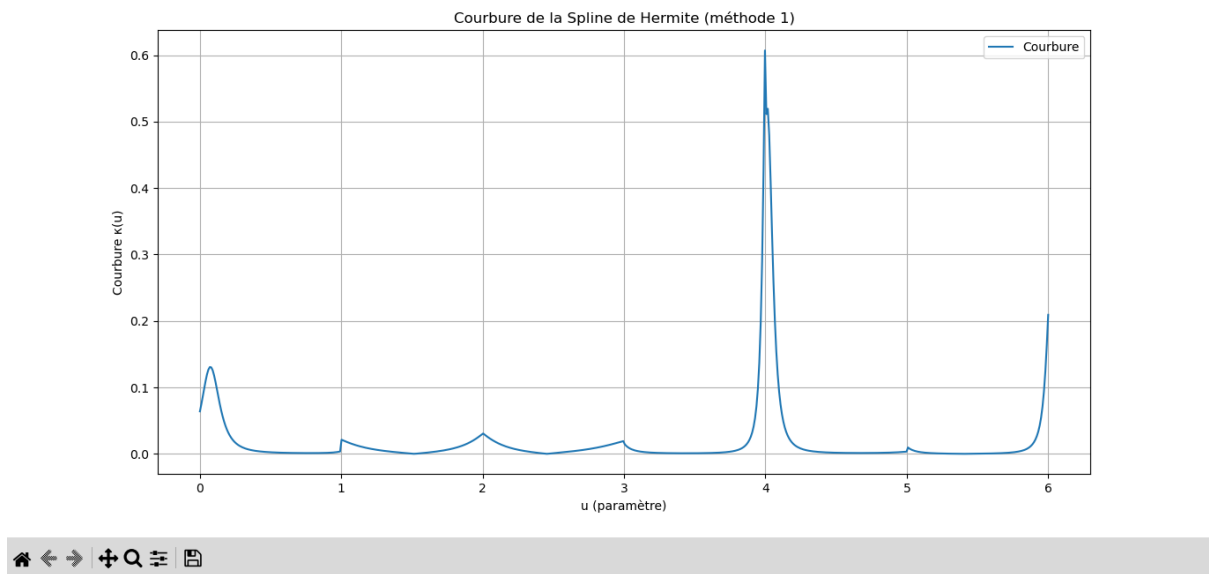


Figure 16: La courbure correspondante.

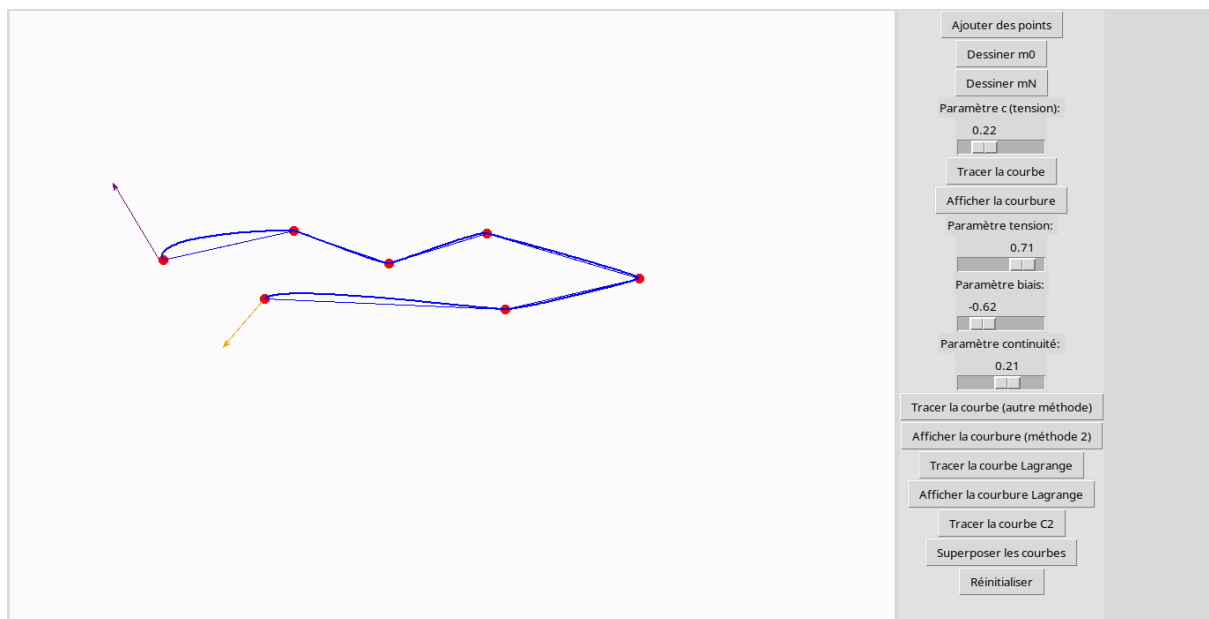


Figure 17: Méthode 2 avec tension= 0.71, biais= -0.62 et continuité= 0.21

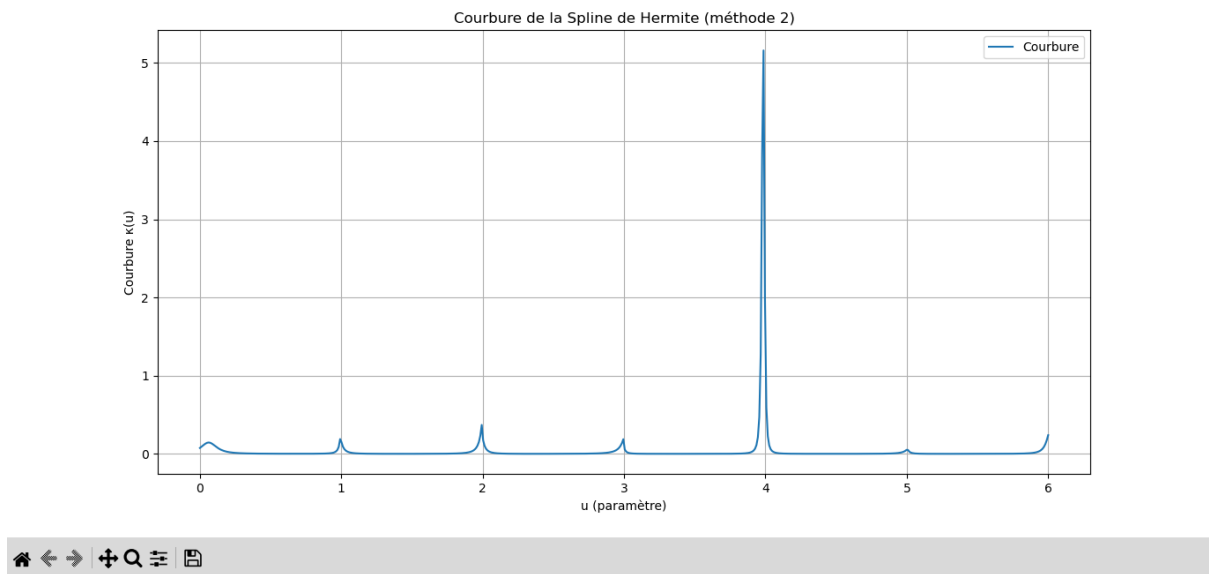


Figure 18: La courbure correspondante.

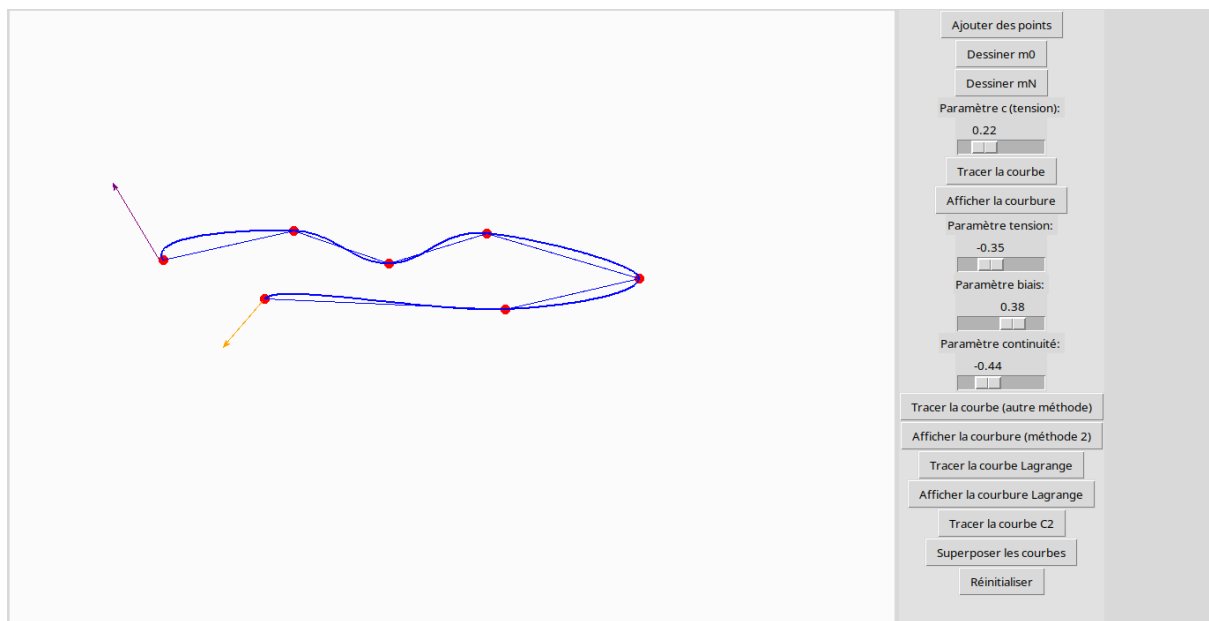


Figure 19: Méthode 2 avec tension= -0.35 , biais= 0.38 et continuité= -0.44

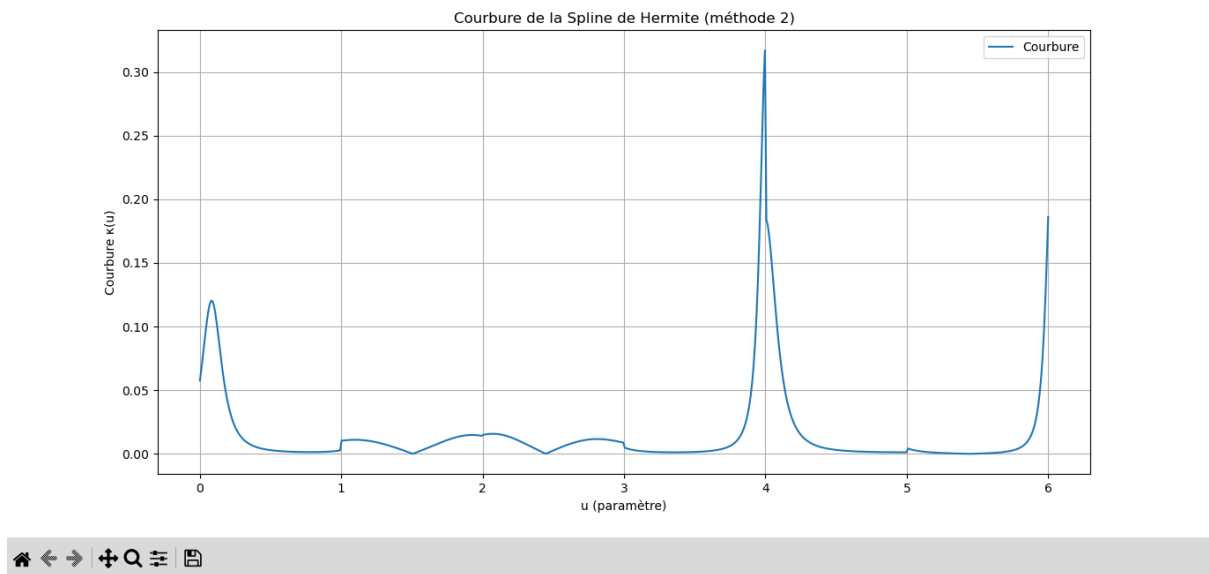


Figure 20: La courbure correspondante.



Figure 21: Méthode de Lagrange

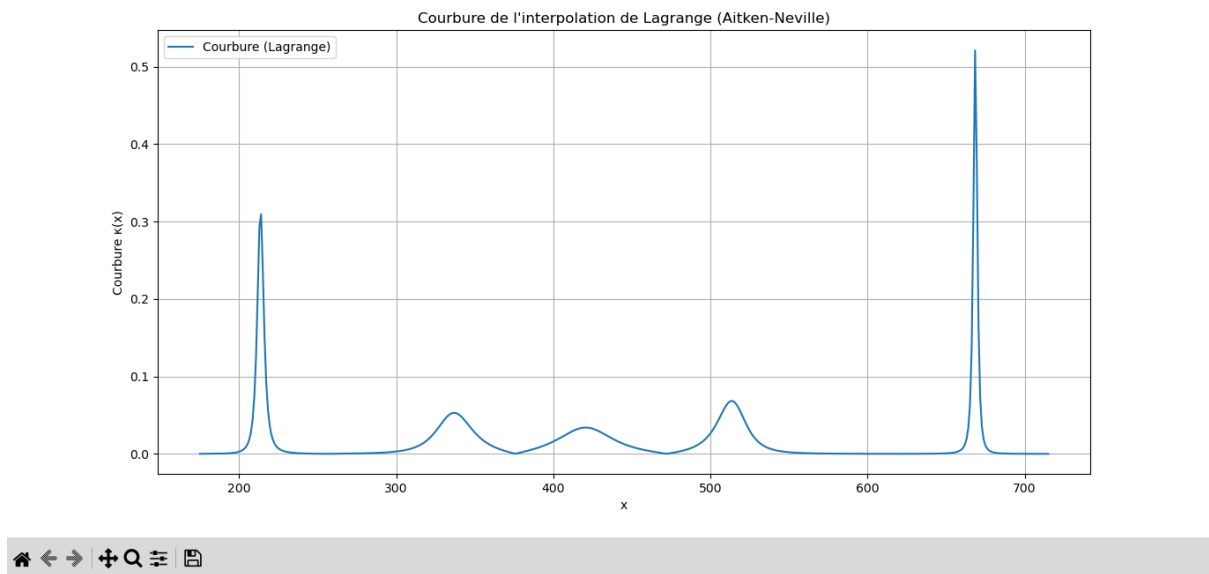


Figure 22: La courbure correspondante.

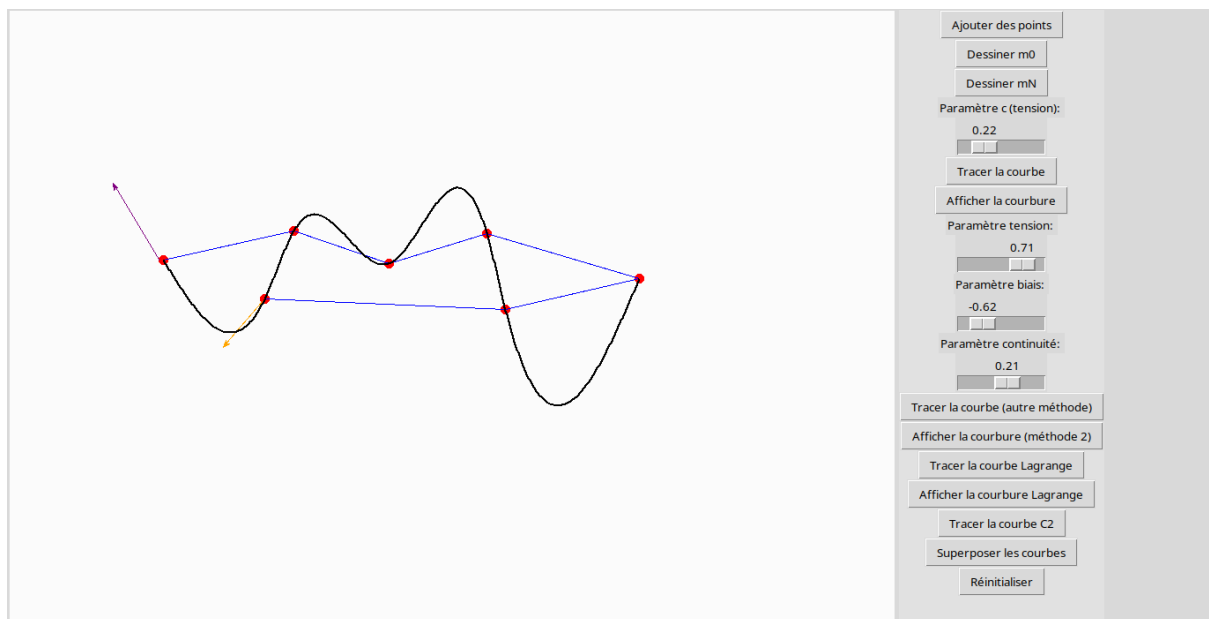


Figure 23: Méthode de splines cubiques C^2

5 Comparaison des méthodes

- **Polynômes de Lagrange** : oscillent pour un grand nombre de points.
- **Splines cubiques C^2** : produisent des courbes globalement lisses.
- **Splines Hermite** : offrent un contrôle local et préservent mieux la forme des données.

6 Observations et remarques

- Les splines Hermite sont idéales pour des interpolations locales où le contrôle des tangentes est essentiel, permettant une grande flexibilité dans le tracé.
- Le choix des tangentes est crucial pour éviter les oscillations indésirables. Par exemple, comme illustré dans les figures 14 à 16, des ajustements précis des paramètres tels que la tension ou le biais modifient sensiblement la courbe et sa fluidité.
- Les courbes de courbure offrent une mesure objective de la qualité de la courbe. Une courbure plus régulière témoigne d'une bonne continuité géométrique.
- Les Cardinal splines sont particulièrement adaptées lorsque la priorité est donnée à une interpolation douce avec un contrôle limité des variations locales, comme indiqué dans la figure 6.
- Les splines Kochanek–Bartels offrent un contrôle accru sur la forme des courbes grâce aux paramètres de tension, biais et continuité, mais exigent un ajustement minutieux pour éviter des distorsions inutiles (voir figure 18).
- Les courbes obtenues avec les splines Hermite présentent une meilleure robustesse contre les oscillations que celles produites par les polynômes de Lagrange, comme démontré dans la comparaison des figures 10 et 20.
- Bien que les splines cubiques C^2 assurent une excellente continuité de courbure, elles nécessitent des calculs plus complexes et ne sont pas aussi flexibles pour des modifications locales que les splines Hermite.

7 Conclusion

Les splines Hermite constituent une méthode flexible et efficace pour interpoler des points tout en offrant un contrôle précis des tangentes. Leur performance surpassent celles des polynômes de Lagrange et des splines cubiques C^2 dans des scénarios nécessitant une personnalisation locale.