Théorie de Cauchy NLSZeta

BENSAID Mohamed

April 21, 2025

Construction de la solution dans $H^1(\mathbb{R}^d)$

On s'intéresse à l'étude du problème de Cauchy dans H^1 pour l'équation suivante :

$$\begin{cases} iu_t + \Delta u + \lambda u|u|\eta(|u|+1) = 0 \\ u(0,x) = u_0 \end{cases}$$

où $\eta(x) = \zeta(x) - 1$, et ζ désigne la fonction zêta de Riemann.

Lois de conservation :

- La masse : $M(u) = \int |u|^2$
- L'énergie : $E(u) = \frac{1}{2}\int |\nabla u|^2 - \frac{\lambda}{3}\int |u|^3\eta(|u|+1)$

On rappelle que la fonction zêta de Riemann possède une singularité en 1, il convient donc de régulariser le problème de Cauchy en introduisant le problème approché :

$$(E_\epsilon) : \begin{cases} iu_{\epsilon t} + \Delta u_\epsilon + \lambda u_\epsilon|u_\epsilon|\eta(|u_\epsilon|+1+\epsilon) = 0 \\ u_\epsilon(0,x) = u_0 \end{cases}$$

L'énergie associée au problème régularisé devient :

$$E_\epsilon(u) = \frac{1}{2}\int |\nabla u|^2 - \frac{\lambda}{3}\int |u|^3\eta(|u|+1) + \frac{\lambda}{3}\int q_\epsilon(|u|)$$

où $q(x) = \int_0^x s^3\eta'(s+1+\epsilon)\,ds$.

Avant d'étudier le problème de Cauchy pour (E_ϵ), montrons l'unicité de la solution de (E).

Proposition 1. *Soient $u_1, u_2 \in L_T(H^1)$ deux solutions de (E) (au sens des distributions), alors $u_1 = u_2$.*

Proof. Posons $w = u_1 - u_2$. On a :

$$iw_t + \Delta w = -\lambda(u_1|u_1|\eta(|u_1|+1) - u_2|u_2|\eta(|u_2|+1))$$

On calcule :

$$\frac{d}{dt}\|w\|_2^2 = -2\lambda\,\mathrm{Im}\,(u_1|u_1|\eta(|u_1|+1) - u_2|u_2|\eta(|u_2|+1), u_1 - u_2)$$

On estime le côté droit, point par point :

$\operatorname{Im}[(u_1|u_1|\eta(|u_1|+1) - u_2|u_2|\eta(|u_2|+1))(\bar{u}_1 - \bar{u}_2)] = \operatorname{Im}(\bar{u}_1 u_2)(|u_1|\eta(|u_1|+1) - |u_2|\eta(|u_2|+1))$

Or :

$$|\operatorname{Im}(uv)| \leq \min(|u|,|v|)|u-v|$$

Donc, à l'aide des inégalités sur ζ :

$$\begin{aligned} ||u_1|\eta(|u_1|+1) - |u_2|\eta(|u_2|+1)| &\leq |u_1 - u_2|\eta(\min(|u_1|,|u_2|)+1) \\ &\quad + \max(|u_1|,|u_2|)|\eta(|u_1|+1) - \eta(|u_2|+1)| \\ &\leq |u_1 - u_2|\frac{1}{\min(|u_1|,|u_2|)} + \max(|u_1|,|u_2|)C\frac{|u_1-u_2|}{|u_1 u_2|} \end{aligned}$$

Ce qui donne :

$$\frac{d}{dt}\|w\|_2^2 \leq 2|\lambda|(1+C)\|w\|_2^2$$

La conclusion suit par le lemme de Gronwall. □

En suivant la même technique que dans la référence de Cazenave (méthode de Kato), on montre le théorème suivant :

Theorem 2. *Soit $u_0 \in H^1$, il existe une unique solution $u_\epsilon \in C([-T,T];H^1) \cap C^1([-T,T];H^{-1})$ du problème (E_ϵ).*

Proof. Pour appliquer la méthode de Kato, il suffit d'utiliser les inégalités sur ζ mentionnées dans l'appendice. □

On souhaite maintenant montrer que la solution u_ϵ vérifie une estimation uniforme en ϵ, ce qui permettra de conclure à la globalité de la solution. De plus, cette estimation permettra de prouver que la suite $(u_\epsilon)_\epsilon$ est de Cauchy dans un espace de Banach à déterminer.

Lemma 3. *Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $t \in [-T,T]$:*

$$\|u_\epsilon(t)\|_{H^1} \leq C_T(\|u_0\|_{H^1})$$

Proof. Puisque la masse est conservée, il suffit d'estimer $\|\nabla u_\epsilon\|$ à l'aide du lemme de Gronwall.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u_\epsilon\|_2^2 &= \lambda \operatorname{Im}(u_\epsilon|u_\epsilon|\eta(|u_\epsilon|+1+\epsilon), \Delta u_\epsilon) \\ &= -\lambda \operatorname{Im}(u_\epsilon \eta(|u_\epsilon|)\nabla|u_\epsilon|, \nabla u_\epsilon) \\ &\quad - \lambda \operatorname{Im}(u_\epsilon|u_\epsilon|\eta'(|u_\epsilon|+1+\epsilon)\nabla|u_\epsilon|, \nabla u_\epsilon) \end{aligned}$$

En utilisant les inégalités sur ζ mentionnées dans l'appendice, on déduit :

$$\frac{d}{dt}\|\nabla u_\epsilon\|_2^2 \leq 2|\lambda|(1+C)\|\nabla u_\epsilon\|_2^2$$

Conclusion par le lemme de Gronwall. □

En suivant les mêmes étapes que dans la référence de Hayashi-Ozawa, on peut déduire que la suite $(u_\epsilon)_\epsilon$ est de Cauchy dans $C_T(L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d))$, et que les lemmes 2.5, 2.6, 2.10, 2.11 de [1] s'appliquent également dans notre cas.

En conclusion, on peut passer à la limite lorsque $\epsilon \to 0$: la solution u_ϵ du problème approché converge vers une solution du problème (E).

Appendice : Inégalités sur la fonction zêta

Lemma 4. *Pour tout $x > 1$, on a :*

$$\frac{1}{x-1} \leq \zeta(x) \leq \frac{1}{x-1} + 1$$

En particulier :

$$0 \leq \eta(x) \leq \frac{1}{x-1}$$

Proof. On rappelle que pour toute fonction continue décroissante, on a :

$$f(n) \leq \int_{n-1}^{n} f(x)\,dx \leq f(n-1)$$

On applique cette remarque à la fonction $f(x) = \frac{1}{n^x}$ qui est décroissante pour $x > 1$. □

Lemma 5. *Il existe $C > 0$ tel que pour tout $x > 1$:*

$$|\zeta'(x)| \leq C \int_{1}^{\infty} \frac{\ln(z)}{z^x}\,dz$$

En particulier :

$$|\zeta'(x)| \leq \frac{C}{(x-1)^2}$$

Proof. On applique la même astuce que dans la preuve précédente, sauf qu'ici $f(x) = \frac{\ln(x)}{n^x}$ n'est pas décroissante sur $]1, 2]$.

On a :

$$|\zeta'(x)| \leq \frac{\ln(2)}{2^x} + \int_{2}^{\infty} \frac{\ln(z)}{z^x}\,dz$$

Par ailleurs, pour $z \in]1, 2[$, on a :

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2^x}{z^x} = \infty$$

Donc, par définition de la limite :

$$\exists B > 0, \forall x > B, \int_{1}^{2} \frac{\ln(z)}{z^x}\,dz \geq \frac{\ln(2)}{2^x}$$

Pour $x \in]1, B]$, il existe $C_B > 0$ tel que :

$$C_B \int_{1}^{2} \frac{\ln(z)}{z^x}\,dz \geq \frac{\ln(2)}{2^x}$$

En posant $C = \max(1, C_B)$, on obtient :

$$|\zeta'(x)| \leq C \int_{1}^{\infty} \frac{\ln(z)}{z^x}\,dz$$

□

Remark 1. *Pour tout $\epsilon > 0$ et tout $z \geq 1$, on a :*

$$\ln(z) \leq \frac{1}{\epsilon} z^{\epsilon}$$

Donc en particulier :

$$|\zeta'(x)| \leq \frac{1}{\epsilon} \cdot \frac{1}{x - \epsilon - 1}$$

pour tout $x > \epsilon + 1$.

Lemma 6. *Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $x, y > 0$, on a :*

$$|\zeta(x+1) - \zeta(y+1)| \leq C \frac{|x-y|}{xy}$$

Proof. On a :

$$\begin{aligned} |\zeta(x+1) - \zeta(y+1)| &= \left| \int_x^y \zeta'(s+1)\, ds \right| \\ &\leq C \left| \int_x^y \frac{1}{s^2}\, ds \right| \\ &\leq C \frac{|x-y|}{xy} \end{aligned}$$

□

Lemma 7. *Il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $x, y > 0$, et tout $\epsilon, \delta > 0$, on a :*

$$|x\eta(x+1+\epsilon) - y\eta(y+1+\delta)| \leq C \frac{|x-y| + |\epsilon - \delta|}{\min(x,y)}$$

Proof.

$$\begin{aligned} |x\eta(x+1+\epsilon) - y\eta(y+1+\delta)| &= \left| \int_0^1 \frac{d}{dt} \left((tx + (1-t)y)\eta(t(x+\epsilon) + (1-t)(y+\delta) + 1) \right) dt \right| \\ &\leq \left| \int_0^1 (x-y)\eta(t(x+\epsilon) + (1-t)(y+\delta) + 1)\, dt \right| \\ &\quad + \left| \int_0^1 (tx + (1-t)y)(x - y + \epsilon - \delta)\eta'(t(x+\epsilon) + (1-t)(y+\delta) + 1)\, dt \right| \\ &\leq \frac{|x-y|}{\min(x,y)} + C \frac{|x-y| + |\epsilon - \delta|}{\min(x,y)} \end{aligned}$$

□

Corollary 8. *Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $u, v \in \mathbb{C}$ on ait :*

$$|\mathrm{Im}\left(u|u|\eta(|u| + 1 + \epsilon) - v|v|\eta(|v| + 1 + \delta) \right)(\bar{u} - \bar{v})| \leq C(|u-v|^2 + |u-v||\epsilon - \delta|)$$

Proof. Il suffit d'utiliser le lemme 7 et l'inégalité $|\mathrm{Im}(u\bar{v})| \leq \min(|u|, |v|)|u - v|$. □

Lemma 9. *Il existe $C > 0$ tel que pour tout $u, v \in \mathbb{C}$, on ait :*

$$|u|u|\eta(|u| + 1 + \epsilon) - v|v|\eta(|v| + 1)| \leq \epsilon + C|u - v|$$

Proof. Montrons cette inégalité dans le cas $|u| \leq |v|$. En effet :

$$u|u|\eta(|u| + 1 + \epsilon) - v|v|\eta(|v| + 1) = u(|u|\eta(|u| + \epsilon + 1) - |v|\eta(|v| + 1)) + (u - v)|v|\eta(|v| + 1)$$

On applique le lemme 7 avec $\delta = 0$; on en déduit le résultat. Le cas $|v| \leq |u|$ se traite de la même façon. □

Problème de Cauchy cas $V(|u|) = |u|\zeta(|u| + 1)$

en rédaction

Conclusion

Dans ces notes, on remarque dès le début que la fonction $x \mapsto x\eta(x + 1)$ est bornée sur $[0, \infty[$, ce qui nous a permis d'obtenir des estimations a priori pour passer à la limite lorsque $\epsilon \to 0$. Le fait de retirer 1 à la fonction zêta est essentiel, car si l'on garde la fonction zêta telle quelle, le premier terme de la série est égal à 1, ce qui contribue à une non-linéarité de type NLS puissance, et nécessite un traitement différent.

Une question naturelle qui se pose est de savoir ce qui se passe au niveau de la théorie de Cauchy pour les équations suivantes :

$$\begin{cases} iu_t + \Delta u + \lambda u\eta(|u| + 1) = 0 \\ u(0, x) = u_0 \end{cases} \quad \text{ou bien} \quad \begin{cases} iu_t + \Delta u + \lambda u\zeta(|u| + 1) = 0 \\ u(0, x) = u_0 \end{cases}$$

Ces variantes rendent difficile la démonstration de l'unicité dans toute dimension, ainsi que l'obtention d'estimations uniformes en ϵ lors de la régularisation. Par ailleurs, on remarque que ces équations ont un comportement proche de celui d'un potentiel de la forme $V(x) = \frac{1}{x}$, ce qui mériterait une étude plus approfondie.

References

[1] Masayuki Hayashi and Tohru Ozawa, The Cauchy Problem for the Logarithmic Schrödinger Equation Revisited `https://arxiv.org/pdf/2309.01695`