Cauchy Problem with Nonlinear Damping for the Schrödinger Equation of Zeta Type

BENSAID Mohamed

April 24, 2025

Construcion de la solution dans H^1

On s'intéresse à l'étude du problème de Cauchy dans H^1 pour l'équation suivante :

$$\begin{cases} iu_t + \Delta u + i\lambda u\eta(|u|+1) = 0, \\ u(0,x) = u_0, \end{cases}$$

où $\eta(x) = \zeta(x) - 1$, et ζ désigne la fonction zêta de Riemann.

Avant d'étudier le problème de Cauchy pour notre problème régularisé, montrons l'unicité de la solution de (E).

Proposition 1. *Soient $u_1, u_2 \in L^\infty_T(H^1)$ deux solutions de (E) (au sens des distributions). Si $\lambda > 0$, alors $u_1 = u_2$.*

Proof. Il suffit de remarquer que

$$\frac{d}{dt}\|u-v\|_2^2 = -\lambda \operatorname{Re}((u\eta(|u|+1) - v\eta(|v|+1), u-v)).$$

Puisque la fonction $x \mapsto x(\zeta(x+1)-1)$ est décroissante et satisfait de plus $f(z) = \frac{z}{|z|}f(|z|)$ avec $f(0) = 0$, on déduit que

$$\operatorname{Re}((u\eta(|u|+1) - v\eta(|v|+1), u-v)) \geq 0,$$

et finalement, par le théorème fondamental de l'analyse, on obtient :

$$\|u-v\|_2 \leq \|u_0 - v_0\|_2.$$

□

Maintenant, construisons la solution dans H^1. Considérons le problème régularisé suivant :

$$\begin{cases} iu_{\epsilon t} + \Delta u_\epsilon + i\lambda u_\epsilon\eta(|u|+1+\epsilon) = 0, \\ u_\epsilon(0,x) = u_0. \end{cases}$$

Theorem 2. *Soit $u_0 \in H^1$. Alors le problème régularisé admet une unique solution*

$$u_\epsilon \in C_T(H^1) \cap C^1_T(H^{-1}).$$

Proof. C'est démontré dans Cazenave. □

On cherche une estimation uniforme en ϵ de notre solution approchée u_ϵ. On multiplie l'équation approximée par $\bar{u}_\epsilon$, on intègre, et si $\lambda > 0$, on en déduit que :

$$\|u_\epsilon\| \leq \|u_0\|. \tag{1}$$

De plus, on a le lemme suivant :

Lemma 3. *Pour $\lambda > 0$, on a, pour tout $t \in I_T$:*

$$\|\nabla u_\epsilon\| \leq e^{2|t|\lambda} \|\nabla u_0\|.$$

Proof. Il suffit d'estimer $\|\nabla u_\epsilon\|_2$. En effet :

$$\begin{aligned}\frac{d}{2dt}\|\nabla u_\epsilon\|_2^2 &= -\lambda \operatorname{Re}((\nabla(u_\epsilon \eta(|u_\epsilon|+1)), \nabla u_\epsilon)) \\ &= -\lambda \int \eta(|u_\epsilon|+1+\epsilon)|\nabla u_\epsilon|^2 \\ &\quad - \lambda \int \operatorname{Re}\left(\frac{u_\epsilon}{|u_\epsilon|}\operatorname{Re}(\bar{u}_\epsilon \nabla u_\epsilon)\cdot \overline{\nabla u_\epsilon}\right)\eta'(|u_\epsilon|+1+\epsilon).\end{aligned}$$

Maintenant, puisque

$$\eta(x+1+\epsilon) \geq \frac{1}{x+\epsilon} - 1, \quad \text{et} \quad |\eta'(x+1+\epsilon)| \leq \frac{1}{(x+\epsilon)^2} + 1,$$

on déduit que :

$$\frac{d}{2dt}\|\nabla u_\epsilon\|_2^2 \leq \lambda \int |\nabla u_\epsilon|^2 - \lambda \int \frac{|\nabla u_\epsilon|^2}{|u_\epsilon|+\epsilon} + \lambda \int |\nabla u_\epsilon|^2 + \lambda \int \frac{|u_\epsilon|}{(|u_\epsilon|+\epsilon)^2}|\nabla u_\epsilon|^2.$$

En particulier :

$$\frac{d}{2dt}\|\nabla u_\epsilon\|_2^2 \leq 2\lambda \|\nabla u_\epsilon\|^2.$$

□

Remark 1. *L'estimation* (1) *et le lemme précédent nous permettent de conclure que la solution obtenue pour notre problème approché est **globale en temps**. De plus, ceci montre que*

$$M_T = \sup_{0<\epsilon<1} \|u_\epsilon\|_{C_T(H^1)} \leq C(T, \|u_0\|_{H^1}).$$

Dans la suite, on souhaite prouver que la suite $(u_\epsilon)_\epsilon$ est de Cauchy dans $C_T(L^2_{loc})$. Pour cela, on se donne une fonction de coupure $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & si\ |x| \leq 1, \\ 0 & si\ |x| \geq 2, \end{cases}$$

avec $0 \leq f(x) \leq 1$, et on pose $f_R(x) := f(x/R)$.

On calcule :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{2dt}\|f_R^2(u_\epsilon - u_\delta)\|_2^2 &= \operatorname{Im}\left(if_R^2\partial_t(u_\epsilon - u_\delta), u_\epsilon - u_\delta\right) \\
&= \operatorname{Im}\left(\nabla f_R^2 \nabla(u_\epsilon - u_\delta), u_\epsilon - u_\delta\right) \\
&\quad - \lambda \operatorname{Re}\left(f_R^2(u_\epsilon \eta(|u_\epsilon| + 1 + \epsilon) - u_\delta \eta(|u_\delta| + 1 + \delta)), u_\epsilon - u_\delta\right) \\
&\leq \frac{C}{R}\|\nabla(u_\epsilon - u_\delta)\|_2 \|u_\epsilon - u_\delta\|_2 \\
&\leq \frac{C(M_T)}{R}.
\end{aligned}$$

Ceci montre que la suite $(u_\epsilon)_\epsilon$ est de Cauchy dans $C_T(L^2_{loc})$. Par l'inégalité (1) *et le lemme 3, on montre qu'il existe $u \in L^\infty(\mathbb{R}, L^2)$ tel que :*

$$u_\epsilon \to u \quad \textit{dans } C_T(L^2_{loc})$$

pour tout $T > 0$.

Lemma 4. *On a*

$$u \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}, H^1(\mathbb{R}^d))$$

et

$$u_\epsilon(t) \rightharpoonup u(t) \quad \textit{faiblement dans } H^1$$

Proof. .... □

Lemma 5. *Pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a*

$$u_\epsilon \eta(|u_\epsilon| + 1 + \epsilon) \to u\eta(|u| + 1) \qquad \textit{dans } L^2_{loc}$$

Proof. ?????? □

Appendice : Inégalités sur la fonction zêta

Lemma 6. *Pour tout $x > 1$, on a :*

$$\frac{1}{x-1} \leq \zeta(x) \leq \frac{1}{x-1} + 1$$

En particulier :

$$0 \leq \eta(x) \leq \frac{1}{x-1}$$

Proof. On rappelle que pour toute fonction continue décroissante, on a :

$$f(n) \leq \int_{n-1}^{n} f(x)\,dx \leq f(n-1)$$

On applique cette remarque à la fonction $f(x) = \frac{1}{n^x}$ qui est décroissante pour $x > 1$. □

Lemma 7. *Il existe $C > 0$ tel que pour tout $x > 1$:*

$$|\zeta'(x)| \leq C \int_1^\infty \frac{\ln(z)}{z^x}\,dz$$

En particulier :

$$|\zeta'(x)| \leq \frac{C}{(x-1)^2}$$

Proof. On applique la même astuce que dans la preuve précédente, sauf qu'ici $f(x) = \frac{\ln(x)}{n^x}$ n'est pas décroissante sur $]1,2]$.

On a :

$$|\zeta'(x)| \leq \frac{\ln(2)}{2^x} + \int_2^\infty \frac{\ln(z)}{z^x}\,dz$$

Par ailleurs, pour $z \in]1,2[$, on a :

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2^x}{z^x} = \infty$$

Donc, par définition de la limite :

$$\exists B > 0, \forall x > B, \int_1^2 \frac{\ln(z)}{z^x}\,dz \geq \frac{\ln(2)}{2^x}$$

Pour $x \in]1,B]$, il existe $C_B > 0$ tel que :

$$C_B \int_1^2 \frac{\ln(z)}{z^x}\,dz \geq \frac{\ln(2)}{2^x}$$

En posant $C = \max(1, C_B)$, on obtient :

$$|\zeta'(x)| \leq C \int_1^\infty \frac{\ln(z)}{z^x}\,dz$$

□

Remark 2. *Pour tout $\epsilon > 0$ et tout $z \geq 1$, on a :*

$$\ln(z) \leq \frac{1}{\epsilon} z^\epsilon$$

Donc en particulier :

$$|\zeta'(x)| \leq \frac{1}{\epsilon} \cdot \frac{1}{x - \epsilon - 1}$$

pour tout $x > \epsilon + 1$.

Lemma 8. *Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $x, y > 0$, on a :*

$$|\zeta(x+1) - \zeta(y+1)| \leq C \frac{|x-y|}{xy}$$

Proof. On a :

$$\begin{aligned}
|\zeta(x+1) - \zeta(y+1)| &= \left| \int_x^y \zeta'(s+1)\,ds \right| \\
&\leq C \left| \int_x^y \frac{1}{s^2}\,ds \right| \\
&\leq C \frac{|x-y|}{xy}
\end{aligned}$$

□

Lemma 9. *Il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $x, y > 0$, et tout $\epsilon, \delta > 0$, on a :*

$$|x\eta(x + 1 + \epsilon) - y\eta(y + 1 + \delta)| \leq C\frac{|x - y| + |\epsilon - \delta|}{\min(x, y)}$$

Proof.

$$\begin{aligned}
|x\eta(x + 1 + \epsilon) - y\eta(y + 1 + \delta)| &= \left|\int_0^1 \frac{d}{dt}\left((tx + (1 - t)y)\eta(t(x + \epsilon) + (1 - t)(y + \delta) + 1)\right) dt\right| \\
&\leq \left|\int_0^1 (x - y)\eta(t(x + \epsilon) + (1 - t)(y + \delta) + 1)\, dt\right| \\
&\quad + \left|\int_0^1 (tx + (1 - t)y)(x - y + \epsilon - \delta)\eta'(t(x + \epsilon) + (1 - t)(y + \delta) + 1)\, dt\right| \\
&\leq \frac{|x - y|}{\min(x, y)} + C\frac{|x - y| + |\epsilon - \delta|}{\min(x, y)}
\end{aligned}$$

□

Corollary 10. *Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $u, v \in \mathbb{C}$ on ait :*

$$|\mathrm{Im}\,(u|u|\eta(|u| + 1 + \epsilon) - v|v|\eta(|v| + 1 + \delta))\,(\bar{u} - \bar{v})| \leq C(|u - v|^2 + |u - v||\epsilon - \delta|)$$

Proof. Il suffit d'utiliser le lemme 9 et l'inégalité $|\,\mathrm{Im}(u\bar{v})| \leq \min(|u|, |v|)|u - v|$. □

Lemma 11. *Il existe $C > 0$ tel que pour tout $u, v \in \mathbb{C}$, on ait :*

$$|u|u|\eta(|u| + 1 + \epsilon) - v|v|\eta(|v| + 1)| \leq \epsilon + C|u - v|$$

Proof. Montrons cette inégalité dans le cas $|u| \leq |v|$. En effet :

$$u|u|\eta(|u| + 1 + \epsilon) - v|v|\eta(|v| + 1) = u(|u|\eta(|u| + \epsilon + 1) - |v|\eta(|v| + 1)) + (u - v)|v|\eta(|v| + 1)$$

On applique le lemme 9 avec $\delta = 0$; on en déduit le résultat. Le cas $|v| \leq |u|$ se traite de la même façon. □

Lemma 12. *la fonction*

$$x \to x\eta(x + 1)$$

est décroissante sur $\mathbb{R}_{>0}$

Proof. .... □

Conclusion

Le fait de retirer 1 à la fonction zêta est essentiel, car si l'on garde la fonction zêta telle quelle, le premier terme de la série est égal à 1, ce qui contribue à une non-linéarité de type NLS puissance, et nécessite un traitement différent.

Une question naturelle qui se pose est de savoir ce qui se passe au niveau de la théorie de Cauchy pour les équations suivantes :

$$\begin{cases} iu_t + \Delta u + \lambda u\eta(|u| + 1) = 0 \\ u(0, x) = u_0 \end{cases} \quad \text{ou bien} \quad \begin{cases} iu_t + \Delta u + \lambda u\zeta(|u| + 1) = 0 \\ u(0, x) = u_0 \end{cases}$$

Ces variantes rendent difficile la démonstration de l'unicité dans toute dimension, ainsi que l'obtention d'estimations uniformes en ϵ lors de la régularisation. Par ailleurs, on remarque que ces équations ont un comportement proche de celui d'un potentiel de la forme $V(x) = \frac{1}{x}$, ce qui mériterait une étude plus approfondie.

References

[1] Masayuki Hayashi and Tohru Ozawa, The Cauchy Problem for the Logarithmic Schrödinger Equation Revisited https://arxiv.org/pdf/2309.01695