Cauchy Problem with Nonlinear Damping for the Schrödinger Equation of Zeta Type

BENSAID Mohamed

May 11, 2025

Abstract

Nous étudions le problème de Cauchy dans l'espace H^1 pour une équation de Schrödinger amortie non linéaire de la forme :

$$iu_t + \Delta u + i\lambda u\zeta(|u|+1) = 0, \quad u(0,x) = u_0,$$

où ζ désigne la fonction zêta de Riemann. Cette équation fait intervenir un terme d'amortissement inspiré d'un objet fondamental de la théorie des nombres. Nous commençons par établir l'unicité des solutions au sens des distributions. Ensuite, en considérant un problème régularisé, nous prouvons l'existence d'une solution globale dans H^1, en utilisant des estimations d'énergie uniformes et des arguments de compacité. Finalement, nous montrons que la solution limite vérifie bien l'équation initiale au sens faible, en suivant la même méthode que celle construite dans l'article [3].

Introduction

L'équation de Schrödinger joue un rôle central en physique mathématique, en particulier dans la modélisation de phénomènes quantiques. Lorsqu'on y ajoute des termes d'amortissement non linéaire, elle permet également de décrire des effets dissipatifs, ce qui donne lieu à des comportements dynamiques riches et complexes. Dans ce travail, nous étudions un problème de Cauchy associé à une version amortie de l'équation de Schrödinger, où l'amortissement dépend d'une fonction liée à la fameuse fonction zêta de Riemann.

La fonction zêta de Riemann, définie initialement pour $\mathrm{Re}(s) > 1$ par

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s},$$

occupe une place fondamentale en théorie des nombres, notamment à travers son lien profond avec la distribution des nombres premiers. Son prolongement analytique, ainsi que la célèbre hypothèse de Riemann concernant la localisation de ses zéros non triviaux, constituent l'un des problèmes les plus importants des mathématiques modernes.

Dans notre étude, nous considérons un amortissement défini à partir de la fonction $\zeta(x) = \zeta(x) - 1$. Nous montrons dans un premier temps l'unicité des solutions du problème au sens des distributions, avant d'aborder une approche par régularisation pour établir l'existence de solutions faibles dans H^1.

Dans la suite, on considère une variété riemannienne Σ que l'on suppose compacte, de dimension finie d, car si l'on se place dans le cadre de $\mathbb{R}^d$, la fonction $x \mapsto x\zeta(x+1)$ n'appartient plus à $L^p(\mathbb{R}^d)$, ce qui rend le contrôle de la partie non linéaire plus difficile.

Construction de la solution dans H^1

On s'intéresse à l'étude du problème de Cauchy dans H^1 pour l'équation suivante :

$$(E) : \begin{cases} iu_t + \Delta u + i\lambda u\zeta(|u| + 1) = 0, \\ u(0, x) = u_0, \end{cases}$$

Où ζ désigne la fonction zêta de Riemann.

Avant d'étudier le problème de Cauchy pour notre problème régularisé, montrons l'unicité de la solution de (E).

Proposition 1. *Soient $u_1, u_2 \in L^\infty(\mathbb{R}, H^1(\Sigma))$ deux solutions de (E) (au sens des distributions). Si $\lambda > 0$, alors $u_1 = u_2$.*

Proof. Afin de prouver ce résultat, il suffit d'appliquer le lemme suivant. En effet, puisque la fonction $x \mapsto x\zeta(x + 1)$ est positive et croissante, on déduit que

$$\frac{d}{2dt}||u_1 - u_2||^2 \leq 0$$

En utilisant le théorème fondamental d'analyse, on déduit que

$$||u_1(t) - u_2(t)||_2 \leq ||u_1(0) - u_2(0)||_2.$$

□

Lemma 2. *Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ croissante, alors pour tout $u, v \in \mathbb{C}$,*

$$\mathrm{Re}((uf(|u|) - vf(|v|))(\bar{u} - \bar{v})) \geq 0.$$

Proof.

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}((uf(|u|) - vf(|v|))(\bar{u} - \bar{v})) &= |u|^2 f(|u|) + |v|^2 f(|v|) - \mathrm{Re}(u\bar{v})(f(|u|) + f(|v|)) \\ &\geq |u|^2 f(|u|) + |v|^2 f(|v|) - |uv|(f(|u|) + f(|v|)) \\ &= (|u| - |v|)(|u|f(|u|) - |v|f(|v|)) \geq 0. \end{aligned}$$

□

Maintenant, construisons la solution dans H^1. Considérons le problème régularisé suivant :

$$(E_\epsilon) : \begin{cases} iu_{\epsilon t} + \Delta u_\epsilon + i\lambda u_\epsilon \zeta(|u| + 1 + \epsilon) = 0, \\ u_\epsilon(0, x) = u_0. \end{cases}$$

Hyp : Dans toute la suite on suppose $\lambda > 0$.

Theorem 3. *Soit $u_0 \in H^1$. Alors le problème régularisé admet une unique solution*

$$u_\epsilon \in C_T(H^1) \cap C^1_T(H^{-1}).$$

Proof. Voir Ch4[2] □

On cherche une estimation uniforme en ϵ de notre solution approchée u_ϵ. On multiplie l'équation approximée par $\bar{u}_\epsilon$, on intègre, et si $\lambda > 0$, on en déduit que :

(1) $$\|u_\epsilon\| \leq \|u_0\|. \quad \text{pour tout} \quad t \in [0, T]$$

De plus, on a le lemme suivant :

Lemma 4. *Pour $\lambda > 0$, on a, pour tout $t \in [0, T]$:*

$$\|\nabla u_\epsilon\|_2 \leq \|\nabla u_0\|_2.$$

Proof. Il suffit d'estimer $\|\nabla u_\epsilon\|_2$. En effet :

$$\begin{aligned}\frac{d}{2dt}\|\nabla u_\epsilon\|_2^2 &= -\lambda \operatorname{Re}(\partial_t(\nabla(u_\epsilon\zeta(|u_\epsilon|+1)), \nabla u_\epsilon)) \\ &\leq -\lambda \int \zeta(|u_\epsilon|+1+\epsilon)|\nabla u_\epsilon|^2 \\ &\quad -\lambda \int |u_\epsilon|\zeta'(|u_\epsilon|+1+\epsilon)|\nabla u_\epsilon|^2. \\ &= \lambda \int [-\zeta(|u_\epsilon|+1+\epsilon) - |u_\epsilon|\zeta'(|u_\epsilon|+1+\epsilon)]|\nabla u_\epsilon|^2\end{aligned}$$

D'autre part, puisque la fonction $f : x \mapsto x\zeta(x+1)$ est croissante, alors $-f'(x) \leq 0$.

En particulier

$$-\zeta(|u_\epsilon|+1+\epsilon) - |u_\epsilon|\zeta'(|u_\epsilon|+1+\epsilon) \leq 0$$

D'autre part, $\lambda > 0$, et par le théorème fondamental d'analyse, on déduit le lemme. □

Remark 1. *L'estimation* (1) *et le lemme précédent nous permettent de conclure que la solution obtenue pour notre problème approché est vlable pour $t \in R_+$. De plus, ceci montre que*

$$M = \sup_{0<\epsilon<1} \|u_\epsilon\|_{L^\infty(H^1)} \leq \|u_0\|_{H^1}.$$

****

Maintenant, on souhaite prouver que la suite $(u_\epsilon)_\epsilon$ converge (à sous-suite près) vers u dans un espace approprié. On remarque que la suite $(u_\epsilon)_\epsilon$ est bornée uniformément dans $L^\infty(\mathbb{R}, H^1(\Sigma))$, par Banach–Alaoglu, on déduit qu'il existe une sous-suite extraite telle que

$$u_\epsilon(t) \rightharpoonup^* u(t) \in L^\infty(\mathbb{R}_+, H^1(\Sigma)).$$

De plus, on a également

$$\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}, H^1(\Sigma))} \leq \|u_0\|_{H^1(\Sigma)}.$$

De plus, on a le lemme suivant :

Lemma 5. *À sous-suite extraite,*

$$u_\epsilon\zeta(|u_\epsilon|+1+\epsilon) \rightharpoonup^* u\zeta(|u|+1) \in L^\infty(\mathbb{R}_+, L^2(\Sigma)).$$

Proof. Pour tout $(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \Sigma$, on a

$$|u_\epsilon(t,x)\zeta(|u_\epsilon|+1+\epsilon)|^2 \leq 2(1+|u_\epsilon(t,x)|^2).$$

Puisque Σ est bornée et que $\|u_\epsilon(t)\|_2 \leq \|u_0\|_2$, on déduit que la suite $u_\epsilon\zeta(|u_\epsilon|+1+\epsilon)$ est uniformément bornée dans $L^\infty(\mathbb{R}_+, L^2(\Sigma))$. On déduit encore une fois, par Banach-Alaoglu, qu'il existe V, tel que

$$u_\epsilon\zeta(|u_\epsilon|+1+\epsilon) \rightharpoonup^* V \in L^\infty(\mathbb{R}_+, L^2(\Sigma)).$$

Soit $t' \in [0,T]$, puisque $\partial_t \|u_\epsilon\|^2 \leq 0$, on déduit que

$$\begin{aligned}\frac{d}{2dt}\|u_\epsilon(t)-u_\epsilon(t')\|^2 &\leq -2\operatorname{Re}(\partial_t u_\epsilon(t), u_\epsilon(t')) \\ &\leq (\|\Delta u_\epsilon\|_{L^\infty(0,T,H^{-1}(\Sigma))}\|u_\epsilon\|_{L^\infty(0,T,H^1(\Sigma))} + \lambda(\|u_\epsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R},L^1(\Sigma))} + \|u_\epsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R},L^2(\Sigma))})).\end{aligned}$$

En particulier,

$$\|u_\epsilon(t)-u_\epsilon(t')\|^2 \leq 2|t-t'|(\|\Delta u_\epsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R},H^{-1}(\Sigma))}\|u_\epsilon\|_{L^\infty(0,T,H^1(\Sigma))}+\lambda(\|u_\epsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R},L^1(\Sigma))}+\|u_\epsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R},L^2(\Sigma))})).$$

D'autre part, la suite u_ϵ est uniformément bornée dans $L^\infty(\mathbb{R}_+, H^1(\Sigma))$, et par la compacité de notre variété Σ, on déduit qu'il existe $C > 0$ tel que

$$\|u_\epsilon(t) - u_\epsilon(t')\|^2 \leq C|t-t'|^{1/2}.$$

En particulier, u_ϵ est uniformément bornée dans $C([0,T], L^2)$, qui est uniformément équicontinue de $[0,T]$ vers $L^2(\Sigma)$. Par l'injection de Sobolev $H^1(\Sigma) \subset L^2(\Sigma)$, on déduit que pour tout $t \in [0,T]$, l'ensemble $\{u_\epsilon(t) | 0 < \epsilon < 1\}$ est relativement compact dans L^2. Par le théorème de Ascoli-Arzelà, la suite u_ϵ est relativement compacte dans $C([0,T], L^2)$. Puisque u_ϵ converge vers u dans $L^\infty(\mathbb{R}, H^1(\Sigma))$ faiblement, on a, à sous-suite près,

$$u_\epsilon \to u \in C([0,T], L^2(\Sigma)).$$

À un terme près, on a pour $(t,x) \in [0,T] \times \Sigma$,

$$u_\epsilon \zeta(|u_\epsilon| + 1 + \epsilon)(t,x) \to u\zeta(|u|+1)(t,x).$$

Cela montre également que

$$V(t,x) = u\zeta(|u|+1)(t,x).$$

□

En fin, Soit $\phi \in C_c^\infty(]0,T[, H^1(\Sigma))$, on a

$$\langle -i\lambda u_\epsilon \zeta(|u_\epsilon|+1+\epsilon), \phi\rangle = \langle u_\epsilon, -i\partial_t \phi + \Delta\phi\rangle.$$

En passant à la limite, on déduit que

$$i\partial_t u + \Delta u = -i\lambda u\zeta(|u|+1)$$

dans $D'(\mathbb{R}_+^* \times \Sigma)$.

Perturbation with logarithme

Considérons maintenant l'équation suivante :

$$(E) : \begin{cases} iu_t + \Delta u + i\lambda u\zeta(|u|+1) + \mu u \log(|u|) = 0, \\ u(0,x) = u_0, \end{cases}$$

Nous souhaitons établir la théorie de Cauchy pour cette équation. En suivant la même méthode que dans la section précédente, nous considérons l'équation approximative suivante :

$$(E_\epsilon) : \begin{cases} iu_{\epsilon t} + \Delta u_\epsilon + i\lambda u_\epsilon \zeta(|u_\epsilon|+1+\epsilon) + \mu u_\epsilon \log(|u_\epsilon|+\epsilon) = 0, \\ u_\epsilon(0,x) = u_0, \end{cases}$$

En montrant l'unicité de la même façon, on a :

Proposition 6. *Soient $u_1, u_2 \in L^\infty(0,T;H^1(\Sigma))$ deux solutions de (E) (au sens des distributions). Si $\lambda > 0$, alors $u_1 = u_2$.*

De plus, remarquons que :

$$\|u_\epsilon\|_{L^2} \leq \|u_0\|_{L^2}, \quad \text{et} \quad \|\nabla u_\epsilon\|_{L^2} \leq e^{|t\mu|}\|\nabla u_0\|_{L^2}.$$

On en déduit que la suite $(u_\epsilon)_{0<\epsilon<1}$ est uniformément bornée dans $L^\infty(0,T;H^1(\Sigma))$. Ainsi, d'après le théorème de Banach-Alaoglu, en extrayant une sous-suite (que l'on note encore u_ϵ), il existe

$$u \in L^\infty(0,T;H^1(\Sigma))$$

tel que

$$u_\epsilon \rightharpoonup^* u \quad \text{dans} \quad L^\infty(0,T;H^1(\Sigma)).$$

De plus, à sous-suite extraite, la suite (u_ϵ) converge vers une fonction

$$u \in C(0,T;L^2(\Sigma)).$$

D'autre part, remarquons que

$$|u_\epsilon\zeta(|u_\epsilon|+1+\epsilon) + u_\epsilon\log(|u_\epsilon|+\epsilon)|^2 \leq 2\left(|u_\epsilon|^2+1\right) + \frac{1}{\delta}(|u_\epsilon|^{2-\gamma} + |u_\epsilon|^{2+\gamma}).$$

puisque Σ est compact par inégalité de Nirenberg [4]

$$\|u\|_{L^p(\Sigma)} \leq \|u\|_{L^2(\Sigma)}^{1-\theta}\|\nabla u\|_{L^2(\Sigma)}^{\theta} + \|u\|_{L^2(\Sigma)} \quad p = \frac{2d}{d-2\theta}, 0 \leq \theta < 1$$

On en déduit que la famille

$$(u_\epsilon\zeta(|u_\epsilon|+1+\epsilon) + u_\epsilon\log(|u_\epsilon|+\epsilon))_{0<\epsilon<1}$$

est uniformément bornée dans $L^\infty(0,T;L^2(\Sigma))$. Cela montre qu'il existe

$$V \in L^\infty(0,T;L^2(\Sigma))$$

tel que

$$u_\epsilon\zeta(|u_\epsilon|+1+\epsilon) + u_\epsilon\log(|u_\epsilon|+\epsilon) \rightharpoonup^* V \quad \text{dans} \quad L^\infty(0,T;L^2(\Sigma)).$$

En reprenant le raisonnement du lemme 5, on déduit que

$$V(t,x) = (u\zeta(|u|+1) + u\log(|u|))(t,x) \quad \text{presque partout dans } [0,T]\times\Sigma.$$

Appendice : Inégalités sur la fonction zêta

Lemma 7. *Pour tout $x > 1$, on a :*

$$\frac{1}{x-1} \leq \zeta(x) \leq \frac{1}{x-1} + 1$$

Proof. On rappelle que pour toute fonction continue décroissante, on a :

$$f(n) \leq \int_{n-1}^{n} f(x)\,dx \leq f(n-1)$$

On applique cette remarque à la fonction $f(x) = \frac{1}{n^x}$ qui est décroissante pour $x > 1$. $\square$

Lemma 8. *Il existe $C > 0$ tel que pour tout $x > 1$:*

$$|\zeta'(x)| \leq C \int_1^\infty \frac{\ln(z)}{z^x}\, dz$$

En particulier :

$$|\zeta'(x)| \leq \frac{C}{(x-1)^2}$$

Proof. On applique la même astuce que dans la preuve précédente, sauf qu'ici $f(x) = \frac{\ln(x)}{n^x}$ n'est pas décroissante sur $]1, 2]$.

On a :

$$|\zeta'(x)| \leq \frac{\ln(2)}{2^x} + \int_2^\infty \frac{\ln(z)}{z^x}\, dz$$

Par ailleurs, pour $z \in]1, 2[$, on a :

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2^x}{z^x} = \infty$$

Donc, par définition de la limite :

$$\exists B > 0, \forall x > B, \int_1^2 \frac{\ln(z)}{z^x}\, dz \geq \frac{\ln(2)}{2^x}$$

Pour $x \in]1, B]$, il existe $C_B > 0$ tel que :

$$C_B \int_1^2 \frac{\ln(z)}{z^x}\, dz \geq \frac{\ln(2)}{2^x}$$

En posant $C = \max(1, C_B)$, on obtient :

$$|\zeta'(x)| \leq C \int_1^\infty \frac{\ln(z)}{z^x}\, dz$$

□

Remark 2. *Pour tout $\epsilon > 0$ et tout $z \geq 1$, on a :*

$$\ln(z) \leq \frac{1}{\epsilon} z^\epsilon$$

Donc en particulier :

$$|\zeta'(x)| \leq \frac{1}{\epsilon} \cdot \frac{1}{x - \epsilon - 1}$$

pour tout $x > \epsilon + 1$.

Remark 3. *On a aussi*

$$|\zeta'(x)| \leq \frac{1}{(x-1)^2} + 1$$

Lemma 9. *Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $x, y > 0$, on a :*

$$|\zeta(x+1) - \zeta(y+1)| \leq C \frac{|x-y|}{xy}$$

Proof. On a :

$$\begin{aligned}|\zeta(x+1)-\zeta(y+1)| &= \left|\int_x^y \zeta'(s+1)\,ds\right| \\ &\leq C\left|\int_x^y \frac{1}{s^2}\,ds\right| \\ &\leq C\frac{|x-y|}{xy}\end{aligned}$$

□

Lemma 10. *Il existe une constante $C>0$ telle que, pour tout $x,y>0$, et tout $\epsilon,\delta>0$, on a :*

$$|x\zeta(x+1+\epsilon)-y\zeta(y+1+\delta)| \leq C\frac{|x-y|+|\epsilon-\delta|}{\min(x,y)}$$

Proof.

$$\begin{aligned}|x\zeta(x+1+\epsilon)-y\zeta(y+1+\delta)| &= \left|\int_0^1 \frac{d}{dt}\left((tx+(1-t)y)\zeta(t(x+\epsilon)+(1-t)(y+\delta)+1)\right)dt\right| \\ &\leq \left|\int_0^1 (x-y)\zeta(t(x+\epsilon)+(1-t)(y+\delta)+1)\,dt\right| \\ &\quad+\left|\int_0^1 (tx+(1-t)y)(x-y+\epsilon-\delta)\zeta'(t(x+\epsilon)+(1-t)(y+\delta)+1)\,dt\right| \\ &\leq \frac{|x-y|}{\min(x,y)}+C\frac{|x-y|+|\epsilon-\delta|}{\min(x,y)}\end{aligned}$$

□

Lemma 11. *Pour tout $\epsilon \geq 0$, la fonction*

$$x \to x\zeta(x+1+\epsilon)$$

est croissante sur $\mathbb{R}_{>0}$

Proof.

□

References

[1] Masayuki Hayashi and Tohru Ozawa, The Cauchy Problem for the Logarithmic Schrödinger Equation Revisited `https://arxiv.org/pdf/2309.01695`

[2] Thierry Cazenave, Semilinear Schrodinger equations,Providence, RI : American Mathematical Society ; New York, N.Y. : Courant Institute of Mathematical Sciences, New York University,2003

[3] Rémi Carles, Clément Gallo, Finite time extinction by nonlinear damping for the Schrodinger equation `https://hal.science/hal-00496616v2/document`

[4] L. Nirenberg, On elliptic partial differential equations, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3), 13 (1959), pp. 115–162