

三次元渦度方程式の一次元モデル De Gregorio 方程式 の数値的研究

佐藤英樹 坂上貴之
北海道大学大学院理学研究院

Numerical study of De Gregorio's model for the 3-D vorticity equation
Hideki SATO and Takashi SAKAJO,
Department of Mathematics, Hokkaido University

Abstract. It is quite difficult to show the existence and uniqueness of solution for the 3-D Navier-Stokes equations. The difficulty arises from the quadratic two nonlinear terms, the vortex stretching term and the convection term. In order to see how these two terms affect the existence of the solution, De Gregorio proposed a 1-D model equation for the 3-D vorticity equation. However, in spite of its simple formulation, mathematical analysis of the model is not so easy. Thus, in this article, we investigate the model equation by numerical means, and discuss the property of the solution.

1. はじめに

三次元空間における非圧縮流体の運動を記述する Navier-Stokes 方程式は以下で与えられる.

$$(1.1) \quad \frac{D\vec{u}}{Dt} = \nu \Delta \vec{u} - \nabla p, \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^3, \quad t > 0,$$

$$(1.2) \quad \operatorname{div} \vec{u} = 0.$$

ここで, $\vec{u}(\vec{x}, t)$ は時刻 t における点 \vec{x} での三次元流速ベクトル関数, $p(\vec{x}, t)$ は圧力と呼ばれるスカラ関数, ν は粘性係数である. また, 微分作用素 $\frac{D}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla$ は物質微分である. この方程式の解の存在およびその一意性, 適切性については未解決であり, 数理科学上の重要な問題の一つとして現在も活発に研究がすすめられている.

Navier-Stokes 方程式の両辺の rot をとると,

$$(1.3) \quad \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{\omega} = (\vec{\omega} \cdot \nabla) \vec{u} + \nu \Delta \vec{\omega},$$

が得られる. ここで, $\vec{\omega} = \operatorname{rot} \vec{u}$ は渦度と呼ばれる量であり, 式 (1.3) を渦度方程式と呼ぶ. この方程式は速度場と渦度の二つの量によって記述されているが, 実際には渦度 $\vec{\omega}$ について閉じた方程式である. すなわち, 速度場 \vec{u} と渦度 $\vec{\omega}$ の間には $\operatorname{div} \vec{u} = 0$ と $\operatorname{rot} \vec{u} = \vec{\omega}$ から Biot-Savart の法則により以下の関係が成立している.

$$(1.4) \quad \vec{u}(\vec{x}, t) = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{(\vec{x} - \vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|^3} \times \vec{\omega}(\vec{y}, t) d\vec{y}.$$

式 (1.3) の右辺に (1.4) を代入すると, 渦度方程式は,

$$(1.5) \quad \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + (\vec{u}(\vec{\omega}) \cdot \nabla) \vec{\omega} = D(\vec{\omega}) \vec{\omega} + \nu \Delta \vec{\omega},$$

と書ける。ただし、 D は ω に対する Biot-Savart 作用素 (1.4) の微分として定義される特異積分作用素である。この方程式の中には二つの非線形項が含まれており、一つは渦の引き伸ばし項 (vortex stretching) と呼ばれる $D(\vec{\omega})\vec{\omega}$ であり、もう一つは移流項と呼ばれる $(\vec{u} \cdot \nabla)\vec{\omega}$ である。このうち渦の引き伸ばし項が、渦度方程式の解の存在を示す上で重要な役割を果たすと考えられている。というのも、 $\nu = 0$ とした非粘性流体の運動を記述する Euler 方程式において解が爆発するための十分条件は、渦度の大きさが発散する [1] ことであり、それは渦度の成長に関わる引き伸ばし項によって起こる変化だからである。また、二次元の Navier-Stokes 方程式ではこの引き伸ばし項が 0 となることが解の存在や一意性が保証する上で本質的役割を果たしており、この点から見てもその指摘は妥当である。

そこで三次元渦度方程式の困難さの本質を簡単な一次元モデルから探るために Constantin らは、この渦度の引き伸ばし項を特徴づける特異作用素 $D(\vec{\omega})$ が一次元の特異作用素である Hilbert 変換

$$(1.6) \quad H(\omega) \equiv \frac{1}{\pi} \text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega(y)}{x-y} dy$$

とある意味で同様の性質を持つことに着目して、以下の一次元の方程式を提唱した [2].

$$(1.7) \quad \frac{\partial \omega}{\partial t} = \omega H(\omega), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0.$$

この方程式は提唱者の名前を冠して CLM 方程式と呼ばれている。ここで、考えているスカラ関数 ω は厳密な意味での物理量との対応はないが、三次元渦度の符号付き大きさと見なすことができる。彼らはこの方程式の一般解を得て、それらの解が多く初期値に対して有限時間で爆発することを示した。これにより渦の引き伸ばしによる三次元 Euler 方程式の爆発機構を再現するモデルとして注目された。

しかし、その後、CLM 方程式の限界も指摘されるようになった。まず、Schochet[11] は CLM 方程式の自然な Navier-Stokes 方程式への拡張として粘性項を付け加えた

$$(1.8) \quad \frac{\partial \omega}{\partial t} = \omega H(\omega) + \nu \omega_{xx}$$

を考え、その一般解を得た。それによると方程式 (1.8) の解が $\nu > 0$ でも爆発することがあるということ、さらにそれらの解が粘性がない $\nu = 0$ の場合の解よりも速く爆発することがあるということを示唆した。また方程式 (1.8) では、 ω が爆発する時に、そこから定義される“速度” u も同時に爆発することもわかるので、これは、三次元 Navier-Stokes 方程式において知られている事実 [1] にも反する。

また、Sakajo[9, 10] は、三次元と一次元の拡散項の対応が不明であるということから、拡散項を一般化した CLM 方程式

$$(1.9) \quad \frac{\partial \omega}{\partial t} = \omega H(\omega) - \nu(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} \omega$$

を考え、その解の性質を数学解析により調べた。それによると、全ての $\alpha \in \mathbb{R}$ に対し、爆発解が存在することがわかる。すなわち、二次の非線形項 $\omega H(\omega)$ が極めて強い非線形性を持っているため、どんなに大きなオーダーの粘性を入れても解の爆発を止められないということを意味している。これは Navier-Stokes 方程式では $\alpha > \frac{5}{2}$ に対して解が時間大域的に存在するという事実 [6] と一致しない。

以上の事実を受けて、三次元渦度方程式の解 $\vec{\omega}$ の存在について議論するためには (1.3) におけるもう一つの非線形項 $(\vec{u} \cdot \nabla) \vec{\omega}$ の効果もとりいれる必要がある。従来、移流項は渦度の成長には寄与しないので、Navier-Stokes 方程式の解の存在については重要な役割を果たさないと考えられていたが、近年その重要性を指摘する結果も報告されている [8]。そこで、CLM 方程式に対して移流項を組み込んだ次のような一次元 De Gregorio モデルを考える [3]:

$$(1.10) \quad \frac{\partial \omega}{\partial t} + u \omega_x = \omega H(\omega) + \nu \omega_{xx}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0.$$

理由は後述するが速度場 u は次のように定義される:

$$(1.11) \quad u(x, t) = H(\Omega)(x, t)$$

ここで、 $\Omega(x, t)$ は、

$$(1.12) \quad \Omega(x, t) = \int_{-\infty}^x \omega(y, t) dy$$

で与えられる関数である。

この方程式の解析的扱いは三次元渦度方程式ほどではないにせよ簡単でなく、その大域解の存在などもわかっていない。そこで、本論文では、この一次元 De Gregorio 方程式 (1.10) を数値計算によって調べ、今後解析によって示すべき性質を明らかにする。まず第 2 章で一次元モデルについて知られている事実について述べる。第 3 章で数値計算方法について説明した後、第 4 章では数値計算結果について粘性のない場合とある場合の双方について提示する。最後の章では結果に対する考察を加える。

2. 一次元のモデルについて知られている結果

この章では、CLM 方程式および De Gregorio モデルについて知られている事実を簡単に説明する。まず、初期値 $\omega(x, 0) = \omega_0(x)$ に対する CLM 方程式 (1.7) について、Constantin らは次を示した [2]。

定理 1 $\omega_0(x)$ が滑らかかつ $|x| \rightarrow \infty$ で十分速く減衰するとする ($\omega_0 \in H^1(\mathbb{R})$ であれば十分)。この時、方程式 (1.7) の解は次で与えられる。

$$(2.1) \quad \omega(x, t) = \frac{4\omega_0(x)}{(2 - t H\omega_0(x))^2 + t^2 \omega_0^2(x)}.$$

定理 1 から爆発点の集合について次の系が直ちに導かれる。

系 2 方程式 (1.7) の解が爆発するための必要十分条件は

$$(2.2) \quad Z = \{ x \mid \omega_0(x) = 0 \text{ かつ } H(\omega_0)(x) > 0 \}$$

である。さらに $\lim_{t \rightarrow T} \|\omega(x, t)\|_{L^\infty} \rightarrow \infty$ 。ただし $T = 2/M$, $M = \sup\{H(\omega_0)(x) \mid x \in Z\}$ 。

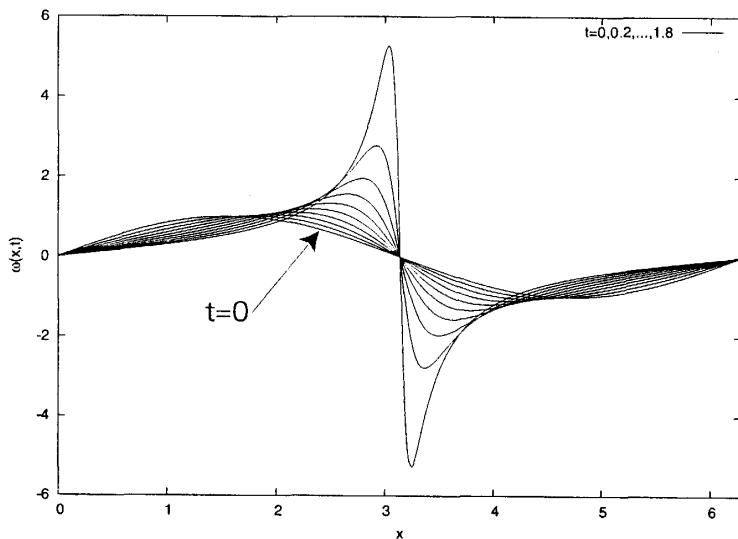


Fig. 1: Solution of the CLM equation (1.7) for the initial data, $\omega_0(x) = \sin x$.

Fig.1 は、初期条件を $\omega_0(x) = \sin x$ として、(1.7) 式の解を定理 1 を用いて $t = 0, 0.2, \dots, 1.8$ に対して描いたものである。この解は定理 1 から、 $t \nearrow 2$ のとき、 $x = \pi$ の近傍で爆発する。

イントロダクションで述べたように CLM 方程式に粘性項をつけた方程式と三次元 Navier-Stokes 方程式の解の構造について様々な齟齬があることを受け、De Gregorio[3] は CLM 方程式の以下の欠点を指摘した：一つは、CLM 方程式では移流項を無視しているが、この項は残しておくべきであるという点である。もう一つは渦度から速度の定義の仕方が良くないという点である。つまり、CLM 方程式では u の定義として $u(x, t) = \Omega(x, t)$ を採用しており、この時 $\omega = \frac{\partial u}{\partial x}$ となるが、 $\frac{\partial}{\partial x}$ は三次元での ∇ に対応していると考えるのが自然であり、渦度方程式によれば、CLM 方程式で $\nabla \bar{u}$ に相当するのは ω ではなく $H(\omega)$ である。よって一次元のモデルでも $\frac{\partial u}{\partial x} = H(\omega)$ となっている方が良いということである。

以上の点を踏まえ考慮されたのが方程式 (1.10) である。本論文では境界条件は単純に周期境界条件を課す。すなわち以下が考える方程式である。

$$(2.3) \quad \begin{cases} \frac{\partial \omega}{\partial t} + u\omega_x = \omega H(\omega) + \nu\omega_{xx}, & x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ u(x, t) = H(\Omega)(x, t), & \Omega(x, t) = \int_0^x \omega(y, t) dy, \\ \omega(x, t) = \omega(x + 2\pi, t), \\ \omega(x, 0) = \omega_0(x). \end{cases}$$

実は、このままでは解に一つ条件が足りないが、後述するように解には原点対称性を課す。なお、周期境界条件でなく無限遠方での境界条件を課した時には、進行波解が存在することなども示されている [4]。

最後に方程式 (2.3) の解について既に知られている性質 [3] を述べておく。まず、粘性がない $\nu = 0$ の時、 $\sin nx$ や $\cos nx$ は方程式 (2.3) の定常解である。これらは CLM 方程式 (1.7) では Fig.1 のように爆発する解であり、この点で移流項は渦の引き伸ばしによる渦度の爆発を抑える効果がある。また、粘性がある $\nu > 0$ の場合には $e^{-\nu n^2 t} \sin nx$ や $e^{-\nu n^2 t} \cos nx$ が方程式 (2.3) の厳密解となるが、これは粘性の存在によって、粘性のない場合の定常解 $\sin nx$ や $\cos nx$ が単調に 0 に減衰する解となることを示している。

3. 数値計算方法

本論文では数値計算法として擬スペクトル法 [5] を用いる。非線形項は以下のように計算する。まず $\omega H(\omega)$ については、解 $\omega(x, t)$ が以下のような Fourier 級数展開できると仮定する。

$$(3.1) \quad \omega(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \omega_n(t) e^{inx}, \quad \omega_n(t) \in \mathbb{C}.$$

このとき、 ω の Hilbert 変換は次のようにになる [7]:

$$(3.2) \quad H(\omega) = - \sum_{n=-\infty}^{\infty} i \operatorname{sgn}(n) \omega_n(t) e^{inx}.$$

ここで、 $\operatorname{sgn}(n)$ は、

$$(3.3) \quad \operatorname{sgn}(n) = \begin{cases} 1 & \text{if } n > 0, \\ 0 & \text{if } n = 0, \\ -1 & \text{if } n < 0 \end{cases}$$

である。この時 $\omega H(\omega)$ は、

$$(3.4) \quad \begin{aligned} \omega H(\omega) &= \left(\omega_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\omega_n e^{inx} + \omega_{-n} e^{-inx}) \right) \left(-i \sum_{n=1}^{\infty} (\omega_n e^{inx} - \omega_{-n} e^{-inx}) \right) \\ &= - \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(i \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k \omega_{n-k} \right) e^{inx} - \left(i \sum_{k=0}^{n-1} \omega_{-k} \omega_{-n+k} \right) e^{-inx} \right\} \end{aligned}$$

と計算できるので、渦の引き伸ばしに対応する非線形項のモード n の Fourier 係数は、低次モードの係数の有限和で表現される。

次に移流項 $u\omega_x$ のスペクトル表現を考える。原点対称な解 $\omega_n(t) + \omega_{-n}(t) = 0$ を考えるのを $\omega_0(t) = 0$ に注意すると $\Omega(x, t)$ は、

$$(3.5) \quad \Omega(x, t) = \int_0^x \omega(y, t) dy = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{1}{in} \omega_n(t) (e^{inx} - 1).$$

よって、これに Hilbert 変換を施して $u(x, t)$ は

$$(3.6) \quad u(x, t) = H(\Omega)(x, t) = - \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{1}{n} \operatorname{sgn}(n) \omega_n(t) e^{inx}$$

となる。この二つの積を計算して得られる各 e^{inx} の係数は無限和となるので、移流項のスペクトル表現を解析的に与えて計算することは不可能である。そこで、この係数は離散 Fourier 変換によって求める。具体的に Fourier 係数 $\widehat{v\omega_x}$ を数値計算で求めるには以下の手順で行う：

1. 与えられた区間 $[0, 2\pi]$ を J 等分した点 $x_j = 2\pi/J$ での u および ω_x の近似値は渦度の離散 Fourier 係数 ω_n , ($n = -N, -N+1, \dots, N$) から、以下のように計算する。

$$u_j = - \sum_{n=-N}^N \frac{1}{n} \operatorname{sgn}(n) \omega_n e^{inx_j}, \quad (\omega_x)_j = \sum_{n=-N}^N i n \omega_n e^{inx_j}.$$

2. 次に実空間での関数値の積を計算する. $(u\omega_x)_j = u_j(\omega_x)_j, (j = 0, 1, \dots, J-1)$.
3. 上で得られた積から離散 Fourier 変換により Fourier 係数を求める.

$$(\widehat{u\omega_x})_n = \frac{1}{J} \sum_{j=0}^{J-1} (u\omega_x)_j e^{-inx_j} \quad (n = -N, -N+1, \dots, N).$$

このようにして求めた移流項の Fourier 係数 $(\widehat{u\omega_x})_n$ を用いて以下の常微分方程式を 4 段 4 次の Runge-Kutta 法によって解く.

$$(3.7) \quad \begin{cases} \frac{d\omega_n}{dt} = -\nu n^2 \omega_n - i \sum_{k=1}^{n-1} \omega_k \omega_{n-k} - (\widehat{u\omega_x})_n, \\ \frac{d\omega_0}{dt} = 0, \\ \frac{d\omega_{-n}}{dt} = -\nu n^2 \omega_{-n} + i \sum_{k=1}^{n-1} \omega_{-k} \omega_{-n+k} - (\widehat{u\omega_x})_{-n}. \end{cases}$$

なお、初期において原点対称性 $\omega_n(0) + \omega_{-n}(0) = 0$ を課すと、この関係は時間変化とともに変化せず $\omega_n(t) + \omega_{-n}(t) = 0$ となるので、実際には正モードの方程式だけを解けばよい。また、本論文の数値計算では区間分割数 J はエイリアスエラーを避けるため十分大きくとるものとし、 $J \geq 3N+1$ となるような N までのデータをとる。さらに、高速 Fourier 変換 (FFT) を用いるため、 $J = 2^m (m \in \mathbb{N})$ の形で選ぶものとし、与えられた Fourier 係数 a_k に対しては、

$$(3.8) \quad \hat{a}_k = \begin{cases} a_k & (|k| \leq N/2), \\ 0 & (N/2 < |k| \leq J/2), \end{cases}$$

という新たな \hat{a}_k を採用して計算する。なお、本計算では $N = 1200, J = 4096$ とした。

4. 数値計算結果

4.1 粘性がない ($\nu = 0$) 場合

粘性のない ($\nu = 0$) 場合は、任意の大きさに対する单一モード解 $\sin nx$ は方程式 (2.3) の定常解になるので、時間発展を見るためには二つの Fourier モードによる複合モードを持つ初期値を考える必要がある。Fig.2 は初期値 $\omega_0(x) = \sin x + \varepsilon \sin 2x$ で $\varepsilon = 0.2$ としたときの時間発展である。Fig.2(a) は横軸を x とし、解 $\omega(x, t)$ の時間変化を $t = 0, 2, \dots, 10$ について描いたものである。解は時間発展とともに減少しある定常解 $0.6 \sin x$ に漸近しているように見える。 $(\sin x)$ の係数がなぜ 0.6 であるかについては、後で議論する。一方、Fig.2(b) は Fourier 係数の絶対値 $|\omega_n(t)|$ の時間変化を表したものである。グラフは横軸に n をとり、両対数プロットで表示している。時間が $t = 8$ を過ぎるあたりから大きな n に対するグラフの傾きがほぼ直線 $n^{-1.5}$ に添っているように見える。そこでその傾きの大きさ、すなわち $\{\log |\omega_{n+1}(t)| - \log |\omega_n(t)|\} / \{\log(n+1) - \log n\}$ を各 n に対し $t = 10$ の時に計算したものが Fig.2(c) である。この図によると、傾きが n によらず、およそ -1.5 に添っているように見える。これは、時刻 $t = 10$ 付近において Fourier 係数の主要項が $|\omega_n(t)| \approx n^{-1.5}$ に漸近していること

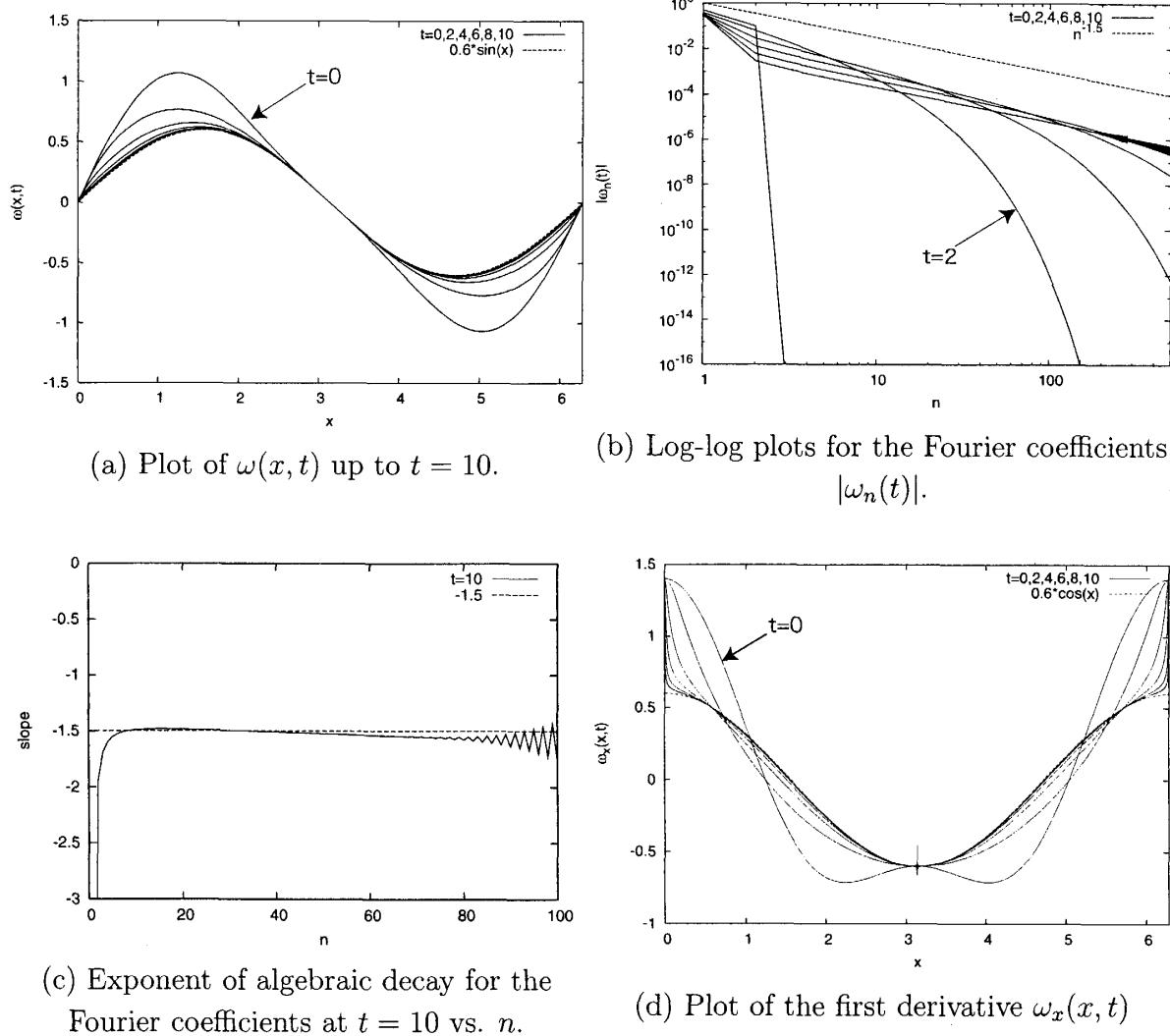


Fig. 2: Solution of De Gregorio equation (2.3) with $\nu = 0$ when the initial data is given by $\omega_0(x) = \sin x + 0.2 \sin 2x$.

を意味している。すなわち, Fig.2(a) で一見解が滑らかなように見えるが、実はある有限時刻で一階微分に特異性が出ていることを示唆している。そこで解の一階微分 $\omega_x(x, t)$ の時間発展を Fig.2(d) に示す。この図から次のことがわかる:

1. $x = 0, \pi$ では $\omega_x(x, t)$ の値は不变。
2. $x = 0$ を除く部分では、 $\omega_x(x, t)$ は $0.6 \cos x$ に漸近する。
3. ある有限時刻があって、 $x = 0$ の近傍で $\omega_x(x, t)$ が“一点”不連続になる。すなわち、解に不連続性が現れる時刻を t^* とするとき

$$\lim_{x \rightarrow -0} \omega_x(x, t^*) = \lim_{x \rightarrow +0} \omega_x(x, t^*) \neq \omega_x(0, t^*) < \infty.$$

最初の事実は以下の簡単な命題より示すことができる。

命題 3 初期値 $\omega_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin nx$, 粘性なし ($\nu = 0$) の De Gregorio 方程式 (2.3) の滑らかな解は任意の時刻に対して $\omega_{xt}(0, t) = \omega_{xt}(\pi, t) = 0$.

証明. 原点対称な解を考えるので、方程式の解が以下のように級数展開されているとしてよい。

$$(4.1) \quad \omega(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n(t) \sin nx.$$

ただし、 $p_n(t)$ は十分早く減衰して、滑らかとする。一方、 $\nu = 0$ に対する De Gregorio の方程式の両辺を x で微分すると、 $H(\omega) = v_x$ より

$$(4.2) \quad \omega_{xt} = -u\omega_{xx} + \omega H(\omega_x)$$

を得る。この時、解 $\omega(x, t)$ が (4.1) 式で表されているので、

$$(4.3) \quad \omega_{xx} = - \sum_{n=1}^{\infty} n^2 p_n(t) \sin nx, \quad u = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} p_n(t) \sin nx, \quad H(\omega_x) = \sum_{n=1}^{\infty} np_n(t) \sin nx,$$

となり (4.2) の右辺は $x = 0, \pi$ ですべて 0 となる。よって、 $x = 0, \pi$ で $\omega_{xt}(0, t) = \omega_{xt}(\pi, t) = 0$ を得る。□

上の証明と全く同様にして、次がわかる:

系 4 初期値 $\omega_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_{qn} \sin qnx$, $q = 2, 3, \dots$ のとき、 $\nu = 0$ に対する De Gregorio 方程式 (2.3) の解は次を満たす。

$$(4.4) \quad \omega_{xt} \left(\frac{k\pi}{q}, t \right) = 0, \quad t \geq 0, \quad k \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}.$$

これは初期値を構成する Fourier モードの最大公約数モードの 0 点に対応する x において $\omega_x(x, t)$ の値が不变であることを示している。この事実に基づいて解の漸近形について考察すると次のようになる: 特異時刻に近づくと、 $x = 0$ の近傍での一階微分の連続性が破れる一方で、 $x = \pi$ 近傍の連続性は維持される。したがって、 $\omega_x(x, t)$ の漸近形が $\alpha \cos x$ の形になるとすれば、 $x = \pi$ での値が $\omega_x(\pi, 0)$ と一致する。このことから、 $\alpha = |\omega_x(\pi, 0)| = 0.6$ を得る。

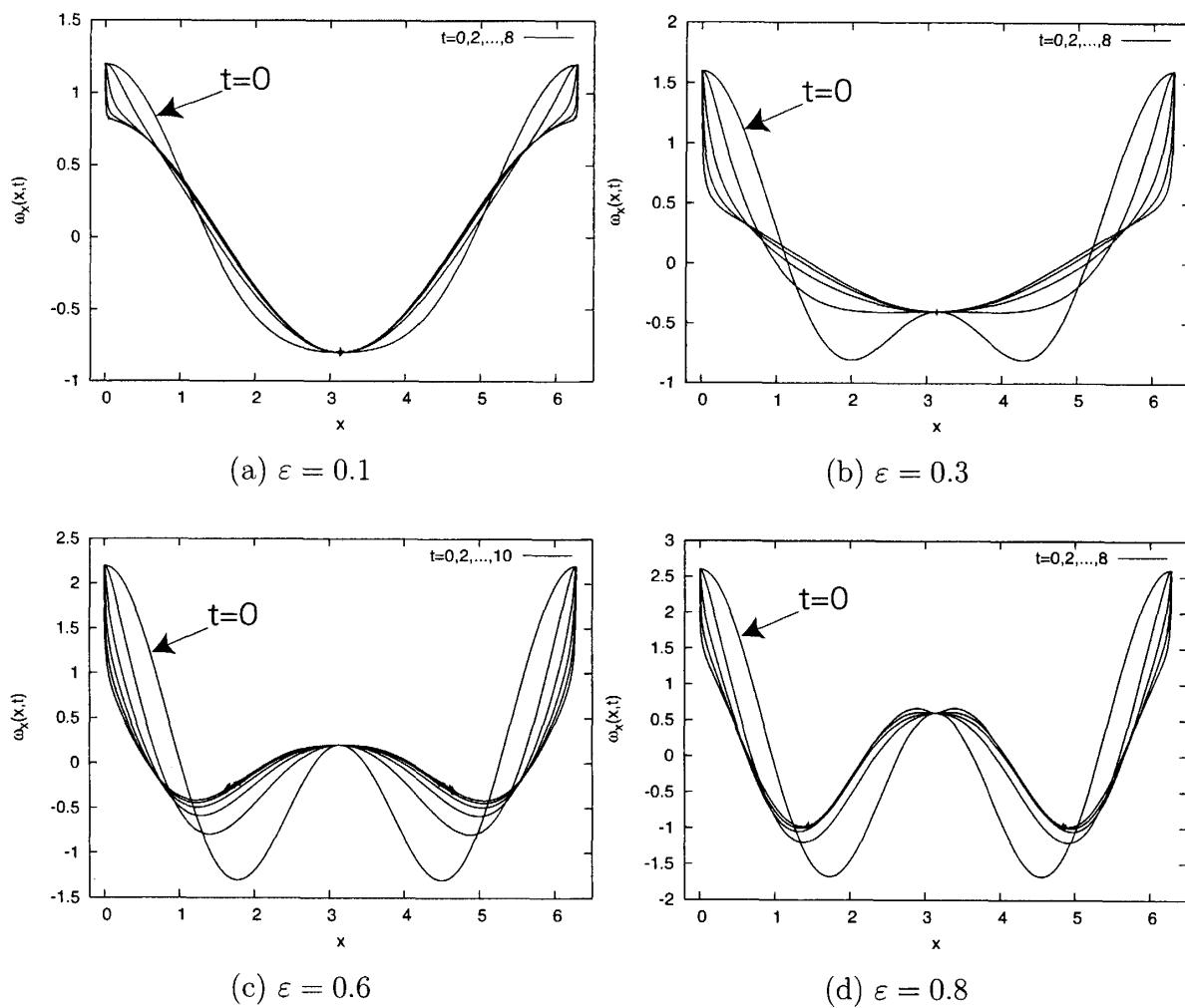
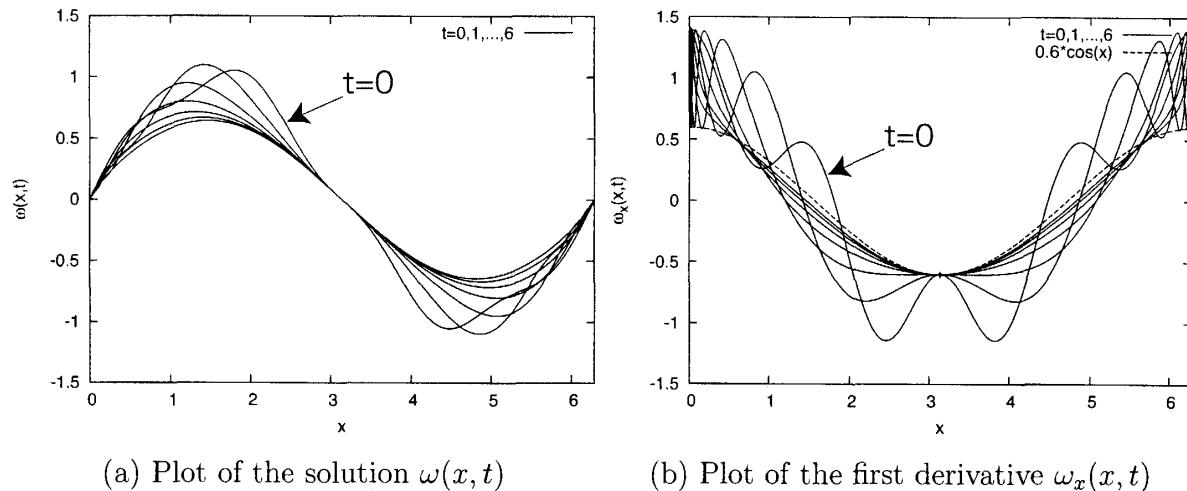
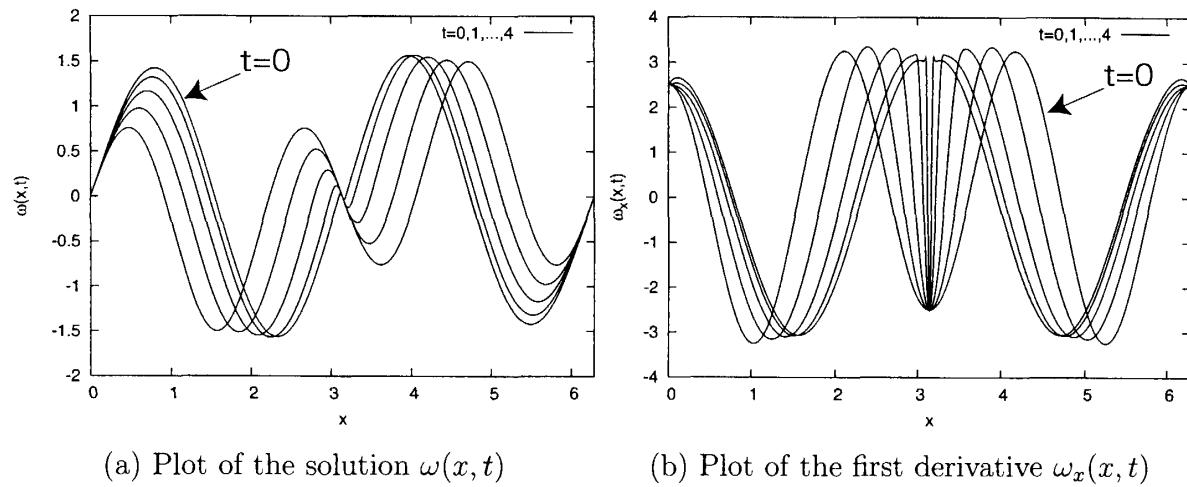


Fig. 3: First derivative $\omega_x(x, t)$ for the initial data, $\omega_0(x) = \sin x + \varepsilon \sin 2x$ with various ε .

Fig. 4: Numerical solution of (2.3) with $\nu = 0$ for the initial data, $\omega_0(x) = \sin x + 0.1 \sin 4x$.Fig. 5: Solution of (2.3) with $\nu = 0$ for the initial data, $\omega_0(x) = -0.5 \sin x + \sin 3x$.

次に, $\omega_0(x) = \sin x + \varepsilon \sin 2x$ において, $\varepsilon = 0.1, 0.3, 0.6$ および 0.8 に対する解の一階微分の時間発展の様子を Fig.3 に示す. $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ の時, $\varepsilon = 0.2$ のときと同様の $x = 0$ に不連続点をもつモード 1 の定常解へ漸近的の振舞いが見られた. 一方, $\varepsilon > \frac{1}{2}$ の時は振舞が若干異なる. すなわち, $\varepsilon = 0.6$ の時は $x = 0$ に不連続点を持つモード 2 の解が漸近形であるが, $\varepsilon = 0.8$ の時は $x = 0$ に不連続点を持つモード 2 の解が漸近形となっている. この場合は不連続点が二箇所で発生するためどのような振幅が選ばれるかについては $x = \pi$ での値から決定することができない.

次に, 他の複合モードを持つ初期値を与えた場合の解の様子を見る. Fig.4 と Fig.5 は, それぞれ初期値 $\omega_0(x) = \sin x + 0.1 \sin 4x$ と $\omega_0(x) = -0.5 \sin x + \sin 3x$ に対する数値解とその一階微分の時間発展の様子を示したものである. いずれの場合も解の一階微分は $x = 0$ あるいは $x = \pi$ に不連続点を生成しながら单一定常解モード (前者の場合はモード 1, 後者の場合はモード 2) に漸近していく. その特異性の生成の仕方も様々である. Fig.4 の場合, 一階微分の高次のモードが $x = \pi$ を中心して左右に“移流”して, 特異性生成時刻付近では $x = 0$ の近傍で非常に激しく振動している. 一方で, Fig.5 の場合は時間発展とともに $x = \pi$ に一階微分が“移流”してモード 2 の解に漸近している. 同時に Fig.5(a) を見ると, $x = \pi$ での傾きは保存

されている(一階微分の保存から明らか)ものの、その近傍にある極大・極小点がその値の差を縮めながら $x = \pi$ に漸近し、最後には $x = \pi$ で一致する。このことからこの特異性は引き伸ばし項による渦度の成長だけではなく、移流項の効果も寄与していると考えられる。

4.2 粘性のある ($\nu > 0$) 場合の数値解

粘性がある ($\nu > 0$) 場合の解を調べる。まず、粘性の効果を見るために前節の Fig.5 の時と同じ初期値 $\omega_0(x) = -0.5 \sin x + \sin 3x$ に対する数値解を Fig.6 に示す。粘性係数は $\nu = 0.02$ である。Fig.6(a) によれば解は $\nu = 0$ の時と同様、時間発展とともにモード 2 が卓越する漸近形に近付く一方で、 $x = 0$ や $x = \pi$ での一階微分は保存されないので、その付近での解の傾きは一定でない。実際、Fig.6(b) にあるように $x = 0$ および $x = \pi$ における一階微分 ω_x の値は一定でなく不連続点も生じていない。次に、この解の各時刻における Fourier 係数の大きさ $|\omega_n(t)|$ の分布を Fig.6(c) に示す。ただし、 $\nu = 0$ の場合と違い、片対数プロットで表示している。このグラフより、解の Fourier 係数は指数関数的に減少しており、解は滑らかであり続けることがわかる。このことから、粘性のある場合は時間大域解の存在が示唆される。さらに、長時間の解の振舞いを見るため Fig.6(d) に $|\omega_1(t)|$, $|\omega_2(t)|$ および $|\omega_3(t)|$ の $t = 200$ までの時間発展を示す。同時に指数関数 $e^{-\nu n^2 t}$ のグラフも示している。これによると、最初は $\omega_2(t)$ 以外のモードが速く減衰する一方で、 $\omega_2(t)$ は $e^{-4\nu t}$ にほぼ比例する割合で減衰している。しかし、さらに長時間経過後 $\omega_1(t)$ の減衰が遅くなり、 $e^{-\nu t}$ に比例する割合で減衰するようになる。そして最後には $\omega_1(t)$ が $\omega_2(t)$ を超越する。つまり解がモード 1 の De Gregorio 方程式の厳密解 $e^{-\nu t} \sin x$ に漸近し、最初は非線形項の影響が強かった解が、十分時間経過とともに線形項の影響が強くなり、解が熱方程式の解のように振舞う。

Fig.7 は、初期値を上と同じく $\omega_0(x) = -0.5 \sin x + \sin 3x$ とした時の解の一階微分の ω_x の $t = 4$ での様子を $\nu = 0, 0.01, 0.05, 0.1$ のそれぞれに対して描いたものである。粘性係数が大きくなるに連れて、 $\nu = 0$ において見られた特異性がなくなるとともに、高次モードの減衰が促進され、よりモード 2 の卓越が早く起こっている。

最後に、解に時間大域解が存在するかどうかについての傍証を得る意味で、初期値として Fourier 係数を乱数によりランダムに与えてみる。典型的な解の様子は Fig.8(a) のようなものである。この図では、ランダムノイズのような初期値が、序々に $\sin 2x$ のような形になり、最後には $\sin x$ のような波形になっている。また、Fig.8(b) と (c) は $|\omega_n(t)|$ の時間変化の様子を示している。Fig.8(b) では横軸に n を取って、いくつかの t に対して片対数でプロットしたものである。時間が経つと、高次のモードは急速に減衰していることを示している。また、Fig.8(c) には、横軸に t を取り、 $|\omega_1(t)|, \dots, |\omega_5(t)|$ の時間変化を表しているが、低次モード $|\omega_1(t)|$ の減衰は $e^{-\nu t}$ にほぼ比例している。別の例として、Fig.9 は初期値の Fourier 係数を $A_1 = 0, n \geq 2$ とに対して A_n をランダムに与えた時の解のモード 1 からモード 3 の Fourier 係数の時間発展を示している。初期においてモード 1 は値を持たないにもかかわらず、方程式の非線形効果により値が増大し、その後は高次のモードは急速に減衰する一方で、このモード 1 が卓越して、厳密解に漸近することがわかる。他の例についても調べたが $\nu > 0.01$ ぐらいにおいては全て同様の高次モードの急減衰および低次モードの卓越とモード 1 の厳密解への漸近という結果が得られた。

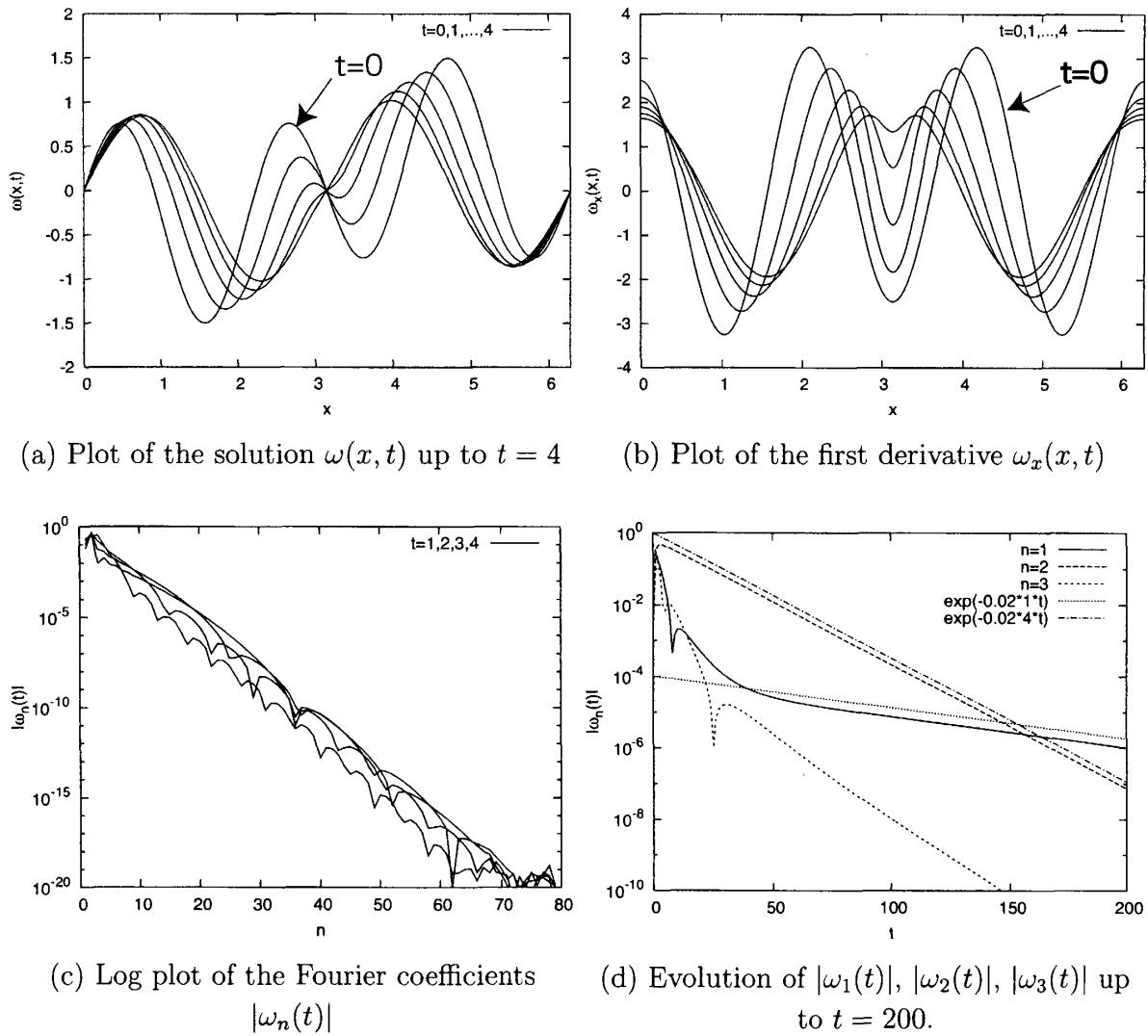


Fig. 6: Numerical solution of (2.3) with $\nu = 0.02$ for the initial data $\omega(x, 0) = -0.5 \sin x + \sin 3x$.

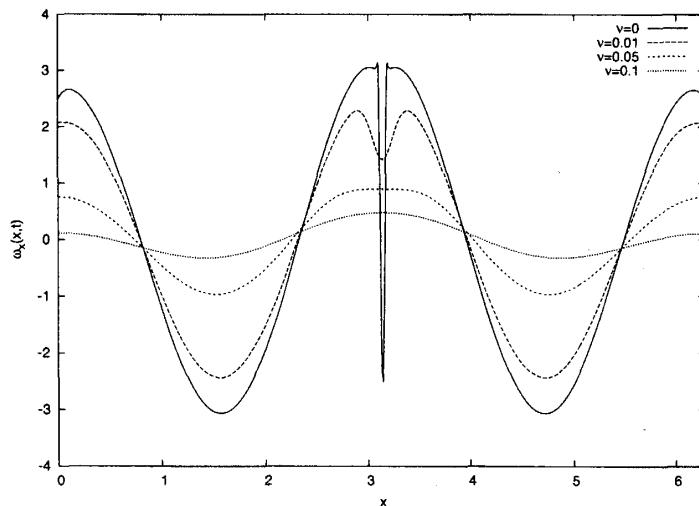
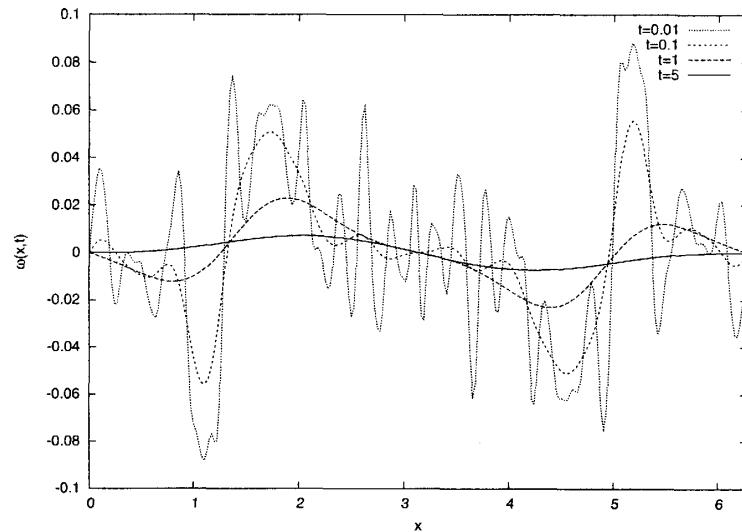
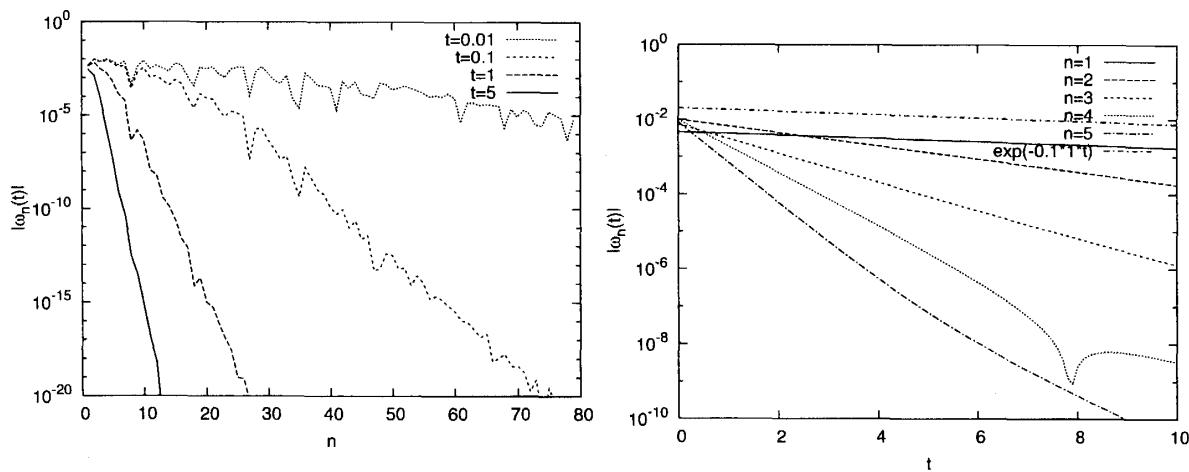


Fig. 7: Numerical solutions of (2.3) at $t = 4$ for various ν . The initial data is $\omega_0(x) = -0.5 \sin x + \sin 3x$.

(a) Plot of the solution $\omega(x, t)$ up to $t = 5$ (b) Log plot of the Fourier coefficients $|\omega_n(t)|$ (c) Evolutions of $|\omega_n(t)|$ ($n = 1, \dots, 5$)Fig. 8: Numerical solution of (2.3) with $\nu = 0.1$ for the initial data, $\omega_0(x) = \sum_{n=1}^N A_n \sin nx$, in which A_n ($n \geq 1$) are given randomly.

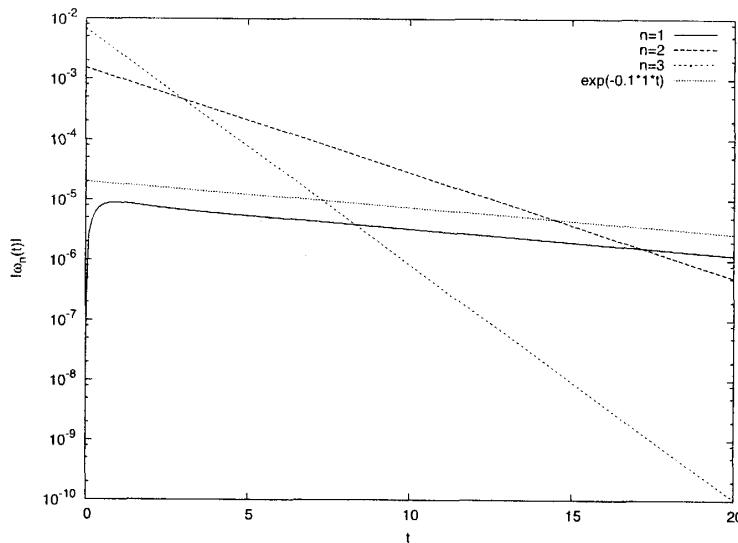


Fig. 9: Evolutions of $|\omega_1(t)|$, $|\omega_2(t)|$ and $|\omega_3(t)|$ of the solution of (2.3) with $\nu = 0.1$ for the initial data, $\omega_0(x) = \sum_{n=1}^N A_n \sin nx$, in which $A_1 = 0$ and $A_n (n \geq 2)$ are given randomly.

5. まとめと考察

渦度方程式の一次元モデルとして De Gregorio が提案した方程式 (1.10) を数値計算で解いた。結果は以下の通りであった:

1. $\nu = 0$ の時は、解は連続だが C^∞ 級でなくなる。すなわち、解 ω の一階微分が一点で値が飛んで不連続性を生じる。特異性が生成する時刻において、不連続点以外の点では、解はある漸近形(方程式の定常解)に近付く。
2. $\nu > 0$ の時は、計算した中ではすべての初期値に対し解が時間大域的に存在し、 $t \rightarrow \infty$ でゼロに漸近する。しかも、その漸近解は $e^{-\nu t} \sin x$ の減衰解である。

これを CLM 方程式と比較すると、 $\nu > 0$ の時には、Schochet の論文 [11] で指摘されたような問題点は De Gregorio の方程式では解消されたようである。その意味で (1.10) 式の左辺の $v\omega_x$ の項は ω の大きさの増減に強く影響を与えており、時間大域解の存在については、解のアブリオリ評価を得ることが重要であるが、放物型方程式のような最大値原理が成立しないために難しい。

一方、 $\nu = 0$ の時の結果は、期待されていたものであるとは言えない。過去の様々な研究から、三次元の渦度方程式の解が爆発するとすれば、それは渦度が有限の時間で無限大になることで起こると予想されている [2]。CLM 方程式でも、 $\omega(x, t)$ の大きさは有限の時間で無限大に発散する。しかし、本論文において得られた結果は、De Gregorio のモデルでは、 $\omega(x, t)$ が有界(しかも連続)なまま滑らかでなくなるというものである。この結果の数理的な構造については、さらなる議論が必要である。

参考文献

- [1] J. Beale, T. Kato and A. Majda, Remarks on breakdown of smooth solutions for the three-dimensional Euler equations, *Comm. Math. Phys.*, **94** (1984), 61–66.

- [2] P. Constantin, P.D. Lax and A. Majda, A simple one-dimensional model for the three-dimensional vorticity equation, *Comm. Pure Appl. Math.*, **38** (1985), 715–724.
- [3] S. De Gregorio, On a one-dimensional model for the three-dimensional vorticity equation, *J. Stat. Phys.*, **59** (1990), 1251–1263.
- [4] S. De Gregorio, A partial differential equation arising in a 1D model for the 3D vorticity equation, *Math. Methods Appl. Sci.*, **19** (1996), 1233–1255.
- [5] 石岡圭一, 「スペクトル法による数値計算入門」(東京大学出版会, 2004).
- [6] J.L. Lions, *Quelques methodes de resolution des problemes aux limites non lineaires*, Dunod (1969).
- [7] 岡本久・中村周, 「関数解析2」, 岩波講座現代数学の基礎, (岩波書店, 1997).
- [8] H. Okamoto and K. Ohkitani, On the role of the convection term in the equations of motion of incompressible fluid, *J. Phys. Soc. Japan*, **74** (2005), 2737–2742.
- [9] T. Sakajo, Blow-up solutions of the Constantin-Lax-Majda equation with a generalized viscosity term, *J. Math. Sci. Univ. Tokyo*, **10** (2003), 187–207.
- [10] T. Sakajo, On global solutions for the Constantin-Lax-Majda equation with a generalized viscosity term, *Nonlinearity*, **16** (2003), 1319–1328.
- [11] S. Schochet, Explicit solutions of the viscous model vorticity equation, *Comm. Pure Appl. Math.*, **39** (1986), 531–537.

坂上貴之(正会員)〒060-0810 札幌市北区北10条西8丁目

1998年京都大学大学院理学研究科博士士課程中退。同年、名古屋大学大学院多元数理科学研究科助手, 1999年京都大学 理学博士。2003年より北海道大学大学院理学研究院助教授。数理流体力学の研究に従事。日本数学会, アメリカ物理学会, 日本流体力学会所属。

佐藤英樹(非会員)〒060-0810 札幌市北区北10条西8丁目

2006年3月 北海道大学大学院理学研究科修士過程修了。現在、(株)エイ・ダブリュ・ソフトウェアに勤務。

(2006年3月22日受付)

(2006年5月29日最終稿受付)