

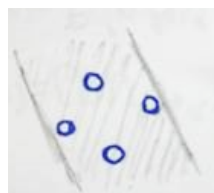
2.

在平面上有四個點，且任意三個點未共線時，有下幾種情形：

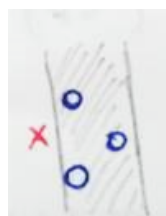
(若交換位置後，長相相同，則不再重複畫，以節省空間)

斜線部份表 $y = +1$ 的部分

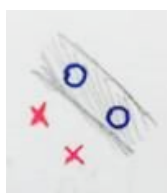
(1) 4 個 O



(2) 3 個 O



(3) 2 個 O



(4) 1 個 O



(5) 全 X



由以上可知，在四個點時可以 shatter，故 DC - dimension ≥ 4 。

3.

VC-dimension 為無限大。

首先，將 α 用四進位表達，以 $\alpha = 11.375$ 為例，以四進位表達即為 23.12 。

再來，看 $\alpha x \pmod{4}$ 的解讀方式：

(i) αx ：

在 x 為 4 的冪次時，可以看成是對 α 做位元的平移。如當 $x = 4$ ， αx 以四進位表達即為 231.2 。

(ii) $\text{mod } 4$ ：

對 $\alpha x \pmod{4}$ ，可看成取四進位表示時的個位數及小數部分：

$$\alpha x = 231.2_{(4)} \equiv 1.2_{(4)} \pmod{4}$$

定義 $\text{sign}(0)$ 為 1，則題目中 positive 的範圍為 $\alpha x \pmod{4} = [0, 1] \cup [3, 4)$ ；

negative 的範圍為 $\alpha x \pmod{4} = (1, 3)$ 。

假設所有點的 x 座標滿足 $x_k = 4^k, k = 0, 1, 2 \dots$ ，我們可以直接取：

$$\alpha = d_0.d_1d_2d_3d_4d_5d_6\dots_{(4)} = \sum_{k=0}^n 4^{-k} * d_k$$

其中，若 $y_k = +1$ ，則 $d_k = 3$ ； $y_k = -1$ ，則 $d_k = 2$ 。

舉例而言： $(x, y) = \{(1, +1), (4, -1), (16, +1), (64, +1)\}$ ，則我們可找到：

$$\alpha = 3.233_{(4)}$$

在此情形下， $y = +1$ 時， $\alpha x = 3.\sim_{(4)}$ ； $y = -1$ 時， $\alpha x = 2.\sim_{(4)}$ 均會滿足。

如此一來不論數據量有多大，都有辦法構造出 α 來。故 VC-dimension 為無限大。

4.

假設不然，令 $d_{vc}(H_1 \cap H_2) = x$, $d_{vc}(H_2) = y$ 且 $x > y$ 。故我們可知 x 個點可以 shatter $H_1 \cap H_2$ ，且不能 shatter H_2 。但又因為 $H_1 \cap H_2 \subseteq H_2$ ，代表若能 shatter $H_1 \cap H_2$ ，必能 shatter H_2 ，矛盾！

故由反證法知 $d_{vc}(H_1 \cap H_2) \leq d_{vc}(H_2)$ 。

5.

$(H_1 \cup H_2)$ 意即可以是右邊為正，抑或是左邊為正。故我們很容易就可得知 $m_{(H_1 \cup H_2)}(N) = 2 * (N + 1) - 2 = 2N$ (減二是扣掉全 positive 和全 negative 的情形重複被算到)。所以 $d_{vc}(H_1 \cup H_2) = 2$ 。

6.

考慮 $s = 1$ 和 $s = -1$:

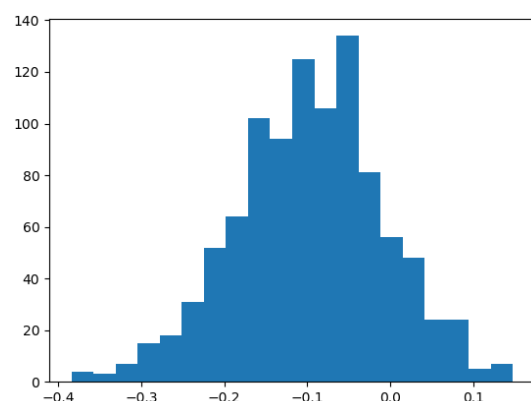
(1) 若 $s = 1$ ，若沒有 noise， $E_{out} = \frac{|\theta|}{2}$ 。而因為有 20% 的數據是 noise，故 E_{out} 實

際上應為 $\frac{|\theta|}{2} * 0.8 + \left(1 - \frac{|\theta|}{2}\right) * 0.2 = 0.2 + 0.3|\theta|$

(2) 若 $s = -1$ ，和上面相似， $E_{out} = \frac{|\theta|}{2} * 0.2 + \left(1 - \frac{|\theta|}{2}\right) * 0.8 = 0.8 - 0.3|\theta|$

將(1)、(2)結合，可知 $E_{out} = (0.5 - 0.3s) + 0.3s|\theta| = 0.5 + 0.3s(|\theta| - 1)$

7.



橫軸為 $E_{in} - E_{out}$ ，縱軸為次數

可看出 $E_{in} - E_{out}$ 呈現常態分佈，且極值約位在 $E_{in} - E_{out} = 0.05$ 的地方。