Full 7: Lense-Thirring

En aquest exercici calculareu la correcció a la mètrica de Schwarzschild deguda a la rotació de la font. Ho fareu considerant velocitats de rotació no relativistes i en el límit de camp dèbil.

(i) Considereu una distribució esfèrica de massa M i radi R, amb densitat uniforme ρ i velocitat angular Ω. Totes aquestes quantitats són constants. Assumiu que la font gira a velocitats molt inferiors a la de la llum, és a dir, que $R\Omega \ll c$. Tracteu la font com un fluid perfecte sense pressió i calculeu els elements del tensor[1] d'energia-moment en el límit de camps dèbils, fins a primer ordre en $R\Omega$.

> **Solució.** Per a un fluid perfecte:
>
> $$T^{\mu\nu} = (\rho + P)u^\mu u^\nu + Pg^{\mu\nu}$$
>
> si la pressió és nul · la ($P = 0$), Aleshores
>
> $$T^{\mu\nu} = \rho u^\mu u^\nu$$
>
> La quadrivelocitat del fluid, per normalizació, és $u^\mu = \gamma(1, \mathbf{v})$, on γ és el factor de Lorentz. En el cas d'aquest exercici, $\|\mathbf{v}\| = \Omega R \ll 1 \implies \gamma \approx 1$, de manera que:
>
> $$T^{00} = \rho U^0 U^0 = \rho c^2 \qquad T^{0i} = \rho U^0 U^i = \rho c v^i \qquad T^{ij} = \rho U^i U^j = \cancel{\rho v^i v^j} \sim \mathcal{O}((R\Omega)^2)$$
>
> El tensor d'energia-moment a primer ordre resulta:
>
> $$T^{\mu\nu} \simeq \begin{pmatrix} \rho c^2 & \rho c v^x & \rho c v^y & \rho c v^z \\ \rho c v^x & 0 & 0 & 0 \\ \rho c v^y & 0 & 0 & 0 \\ \rho c v^z & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \rho c \begin{pmatrix} c & v^x & v^y & v^z \\ v^x & 0 & 0 & 0 \\ v^y & 0 & 0 & 0 \\ v^z & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(ii) Escriviu les equacions d'Einstein en el límit de camps dèbils, utilitzant el gauge de Lorenz $g^{\mu\nu}\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = 0$, que també es pot expressar com $\partial^\mu \bar{h}_{\mu\nu} = 0$ en termes del tensor $\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h$, amb $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ i $|h| \ll 1$.

> **Solució.** Partint de les equacions d'Einstein linealitzades en el gauge de Lorenz (gauge Harmònic), podem passar a la forma purament contravariant. Amb l'aproximació de camp dèbil usarem només $\eta_\mu \nu$, de manera que
>
> $$\Box \bar{h}_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \overset{g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}}{\Longrightarrow} \Box \bar{h}^{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} T^{\mu\nu}$$
>
> de manera que les equacions d'Einstein a resoldre en aquest cas són:
>
> $$\Box \bar{h}^{00} = -\frac{16\pi G}{c^4} T^{00} = -\frac{16\pi G}{c^4} \rho c^2 = -\frac{16\pi G}{c^2} \rho$$
>
> $$\Box \bar{h}^{0i} = -\frac{16\pi G}{c^4} T^{0i} = -\frac{16\pi G}{c^4} \rho c v^i = -\frac{16\pi G}{c^3} \rho v^i$$
>
> $$\Box \bar{h}^{ij} = -\frac{16\pi G}{c^4} T^{ij} \approx 0$$

(iii) Escriviu la 3-velocitat d'un element de fluid de la font en coordenades cartesianes. Per simplicitat, escolliu un sistema de coordenades tal que el cos giri al voltant de l'eix z.

[1] Aquest tensor es coneix amb el nom de "trace-reversed tensor".

Solució. Si assumim que el cos gira al voltant de l'eix OZ, només cal emprar $\mathbf{v} = \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}$:

$$\mathbf{v} = \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & \Omega \\ x & y & z \end{vmatrix} = -\mathbf{i}(\Omega y) + \mathbf{j}(\Omega x) = \Omega(-y\mathbf{i} + x\mathbf{j})$$

(iv) Trobeu les components $\bar{h}^{\mu\nu}$ a distàncies grans de la font, és a dir, assumint $r \gg R$. Recordeu que la solució de l'equació $\nabla^2 f = g$, amb $\nabla^2 \equiv \partial_i \partial^i$, pren la següent forma:

$$f(\mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{g(\mathbf{y})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} d^3 y$$

Solució. En el límit estàtic, $\Box = \nabla^2 - \cancel{\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}}$, de manera que:

$$\nabla^2 \bar{h}^{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} T^{\mu\nu}$$

on podem utilitzar la solució donada a l'enunciat.

$$\bar{h}^{\mu\nu}(\mathbf{x}) = \frac{4G}{c^4} \int \frac{T^{\mu\nu}(\mathbf{y})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} d\mathbf{y}$$

si $r \gg R$, podem provar la aproximació: $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \simeq \|\mathbf{x}\|$. Anomenant $r := \|\mathbf{x}\|$ i $r' := \|\mathbf{y}\|$, tenim:

$$\begin{aligned}
\bar{h}^{00}(\mathbf{x}) &= \frac{4G}{c^4 r} \int T^{00}(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = \frac{4G}{c^4 r} \int \rho c^2 d\mathbf{y} = \frac{4G}{c^2 r} \int \rho d\mathbf{y} = \frac{4GM}{c^2 r} \\
\bar{h}^{0x}(\mathbf{x}) &= \frac{4G}{c^4 r} \int T^{0i}(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = \frac{4G}{c^4 r} \int \rho c v^x d\mathbf{y} = -\frac{4G\Omega\rho}{c^3 r} \int y' d\mathbf{y} \\
&= -\frac{4G\Omega\rho}{c^3 r} \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r' \sin\theta \cos\phi r'^2 \sin\theta dr' d\theta d\phi \\
&= -\frac{4G\Omega\rho}{c^3 r} \int_0^R (r')^3 d(r') \int_0^\pi \sin^2\theta d\theta \cancel{\int_0^{2\pi} \cos\phi d\phi} \\
&= 0
\end{aligned}$$

de manera que hem d'aproximar en un ordre més alt si volem una contribució no nul·la. Expandim $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ a primer ordre:

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| &= \sqrt{(\mathbf{x} - \mathbf{y})(\mathbf{x} - \mathbf{y})} = \sqrt{r^2 + 2\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + (r')^2} \simeq \sqrt{r^2 - 2\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}} = r\sqrt{1 - 2\frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{r^2}} \\
&\simeq r\left(1 - \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{r^2}\right) \\
\implies \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} &\simeq \frac{1}{r}\left(1 + \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{r^2}\right)
\end{aligned}$$

Com ja hem comprovat que la contribució només amb el terme constant és nul·la, podem escriure:

$$\begin{aligned}
\bar{h}^{0x}(\mathbf{x}) &\simeq \frac{4G}{c^4 r^3} \int \rho c v^x (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) d\mathbf{y} = -\frac{4G\Omega\rho}{c^3 r^3} \int y'(xx' + yy' + zz') d\mathbf{y} \\
&= -\frac{4G\Omega\rho}{c^3 r^3} \left[x \underbrace{\int (y'x') d\mathbf{y}}_{I_1} + y \underbrace{\int (y'y') d\mathbf{y}}_{I_2} + z \underbrace{\int (y'z') d\mathbf{y}}_{I_3} \right] \\
\bar{h}^{0y}(\mathbf{x}) &\simeq \frac{4G}{c^4 r^3} \int \rho c v^y (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) d\mathbf{y} = \frac{4G\Omega\rho}{c^3 r^3} \int x'(xx' + yy' + zz') d\mathbf{y}
\end{aligned}$$

$$= \frac{4G\Omega\rho}{c^3r^3}\left[x\underbrace{\int(x'x')d\mathbf{y}}_{I_4}+y\underbrace{\int(x'y')d\mathbf{y}}_{I_1}+z\underbrace{\int(x'z')d\mathbf{y}}_{I_5}\right]$$

Investigem les integrals per separat:

$$I_1 = \int_0^R\int_0^\pi\int_0^{2\pi} r'\sin\theta\cos\phi r'\sin\theta\sin\phi r'^2\sin\theta dr'd\theta d\phi$$

$$= \int_0^R r'^4dr'\int_0^\pi \sin^3\theta d\theta\cancel{\int_0^{2\pi}\cos\phi\sin\phi d\phi}$$

$$= 0 \Longleftarrow \cos(\phi+n\pi)\sin(\phi+n\pi) = \cos\phi\sin\phi \quad \forall n\in\mathbb{Z}$$

$$I_2 = \int_0^R\int_0^\phi\int_0^{2\pi} r'^2\sin^2\theta\sin^2\phi r'^2\sin^2\theta d\theta d\phi = \int_0^R r'^4dr'\int_0^\pi\sin^3\theta d\theta\int_0^{2\pi}\sin^2\phi d\phi$$

$$= \frac{R^5}{5}\int_0^\pi\left(1-\cos^2\theta\right)\sin\theta d\theta\int_0^{2\phi}\frac{1}{2}\Big(1-\cos(2\phi)\Big)d\phi$$

$$= \frac{R^5}{5}\int_0^\pi -\left(1-\cos^2\theta\right)d\left(\cos\theta\right)\left[\frac{\phi}{2}-\frac{1}{4}\sin(2\phi)\right]_0^{2\pi} = \frac{\pi R^5}{5}\left[\cos\theta-\frac{1}{3}\cos^3\theta\right]_0^\pi$$

$$= \frac{\pi R^5}{5}\left(\left[1-\frac{1}{3}\right]-\left[-1+\frac{1}{3}\right]\right) = \frac{\pi R^5}{5}\left(2-\frac{2}{3}\right) = \frac{4\pi R^5}{15}$$

$$I_3 = \int_0^R\int_0^\pi\int_0^{2\pi} r'\sin\theta\sin\phi r'\cos\theta r'^2\sin\theta dr'd\theta d\phi$$

$$= \int_0^R r'^4dr'\int_0^\pi\sin^2\theta\cos\theta\cancel{\int_0^{2\pi}\sin\phi d\phi} = 0 \Longleftarrow \sin(\phi+n\pi) = \sin\phi \quad \forall n\in\mathbb{Z}$$

$$I_4 = \int_0^R\int_0^\pi\int_0^{2\pi} r'^2\sin^2\theta\cos^2\theta r'^2\sin\theta dr'd\theta d\phi = \int_0^R r'^4dr'\int_0^\pi\sin^3\theta d\theta\int_0^{2\pi}\cos^2\phi d\phi$$

$$= I_2 \Longleftarrow \int_0^{2\pi}\cos^2\phi d\phi = 2\pi - \underbrace{\int_0^{2\pi}\sin^2\phi d\phi}_{\pi} \Longleftarrow \cos^2\phi+\sin^2\phi = 1$$

$$I_5 = \int_0^R\int_0^\pi\int_0^{2\pi} r'\sin\theta\cos\phi r'\cos\theta r'^2\sin\theta dr'd\theta d\phi$$

$$= \int_0^R r'^4dr'\int_0^\pi\sin^2\theta\cos\theta\cancel{\int_0^{2\pi}\cos\phi d\phi} = 0 \Longleftarrow \cos(\phi+n\pi) = \cos\phi \quad \forall n\in\mathbb{Z}$$

Substituint el resultat de les integrals:

$$\bar{h}^{0x}(\mathbf{x}) = -\frac{4G\Omega\rho}{c^3r^3}y\frac{4\pi R^5}{15} = -\frac{4G\Omega y}{c^3r^3}\frac{R^2}{5}\rho\frac{4}{3}\pi R^3 = -\frac{4G\Omega MR^2}{5c^3r^3}y$$

$$\bar{h}^{0y}(\mathbf{x}) = \frac{4G\Omega\rho}{c^3r^3}x\frac{4\pi R^5}{15} = \frac{4G\Omega x}{c^3r^3}\frac{R^2}{5}\rho\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4G\Omega MR^2}{5c^3r^3}x$$

(v) Escriviu l'element de línia en coordenades cartesianes. Demostreu que pren la forma següent:

$$ds^2 = -\left(1-\frac{2GM}{rc^2}\right)c^2dt^2 + \left(1+\frac{2GM}{rc^2}\right)\delta_{ij}dx^idx^j + \frac{8GMR^2}{5r^3c^3}\Omega(ydx-xdy)dt$$

Solució. Per poder escriure l'element de linea en qualsevol sistema de coordenades, s'utilitza la mètrica. En el cas linealitzat i en coordenades cartesianes:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = (\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}) dx^\mu dx^\nu$$

de manera que l'obejctiu és trobar $h_{\mu\nu}$. Per definició de $\bar{h}_{\mu\nu}$:

$$\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu} h \implies h_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu} h$$

Per definició de la traça de $\bar{h}_{\mu\nu}$:

$$\bar{h} = \eta^{\mu\nu}\bar{h}_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu}\left(h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu} h\right) = h - \frac{1}{2}4h = -h$$

de manera que, podem escriure:

$$h_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\bar{h}$$

com en aquest cas la unica component no nul de la diagonal de $\bar{h}_{\mu\nu}$ és $\bar{h}_{00}$, tenim:

$$\bar{h} = \eta_{00}\bar{h}^{00} = -\bar{h}_{00} = \eta^{00}\bar{h}_{00} = -\bar{h}^{00} = -\frac{4GM}{c^2 r} \implies h_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} + \frac{2GM}{c^2 r}\eta_{\mu\nu}$$

evaluant les components del tensor $h_{\mu\nu}$:

$$h_{00} = \bar{h}_{00} - \frac{2GM}{rc^2} = \frac{4GM}{rc^2} - \frac{2GM}{rc^2} = \frac{2GM}{rc^2}$$

$$h_{ij} = \cancel{\bar{h}_{ij}} - \frac{1}{2}\eta_{ij}\left(-\frac{4GM}{rc^2}\right) = \frac{2GM}{rc^2}\delta_{ij}$$

$$h_{0i} = \bar{h}_{0i} - \frac{1}{2}\cancel{\eta_{0i}}\frac{2GM}{rc^2} = \bar{h}_{0i} = \eta_{00}\eta_{ij}\bar{h}^{0j} = -\bar{h}^{0i}$$

$$\implies h_{0x} = -\bar{h}^{0x} = \frac{4G\Omega M R^2}{5c^3 r^3} y \qquad h_{0y} = -\bar{h}^{0y} = -\frac{4G\Omega M R^2}{5c^3 r^3} x$$

Ara podem escriure l'element de línia utilitzant la expressió donada anteriorment:

$$\begin{aligned} ds^2 &= (\eta_{00} + h_{00})\, c^2 dt^2 + (\eta_{ij} + h_{ij})\, dx^i dx^j + 2\,(\cancel{\eta_{0i}} + h_{0i})\, dx^0 dx^i \\ &= \left(-1 + \frac{2GM}{rc^2}\right) c^2 dt^2 + \left(\delta_{ij} + \delta ij \frac{2GM}{rc^2}\right) dx^i dx^j + \frac{8GMR^2\Omega}{5r^3c^2} cdt\,(ydx - xdy) \\ &= -\left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) c^2 dt^2 + \left(1 + \frac{2GM}{rc^2}\right)\delta_{ij} dx^i dx^j + \frac{8GMR^2\Omega}{5r^3c^2}(ydx - xdy)dt \end{aligned}$$

(vi) Reescriviu l'element de línia en coordenades esfèriques.

Solució. Sabent com transforma la mètrica eucliniada en coordenades esfèriques, podem escriure directament:

$$\delta_{ij} dx^i dx^j = dx^2 + dy^2 + dz^2 = dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

Pel cas de $ydx - xdy$, sabem que generen una rotació al voltant de l'eix OZ de manera que:

$$ydx - xdy = -r^2 \sin^2\theta d\varphi$$

ja que $r\sin\theta$ representa la distància al eix de rotació. Però, ho podem fer explícitament també:

$$ydx = r\sin\theta\sin\phi\,(\sin\theta\cos\phi dr + r\cos\phi\cos\theta d\theta - r\sin\theta\sin\phi d\phi)$$

$$= r\sin^2\theta\cos\phi\sin\phi dr + r^2\sin\theta\cos\theta\sin\phi\cos\phi d\theta - r^2\sin^2\theta\sin^2\phi d\phi$$

$$xdy = r\sin\theta\cos\phi\left(\sin\theta\sin\phi dr + r\cos\phi\cos\theta d\theta + r\sin\theta\cos\phi d\phi\right)$$

$$= r\sin^2\theta\cos\phi\sin\phi dr + r^2\sin\theta\cos\theta\sin\phi\cos\phi d\theta + r^2\sin^2\theta\cos^2\phi d\phi$$

$$\Longrightarrow ydx - xdy = -r^2\sin^2\theta(\sin^2\phi + \cos^2\phi)d\phi = -r^2\sin^2\theta d\varphi$$

substituïnt a l'element de línea trobat anteriorment:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)c^2dt^2 + \left(1 + \frac{2GM}{rc^2}\right)\left[dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)\right] - \frac{8GMR^2\Omega}{5rc^2}\sin^2\theta d\phi dt$$

(vii) Mostreu que fent el canvi $\tilde{r} = r + GM/c^2$ es pot reexpressar l'element de línia com segueix, sense alterar l'ordre en teoria de pertorbacions,

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{\tilde{r}c^2}\right)c^2dt^2 + \left(1 + \frac{2GM}{\tilde{r}c^2}\right)d\tilde{r}^2 + \tilde{r}^2\left(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\varphi^2\right) - \frac{8GM}{5\tilde{r}c^2}\Omega R^2\sin^2(\theta)dtd\varphi$$

Aquesta és la mètrica de Lense-Thirring, precursora de la mètrica de Kerr.

Solució. Amb la substitució proposada, $\tilde{r} = r - \frac{GM}{c^2} \implies \frac{1}{\tilde{r}} \simeq \frac{1}{r} + \cancel{\frac{GM}{c^2}}$, on descartem els termes d'ordre superior. Notem també que $d\tilde{r} = dr$. Ara cal calcular el comportament del terme que inclou l'element de linea cartesià:

$$\begin{aligned}
I &:= \left(1 + \frac{2GM}{rc^2}\right)\left[dr^2 + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right)\right] \\
&\simeq \left(1 + \frac{2GM}{\tilde{r}c^2}\right)\left[d\tilde{r}^2 + \left(\tilde{r} - \frac{GM}{c^2}\right)^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right)\right] \\
&= \left(1 + \frac{2GM}{\tilde{r}c^2}\right)d\tilde{r}^2 + \tilde{r}^2\left(1 + \frac{2GM}{\tilde{r}c^2}\right)\left(1 - \frac{GM}{\tilde{r}c^2}\right)^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right) \\
&= \tilde{r}^2\left(1 + \frac{2GM}{\tilde{r}c^2}\right)\left(1 - \frac{2GM}{\tilde{r}c^2} + \cancel{\frac{G^2M^2}{\tilde{r}^2c^4}}\right)\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right) \\
&\simeq \left(1 + \frac{2GM}{\tilde{r}c^2}\right)d\tilde{r}^2 + \tilde{r}^2\left(1 - \cancel{\frac{4G^2M^2}{\tilde{r}^2c^4}}\right)\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right) \\
&\simeq \left(1 + \frac{2GM}{\tilde{r}c^2}\right)d\tilde{r}^2 + \tilde{r}^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right)
\end{aligned}$$

Amb això, l'element de línea queda:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{\tilde{r}c^2}\right)c^2dt^2 + \left(1 + \frac{2GM}{\tilde{r}c^2}\right)d\tilde{r}^2 + \tilde{r}^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right) - \frac{8GM}{5\tilde{r}c^2}\Omega R^2\sin^2\theta dtd\phi$$

(vii) Demostreu que els símbols de Christoffel $\Gamma^0_{00}, \Gamma^0_{\varphi\varphi}, \Gamma^0_{0\varphi}, \Gamma^\varphi_{00}, \Gamma^\varphi_{\varphi\varphi}$ i $\Gamma^\varphi_{0\varphi}$ són nuls i que

$$\Gamma^{\tilde{r}}_{00} = \frac{GM}{\tilde{r}^2c^2}\left(1 - \frac{2GM}{\tilde{r}c^2}\right); \quad \Gamma^{\tilde{r}}_{\varphi\varphi} = -\left(1 - \frac{2GM}{\tilde{r}c^2}\right)\tilde{r}\sin^2\theta; \quad \Gamma^{\tilde{r}}_{0\varphi} = -\left(1 - \frac{2GM}{\tilde{r}c^2}\right)\frac{GMa}{\tilde{r}^2c^2}\sin^2\theta,$$

en el mateix ordre de teoria de pertorbacions, on $a \equiv \frac{2}{5}\Omega R^2$ és el moment angular per unitat de massa.

Solució. Amb la definició dels símbols de Christoffel:

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma}(\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\mu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\nu})$$

identificant les components de la mètrica:

$$g_{00} = -\left(1 - \frac{2GM}{\tilde{r}c^2}\right),\ g_{\tilde{r}\tilde{r}} = \left(1 + \frac{2GM}{\tilde{r}c^2}\right),\ g_{\theta\theta} = \tilde{r}^2,\ g_{\phi\phi} = \tilde{r}^2 \sin^2\theta,\ g_{0\phi} = -\frac{2GMa}{\tilde{r}c^3}\sin^2\theta$$

Els símbols de Christoffel demanats es poden calcular tenint en compte que el problema és estacionari ($\partial_0 f = 0$) i hi ha simetria al voltant de l'eix OZ ($\partial_\phi f = 0$).

$$\Gamma^{0}_{00} = \frac{1}{2} g^{0\sigma} \left(\cancel{\partial_0 g_{0\sigma}} + \cancel{\partial_0 g_{0\sigma}} - \partial_\sigma g_{\phi\phi}\right) = -\frac{1}{2} g^{0\sigma} \partial_\sigma g_{00} = -\frac{1}{2} g^{00} \cancel{\partial_0 g_{00}} - \frac{1}{2} g^{0\phi} \cancel{\partial_\phi g_{\phi\phi}} = 0$$

$$\Gamma^{0}_{\phi\phi} = \frac{1}{2} g^{0\sigma} \left(\cancel{\partial_\phi g_{\phi\sigma}} + \cancel{\partial_\phi g_{\phi\sigma}} - \partial_\sigma g_{\phi\phi}\right) = -\frac{1}{2} g^{0\sigma} \partial_\sigma g_{\phi\phi} = -\frac{1}{2} g^{00} \cancel{\partial_0 g_{\phi\phi}} - \frac{1}{2} g^{0\phi} \cancel{\partial_\phi g_{\phi\phi}} = 0$$

$$\Gamma^{0}_{0\phi} = \frac{1}{2} g^{0\sigma} \left(\cancel{\partial_0 g_{\phi\sigma}} + \cancel{\partial_\phi g_{0\sigma}} - \partial_\sigma g_{0\phi}\right) = -\frac{1}{2} g^{0\sigma} \partial_\sigma g_{0\phi} = -\frac{1}{2} g^{00} \cancel{\partial_0 g_{0\phi}} - \frac{1}{2} g^{0\phi} \cancel{\partial_\phi g_{0\phi}} = 0$$

$$\Gamma^{\phi}_{00} = \frac{1}{2} g^{\phi\sigma} \left(\cancel{\partial_0 g_{0\sigma}} + \cancel{\partial_0 g_{0\sigma}} - \partial_\sigma g_{00}\right) = -\frac{1}{2} g^{\phi\sigma} \partial_\sigma g_{00} = -\frac{1}{2} g^{\phi 0} \cancel{\partial_0 g_{00}} - \frac{1}{2} g^{\phi\phi} \cancel{\partial_\phi g_{00}} = 0$$

$$\Gamma^{\phi}_{\phi\phi} = \frac{1}{2} g^{\phi\sigma} \left(\cancel{\partial_\phi g_{\phi\sigma}} + \cancel{\partial_\phi g_{\phi\sigma}} - \partial_\sigma g_{\phi\phi}\right) = -\frac{1}{2} g^{\phi\sigma} \partial_\sigma g_{\phi\phi} = -\frac{1}{2} g^{\phi 0} \cancel{\partial_0 g_{\phi\phi}} - \frac{1}{2} g^{\phi\phi} \cancel{\partial_\phi g_{\phi\phi}} = 0$$

$$\Gamma^{\phi}_{0\phi} = \frac{1}{2} g^{\phi\sigma} \left(\cancel{\partial_0 g_{\phi\sigma}} + \cancel{\partial_\phi g_{0\sigma}} - \partial_\sigma g_{0\phi}\right) = -\frac{1}{2} g^{\phi\sigma} \partial_\sigma g_{0\phi} = -\frac{1}{2} g^{\phi 0} \cancel{\partial_0 g_{0\phi}} - \frac{1}{2} g^{\phi\phi} \cancel{\partial_\phi g_{0\phi}} = 0$$

Per als no nuls, cal calcular primerament la mètrica inversa. Com que els termes no diagonals són els $g_{0\phi} \sim \mathcal{O}(c^{-3})$, prenem la mètrica com diagonal per tal de trobar la inversa a l'ordre desitjat. D'aquesta manera, l'unic terme que ens interessa ara és $g^{\tilde{r}\tilde{r}} \simeq \frac{1}{g_{\tilde{r}\tilde{r}}}$:

$$g^{\tilde{r}\tilde{r}} \simeq \frac{1}{1 + \frac{2GM}{\tilde{r}c^2}} \simeq 1 - \frac{2GM}{\tilde{r}c^2}$$

aleshores, els símbols de Christoffel es poden calcular explícitament:

$$\begin{aligned}
\Gamma^{\tilde{r}}_{00} &= \frac{1}{2} g^{\tilde{r}\sigma} \left(\cancel{\partial_\phi g_{\phi\sigma}} + \cancel{\partial_\phi g_{\phi\sigma}} - \partial_\sigma g_{\phi\phi}\right) = -\frac{1}{2} g^{\tilde{r}\sigma} \partial_\sigma g_{00} = -\frac{1}{2} g^{\tilde{r}\tilde{r}} \partial_{\tilde{r}} g_{00} \\
&= -\frac{1}{2}\left(1 - \frac{2GM}{\tilde{r}c^2}\right)\left[-\frac{2GM}{\tilde{r}^2c^2}\right] = \frac{GM}{\tilde{r}^2c^2}\left(1 - \frac{2GM}{\tilde{r}c^2}\right) \\
\Gamma^{\tilde{r}}_{\phi\phi} &= \frac{1}{2} g^{\tilde{r}\sigma} \left(\cancel{\partial_\phi g_{\phi\sigma}} + \cancel{\partial_\phi g_{\phi\sigma}} - \partial_\sigma g_{\phi\phi}\right) = -\frac{1}{2} g^{\tilde{r}\sigma} \partial_\sigma g_{\phi\phi} = -\frac{1}{2} g^{\tilde{r}\tilde{r}} \partial_{\tilde{r}} g_{\phi\phi} \\
&= -\frac{1}{2}\left(1 - \frac{2GM}{\tilde{r}c^2}\right)\left[2\tilde{r}\sin^2\theta\right] = -\left(1 - \frac{2GM}{\tilde{r}c^2}\right)\tilde{r}\sin^2\theta \\
\Gamma^{\tilde{r}}_{0\phi} &= \frac{1}{2} g^{\tilde{r}\sigma} \left(\cancel{\partial_0 g_{\phi\sigma}} + \cancel{\partial_\phi g_{0\sigma}} - \partial_\sigma g_{0\phi}\right) = -\frac{1}{2} g^{\tilde{r}\sigma} \partial_\sigma g_{0\phi} = -\frac{1}{2} g^{\tilde{r}\tilde{r}} \partial_{\tilde{r}} g_{0\phi} \\
&= -\frac{1}{2}\left(1 - \frac{2GM}{\tilde{r}c^2}\right)\left[\frac{2GMa}{\tilde{r}^2c^3}\sin^2\theta\right] = -\left(1 - \frac{2GM}{\tilde{r}c^2}\right)\frac{GMa}{\tilde{r}^2c^3}\sin^2\theta
\end{aligned}$$