

Interferències amb ones múltiples

1 Expressions teòriques

Cada vegada que un raig es reflecteix a l'interior de la làmina, el seu camp elèctric es multiplica pel coeficient de reflexió r . Quan es transmet del medi n al medi n' , es multiplica pel coeficient de transmissió t , i quan es transmet de n' a n , es multiplica per t' . D'aquesta manera, qualsevol raig que surt de la làmina ha estat multiplicat pels coeficients $tt'r^m$, on m és el nombre de reflexions internes realitzades.

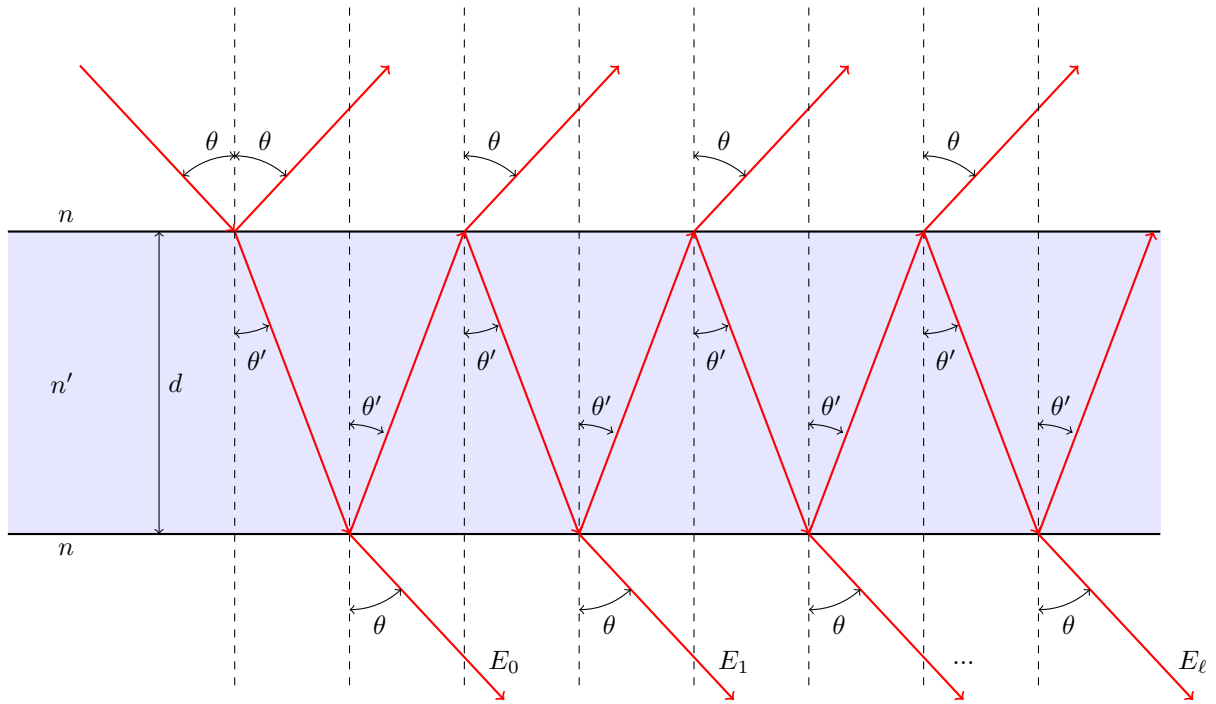


Figura 1: Esquema d'un raig incident en una làmina plano-paral·lela

Ja que cada raig emergent acumula dues reflexions més que l'anterior ($2\ell = m$), podem escriure el camp elèctric total del ℓ -èsim raig com:

$$E_\ell = \left(\frac{a_{\parallel} t_{\parallel} t'_{\parallel} r_{\parallel}^{2\ell}}{a_{\perp} t_{\perp} t'_{\perp} r_{\perp}^{2\ell}} \right) e^{i(\omega t - k\vec{r} \cdot \vec{s} + \delta_0 + \ell\delta)} = \left(\frac{at_{\parallel} t'_{\parallel} r_{\parallel}^{2\ell}}{bt_{\perp} t'_{\perp} r_{\perp}^{2\ell}} \right) e^{i(\omega t - k\vec{r} \cdot \vec{s} + \delta_0)} e^{i\ell\delta} = \left(\frac{E_{0\parallel} r_{\parallel}^{2\ell}}{E_{0\perp} r_{\perp}^{2\ell}} \right) e^{i\ell\delta}$$

Si es calcula el camp elèctric total E_T (de qualsevol de les dues components) mitjançant la suma de tots:

$$E_T = \sum_{\ell=0}^{\infty} E_0 r^{2\ell} e^{i\ell\delta} = \sum_{\ell=0}^{\infty} E_0 (r^2 e^{i\delta})^\ell = \frac{E_0}{1 - r^2 e^{i\delta}} = \frac{att' e^{i(\omega t - k\vec{r} \cdot \vec{s} + \delta_0)}}{1 - r^2 e^{i\delta}} = \frac{a(1 - r^2) e^{i(\omega t - k\vec{r} \cdot \vec{s} + \delta_0)}}{1 - r^2 e^{i\delta}} \quad (1)$$

Sabent que el camí òptic recorregut en aquesta configuració és:

$$\delta = \frac{4\pi}{\lambda} dn' \cos(\theta') \quad (2)$$

Combinant amb la Equació de Snell 3:

$$n' \sin \theta' = n \sin \theta \implies \theta' = \arcsin \left(\frac{n}{n'} \sin(\theta) \right) \quad (3)$$

Es pot obtenir el camí òptic δ en funció de l'angle d'incidència θ :

$$\delta = \frac{4\pi}{\lambda} dn' \cos \left(\arcsin \left[\frac{n}{n'} \sin \theta \right] \right)$$

Per a la derivació de la Equació 1 s'ha utilitzat un coeficient de reflexió arbitrari r . En concret, es podria utilitzar r_{\parallel} i r_{\perp} sense problemes per a obtenir la component tant paral·lela com perpendicular. Si es consideren aquests factors, cal utilitzar les formules de Fresnel:

$$r_{\parallel} = \frac{A_{\parallel r}}{A_{\parallel i}} = \frac{\tan(\theta_t - \theta_i)}{\tan(\theta_t + \theta_i)} \quad r_{\perp} = \frac{A_{\perp r}}{A_{\perp i}} = \frac{\sin(\theta_t - \theta_i)}{\sin(\theta_t + \theta_i)}$$

$$t_{\parallel} = \frac{A_{\parallel t}}{A_{\parallel i}} = \frac{2 \sin(\theta_t) \cos(\theta_i)}{\sin(\theta_t + \theta_i) \cos(\theta_t - \theta_i)} \quad t_{\perp} = \frac{A_{\perp t}}{A_{\perp i}} = \frac{2 \sin(\theta_t) \cos(\theta_i)}{\sin(\theta_t + \theta_i)}$$

La intensitat total, considerant $E \in \mathbb{C}$, s'obté mitjançant:

$$I_T = \frac{c}{4\pi} E_T E_T^* = \frac{c}{4\pi} |E_T|^2 \quad (4)$$

On s'utilitzarà la funció `abs` de MATLAB per a avaluar el mòdul directament.

2 Codi i gràfiques

2.1 Suma infinita

Per a la representació gràfica dels resultats, s'ha utilitzat el llenguatge de programació MATLAB. En lloc de representar les funcions de manera analítica, s'ha optat per treballar amb llistes de valors que descriuen els angles d'incidència i els resultats associats.

El codi comença definint les constants del problema: la longitud d'ona de la llum (λ), el gruix del vidre (d) i l'índex refractiu del material (n'). Tot seguit, es genera una llista de valors per als angles d'incidència (`theta_i`) mitjançant la funció `linspace`, que divideix l'interval $[0, \frac{\pi}{2}]$ en 1000 punts equidistants. Els angles de transmissió (`theta_t`) es calculen aplicant la llei de Snell i es guarden en un vector del mateix format. Com que $n' > n$, no es consideren casos de reflexió total.

A continuació, dins d'un bucle, es calculen els coeficients de Fresnel per a les components perpendicular i paral·lela. També es calcula la diferència de fase (δ) i les intensitats (I_{\perp} i I_{\parallel}) en funció dels angles i les constants definides. Els resultats es guarden en un fitxer (junt amb els valors corresponents al mateix exercici sense considerar interferències) `data_values.dat` per a facilitar la seva anàlisi posterior. Per tal d'obtenir la suma dels primers termes, s'ha de generar un altre loop dins del que recorre tots els angles, sumant per diferents valors de N llegits d'una llista.

```

1 % Constants
2 lambda = 550e-9; % Lambda en metres
3 n_vidre = 2.5; % Index refractiu del vidre
4 d = 6.8e-6; % d en metres
5 N_values = [2, 3, 5, 10]; % N values to consider
6
7 % Angles incidents (en radians)
8 theta_i = linspace(0, pi/2, 1000);
9 theta_t = zeros(1, length(theta_i));
10
11 % Llista de coeficients de Fresnel:
12 r_par = zeros(1, length(theta_i));
13 r_perp = zeros(1, length(theta_i));
14 delta = zeros(1, length(theta_i));
15 I_par = zeros(1, length(theta_i));

```

```

16 I_perp = zeros(1,length(theta_i));
17 parR = zeros(1,length(theta_i));
18 perpR = zeros(1,length(theta_i));
19
20 % Initialize matrices for summed intensities
21 I_parN_values = zeros(length(N_values), length(theta_i));
22 I_perpN_values = zeros(length(N_values), length(theta_i));
23
24 % Angles de transmissio i formules de Fresnel
25 for i = 1:length(theta_i)
26     theta_ii = theta_i(i);
27     theta_ti = asin((1/n_vidre)*sin(theta_ii));
28     theta_t(i) = theta_ti;
29     r_par(i) = (tan(theta_ti-theta_ii))/(tan(theta_ti+theta_ii));
30     r_perp(i) = (sin(theta_ti-theta_ii))/(sin(theta_ti+theta_ii));
31     parR(i) = 1-r_par(i)^2;
32     perpR(i) = 1-r_perp(i)^2;
33     delta(i) = (4*pi/lambda)*d*n_vidre*cos(theta_ti);
34     I_perp(i) = abs((perpR(i))/(1-r_perp(i)^2*exp(1i*delta(i))))^2;
35     I_par(i) = abs((parR(i))/(1-r_par(i)^2*exp(1i*delta(i))))^2;
36
37 % Calcular per diferents N
38 for j = 1:length(N_values)
39     N = N_values(j);
40
41     % Initialitzar la suma per camps
42     E_sum_par = 0;
43     E_sum_perp = 0;
44
45     % Sumar primers N termes
46     for ell = 0:N-1
47         E_sum_par = E_sum_par + (parR(i) * r_par(i)^(2*ell) * exp(1i*ell
48             *delta(i)));
49         E_sum_perp = E_sum_perp + (perpR(i) * r_perp(i)^(2*ell) * exp(1i
50             *ell*delta(i)));
51     end
52
53     % Guardar en una matriu
54     I_parN_values(j, i) = abs(E_sum_par)^2;
55     I_perpN_values(j, i) = abs(E_sum_perp)^2;
56 end
57
58 % Convertir theta_i de radians a graus
59 theta_i_degrees = rad2deg(theta_i);
60
61 % Matrius amb dades
62 data_perp = [theta_i_degrees', I_perp', I_perpN_values'];
63 data_parallel = [theta_i_degrees', I_par', I_parN_values'];
64
65 % Fitxer guardat
66 save('data_perp.dat', 'data_perp', '-ascii');
67 save('data_parallel.dat', 'data_parallel', '-ascii');

```

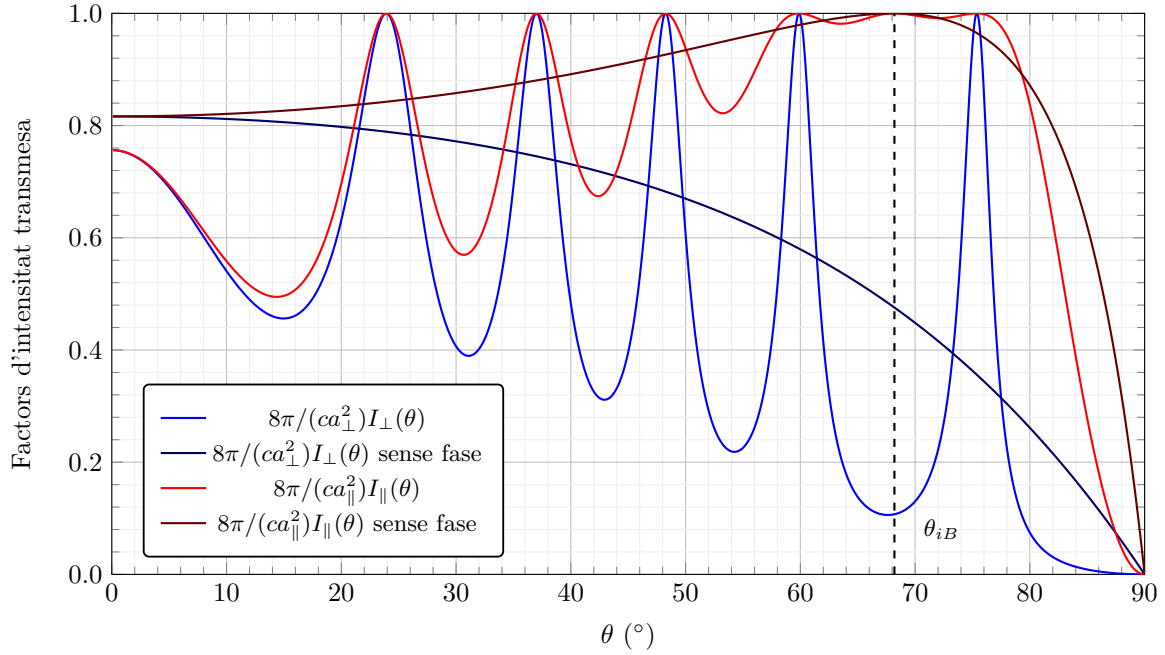


Figura 2: Dependència dels factors de transmissió paral·lela i perpendicular (en una lamina plano-paral·lela) en funció de l'angle d'incidència

En incidència normal ($\theta = 0^\circ$), tant la component paral·lela com la perpendicular són iguals, ja que el pla d'incidència no està definit ($\vec{s} \times \hat{n} = \vec{0}$). A mesura que l'angle d'incidència θ augmenta, es comencen a produir interferències a les components netes de reflexió i transmissió. En particular, quan les dues components de la intensitat transmesa són màximes, s'ha produït interferència destructiva en la reflexió. Això implica que tota la intensitat de l'ona incident que no ha estat reflectida s'ha transmesa. En aquests casos, s'observen pics on la intensitat total transmesa és igual a la intensitat de l'ona incident. Hi ha un punt on la "periodicitat" dels pics de la component paral·lela sembla interrompre's: aquest punt correspon a l'angle de Brewster (θ_{iB}). En aquest angle, no hi ha component paral·lela reflectida, ja que tota la intensitat d'aquesta component és transmesa. Aquest fet, per conservació de l'energia, produeix un altre pic clar a la transmissió. D'altra banda, la component perpendicular no es veu afectada de manera especial en aquest angle, i el seu comportament segueix sense interrupcions. Per acabar, quan s'arriba a $\theta = 90^\circ$, no es pot transmetre res, de manera que hi ha un 0 a les dues components. Si no hi haguessin interferències es sumarien les intensitats individuals de cada ona:

$$I_T = \frac{c}{8\pi} \sum_{\ell=0}^{\infty} E_\ell E_\ell^* = \sum_{\ell=0}^{\infty} I_\ell = \frac{c}{8\pi} \sum_{\ell=0}^{\infty} \infty A^2 E_0 r^{4\ell} = \frac{c}{8\pi} \frac{A}{1+r^2}$$

produiria una corba suau. S'han inclòs a la Figura 2, on s'observa l'angle de Brewster i també el fet de que la component paral·lela és sempre més gran o igual que la perpendicular.

2.2 Suma finita

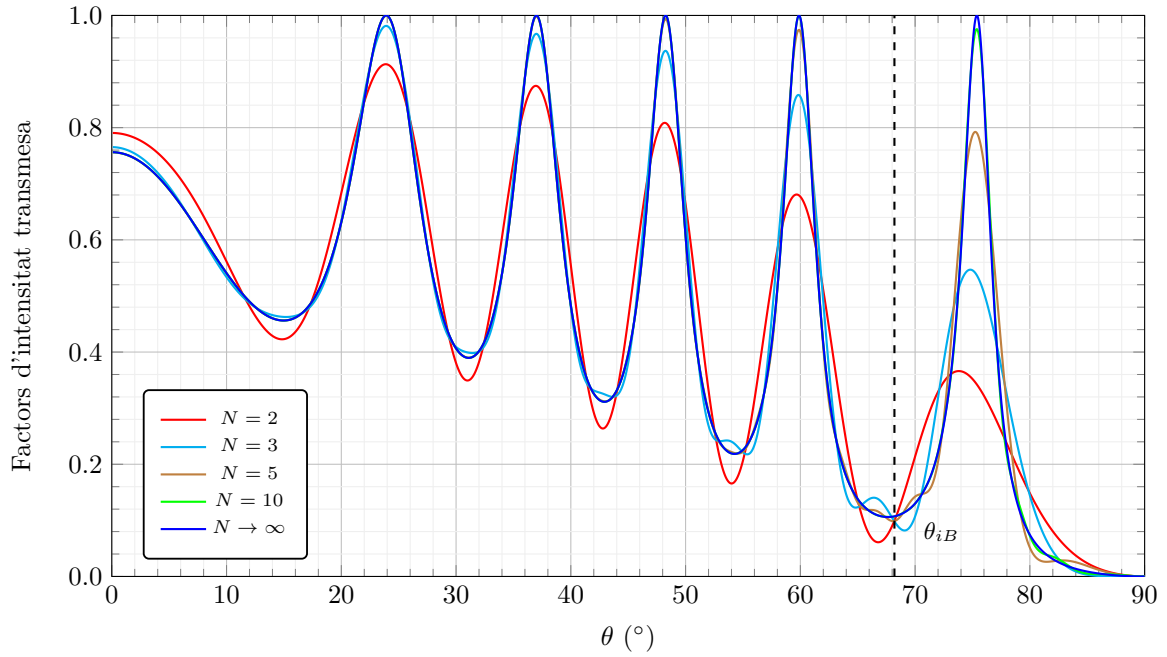


Figura 3: Dependència dels factors de transmissió paral·lela i perpendicular (en una lamina plano-paral·lela) en funció de l'angle d'incidència, amb la suma infinita i la suma finita.

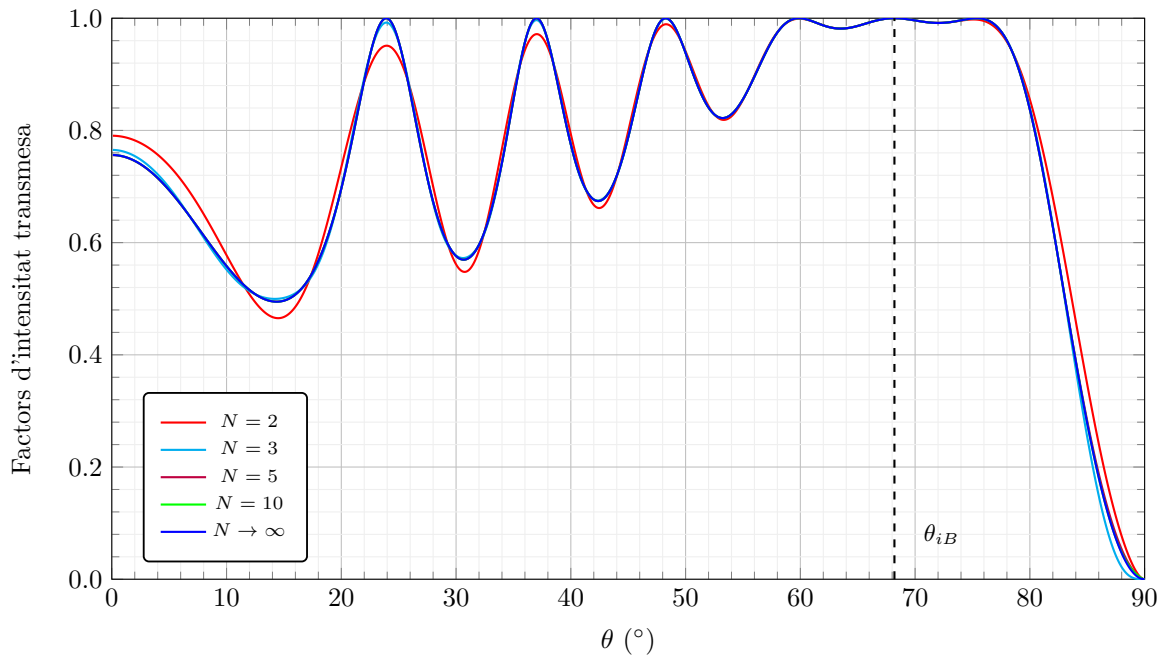


Figura 4: Dependència dels factors de transmissió paral·lela i perpendicular (en una lamina plano-paral·lela) en funció de l'angle d'incidència, amb la suma infinita i la suma finita.

De les figures anteriors es pot veure com ràpidament s'ajusta al incrementar el valor de N . El grau de convergència no es el mateix per a les dues components, tampoc per a qualsevol valor dels angles. Concretament, per a la component paral·lela s'ajusta més ràpidament, es veu adaptada a partir de $N=3$, mentre que per la perpendicular s'adapta bé per a $N=4$ per angles menors que el θ_{iB} . Si es vol adaptació a qualsevol angle, aquesta darrera component s'ha de calcular amb $10 \leq N$.

2.3 Fabry-Perot

Assumint $R = 0.8$, s'imposa una condició sobre el paràmetre r . No es pot distingir entre paral·lela i perpendicular, es calcula la intensitat total:

$$r = \sqrt{R} \implies tt' = 1 - r^2 = 1 - R = 0.2$$

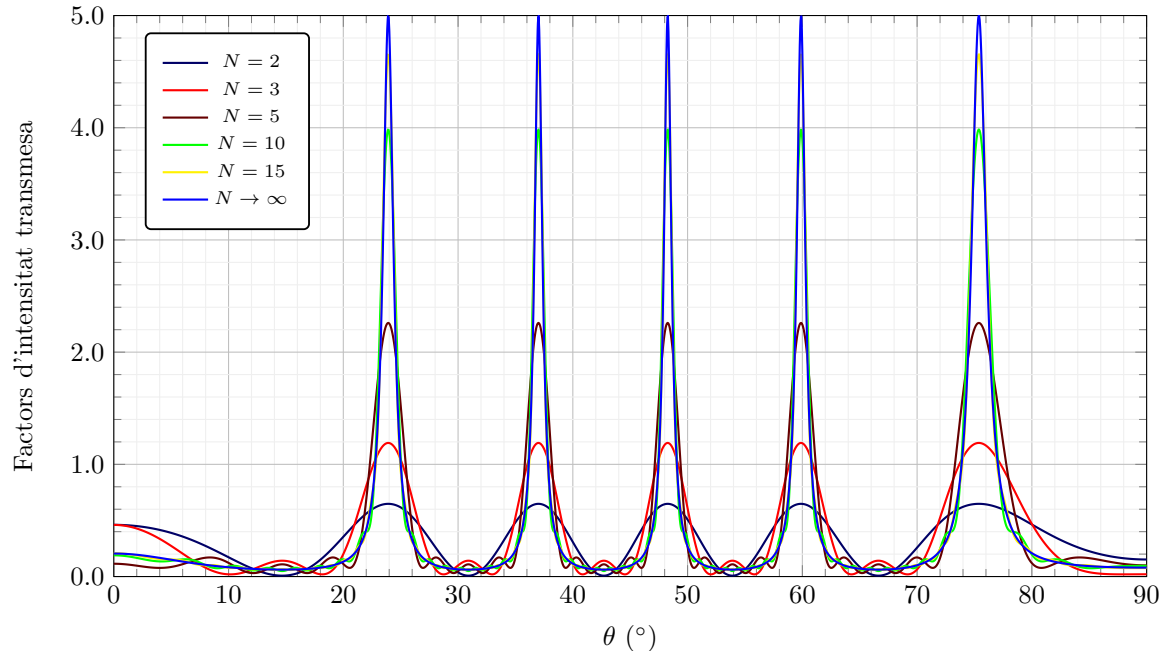


Figura 5: Dependència dels factors de transmissió paral·lela i perpendicular (en una lamina plano-paral·lela) en funció de l'angle d'incidència, amb la suma infinita i la suma finita $N = 10$

S'observa que en general la intensitat transmesa és menor en el cas de $R = 0.8$ que el tractat a l'apartat anterior i que els pics observats són més estrets. Els punts on es troben els màxims correspon a interferència constructiva de la component transmesa, donats quan $\delta = 2m\pi$ per $m \in \mathbb{Z}$, es a dir quan $\frac{2n'd \cos \theta'}{\lambda} = m$. Els mínims corresponen a interferència destructiva. Cal destacar que no convergeix més ràpidament que en el cas anterior, s'han de fer més iteracions, especialment per a angles propers a 0, 90 o en els pics. El codi per a aquest apartat és similar al primer, imposant $R = 0.8$ en comptes de calcular mitjançant els coeficients de Fresnel:

```

1  % Constants
2  lambda = 550e-9; % Longitud dona en metres
3  n_vidre = 2.5; % Index de refraccio del vidre
4  d = 6.8e-6; % d en metres
5  r = sqrt(0.8); % Coeficient de reflexio
6  tt = sqrt(1 - r^2); % Coeficient de transmissio
7
8  % Angles d'incidencia (en radians)
9  theta_i = linspace(0, pi/2, 1000);
10 theta_t = zeros(1, length(theta_i));
11
12 % Llistes
13 delta = zeros(1, length(theta_i));
14 I = zeros(1, length(theta_i));
15 I_N_terms = zeros(length(theta_i), 5);
16
17 % N valors a considerar
18 N_values = [2, 3, 5, 10, 15];
19

```

```
20 % Bucle pels angles dincidencia
21 for i = 1:length(theta_i)
22     theta_ii = theta_i(i);
23     theta_ti = asin((1 / n_vidre) * sin(theta_ii));
24     theta_t(i) = theta_ti;
25
26     % Diferencia de fase
27     delta(i) = (4 * pi / lambda) * d * n_vidre * cos(theta_ti);
28     I(i) = tt^2 * abs(1 / (1 - r^2 * exp(1i * delta(i))))^2;
29
30
31     % Calcul de la intensitat per a cada N especific
32     for j = 1:length(N_values)
33         N = N_values(j);
34         E_sum = 0;
35         for ell = 0:N-1
36             E_sum = E_sum + (tt * r^(2*ell) * exp(1i * ell * delta(i)));
37         end
38         I_N_terms(i, j) = abs(E_sum)^2;
39     end
40 end
41
42 % Convertir theta_i a graus
43 theta_i_degrees = rad2deg(theta_i);
44
45 % Crear la matriu de dades
46 data = [theta_i_degrees', I', I_N_terms];
```