BMI Mathe 3: Stochastik Uebungsaufgaben

M.Sc. Marcel Tiator

October 21, 2020

1 Beispiel 1.21

In einem Restaurant bestellen gewhnlich 40% der Gste keine Vorspeise und der 30% der Gste keine Nachspeise. 15% der Gste nehmen weder eine Vorspeise noch eine Nachspeise. Wie gro ist die Wahrscheinlichkeit, dass

a) ein Gast keine Nachspeise nimmt, unter der Bedingung, dass er auch keine Vorspeise genommen hat?

b) ein Gast, der eine Vorspeise gewhlt hat, auch noch eine Nachspeise nimmt?

1.1 Loesung a)

Sei N das Ereignis der Wahl einer Nachspeise und V das Ereignis der Wahl einer Vorspeise.

$$\begin{aligned} ges.: & P(\overline{N}|\overline{V}) \\ geg.: & P(\overline{N}|\overline{V}) = \frac{P(\overline{N} \cap \overline{V})}{P(\overline{V})} \\ & P(\overline{V}) = 0.4 \\ & P(\overline{N} \cap \overline{V}) = 0.15 \end{aligned} \tag{1}$$

$$P(\overline{N}|\overline{V}) = \frac{P(\overline{N} \cap \overline{V})}{P(\overline{V})} = \frac{0.15}{0.4} = 0.375$$

1.2 Loesung b)

Sei N das Ereignis der Wahl einer Nachspeise und V das Ereignis der Wahl einer Vorspeise.

$$
\begin{aligned}
ges. :& P(N|V) \\
geg. :& P(N|V) = \frac{P(N \cap V)}{P(V)} \\
& P(V) = 1 - P(\overline{V}) = 1 - 0.4 = 0.6 \\
& P(N) = 1 - P(\overline{N}) = 1 - 0.3 = 0.7 \\
& P(N \cap V) = P(N) + P(V) - P(N \cup V) \\
\\
& P(N \cup V) = 1 - P(\overline{N \cup V}) \qquad (2) \\
& P(\overline{N \cup V}) = P(\overline{N} \cap \overline{V}) = 0.15 \\
& P(N \cup V) = 1 - P(\overline{N \cup V}) = 1 - 0.15 = 0.85 \\
\\
& P(N \cap V) = 0.6 + 0.7 - 0.85 = 0.45 \\
\\
& P(N|V) = \frac{P(N \cap V)}{P(V)} = \frac{0.45}{0.6} = 0.75
\end{aligned}
$$

2 Aufgabe 27

Die Trompeter Andreas, Berti und Christoph lassen in ihrem Musikverein den Zufall bestimmen, wer die solistischen Stellen zu spielen hat. Dazu wuerfeln sie vor dem Stueck einmal mit einem fairen Wuerfel. Andreas spielt das Solo, wenn eine 1 faellt, Berti bei einer 2 oder 3, Christoph schlielich bei 4, 5 oder 6.
Andreas spielt Solostellen mit einer Wahrscheinlichkeit von 80% perfekt (mit einer Wahrscheinlichkeit von 20% ist mindestens ein schraeger Ton dabei), Berti spielt Soli mit einer Wahrscheinlichkeit von 90% perfekt, Christoph mit einer Wahrscheinlichkeit von 95%.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird ein Trompetensolo perfekt zu Gehoer gebracht?

b) Bei einem Solo war deutlich ein falscher Ton zu hoeren. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat Berti das Solo gespielt?

2.1 Loesung a)

Sei S das Ereignis des Spielens eines Solos. Sei W_1 das Wuerfeln der Augenzahl 1. Sei W_2 das Wuerfeln der Augenzahlen $2, 3$ und W_2 das Wuerfeln der Augenzahlen $4, 5, 6$.

$$
\begin{aligned}
ges. &: P(S) \\
geg. &: P(S) = \sum_{i=1}^{3} P(S|W_i) \cdot P(W_i) \\
W_1 &= \{1\} \\
W_2 &= \{2,3\} \\
W_3 &= \{4,5,6\} \\
\Omega &= \{1,2,3,4,5,6\} \\
P(S|W_1) &= 0.8 \\
P(S|W_2) &= 0.9 \\
P(S|W_3) &= 0.95
\end{aligned} \tag{3}
$$

$$
\begin{aligned}
P(W_1) &= \frac{|W_1|}{|\Omega|} = \frac{1}{6} \\
P(W_2) &= \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \\
P(W_3) &= \frac{3}{6} = \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P(S) &= P(S|W_1) \cdot P(W_1) + P(S|W_2) \cdot P(W_2) + P(S|W_3) \cdot P(W_3) \\
&\approx 0.908
\end{aligned}
$$

2.2 Loesung b)

$$
\begin{aligned}
ges. :&P(W_2|\overline{S}) \\
geg. :&P(W_2|\overline{S}) = \frac{P(\overline{S}|W_2) \cdot P(W_2)}{P(\overline{S})} \\
\\
P(\overline{S}) &= 1 - P(S) = 1 - 0.908 = 0.092 \\
P(\overline{S}|W_2) &= 1 - P(S|W_2) = 1 - 0.9 = 0.1 \\
P(W_2|\overline{S}) &\approx 0.362
\end{aligned} \tag{4}
$$

3 Verstaendnisaufgabe Rechenregeln 1

$P(A) + P(\overline{A})$ is gleich?

a) $P(A \cup \overline{A})$

b) $P(\Omega)$

c) $P(\emptyset)$

d) 1

3.1 Loesung

a), b), d)

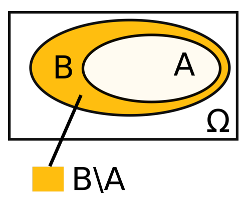
4 Verstaendnisaufgabe Rechenregeln 2

Ist folgende Aussage wahr? $P(A) \geq P(B)$ falls $A \subseteq B$.

4.1 Loesung

Die Aussage ist falsch.

$$
\begin{aligned}
A \subseteq B \iff B &= A \cup (B \setminus A) \\
P(B) &= P(A) + P(B \setminus A) \qquad (5) \\
\text{daher ist } P(B) &\geq P(A)
\end{aligned}
$$



5 Verstaendnisaufgabe Rechenregeln 3

Ordnen Sie die folgenden Aussagen den entsprechenden Termen zu:

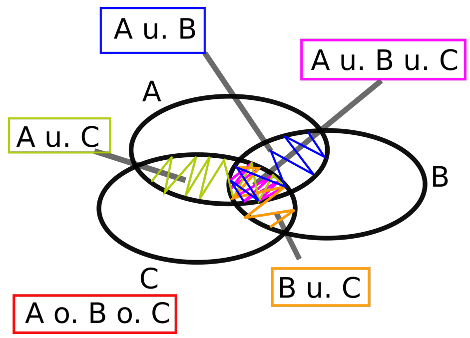
a) Es passiert A oder B.

b) Es passiert A und B.

1. $A \cap B$
2. $A \cup B$

5.1 Loesung

a) gehoert zu 2., b) gehoert zu 1.



6 Verstaendnisaufgabe Rechenregeln 4

Gegeben sind die Ereignisse A, B und C. Die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A oder B oder C kann folgendermaen berechnet werden:

1. $P(A \cap B \cap C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(C \cap A) + P(A \cup B \cup C)$
2. $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(C \cap A)$
3. $P(A \cap B \cap C) = P(A) + P(B) + P(C)$
4. $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C)$

6.1 Loesung

Die richtige Antwort ist 4.. Mit $P(A) + P(B) + P(C)$ haben wir die Flchen $P(A \cap B), P(B \cap C)$ und $P(A \cap C)$ zu viel berechnet, daher ziehen wir diese ab (siehe Abbildung 6.1). Jedoch haben wir damit die Mitte geloescht, wodurch diese mit $P(A \cap B \cap C)$ wieder addieren.