Algoritmos e Estruturas de Dados II

Grafos V:

Percursos em Digrafos e Ordenação Topológica

Ricardo J. G. B. Campello

Parte deste material é baseado em adaptações e extensões de slides disponíveis em http://ww3.datastructures.net (Goodrich & Tamassia).

1

Organização

- Revisão (DFS)
- Percursos em Digrafos
  - Exemplo de Execução (DFS)
  - Propriedades e Aplicações
- Digrafos Acíclicos (DAGs)
- Ordenação Topológica

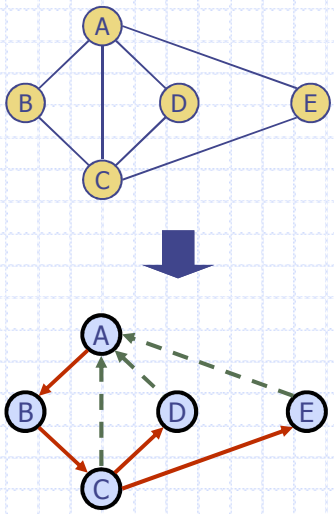
Algoritmos & Estruturas de Dados II

2

Revisão (Algoritmo DFS)

```
Algoritmo DFS(G, v)
    v.label ← DESCOBERTO
    process_vertex(v)
    para todo e ∈ incidentEdges(G, v)
      y ← opposite(G, v, e)
      se y.label = NÃO-DESCOBERTO
        y.parent ← v
        DFS(G, y)
      senão
        se ¬ ( y.label = EXPLORADO )
          process_edge(e)
    v.label ← EXPLORADO
```

Assume-se que inicialmente os vértices de **G** são rotulados como "não descobertos".



Algoritmos & Estruturas de Dados II

3

Percursos em Digrafos

- DFS e BFS podem ser adaptados para digrafos.
- Essas adaptações são mais genéricas:
  - qualquer grafo não-direcionado pode ser transformado em um grafo direcionado.
- Mudança:
  - percurso só é feito no sentido correto das arestas, ou seja, apenas através das arestas de saída.
    - logo, não é preciso se preocupar em não processar duas vezes a mesma aresta
      - arestas podem ser processadas no vértice de saída

Algoritmos & Estruturas de Dados II

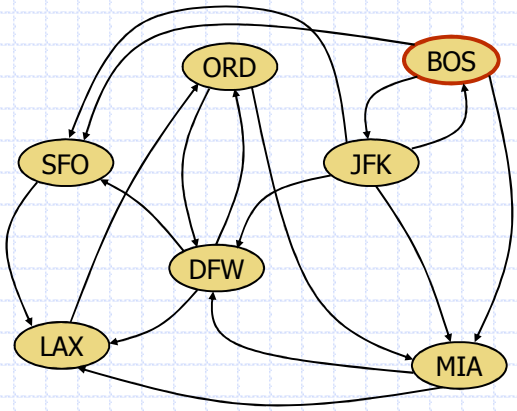
4

DFS em Digrafos

- **DFS direcionado**:
  - as arestas que não são de descoberta não são mais necessariamente de retorno, pois não mais necessariamente apresentam a propriedade de conectar um vértice a um ancestral na árvore DFS.
  - De fato, as arestas podem também ser de:
    - avanço: conectam um vértice a um descendente na árvore DFS
    - cruzamento: conectam um vértice a outro que não é nem descendente nem ancestral na árvore DFS

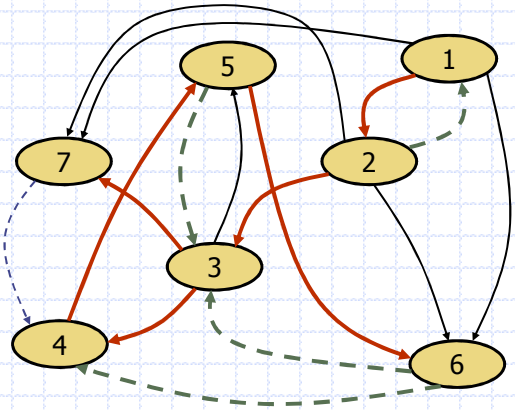
DFS em Digrafos

- Exemplo:



DFS em Digrafos

- Arestas:
  - De descoberta
  - De retorno
  - De avanço
  - De cruzamento



Percursos em Digrafos

- As adaptações de DFS e BFS para digrafos permitem:
  - Obter, para cada vértice de G, o **subgrafo alcançável** a partir daquele vértice.
  - Calcular os **componentes fortemente conexos** de G e testar se G, como um todo, é fortemente conexo.
  - Encontrar um **ciclo direcionado** em G.
  - Obter um **caminho com o menor número de arestas** entre dois vértices (BFS).
  - ...

Percursos em Digrafos

- Propriedade 1: DFS ou BFS em um digrafo G partindo de um vértice s explora todos os vértices e arestas alcançáveis a partir de s.
  - Exercício: Justificar a Propriedade 1
- Propriedade 2: As arestas de descoberta DFS ou BFS formam uma árvore com caminhos direcionados de s para cada um dos vértices alcançáveis a partir de s.
  - Exercício: Justificar a Propriedade 2

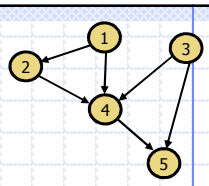
Percursos em Digrafos

- Análise:
  - **Tempo**: Se G for implementado com uma lista de adjacências ou estrutura alternativa, então DFS (BFS) roda em tempo $O(n_s+m_s)$, onde n_s e m_s são respectivamente os números de vértices e arestas alcançáveis a partir de s.
    - Cada vértice e aresta alcançáveis são explorados uma única vez
      - no caso de aresta, a partir da sua origem
  - **Espaço**:
    - DFS utiliza $O(n_s)$ espaço auxiliar com a pilha de recursão devido à n_s chamadas recursivas com espaço constante em cada uma delas.
    - BFS não possui recursão, mas utiliza espaço auxiliar $O(n_s)$ para armazenar a fila de vértices Q.

Percursos em Digrafos

- Teste de Conexão Forte: Podemos executar DFS ou BFS múltiplas vezes e verificar se o grafo é fortemente conexo verificando se a partir de cada vértice tomado como origem todos os demais vértices são alcançáveis ou não:
  - Tempo $O(n(n+m))$ no pior caso.
    - Qual o pior caso?
  - Nota: É possível executar um teste de conexão forte em tempo $O(n+m)$ com apenas duas execuções de DFS ou BFS, uma sobre o digrafo original G e a outra sobre o seu transposto G^T:
    - Desafio: Descubra o porquê sem checar a literatura!!!

Digrafos Acíclicos



- Grafos Direcionados Acíclicos (DAGs): Como sugere o nome, são digrafos que não possuem ciclos. Exemplos:
  - Hierarquia de heranças entre classes em orientação a objetos
  - Pré-requisitos entre disciplinas de um curso
  - Restrições de cronograma entre tarefas de um projeto
- Ordenação Topológica: Trata-se de uma ordenação dos vértices $v_1, \ldots, v_n$ de um DAG G tal que para qualquer aresta direcionada (v_i, v_j) tem-se $i < j$.
  - Caminhos direcionados percorrem os vértices em ordem crescente.
    - Qualquer caminho entre v_i e v_j não passa por v_k tal que $k < i$ ou $k > j$.
  - Vide exemplo simples acima (no canto superior direito)

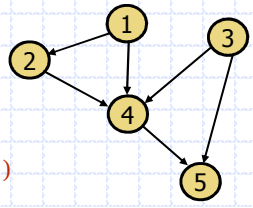
Ordenação Topológica

- Algoritmo mais popular utiliza as seguintes **Propriedades de DAGs**:
  - Necessariamente possuem ao menos um vértice sem arestas incidentes de entrada (apenas arestas de saída ou nenhuma).
    - Se todo vértice possui ao menos uma aresta de entrada, necessariamente existe ao menos um ciclo.
  - Se tais vértices e as suas arestas de saída forem removidas, o grafo restante também é um DAG.
- **Idéia do Algoritmo**: Remover sucessivamente aqueles vértices sem arestas incidentes de entrada, rotulando os mesmos em ordem crescente de remoção e removendo também as respectivas arestas de saída.

Ordenação Topológica

```
Algoritmo TopologicalSort(G)
    S ← Pilha Vazia
    para todo u ∈ vertices(G)
      se u.inDegree = 0
        push(S, u)
    t ← 1
    enquanto ¬ empty(S)
      u ← pop(S)
      u.topsort ← t
      t ← t + 1
      para todo e ∈ outgoingEdges(G, u)
        v ← opposite(G, u, e)
        v.inDegree ← v.inDegree − 1
        se v.inDegree = 0
          push(S, v)
```

- Note que os vértices não precisam ser de fato removidos do grafo.
- É suficiente modificar artificialmente uma contagem de arestas de entrada de cada vértice.
- Exemplo:



- Espaço e tempo de execução de pior caso: $O(n + m)$
- Detecta Existência de Ciclos:
  - G não é DAG se um ou mais vértices não for removido / rotulado.

Ordenação Topológica

```
compute_indegrees(graph *g, int in[]) {
    int i,j;
    for (i=1; i<=g->nvertices; i++) in[i] = 0;
    for (i=1; i<=g->nvertices; i++)
        for (j=0; j<g->degree[i]; j++)
            in[g->edges[i][j]]++;
}
```

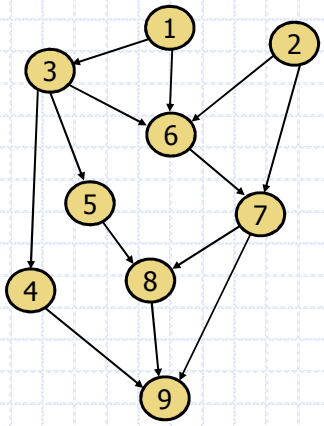
```
topsort(graph *g, int sorted[]) {
    int indegree[MAXV];  /* indegree of each vertex */
    queue zeroin;        /* vertices of indegree 0 */
    int x, y;            /* current and next vertex */
    int i, j;            /* counters */
    compute_indegrees(g,indegree);
    init_queue(&zeroin);
    for (i=1; i<=g->nvertices; i++)
        if (indegree[i] == 0) enqueue(&zeroin,i);
    j=0;
    while (empty(&zeroin) == FALSE) {
        j = j+1;
        x = dequeue(&zeroin);
        sorted[j] = x;
        for (i=0; i<g->degree[x]; i++) {
            y = g->edges[x][i];
            indegree[y] --;
            if (indegree[y] == 0) enqueue(&zeroin,y);
        }
    }
    if (j != g->nvertices)
        printf("Not a DAG -- only %d vertices found\n",j);
}
```

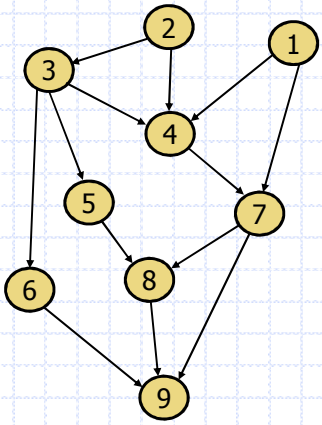
- Note o uso de uma fila ao invés de pilha.
  - De fato, qualquer ED pode ser utilizada.
  - Diferentes EDs podem produzir ordens topológicas distintas.
  - Ordenação topológica não é única!

Algoritmos & Estruturas de Dados II

Ordenação Topológica

Exemplos:





Algoritmos & Estruturas de Dados II

Exercícios

1. Modifique o pseudo-código DFS de grafos não direcionados para que este seja válido para grafos direcionados. Para tanto, faça as modificações necessárias ao TAD grafo apresentado em aula.
   - Dica: Note que não mais é necessário se preocupar em não processar cada aresta mais de uma vez, apenas no vértice de saída.
2. Modifique a implementação C do algoritmo `dfs` vista em aula para que esta seja válida para grafos direcionados.
3. É necessário mudar algo na especialização do algoritmo DFS para busca de ciclos vista em aula se o grafo for direcionado? Explique.
   - Nota: Observe que o *princípio* do uso de DFS para busca de ciclos não muda, ou seja, arestas de *retorno* continuam caracterizando ciclos (agora direcionados) e continuam sendo caracterizadas por levarem até um vértice já *descoberto* mas ainda não totalmente *explorado*.
4. Repita os Exercícios 1 e 2 para busca em largura (BFS).

Exercícios

5. Bob pretende fazer um conjunto de disciplinas de especialização. Ele está interessado nos seguintes cursos: LA15, LA16, LA22, LA31, LA32, LA126, LA127, LA141 e LA169. Dados os pré-requisitos desses cursos abaixo, mostre como usar ordenação topológica para encontrar uma seqüência de cursos que permita satisfazer todos os pré-requisitos:
   - **LA15** e **LA22**: nenhum
   - **LA16** e **LA31**: LA15
   - **LA32**: LA16 e LA31
   - **LA126**: LA22 e LA32
   - **LA127**: LA16
   - **LA141**: LA22 e LA16
   - **LA169**: LA32

Mostre uma tal seqüência e responda justificadamente se ela é única ou não!

Referências

- M. T. Goodrich and R. Tamassia, *Data Structures and Algorithms in C++/Java*, John Wiley & Sons, 2002/2005.
- N. Ziviani, Projeto de Algoritmos, Thomson, 2a. Edição, 2004.
- T. H. Cormen, C. E. Leiserson, and R. L. Rivest, *Introduction to Algorithms*, MIT Press, 2nd Edition, 2001.
- S. Skiena e M. Revilla, *Programming Challenges: The Programming Contest Training Manual*, Springer-Verlag, 2003.