Transformações Geométricas 2D

SCC0250 - Computação Gráfica

Prof. Fernando V. Paulovich
http://www.icmc.usp.br/~paulovic
paulovic@icmc.usp.br

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação (ICMC)
Universidade de São Paulo (USP)

9 de abril de 2010

Sumário

Sumário

Introdução

- **Transformações Geométricas** são operações aplicadas à descrição geométrica de um objeto para mudar sua
  - posição
  - orientação
  - tamanho

- Transformações geométricas básicas
  - translação
  - rotação
  - escala
- Outras: reflexão e cisalhamento

Sumário

Translação

Translação

- A translação consiste em adicionar *offsets* às coordenadas que definem um objeto

$$x' = x + t_x$$

$$y' = y + t_y$$

- Usando notação matricial, uma translação 2D pode ser descrita como

$$\mathbf{P}' = \mathbf{P} + \mathbf{T}$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \end{bmatrix}$$

Rotação

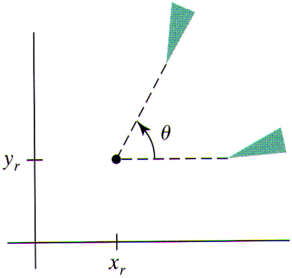
Rotação

- Define-se uma transformação de rotação por meio de um **eixo de rotação** e um **ângulo de rotação**

- Em 2D a rotação se dá em um caminho circular no plano, rotacionando o objeto considerando-se um eixo perpendicular ao plano xy

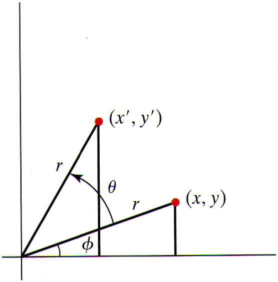
Rotação

- Parâmetros de rotação 2D são o ângulo θ de rotação e o ponto (x_r, y_r) de rotação, que é a intersecção do eixo de rotação com o plano xy
  - Se $\theta > 0$ a rotação é anti-horária
  - Se $\theta < 0$ a rotação é horária



Rotação

- Para simplificar considera-se que o ponto de rotação está na origem do sistema de coordenadas
    - O raio r é constante, ϕ é o ângulo original de $\mathbf{P} = (x, y)$ e θ é o ângulo de rotação



Rotação

- Sabendo que

$$\cos(\phi + \theta) = \frac{x'}{r} \Rightarrow x' = r\cos(\phi + \theta)$$

$$\operatorname{sen}(\phi + \theta) = \frac{y'}{r} \Rightarrow y' = r\operatorname{sen}(\phi + \theta)$$

- como

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta$$

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta + \operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\beta$$

- então

$$x' = r\cos\phi \cdot \cos\theta - r\operatorname{sen}\phi \cdot \cos\theta$$

$$y' = r\cos\phi \cdot \operatorname{sen}\theta - r\operatorname{sen}\phi \cdot \cos\theta$$

Rotação

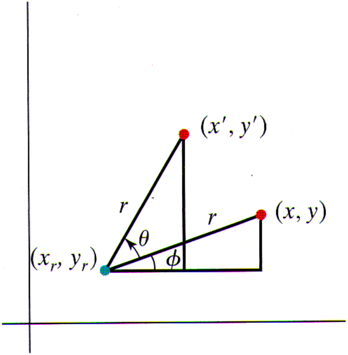
- P pode ser descrito por meio de coordenadas polares
$$x = r\cos\phi, \qquad y = r\,\mathrm{sen}\,\phi$$

- Então por substituição
$$x' = x\cos\theta - y\,\mathrm{sen}\,\theta$$
$$y' = x\,\mathrm{sen}\,\theta + y\cos\theta$$

- Escrevendo na forma matricial temos
$$\mathbf{P}' = \mathbf{R}\cdot\mathbf{P}$$
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\mathrm{sen}\,\theta \\ \mathrm{sen}\,\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Rotação

- Rotação em torno de um ponto arbitrário (x_r, y_r)



Rotação

- Encontrando x'

$$\cos(\phi + \theta) = \frac{x' - x_r}{r}$$

$$x' = r\cos(\phi + \theta) + x_r$$

$$x' = x_r + r\cos\phi \cdot \cos\theta + r \operatorname{sen}\phi \cdot \operatorname{sen}\theta$$

- como

$$\cos\phi = \frac{x - x_r}{r}, \qquad \operatorname{sen}\phi = \frac{y - y_r}{r}$$

- então

$$x' = x_r + (x - x_r)\cos\theta - (y - y_r)\operatorname{sen}\theta,$$

$$y' = y_r + (x - x_r)\operatorname{sen}\theta + (y - y_r)\cos\theta$$

Rotação

- A forma matricial pode ser conseguida criando-se um vetor coluna, mas existe uma forma melhor de se fazer isso que será apresentada mais adiante

$$\mathbf{P}' = \mathbf{P} \cdot \mathbf{R} + \mathbf{T}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_r - x_r\cos\theta + y_r\operatorname{sen}\theta \\ y_r - x_r\operatorname{sen}\theta - y_r\cos\theta \end{bmatrix}$$

Transformação de Corpo Rígido

Transformação de Corpo Rígido

- A **rotação** e a **translação** é uma **Transformação de Corpo Rígido** pois direcionam ou movem um objeto sem deformá-lo
  - Mantém ângulos e distâncias entre as coordenadas do objeto

Escala

Escala

- Para alterar o tamanho de um objeto aplica-se o operador de escala
- Multiplica-se as coordenadas de um objeto por fatores de escala

$$x' = x \cdot s_x, \qquad y' = y \cdot s_y$$

- Na forma matricial

$$\mathbf{P}' = \mathbf{S} \cdot \mathbf{P}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Escala

- Propriedades de s_x e s_y
  - s_x e s_y devem ser maiores que zero
  - Se $s_x > 1$ e $s_y > 1$ o objeto aumenta
  - Se $s_x < 1$ e $s_y < 1$ o objeto diminui
  - Se $s_x = s_y$ a escala é uniforme
  - Se $s_x \neq s_y$ a escala é diferencial

Escala

- Pela formulação definida, o objeto é escalado e movido

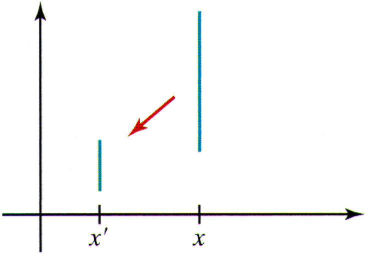


Figura: Escala de uma linha usando $s_x = s_y = 0.5$

Escala

- Para se manter a posição do objeto, escolhe-se uma posição fixa (x_f, y_f), normalmente o centróide do objeto, e **escala-se a distância entre as coordenadas do objeto e esse ponto fixo**

$$x' - x_f = (x - xf) \cdot s_x$$
$$y' - y_f = (y - yf) \cdot s_y$$

- ou seja

$$x' = x \cdot s_x + x_f(1 - s_x)$$
$$y' = y \cdot s_y + y_f(1 - s_y)$$

Escala

- Na forma matricial podemos escrever adicionando um vetor coluna

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_f(1 - s_x) \\ y_f(1 - s_y) \end{bmatrix}$$

- $x_f(1 - s_x)$ e $y_f(1 - s_y)$ são constantes para todas as coordenadas do objeto

Sumário

Coordenadas Homogêneas

- As três transformações básicas podem ser expressas por

$$\mathbf{P'} = \mathbf{M_1} \cdot \mathbf{P} + \mathbf{M_2}$$

- $\mathbf{M_1}$: matriz 2×2 com fatores multiplicativos
- $\mathbf{M_2}$: matriz coluna com termos para translação

- Para se aplicar uma sequencia de transformações, esse formato não ajuda
- Eliminando a adição de matrizes, uma sequencia de transformações pode ser definida por uma multiplicação de matrizes

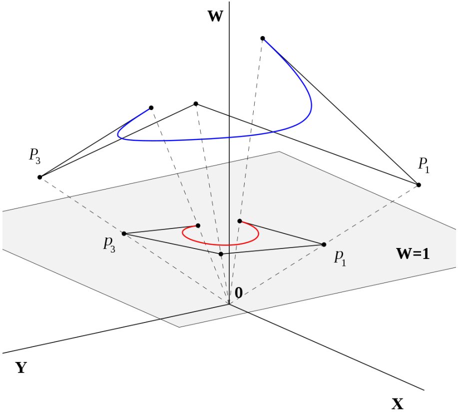
Coordenadas Homogêneas

- Isso pode ser feito expandindo-se para uma representação 3×3
- A terceira coluna é usada para os termos da translação

Coordenadas Homogêneas

- Uma forma de expansão é conhecida como coordenadas homogêneas
- Um ponto no espaço 2D representado em coordenadas homogêneas é descrito por 3 valores (x_h, y_h, h), onde h é o parâmetro homogêneo $(h \neq 0)$
- Pode ser vista com a projeção de um ponto 3D no plano (Cartesiano) h

Coordenadas Homogêneas



Coordenadas Homogêneas

- A projeção do sistema homogêneo para o sistema Cartesiano se dá pela seguinte relação

$$x = \frac{x_h}{h}, \qquad y = \frac{y_h}{h}$$

- h pode ser qualquer valor diferente de zero, mas por conveniência, escolhemos $h = 1$
- Então as coordenadas homogêneas (x_h, y_h, h) ficam $(x, y, 1)$
- Usando coordenadas homogêneas, as transformações são convertidas em multiplicações de matrizes

Coordenadas Homogêneas – Translação 2D

- A translação no espaço homogêneo é dada por

$$x'_h = 1 \cdot x_h + 0 \cdot y_h + t_x \cdot h$$

$$y'_h = 0 \cdot x_h + 1 \cdot y_h + t_y \cdot h$$

$$h = 0 \cdot x_h + 0 \cdot y_h + 1 \cdot h$$

Coordenadas Homogêneas – Translação 2D

- Definindo na forma matricial temos

$$\begin{bmatrix} x'_h \\ y'_h \\ h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_h \\ y_h \\ h \end{bmatrix}$$

- Voltando ao espaço Cartesiano

$$x'_h/h = (1 \cdot x_h + 0 \cdot y_h + t_x \cdot h)/h \Rightarrow x' = x + t_x$$

$$y'_h/h = (0 \cdot x_h + 1 \cdot y_h + t_y \cdot h)/h \Rightarrow y' = y + t_y$$

$$h/h = (0 \cdot x_h + 0 \cdot y_h + 1 \cdot h)/h \Rightarrow 1 = 1$$

Coordenadas Homogêneas – Translação 2D

- Por conveniência, com $h = 1$, definimos a translação no espaço Cartesiano como

$$\mathbf{P}' = \mathbf{T}(t_x, t_y) \cdot \mathbf{P}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Coordenadas Homogêneas – Rotação 2D

- Uma rotação pode ser definida usando coordenadas homegêneas da seguinte forma

$$\mathbf{P}' = \mathbf{R}(\theta) \cdot \mathbf{P}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Coordenadas Homogêneas – Escala 2D

- Uma escala pode ser definida usando coordenadas homegêneas da seguinte forma

$$\mathbf{P}' = \mathbf{S}(s_x, s_y) \cdot \mathbf{P}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Sumário

Translação Inversa

- Para a translação, inverte-se o sinal das translações

$$\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -t_x \\ 0 & 1 & -t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rotação Inversa

- Uma rotação inversa é obtida trocando o ângulo de rotação por seu negativo

$$\mathbf{R}^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta & 0 \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Isso rotaciona no sentido horário
- $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T$

Escala Inversa

- O inverso da escala é obtido trocando os parâmetros por seus inversos

$$\mathbf{S}^{-1}(s_x, s_y) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s_x} & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{s_y} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sumário

Introdução

- Usando representações matriciais homogêneas, uma sequencia de transformações pode ser representada como uma única matriz obtida a partir de multiplicações de matrizes de transformação

$$\begin{aligned} \mathbf{P}' = & \quad \mathbf{M_2} \cdot \mathbf{M_1} \cdot \mathbf{P} \\ = & \quad (\mathbf{M_2} \cdot \mathbf{M_1}) \cdot \mathbf{P} \\ = & \quad \mathbf{M} \cdot \mathbf{P} \end{aligned}$$

- A transformação é dada por $\mathbf{M}$ ao invés de $\mathbf{M_1}$ e $\mathbf{M_2}$

Compondo Translações

- Para se compor duas translações podemos fazer

$$\begin{aligned} \mathbf{P}' = & \ \mathbf{T}(t_{2_x}, t_{2_y}) \cdot \{\mathbf{T}(t_{1_x}, t_{1_y}) \cdot \mathbf{P}\} \\ = & \ \{\mathbf{T}(t_{2_x}, t_{2_y}) \cdot \mathbf{T}(t_{1_x}, t_{1_y})\} \cdot \mathbf{P} \\ = & \ \mathbf{T}(t_{2_x} + t_{1_x}, t_{2_y} + t_{1_y}) \cdot \mathbf{P} \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & t_{2_x} \\ 0 & 1 & t_{2_y} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_{1_x} \\ 0 & 1 & t_{1_y} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_{1_x} + t_{2_x} \\ 0 & 1 & t_{1_y} + t_{2_y} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Compondo Rotações

- Para se compor duas rotações podemos fazer

$$\begin{aligned} \mathbf{P}' &= \mathbf{R}(\theta_2) \cdot \{\mathbf{R}(\theta_1) \cdot \mathbf{P}\} \\ &= \{\mathbf{R}(\theta_2) \cdot \mathbf{R}(\theta_1)\} \cdot \mathbf{P} \\ &= \mathbf{R}(\theta_1 + \theta_2) \cdot \mathbf{P} \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\operatorname{sen}\theta_1 & 0 \\ \operatorname{sen}\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\operatorname{sen}\theta_2 & 0 \\ \operatorname{sen}\theta_2 & \cos\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta_1 + \theta_2) & -\operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2) & 0 \\ \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2) & \cos(\theta_1 + \theta_2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Compondo Escalas

- Para se compor duas escalas podemos fazer

$$\begin{aligned} \mathbf{P}' = & \ \mathbf{S}(s_{2_x}, s_{2_y}) \cdot \{\mathbf{S}(s_{1_x}, s_{1_y}) \cdot \mathbf{P}\} \\ = & \ \{\mathbf{S}(s_{2_x}, s_{2_y}) \cdot \mathbf{S}(s_{1_x}, s_{1_y})\} \cdot \mathbf{P} \\ = & \ \mathbf{S}(s_{1_x} s_{2_x}, s_{1_y} s_{2_y}) \cdot \mathbf{P} \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} s_{2_x} & 0 & 0 \\ 0 & s_{2_y} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{1_x} & 0 & 0 \\ 0 & s_{1_y} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{1_x} \cdot s_{2_x} & 0 & 0 \\ 0 & s_{1_y} \cdot s_{2_y} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rotação 2D com Ponto de Rotação

- Rotação com ponto de rotação é feita combinando-se múltiplas transformações
  - Movo o ponto de rotação para a origem
  - Executo a rotação
  - Movo o ponto de rotação para a posição inicial

$$\mathbf{R}(x_r, y_r, \theta) = \mathbf{T}(x_r, y_r) \cdot \mathbf{R}(\theta) \cdot \mathbf{T}^{-1}(x_r, y_r)$$

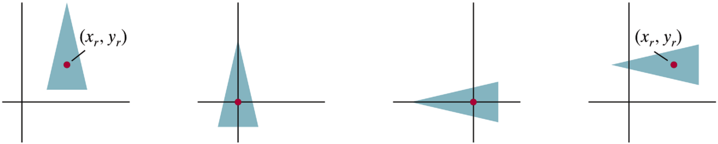
$$\mathbf{R}(x_r, y_r, \theta) = \mathbf{T}(x_r, y_r) \cdot \mathbf{R}(\theta) \cdot \mathbf{T}(-x_r, -y_r)$$

Rotação 2D com Ponto de Rotação

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & x_r \\ 0 & 1 & y_r \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -x_r \\ 0 & 1 & -y_r \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & x_r - x_r\cos\theta + y_r\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & y_r - y_r\cos\theta - x_r\operatorname{sen}\theta \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rotação 2D com Ponto de Rotação



(a) Original Position of Object and Pivot Point

(b) Translation of Object so that Pivot Point (x_r, y_r) is at Origin

(c) Rotation about Origin

(d) Translation of Object so that the Pivot Point is Returned to Position (x_r, y_r)

Escala 2D com Ponto Fixo

- Escala com ponto fixo é feita combinando-se múltiplas transformações
  - Movo o ponto fixo para a origem
  - Executo a escala
  - Movo o ponto fixo para sua posição original

$$\mathbf{S}(x_f, y_f, s_x, s_y) = \mathbf{T}(x_f, y_f) \cdot \mathbf{S}(s_x, s_y) \cdot \mathbf{T}^{-1}(x_f, y_f)$$

$$\mathbf{S}(x_f, y_f, s_x, s_y) = \mathbf{T}(x_f, y_f) \cdot \mathbf{S}(s_x, s_y) \cdot \mathbf{T}(-x_f, -y_f)$$

Escala 2D com Ponto Fixo

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & x_f \\ 0 & 1 & y_f \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -x_f \\ 0 & 1 & -y_f \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} s_x & 0 & x_f(1 - s_x) \\ 0 & s_y & y_f(1 - s_y) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Escala 2D com Ponto Fixo

(a) Original Position of Object and Fixed Point

(b) Translate Object so that Fixed Point (x_f, y_f) is at Origin

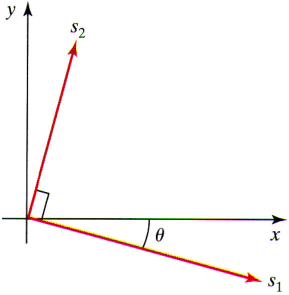
(c) Scale Object with Respect to Origin

(d) Translate Object so that the Fixed Point is Returned to Position (x_f, y_f)

Escala 2D em Direções Gerais

- Os parâmetros s_x e s_y realizam a escala nas direções de x e y
- Para outras direções, rotaciona, escala e rotaciona de volta

$$\mathbf{S}(s_1, s_2, \theta) = \mathbf{R}^{-1}(\theta) \cdot \mathbf{S}(s_1, s_2) \cdot \mathbf{R}(\theta)$$



Escala 2D em Direções Gerais

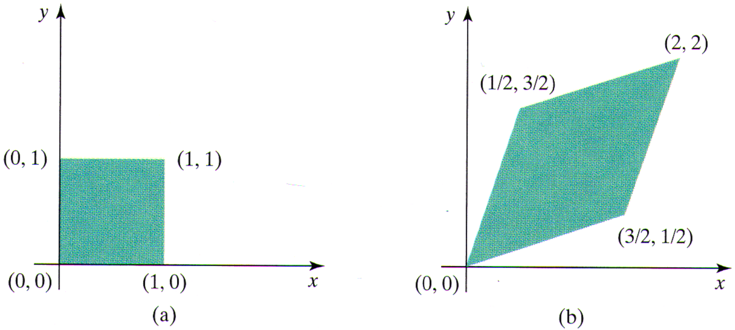


Figura: Transformação com $s_1 = 1$, $s_2 = 2$ e $\theta = 45^0$

Propriedade da Concatenação de Matrizes

- Multiplicação de matriz é associativa

$$\mathbf{M_3} \cdot \mathbf{M_2} \cdot \mathbf{M_1} = (\mathbf{M_3} \cdot \mathbf{M_2}) \cdot \mathbf{M_1} = \mathbf{M_3} \cdot (\mathbf{M_2} \cdot \mathbf{M_1})$$

- Multiplicação nos dois sentidos é possível, da esquerda para a direita e da direita para a esquerda
  - **Pré-multiplicação**: da esquerda para a direita – as transformação são especificadas na ordem em que são aplicadas $(\mathbf{M_1} \rightarrow \mathbf{M_2} \rightarrow \mathbf{M_3})$
  - **Pós-multiplicação**: da direita para a esquerda – as transformação são especificadas na ordem reversa em que são aplicadas $(\mathbf{M_3} \rightarrow \mathbf{M_2} \rightarrow \mathbf{M_1})$
    - OpenGL usa pós-multiplicação

Propriedade da Concatenação de Matrizes

- Multiplicação de matrizes podem não ser comutativas
  $\mathbf{M_2} \cdot \mathbf{M_1} \neq \mathbf{M_1} \cdot \mathbf{M_2}$

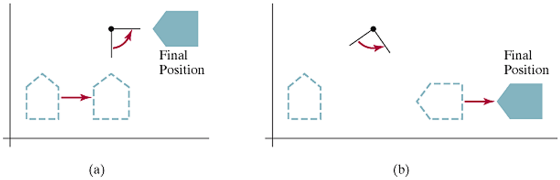


Figura: (a) primeiro o objeto é transladado depois rotacionado em 45^0 (b) primeiro o objeto é rotacionado em 45^0, depois transladado.

Sumário

Reflexão

- Espelha-se as coordenadas de um objeto relativo a um eixo de reflexão, rotacionando em um ângulo de 180^0

- Reflexão em $y = 0$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Reflexão

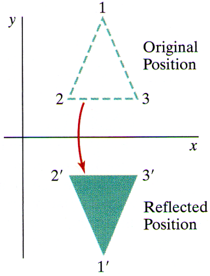
- Reflexão em $x = 0$

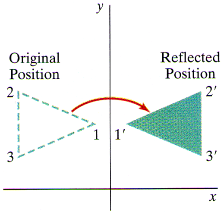
$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

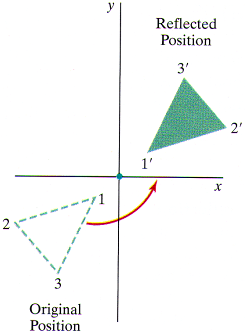
- Reflexão em $x = 0$ e $y = 0$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Reflexão


y
1
Original
Position
2
3
x
2′
3′
Reflected
Position
1′


y
Original
Position
Reflected
Position
2
2′
1
1′
3
3′
x


y
Reflected
Position
3′
2′
1′
x
1
2
3
Original
Position

Cisalhamento

- Distorce o formato do objeto na direção de x ou y

- Cisalhamento na direção de x

$$\begin{bmatrix} 1 & sh_x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- O que transforma as coordenadas como

$$x' = x + sh_x \cdot y$$

$$y' = y$$

Cisalhamento

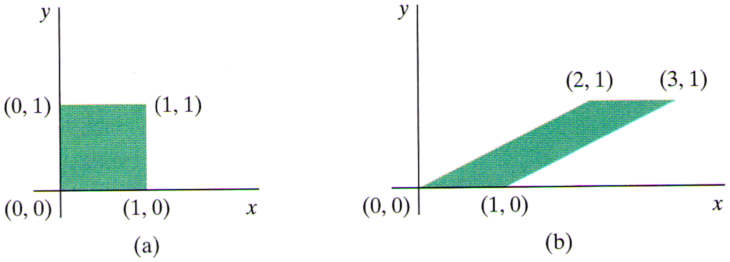


Figura: Convertendo um quadrado em um paralelogramo usando $sh_x = 2$.

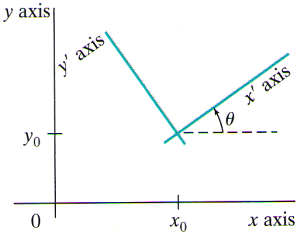
Sumário

Transformações entre Sistemas de Coordenadas

- Aplicações de computação gráfica envolvem a transformação de um sistema de coordenadas em outro em vários estágios do processamento da cena

- Para se transformar um sistema de coordenadas em outro
  - Translado (x_0, y_0) para a origem $(0, 0)$
  - Rotaciono em $-\theta$

$$\mathbf{M}_{xy,x'y'} = \mathbf{R}(-\theta) \cdot \mathbf{T}(-x_0, -y_0)$$



Transformações entre Sistemas de Coordenadas

- Uma propriedade importante da matriz de transformação é que a sub-matriz de rotação 2×2 é ortonormal

$$\begin{bmatrix} r_{xx} & r_{xy} & tr_x \\ r_{yx} & r_{yy} & tr_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Isto é, cada linha (ou coluna) (r_{xx}, r_{xy}) e (r_{yx}, r_{yy}) formam um conjunto de vetores unitários ortogonais (ortonormais)

$$r_{xx}^2 + r_{xy}^2 = r_{yx}^2 + r_{yy}^2 = 1$$

$$r_{xx} \cdot r_{yx} + r_{xy} \cdot r_{yy} = 0$$

Transformações entre Sistemas de Coordenadas

- Isso é facilmente verificado porque

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta \\ -\operatorname{sen}\theta \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \operatorname{sen}\theta \\ \cos\theta \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- e

$$(\cos\theta \times \operatorname{sen}\theta) + (-\operatorname{sen}\theta \times \cos\theta) = 0$$

Transformações entre Sistemas de Coordenadas

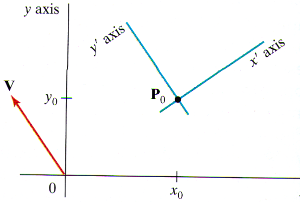
- Assim, se esses vetores forem transformados pela submatriz de rotação temos
  - (r_{xx}, r_{xy}) é transformado em um vetor unitário ao longo do eixo-x
  - (r_{xy}, r_{yy}) é transformado em um vetor unitário ao longo do eixo-y

$$\begin{bmatrix} r_{xx} & r_{xy} & tr_x \\ r_{yx} & r_{yy} & tr_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r_{xx} \\ r_{xy} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} r_{xx} & r_{xy} & tr_x \\ r_{yx} & r_{yy} & tr_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r_{yx} \\ r_{yy} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Transformações entre Sistemas de Coordenadas

- Usando essa propriedade, outro método para fazer a transformação de um sistema de coordenadas em outro pode ser derivado
    - Para isso, inicialmente descrevemos a orientação do sistema de coordenadas $x'y'$ por meio de um vetor **V** indicando a direção positiva do eixo y



Transformações entre Sistemas de Coordenadas

- Então, podemos especificar $\mathbf{V}$ como um ponto no sistema de coordenadas xy relativo a origem, descrito como um vetor unitário

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{V}}{|\mathbf{V}|} = (v_x, v_y)$$

- e podemos obter o vetor unitário u ortogonal a v na direção do eixo x'

$$\mathbf{u} = (v_y, -v_x) = (u_x, u_y)$$

Transformações entre Sistemas de Coordenadas

- Como qualquer matriz de rotação pode ser expressa por um conjunto de vetores ortonormais, então podemos escrever a matriz de rotação que faz $x'y'$ coincidir com xy como
$$\begin{bmatrix} u_x & u_y & 0 \\ v_x & v_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Transformações entre Sistemas de Coordenadas

- Isso porque

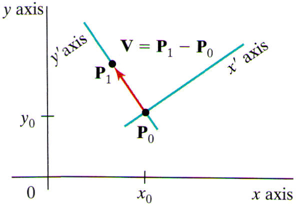
$$\begin{bmatrix} u_x & u_y & 0 \\ v_x & v_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u_x & u_y & 0 \\ v_x & v_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Transformações entre Sistemas de Coordenadas

- É possível especificar $\mathbf{V}$ relativo a um ponto $\mathbf{P_0}$ no sistema de coordenadas $x'y'$ ao invés de especificá-lo em relação a origem, para isso podemos fazer

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{P_1} - \mathbf{P_0}}{|\mathbf{P_1} - \mathbf{P_0}|}$$



Sumário

Exemplo de Transformações OPenGL

```c
#include <GL/glut.h>
#include <stdlib.h>

//armazena os vértices de um objeto
typedef struct VERTEX
{
    int x;
    int y;
};

//armazena a descrição geométrica de um objeto
typedef struct OBJECT
{
    VERTEX *vertices;
    int nrvertices;
};

OBJECT *object; //objeto global que será desenhado
```

Exemplo de Transformações OPenGL

```
OBJECT *create_object()
{
    OBJECT *obj = (OBJECT *)malloc(sizeof(OBJECT));
    obj->nrvertices = 5;
    obj->vertices = (VERTEX *)malloc(obj->nrvertices*sizeof(VERTEX));
    obj->vertices[0].x = 110;
    obj->vertices[0].y = 50;
    obj->vertices[1].x = 110;
    obj->vertices[1].y = 70;
    obj->vertices[2].x = 100;
    obj->vertices[2].y = 80;
    obj->vertices[3].x = 90;
    obj->vertices[3].y = 70;
    obj->vertices[4].x = 90;
    obj->vertices[4].y = 50;
    return obj;
}
```

Exemplo de Transformações OPenGL

```
VERTEX calculate_centroid(OBJECT *obj)
{
    int i;

    VERTEX cent;
    cent.x = 0;
    cent.y = 0;

    for (i=0; i < obj->nrvertices; i++)
    {
        cent.x += obj->vertices[i].x;
        cent.y += obj->vertices[i].y;
    }

    cent.x /= obj->nrvertices;
    cent.y /= obj->nrvertices;

    return cent;
}
```

Exemplo de Transformações OPenGL

```
void init(void)
{
    glClearColor(1.0, 1.0, 1.0, 0.0);
    glMatrixMode(GL_PROJECTION);
    glLoadIdentity();
    gluOrtho2D(0.0, 200.0, 0.0, 150.0);

    object = create_object(); //cria o objeto
}

void draw_object(OBJECT* obj)
{
    int i;

    glBegin(GL_POLYGON); //desenha uma linha
    for (i=0; i < obj->nrvertices; i++)
    {
        glVertex2i(obj->vertices[i].x, obj->vertices[i].y);
    }
    glEnd();

}

void keyboard(unsigned char key, int x, int y)
{
    if (key == 27)
    {
        if (object != NULL)
        {
            free(object->vertices); //elimina o objeto
            free(object); //elimina o objeto
            exit(1);
        }
    }
}
```

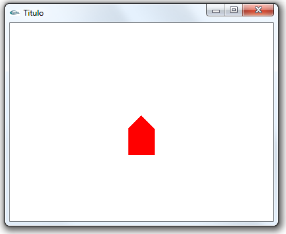
Exemplo de Transformações OPenGL

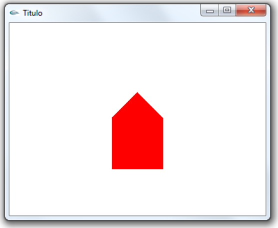
```
void draw(void)
{
    glClear(GL_COLOR_BUFFER_BIT); //desenha o fundo (limpa a janela)
    glColor3f(1.0, 0.0, 0.0); //altera o atributo de cor

    glMatrixMode(GL_MODELVIEW); //garante que a matrix seja a ModelView
    draw_object(object); //desenha o objeto

    glFlush(); //processa as rotinas OpenGL o mais rápido possível
}

int main(int argc, char**argv)
{
    glutInit(&argc, argv);
    glutInitDisplayMode(GLUT_SINGLE | GLUT_RGB);
    glutInitWindowPosition(50, 100);
    glutInitWindowSize(400, 300);
    glutCreateWindow("Titulo");

    init(); // inicialização (após a criação da janela)
    glutDisplayFunc(draw); // registra a função de desenho
    glutKeyboardFunc(keyboard);
    glutMainLoop(); // desenha tudo e espera por eventos

    return EXIT_SUCCESS;
}
```

OPenGL – Pós-Multiplicação

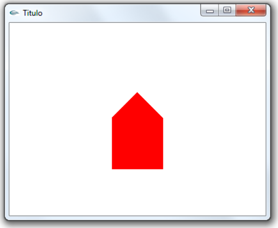
```
void draw(void)
{
    glClear(GL_COLOR_BUFFER_BIT); //desenha o fundo (limpa a janela)
    glColor3f(1.0, 0.0, 0.0); //altera o atributo de cor

    VERTEX cent = calculate_centroid(object); //calcula o centróide

    glMatrixMode(GL_MODELVIEW); //garante que a matrix seja a ModelView
    glTranslatef(cent.x, cent.y, 0); //movo o centróide para a posição original
    glScalef(2, 2, 0); //faço a escala
    glTranslatef(-cent.x, -cent.y, 0); //movo o centróide para a origem

    draw_object(object);

    glFlush(); //processa as rotinas OpenGL o mais rápido possível
}
```

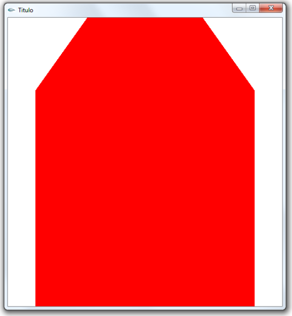
OPenGL – Pós-Multiplicação





OPenGL – Cumulativo





- O método *draw(...)* é chamado mais de uma vez (modificação do tamanho da janela) – o objeto é escalado duas vezes

OPenGL – Cumulativo

Solução

- Carregar a matriz identidade (*glLoadIdentity()*)

```
void draw(void)
{
    glClear(GL_COLOR_BUFFER_BIT); //desenha o fundo (limpa a janela)
    glColor3f(1.0, 0.0, 0.0); //altera o atributo de cor

    VERTEX cent = calculate_centroid(object); //calcula o centróide

    glMatrixMode(GL_MODELVIEW); //garante que a matrix seja a ModelView
    glLoadIdentity(); //carrega a matrix identidade
    glTranslatef(cent.x, cent.y, 0); //movo o centróide para a posição original
    glScalef(2, 2, 0); //faço a escala
    glTranslatef(-cent.x, -cent.y, 0); //movo o centróide para a origem

    draw_object(object);

    glFlush(); //processa as rotinas OpenGL o mais rápido possível
}
```

OPenGL – Ordem de Transformações

Alterando a Ordem das Transformações

- Primeiro rotaciono, depois faço a translação

```
void draw(void)
{
    glClear(GL_COLOR_BUFFER_BIT); //desenha o fundo (limpa a janela)
    glColor3f(1.0, 0.0, 0.0); //altera o atributo de cor

    VERTEX cent = calculate_centroid(object); //calculo o centróide

    glMatrixMode(GL_MODELVIEW); //garante que a matrix seja a ModelView
    glLoadIdentity(); //carrega a matrix identidade
    glTranslatef(cent.x, cent.y, 0); //movo o centróide para a posição original
    glRotatef(90, 0, 0, 1); //rotaciono
    glTranslatef(-cent.x, -cent.y, 0); //movo o centróide para a origem
    glTranslatef(50, 0, 0); //faço a translação

    draw_object(object);

    glFlush(); //processa as rotinas OpenGL o mais rápido possível
}
```

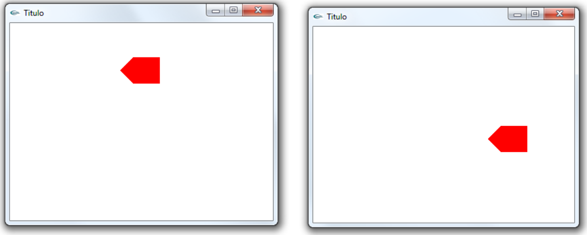
OPenGL – Ordem de Transformações

Alterando a Ordem das Transformações

- Primeiro faço a translação, depois rotaciono

```
void draw(void)
{
    glClear(GL_COLOR_BUFFER_BIT); //desenha o fundo (limpa a janela)
    glColor3f(1.0, 0.0, 0.0); //altera o atributo de cor

    VERTEX cent = calculate_centroid(object); //calculo o centróide

    glMatrixMode(GL_MODELVIEW); //garante que a matrix seja a ModelView
    glLoadIdentity(); //carrega a matrix identidade
    glTranslatef(50, 0, 0); //faço a translação
    glTranslatef(cent.x, cent.y, 0); //movo o centróide para a posição original
    glRotatef(90, 0, 0, 1); //rotaciono
    glTranslatef(-cent.x, -cent.y, 0); //movo o centróide para a origem

    draw_object(object);

    glFlush(); //processa as rotinas OpenGL o mais rápido possível
}
```

OPenGL – Ordem de Transformações



- A ordem das transformações leva a resultados completamente diferentes