Pesquisa Operacional / Programação Matemática

Método Simplex em tabelas

Alysson M. Costa – ICMC/USP

Método simplex em tabelas

- Maneira prática de se trabalhar.
- Interessante para compreensão do método
- Não é eficiente computacionalmente
  - Simplex revisado

Método simplex em tabelas

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad f(\mathbf{x}) &= \mathbf{cx} \\ \mathbf{Ax} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Todos os parâmetros necessários para resolução aparecem na tabela abaixo:

Tabela 2.18
Coeficientes de um problema de otimização linear.

$x_1 \quad x_2 \quad \ldots \quad x_n \quad \longleftarrow$	variáveis
$c_1 \quad c_2 \quad \ldots \quad c_n \quad f \longleftarrow$	coeficientes da função objetivo
$\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \ldots \quad \mathbf{a}_n \quad \mathrm{b} \longleftarrow$	coeficientes das restrições

Exemplo

$$\text{Minimizar} \quad f(x_1, x_2) = -x_1 - 2x_2$$
$$x_1 + x_2 \leq 6$$
$$x_1 - x_2 \leq 4$$
$$-x_1 + x_2 \leq 4$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$$

Matriz básica
(Sempre será a identidade, no método por tabelas)

Na forma padrão, temos:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
–1	**–2**	**0**	**0**	**0**	f
1	1	1	0	0	6
1	–1	0	1	0	4
–1	1	0	0	1	4

Sabemos que podemos escrever as variáveis básicas em função das variáveis não-básicas (no caso, x_1 e x_2). Como B=I, isso é feito muito facilmente:

$$
\begin{aligned}
x_3 &= b_1 - a_{11}x_1 - a_{12}x_2 = 6 - x_1 - x_2 \\
x_4 &= b_2 - a_{21}x_1 - a_{22}x_2 = 4 - x_1 + x_2 \\
x_5 &= b_3 - a_{13}x_1 - a_{32}x_2 = 4 + x_1 - x_2.
\end{aligned}
$$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
–1	**–2**	**0**	**0**	**0**	f
1	1	1	0	0	6
1	–1	0	1	0	4
–1	1	0	0	1	4

- Vemos que a solução não é ótima. Aumentando x_1 ou x_2, a função objetivo diminui.
- Aumentar x_2 diminui a f. objetivo com uma taxa -2

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
–1	**–2**	**0**	**0**	**0**	f
1	1	1	0	0	6
1	–1	0	1	0	4
–1	1	0	0	1	4

Ao aumentar x_2, o que tem que acontecer com as variáveis básicas ?

$$
\begin{aligned}
x_3 &= b_1 - a_{12}x_2 = 6 - x_2 \geq 0 \qquad (a_{12} > 0) &&\longrightarrow \quad x_2 \leq 6 \\
x_4 &= b_2 - a_{22}x_2 = 4 + x_2 \geq 0 \qquad (a_{22} < 0) && \\
x_5 &= b_3 - a_{32}x_2 = 4 - x_2 \geq 0 \qquad (a_{32} > 0). &&\longrightarrow \quad x_2 \leq 4
\end{aligned}
$$

Devemos nos preocupar apenas com x_3 e x_5

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
−1	**−2**	**0**	**0**	**0**	f
1	1	1	0	0	6
1	−1	0	1	0	4
−1	1	0	0	1	4

Solução ótima ilimitada

- Se, no caso anterior, tivéssemos:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
–1	**–2**	**0**	**0**	**0**	f
1	– 1	1	0	0	6
1	– 1	0	1	0	4
–1	– 1	0	0	1	4

$$x_3 = b_1 - a_{12}x_2 = 6 + x_2 \geq 0 \qquad (a_{12} > 0)$$
$$x_4 = b_2 - a_{22}x_2 = 4 + x_2 \geq 0 \qquad (a_{22} < 0)$$
$$x_5 = b_3 - a_{32}x_2 = 4 + x_2 \geq 0 \qquad (a_{32} > 0).$$

solução ilimitada!

Ao aumentar x_2, o que tem que acontecer com as variáveis básicas ?

$$x_3 = b_1 - a_{12}x_2 = 6 - x_2 \geq 0 \qquad (a_{12} > 0) \longrightarrow x_2 \leq 6$$
$$x_4 = b_2 - a_{22}x_2 = 4 + x_2 \geq 0 \qquad (a_{22} < 0)$$
$$x_5 = b_3 - a_{32}x_2 = 4 - x_2 \geq 0 \qquad (a_{32} > 0). \longrightarrow x_2 \leq 4$$

Para $x_2 = 4$, x_5 se anula.   f vale -8.

Logo, antes tínhamos: B=[3,4,5]   NB=[1,2]
Agora, temos: B=[3,4,2]   NB=[1,5]

$\boxed{(x_2 \text{ entra na base, } x_5 \text{ saí da base})}$

- Nova base: B=[3,4,2] NB=[1,5]
- As colunas da base devem formar uma identidade

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
–1	**–2**	**0**	**0**	**0**	f
1	1	1	0	0	6
1	–1	0	1	0	4
–1	1	0	0	1	4

Efetuar um pivoteamento!

variável que entra na base

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
–1	**–2**	**0**	**0**	**0**	f
1	1	1	0	0	6
1	–1	0	1	0	4
–1	1	0	0	1	4

restrição atingida

pivô

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	**b**
VB	-1	$-2 \downarrow$	0	0	0	f
x_3	1	1	1	0	0	6
x_4	1	-1	0	1	0	4
$\leftarrow x_5$	-1	$\underline{1}$	0	0	1	4

$\downarrow$

novo pivô!

custos reduzidos das variáveis não-básicas!

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	**b**
VB	-3 $\downarrow$	0	0	0	2	$f+8$
x_3	$\underline{2}$	0	1	0	-1	2
x_4	0	0	0	1	1	8
x_2	-1	1	0	0	1	4

$\longrightarrow$ x_3 sai

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	**b**
VB	-3	0	0	0	2	$f+8$
x_3	$\underline{2}$	0	1	0	-1	2
x_4	0	0	0	1	1	8
x_2	-1	1	0	0	1	4

condição de otimalidade atingida: solução $x_1=1$, $x_2=5$, $f=11$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	**b**
VB	0	0	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	$f+11$
x_1	1	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	1
x_4	0	0	0	1	1	8
x_2	0	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	5

Algoritmo simplex em tabelas

Fase I: Determine uma tabela simplex inicial, isto é,

- a matriz dos coeficientes contém uma matriz identidade $m \times m$ (m é o número de equações) e o vetor independente $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$;
- a função objetivo é escrita em termos das variáveis não-básicas, isto é, os coeficientes das variáveis básicas são nulos.

Fase II:

1. Determine o menor dos custos relativos: c_k = mínimo $\{c_j$ para toda variável não-básica$\}$.

2. Se $c_k \geq 0$, então pare (a solução básica na iteração é ótima). Se não, a variável x_k entra na base.

3. Se $a_{ik} \leq 0$, $i = 1, ..., m$, então pare (não existe solução ótima finita). Se não, determine: $\frac{b_\ell}{a_{\ell k}} = \text{mínimo}\{ \frac{b_i}{a_{ik}}$ tal que $a_{ik} > 0, i = 1, \cdots, m\}$ (a variável básica da linha ℓ sai da base).

4. Atualize a tabela simplex (pivotamento no elemento (ℓ, k)). A variável x_k passa a ser a variável básica na linha ℓ. Faça iteração = iteração + 1 e retorne ao passo 1.