Programação Matemática – Lista 3

1. Coloque na forma padrão os seguintes problemas de programação linear:

a) Maximizar $-X_1 - 7X_2 + 8X_3 + X_4$
Sujeito a
$X_1 + X_2 - X_3 + X_4 \leq 4$
$X_1 + X_3 \geq 9$
$X_2 + X_3 + X_4 \geq 6$
$X_1 \geq 0,\ X_2 \geq 0,\ X_3 \geq 0,\ X_4 \geq 0$

b) Minimizar $3X_1 - 3X_2 + 7X_3$
Sujeito a
$X_1 + X_2 + X_3 \leq 40$
$X_1 + 9X_2 - 7X_3 \geq -5$
$5X_1 + 3X_2 \geq 2$
$X_1 \geq 0,\ X_2 \geq 0,\ \mathbf{X_3 \leq 0}$

c) Maximizar $-X_1 + X_2 - 3X_3$
Sujeito a
$X_1 + X_2 + X_3 \leq 25$
$X_1 + X_2 - X_3 \geq 10$
$|5X_1 + 3X_2| \leq 100$
$X_1 \geq 0,\ X_2 \geq 0$, $\mathbf{X_3}$ ***livre***

2. Escreva uma solução factível para o problema 1(a). A solução que voce escreveu é básica? Senão for escreva uma solução básica para o problema 1(a).

3. Escreva o problema 1(a) na forma matricial.

4. Escreva a matriz A e os vetores b e c (função objetivo) do problema 1(c).

5. Transforme o problema 1(a) em um problema de mínimo equivalente.

6. Esboce as regiões factíveis do conjunto $\{x \mid Ax \leq b \text{ e } x \geq 0\}$ onde A e b são dados abaixo. A região factível é vazia? É limitada ?

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$ b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 4 \\ -12 \\ 0 \end{bmatrix}$ c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 2 & 3 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 12 \\ 5 \end{bmatrix}$

7. Dado o problema de Programação Linear abaixo, transforme as restrições em um sistema de equações lineares, calcule todas as soluções básicas, informe quais soluções são viáveis e indique qual é a solução ótima.

a) maximizar $z = x_1 + x_2$
sujeito a: $x_1 + 5.x_2 \leq 5$
$2.x_1 + x_2 \leq 4$
$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$

b) maximizar $z = 3.x_1 + 4.x_2$
sujeito a: $2.x_1 + x_2 \leq 6$
$2.x_1 + 3.x_2 \leq 9$
$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$

c) maximizar $z = 5.x_1 + 2.x_2$

sujeito a: $x_1 + 2.x_2 \leq 9$

$x_1 \leq 3$

$x_2 \leq 4$

$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$

8. Para a forma padrão da programação linear, defina clara e sucintamente:
   a) solução básica;
   b) solução factível;
   c) solução básica factível;
   d) solução ótima;
   e) solução básica ótima;
   f) indique as condições para que uma solução factível não seja básica;
   g) indique as condições para que uma solução factível não seja ótima.

9. Considere os problemas:

a) ***Maximizar*** $f(x_1, x_2) = -3x_1 + 2x_2$

Sujeito a:

$x_1 + 2x_2 \geq 4$

$x_1 + x_2 \leq 1$

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$

Resp. (0 1)

b) ***Minimizar*** $f(x_1, x_2) = -x_1 + x_2$

Sujeito a:

$x_1 + 2x_2 \geq 4$

$x_1 + x_2 \leq 3$

$x_1 \leq 0,\ x_2 \geq 0$

Resp. (0 2)

c) ***Minimizar*** $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$

Sujeito a:

$-x_1 + x_2 \geq 2$

$2x_1 - x_2 \leq 6$

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$

Resp. (0 2)

d) ***Minimizar*** $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$

Sujeito a:

$-x_1 + x_2 \geq 2$

$2x_1 - x_2 \leq 6$

$x_1 + x_2 \leq 1$

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$

Resp. Infactível

Para cada um dos problemas, responda as seguintes questões:

a. Resolva o problema graficamente (isto é, desenhe a região factível e a(s) solução(ões) ótima(s)).

b. A solução $x_1 = x_2 = 0$ é um vértice da região factível? Identifique todos os vértices da região factível.

c. Desenhe as soluções $\mathbf{x}^1 = (x_1^1\ x_2^1) = (1\ 1)$ e $\mathbf{x}^2 = (x_1^2\ x_2^2) = (5,\ 1)$. Estas soluções são factíveis? Por que?

d. Considere agora uma outra função objetivo: ***Minimizar*** $f(x_1, x_2) = x_1 - x_2$. Verifique se a solução ótima obtida no item a. é também ótima considerando esta nova função objetivo. Há múltiplas soluções ótimas? Identifique no gráfico.

e. Considere que o valor de b_1 seja incrementado de 1 unidade, o que aconteceria com a solução do problema?

10. Considere a região de factibilidade dada pelas seguintes restrições:

$x_1 + x_2 \leq 2$

$2x_1 - x_2 \leq 6$

$x_1 + x_2 \leq 1$

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$

a) reescreva as restrições na forma padrão.
b) encontre todas as soluções básicas para o sistema.
c) dada a solução básica (0 0 2 6 1), escreva o sistema na forma B X_B = b – NB X_{NB}.
d) qual o valor máximo que x_1 pode assumir no sistema dado em (c) de modo que obtenhamos uma nova solução básica factível?

11) Utilize o Método Simplex para resolver os seguintes problemas

1. maximizar $z = 10.x_1 + 1.x_2$
sujeito a: $2.x_1 + 5.x_2 \leq 11$
$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$

2. maximizar $z = 1.x_1 + 1.x_2$
sujeito a: $1.x_1 + 5.x_2 \leq 5$
$2.x_1 + 1.x_2 \leq 4$
$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$

3. maximizar $z = 3.x_1 + 4.x_2$
sujeito a: $2.x_1 + 1.x_2 \leq 6$
$2.x_1 + 3.x_2 \leq 9$
$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$

4. minimizar $z = 1.x_1 + 2.x_2$
sujeito a: $1.x_1 + 3.x_2 \leq 11$
$2.x_1 + 1.x_2 \leq 9$
$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$

12) Utilize o Método Simplex na forma de tabelas para resolver os seguintes problemas.

a. maximizar $z = 1.x_1 + 2.x_2 + 3.x_3 + 1.x_4$
sujeito a: $3.x_1 + 2.x_2 + 1.x_3 + 4.x_4 \leq 10$
$5.x_1 + 3.x_2 + 2.x_3 + 5.x_4 \leq 5$
$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$

b. maximizar $z = 1.x_1 + 9.x_2 + 1.x_3$
sujeito a: $1.x_1 + 2.x_2 + 3.x_3 \leq 9$
$3.x_1 + 2.x_2 + 2.x_3 \leq 15$
$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$

13) Uma pequena fábrica de papel toalha manufatura três tipos de produtos A, B e C. A fábrica recebe o papel em grandes rolos. O papel é cortado, dobrado e empacotado. Dada a pequena escala da fábrica, o mercado absorverá qualquer produção a uma preço constante. O lucro unitário de cada produto é respectivamente R$ 1,00, R$ 1.5, e R$ 2,00. A tabela abaixo indica o tempo requerido para operação (em horas) em cada seção da fábrica, bem como a quantidade de máquinas disponíveis, que trabalham 40 horas por semana. Planeje a produção semanal da fábrica.

Seção	Produto A	Produto B	Produto C	Quantidade de máquina
Corte	8	5	2	3
Dobra	5	10	4	10
Empacotamento	0.7	1	2	2

14)(Livro -Bazaara, M. e J.J. Javis - ‘Linear Programming and Network Flows’ - John Wiley, 1977).
Resolva o problema abaixo pelo método simplex começando com a solução básica factível
$(x_1,x_2) = (4,0)$.
max $-x_1 + 2x_2$
s.a $3x_1 + 4x_2 = 12$
$2x_1 - x_2 \leq 12$

$x_1, x_2 \geq 0$

15) (Bazaara, M. e J.J. Javis - 'Linear Programming and Network Flows' - John Wiley, 1977). Resolva o seguinte problema pelo método simplex e, a cada iteração, identifique B e B^{-1}.

$$
\begin{aligned}
Max \quad & z = 3x_1 + 2x_2 + x_3 \\
s.\ a. \quad & 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 \leq 3 \\
& -x_1 + x_2 + x_3 \leq 5 \\
& x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

16) Considere o problema:

$$
\begin{aligned}
\max \quad & 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 5x_4 \\
\text{s.a} \quad & x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 \leq 6 \\
& 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 \leq 12 \\
& x_1 + x_3 + x_4 \leq 4 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
\end{aligned}
$$

Encontre a solução básica factível onde as variáveis x1, x2 e x4 são básicas. Esta solução é ótima? Senão, encontre a solução ótima partindo desta solução.

17) Considere o problema:

$$
\begin{aligned}
\text{Min} \quad & 2x_1 - x_2 + x_3 + 5x_4 = z \\
\text{s.a.} \quad & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\
& 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 2x_4 \leq 5 \\
& x_1 + 2x_2 - 5x_3 + x_4 \geq 2 \\
& x_j \geq 0, j = 1,\ldots,4
\end{aligned}
$$

Mostre, usando o método simplex, que o problema é infactível.

Obs. Importante, esta lista é apenas um apoio ao estudo, é necessário estudar todos os conceitos apresentados na apostila, pois a prova conterá questões teóricas.

18) verifique, usando o método simplex, que o problema abaixo é ilimitado.

$$
\begin{aligned}
& \text{Min } z = 1x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 \\
& \text{s.a} \\
& 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \leq 10 \\
& -5x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 \leq 20 \\
& 3x_1 - 4x_2 + 4x_3 - 2x_4 \leq 30 \\
& x_j \geq 0, j = 1,\ldots,4
\end{aligned}
$$

19) O objetivo deste exercício é examinar o que acontece com a solução ótima do problema quando pequenas modificações no mesmo ocorrem.

$$
\begin{aligned}
\text{Min} \quad & z = 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 1x_4 \\
\text{s.a} \quad & 2x_1 - 3x_2 + \ \ x_3 + 2x_4 = 10 \\
& 1x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 3x_4 \geq 16 \\
& x_j \geq 0,\ j = 1,\ldots 4
\end{aligned}
$$

a) Resolva o problema usando um software. Anote a solução obtida
b) mude o custo de x_4 para 4 e reotimize o problema. Mude para 8 e reotimize. Como a solução ótima do problema variou em cada caso?

c) mude o coeficiente de x_2 na segunda equação para a_{22}=5 e reotimize. O que muda na solução do problema?
d) Faça as seguintes modificações no valor do lado direito da primeira restrição:
mude de $b_1 = 10$ para $b_1 = 8$ e reotimize.
mude de $b_1 = 10$ para $b_1 = 12$ e reotimize
mude de $b_1 = 10$ para $b_1 = 20$ e reotimize
examine a nova solução em cada caso.
e) Acrescente uma nova atividade (x_5) ao problema com os seguintes dados:
$c_5 = -1$
$a_{15} = 2$, $a_{25} = -3$.
Reotimize o problema. Como voce poderia ter previsto esta nova solução analisando a solução do problema original?
f) Acrescente individualmente cada uma das restrições abaixo e analise as mudanças na solução ótima.

- $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 4$
- $2x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 \leq 8$
- $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6$