Introdução à Ciência da Computação II

Análise de Algoritmos: Parte II

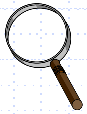
Prof. Ricardo J. G. B. Campello

Este material consiste de adaptações e extensões de slides disponíveis em http://ww3.datastructures.net (Goodrich & Tamassia).

Sumário

- Análise Assintótica de Algoritmos
  - Notação Assintótica
  - BIG-O
  - Parentes do BIG-O
  - Exemplos e Exercícios

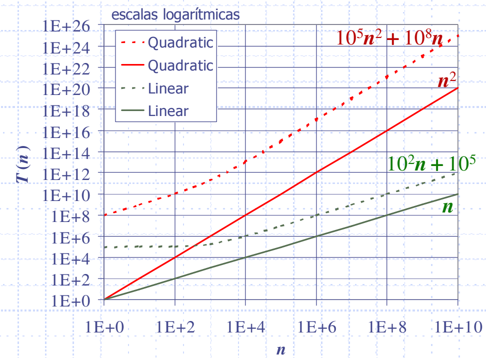
Análise Teórica (Revisão)



- Baseada em uma descrição de alto nível do algoritmo, ao invés de uma dada implementação
- Caracteriza o tempo de execução como uma função do tamanho da entrada, n
- Leva em consideração todas as possíveis entradas
- Permite avaliar a rapidez de um algoritmo de forma independente do ambiente de hardware e/ou software
  - Faz isso estimando a **taxa de crescimento** do número de **operações primitivas** em função do **tamanho da entrada**

Taxa de Crescimento (Revisão)

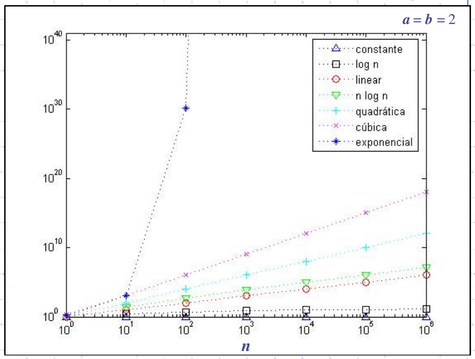
- A taxa de crescimento não é afetada por:
  - fatores constantes ou
  - termos de menor ordem
- Exemplos:
  - $10^2n + 10^5$ é uma função linear
  - $10^5n^2 + 10^8n$ é uma função quadrática



Sete Funções Importantes (Revisão)

- 7 funções mais comuns em análise de algoritmos:
  - Constante: $\sim \mathbf{1}$
  - Logarítmica: $\sim \log_b \boldsymbol{n}$
  - Linear: $\sim \boldsymbol{n}$
  - n-log-n: $\sim \boldsymbol{n} \log_b \boldsymbol{n}$
  - Quadrática: $\sim \boldsymbol{n}^2$
  - Cúbica: $\sim \boldsymbol{n}^3$
  - Exponencial: $\sim \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{n}}$

escalas logarítmicas

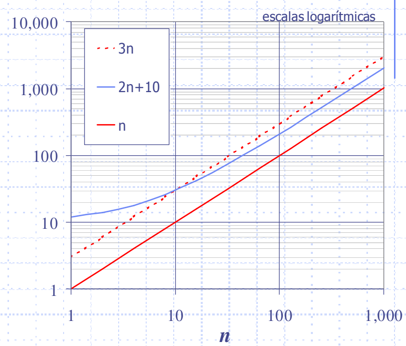


Despoluindo a Notação

- Fatores constantes não são significativos
- Termos de menor ordem também não são
- Portanto:
  - $4\boldsymbol{n}^5 + 10\boldsymbol{n}^3 + 100$ pode ser reescrito simplesmente como $\boldsymbol{n}^5$
- Dizemos nesse caso que:
  - a função $f(\boldsymbol{n}) = 4\boldsymbol{n}^5 + 10\boldsymbol{n}^3 + 100$ é $O(\boldsymbol{n}^5)$

Notação O (Big-O)

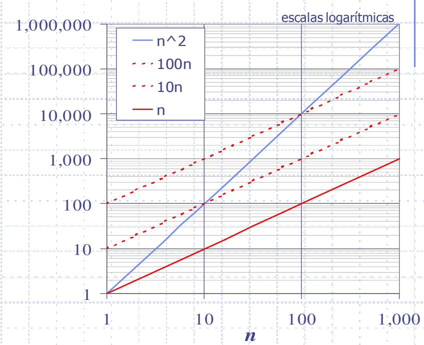
- Dadas as funções $f(n)$ e $g(n)$, dizemos que "$f(n)$ é $O(\,g(n)\,)$" se existirem as *constantes positivas* c (real) e n_0 (inteira) tais que:
  - $f(n) \leq cg(n)$ para $n \geq n_0$
- Exemplo: $2n + 10$ é $O(n)$
  - $2n + 10 \leq cn$
  - $cn - 2n \geq 10$
  - $(c - 2)\, n \geq 10$
  - $n \geq 10/(c - 2)$
  - Pegue $c = 3$ e $n_0 = 10$



7

Um Exemplo

- Podemos dizer que a função n^2 é $O(n)$?
  - $n^2 \leq cn \;\Rightarrow\; n \leq c$
- Para que a desigualdade acima seja satisfeita é preciso achar uma constante c que seja sempre maior ou igual a n para todo valor de n
- Isso é impossível, pois c deve ser constante



8

Mais Exemplos Big-O

- $7n - 2$ é $O(n)$
  - É preciso $c > 0$ e $n_0 \geq 1$ tais que $7n-2 \leq cn$ para todo $n \geq n_0$
  - Isso é verdadeiro, por exemplo, para $c = 7$ e qualquer n_0
- $3n^3 + 20n^2 + 5$ é $O(n^3)$
  - É preciso $c > 0$ e $n_0 \geq 1$ tais que $3n^3 + 20n^2 + 5 \leq cn^3$ para todo $n \geq n_0$
  - Note que $3n^3 + 20n^2 + 5 \leq (3 + 20 + 5)n^3$
  - Logo, basta tomar, por exemplo, $c = 28$ e qualquer n_0
- $3\log n + 5$ é $O(\log n)$
  - É preciso $c > 0$ e $n_0 \geq 1$ tais que $3\log n + 5 \leq c \log n$ para todo $n \geq n_0$
  - Note que $3\log n + 5 \leq (3+5)\log n$ se $n > 1$ (pois $\log 1 = 0$)
  - Logo, basta tomar, por exemplo, $c = 8$ e $n_0 = 2$

9

Mais Exemplos Big-O

- $2n^2 + 100\, n \log n + 5$ é $O(n^2)$
  - É preciso $c > 0$ e $n_0 \geq 1$ tais que $2n^2 + 100\, n \log n + 5 \leq cn$ para todo $n \geq n_0$
  - $2n^2 + 100\, n \log n + 5 \leq (2 + 100 + 5)\, n^2$ se $n \geq 1$ (pois $\log n < n$ para $n \geq 1$)
  - Isso é verdadeiro, por exemplo, para $c = 107$ e qualquer n_0
- $n - 1000 \log n$ é $O(n)$
  - É preciso $c > 0$ e $n_0 \geq 1$ tais que $n - 1000 \log n \leq cn$ para todo $n \geq n_0$
  - Basta tomar, por exemplo, $c = 1$ e qualquer n_0
- 2^{n+2} é $O(2^n)$
  - É preciso $c > 0$ e $n_0 \geq 1$ tais que $2^{n+2} \leq c\, 2^n$ para todo $n \geq n_0$
  - Note que $2^{n+2} = 2^n 2^2 = 4{\cdot}2^n$
  - Logo, basta tomar, por exemplo, $c = 4$ e qualquer n_0

10

Exercício

Mostre que $f(n) = \log_y n$ é $O(\log_x n)$ para $x, y > 1$, ou seja, a base logarítmica não afeta a complexidade assintótica da função / algoritmo

Big-O e Taxa de Crescimento

- Afinal de contas, o que quer dizer "$f(n)$ é $O(g(n))$"?
  - Formalmente, isso significa que "a função $g(n)$ é um **limitante superior assintótico para** $f(n)$"
  - Mas podemos interpretar como "$f(n)$ cresce a uma taxa menor ou igual a $g(n)$"
  - É considerado redundante e inadequado dizer "$f(n) \leq O(g(n))$" ou (ainda pior) "$f(n) = O(g(n))$"
  - Não é incorreto (embora não seja usual) dizer "$f(n) \in O(g(n))$", já que o operador Big-O representa todo um conjunto de funções

Regras Usuais em Big-O

- Se $f(n)$ for um polinômio de grau d, então $f(n)$ é $O(n^d)$:
  - Despreze os termos de menor ordem
  - Despreze os fatores constantes
- Use a menor classe de funções que for possível:
  - Diga "$2n$ é $O(n)$" em vez de "$2n$ é $O(n^2)$"
- Use a expressão mais simples:
  - Diga "$3n + 5$ é $O(n)$" ao invés de "$3n + 5$ é $O(3n)$"

13

Análise Assintótica de Algoritmos

- A análise assintótica de um algoritmo determina o seu tempo de execução em notação Big-O
- Para fazer a análise assintótica:
  - Encontra-se o no. de operações primitivas executado pelo algoritmo no pior caso (em função do tamanho da entrada)
  - Escreve-se essa função com notação Big-O
- Exemplo:
  - Nós determinamos na aula anterior que o algoritmo ***arrayMax*** executa no máximo $8n - 2$ operações primitivas
  - Então, dizemos que o algoritmo ***arrayMax*** "executa em tempo $O(n)$" ou "possui **complexidade assintótica linear**"

14

Algumas Palavras de Precaução

- A análise assintótica é uma ferramenta fundamental ao projeto, análise ou escolha de um algoritmo específico para uma dada aplicação
- No entanto, deve-se ter sempre em mente que essa análise "esconde" fatores assintoticamente irrelevantes mas que em alguns casos podem ser relevantes na prática
  - particularmente se o problema de interesse se limitar a entradas (relativamente) pequenas

Algumas Palavras de Precaução

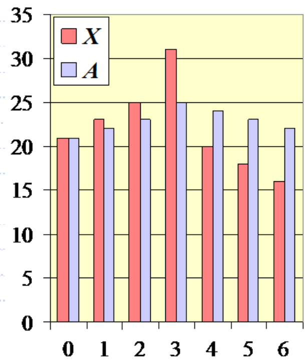
- Por exemplo, um algoritmo com tempo de execução da ordem de $10^{100}n$ é $O(n)$, assintoticamente melhor do que outro com tempo $10\,n \log n$, ou seja, $O(n \log n)$
- Em princípio, isso nos faria preferir o primeiro...
- No entanto, 10^{100} é o no. estimado por alguns astrônomos como um limite superior para a quantidade de átomos existente no universo observável!
  - $10\,n \log n > 10^{100}n$ apenas para $n >$ (2 elevado a 10^{99}) !

Exemplo (Média de Prefixo)

- Vamos ilustrar a análise assintótica com dois algoritmos que fazem o cálculo da **média de prefixos**
- A ***i*-ésima média de prefixo** de um arranjo X é a média dos $(i + 1)$ primeiros elementos de X:

$$A[i] = (X[0] + X[1] + \ldots + X[i]) / (i+1)$$

- O cálculo do vetor A de médias de prefixo de um outro vetor X possui aplicações em análise financeira



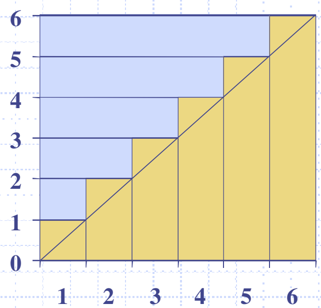
Exemplo (Média de Prefixo)

- O algoritmo abaixo calcula médias de prefixos em **tempo quadrático**, aplicando a definição:

Algoritmo *Prefix1*(X, n)
  Entrada: vetor X de n inteiros
  Saída: vetor A de médias de prefixos de X — #operações
  $A \leftarrow$ novo vetor de n inteiros
  para $i \leftarrow 0$ **até** $n - 1$ **faça** — $\sim n$
    $s \leftarrow 0$ — $\sim n$
    para $j \leftarrow 0$ **até** i **faça** — $\sim 1 + 2 + \ldots + n$
      $s \leftarrow s + X[j]$ — $\sim 1 + 2 + \ldots + n$
    $A[i] \leftarrow s / (i + 1)$ — $\sim n$
  retorne A — 1

Exemplo (Média de Prefixo)

- O tempo de execução de ***Prefix1*** é $O(1 + 2 + \ldots + n)$
- A soma dos primeiros n inteiros é $n(n + 1) / 2$ (prog. aritmética):
  - Pode-se provar graficamente
  - Área em laranja ao lado é dada por $n^2/2 + n \cdot ½$
- Portanto, ***Prefix1*** executa em tempo $O(n^2)$



Exemplo (Média de Prefixo)

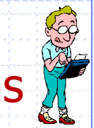
- O algoritmo abaixo calcula a média de prefixos em **tempo linear**, varrendo e somando uma só vez:

Algoritmo *Prefix2*(X, n)	
Entrada: vetor X de n inteiros	
Saída: vetor A de médias de prefixos de X	#operações
$A \leftarrow$ novo vetor de n inteiros	
$s \leftarrow 0$	1
para $i \leftarrow 0$ **até** $n - 1$ **faça**	$\sim n$
$s \leftarrow s + X[i]$	$\sim n$
$A[i] \leftarrow s / (i + 1)$	$\sim n$
retorne A	1

Exercício

Faça uma análise **detalhada** do no. de operações primitivas computadas por cada um dos algoritmos anteriores para cálculo da média de prefixo e mostre o número exato de operações executadas por cada um deles. Em seguida, prove usando a **definição** que ***Prefix1*** é $O(n^2)$ e ***Prefix2*** é $O(n)$. Discuta se existem diferenças entre pior caso, melhor caso e caso médio desses algoritmos. Justifique

Algumas Habilidades Necessárias



- Somatórios:
  - PAs, PGs, etc
- Logaritmos e Potências
- Técnicas de prova:
  - Exemplos e Contra-Exemplos
  - Contradição
  - Indução
- Teoria de Probabilidade

- **Propriedades de Logaritmos:**

  $\log_b(xy) = \log_b x + \log_b y$

  $\log_b (x/y) = \log_b x - \log_b y$

  $\log_b x^a = a \cdot \log_b x$

  $\log_b a = \log_x a / \log_x b$

- **Propriedades de Potências**:

  $a^{(b+c)} = a^b a^c$

  $a^{bc} = (a^b)^c$

  $a^b / a^c = a^{(b-c)}$

  $b = a^{\log_a b}$

  $b^c = a^{c \cdot \log_a b}$

Parentes do Big-O

- **Big-Omega**:
  - $f(n)$ é $\Omega(g(n))$ se existir uma constante real positiva c e uma constante inteira positiva n_0 tais que $f(n) \geq c\, g(n)$ para $n \geq n_0$
  - Exemplo: $f(n) = 5n^2$ é $\Omega(n^2)$
    - As constantes $c = 5$ e $n_0 = 1$ satisfazem a condição
  - Ao contrário do Big-O, toma-se a **maior classe** de funções possível
    - Diz-se $5n^2$ é $\Omega(n^2)$, embora $g(n) = n \log n$, n, $\log n$ e 1 sejam válidas
    - Já $g(n) = n^3$, $g(n) = n^4$, $g(n) = 2^n$, etc, não satisfazem a definição

23

Parentes do Big-O

- **Exemplo**:
  - Seja uma função definida como $f(n) = 10n^2 + 5n$ para valores pares de n e como $f(n) = 3n + 3$ para valores ímpares de n
  - É possível mostrar que $f(n)$ é $\Omega(n)$ e $O(n^2)$
- **Exemplo**:
  - Seja um algoritmo que execute $T(n) = 8n + 3$ operações primárias no **pior caso** (correspondente a uma dada composição da sua entrada, de tamanho n) e $T(n) = 15$ operações no **melhor caso**
  - A complexidade assintótica desse algoritmo é $\Omega(1)$ e $O(n)$
    - **constante** no *melhor caso* e **linear** no *pior caso*

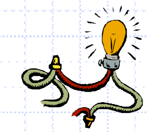
24

Parentes do Big-O

◆ **Big-Teta**:

- $f(n)$ é $\Theta(\, g(n)\,)$ se existirem duas constantes reais positivas c' e c'' e uma constante inteira positiva n_0 tais que $c'g(n) \le f(n) \le c''g(n)$ para $n \ge n_0$
- Em outras palavras, $f(n)$ é $\Theta(\, g(n)\,)$ se for ao mesmo tempo $\Omega(\, g(n)\,)$ e $O(\, g(n)\,)$
- Exemplo: $f(n) = 5n^2$ é $\Theta(n^2)$
  - $c' = c'' = 5$ satisfazem a condição para qualquer n_0
- De fato, qualquer polinômio de ordem d é $\Theta(n^d)$

Trocando em Miúdos ...



Big-O

- f(n) é O(g(n)) se f(n) for **assintoticamente menor ou igual** a g(n)

Big-Omega

- f(n) é Ω(g(n)) se f(n) for **assintoticamente maior ou igual** a g(n)

Big-Teta

- f(n) é Θ(g(n)) se for **Big-O e Big-Omega**

Exercícios Adicionais

- Seja f(n) que assume o valor $3n^2$ se n for par ou 7n se n for ímpar. Mostre que essa função é $O(n^2)$ e $\Omega(n)$
- Qual é o maior tamanho de entrada n de um problema P tal que P pode ser resolvido em tempo t se o algoritmo para resolver P leva f(n) micro-segundos? Responda em uma tabela com todas as combinações de t = 1s, 1hora, 1mês, 1 século e f(n) = log(n), n, n*log(n), n^2, n^3, 2^n. Relacione os resultados obtidos com as discussões em aula
- Qual a complexidade assintótica de **pior caso** para o tempo de execução do algoritmo de busca binária iterativo visto em aula? Justifique formalmente usando a definição do operador BIG-O

Exercícios Adicionais

- Diz-se que um algoritmo que executa um no. constante de operações primitivas (que independe do tamanho n da entrada) "executa em tempo O(1)" ou simplesmente "é O(1)". Mostre, usando a definição formal do operador BIG-O, que qualquer função f(n) = d, onde d é uma constante positiva qualquer, é O(1)
- Explique porque, no **melhor caso** (com relação às possíveis composições da entrada) o tempo de execução do algoritmo de busca binária iterativo visto em aula é O(1)
  - Pode-se então concluir que esse algoritmo é $\Omega(1)$?
- Ordene as seguintes funções de acordo com as suas taxas de crescimento assintótico (justifique!): 4*n*log(n) + 2n, 2^{10}, $2^{\log(n)}$, 3n + 100log(n), 4n, 2^n, 3^{3n} , n^2 + 10n, n^3, n*log(n)

Bibliografia

- M. T. Goodrich & R. Tamassia, *Data Structures and Algorithms in C++/Java*, John Wiley & Sons, 2002/2005
- M. T. Goodrich & R. Tamassia, *Estruturas de Dados e Algoritmos em Java*, Bookman, 2002
- N. Ziviani, *Projeto de Algoritmos*, Thomson, 2a. Edição, 2004
- T. H. Cormen et al., *Introduction to Algorithms*, MIT Press, 2nd Edition, 2001