MAE0311 - Inferência Estatística

Fernando Henrique Ferraz Pereira da Rosa

24 de setembro de 2003

Lista 3[1]

3.2 Sejam $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de tamanho n da variável aleatória X com função de densidade de probabilidade dada por:

$$f(x|\theta) = \theta x^{\theta-1}, \quad 0 < x < 1, \theta > 0$$

(a) Encontre os estimadores de máxima verossimilhança de θ e de $g(\theta) = \theta/(1+\theta)$.

$$L(\theta; x) = \theta x_1^{\theta-1} \ldots \theta x_n^{\theta-1} = \theta^n \prod_{i=1}^{n} x_i^{\theta-1}$$

Então:

$$l(\theta; x) = \log \theta^n + \log \prod_{i=1}^{n} x_i^{\theta-1} = n \log \theta + (\theta - 1) \sum_{i=1}^{n} \log x_i$$

Assim:

$$\frac{\delta l}{\delta \theta} = \frac{n}{\theta} + \sum_{i=1}^{n} \log x_i \Rightarrow \hat{\theta} = \frac{-n}{\sum_{i=1}^{n} \log x_i}$$

Notemos que como:

$$\frac{\delta^2 l}{\delta \theta^2} = \frac{-n}{\theta^2} < 0, \quad \forall \theta \in \Theta$$

Concluímos que $\hat{\theta}$ é o estimador de máxima verossimilhança para θ. Pelo princípio da invariância, temos que o estimador de máxima verossimilhança de $\theta/(1+\theta)$ será:

$$\begin{aligned} g(\hat{\theta}) &= \frac{\frac{-n}{\sum_{i=1}^{n} \log x_i}}{1 + \frac{-n}{\sum_{i=1}^{n} \log x_i}} = \frac{-n}{\sum_{i=1}^{n} \log x_i} \frac{\sum_{i=1}^{n} \log x_i}{\sum_{i=1}^{n} \log x_i - n} \\ &= \frac{-n}{\sum_{i=1}^{n} \log x_i - n} \end{aligned}$$

[1] Powered by $\LaTeX 2_\varepsilon$, R 1.7.1 and Gentoo 1.4

(b) Encontre a distribuição aproximada dos estimadores em (a) quando n é grande.

Para isso precisamos primeiro encontrar a Informação de Fisher de θ :

$$\begin{aligned} I_F(\theta) &= -E\left[\frac{\delta^2 \log f(x|\theta)}{\delta\theta^2}\right] = -E\left[\frac{\delta^2 \left(\log\theta + (\theta-1)\log x\right)}{\delta\theta^2}\right] \\ &= -E\left[\frac{\delta\left(\frac{1}{\theta} + \log x\right)}{\delta\theta}\right] = -E\left[\frac{-1}{\theta^2}\right] = \frac{1}{\theta^2} \end{aligned}$$

Feito isso sabemos que:

$$\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta) \overset{a}{\sim} N\left(0, \frac{1}{I_F(\theta)}\right)$$

Em particular:

$$\hat{\theta} \overset{a}{\sim} N\left(\theta, \frac{1}{nI_F(\theta)}\right) \Rightarrow \hat{\theta} \overset{a}{\sim} N\left(\theta, \frac{\theta^2}{n}\right)$$

De modo análogo:

$$\sqrt{n}(g(\hat{\theta}) - g(\theta)) \overset{a}{\sim} N\left(0, \frac{(g'(\theta))^2}{I_F(\theta)}\right)$$

Então:

$$g(\hat{\theta}) \overset{a}{\sim} N\left(g(\theta), \frac{(g'(\theta))^2}{nI_F(\theta)}\right) \Rightarrow g(\hat{\theta}) \overset{a}{\sim} N\left(\theta, \frac{\theta^2}{(1-\theta)^4 n}\right)$$

3.6 Encontre o estimador de máxima verossimilhança de θ^2 no Exercício 2.9 e compare seu erro quadrático médio com o do estimador eficiente $\hat{\gamma}$ dado no Exercício 2.9.

$$f(x|\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-\theta)^2}{2}}$$

E daí:

$$L(\theta; x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x_1-\theta)^2}{2}} \cdots \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x_n-\theta)^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}} e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n (x_i-\theta)^2}$$

Dessa forma:

$$\begin{aligned} l(\theta; x) &= \log\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}} + \log e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n (x_i-\theta)^2} \\ &= -\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^n x_i^2 + n\theta^2 - 2\theta\sum_{i=1}^n x_i\right) - n\log\sqrt{2\pi} \end{aligned}$$

Então:

$$l'(\theta; x) = -n\theta + \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Como $l''(\theta; x) = -n < 0, \quad \forall\theta \in \Theta$:

$$-n\hat{\theta}\sum_{i=1}^{n} X_i = 0 \Rightarrow \hat{\theta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \overline{X}$$

Utilizando-nos então do princípio da invariância, temos que o estimador de verossimilhança de $g(\theta) = \theta^2$ será dado por:

$$g(\hat{\theta}) = g(\overline{X}) = \overline{X}^2$$

Em primeiro lugar o estimador $\hat{\gamma}$ *não* é eficiente. E seu erro quadrático médio é dado por:

$$EQM(\hat{\gamma}) = Var(\overline{X}^2)$$

O estimador de máxima verossimilhança entretanto tem EQM:

$$\begin{aligned} EQM(\hat{\gamma}) &= Var(\overline{X}^2) + B^2(\overline{X}^2) \\ &= Var(\overline{X}^2) + \left(E[\overline{X}^2] - \mu^2\right)^2 \\ &= Var(\overline{X}^2) + (\mu^2 + \frac{1}{n} - \mu^2)^2 \\ &= Var(\overline{X}^2) + \frac{1}{n^2} \end{aligned}$$

Logo notamos facilmente que $EQM(g(\hat{\theta})) > EQM(\hat{\gamma})$ sempre, e portanto o estimador $\hat{\gamma}$, apesar de não eficiente, é melhor do que o estimador obtido a partir do método da máxima verossimilhança.

3.7 Considere uma amostra aleatória de tamanho n da distribuição da variável aleatória X onde cada observação apresenta um de três resultados possíveis (por exemplo, favorável, contra e indiferente), que denotamos por "0","1" e "2". Suponhamos que a probabilidade de "0" é $p_1 = (1-\theta)/2$, a probabilidade da ocorrência do resultado "1" é $p_2 = 1/2$ e do resultado "2" é $p_3 = \theta/2$. Seja n_1: o número de vezes que "0" ocorre, n_2: o número de vezes que "1" ocorre e n_3: o número de vezes que "2" ocorre.

(a) Encontre, como função de n_1, n_2, n_3, uma estatística suficiente para θ.

$$L(\theta; x) = \frac{(1-\theta)^{n_1}\theta^{n_3}}{2^n} = \underbrace{\frac{1}{2^n}}_{h(x_1,\ldots,x_n)} \underbrace{(1-\theta)^{n_1}\theta^{n_3}}_{g_\theta(T(x_1,\ldots,x_n))}$$

Assim pelo critério da fatoração, uma estatística suficiente para θ é:

$$T(X_1, \ldots, X_n) = (N_1, N_3)$$

(b) Encontre o estimador de máxima verossimilhança de θ.

$$\begin{aligned} l(\theta;x) &= \log(1-\theta)^{n_1} + \log\theta^{n_3} - \log 2^n \\ &= n_1\log(1-\theta) + n_3\log\theta - n\log 2 \\ &\Rightarrow l'(\theta;x) = \frac{n^3}{\theta} - \frac{n_1}{1-\theta} \end{aligned}$$

Verifiquemos agora o sinal de $l''(\theta;x)$:

$$l''(\theta;x) = -\frac{n_3}{\theta^2} - \frac{n_1}{(1-\theta)^2} = -\left(\frac{n_3}{\theta^2} + \frac{n_1}{(1-\theta)^2}\right) < 0, \quad \forall\theta\in\Theta$$

Assim o estimador de máxima verossimilhança $\hat\theta$ procurado será dado por:

$$\begin{aligned} \frac{n_3}{\hat\theta} - \frac{n_1}{1-\hat\theta} &= 0 \Rightarrow \frac{n_3}{\hat\theta} = \frac{n_1}{1-\hat\theta} \Rightarrow n_3(1-\hat\theta) = n_1\hat\theta \\ &\Rightarrow n_3 - n_3\hat\theta = n_1\hat\theta \Rightarrow n_3 = n_1\hat\theta + n_3\hat\theta \\ &= \hat\theta(n_1+n_3) \\ &\Rightarrow \hat\theta = \frac{n_3}{n_1+n_3} \end{aligned}$$

3.8 Sejam $X_1,\ldots,X_n$ uma amostra aleatória de tamanho n da variável aleatória X com função de densidade de probabilidade dada por

$$f(x|\theta) = \theta(\theta+1)x^{\theta-1}(1-x), \quad 0\le x\le 1, \theta>0$$

(a) Encontre, usando o método dos momentos, um estimador para θ.
Notemos que X se "parece" com uma Beta, vamos então tentar achar seus parâmetros:

$$Y \sim Beta(a,b) \Rightarrow f(y|a,b) = \frac{1}{B(a,b)}x^{a-1}(1-x)^{b-1}I_{(0,1)}(x)$$

$$b-1=1\Rightarrow b=2 \quad (\theta-1) = a-1 \Rightarrow a=\theta$$

Notando ainda que:

$$\frac{1}{B(\theta,2)} = \frac{\Gamma(\theta+2)}{\Gamma(\theta)\Gamma(2)} = \frac{(\theta+1)!}{(\theta-1)!} = \theta(\theta+1)$$

Temos que $X\sim Beta(\theta,2)$. Dessa forma temos de imediato que:

$$E[X] = \frac{a}{a+b} = \frac{\theta}{\theta+2}$$

Notando ainda que $m^1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i = \overline{X}$, pelo método dos momentos:

$$\begin{aligned} \mu^1 &= m^1 \Rightarrow \frac{\hat\theta}{\hat\theta+2} = \overline{X} \Rightarrow \overline{X}\hat\theta + 2\overline{X} - \hat\theta = 0 \Rightarrow \hat\theta(\overline{X}-1) + 2\overline{X} = 0 \\ &\Rightarrow \hat\theta(\overline{X}-1) = -2\overline{X} \Rightarrow \hat\theta = \frac{-2\overline{X}}{\overline{X}-1} = 2\frac{\overline{X}}{1-\overline{X}} \end{aligned}$$

(b) Encontre o estimador de máxima verossimilhança de θ e sua distribuição aproximada em grandes amostras.

$$\begin{aligned} L(\theta; x) &= \theta(\theta+1)x_1^{\theta-1}(1-x_1)\dots\theta(\theta+1)x_n^{\theta-1}(1-x_n) \\ &= (\theta(\theta+1))^n \prod_{i=1}^n x_i^{\theta-1} \prod_{i=1}^n (1-x_i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l(\theta; x) &= n\log\theta(\theta+1) + (\theta-1)\sum_{i=1}^n \log X_i + \log\prod_{i=1}^n (1-x_i) \\ &\Rightarrow \; l'(\theta; x) = \frac{n(2\theta+1)}{\theta(\theta+1)} + \sum_{i=1}^n \log X_i \end{aligned}$$

Antes de procedermos na procura de nosso estimador, devemos verificar se $l''(\theta; x) < 0$:

$$\begin{aligned} l''(\theta; x) &= n\frac{2\theta(\theta+1)-(2\theta+1)^2}{\theta^2(\theta+1)^2} = n\frac{2\theta^2+2\theta-4\theta^2-4\theta-1}{\theta^2(\theta+1)^2} \\ &= n\frac{-2\theta^2-2\theta-1}{\theta^2(\theta+1)^2} = -2n\frac{\theta^2+\theta+\frac{1}{2}}{\theta^2(\theta+1)^2} < 0, \quad \forall\theta\in\Theta \end{aligned}$$

Onde a desigualdade decorre do fato do denominador ser sempre positivo, do numerador também ser sempre positivo, e de n ser sempre positivo. Assim $\hat{\theta}$ que por ventura encontrarmos zerando $l'(\theta; x)$ será um estimador de máxima verossimilhança:

$$\frac{2\hat{\theta}+1}{\hat{\theta}(\hat{\theta}+1)} = \frac{-\sum_{i=1}^n \log X_i}{n}$$

Chamando a expressão à direita de ξ, e desenvolvendo as expressões, obtemos a seguinte equação do segundo grau em $\hat{\theta}$:

$$\xi\hat{\theta}^2 + (\xi+2)\hat{\theta} + 1 = 0$$

O que resolvendo em $\hat{\theta}$ nos dá duas possíveis soluções:

$$\hat{\theta}_1 = \frac{2-\xi+\sqrt{4+\xi^2}}{2\xi} \quad \text{e} \quad \hat{\theta}_2 = \frac{2-\xi-\sqrt{4+\xi^2}}{2\xi}$$

Notemos agora que $\xi > 0$ sempre, pois $0 < X_i < 1$ e portanto $\log X_i < 0$. Assim $\hat{\theta}_2$ pode assumir valores negativos, entretanto isso está fora do espaço paramétrico pois $\theta > 0$. Logo $\hat{\theta}_2$ sequer é um estimador para θ. O estimador de máxima verossimilhança para θ é portanto:

$$\hat{\theta} = \frac{2-\xi+\sqrt{4+\xi^2}}{2\xi} = \frac{2-\frac{-\sum_{i=1}^n \log X_i}{n} + \sqrt{4+\left(\frac{-\sum_{i=1}^n \log X_i}{n}\right)^2}}{2\frac{-\sum_{i=1}^n \log X_i}{n}}$$

Esse estimador parece estranho demais para estar certo. Vamos fazer algumas simulações para verificar isso. Com o seguinte código em R, definimos os dois estimadores (o de máxima verossimilhança e o de momentos):

```
#esse é o estimador de m.v.
>est <- function(amostra) {
  -sum(log(amostra))/length(amostra)
}

>est1 <- function(est) {
  0.5*(2-est+sqrt(4+est^2))/est
}

>maxver <- function(x) {
 est1(est(x))
}

#esse é o de momentos
>momentos <- function(x) {
  2*mean(x)/(1-mean(x))
}
```

A seguir simulamos 1000 amostras de tamanho 1000 de uma variável aleatória seguindo distribuição $Beta(4, 2)$ (o 4 é arbitrário) e verificamos o comportamento dos dois estimadores:

```
>amostra <- matrix(rbeta(10^6,4,2),1000,1000)
>momentos.s <- apply(amostra,2,momentos)
>maxver.s <- apply(amostra,2,maxver)
> c(mean(momentos.s),var(momentos.s))
[1] 3.99988361 0.01019566
> c(mean(maxver.s),var(maxver.s))
[1] 4.00068103 0.00968428
```

Donde verificamos que não só o estimador de máxima verossimilhança e o de momentos tem esperança igual a θ como a variância do estimador de máxima verossimilhança é *menor* do que a do estimador obtido pelo método de momentos. É, ele é feio mas funciona.

Para acharmos a distribuição assintótica do estimador que acabamos de achar, basta, precisamos encontrar $I_F(\theta)$:

$$I_F(\theta) = -E\left[\frac{\delta^2 \log f(x|\theta)}{\delta\theta^2}\right]$$

Primeiro notemos que:

$$\log f(x|\theta) = \log\theta(\theta+1) + (\theta-1)\log x + \log(1-x)$$

Assim:

$$\frac{\delta \log f(x|\theta}{\delta\theta} = \frac{2\theta+1}{\theta(\theta+1)} + \log x$$

E portanto, observando que já fizemos essa conta anteriormente para garantir $l''(\theta;x) < 0$:

$$\frac{\delta^2 \log f(x|\theta)}{\delta\theta^2} = -\frac{2\theta^2+2\theta+1}{\theta^2(\theta+1)^2} \Rightarrow I_F(\theta) = \frac{2\theta^2+2\theta+1}{\theta^2(\theta+1)^2}$$

Assim, como:

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}-\theta) \overset{a}{\sim} N\left(0, \frac{1}{I_F(\theta)}\right)$$

Segue que:

$$\hat{\theta} \overset{a}{\sim} N\left(\theta, \frac{2\theta^2+2\theta+1}{n\theta^2(\theta+1)^2}\right)$$

E assim $\hat{\theta}$ é assintoticamente eficiente.

3.10 Sejam $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de tamanho n da variável aleatória X com função de densidade de probabilidade

$$f(x|\theta) = \frac{(x+1)}{\theta(\theta+1)} e^{-x/\theta}, \quad x > 0, \theta > 0$$

(a) Encontre o estimador de máxima verossimilhança para θ e sua distribuição em grandes amostras.

$$L(\theta;x) = \frac{\prod_{i=1}^n (x_i+1)}{\theta^n(\theta+1)^n} e^{-\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\theta}}$$

$$l(\theta;x) = \sum_{i=1}^n \log(x_i-1) - n\log\theta(\theta+1) - \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\theta}$$

$$l'(\theta;x) = -\frac{n(2\theta+1}{\theta(\theta+1)} + \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\theta^2}$$

Verifiquemos agora $l''(\theta;x)$:

$$\begin{aligned} l''(\theta;x) &= \frac{-2n(\theta(\theta+1)) + n(2\theta+1)^2}{\theta^2(\theta+1)^2} - \frac{2\sum_{i=1}^n x_i}{\theta^3} \\ &= \frac{-2(\theta+1)(n\theta^2 + (\theta+1)\sum_{i=1}^n X_i) + n\theta(2\theta+1)^2}{\theta^3(\theta+1)^2} < 0 \end{aligned}$$

Assim podemos finalmente obter nosso e.m.v:

$$\begin{aligned}
\frac{-n(2\hat{\theta}+1)}{\hat{\theta}(\hat{\theta}+1)} &= -\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{\hat{\theta}^2} \Rightarrow (2\hat{\theta}+1)\hat{\theta}^2 = \hat{\theta}(\hat{\theta}+1)\sum_{i=1}^{n} X_i \\
&\Rightarrow n\hat{\theta}(2\hat{\theta}+1) = (\hat{\theta}+1)\sum_{i=1}^{n} X_i \\
&\Rightarrow 2n\hat{\theta}^2 + n\hat{\theta} - \hat{\theta}\sum_{i=1}^{n} X_i - \sum_{i=1}^{n} X_i = 0 \\
&\Rightarrow 2\hat{\theta}^2 + \hat{\theta} - \hat{\theta}\overline{X} - \overline{X} = 0 \\
&\Rightarrow 2\hat{\theta}^2 + \hat{\theta}(1-\overline{X}) - \overline{X} = 0
\end{aligned}$$

Resolvendo essa equação em $\hat{\theta}$, obtemos:

$$\hat{\theta}_1 = \frac{\overline{X} - 1 + \sqrt{(\overline{X}-1)^2 + 8\overline{X}}}{4} \quad \text{e} \quad \hat{\theta}_2 = \frac{\overline{X} - 1 - \sqrt{(\overline{X}-1)^2 + 8\overline{X}}}{4}$$

Notemos entretanto que $\theta_2 < 0$, e portanto não pertence ao espaço paramétrico, de forma que o estimador de máxima verossimilhança fica dado por:

$$\hat{\theta} = \frac{\overline{X} - 1 + \sqrt{(\overline{X}-1)^2 + 8\overline{X}}}{4}$$

Para calcular sua distribuição aproximada precisamos primeiro de $I_F(\theta)$.

$$I_F(\theta) = -E\left[\frac{\delta^2 \log f(X|\theta)}{\delta\theta^2}\right]$$

$$\log f(X|\theta) = \log X + 1 - \log\theta(\theta+1) - \frac{X}{\theta}$$

Então:

$$\frac{\delta \log f(X|\theta)}{\delta\theta} = -\frac{2\theta+1}{\theta(\theta+1)} + \frac{X}{\theta^2}$$

Assim:

$$\begin{aligned}
\frac{\delta^2 \log f(X|\theta)}{\delta\theta^2} &= -2\,\frac{X}{\theta^3} - 2\,\frac{1}{\theta\,(\theta+1)} + \frac{2\,\theta+1}{\theta^2\,(\theta+1)} + \frac{2\,\theta+1}{\theta\,(\theta+1)^2} \\
&= -\frac{2\,X\theta^2 + 4\,X\theta + 2\,X - 2\,\theta^3 - 2\,\theta^2 - \theta}{\theta^3\,(\theta+1)^2}
\end{aligned}$$

Aplicando a esperança e simplificando:

$$-E\left[\frac{\delta^2 \log f(X|\theta)}{\delta\theta^2}\right] = \frac{2\,\theta^2 + 4\,\theta + 1}{\theta^2\,(\theta+1)^2}$$

Notando agora que:

$$\hat{\theta} \overset{a}{\sim} N\left(\theta, \frac{1}{nI_F(\theta)}\right)$$

Temos que:

$$\hat{\theta} \overset{a}{\sim} N\left(\theta, \frac{\theta^2\,(\theta+1)^2}{n\,(2\,\theta^2+4\,\theta+1)}\right)$$

Assim, $\hat{\theta}$ é assintoticamente eficiente.

(b) Obtenha um estimador para θ usando o método dos momentos.

Calculemos em primeiro lugar $E[X]$:

$$\begin{aligned}
E[X] &= \int_0^\infty \frac{x(x+1)}{\theta(\theta+1}e^{\frac{-x}{\theta}}\mathrm{d}x \\
&= \int_0^\infty \frac{x^2}{\theta(\theta+1)}e^{\frac{-x}{\theta}}\mathrm{d}x + \int_0^\infty \frac{x}{\theta(\theta+1)}e^{\frac{-x}{\theta}}\mathrm{d}x \\
&= \frac{\theta}{\theta+1}\left[\underbrace{\int_0^\infty x\left(\frac{1}{\theta^2}xe^{-\frac{x}{\theta}}\right)\mathrm{d}x}_{E[X],X\sim\Gamma(2,\frac{1}{\theta})} + \underbrace{\int_0^\infty \frac{1}{\theta^2}xe^{-\frac{x}{\theta}}\mathrm{d}x}_{f_X(x),X\sim\Gamma(2,\frac{1}{\theta})}\right] \\
&= \frac{\theta}{\theta+1}2\theta + \frac{\theta}{\theta+1} = \frac{\theta(2\theta+1)}{\theta+1}
\end{aligned}$$

Pelo método dos momentos temos:

$$\begin{aligned}
E[X] &= \overline{X} \Rightarrow \frac{2\hat{\theta}^2+\hat{\theta}}{\hat{\theta}+1} = \overline{X} \Rightarrow 2\hat{\theta}^2+\hat{\theta} = \hat{\theta}\overline{X}+\overline{X} \\
&\Rightarrow 2\hat{\theta}^2+\hat{\theta}(1-\overline{X})-\overline{X} = 0
\end{aligned}$$

O que nos leva a mesma equação obtida pelo método de máxima verossimilhança. Dessa maneira, o estimador obtido pelo método dos momentos é igual ao obtido pelo método de máxima verossimilhança, a dizer:

$$\hat{\theta} = \frac{\overline{X}-1+\sqrt{(\overline{X}-1)^2+8\overline{X}}}{4}$$

3.13 Sejam $X_1,\ldots,X_n$ uma amostra aleatória da variável aleatória X com distribuição exponencial com parâmetro θ. Encontre o estimador de máxima verossimilhança de $g(\theta) = P(X > 1)$ e sua distribuição aproximada quando n for grande.

Comecemos encontrando o e.m.v. para θ:

$$L(\theta;x) = \prod_{i=1}^n \theta e^{-\theta x_i} = \theta^n e^{-\theta\sum_{i=1}^n x_i}$$

Assim:

$$l(\theta;x) = n\log\theta - \theta\sum_{i=1}^{n} x_i \Rightarrow l'(\theta;x) = \frac{n}{\theta} - \sum i = 1^n x_i$$

Notemos ainda que:

$$l''(\theta;x) = \frac{-n}{\theta^2} < 0, \quad \forall\theta \in \Theta$$

Portanto o estimador que iremos encontrar será o de máxima verossimilhança:

$$\frac{n}{\hat{\theta}} = \sum_{i=1}^{n} X_i \Rightarrow \hat{\theta} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n}} = \frac{1}{\overline{\overline{X}}}$$

Notemos agora que:

$$g(\theta) = P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - F(1) = 1 - (1 - e^{-\theta}) = e^{-\theta}$$

Assim pelo princípio da invariância, o estimador de máxima verossimilhança procurado será:

$$g(\hat{\theta}) = e^{-\hat{\theta}} = e^{-\frac{1}{\overline{\overline{X}}}}$$

Para calcular sua distribuição aproximada precisamos saber $I_F(\theta)$:

$$\begin{aligned} I_F(\theta) &= -E\left[\frac{\delta^2 \log f(x|\theta)}{\delta\theta^2}\right] = -E\left[\frac{\delta^2\left(\log\theta + \log e^{-\theta x}\right)}{\delta\theta^2}\right] \\ &= -E\left[\frac{\delta\left(\frac{1}{\theta} - x\right)}{\delta\theta}\right] = -E\left[-\frac{1}{\theta^2}\right] = \frac{1}{\theta^2} \end{aligned}$$

Assim, como:

$$\sqrt{n}(g(\hat{\theta}) - g(\theta)) \overset{a}{\sim} N\left(0, \frac{(g'(\theta))^2}{I_F(\theta)}\right)$$

Segue que:

$$g(\hat{\theta}) \overset{a}{\sim} N\left(g(\theta), \frac{(g'(\theta))^2}{nI_F(\theta)}\right) \Rightarrow g(\hat{\theta}) \overset{a}{\sim} N\left(\theta, \frac{e^{-2\theta}}{\frac{n}{\theta^2}}\right) = N\left(\theta, \frac{e^{-2\theta}\theta^2}{n}\right)$$

E portanto $g(\hat{\theta})$ é assintoticamente eficiente.

Sobre

A versão eletrônica desse arquivo pode ser obtida em `http://www.feferraz.net`