Pesquisa Operacional / Programação Matemática

Otimização discreta

Modelagem com variáveis binárias

Alysson M. Costa – ICMC/USP

Utilização de variáveis binárias

Decisão sobre uma atitude (fazer ou não fazer, comprar ou não comprar...).

$$x = \begin{cases} 1 & \text{se o evento ocorre} \\ 0 & \text{se o evento não ocorre} \end{cases}$$

Caso 1: implicações se-então

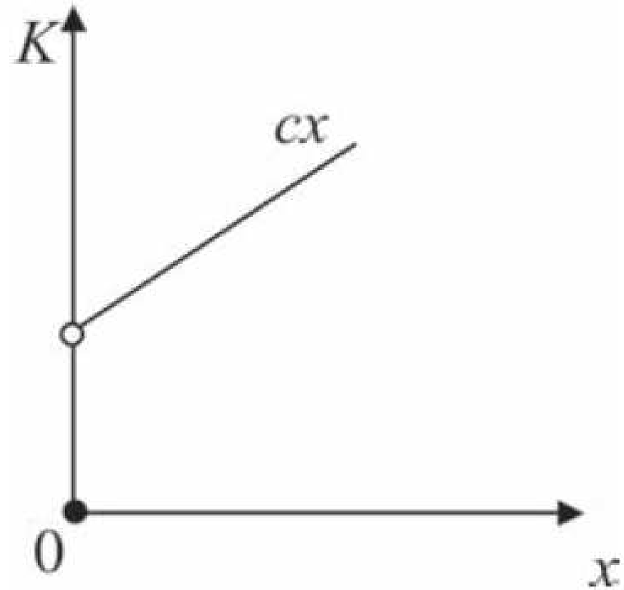
- A) Custo fixo:
  - A produção de um item (o envio de uma mercadoria, a decisão de se tomar um taxi, etc) implica em um custo fixo, por exemplo, de preparação da máquina (de pagamento do custo mínimo de envio, da taxa inicial do taxi, etc).

Antigamente tínhamos:

x = quantidade produzida do ítem

- Custo de produção:

$$K(x) = \begin{cases} s + cx & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$



Como modelar de maneira linear ?
Dica: precisamos do auxílio de uma variável binária.

- Seja uma variável binária y, tal que y vale 1 se x>0 e y vale 0 caso contrário.

$$K = sy + cx$$

Como associar x e y ?

$$x \leq M y$$

M é um valor suficientemente grande (produção máxima x)

Caso 1: implicações se-então

- B) Produção de itens:
  - Considere o caso em que, se o produto 1 é fabricado, o produto 2 também deve ser.

x_1 = quantidade produzida do item 1

x_2 = quantidade produzida do item 2

Seja y uma variável binária tal que

$$y = \begin{cases} 1 & \text{se } x_1 > 0 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \qquad x_1 \leq My$$

logo, podemos forçar: $x_2 \geq my$

m é um limitante inferior da quantidade a ser produzida do item 2.

Exemplo 3.5 Suponha que quatro itens podem ser produzidos em uma máquina denotada por k, e se o item 1 é produzido em k, então os outros itens, 2, 3 e 4, não podem ser processados em k e são processados em outras máquinas.

$$x_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{se o item } i \text{ é processado na máquina } k \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Restrições:

$$x_{2k} + x_{3k} + x_{4k} \leq 3y$$ y é uma variável que indica se 2,3 ou 4 foram produzidos

$$x_{1k} \leq 3(1-y)$$

Outra forma ?

Caso 2: restrições disjuntivas

- Às vezes, deseja-se aplicar apenas uma de um conjunto de restrições:

  ex: quero um carro que faça 20km/litro

  OU

  que atinja 100km/h em 4s.

- De maneira geral:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq 0$$

OU

$$g(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq 0$$

Defina uma variável binária y tal que

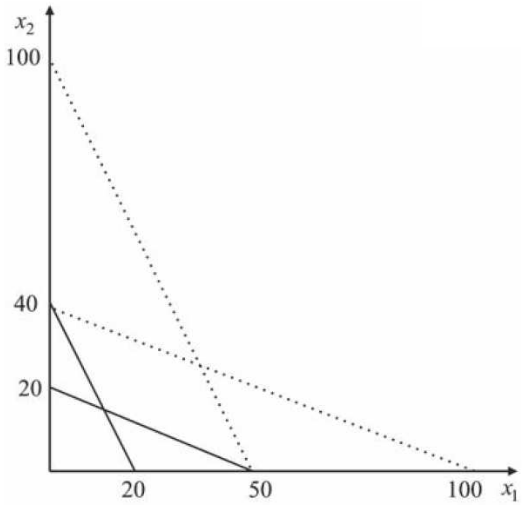
Se y=1, f()≤0 está ativada
Se y=0, g()≤0 está ativada

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq M(1 - y)$$

$$g(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq My$$

Valor de M

Exemplo 3.6 Considere as restrições $4x_1 + 2x_2 \leq 80$ e $2x_1 + 5x_2 \leq 100$, $x_1, x_2 \geq 0$, ilustradas na Figura 3.5 em linha cheia.



Caso 3: Relações lógicas

- Variáveis binárias podem ser usadas para representar relações lógicas.

Suponha que existam cinco tipos de investimento financeiro, e seja x_j a variável binária de de-
cisão tal que

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{se o investimento } j \text{ é selecionado} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

- No máximo três investimentos são selecionados.

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 3$$

- O investimento 1 ou o investimento 2 é selecionado.

$$x_1 + x_2 \geq 1$$

- Se o investimento 2 é selecionado, então o investimento 1 também é selecionado.

$$x_2 \leq x_1$$

- Se os investimentos 2, 3 ou 4 são selecionados, então o investimento 1 é selecionado.

$$x_2 + x_3 + x_4 \leq 3x_1$$

ou

$$x_2 \leq x_1$$
$$x_3 \leq x_1$$
$$x_4 \leq x_1$$

O que é melhor ?

$$x_2 + x_3 + x_4 \leq 3x_1$$

ou

$$x_2 \leq x_1$$
$$x_3 \leq x_1$$
$$x_4 \leq x_1$$

Caso 4: Representação de valores discretos

Considere um problema em que uma variável x só pode assumir valores do conjunto discreto $\{4, 6, 8, 12, 20, 24\}$. Para representar essa condição, defina as variáveis binárias $y_i, i = 1, \ldots, 6$ e as restrições

$$x = 4y_1 + 6y_2 + 8y_3 + 12y_4 + 20y_5 + 24y_6$$
$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 = 1$$