SMA 333/ SMA 803 Cálculo III - Lista 2

Prof. Dr. Nivaldo G. Grulha Jr

Estagiária PAE: Thaís Maria Dalbelo

1. Podemos afirmar que se a sequência $\{a_n\}$ satisfaz $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |a|$ então $\lim_{n\to\infty} a_n = a$?

2. Mostre, pela definição de limite que $\lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{3n-2} = \frac{2}{3}$.

3. Mostre, pela definição de limite que $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n+1}{2n-3} = \infty$.

   Sugestão: Use o fato que $\frac{n^2+n+1}{2n-3} > \frac{n^2+n}{2n}$.

4. Verifique se é possível construir duas sequências $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ tais que $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ e $\lim_{n\to\infty} a_n + b_n = c$ mas $\lim_{n\to\infty} b_n$ não existe.

5. Se $R\$1000,00$ forem investidos a uma taxa de juros de 6% compostos anualmente, depois de n anos o investimento valerá $a_n = 1000(1,06)^n$. Essa sequência converge ou diverge?

6. Mostre que se $\lim_{n\to\infty} a_{2n} = a$ e $\lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = a$ então $\{a_n\}$ é convergente e $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

7. Considere uma sequência de termo geral a_n e suponha que $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Prove que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} = a.$$

8. Suponha que $a_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Então

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n} = a.$$

   Sugestão: Utilize o exercício 7 e a identidade $x = e^{\ln x}$.

9. Mostre que:

   (a) $\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n} + \frac{2}{n} + ... + \frac{n}{n}) = \infty$;

   (b) $\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + ... + \frac{n}{n^2}) = \frac{1}{2}$;

   (c) $\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n^3} + \frac{2}{n^3} + ... + \frac{n}{n^3}) = 0$;

   (d) $\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n^5} + \frac{2}{n^5} + ... + \frac{n^2}{n^5}) = 0$

10. Sejam $\{a_n\}$ uma sequência de Cauchy e $\{a_{2n}\}$ uma subsequência de $\{a_n\}$ convergente para a. Mostre que a sequência $\{a_n\}$ converge para a.

11. Seja $\{a_n\}$ uma sequência que tem a seguinte propriedade:

$$|a_{n+1} - a_n| \leq \frac{1}{2^n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Mostre que $\{a_n\}$ é convergente.