Pesquisa Operacional / Programação Matemática

Determinação de uma base factível inicial

Alysson M. Costa – ICMC/USP

Base inicial

- Até agora supomos que sabemos facilmente encontrar uma base factível inicial.
- Isso é verdade, por exemplo, quando todas as restrições forem de $\leq$ (as variáveis de folga formam a matriz identidade)

- Suponha agora que as restrições são, originalmente, de igualdade:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad f(\mathbf{x}) &= \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} \\ \mathbf{A}\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0}, \end{aligned}$$

- Precisamos encontrar uma partição básica factível de A, isto é, uma partição da forma:

$$\mathbf{A} = [\mathbf{B}\ \mathbf{N}]$$

tal que existe $\mathbf{B}^{-1}$ e $\mathbf{x}_{\mathbf{B}} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$

Quantas partições existem ?

- Tome $A_{10 \times 20}$
  Precisamos identificar dez colunas L.I. de A para formar B, e o sistema $Bx_b = b$, tem que ter $x_B \geq 0$.

- Procedimento possível:
  - 1. Escolher dez (m) colunas
  - 2. Verificar se o x_B resultante ≥ 0.
  - 3. Se não, escolher outras dez colunas e retornar ao passo 2.

Quantas partições existem ?

- Se formos testar partição a partição, quantos testes temos que fazer ?

$$C_{10}^{20} = \frac{20!}{10!(20-10)!} = 184.756$$

impraticável para problemas grandes!

Introduzindo novas variáveis de folga

- Quando tínhamos variáveis de folga, funcionava, pois:

$$\begin{aligned} \mathbf{Ax} &\le \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\ge \mathbf{0} \end{aligned} \quad \text{equivalente a} \quad \begin{aligned} \mathbf{Ax} + \mathbf{x}_f &= \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \ge \mathbf{0},\ \mathbf{x}_f &\ge \mathbf{0}. \end{aligned}$$

naturalmente aparecia uma partição [I N] onde as variáveis de folga começavam como as variáveis básicas.

- Se não for o caso, podemos "forçar" variáveis "de folga":

$$\begin{aligned} \mathbf{Ax} + \mathbf{y} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \ge \mathbf{0},\ \mathbf{y} &\ge \mathbf{0}. \end{aligned}$$

$$\mathbf{Ax} + \mathbf{y} = \mathbf{b}$$
$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0},\ \mathbf{y} \geq \mathbf{0}.$$

- Obviamente, essas variáveis não podem aparecer na solução final (pois elas não existem - são variáveis artificiais). Assim, resolvemos primeiro um problema:

$$\text{Minimizar } f_a(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{m} y_i$$
$$\mathbf{Ax} + \mathbf{y} = \mathbf{b}$$
$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0},\ \mathbf{y} \geq \mathbf{0}.$$

$$\text{Minimizar } f_a(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{m} y_i$$

$$\mathbf{Ax} + \mathbf{y} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0},\ \mathbf{y} \geq \mathbf{0}.$$

- Se conseguimos uma solução de custo zero para o problema acima (fase I), a base final não contém nenhuma variável artificial (por quê ?)

- Neste caso, a base final do problema da fase I é uma base inicial para o problema real (fase II).

- E se não conseguimos uma solução de custo zero ? (Isto é, na solução ótima da fase I, existe uma variável artificial na base).

  (Não existe solução factível para o nosso problema)

Exemplo

$$\text{Minimizar} \quad f(\mathbf{x}) = x_1 - x_2 + 2x_3$$

$$x_1 + x_2 + \quad x_3 \;= 3$$

$$2x_1 - x_2 + 3x_3 \leq 4$$

$$x_i \geq 0, \; i = 1, 2, 3$$

$\downarrow$ Forma padrão

$$\text{Minimizar} \quad f(\mathbf{x}) = x_1 - x_2 + 2x_3 + 0x_4$$

$$x_1 + x_2 + \quad x_3 \qquad\quad = 3$$

$$2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 \;= 4$$

$$x_i \geq 0, \; i = 1, \ldots, 4$$

Qual o problema da fase I a resolver ?

- **Caso A:** introduzimos uma variável artificial pra cada restrição:

$$
\begin{aligned}
\text{Minimizar } \; & f_a(x_1,\dots,x_6) = x_5 + x_6 \\
& x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 3 \\
& 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 + \mathrm{x}_6 = 4 \\
& x_i \geq 0,\; i = 1,\dots,6
\end{aligned}
$$

e minimiza

Qual o problema da fase I a resolver ?

- **Caso B:** note que x_4 já fornece uma coluna da matriz identidade. Assim, a rigor, precisamos apenas de uma variável artificial:

$$\text{Minimizar} \quad f_a(x_1, \ldots, x_5) = x_5$$
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_5 &= 3 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 &= 4 \\ x_i \geq 0, i = 1, \ldots, 5 \ , \end{aligned}$$

e minimizamos o custo desta variável.

Exemplo

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & f(\mathbf{x}) = x_1 - x_2 + 2x_3 + 0x_4 \\ & x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ & 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 4 \\ & x_i \geq 0, \; i = 1, \ldots, 4 \end{aligned}$$

Exemplo 2.31 Considere o problema de otimização linear definido no Exemplo 2.30 e o problema artificial definido no caso B, em que apenas uma variável artificial é introduzida. Problema artificial:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & f_a(x_1, \ldots, x_5) = x_5 \\ & x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 3 \\ & 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 4 \\ & x_i \geq 0, \; i = 1, \ldots, 5 \end{aligned}$$

Obtenha a solução do problema original.

Outra possibilidade

- Em vez de resolver um problema auxiliar (fase I) para encontrar a base, simplesmente penalizamos as variáveis artificiais no problema original (fase II), de modo a garantir que elas sejam nulas na solução ótima:

$$\text{Minimizar} \quad f_a(x_1, \ldots, x_5) = x_1 - x_2 + 2x_3 + 1000x_5$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 3$$
$$2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 4$$
$$x_i \geq 0, \; i = 1, \ldots, 5.$$

valor suficientemente grande para garantir que x_5 não aparece na solução ótima.

Exercício

- Resolva:

Min $x_1 - 2x_2$

s.a

$x_1 + x_2 \geq 2$

$-x_1 + x_2 \geq 1$

$x_2 \geq 3$