Programação Matemática

Método Simplex

Forma Padrão - Revisão

$$\text{Minimizar } f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
&\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \\
x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ \ldots,\ x_n &\geq 0.
\end{aligned}$$

- Características da forma padrão:
  - ✓Problema de minimização
  - ✓Todas as restrições são de igualdade
  - ✓Todas as variáveis são não-negativas
  - ✓ Considerar b ≥ 0.

Partição básica (Revisão)

- Seja o sistema $Ax=b$, onde A_{mxn} , b_{mx1} , x_{nx1} ($m<n$ e posto de A é m).
- **Se é possível reorganizar as colunas de A de tal modo A=[B,N] e que:**
- $\mathbf{B_{mxm}}$ é formada por ***m*** colunas linearmente independentes de A dada por:

$$\mathbf{B} = [\mathbf{a}_{B_1} \ \mathbf{a}_{B_2} \cdots \ \mathbf{a}_{B_m}]$$

Onde B_1, B_2,..., B_m são os índices das colunas escolhidas da matriz A (índices básicos)

Partição básica (Revisão)

- $\mathbf{N}_{\mathbf{mx\ (n-m)}}$ - formada pelas ***n-m*** colunas restantes de A.
- $\mathbf{N}_{\mathbf{mx\ (n-m)}}$ pode ser escrita como:

  Onde N_1, N_2,..., N_m são os índices das colunas da matriz A que pertencem a N (índices não-básicos)

$$\mathbf{N} = [\mathbf{a}_{N_1} \ \mathbf{a}_{N_2} \cdots \mathbf{a}_{Nn-m}]$$

Esta reorganização é definida como partição básica

$$\mathbf{A} = [\mathbf{B} \quad \mathbf{N}]$$

Partição básica (partição das variáveis)

- Consequentemente, a partição de A em [B N] cria uma partição das variáveis:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_B \\ \mathbf{x}_N \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}_B = \begin{bmatrix} x_{B_1} \\ x_{B_2} \\ \vdots \\ x_{B_m} \end{bmatrix}$$ variáveis básicas

$$\mathbf{x}_N = \begin{bmatrix} x_{N_1} \\ \vdots \\ x_{N_{n-m}} \end{bmatrix}$$ variáveis não básicas

Solução geral do sistema

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \Leftrightarrow [\mathbf{BN}] \begin{bmatrix} \mathbf{x_B} \\ \mathbf{x_N} \end{bmatrix} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{Bx_B} + \mathbf{Nx_N} = \mathbf{b}.$$

$$\mathbf{x_B} = \mathbf{B^{-1}b} - \mathbf{B^{-1}Nx_N}$$

- A última expressão de x_B é conhecida como solução geral do sistema.

Solução básica

- Considere uma partição básica A=[B,N]. Uma solução é dita básica quando:

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{x}}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \\ \hat{\mathbf{x}}_N = \mathbf{0}. \end{cases}$$

- Se $x_B \geq 0$ então temos uma *solução básica factível*. Caso contrário, temos uma *solução básica não-factível.*
- Se $x_B > 0$ dizemos que a solução básica factível é não degenerada.

Propriedades

Teorema: Se um problema de otimização linear tem uma solução ótima, então existe um vértice ótimo

Considere a região factível $S=\{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ tal que $\mathbf{Ax=b, x \geq 0}\}$**.**
Um ponto $x \in S$ é um vértice se e somente se x for uma solução básica factível.

Método possível

- Enumerar todas as soluções básicas factíveis (vértices)

  $x_1, x_2, \dots x_K$

- Escolher aquela (factível) com melhor função objetivo.

- Problema:

  K pode ser muito grande!

Simplex

Idéia:

- Partir de uma solução básica factível
- Visitar apenas as soluções básicas factíveis melhores que ela.

Método Simplex

Perguntas

- Dada uma solução básica factível (ou seja, um vértice)
- 1) Esta solução é ótima ?
- 2)Caso não seja ótima, como encontrar uma solução básica factível melhor ?

Pergunta 1: A solução atual é ótima ?

- Considere uma solução básica factível:

$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_B \\ \hat{\mathbf{x}}_N \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{cases} \hat{\mathbf{x}}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \\ \hat{\mathbf{x}}_N = \mathbf{0}. \end{cases}$$

- E a solução geral do sistema usando a mesma partição :

$$x = \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{B}\mathbf{x}_B + \mathbf{N}\mathbf{x}_N = \mathbf{b}. \longrightarrow \boxed{\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}_N}$$

Pergunta 1: A solução atual é ótima ?

- A função objetivo pode ser expressa considerando a partição básica:

$$x = \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} \rightarrow \quad \mathbf{B}\mathbf{x}_B + \mathbf{N}\mathbf{x}_N = \mathbf{b}. \longrightarrow \boxed{\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}_N}$$

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_B^T & \mathbf{c}_N^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_B \\ \mathbf{x}_N \end{bmatrix} = \mathbf{c}_B^T\mathbf{x}_B + \mathbf{c}_N^T\mathbf{x}_N$$

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}_B^T(\underbrace{\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}_N}_{\mathbf{x}_B}) + \mathbf{c}_N^T\mathbf{x}_N$$

$$= \mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}_N + \mathbf{c}_N^T\mathbf{x}_N.$$

Pergunta 1: A solução atual é ótima ?

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}_B^T \underbrace{(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}_N)}_{\mathbf{x}_B} + \mathbf{c}_N^T \mathbf{x}_N$$

$$= \underbrace{\mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}}_{f(\hat{\mathbf{x}})} - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}_N + \mathbf{c}_N^T \mathbf{x}_N.$$

valor da solução básica associada a esta partição

- Então

$$f(\mathbf{x}) = f(\hat{\mathbf{x}}) - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}_N + \mathbf{c}_N^T \mathbf{x}_N.$$

$\boxed{\lambda^T}$

$$\boxed{\lambda^T = \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1}}$$

Pergunta 1: A solução atual é ótima ?

- Definição (vetor multiplicador simplex): O vetor λ_{mx1}, dado por:

$$\lambda^T = c_B^T B^{-1}$$

é chamado vetor multiplicador simplex (ou também, vetor de variáveis duais).

O vetor multiplicador simplex pode ser obtido por:

$$\lambda^T = c_B^T B^{-1} \Leftrightarrow \lambda = \left(B^{-1}\right)^T c_B \Leftrightarrow B^T \lambda = c_B$$

Retornando ... Pergunta 1: A solução atual é ótima ?

$$f(\mathbf{x}) = f(\hat{\mathbf{x}}) - \mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}_N + \mathbf{c}_N^T\mathbf{x}_N = f(\hat{\mathbf{x}}) - \boldsymbol{\lambda}^T\mathbf{N}\mathbf{x}_N + \mathbf{c}_N^T\mathbf{x}_N$$

$$= f(\hat{\mathbf{x}}) + (\mathbf{c}_N^T - \boldsymbol{\lambda}^T\mathbf{N})\mathbf{x}_N$$

Vamos expressar por coluna:

$$\mathbf{c}_N^T - \bar{\boldsymbol{\lambda}}^T\mathbf{N} = (c_{N_1}, c_{N_2}, \cdots, c_{N_{n-m}}) - \boldsymbol{\lambda}^T(\mathbf{a}_{N_1}, \mathbf{a}_{N_2}, \cdots, \mathbf{a}_{N_{n-m}})$$

$$= (c_{N_1} - \boldsymbol{\lambda}^T\mathbf{a}_{N_1}, c_{N_2} - \boldsymbol{\lambda}^T\mathbf{a}_{N_2}, \cdots, c_{N_{n-m}} - \boldsymbol{\lambda}^T\mathbf{a}_{N_{n-m}})$$

$$\mathbf{x}_N = (x_{N_1}, x_{N_2}, \cdots, x_{N_{n-m}})$$

$$\boxed{f(\mathbf{x}) = f(\hat{\mathbf{x}}) + (c_{N_1} - \boldsymbol{\lambda}^T\mathbf{a}_{N_1})x_{N_1} + (c_{N_2} - \boldsymbol{\lambda}^T\mathbf{a}_{N_2})x_{N_2} + \ldots + (c_{N_{n-m}} - \boldsymbol{\lambda}^T\mathbf{a}_{N_{n-m}})x_{N_{n-m}}}$$

Custos relativos

$$\boxed{f(\mathbf{x}) = f(\hat{\mathbf{x}}) + (c_{N_1} - \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{a}_{N_1}) x_{N_1} + (c_{N_2} - \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{a}_{N_2}) x_{N_2} + \ldots + (c_{N_{n-m}} - \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{a}_{N_{n-m}}) x_{N_{n-m}}}$$

Definição: Os coeficientes $\hat{c}_{N_j} = (c_{N_j} - \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{a}_{N_j})$ das variáveis não-básicas na função objetivo descrito acima são chamados custos relativos ou custos reduzidos.

$$\hat{c}_{N_j} = (c_{N_j} - \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{a}_{N_j}) \longrightarrow \boxed{f(\mathbf{x}) = f(\hat{\mathbf{x}}) + \hat{c}_{N_1} x_{N_1} + \hat{c}_{N_2} x_{N_2} + \ldots + \hat{c}_{N_{n-m}} x_{N_{n-m}}}$$

Condição de otimalidade

$$f(\mathbf{x}) = f(\hat{\mathbf{x}}) + (c_{N_1} - \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{a}_{N_1}) x_{N_1} + (c_{N_2} - \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{a}_{N_2}) x_{N_2} + \ldots + (c_{N_{n-m}} - \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{a}_{N_{n-m}}) x_{N_{n-m}}$$

Propriedade 2.3 (*condição de otimalidade*) Considere uma partição básica $\mathbf{A} = [\mathbf{B}\ \mathbf{N}]$ em que a solução básica associada $\hat{\mathbf{x}}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$ (isto é, solução básica factível), e seja $\boldsymbol{\lambda}^T = \mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}$ o vetor multiplicador simplex. Se $(c_{N_j} - \boldsymbol{\lambda}^T\mathbf{a}_{N_j}) \geq 0$, $j = 1, \ldots, n-m$, (isto é, todos os custos relativos são não-negativos), então a solução básica é ótima.

Solução básica factível e custos relativos maiores que zero → Solução ótima

problema de minimização

Resumo

- Já vimos:
  - Soluções básicas estão associadas a vértices (pontos extremos)
  - Se há uma solução ótima, então há um ponto extremo (solução básica) ótima.
  - Podemos definir os custos relativos de variáveis não básic $\hat{c}_{N_j} = (c_{N_j} - \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{a}_{N_j})$ $\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}} = \mathbf{c}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}} \mathbf{B}^{-1}$
  - Se, em um problema de minimização (maximização), para uma dada solução básica, todos os custos relativos são positivos (negativos), a solução é ótima.

Perguntas

- 1) A solução atual é ótima ?

  Respondida

- 2) Como encontrar uma solução básica factível melhor ?

Perguntas

- 1) A solução atual é ótima ?

  Respondida (ver último item do slide anterior)

- 2) Como encontrar uma solução básica factível melhor ?

Perguntas

- 1) A solução atual é ótima ?

  Respondida (ver último item do slide anterior)

- 2) Como encontrar uma solução básica factível melhor ?

A solução não é ótima

- Suponha que exista ao menos uma variável não-básica x_{N_k} para a qual:

$$\hat{c}_{N_k} = c_{N_k} - \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{a}_{N_k} < 0$$

(Ou a propriedade 2.3 estaria atendida e a solução seria ótima).

*problema de minimização

Estratégia simplex

- Vamos perturbar a solução básica factível de modo a diminuir o valor da função objetivo .
- Definição (estratégia simplex). Chamamos de estratégia simplex a perturbação de uma solução básica factível que consiste em alterar as variáveis não básicas por:

$$\begin{cases} x_{N_k} = \varepsilon \geq 0, \text{ (variável com custo relativo negativo)} \\ x_{N_j} = 0, \quad j = 1, 2, ..., n-m, \ i \neq k. \end{cases}$$

isto é, escolhemos **uma** variável com custo relativo negativo e adicionamos uma pequena perturbação.

Estratégia simplex

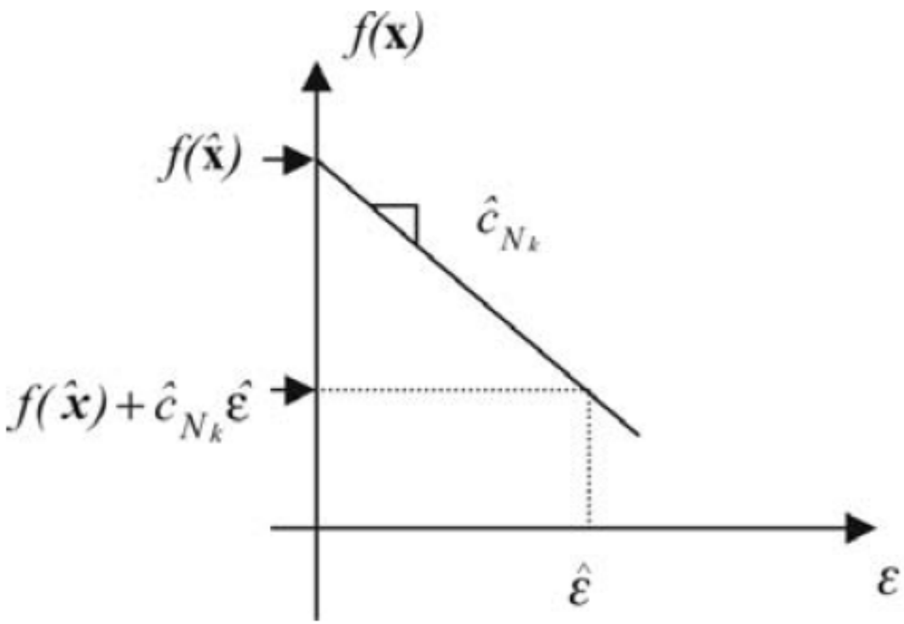
$$\begin{cases} x_{N_k} = \varepsilon \geq 0, \text{ (variável com custo relativo negativo)} \\ x_{N_j} = 0, \quad j = 1, 2, \ldots., n-m, \ i \neq k. \end{cases}$$

A nova função objetivo vale:

$$f(\mathbf{x}) = f(\hat{\mathbf{x}}) + \hat{c}_{N_1} \underbrace{0}_{x_{N_1}} + \cdots + \hat{c}_{N_k} \underbrace{\varepsilon}_{x_{N_k}} + \ldots + \hat{c}_{N_{n-m}} \underbrace{0}_{x_{N_{n-m}}} =$$

$$= f(\hat{\mathbf{x}}) + \hat{c}_{N_k} \varepsilon < f(\hat{\mathbf{x}})$$

Resultado na função objetivo



Pergunta: a solução perturbada é factível ?
Sim, se a perturbação é suficientemente pequena e a solução básica original é não degenerada.

Qual o maior valor de ε ?

Direção simplex e tamanho do passo

- Mudando as variáveis não-básicas, obrigatoriamente temos que mudar as variáveis básicas:

$$\mathbf{x}_{\mathrm{N}} = \begin{pmatrix} x_{N_1} \\ \vdots \\ x_{N_k} \\ \vdots \\ x_{N_{n-m}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \varepsilon \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow k$$

$$\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}_{\mathrm{N}} = \hat{\mathbf{x}}_{\mathrm{B}} - \underbrace{\mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_{N_k}}_{\mathbf{y}} \varepsilon = \hat{\mathbf{x}}_{\mathrm{B}} - \mathbf{y}\varepsilon$$

direção simplex!

Direção simplex e tamanho do passo

Definição 2.9 (*direção simplex*) Chamamos de direção simplex o vetor $\mathbf{y} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_{N_k}$, o qual fornece os coeficientes de como as variáveis básicas são alteradas pela estratégia simplex. A direção simplex é solução do sistema de equações lineares $\mathbf{B}\mathbf{y} = \mathbf{a}_{N_k}$.

- As novas variáveis básicas (perturbadas) devem continuar não-negativas:

$$\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}_\mathbf{N} = \hat{\mathbf{x}}_\mathbf{B} - \underbrace{\mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_{N_k}}_{\mathbf{y}}\varepsilon = \hat{\mathbf{x}}_\mathbf{B} - \mathbf{y}\varepsilon$$

$$x_{B_i} = \hat{x}_{B_i} - y_i\varepsilon \geq 0, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Direção simplex e tamanho do passo

$$x_{B_i} = \hat{x}_{B_i} - y_i \varepsilon \geq 0, \quad i = 1, \ldots, m.$$

- Temos, pois:

se $y_i \leq 0$, então $x_{B_i} \geq 0$, para todo $\varepsilon \geq 0$

se $y_i > 0$, como $x_{B_i} = \hat{x}_{B_i} - y_i \varepsilon \geq 0$, então, $\varepsilon \leq \frac{\hat{x}_{B_i}}{y_i}$

Logo, o maior valor de ε é dado por

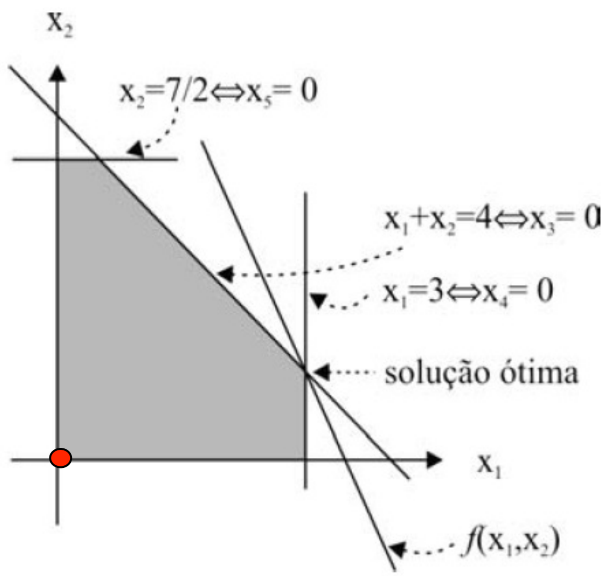
$$\hat{\varepsilon} = \frac{\hat{x}_{B_\ell}}{y_\ell} = \text{mínimo}\left\{ \frac{\hat{x}_{B_i}}{y_i} \text{ tal que } y_i > 0 \right\}.$$

O que acontece se...

- Se no momento de calcular o passo máximo, todos os y_i são negativos...

... significa que para qualquer valor de ε, a nova solução é factível. Como quanto maior ε, maior o decrescimento da função objetivo, a **solução ótima será ilimitada**!

Exemplo



Considere o exemplo anterior:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar } f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) &= -2x_1 - x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 \\ x_1 + x_2 + x_3 \quad &= 4 \\ x_1 \quad + x_4 \quad &= 3 \\ x_2 \quad + x_5 &= \tfrac{7}{2} \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 &\geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0. \end{aligned}$$

$(B_1, B_2, B_3) = (3, 4, 5)$ $\qquad$ $(N_1, N_2) = (1, 2).$

Solução básica: $\mathbf{x}_B = (x_3, x_4, x_5),$ (obtida para x_{N_i} =0)

$$\hat{\mathbf{x}}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \longrightarrow \hat{\mathbf{x}}_B = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ \frac{7}{2} \end{pmatrix}$$

Exemplo

A solução é ótima ?

multiplicador simplex:

$$\mathbf{c_B} = (c_{B_1}, c_{B_2}, c_{B_3}) = (c_3, c_4, c_5) = (0, 0, 0)$$

$$\boldsymbol{\lambda}^T = \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \longrightarrow \boldsymbol{\lambda} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

custos relativos:

$$\hat{c}_1 = c_1 - \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{a}_1 = -2 - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -2 \quad \Big| \quad \hat{c}_2 = c_2 - \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{a}_2 = -1 - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -1$$

Não é ótima. (Por quê ?)

Exemplo

direção simplex $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$

$$\mathbf{By} = \mathbf{a}_{N_1} \longrightarrow \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

A direção simplex indica a maneira como as variáveis básicas se modificam, ao se aumentar uma dada variável não-básica (no caso, N_1=1)

$$x_{B_i} = \hat{x}_{B_i} - y_i\,\varepsilon$$

$$x_3 = 4 - \varepsilon$$
$$x_4 = 3 - \varepsilon$$
$$x_3 = \tfrac{7}{2}\,.$$

Exemplo

Tamanho do passo:

$$\hat{\varepsilon} = mínimo\left\{\frac{\hat{x}_{B_1}}{y_1}, \frac{\hat{x}_{B_2}}{y_2}\right\} = mínimo\left\{\frac{4}{1}, \frac{3}{1}\right\} = 3 = \frac{\hat{x}_{B_2}}{y_2}$$

Com o valor de $\hat{\varepsilon} = 3$, a variável $x_{B_2} = x_4$ se anula

a variável não-básica x_1 torna-se positiva: $x_1 = \hat{\varepsilon} = 3$

No caso geral:

- Ao resolvermos:

$$\hat{\varepsilon} = \frac{\hat{x}_{B_\ell}}{y_\ell} = \text{mínimo}\left\{ \frac{\hat{x}_{B_i}}{y_i} \text{ tal que } \; y_i > 0 \right\}$$

  determinamos a variável da base que vai se anular (sair da base).

- Anteriormente, ao escolhermos uma variável não-básica com custo relativo negativo, escolhemos a variável não-básica que vai assumir valor positivo (entrar na base).

No caso geral

- Partição anterior:

$$(x_{B_1} \cdots x_{B_\ell} \cdots x_{B_m} \mid 0 \cdots x_{N_k} \cdots)$$

escolhida para entrar
(custo relativo negativo)

escolhida para sair
(primeira ao se anular ao aumentarmos x_{N_k})

A nova solução

- Pode-se mostrar que a nova matriz B é invertível.

- Como os valores das variáveis da nova B são não-negativos, trata-se de uma solução factível.

- Seu custo $f(\mathbf{x}) = f(\hat{\mathbf{x}}) + \hat{c}_{N_k}\hat{\varepsilon} \;<\; f(\hat{\mathbf{x}})$

Simplex - Fase II

Fase II:

{*início da iteração simplex*}

Passo 1: {*cálculo da solução básica*}

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{x}}_{\mathrm{B}} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} & \text{(equivalentemente, resolva o sistema } \mathbf{B}\mathbf{x}_{\mathrm{B}} = \mathbf{b}\text{)} \\ \hat{\mathbf{x}}_{\mathrm{N}} = \mathbf{0} \end{cases}$$

Passo 2: {*cálculo dos custos relativos*}

2.1) {*vetor multiplicador simplex*}

$$\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}} = \mathbf{c}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}^{-1} \quad \text{(equivalentemente, resolva o sistema } \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\lambda = \mathbf{c}_{\mathrm{B}}\text{)}$$

2.2) {*custos relativos*}

$$\hat{c}_{N_j} = c_{N_j} - \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\mathbf{a}_{N_j} \qquad j = 1, 2, \ldots, n-m$$

2.3) {*determinação da variável a entrar na base*}

$$\hat{c}_{N_k} = \text{mínimo}\{\hat{c}_{N_j}, j = 1, \ldots, n-m\} \text{ (a variável } x_{N_k} \text{ entra na base)}$$

Simplex - Fase II

Passo 3: {*teste de otimalidade*}

Se $\hat{c}_{N_k} \geq 0$, então: *pare* {*solução na iteração atual é ótima*}

Passo 4: {*cálculo da direção simplex*}

$\mathbf{y} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_{N_k}$ (equivalentemente, resolva o sistema: $\mathbf{By} = \mathbf{a}_{N_k}$)

Passo 5: {*determinação do passo e variável a sair da base*}

Se $\mathbf{y} \leq \mathbf{0}$, então: *pare* {*problema não tem solução ótima finita*: $f(\mathbf{x}) \rightarrow -\infty$}

Caso contrário, determine a variável a sair da base pela razão mínima:

$$\hat{\varepsilon} = \frac{\hat{x}_{B_\ell}}{y_\ell} = \text{mínimo}\left\{\frac{\hat{x}_{B_i}}{y_i} \ \text{tal que} \ y_i > 0, \ i = 1, \ldots, m\right\} \ \text{(a variável } x_{B_\ell} \text{ sai da base)}$$

Simplex - fase II

Passo 6: {*atualização: nova partição básica, troque a* ℓ-ésima *coluna de* $\boldsymbol{B}$ *pela* k-ésima *coluna de* $\boldsymbol{N}$}:

matriz básica nova: $\mathbf{B} = [\mathbf{a}_{B_1} \cdots \mathbf{a}_{B_{\ell-1}} \ \mathbf{a}_{N_k} \ \mathbf{a}_{B_{\ell+1}} \cdots \mathbf{a}_{B_m}]$

matriz não-básica nova: $\mathbf{N} = [\mathbf{a}_{N_1} \cdots \mathbf{a}_{N_{k-1}} \ \mathbf{a}_{B_\ell} \ \mathbf{a}_{N_{k+1}} \cdots \mathbf{a}_{N_{n-m}}]$

iteração = iteração + 1

Retorne ao passo 1

{fim da iteração simplex}

Exemplo 2.26 Considere o seguinte problema de otimização linear:

$$\text{Minimizar} \quad f(x_1, x_2) = -x_1 - 2x_2$$
$$x_1 + x_2 \leq 6$$
$$x_1 - x_2 \leq 4$$
$$-x_1 + x_2 \leq 4$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$$

Introduzindo variáveis de folga, temos:

Tabela 2.13
Dados do problema.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	**b**
	1	1	1	0	0	6
A	1	–1	0	1	0	4
	–1	1	0	0	1	4
Min f	–1	–2	0	0	0	

Fase I:

$(B_1, B_2, B_3) = (3, 4, 5), \qquad (N_1, N_2) = (1, 2),$

Fácil, pois os coeficientes das variáveis de folga formam uma matriz identidade.

Tabela 2.14
Dados conforme partição na iteração 1.

	Índices					
	básicos			*não-básicos*		
	$B_1=3$	$B_2=4$	$B_3=5$	$N_1=1$	$N_2=2$	**b**
[**B** | **N**]	1	0	0	1	1	6
	0	1	0	1	–1	4
	0	0	1	–1	1	4
[$\mathbf{c}_B$ | $\mathbf{c}_N$]	0	0	0	–1	–2	$f = 0$

Passo 1:

{*cálculo da solução básica*} $= \mathbf{x_B} = (x_3, x_4, x_5)$

Resolva o sistema $\mathbf{Bx_B} = \mathbf{b}$ e obtenha $\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Passo 2: {*Cálculo dos custos relativos*}

2.1) {*vetor multiplicador simplex*}: $(\mathbf{c_B} = (c_{B_1}, c_{B_2}, c_{B_3}) = (c_3, c_4, c_5) = (0, 0, 0))$.

A solução do sistema $\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{c_B}$ é $\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}} = (0, 0, 0)$.

2.2) {*custos relativos*}: $(N_1 = 1, N_2 = 2)$

$$\hat{c}_1 = c_1 - \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{a}_1 = -1 - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -1,$$

$$\hat{c}_2 = c_2 - \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{a}_2 = -2 - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -2 \leftarrow k = 2.$$ (a variável $x_{N_2} = x_2$ entra na base)

2.3) {determinação da variável a entra na base}

Como $\hat{c}_2 = \hat{c}_{N_2} = \textit{mínimo}\{\hat{c}_{N_j},\ j = 1, 2\} = -2 < 0$, então a variável x_2 entra na base.

Passo 3: {teste de otimalidade}

Os custos relativos mostram a função objetivo em termos das variáveis não-básicas: $f(\mathbf{x}) = 0 - 1x_1 - 2x_2$. Como há custos relativos negativos, a solução atual não é ótima.

Passo 4: {cálculo da direção simplex}

$$\text{Resolva o sistema } \mathbf{By} = \mathbf{a}_2 \text{ e obtenha } \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Passo 5: {determinação do passo e variável a sair da base}

$$\hat{\varepsilon} = \textit{mínimo}\left\{\frac{\hat{x}_{B_1}}{y_1}, \frac{\hat{x}_{B_3}}{y_3}\right\} = \textit{mínimo}\left\{\frac{6}{1}, \frac{4}{1}\right\} = 4 = \frac{\hat{x}_{B_3}}{y_3}.$$ (a variável $x_{B_3} = x_5$ sai da base)

Passo 6: {atualização: nova partição básica, troque a ℓ-ésima coluna de **B** *pela k-ésima coluna de* **N**}:

$$(B_1, B_2, B_3) = (3, 4, 2) \qquad (N_1, N_2) = (1, 5),$$

Tabela 2.15
Dados conforme partição na iteração 2.

	Índices					
	básicos			*não-básicos*		
	$B_1=3$	$B_2=4$	$B_3=2$	$N_1=1$	$N_2=5$	$\boldsymbol{b}$
$[\boldsymbol{B} \mid \boldsymbol{N}]$	1	0	1	1	0	6
	0	1	–1	1	0	4
	0	0	1	–1	1	4
$[\boldsymbol{c}_B \mid \boldsymbol{c}_N]$	0	0	–2	–1	0	$f = -8$

Exercício: continue até obter a solução ótima