



Pesquisa Operacional / Programação Matemática

Otimização discreta

Programação dinâmica II



Programação dinâmica

- Vamos aprender uma nova maneira (mais sistemática) de lidar com a formulação de um problema de programação dinâmica.
- Idéias básicas:
 1. dividir um problema em subproblemas menores.
 2. criar uma função de recorrência.



Retomando o problema da mochila

- Vamos criar uma função que diz o valor do estado para uma dada capacidade da mochila e reescrevê-lo como problemas da mochila recorrentes que envolvem capacidades menores.

Problema da mochila (vários itens podem ser colocados)

- $M(j)$: maior utilidade que se pode conseguir com uma mochila de capacidade j .
- Função de recorrência:

Problemas menores da mochila

$$M(j) = \begin{cases} \max\{M(j-1), \max_i M(j-p_i) + u_i\}, & j > 1 \\ 0 & j = 0 \end{cases}$$

caso base

Problema da mochila (vários itens)

■ Exemplo

u_i	3	5	2	8
p_i	2	4	3	5

$C=8$

$M(0) = 0$ (caso base)

$$M(8) = \max \{ M(7), \max_{1,2,3,4} \{ M(8-p_i) + u_i \} \} = \\ \max \{ M(7), \max \{ M(6)+3, M(4)+5, M(5)+2, M(3)+8 \} \}$$

$$M(7) = \max \{ M(6), \max \{ M(5)+3, M(3)+5, M(4)+2, M(2)+8 \} \}$$

$$M(6) = \max \{ M(5), \max \{ M(4)+3, M(2)+5, M(3)+2, M(1)+8 \} \}$$

$$M(5) = \max \{ M(4), \max \{ M(3)+3, M(1)+5, M(2)+2, M(0)+8 \} \}$$

$$M(4) = \max \{ M(3), \max \{ M(2)+3, M(0)+5, M(1)+2 \} \}$$

$$M(3) = \max \{ M(2), \max \{ M(1)+3, M(0)+2 \} \}$$

$$M(2) = \max \{ M(1), \max \{ M(0)+3 \} \}$$

$$M(1) = \max \{ M(0) \}$$

Problema da mochila (vários itens)

■ Exemplo

u_i	3	5	2	8
p_i	2	4	3	5

$C=8$

$M(0) = 0$ (caso base)

$$M(8) = \max \{ M(7), \max_{1,2,3,4} \{ M(8-p_i) + u_i \} \} = \\ \max \{ M(7), \max \{ M(6)+3, M(4)+5, M(5)+2, M(3)+8 \} \}$$

$$M(7) = \max \{ M(6), \max \{ M(5)+3, M(3)+5, M(4)+2, M(2)+8 \} \}$$

$$M(6) = \max \{ M(5), \max \{ M(4)+3, M(2)+5, M(3)+2, M(1)+8 \} \}$$

$$M(5) = \max \{ M(4), \max \{ M(3)+3, M(1)+5, M(2)+2, M(0)+8 \} \}$$

$$M(4) = \max \{ M(3), \max \{ M(2)+3, M(0)+5, M(1)+2 \} \}$$

$$M(3) = \max \{ M(2), \max \{ M(1)+3, M(0)+2 \} \}$$

$$M(2) = \max \{ M(1), \max \{ M(0)+3 \} \}$$

$$M(1) = \max \{ M(0) \}$$

Problema da mochila (vários itens)

■ Exemplo

u_i	3	5	2	8
p_i	2	4	3	5

$C=8$

$M(0) = 0$ (caso base)

$$M(8) = \max \{ M(7), \max_{1,2,3,4} \{ M(8-p_i) + u_i \} \} = \\ \max \{ M(7), \max \{ M(6)+3, M(4)+5, M(5)+2, M(3)+8 \} \}$$

$$M(7) = \max \{ M(6), \max \{ M(5)+3, M(3)+5, M(4)+2, M(2)+8 \} \}$$

$$M(6) = \max \{ M(5), \max \{ M(4)+3, M(2)+5, M(3)+2, M(1)+8 \} \}$$

$$M(5) = \max \{ M(4), \max \{ M(3)+3, M(1)+5, M(2)+2, 0+8 \} \}$$

$$M(4) = \max \{ M(3), \max \{ M(2)+3, 0+5, M(1)+2 \} \}$$

$$M(3) = \max \{ M(2), \max \{ M(1)+3, 0+2 \} \}$$

$$M(2) = \max \{ M(1), \max \{ 0+3 \} \}$$

$$M(1) = \max \{ 0 \}$$

Problema da mochila (vários itens)

■ Exemplo

u_i	3	5	2	8
p_i	2	4	3	5

$C=8$

$M(0) = 0$ (caso base)

$$M(8) = \max \{ M(7), \max_{1,2,3,4} \{ M(8-p_i) + u_i \} \} = \\ \max \{ M(7), \max \{ M(6)+3, M(4)+5, M(5)+2, M(3)+8 \} \}$$

$$M(7) = \max \{ M(6), \max \{ M(5)+3, M(3)+5, M(4)+2, M(2)+8 \} \}$$

$$M(6) = \max \{ M(5), \max \{ M(4)+3, M(2)+5, M(3)+2, M(1)+8 \} \}$$

$$M(5) = \max \{ M(4), \max \{ M(3)+3, M(1)+5, M(2)+2, 0+8 \} \} =$$

$$M(4) = \max \{ M(3), \max \{ M(2)+3, 0+5, M(1)+2 \} \}$$

$$M(3) = \max \{ M(2), \max \{ M(1)+3, 0+2 \} \}$$

$$M(2) = \max \{ M(1), \max \{ 0+3 \} \} = 3$$

$$M(1) = \max \{ 0 \} = 0$$

Problema da mochila (vários itens)

■ Exemplo

u_i	3	5	2	8
p_i	2	4	3	5

$C=8$

$M(0) = 0$ (caso base)

$$M(8) = \max \{ M(7), \max_{1,2,3,4} \{ M(8-p_i) + u_i \} \} = \\ \max \{ M(7), \max \{ M(6)+3, M(4)+5, M(5)+2, M(3)+8 \} \}$$

$$M(7) = \max \{ M(6), \max \{ M(5)+3, M(3)+5, M(4)+2, M(2)+8 \} \}$$

$$M(6) = \max \{ M(5), \max \{ M(4)+3, M(2)+5, M(3)+2, M(1)+8 \} \}$$

$$M(5) = \max \{ M(4), \max \{ M(3)+3, M(1)+5, M(2)+2, 0+8 \} \} =$$

$$M(4) = \max \{ M(3), \max \{ M(2)+3, 0+5, M(1)+2 \} \}$$

$$M(3) = \max \{ M(2), \max \{ M(1)+3, 0+2 \} \}$$

$$M(2) = 3$$

$$M(1) = 0$$

Problema da mochila (vários itens)

■ Exemplo

u_i	3	5	2	8
p_i	2	4	3	5

$C=8$

$M(0) = 0$ (caso base)

$$M(8) = \max \{ M(7), \max_{1,2,3,4} \{ M(8-p_i) + u_i \} \} = \\ \max \{ M(7), \max \{ M(6)+3, M(4)+5, M(5)+2, M(3)+8 \} \}$$

$$M(7) = \max \{ M(6), \max \{ M(5)+3, M(3)+5, M(4)+2, M(2)+8 \} \}$$

$$M(6) = \max \{ M(5), \max \{ M(4)+3, M(2)+5, M(3)+2, M(1)+8 \} \}$$

$$M(5) = \max \{ M(4), \max \{ M(3)+3, M(1)+5, M(2)+2, 0+8 \} \} =$$

$$M(4) = \max \{ M(3), \max \{ M(2)+3, 0+5, M(1)+2 \} \}$$

$$M(3) = 3$$

$$M(2) = 3$$

$$M(1) = 0$$

Problema da mochila (vários itens)

■ Exemplo

u_i	3	5	2	8
p_i	2	4	3	5

$C=8$

$M(0) = 0$ (caso base)

$$M(8) = \max \{ M(7), \max_{1,2,3,4} \{ M(8-p_i) + u_i \} \} = \\ \max \{ M(7), \max \{ M(6)+3, M(4)+5, M(5)+2, M(3)+8 \} \}$$

$$M(7) = \max \{ M(6), \max \{ M(5)+3, M(3)+5, M(4)+2, M(2)+8 \} \}$$

$$M(6) = \max \{ M(5), \max \{ M(4)+3, M(2)+5, M(3)+2, M(1)+8 \} \}$$

$$M(5) = \max \{ M(4), \max \{ M(3)+3, M(1)+5, M(2)+2, 0+8 \} \} =$$

$$M(4) = 6$$

$$M(3) = 3$$

$$M(2) = 3$$

$$M(1) = 0$$

Problema da mochila (vários itens)

■ Exemplo

u_i	3	5	2	8
p_i	2	4	3	5

$C=8$

$M(0) = 0$ (caso base)

$$M(8) = \max \{ M(7), \max_{1,2,3,4} \{ M(8-p_i) + u_i \} \} = \\ \max \{ M(7), \max \{ M(6) + 3, M(4) + 5, M(5) + 2, M(3) + 8 \} \}$$

$$M(7) = \max \{ M(6), \max \{ M(5) + 3, M(3) + 5, M(4) + 2, M(2) + 8 \} \}$$

$$M(6) = \max \{ M(5), \max \{ M(4) + 3, M(2) + 5, M(3) + 2, M(1) + 8 \} \}$$

$$M(5) = 8$$

$$M(4) = 6$$

$$M(3) = 3$$

$$M(2) = 3$$

$$M(1) = 0$$

Problema da mochila (vários itens)

■ Exemplo

u_i	3	5	2	8
p_i	2	4	3	5

$C=8$

$M(0) = 0$ (caso base)

$$M(8) = \max \{ M(7), \max_{1,2,3,4} \{ M(8-p_i) + u_i \} \} = \\ \max \{ M(7), \max \{ M(6) + 3, M(4) + 5, M(5) + 2, M(3) + 8 \} \}$$

$$M(7) = \max \{ M(6), \max \{ M(5) + 3, M(3) + 5, M(4) + 2, M(2) + 8 \} \}$$

$$M(6) = 9$$

$$M(5) = 8$$

$$M(4) = 6$$

$$M(3) = 3$$

$$M(2) = 3$$

$$M(1) = 0$$

Problema da mochila (vários itens)

■ Exemplo

u_i	3	5	2	8
p_i	2	4	3	5

$C=8$

$M(0) = 0$ (caso base)

$$M(8) = \max \{ M(7), \max_{1,2,3,4} \{ M(8-p_i) + u_i \} \} = \\ \max \{ M(7), \max \{ M(6)+3, M(4)+5, M(5)+2, M(3)+8 \} \}$$

$$M(7) = 11$$

$$M(6) = 9$$

$$M(5) = 8$$

$$M(4) = 6$$

$$M(3) = 3$$

$$M(2) = 3$$

$$M(1) = 0$$

Problema da mochila (vários itens)

■ Exemplo

u_i	3	5	2	8
p_i	2	4	3	5

$C=8$

$M(0) = 0$ (caso base)

$$M(8) = \max_{12} \{ M(7), \max_{1,2,3,4} \{ M(8-p_i) + u_i \} \} =$$

$$M(7) = 11$$

$$M(6) = 9$$

$$M(5) = 8$$

$$M(4) = 6$$

$$M(3) = 3$$

$$M(2) = 3$$

$$M(1) = 0$$



Exemplo: maior sequência contínua

- Dada uma sequência de números reais, qual a subsequência contínua que tem maior soma ?

6 -3 4 -7 2 10 -3 2



Exemplo: maior sequência contínua

6 -3 4 -7 2 10 -3 2

$M(j)$ = maior soma terminando na posição j .

$$M(j) = \begin{cases} \max\{M(j-1) + A[j], A[j]\}, & j > 1 \\ A[j] & j = 1 \end{cases}$$



Exemplo: maior sequência contínua

6 -3 4 -7 2 10 -3 2

$M(j)$ = maior soma terminando na posição j .

$$M(j) = \begin{cases} \max\{M(j-1) + A[j], A[j]\}, & j > 1 \\ A[j] & j = 1 \end{cases}$$

$M(1) = 6$ (caso base)

$M(2) = \max(M(1)-3, -3) = 3$



Exemplo: maior sequência contínua

6 -3 4 -7 2 10 -3 2

$M(j)$ = maior soma terminando na posição j .

$$M(j) = \begin{cases} \max\{M(j-1) + A[j], A[j]\}, & j > 1 \\ A[j] & j = 1 \end{cases}$$

$M(1) = 6$ (caso base)

$M(2) = \max(M(1) - 3, -3) = 3$

$M(3) = \max(M(2) + 4, 4) = 7$



Exemplo: maior sequência contínua

6 -3 4 -7 2 10 -3 2

$M(j)$ = maior soma terminando na posição j .

$$M(j) = \begin{cases} \max\{M(j-1) + A[j], A[j]\}, & j > 1 \\ A[j] & j = 1 \end{cases}$$

$M(1) = 6$ (caso base)

$M(2) = \max(M[1]-3, -3) = 3$

$M(3) = \max(M[2]+4, 4) = 7$

$M(4) = \max(M[3]-7, -7) = 0$



Exemplo: maior sequência contínua

6 -3 4 -7 2 10 -3 2

$M(j)$ = maior soma terminando na posição j .

$$M(j) = \begin{cases} \max\{M(j-1) + A[j], A[j]\}, & j > 1 \\ A[j] & j = 1 \end{cases}$$

$M(1) = 6$ (caso base)

$M(2) = \max(M[1]-3, -3) = 3$

$M(3) = \max(M[2]+4, 4) = 7$

$M(4) = \max(M[3]-7, -7) = 0$

$M(5) = \max(M[4]+2, 2) = 2$



Exemplo: maior sequência contínua

6 -3 4 -7 2 10 -3 2

$M(j)$ = maior soma terminando na posição j .

$$M(j) = \begin{cases} \max\{M(j-1) + A[j], A[j]\}, & j > 1 \\ A[j] & j = 1 \end{cases}$$

$M(1) = 6$ (caso base)

$M(2) = \max(M[1]-3, -3) = 3$

$M(3) = \max(M[2]+4, 4) = 7$

$M(4) = \max(M[3]-7, -7) = 0$

$M(5) = \max(M[4]+2, 2) = 2$

$M(6) = \max(M[5]+10, 10) = 12$

Exemplo: maior sequência contínua

6 -3 4 -7 2 10 -3 2

$M(j)$ = maior soma terminando na posição j .

$$M(j) = \begin{cases} \max\{M(j-1) + A[j], A[j]\}, & j > 1 \\ A[j] & j = 1 \end{cases}$$

$M(1) = 6$ (caso base)

$$M(2) = \max(M[1]-3, -3) = 3$$

$$M(3) = \max(M[2]+4, 4) = 7$$

$$M(4) = \max(M[3]-7, -7) = 0$$

$$M(5) = \max(M[4]+2, 2) = 2$$

$$M(6) = \max(M[5]+10, 10) = 12$$

$$M(7) = \max(M[6]-3, -3) = 9$$

Exemplo: maior sequência contínua

6 -3 4 -7 2 10 -3 2

$M(j)$ = maior soma terminando na posição j .

$$M(j) = \begin{cases} \max\{M(j-1) + A[j], A[j]\}, & j > 1 \\ A[j] & j = 1 \end{cases}$$

$M(1) = 6$ (caso base)

$M(2) = \max(M[1]-3, -3) = 3$

$M(3) = \max(M[2]+4, 4) = 7$

$M(4) = \max(M[3]-7, -7) = 0$

$M(5) = \max(M[4]+2, 2) = 2$

$M(6) = \max(M[5]+10, 10) = 12$

$M(7) = \max(M[6]-3, -3) = 9$

$M(8) = \max(M[7]+2, 2) = 11$



Problema do troco

- Você tem n tipos de moedas com valores

$$1=v_1 < v_2 < v_3 < \dots < v_n$$

Qual o menor número de moedas necessário para dar um troco de C ?

$M(j)$ = número de moedas mínimo necessário para dar um troco de j .

$$M(j) = \begin{cases} \min_i \{M(j - v_i)\} + 1 & j > 2 \\ 1 & j = 1 \end{cases}$$



Exemplo (Problema do troco)

- Moedas de 1, 5 e 10
- Troco de 17

$$M(j) = \begin{cases} \min_i \{M(j - v_i)\} + 1 & j > 2 \\ 1 & j = 1 \end{cases}$$

$M(1) = 1$ (caso base)

$M(17) = \min(M[1]-3, -3) = 3$



Exemplo (Problema do troco)

- Moedas de 1, 5 e 10

- Troco de 17

$$M(j) = \begin{cases} \min_i \{M(j - v_i)\} + 1 & j > 2 \\ 1 & j = 1 \end{cases}$$

$M(1) = 1$ (caso base)

$M(17) = \min(M(16)+1, M(12)+1, M(7)+1)$

$M(16) = \min(M(15)+1, M(11)+1, M(6)+1)$

...

Maior subsequência crescente

- Dada uma sequência de números reais A_1, \dots, A_n , qual a maior subsequência (não necessariamente contínua) para qual os valores são crescentes.

- $M(j) = \underbrace{\text{maior sequência}}_6 \underbrace{\text{terminando}}_{10} \text{ em } j.$

$$M(j) = \begin{cases} \max\{1, \max_{i| i < j, A[i] < A[j]} \{M(i)\} + 1\} & j > 2 \\ 1 & j = 1 \end{cases}$$



Maior subsequência crescente

6 -3 4 -7 2 10 -3 2

$$M(j) = \begin{cases} \max\{1, \max_{i| i < j, A[i] < A[j]} \{M(i)\} + 1\} & j > 2 \\ 1 & j = 1 \end{cases}$$

$M(1) = 1$ (caso base)

$M(2) = \max\{1, \max(-)\} = 1$



Maior subsequência crescente

6 -3 4 -7 2 10 -3 2

$$M(j) = \begin{cases} \max\{1, \max_{i| i < j, A[i] < A[j]} \{M(i)\} + 1\} & j > 2 \\ 1 & j = 1 \end{cases}$$

$M(1) = 1$ (caso base)

$M(2) = \max\{1, \max(-)\} = 1$

$M(3) = \max\{1, \max(M(2) + 1)\} = 2$



Maior subsequência crescente

6 -3 4 -7 2 10 -3 2

$$M(j) = \begin{cases} \max\{1, \max_{i| i < j, A[i] < A[j]} \{M(i)\} + 1\} & j > 2 \\ 1 & j = 1 \end{cases}$$

$M(1) = 1$ (caso base)

$M(2) = \max\{1, \max(-)\} = 1$

$M(3) = \max\{1, \max(M(2) + 1)\} = 2$

$M(4) = \max\{1, \max(-)\} = 0$



Maior subsequência crescente

6 -3 4 -7 2 10 -3 2

$$M(j) = \begin{cases} \max\{1, \max_{i| i < j, A[i] < A[j]} \{M(i)\} + 1\} & j > 2 \\ 1 & j = 1 \end{cases}$$

$M(1) = 1$ (caso base)

$$M(2) = \max\{1, \max(-)\} = 1$$

$$M(3) = \max\{1, \max(M(2) + 1)\} = 2$$

$$M(4) = \max\{1, \max(-)\} = 0$$

$$M(5) = \max\{1, \max(M(2) + 1, M(4) + 1)\} = 2$$



Maior subsequência crescente

6 -3 4 -7 2 10 -3 2

$$M(j) = \begin{cases} \max\{1, \max_{i| i < j, A[i] < A[j]} \{M(i)\} + 1\} & j > 2 \\ 1 & j = 1 \end{cases}$$

$M(1) = 1$ (caso base)

$$M(2) = \max\{1, \max(-)\} = 1$$

$$M(3) = \max\{1, \max(M(2) + 1)\} = 2$$

$$M(4) = \max\{1, \max(-)\} = 1$$

$$M(5) = \max\{1, \max(M(2) + 1, M(4) + 1)\} = 2$$

$$M(6) = \max\{1, \max(M(1) + 1, M(2) + 1, M(3) + 1, M(4) + 1, M(5) + 1)\} = 3$$



Maior subsequência crescente

6 -3 4 -7 2 10 -3 2

$$M(j) = \begin{cases} \max\{1, \max_{i| i < j, A[i] < A[j]} \{M(i)\} + 1\} & j > 2 \\ 1 & j = 1 \end{cases}$$

$M(1) = 1$ (caso base)

$$M(2) = \max\{1, \max(-)\} = 1$$

$$M(3) = \max\{1, \max(M(2) + 1)\} = 2$$

$$M(4) = \max\{1, \max(-)\} = 1$$

$$M(5) = \max\{1, \max(M(2) + 1, M(4) + 1)\} = 2$$

$$M(6) = \max\{1, \max(M(1) + 1, M(2) + 1, M(3) + 1, M(4) + 1, M(5) + 1)\} = 3$$

$$M(7) = \max\{1, \max(M(4) + 1)\} = 2$$



Maior subsequência crescente

6 -3 4 -7 2 10 -3 2

$$M(j) = \begin{cases} \max\{1, \max_{i| i < j, A[i] < A[j]} \{M(i)\} + 1\} & j > 2 \\ 1 & j = 1 \end{cases}$$

$M(1) = 1$ (caso base)

$$M(2) = \max\{1, \max(-)\} = 1$$

$$M(3) = \max\{1, \max(M(2) + 1)\} = 2$$

$$M(4) = \max\{1, \max(-)\} = 1$$

$$M(5) = \max\{1, \max(M(2) + 1, M(4) + 1)\} = 2$$

$$M(6) = \max\{1, \max(M(1) + 1, M(2) + 1, M(3) + 1, M(4) + 1, M(5) + 1)\} = 3$$

$$M(7) = \max\{1, \max(M(4) + 1)\} = 2$$

$$M(8) = \max\{1, \max(M(2) + 1, M(4) + 1, M(7) + 1)\} = 3$$



- Mais exemplos resolvidos:
- <http://people.csail.mit.edu/bdean/6.046/dp/>

(Alguns podem ser tortuosos...)