MAE0311 - Inferência Estatística

Fernando Henrique Ferraz Pereira da Rosa

8 de outubro de 2003

Lista 4[1]

1. Seja X uma única observação da distribuição $N(\mu, 1)$, onde $-\infty < \mu < \infty$. Considere a perda quadrática.

   (a) Encontre o risco $R(\mu, d)$ para a classe $\mathcal{D} = \{d; d(x) = cX\}$. Temos por definição que:

   $$\begin{aligned} R(\mu, d) &= E[l(\mu, d(X))] = E[(\mu - cX)^2] = E[\mu^2 - 2\mu cX + c^2X^2] \\ &= \mu^2 - 2\mu cE[X] + c^2E[X^2] \\ &= \mu^2 - 2\mu^2 c + c^2 + c^2\mu^2 \\ &= \mu^2(c-1)^2 + c^2 \end{aligned}$$

   (b) Encontre, na classe $\mathcal{D}$, o estimador minimax de μ.
   Notemos que $R(\mu, d)$ tem máximo finito se e somente se $c = 1$. Assim o estimador minimax de μ na classe $\mathcal{D}$ é X. No gráfico 1 temos a função de risco para alguns valores de c.

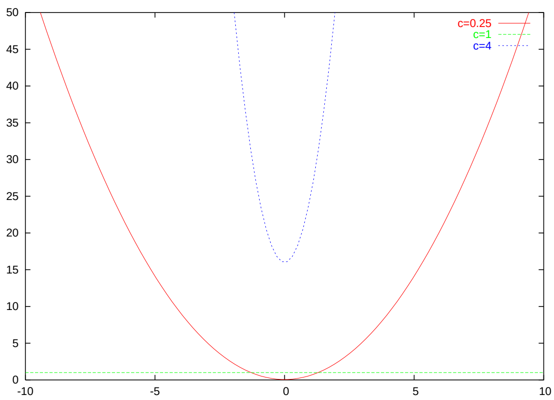

Figura 1: Gráfico da função de risco em função de μ, para alguns valores de c.

[1] Powered by $\LaTeX\,2_\varepsilon$, R 1.7.1 and Gentoo 1.4

(c) Encontre em $\mathcal{D}$ estimador de Bayes de μ com relação à priori $\pi(\mu) = 1/2; -1 \leq \mu \leq 1$.

Em primeiro lugar encontremos o risco de Bayes desse procedimento em relação à perda quadrática:

$$r(\pi, d) = E_\pi[R(\mu, d)] = E_\pi[\mu^2(c-1)^2 + c^2) = E_\pi[\mu^2](c-1)^2 + c^2$$

Donde do fato que $Var_\pi(\mu) = 1/3$ e $E_\pi[\mu] = 0$, segue:

$$r(\pi, d) = \frac{1}{3}(c-1)^2 + c^2$$

Como

$$\frac{\delta r(\pi, d)}{\delta c} = \frac{2c}{3} - \frac{2}{3} + 2c = 0,$$

temos que $r(\pi, d)$ é mínimo quando $c = \frac{1}{4}$, ou seja, com relação a priori e à perda acima, o estimador de Bayes na classe $\mathcal{D}$ é dado por $d_{\mathcal{B}}(X) = X/4$.

3. Considere uma única observação da variável aleatória $X \sim Binomial(n, \theta)$. Seja $l(\theta, d) = (\theta - d)^2$.

(a) Encontre o risco de $d(X) = X/n$.

$$l(\theta, d) = (\theta - X/n)^2 = \theta^2 - \frac{2\theta X}{n} + \frac{X^2}{n^2}$$

Assim:

$$\begin{aligned} R(\theta, d) = E[l(\theta, d)] &= E\left[\theta^2 - \frac{2\theta X}{n} + \frac{X^2}{n^2}\right] \\ &= \theta^2 - \frac{2\theta}{n}E[X] + \frac{1}{n^2}E[X^2] \end{aligned}$$

Usando as informações acerca da distribuição de X, temos que $E[X] = n\theta$ e $E[X^2] = n\theta(1-\theta) + n^2\theta^2$. Assim:

$$R(\theta, d) = \theta^2 - 2\theta^2 + \theta^2 + \frac{1}{n}\theta(1-\theta) = \frac{\theta(1-\theta)}{n}$$

(b) Encontre o risco de Bayes de $d(X)$ no item anterior com relação a priori $\pi(\theta) = 1, 0 \leq \theta \leq 1$.

$$r(\pi, d) = E_\pi\left[\frac{\theta(1-\theta)}{n}\right] = \frac{1}{n}E_\pi[\theta - \theta^2] = \frac{1}{n}(E_\pi[\theta] - E_\pi[\theta^2])$$

Utilizando-nos da informação de que a priori de θ é uma uniforme em $(0, 1)$, temos que $E[\theta] = 1/2$ e $E[\theta^2] = 1/3$. Assim:

$$r(\pi, d) = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{6n}.$$

6. Considere o problema de se estimar $\theta \in \Theta = \{0, 1\}$, baseado em uma única observação da variável aleatória X, com densidade:

$$f(x|\theta) = 2^{-(x+\theta)}, \qquad x = 1-\theta, 2-\theta, 3-\theta, \ldots$$

Considere a perda $0-1$, ou seja,

$$l(0,0) = l(1,1) = 0 \qquad \text{e} \qquad l(0,1) = l(1,0) = 1$$

Considere também os estimadores:

$$d_1(X) = \begin{cases} 1, & X = 0 \\ 0, & X > 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad d_2(X) = \begin{cases} 0, & X \leq 1 \\ 1, & X > 1 \end{cases}$$

(a) Encontre $R(\theta, d_i(X)), i = 1, 2$.
Consideremos primeiro o procedimento d_1:

$$\begin{aligned} R(\theta, d_1) &= l(\theta, d_1(0))P_\theta(X=0) + l(\theta, d_1(1))P_\theta(X=1) + \ldots \\ &= l(\theta, 1)P_\theta(X=0) + l(\theta, 0)P_\theta(X=1) + \ldots \end{aligned}$$

No caso de $\theta = 0$:

$$\begin{aligned} R(0, d_1) &= l(0,1)P_0(X=0) + \underbrace{l(0,0)P_0(X=1) + \ldots}_{0} \\ &= 0 \end{aligned}$$

No caso de $\theta = 1$:

$$\begin{aligned} R(1, d_1) &= \underbrace{l(1,1)P_1(X=0)}_{0} + l(1,0)P_1(X=1) + \ldots \\ &= 0 + \sum_{i=1}^{\infty} P_1(X=i) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-(x+1)} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Consideremos agora o procedimento d_2:

$$\begin{aligned} R(\theta, d_2) &= l(\theta, d_2(0))P_\theta(X=0) + l(\theta, d_2(1))P_\theta(X=1) \ldots \\ &= l(\theta, 0)P_\theta(X=0) + l(\theta, 0)P_\theta(X=1) + l(\theta, 1)P_\theta(X=2) + \ldots \end{aligned}$$

No caso de $\theta = 0$:

$$\begin{aligned} R(0, d_2) &= \underbrace{l(0,0)P_0(X=0) + l(0,0)P_0(X=1)}_{0} + l(0,1)P_0(X=2) + \ldots \\ &= \sum_{i=2}^{\infty} P_0(X=i) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

No caso de $\theta = 1$:

$$
\begin{aligned}
R(1, d_2) &= l(1,0)P_1(X=0) + l(1,0)P_1(X=1) + \underbrace{l(1,1)P_1(X=2) + \ldots}_{0} \\
&= P_1(X=0) + P_1(X=1) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}
\end{aligned}
$$

Na tabela 1 resumimos os cálculos acima.

d	$\theta = 0$	$\theta = 1$	$maxR(\theta, d)$
d_1	0	1/2	1/2
d_2	1/2	3/4	3/4

Tabela 1: Riscos de d_1 e d_2

(b) Qual dos estimadores é minimax? Alguns dos estimadores é inadmissível?

O estimador d_1 é minimax. O estimador d_2 é inadmissível.

8. Seja X o tempo de vida de uma lâmpada (em mil horas) fabricada por certa companhia. Considera-se que X é uma variável aleatória com densidade

$$f(x|\theta) = \theta e^{-\theta x}, \quad x > 0$$

Considere para θ a priori:

$$\pi(\theta) = 16\theta e^{-4\theta}, \quad \theta > 0$$

(a) Encontre a distribuição a posteriori de θ.

A distribuição a posteriori será dada pela distribuição condicional de θ dado X:

$$\pi(\theta, x) = \frac{f(x|\theta)\pi(\theta)}{\int_\Theta f(x|\theta)\pi(\theta)\mathrm{d}\theta}$$

Calculando essas expressões:

$$
\begin{aligned}
g(x) &= \int_\Theta f(x|\theta)\pi(\theta)\mathrm{d}\theta = \int_0^\infty \theta e^{\theta x} 16\theta e^{-4\theta}\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^\infty 16\theta^2 e^{-(x+4)\theta}\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{32}{(x+4)^3} \int_0^\infty \underbrace{\frac{(x+4)^3}{2}\theta^2 e^{-(x+4)\theta}}_{f_\theta(\theta), \theta \sim Gama(\lambda=4, r=3)} \mathrm{d}\theta \\
&= \frac{32}{(x+4)^3}
\end{aligned}
$$

Assim

$$\pi(\theta|x) = \frac{\theta e^{-\theta x} 16\theta e^{-4\theta}}{\frac{32}{(x+4)^3}} = \frac{(x+4)^3}{2}\theta^2 e^{-(x+4)\theta}$$

E daí concluímos que $\theta|X \sim Gama(\lambda = x+4, r = 3)$.

(b) Encontre o estimador de Bayes de $E(X)$ e $Var(X)$.

Notando que $E(X) = \frac{1}{\theta}$ e $Var(X) = \frac{1}{\theta^2}$, calculemos então os estimadores de Bayes com perda quadrática d_{B_1} e d_{B_2}, respectivamente para $E(X)$ e $Var(X)$.

$$\begin{aligned}
d_{B_1}(x) &= E(1/\theta|X) = \int_0^\infty \frac{1}{\theta}\frac{(x+4)^3}{2}\theta^2 e^{-(x+4)\theta}\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^\infty \frac{(x+4)^3}{2}\theta e^{-(x+4)\theta}\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{x+4}{2}\int_0^\infty \underbrace{(x+4)^2\theta e^{-(x+4)\theta}}_{f(\theta),\theta\sim Gama(\lambda=x+4,r=2)}\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{x+4}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d_{B_2}(x) &= E(1/\theta^2|X) = \int_0^\infty \frac{1}{\theta^2}\frac{(x+4)^3}{2}\theta^2 e^{-(x+4)\theta}\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{(x+4)^3}{2}\int_0^\infty e^{-(x+4)\theta}\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{(x+4)^2}{2}\int_0^\infty \underbrace{(x+4)e^{-(x+4)\theta}}_{f(\theta),\theta\sim Exp(\lambda=x+4)}\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{(x+4)^2}{2}
\end{aligned}$$

12. Sejam $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de tamanho n da densidade

$$f(x|\theta) = \theta x^{\theta-1}, \quad 0 < x < 1, \theta > 0.$$

Vamos assumir para θ a priori gama

$$\pi(\theta) = \lambda^r\theta^{r-1}e^{-\lambda\theta}/\Gamma(r),$$

onde r e λ são conhecidos. Encontre a distribuição a posteriori de θ e o estimador de Bayes de θ com relação à perda quadrática.

Em primeiro lugar notemos que

$$f(x|\theta) = \prod_{i=1}^n \theta x_i^{\theta-1} = \theta^n\left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{\theta-1}$$

Calculemos agora a distribuição marginal de X em relação a distribuição conjunta de X com a priori de θ

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_0^\infty \theta^n \left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{\theta-1} \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)}\theta^{r-1}e^{-\lambda\theta}\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)}\int_0^\infty \theta^{n+r-1}e^{-\lambda\theta}\left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{\theta-1}\mathrm{d}\theta \end{aligned}$$

Observemos agora que podemos escrever o produtório de um jeito mais conveniente:

$$\begin{aligned} \left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{\theta-1} &= e^{\log\left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{\theta-1}} = e^{(\theta-1)\log\prod_{i=1}^n x_i} = e^{\theta\log\prod_{i=1}^n x_i - \log\prod_{i=1}^n x_i} \\ &= e^{\theta\log\prod_{i=1}^n x_i}e^{-\log\prod_{i=1}^n x_i} = e^{\theta\sum_{i=1}^n \log x_i}e^{\log\left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{-1}} \\ &= e^{\theta\sum_{i=1}^n \log x_i}e^{\log\frac{1}{\prod_{i=1}^n x_i}} = e^{\theta\sum_{i=1}^n \log x_i}\frac{1}{\prod_{i=1}^n x_i} \end{aligned}$$

Voltando isso na expressão anterior:

$$\begin{aligned} &= g(x)\frac{\lambda^r}{\Gamma(r)}\int_0^\infty \theta^{n+r-1}e^{-\lambda\theta}e^{\theta\sum_{i=1}^n \log x_i}\frac{1}{\prod_{i=1}^n x_i}\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)\prod_{i=1}^n x_i}\int_0^\infty \theta^{n+r-1}e^{-(\lambda-\sum_{i=1}^n\log x_i)\theta}\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{\lambda^r\Gamma(n+r)}{\Gamma(r)\prod_{i=1}^n x_i(\lambda-\sum_{i=1}^n\log x_i)^{n+r}}\int_0^\infty \underbrace{\frac{(\lambda-\sum_{i=1}^n\log x_i)^{n+r}}{\Gamma(n+r)}\theta^{n+r-1}e^{-(\lambda-\sum_{i=1}^n\log x_i)\theta}}_{f(\theta),\theta\sim Gama\left(\lambda-\sum_{i=1}^n\log x_i,n+r\right)}\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{\lambda^r\Gamma(n+r)}{\Gamma(r)\prod_{i=1}^n x_i(\lambda-\sum_{i=1}^n\log x_i)^{n+r}} \end{aligned}$$

Calculando agora a distribuição a posteriori:

$$\begin{aligned} \pi(\theta|x) &= \frac{\theta^n\left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{\theta-1}\frac{\lambda^r}{\Gamma(r)}\theta^{r-1}e^{-\lambda\theta}}{\frac{\lambda^r\Gamma(n+r)}{\Gamma(r)\prod_{i=1}^n x_i(\lambda-\sum_{i=1}^n\log x_i)^{n+r}}} \\ &= \frac{1}{\Gamma(n+r)}\theta^{n+r-1}e^{-\lambda\theta}\left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^\theta\left(\lambda-\sum_{i=1}^n\log x_i\right)^{n+r} \\ &= \frac{\left(\lambda-\sum_{i=1}^n\log x_i\right)^{n+r}}{\Gamma(n+r)}\theta^{n+r-1}e^{-\lambda\theta}e^{\theta\log\prod_{i=1}^n x_i} \\ &= \frac{\left(\lambda-\sum_{i=1}^n\log x_i\right)^{n+r}}{\Gamma(n+r)}\theta^{n+r-1}e^{-(\lambda-\sum_{i=1}^n\log x_i)\theta} \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\theta|X \sim Gama\left(\lambda - \sum_{i=1}^{n} \log x_i, n + r\right)$$

E portanto:

$$d_B(x) = E(X|\theta) = \frac{n + r}{\lambda - \sum_{i=1}^{n} \log x_i}.$$

Sobre

A versão eletrônica desse arquivo pode ser obtida em `http://www.feferraz.net`