



UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS MATEMÁTICAS E DE COMPUTAÇÃO

Departamento de Ciências de Computação

<http://www.icmc.usp.br>

SCC-201 - Capítulo 2

Recursão

João Luís Garcia Rosa¹

¹Departamento de Ciências de Computação
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação
Universidade de São Paulo - São Carlos
<http://www.icmc.usp.br/~joaoluis>

2009

Sumário

- 1 Recursividade
 - Definições Recursivas
 - Recursão
 - Exemplos
- 2 Busca Binária
 - Busca Binária
 - Exemplo
 - Escrevendo Programas Recursivos
- 3 Simulação da Recursão
 - Soluções Iterativas para Problemas Recursivos
 - O que acontece quando uma função é chamada?
 - O que acontece quando uma função é retornada?

Sumário

- 1 **Recursividade**
 - Definições Recursivas
 - Recursão
 - Exemplos
- 2 **Busca Binária**
 - Busca Binária
 - Exemplo
 - Escrevendo Programas Recursivos
- 3 **Simulação da Recursão**
 - Soluções Iterativas para Problemas Recursivos
 - O que acontece quando uma função é chamada?
 - O que acontece quando uma função é retornada?

Definições Recursivas e Processos

- Na matemática, vários objetos são definidos através de um processo que os produz.
- Por exemplo, π é definido como a razão entre a circunferência de um círculo e seu diâmetro.
- Outro exemplo é a função fatorial.
- Dado um número inteiro positivo n o fatorial de n é o produto de todos os inteiros entre 1 e n :
 - $n! = 1$, se $n = 0$.
 - $n! = n * (n - 1) * (n - 2) * \dots * 1$, se $n > 0$.

- Programa **iterativo** para o fatorial de n :

```
prod = 1;
for (x = n; x > 0; x--)
    prod *= x;
return (prod);
```

Definições Recursivas e Processos

- O algoritmo anterior é chamado de iterativo pois requer a repetição explícita de um processo até que determinada condição seja satisfeita.
- Este algoritmo pode ser traduzido para uma função em C que retorne $n!$ quando recebe n como parâmetro
- Outra definição para o fatorial:
 - $n! = 1$, se $n = 0$.
 - $n! = n * (n - 1)!$, se $n > 0$.
- Observe que a função fatorial está definida em termos de si mesma: o fatorial de n depende do fatorial de $n - 1$. Esta é uma definição **recursiva** do fatorial.

Definições Recursivas e Processos

- Programa recursivo para cálculo do fatorial:

```
unsigned long fat(int n)
{
    int fato = 1;
    if (n > 1)
        fato = n * fat(n-1);
    return fato;
}
```

Sumário

1

Recursividade

- Definições Recursivas
- **Recursão**
- Exemplos

2

Busca Binária

- Busca Binária
- Exemplo
- Escrevendo Programas Recursivos

3

Simulação da Recursão

- Soluções Iterativas para Problemas Recursivos
- O que acontece quando uma função é chamada?
- O que acontece quando uma função é retornada?

Recursão

- A recursão ocorre quando uma função chama a si própria. Quando isto acontece, várias ações ocorrem:
 - A função começa a execução do seu primeiro comando cada vez que é chamada;
 - Novas e distintas cópias dos parâmetros passados por valor e variáveis locais são criadas;
 - A posição que chama a função é colocada em estado de espera, enquanto que o nível gerado recursivamente esteja executando.
- O próximo programa explica estes efeitos.

Sumário

1

Recursividade

- Definições Recursivas
- Recursão
- Exemplos

2

Busca Binária

- Busca Binária
- Exemplo
- Escrevendo Programas Recursivos

3

Simulação da Recursão

- Soluções Iterativas para Problemas Recursivos
- O que acontece quando uma função é chamada?
- O que acontece quando uma função é retornada?

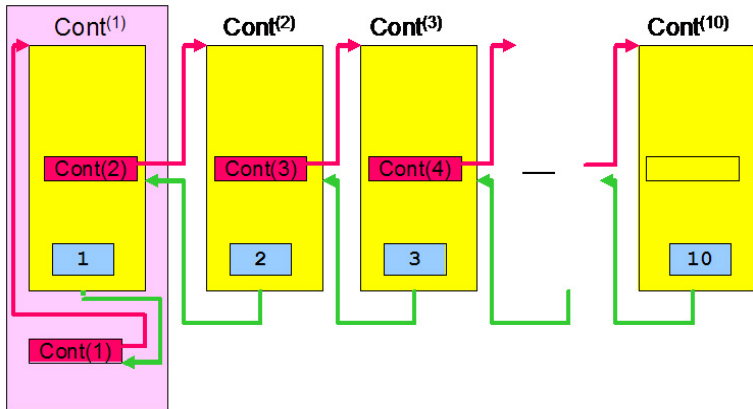
Recursão

- Contador recursivo:

```
#include <stdio.h>
void cont (int);
main()
{
    cont(1);
}
void cont(int n)
{
    if (n < 10)
        cont(n+1);
    printf("%d\n", n);
}
```

Recursão

ContRecursivo



Recursão

- A **seqüência de Fibonacci** é a seqüência de inteiros:

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ...

- Cada elemento nesta seqüência é a soma dos dois elementos anteriores. Se $fib(0) = 0$ e $fib(1) = 1$:

- $fib(n) = n$, se $n = 0$ ou $n = 1$
- $fib(n) = fib(n - 2) + fib(n - 1)$, se $n \geq 2$

- Por exemplo, para calcular $fib(6)$, pode-se aplicar a definição recursivamente:

$$\begin{aligned}
 fib(6) &= fib(4) + fib(5) = fib(2) + fib(3) + fib(5) = \\
 &fib(0) + fib(1) + fib(3) + fib(5) = 0 + 1 + fib(3) + fib(5) = \\
 &1 + fib(1) + fib(2) + fib(5) = 1 + 1 + fib(0) + fib(1) + fib(5) = \\
 &2 + 0 + 1 + fib(5) = 3 + fib(3) + fib(4) = \\
 &3 + fib(1) + fib(2) + fib(4) = 3 + 1 + fib(0) + fib(1) + fib(4) = \\
 &4 + 0 + 1 + fib(4) = 5 + fib(2) + fib(3) = \\
 &5 + fib(0) + fib(1) + fib(3) = 5 + 0 + 1 + fib(3) = \\
 &6 + fib(1) + fib(2) = 6 + 1 + fib(0) + fib(1) = 7 + 0 + 1 = 8
 \end{aligned}$$

Recursão

- Seqüência de Fibonacci:

```
int Fib(int n)
{
    if (n < 2)
        return n;
    else
        return Fib(n-2) + Fib(n-1);
}
```

Sumário

1

Recursividade

- Definições Recursivas
- Recursão
- Exemplos

2

Busca Binária

- Busca Binária
- Exemplo
- Escrevendo Programas Recursivos

3

Simulação da Recursão

- Soluções Iterativas para Problemas Recursivos
- O que acontece quando uma função é chamada?
- O que acontece quando uma função é retornada?

Busca Binária

- **Busca binária** consiste em buscar um elemento em um vetor classificado, dividindo-o em duas metades
- Caso o elemento procurado seja o elemento do meio do vetor, a operação é terminada
- Caso o elemento procurado seja menor que o elemento do meio do vetor, procura-se na metade inferior
- Caso o elemento procurado seja maior que o elemento do meio do vetor, procura-se na metade superior
- Trata-se portanto de um procedimento recursivo: o método de busca é definido em termos de si mesmo, com um vetor menor como entrada
- A busca terminará quando o tamanho deste vetor for 1 (operação não recursiva)

Sumário

1

Recursividade

- Definições Recursivas
- Recursão
- Exemplos

2

Busca Binária

- Busca Binária
- Exemplo
- Escrevendo Programas Recursivos

3

Simulação da Recursão

- Soluções Iterativas para Problemas Recursivos
- O que acontece quando uma função é chamada?
- O que acontece quando uma função é retornada?

Busca Binária

- Busca binária:

```
1:  if (baixo > alto)
2:    return(-1);
3:  meio = (baixo + alto)/2;
4:  if (x == a[meio])
5:    return(meio);
6:  if (x < a[meio])
7:    procura x em a[baixo] até a[meio-1];
8:  else
9:    procura x em a[meio+1] até a[alto];
```

- Exemplo: seja o seguinte vetor:

x[0]	x[1]	x[2]	x[3]	x[4]	x[5]	x[6]	x[7]
12	25	33	37	48	57	86	92

- Suponha que se queira procurar o elemento 48, isto é, $x = 48$, entre o item 0 (*baixo* = 0) e 7 (*alto* = 7).

Busca Binária

- Aplicando o algoritmo, tem-se:

- linha 1: $0 > 7$? Falso, executa linha 3
- linha 3: $meio = (0 + 7)/2 = 3$
- linha 4: $x = a[3]$? 48 não é igual a 37, executa linha 6
- linha 6: $x < a[3]$? 48 não é menor que 37, executa linha 9
- linha 9: repita com $baixo = meio + 1 = 4$ e $alto = 7$
- linha 1: $4 > 7$? Falso, executa linha 3
- linha 3: $meio = (4 + 7)/2 = 5$
- linha 4: $x = a[5]$? 48 não é igual a 57, executa linha 6
- linha 6: $x < a[5]$? 48 é menor que 57, executa linha 7
- linha 9: repita com $baixo = 4$ e $alto = meio - 1 = 4$
- linha 1: $4 > 4$? Falso, executa linha 3
- linha 3: $meio = (4 + 4)/2 = 4$
- linha 4: $x = a[4]$? 48 é igual a 48, retorna $meio = 4$ como resposta.

Sumário

1

Recursividade

- Definições Recursivas
- Recursão
- Exemplos

2

Busca Binária

- Busca Binária
- Exemplo
- Escrevendo Programas Recursivos

3

Simulação da Recursão

- Soluções Iterativas para Problemas Recursivos
- O que acontece quando uma função é chamada?
- O que acontece quando uma função é retornada?

Propriedades das Definições Recursivas

- Recursão significa repetição.
- Da mesma forma que num comando repetitivo a parada é uma preocupação, o mesmo ocorre com a recursão.
- A função recursiva f deve ser definida de modo a não envolver f para um argumento ou grupo de argumentos.
- Esta será a “saída” da seqüência de chamadas recursivas.
- Nos exemplos vistos, as partes **não**-recursivas das definições são:
 - fatorial: $0! = 1$
 - seqüência de Fibonacci: $fib(0) = 0$; $fib(1) = 1$
 - busca binária:

```
if (baixo > alto)
    return(-1);
if (x == a[meio])
    return(meio);
```

Escrevendo Programas Recursivos

- O desenvolvimento de uma solução recursiva **sem** o algoritmo nem sempre é fácil
- Normalmente, não há porque propor uma solução recursiva
- Entretanto, para alguns problemas a solução recursiva é mais elegante
- Há problemas que são recursivos já na sua definição
- Para estes, a solução recursiva é mais natural.

Torres de Hanói

- Considere o problema das **Torres de Hanói**. Há três torres A , B e C e há n discos de diâmetros diferentes dispostos na torre A , sempre com o disco de maior diâmetro abaixo de um disco de menor diâmetro. Como colocar todos os discos na torre C , usando a torre B como intermediária, passando um único disco de cada vez e sem inverter a ordem dos diâmetros (maior abaixo do menor) em nenhuma torre.
- Se uma solução para $n - 1$ discos for encontrada, tem-se a solução para n discos.
- No caso trivial de $n = 1$, a solução é simples.
- Se for possível declarar uma solução para n discos em termos de $n - 1$, haverá uma solução recursiva.

Torres de Hanói

- Mover n discos de A para C , usando B como auxiliar:
 - 1 Se $n = 1$, mova o único disco de A para C e pare.
 - 2 Mova os $n - 1$ discos de A para B , usando C como auxiliar.
 - 3 Mova o último disco de A para C .
 - 4 Mova os $n - 1$ discos de B para C , usando A como auxiliar.

- Programa:

```
void hanoi(char de, char para, char via, int n)
{
    if (n >= 1)
    {
        hanoi(de, via, para, n-1);
        printf("%c => %c\n", de, para);
        hanoi(via, para, de, n-1);
    }
}
```

Sumário

1

Recursividade

- Definições Recursivas
- Recursão
- Exemplos

2

Busca Binária

- Busca Binária
- Exemplo
- Escrevendo Programas Recursivos

3

Simulação da Recursão

- Soluções Iterativas para Problemas Recursivos
- O que acontece quando uma função é chamada?
- O que acontece quando uma função é retornada?

Simulando a Recursividade

- Todo problema com solução recursiva pode ser resolvido iterativamente
- Algumas linguagens de programação não permitem recursão
- Basta examinar com detalhes os mecanismos usados para implementar a recursividade para que seja possível simulá-los usando técnicas não-recursivas
- A solução recursiva geralmente é mais cara computacionalmente do que a solução não-recursiva
- A possibilidade de gerar uma solução não-recursiva a partir de um algoritmo recursivo é muito interessante em várias situações.

Sumário

- 1 Recursividade
 - Definições Recursivas
 - Recursão
 - Exemplos
- 2 Busca Binária
 - Busca Binária
 - Exemplo
 - Escrevendo Programas Recursivos
- 3 Simulação da Recursão
 - Soluções Iterativas para Problemas Recursivos
 - O que acontece quando uma função é chamada?
 - O que acontece quando uma função é retornada?

Simulando a Recursividade

- Antes de examinar as ações de uma rotina recursiva, deve-se examinar a ação de uma rotina **não**-recursiva.
- Para o comando
`rota(x);`
- onde *rota* é definida como
`rota(a)`
- *x* é referido como um **argumento** (da função chamadora) e *a* como um **parâmetro** (da função chamada).
- O que acontece quando uma função é chamada?
 - 1 Passagem de argumentos,
 - 2 Alocação e iniciação de variáveis locais,
 - 3 Transferência do controle para a função.

Simulando a Recursividade

- Cada uma das três etapas:
 - 1 **Passagem de argumentos:** para um parâmetro em C, uma cópia do argumento é criada localmente dentro da função.
 - 2 **Alocação e iniciação de variáveis locais:** depois que os argumentos são passados, as variáveis locais da função serão alocadas. Incluem as declaradas diretamente na função e as temporárias criadas durante a execução.
 - 3 **Transferência do controle para a função:** neste ponto, o **endereço de retorno** deve ser passado à função (armazenado na pilha), para que seja possível passar também o controle. Este controle deverá ser devolvido à função chamadora ao final da execução da função, daí a necessidade do endereço de retorno.

Sumário

1

Recursividade

- Definições Recursivas
- Recursão
- Exemplos

2

Busca Binária

- Busca Binária
- Exemplo
- Escrevendo Programas Recursivos

3

Simulação da Recursão

- Soluções Iterativas para Problemas Recursivos
- O que acontece quando uma função é chamada?
- O que acontece quando uma função é retornada?

Retorno de uma Função

- Quando uma função termina sua execução, o controle retorna para a função chamadora. Três ações são executadas:
 - 1 O endereço de retorno é recuperado da pilha e armazenado em um lugar seguro
 - 2 A área de dados da função é liberada. Essa área contém todas as variáveis locais (incluindo as cópias locais dos argumentos), as temporárias e o endereço de retorno
 - 3 Desvia-se para o endereço de retorno salvo anteriormente. Isso devolve o controle à função chamadora no ponto imediatamente posterior ao comando que efetuou a chamada. Se a função retorna um valor, o mesmo será colocado num lugar seguro (registrador de hardware) de onde a função chamadora poderá recuperá-lo.

Retorno de uma Função

- A seqüência de endereços de retorno forma uma pilha: se uma função *A* chama uma função *B*, que chama uma função *C*, a pilha conterà no topo o endereço de retorno da função *C* (endereço dentro de *B*), depois da função *B* (endereço dentro de *A*).
- Ou seja, de *C* só é possível retornar para a função *B* (função chamadora de *C*) e de *B* só é possível retornar para a função *A* (função chamadora de *B*).
- Conclusão: chamar uma função corresponde a colocar um endereço na pilha (*push*) e retornar corresponde a retirar um endereço da pilha (*pop*).
- E no caso da função recursiva?

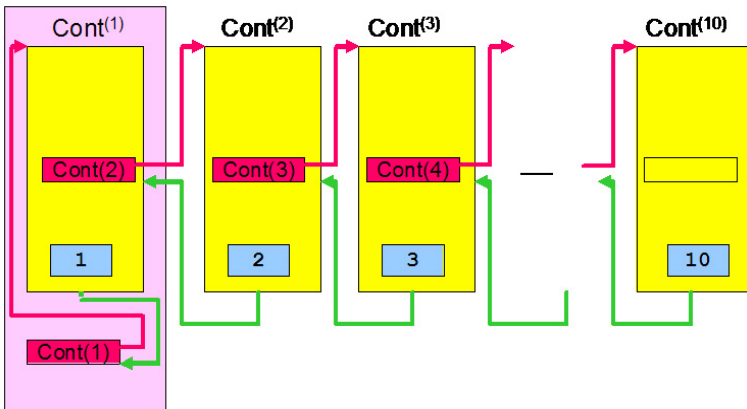
Implementando uma Função Recursiva

- Cada vez que uma função recursiva chama a si mesma, uma área de dados totalmente nova precisa ser alocada,
- Essa área de dados precisa ter todos os parâmetros, variáveis locais, temporárias e um endereço de retorno,
- No caso da recursividade, uma área de dados está associada não a uma função isolada, mas a uma chamada dessa função,
- Cada chamada acarreta a alocação de uma nova área de dados e toda a referência a um item na área de dados da função destina-se à área de dados da chamada mais recente,
- Da mesma forma, todo retorno provoca a liberação da atual área de dados e a área de dados alocada anteriormente torna-se a área atual.

Implementando uma Função Recursiva

- Veja novamente a figura do contador recursivo:

ContRecursivo



Eficiência da Recursividade

- Geralmente uma versão não-recursiva (iterativa) de um programa executará com mais eficiência, em termos de tempo e espaço, do que uma versão recursiva,
- Isso acontece porque o trabalho extra dispendido para entrar e sair de um bloco é evitado na versão não-recursiva,
- Num programa não-recursivo muita atividade de empilhamento e desempilhamento pode ser evitada,
- Contudo, muitas vezes, uma solução recursiva é o método mais natural e lógico de solucionar um problema,
- Alguns problemas são recursivos por natureza e sua solução recursiva é muito mais simples (por exemplo, as Torres de Hanói).

Sumário

- Avaliação: Trabalho 1

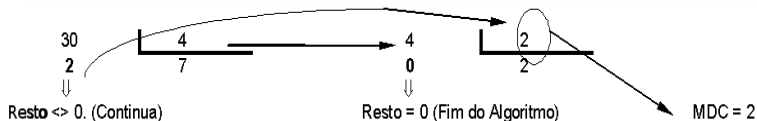
MDC

Trabalho 1 (T1) - Individual: Submeter até dia 18/9

Escreva uma função iterativa (f_i) e uma função recursiva (f_r) que calculam o MDC (máximo divisor comum) de 2 números a e b recebidos como parâmetros. Compare f_i e f_r em termos de eficiência (notação *big-oh*: \mathcal{O}).

Para o cálculo do MDC, deve-se usar o Algoritmo de Euclides:

Ex: $a = 30$ e $b = 4$:



Referências I



Engelbrecht, Angela

Estrutura e Recuperação de Informação II.

Apostila. Engenharia de Computação. PUC-Campinas, 2000.



Horowitz, E., Sahni, S. Rajasekaran, S.

Computer Algorithms.

Computer Science Press, 1998.



Rosa, João Luís G.

Algoritmos e Programação de Computadores.

Slides e Notas de Aula. Engenharia de Computação. PUC-Campinas, 2007.

Referências II



Tenenbaum, A. M., Langsam, Y., Augenstein, M. J.
Estruturas de Dados Usando C.
Makron Books, 1995.