Pesquisa Operacional / Programação Matemática

Modelagem: problemas em contextos de produção

Exemplos de problemas: Problemas de planejamento da produção: mix de produção e problema de corte de estoques [inclui problema da regressão linear].

Alysson M. Costa – ICMC/USP

Objetivos

- Apresentar de maneira um pouco mais aprofundada alguns problemas encontrados em contextos produtivos.
- Apresentar alguns outros problemas que podem ser formulados de maneira linear.
- Apresentar a idéia de formulação por colunas

- Ao final deste módulo, o aluno deverá:
  - Entender modelagens mais complexas em contextos produtivos.
  - Entender formulações "por colunas".

Mix de produção

- Já vimos um exemplo de um problema de mix de produção (mesas/cadeiras)
- Idéia geral:
  - recursos limitados (C_i)
  - a produção de cada produto j consome uma quantidade de cada tipo de recurso (a_{ij})
  - Cada produto representa um lucro (l_j)
  - há uma demanda mínima (d_j) e máxima (v_j)

$$\text{Maximizar} \quad f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} l_j x_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq C_i \qquad i = 1, 2, \ldots, m$$

$$\boxed{d_j \leq x_j \leq v_j \qquad j = 1, 2, \ldots, n.}$$

Restrições de chance

- Incerteza nas demandas

- O que é melhor ?

  - Produzir menos do que a demanda e perder o lucro que seria advindo da venda suplementar.

  - Produzir mais do que a demanda e ter que arcar com custos de produção suplementares (horas extras, etc.) e estoque.

Considerando que estoque é permitido!

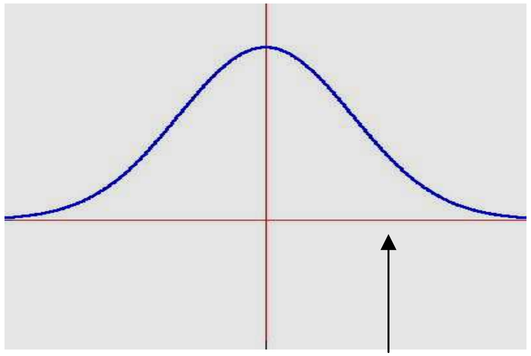
Soluções

- Programação estocástica
- Programação fuzzy
- ...

Alternativa simples:

Queremos que a produção do item j esteja acima da demanda em 80% dos casos.

(curvas de distribuição da demanda)



Modelos de programação linear

Problema de planejamento da produção (estático):
Uma empresa fabrica diversos produtos e tem uma carteira de pedidos para o mês atual. Existe mais de uma maneira de produzir cada item (tecnologias diferentes). O problema é escolher que recursos usar para fabricação de cada produto (com o menor custo possível).

c_{ij} - custo de fabricar uma unidade do produto i no processo j.
d_i - demanda do produto i.
b_k - quantidade disponível do recurso k.
a_{ijk} - quantidade do recurso k necessária para produzir o produto i através do processo j.
J_i - conjunto dos processos que podem ser utilizados para fabricar o produto i.

PPP (estático) - solução

- variáveis:

  x_{ij} - quantidade do produto i fabricado através do processo j.

Min $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j \in J_i} c_{ij} x_{ij}$

s.a.

$\sum_{j \in J_i} x_{ij} = d_i$, para todo i=1,...,n

$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j \in J_i} a_{ijk} x_{ij} \leq b_k$, pra todo k =1,...,K

$x_{ij} \geq 0$, para todo i=1...n, $j \in J_i$.

Dimensionamento de lotes

Empresas de manufatura, em geral, fabricam diversos tipos de produtos solicitados por diferentes clientes, muitas vezes em grandes quantidades, os quais devem estar prontos para entrega em diferentes datas previamente agendadas. Como as fábricas têm capacidades de produção limitadas (máquinas, mão-de-obra etc.), é necessário planejar a produção, isto é, decidir o *quê* e *quanto* produzir (em outras palavras, dimensionar os lotes de produção) em cada período de um horizonte de planejamento. A necessidade de antecipação da fabricação de produtos (estocados de um período para o outro) acarreta custos de estocagem e algumas dificuldades operacionais. No planejamento da produção, deseja-se determinar o tamanho dos lotes de produção, para atender a demanda na data solicitada e de modo que a soma dos custos de produção e estocagem seja mínima.

Problema mono-estágio

- Considere uma fábrica que produz n produtos e deseja planificar sua produção para os próximos T períodos de tempo.
  - A demanda de cada ítem em cada período é conhecida.
  - Podemos estocar
  - A produção de cada produto requer quantidades conhecidas de cada recurso
  - Os recursos são renováveis (por período)

Parâmetros e variáveis de decisão

Parâmetros:

d_{it}	demanda do item i no período t, $i = 1, ..., n$, $t = 1, ..., T$,
R_t	disponibilidade de recursos (renováveis) no período t,
r_i	quantidade de recursos necessários para a produção de uma unidade do item i,
c_{it}	custo de produzir uma unidade do item i no período t,
h_{it}	custo de estocar uma unidade do item i no período t.

Variáveis de decisão:

x_{it}	o número de itens do tipo i produzidos no período t,
I_{it}	o número de itens do tipo i em estoque no final do período t.

Restrições e função objetivo

- Conservação de estoque:

$$I_{it} = I_{i,\,t-1} + x_{it} - d_{it} \qquad i = 1, \dots, n\,,\ t = 1, \dots, T.$$

- Utilização dos recursos

$$r_1 x_{1t} + r_2 x_{2t} + \dots + r_n x_{nt} \le R_t \qquad t = 1, \dots, T.$$

- Atendimento das demandas

$$I_{it} \ge 0 \qquad i = 1, \dots, n,\ t = 1, \dots, T.$$

- Função objetivo:

$$f(x_{11}, I_{11}, x_{12}, I_{12}, \dots) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{t=1}^{T} c_{it} x_{it} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{t=1}^{T} h_{it} I_{it}$$

Modelo completo

$$\text{Minimizar} \quad f(x_{11}, I_{11}, x_{12}, I_{12}, \ldots) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{t=1}^{T} c_{it}x_{it} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{t=1}^{T} h_{it}I_{it}$$

$$x_{it} + I_{i,t\text{-}1} - I_{it} = d_{it} \qquad i = 1, \ldots, n, \ t = 1, \ldots, T$$

$$r_1x_{1t} + r_2x_{2t} + \ldots + r_nx_{nt} \le R_t \qquad t = 1, \ldots, T$$

$$x_{it}, I_{it} \ge 0 \qquad i = 1, \ldots, n, \ t = 1, \ldots, T.$$

...e se aceitamos atrasos na entrega (*backlogging*) ?

$$I_{it} = I_{it}^{+} - I_{it}^{-}$$

entra na função objetivo com um custo associado à não entrega dos pedidos.

Problema Multi-Estágio

- Em muitos casos, a produção de um ítem necessita a produção anterior de um outro ítem (computador - placa mãe).

- Itens intermediários podem ter demanda exterior (ex. teclado).

Parâmetros e modelo

d_{it} demanda externa do item i no período t, $i = 1, ..., n$, $t = 1, ..., T$
b_{ji} quantidade do item j para a produção de uma unidade do item i
R_{kt} disponibilidade do recurso (renovável) do tipo k no período t
r_{ki} quantidade do recurso k necessária para a produção de uma unidade do item i
c_{it} custo de produzir uma unidade do item i no período t
h_{it} custo de estocar uma unidade do item i no final do período t

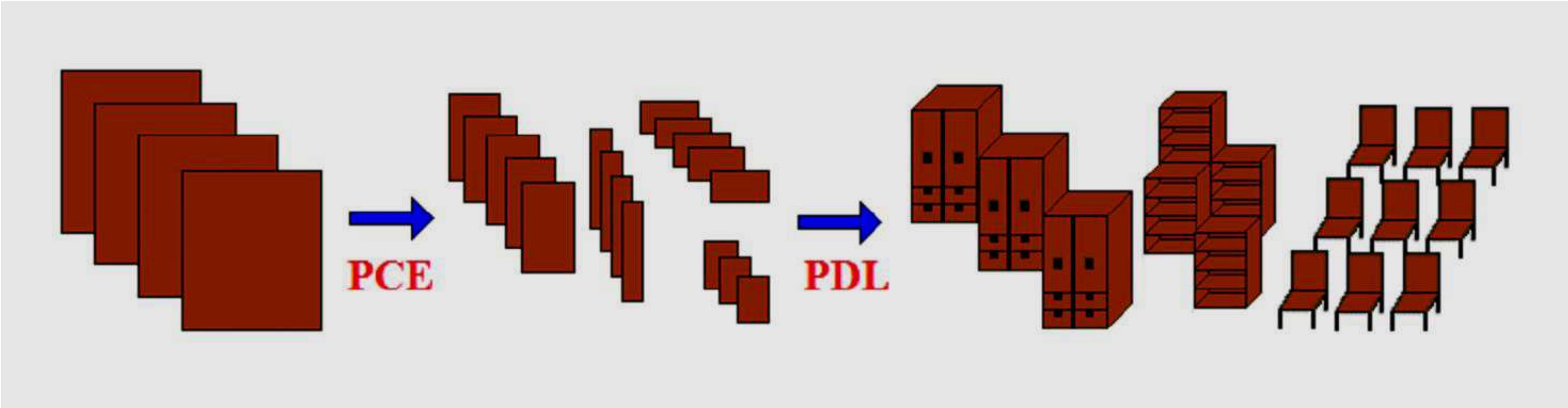
$$\text{Minimizar} \quad f(x_{11}, I_{11}, ...) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{t=1}^{T} c_{it}x_{it} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{t=1}^{T} h_{it}I_{it}$$

$$x_{jt} + I_{j,t-1} - I_{jt} = d_{jt} \boxed{+ \sum_{i=1}^{n} b_{ji}x_{it}} \qquad j = 1, ..., n, \; t = 1, ..., T$$

$$r_{k1}x_{1t} + r_{k2}x_{2t} + \dots + r_{kn}x_{nt} \le R_{kt} \qquad k = 1, ..., K, \; t = 1, ..., T$$

$$x_{it}, I_{it} \ge 0 \qquad i = 1, ..., n, \; t = 1, ..., T$$

Problemas de corte



Formulação

- Barras originais de um tamanho L
- m tipos de itens finais:

  - b_1 barras de tamanho l_1
  - b_2 barras de tamanho l_2
  - ...
  - b_m barras de tamanho l_m

  - Vamos definir padrões de corte:

$a_j = (a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj})$

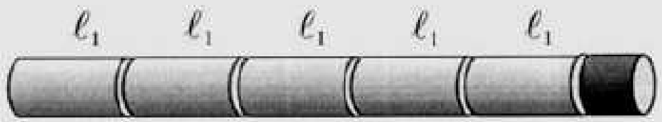
...

número de peças do tipo 2 no padrão j

número de peças do tipo 1 no padrão j

Exemplos de padrões de corte

Padrão 1: $\mathbf{a}_1 = (5, 0, 0, 0)^T$



Padrão 2: $\mathbf{a}_2 = (0, 1, 0, 2)^T$

Padrão 3: $\mathbf{a}_3 = (1, 3, 0, 0)^T$

Padrões de corte

- Um padrão de corte α existe se:

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$$

$$l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + \ldots + l_m\alpha_m \leq L$$
$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \geq 0 \text{ e inteiros}$$

Como escrever a formulação que minimiza o número de barras utilizadas, dado que sabemos todos os padrões de corte possíveis ?

Formulação

- Variáveis:

x_i = número de bobinas cortadas com o padrão i

$$\text{Minimizar} \quad f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} x_2 + \ldots + \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} x_n = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$x_j \geq 0, \; j = 1, \ldots, n.$$

Regressão linear

Estima-se que uma medida depende linearmente de um conjunto de variáveis.

Exemplo:

b = pressão arterial;

x_1 = idade

x_2 = peso

...

x_n

$$b = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n$$

Dados

Paciente	1	2	3	...	m
x_1	27	18	54	...	...
x_2	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...
x_n	...	...	...	...	...
b	...	...	...	...	...

Problema: encontrar $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_2}$... $\mathbf{a_n}$ que minimizam os erros!

Erro quadrático

Erro para cada pessoa:

$$b_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n + \varepsilon_i$$

Se queremos minimizar o erro quadrático:

$$\text{Minimizar} \quad f(x_1, x_2, \ldots, x_n, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m) = (\varepsilon_1)^2 + (\varepsilon_2)^2 + \ldots + (\varepsilon_m)^2$$

$$b_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n + \varepsilon_i \qquad i = 1, 2, \ldots, m$$

Erro (soma dos módulos)

$$\text{Minimizar} \quad f(x_1, x_2, \ldots, x_n, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m) = |\varepsilon_1| + |\varepsilon_2| + \ldots + |\varepsilon_m|$$

$$b_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n + \varepsilon_i \qquad i = 1, 2, \ldots, m$$

- Problema no cálculo diferencial (não diferenciável na origem)
- Em programação linear, não há dificuldade:

$$|\varepsilon_i| = \begin{cases} \varepsilon_i & se \ \ \varepsilon_i \geq 0 \\ -\varepsilon_i & se \ \ \varepsilon_i \leq 0 \end{cases}$$

Erro (soma dos módulos)

$$\varepsilon_i = \varepsilon_i^+ - \varepsilon_i^- \text{ em que } \varepsilon_i^+ \geq 0, \varepsilon_i^- \geq 0 \qquad i = 1, 2, ..., m.$$

$$\begin{aligned}
&\text{Minimizar } f(x_1, x_2, ..., x_n, \varepsilon_1^+, \varepsilon_1^-, \varepsilon_2^+, \varepsilon_2^-, ..., \varepsilon_m^+, \varepsilon_m^-) = \varepsilon_1^+ + \varepsilon_1^- + \varepsilon_2^+ + \varepsilon_2^- + \ldots + \varepsilon_m^+ + \varepsilon_m^- \\
&\quad a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n + \varepsilon_i^+ - \varepsilon_i^- = b_i \qquad i = 1, 2, ..., m \\
&\quad \varepsilon_i^+ \geq 0, \varepsilon_i^- \geq 0 \qquad i = 1, 2, ..., m.
\end{aligned}$$