PERCEPTRON

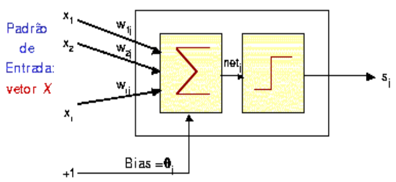
- **Características Básicas**
- **Modelo de Neurônio**
- **Estrutura da Rede**
- **Algoritmo de Aprendizado**

CARACTERISTICAS BASICAS

- Regra de propagação $net_j = \sum_i x_i w_{ij} + \theta_i$
- Função de ativação: Degrau
- Topologia: uma única camada de processadores
- Algoritmo de Aprendizado: $\Delta w_{ij} = \eta\, x_i(t_j - s_j)$ (supervisionado)
- Valor de Entrada/Saída: Binários

MODELO DO NEURÔNIO

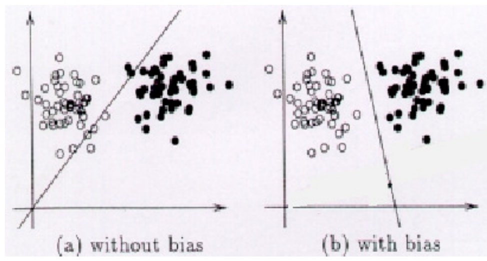
Na sua forma mais simples, o modelo do processador consiste em:



$$s_j = F(net_j) = F\left(\sum_i x_i w_{ij} + \theta_i\right) = \begin{cases} 1 & net_j > 0 \\ 0 & net_j \le 0 \end{cases}$$

PERCEPTRON

Finalidade do Termo *Bias*:



$\sum_i x_i w_{ij} = 0$ Define um hiperplano passando pela origem

$\sum_i x_i w_{ij} + \theta_i = 0$ Desloca-se o hiperplano da origem

ALGORITMO DE APRENDIZADO

1) iniciar os pesos sinápticos com valores randomicos e pequenos ou iguais a zero;
2) aplicar um padrão com seu respectivo valor desejado de saída (t_j) e verificar a saída da rede (s_j);
3) calcula o erro na saída $E_j = t_j - s_j$;
4) se $E_j = 0$, volta ao passo 2;
   se $E_j \neq 0$, atualiza os pesos: $\Delta w_{ij} = \eta x_i E_j$;
5) volta ao passo 2.

ALGORITMO DE APRENDIZADO

IMPORTANTE

- não ocorre variação no peso se a saída estiver correta;
- caso contrário, cada peso é incrementado de η quando a saída é menor que o alvo (valor desejado) e decrementado de η quando a saída é maior que o alvp.

$$\boxed{\Delta w_{ij} = \eta\, x_i\, e_j}$$

PERCEPTRON

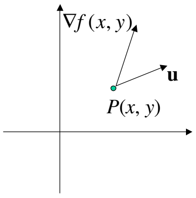
Relembra um pouco conhecimento de Cálculo

Gradiente: $\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial}{\partial x} f(x,y), \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) \right)$

Derivada direcional: $D_{\mathbf{u}} f(x,y) = \nabla f(x,y) \cdot \mathbf{u}$

$$= \|\nabla f(x,y)\| \|\mathbf{u}\| \cos\gamma$$

$$= \|\nabla f(x,y)\| \cos\gamma$$



$D_{\mathbf{u}}f(x, y)$ é a taxa de variação de $f(x, y)$ na direção definida por **u**.

PERCEPTRON

Relembra um pouco conhecimento de Cálculo (cont.)

Teorema do gradiente: Seja f uma função de duas variáveis, diferenciáveis no ponto $P(x, y)$.

i) O máximo de $D_{\mathbf{u}}f(x, y)$ em $P(x, y)$ é $\|\nabla f(x, y)\|$.

ii) O máximo da taxa de crescimento de $f(x, y)$ em $P(x, y)$ ocorre na direção de $\nabla f(x, y)$.

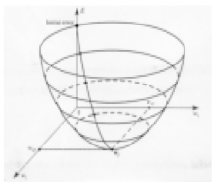
Corolário: Seja f uma função de duas variáveis, diferenciáveis no ponto $P(x, y)$.

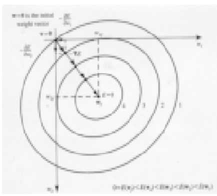
i) O mínimo de $D_{\mathbf{u}}f(x, y)$ em $P(x, y)$ é $-\|\nabla f(x, y)\|$.

ii) O máximo da taxa de <u>decrescimento</u> de $f(x, y)$ em $P(x, y)$ ocorre na direção de $-\nabla f(x, y)$.

PERCEPTRON

Superfície de Erro — *Processo de Minimização*





A direção do gradiente negativo é a de descida mais íngreme ("steepest descent")

PERCEPTRON

Método do Gradiente Descendente (GD)

$$\Delta w_{ij} = -\eta \frac{\delta E_j}{\delta w_{ij}}$$

Cada *peso sináptico i* do elemento processador *j* é atualizado proporcionalmente ao *negativo da derivada parcial do erro* deste processador com relação ao peso.

PERCEPTRON

Logo:

$$\Delta w_{ij} = -\eta \frac{\delta E_j}{\delta w_{ij}} = -\eta \frac{\delta E_j}{\delta s_j} \frac{\delta s_j}{\delta w_{ij}}$$

$E_j = \frac{1}{2} (t_j - s_j)^2$ $\qquad$ $s_j = k \Sigma\, x_i . w_{ij} + \theta_j$

$$\boxed{\Delta w_{ij}} = -\eta . [\, 2 . \tfrac{1}{2} (t_j - s_j).(-1)] . x_i$$

$$= -\eta . [-(t_j - s_j)] . x_i = \boxed{\eta\, x_i\, (t_j - s_j)}$$

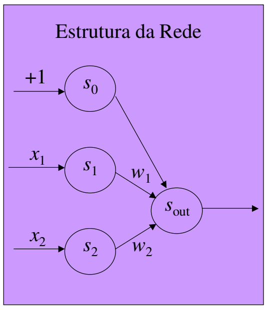
EXEMPLO

Simulação do Operador Lógico AND

AND	x_0	x_1	x_2	t
Entrada 1:	1	0	0	0
Entrada 2:	1	0	1	0
Entrada 3:	1	1	0	0
Entrada 4:	1	1	1	1

Peso inicial: $w_0 = 0$, $w_1 = 0$, $w_2 = 0$

Taxa de aprendizado: $\eta = 0.5$



EXEMPLO

1ª Cicle

Entrada 1: $s_{out} = f(w_0x_0 + w_1x_1 + w_2x_2)$

$= f(0\times1+0\times0+0\times0) = f(0) = 0 \longrightarrow s_{out} = t$

Entrada 2: $s_{out} = f(w_0x_0 + w_1x_1 + w_2x_2)$

$= f(0\times1+0\times1+0\times0) = f(0) = 0 \longrightarrow s_{out} = t$

Entrada 3: $s_{out} = f(w_0x_0 + w_1x_1 + w_2x_2)$

$= f(0\times1+0\times0+0\times1) = f(0) = 0 \longrightarrow s_{out} = t$

Entrada 4: $s_{out} = f(w_0x_0 + w_1x_1 + w_2x_2)$

$= f(0\times1+0\times1+0\times1) = f(0) = 0 \longrightarrow s_{out} \neq t$

$w_0 = w_0+(t-s_{out})x_0 = 0 + 0.5 \times(1-0) \times1=0.5$

$w_1 = w_1+(t-s_{out})x_1 = 0 + 0.5 \times(1-0) \times1=0.5$

$w_2 = w_2+(t-s_{out})x_2 = 0 + 0.5 \times(1-0) \times1=0.5$

EXEMPLO

2ª Ciclo

Entrada 1: $s_{out} = f(w_0x_0 + w_1x_1 + w_2x_2)$

$= f(0.5\times1+0.5\times0+0.5\times0) = f(0.5) = 1 \longrightarrow s_{out} \neq t$

$w_0 = w_0+(t-s_{out})x_0 = 0.5 + 0.5 \times(0-1) \times1 = 0$

$w_1 = w_1+(t-s_{out})x_1 = 0.5 + 0.5 \times(0-1) \times0 = 0.5$

$w_2 = w_2+(t-s_{out})x_2 = 0.5 + 0.5 \times(0-1) \times0 = 0.5$

Entrada 2: $s_{out} = f(w_0x_0 + w_1x_1 + w_2x_2)$

$= f(0\times1+0.5\times0+0.5\times1) = f(0.5) = 1 \longrightarrow s_{out} \neq t$

$w_0 = w_0+(t-s_{out})x_0 = 0 + 0.5 \times(0-1) \times1 = -0.5$

$w_1 = w_1+(t-s_{out})x_1 = 0.5 + 0.5 \times(0-1) \times0 = 0.5$

$w_2 = w_2+(t-s_{out})x_2 = 0.5 + 0.5 \times(0-1) \times1 = 0$

EXEMPLO

2ª Ciclo

Entrada 3: $s_{out} = f(w_0x_0 + w_1x_1 + w_2x_2)$

$= f(-0.5\times1+0.5\times1+0\times0) = f(0) = 0 \longrightarrow s_{out} = t$

Entrada 4: $s_{out} = f(w_0x_0 + w_1x_1 + w_2x_2)$

$= f(-0.5\times1+0.5\times1+0\times1) = f(0) = 0 \longrightarrow s_{out} \neq t$

$w_0 = w_0+(t-s_{out})x_0 = -0.5 + 0.5 \times(1-0) \times1 = 0$

$w_1 = w_1+(t-s_{out})x_1 = 0.5 + 0.5 \times(1-0) \times1 = 1$

$w_2 = w_2+(t-s_{out})x_2 = 0 + 0.5 \times(1-0) \times1 = 0.5$

EXEMPLO

3ª Ciclo

Entrada 1: $s_{out} = f(w_0x_0 + w_1x_1 + w_2x_2)$

$= f(0\times1+1\times0+0.5\times0) = f(0) = 0 \longrightarrow s_{out} = t$

Entrada 2: $s_{out} = f(w_0x_0 + w_1x_1 + w_2x_2)$

$= f(0\times1+1\times0+0.5\times1) = f(0.5) = 1 \longrightarrow s_{out} \neq t$

$w_0 = w_0+(t-s_{out})x_0 = -0.5 + 0.5 \times(0-1) \times1 = -1$

$w_1 = w_1+(t-s_{out})x_1 = 1 + 0.5 \times(0-1) \times0 = 1$

$w_2 = w_2+(t-s_{out})x_2 = 0.5 + 0.5 \times(0-1) \times1 = 0$

EXEMPLO

3ª Ciclo

Entrada 3: $s_{out} = f(w_0x_0 + w_1x_1 + w_2x_2)$

$= f(-1\times1+1\times1+0\times0) = f(0) = 0 \longrightarrow s_{out} = t$

Entrada 4: $s_{out} = f(w_0x_0 + w_1x_1 + w_2x_2)$

$= f(-1\times1+1\times1+0\times1) = f(0) = 0 \longrightarrow s_{out} \neq t$

$w_0 = w_0+(t-s_{out})x_0 = -1 + 0.5 \times(1-0) \times1 = -0.5$

$w_1 = w_1+(t-s_{out})x_1 = 1 + 0.5 \times(1-0) \times1 = 1.5$

$w_2 = w_2+(t-s_{out})x_2 = 0 + 0.5 \times(1-0) \times1 = 0.5$

EXEMPLO

4ª Ciclo

Entrada 1: $s_{out} = f(w_0x_0 + w_1x_1 + w_2x_2)$

$= f(-0.5\times1+1.5\times0+0.5\times0) = f(-0.5) = 0 \longrightarrow s_{out} = t$

Entrada 2: $s_{out} = f(w_0x_0 + w_1x_1 + w_2x_2)$

$= f(-0.5\times1+1.5\times0+0.5\times1) = f(0) = 0 \longrightarrow s_{out} = t$

Entrada 3: $s_{out} = f(w_0x_0 + w_1x_1 + w_2x_2)$

$= f(-0.5\times1+1.5\times1+0.5\times0) = f(1) = 1 \longrightarrow s_{out} \neq t$

$w_0 = w_0+(t-s_{out})x_0 = -0.5 + 0.5 \times(0-1) \times1 = -1$

$w_1 = w_1+(t-s_{out})x_1 = 1.5 + 0.5 \times(0-1) \times1 = 1$

$w_2 = w_2+(t-s_{out})x_2 = 0.5 + 0.5 \times(0-1) \times0 = 0.5$

Entrada 4: $s_{out} = f(w_0x_0 + w_1x_1 + w_2x_2)$

$= f(-1\times1+1\times1+0.5\times1) = f(0.5) = 1 \longrightarrow s_{out} = t$

EXEMPLO

5ª Ciclo

Entrada 1: $s_{out} = f(w_0x_0 + w_1x_1 + w_2x_2)$
$= f(-1\times1+1\times0+0.5\times0) = f(-1) = 0 \longrightarrow s_{out} = t$

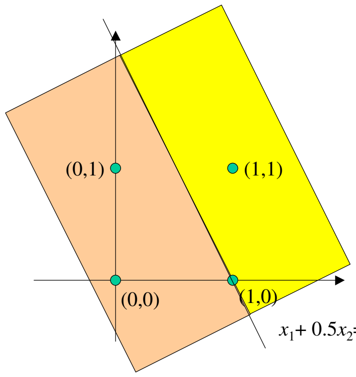
Entrada 2: $s_{out} = f(w_0x_0 + w_1x_1 + w_2x_2)$
$= f(-1\times1+1\times0+0.5\times1) = f(-0.5) = 0 \longrightarrow s_{out} = t$

Entrada 3: $s_{out} = f(w_0x_0 + w_1x_1 + w_2x_2)$
$= f(-1\times1+1\times1+0.5\times0) = f(0) = 0 \longrightarrow s_{out} = t$

Entrada 4: $s_{out} = f(w_0x_0 + w_1x_1 + w_2x_2)$
$= f(-1\times1+1\times1+0.5\times1) = f(0.5) = 1 \longrightarrow s_{out} = t$

$\boxed{w_0 = -1,\ w_1 = 1,\ w_2 = 0.5}$

INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA



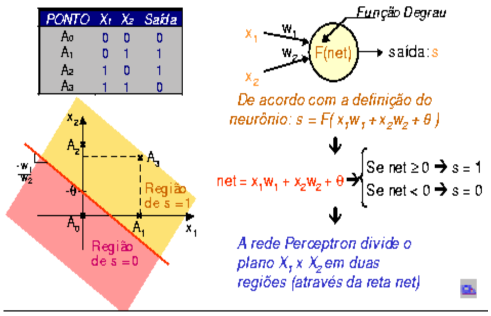
Linha de Decisão:

$x_1w_1 + x_2w_2 = -\theta$

$\Downarrow$

$x_1 + 0.5\,x_2 = 1$

O PROBLEMA DO OU-EXCLUSIVO (XOR)



Exercicio

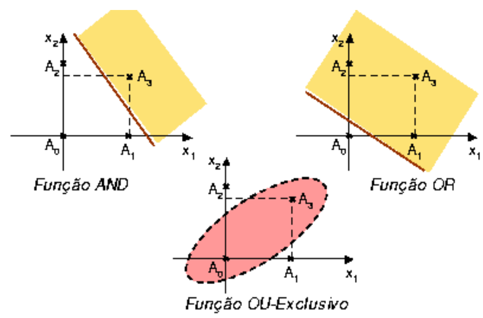
- Treinar um perceptron para implementar a função lógica OR.

O PROBLEMA DO OU-EXCLUSIVO (XOR)

Conclusão

- mudando-se os valores de w_1, w_2 e θ, muda-se a inclinação e a posição da reta;
- entretanto é impossível achar uma reta que divide o plano de forma separar os pontos A_1 e A_2 de um lado e A_0 e A_3 de outro
- redes de 1 única camada só representam **funções linearmente separáveis**

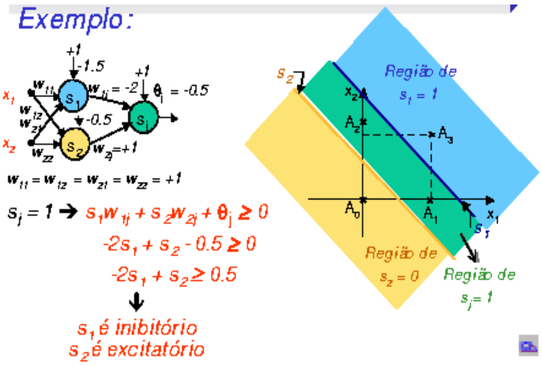
O PROBLEMA DO OU-EXCLUSIVO (XOR)



O PROBLEMA DO OU-EXCLUSIVO (XOR)

Minsky & Papert provaram que este problema pode ser solucionado adicionando-se uma outra camada intermediaria de processadores- Multi-Layer Perceptron (MLP)

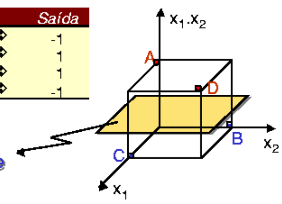
O PROBLEMA DO OU-EXCLUSIVO (XOR)



O PROBLEMA DO OU-EXCLUSIVO (XOR)

- *Exemplo do OU-EXCLUSIVO:*
  - J = 2 (número de entradas originais - x_1,x_2)
  - H = 1 (número de entradas adicionais - $x_1.x_2$)

Pontos	Entradas				Saída
A	-1	-1	1	⇨	-1
B	-1	1	-1	⇨	1
C	1	-1	-1	⇨	1
D	1	1	1	⇨	-1



UMA OBSERVAÇÃO

- Redes Neurais de múltiplas camadas só oferecem vantagens sobre as de uma única camada se existir uma função de ativação não-linear entre as camadas.

Camada Escondida: $Net_1 = S_0 W_1$

$S_1 = k_1 Net_1$

Camada de Saída: $S_2 = k_2 Net_2 = k_2(S_1 W_2)$

$= k_2((k_1 Net_1) W_2)$

$= k_2((k_1 S_0 W_1) W_2)$

$= k_2 k_1 (S_0 W_1) W_2$

$= K S_0 (W_1 W_2)$

$= K S_0 W$

Equivalente a uma única camada

MULTI-LAYER PERCEPTRON

- Redes de apenas uma camada só representam funções linearmente separáveis
- Redes de múltiplas camadas solucionam essa restrição
- O desenvolvimento do algoritmo Back-Propagation foi um dos motivos para o ressurgimento da área de redes neurais