



Pesquisa Operacional / Programação Matemática

Método Simplex em tabelas



Método simplex em tabelas

- Maneira prática de se trabalhar.
- Interessante para compreensão do método
- Não é eficiente computacionalmente
 - Simplex revisado

Método simplex em tabelas

Minimizar $f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}\mathbf{x}$

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}.$$

Todos os parâmetros necessários para resolução aparecem na tabela abaixo:

Tabela 2.18
Coeficientes de um problema de otimização linear.

| | | | | | |
|----------------|----------------|---------|----------------|--------------|-----------------------------------|
| x_1 | x_2 | \dots | x_n | ← | variáveis |
| c_1 | c_2 | \dots | c_n | f | ← coeficientes da função objetivo |
| \mathbf{a}_1 | \mathbf{a}_2 | \dots | \mathbf{a}_n | \mathbf{b} | ← coeficientes das restrições |

Exemplo

Minimizar $f(x_1, x_2) = -x_1 - 2x_2$

$$x_1 + x_2 \leq 6$$

$$x_1 - x_2 \leq 4$$

$$-x_1 + x_2 \leq 4$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

Matriz básica
(Sempre será a identidade,
no método por tabelas)

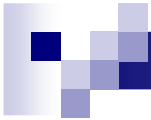
Na forma padrão, temos:

| x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | x_5 | b |
|-----------|-----------|----------|----------|----------|-----------------------|
| -1 | -2 | 0 | 0 | 0 | f |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 6 |
| 1 | -1 | 0 | 1 | 0 | 4 |
| -1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 4 |

Sabemos que podemos escrever as variáveis básicas em função das variáveis não-básicas (no caso, x_1 e x_2). Como $B=I$, isso é feito muito facilmente:

$$\begin{aligned}x_3 &= b_1 - a_{11}x_1 - a_{12}x_2 = 6 - x_1 - x_2 \\x_4 &= b_2 - a_{21}x_1 - a_{22}x_2 = 4 - x_1 + x_2 \\x_5 &= b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2 = 4 + x_1 - x_2.\end{aligned}$$

| x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | x_5 | b |
|-----------|-----------|----------|----------|----------|-----------------------|
| -1 | -2 | 0 | 0 | 0 | f |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 6 |
| 1 | -1 | 0 | 1 | 0 | 4 |
| -1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 4 |



- Vemos que a solução não é ótima. Aumentando x_1 ou x_2 , a função objetivo diminui.
- Aumentar x_2 diminui a f. objetivo com uma taxa -2

| x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | x_5 | b |
|-----------|-----------|----------|----------|----------|-----------------------|
| -1 | -2 | 0 | 0 | 0 | f |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 6 |
| 1 | -1 | 0 | 1 | 0 | 4 |
| -1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 4 |

Ao aumentar x_2 , o que tem que acontecer com as variáveis básicas ?

$$\begin{array}{llll}
 x_3 = b_1 - a_{12}x_2 = 6 - x_2 \geq 0 & (a_{12} > 0) & \longrightarrow & x_2 \leq 6 \\
 x_4 = b_2 - a_{22}x_2 = 4 + x_2 \geq 0 & (a_{22} < 0) & & \\
 x_5 = b_3 - a_{32}x_2 = 4 - x_2 \geq 0 & (a_{32} > 0). & \longrightarrow & x_2 \leq 4
 \end{array}$$

Devemos nos preocupar apenas com x_3 e x_5

| x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | x_5 | b |
|-----------|-----------|----------|----------|----------|-----------------------|
| -1 | -2 | 0 | 0 | 0 | f |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 6 |
| 1 | -1 | 0 | 1 | 0 | 4 |
| -1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 4 |

Solução ótima ilimitada

- Se, no caso anterior, tivéssemos:

| x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | x_5 | b |
|-------|-------|-------|-------|-------|-----|
| -1 | -2 | 0 | 0 | 0 | f |
| 1 | -1 | 1 | 0 | 0 | 6 |
| 1 | -1 | 0 | 1 | 0 | 4 |
| -1 | -1 | 0 | 0 | 1 | 4 |

$$\begin{aligned}x_3 = b_1 - a_{12}x_2 &= 6 + x_2 \geq 0 & (a_{12} > 0) \\x_4 = b_2 - a_{22}x_2 &= 4 + x_2 \geq 0 & (a_{22} < 0) \\x_5 = b_3 - a_{32}x_2 &= 4 + x_2 \geq 0 & (a_{32} > 0).\end{aligned}$$

solução ilimitada!

Ao aumentar x_2 , o que tem que acontecer com as variáveis básicas ?

$$x_3 = b_1 - a_{12}x_2 = 6 - x_2 \geq 0 \quad (a_{12} > 0) \quad \longrightarrow \quad x_2 \leq 6$$

$$x_4 = b_2 - a_{22}x_2 = 4 + x_2 \geq 0 \quad (a_{22} < 0)$$

$$x_5 = b_3 - a_{32}x_2 = 4 - x_2 \geq 0 \quad (a_{32} > 0) \quad \longrightarrow \quad x_2 \leq 4$$

Para $x_2 = 4$, x_5 se anula. f vale -8.

Logo, antes tínhamos: $B=[3,4,5]$ $NB=[1,2]$

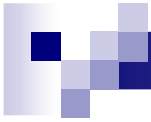
Agora, temos: $B=[3,4,2]$ $NB=[1,5]$

(x_2 entra na base, x_5 saí da base)

- Nova base: $B=[3,4,2]$ $NB=[1,5]$
- As colunas da base devem formar uma identidade

| x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | x_5 | b |
|-----------|-----------|----------|----------|----------|-----------------------|
| -1 | -2 | 0 | 0 | 0 | f |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 6 |
| 1 | -1 | 0 | 1 | 0 | 4 |
| -1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 4 |

Efetuar um pivoteamento!



↓ variável que entra na base

| x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | x_5 | b |
|-----------|-----------|----------|----------|----------|-----------------------|
| -1 | -2 | 0 | 0 | 0 | f |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 6 |
| 1 | -1 | 0 | 1 | 0 | 4 |
| -1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 4 |

pivô

←
restrição
atingida



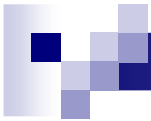
| | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | x_5 | b |
|---------|-------|----------|-------|-------|-------|----------|
| VB | -1 | -2 ↓ | 0 | 0 | 0 | f |
| x_3 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 6 |
| x_4 | 1 | -1 | 0 | 1 | 0 | 4 |
| ← x_5 | -1 | <u>1</u> | 0 | 0 | 1 | 4 |



novo pivô!
 custos reduzidos das variáveis não-básicas!

| | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | x_5 | b |
|-------|----------|-------|-------|-------|-------|----------|
| VB | -3 ↓ | 0 | 0 | 0 | 2 | $f+8$ |
| x_3 | <u>2</u> | 0 | 1 | 0 | -1 | 2 |
| x_4 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 8 |
| x_2 | -1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 4 |

→
 x_3 sai



| | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | x_5 | b |
|-------|----------|-------|-------|-------|-------|----------|
| VB | -3 | 0 | 0 | 0 | 2 | $f+8$ |
| x_3 | <u>2</u> | 0 | 1 | 0 | -1 | 2 |
| x_4 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 8 |
| x_2 | -1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 4 |



condição de otimalidade atingida: solução $x_1=1$, $x_2=5$, $f=11$

| | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | x_5 | b |
|-------|-------|-------|---------------------------------|-------|---------------------------------|----------|
| VB | 0 | 0 | <u>$\frac{3}{2}$</u> | 0 | <u>$\frac{3}{2}$</u> | $f+11$ |
| x_1 | 1 | 0 | $\frac{1}{2}$ | 0 | $-\frac{1}{2}$ | 1 |
| x_4 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 8 |
| x_2 | 0 | 1 | $\frac{1}{2}$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | 5 |



Algoritmo simplex em tabelas

Fase I: Determine uma tabela simplex inicial, isto é,

- a matriz dos coeficientes contém uma matriz identidade $m \times m$ (m é o número de equações) e o vetor independente $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$;
- a função objetivo é escrita em termos das variáveis não-básicas, isto é, os coeficientes das variáveis básicas são nulos.

Fase II:

1. Determine o menor dos custos relativos: $c_k = \text{mínimo} \{c_j \text{ para toda variável não-básica}\}$.
2. Se $c_k \geq 0$, então pare (a solução básica na iteração é ótima). Se não, a variável x_k entra na base.
3. Se $a_{ik} \leq 0$, $i = 1, \dots, m$, então pare (não existe solução ótima finita). Se não, determine: $\frac{b_\ell}{a_{\ell k}} = \text{mínimo} \{ \frac{b_i}{a_{ik}} \text{ tal que } a_{ik} > 0, i=1, \dots, m \}$ (a variável básica da linha ℓ sai da base).
4. Atualize a tabela simplex (pivotamento no elemento (ℓ, k)). A variável x_k passa a ser a variável básica na linha ℓ . Faça iteração = iteração + 1 e retorne ao passo 1.