Pesquisa Operacional / Programação Matemática

Otimização discreta

Programação dinâmica

Alysson M. Costa – ICMC/USP

Programação dinâmica

- Decisão "multi-estágios"
- Tomar decisões sequencialmente, sem que a otimalidade seja perdida.

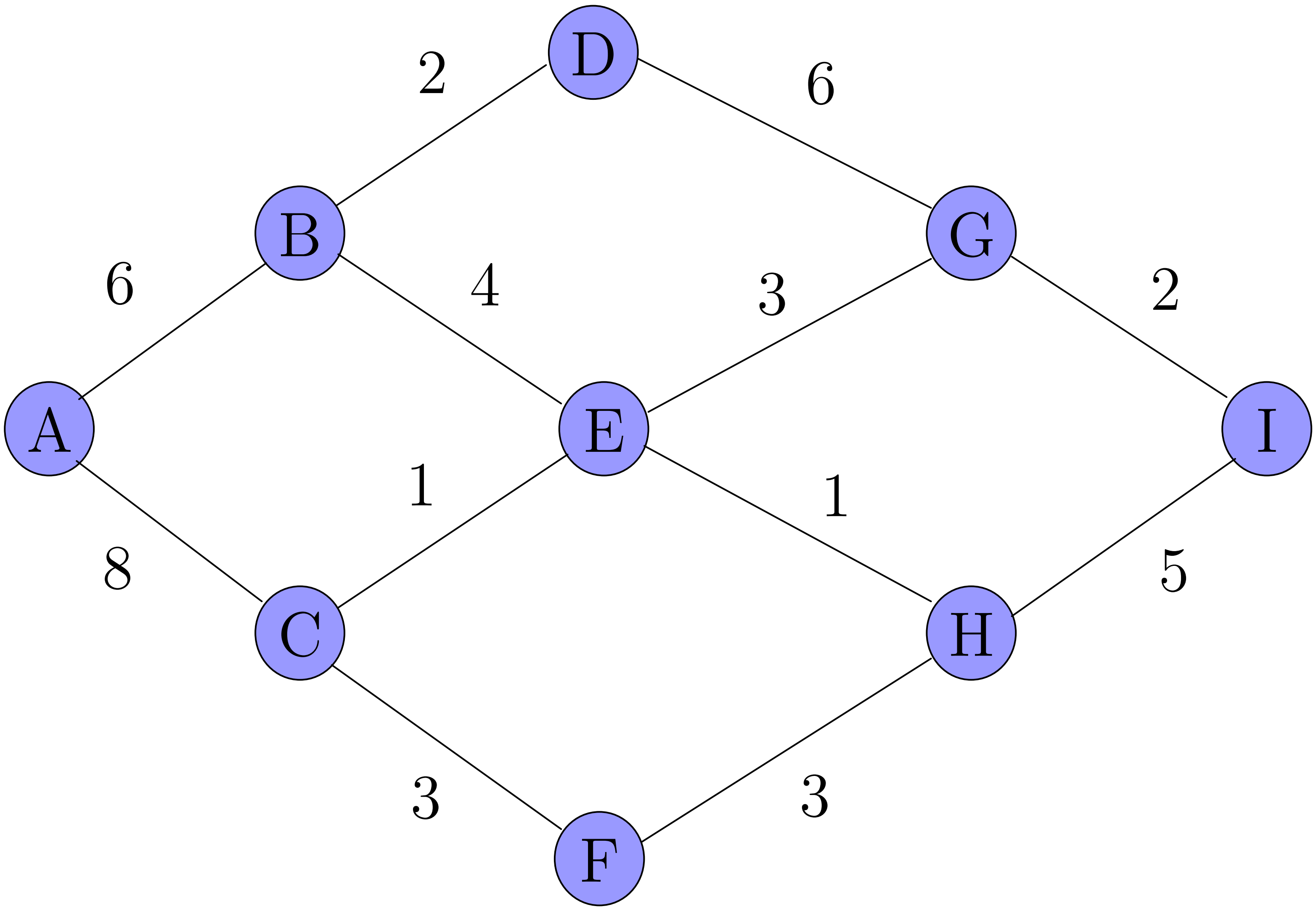
- Programação dinâmica x heurísticas gulosas/construtivas

Heurísticas Construtivas

- Também chamadas de *gulosas* ou *míopes.*
- Tentam, a cada momento, maximizar o ganho *local.*
- Exemplo *inocente:*

Encontrar o menor caminho entre dois pontos.

Heurística gulosa inocente (burra ?): utilizar sempre o arco de menor tamanho.


D
2
6
B
G
6
4
3
2
A
E
I
1
1
8
5
C
H
3
3
F

Heurísticas construtivas

- De fáceis implementação
- Rápidas
- Podem ser eficientes em alguns contextos
- Podem ser (muito) ineficientes em outros contextos.

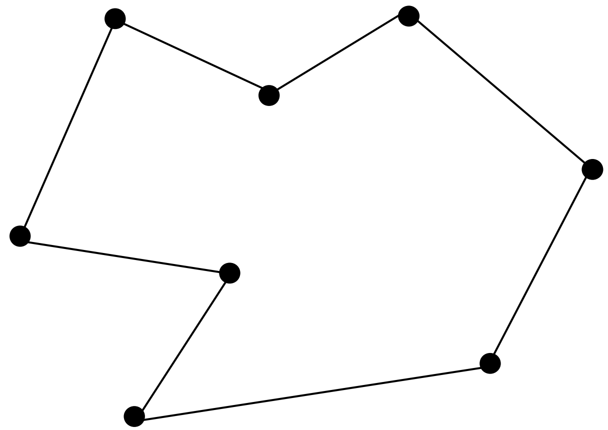
Caxeiro viajante

- Exemplo de heurística construtiva ?

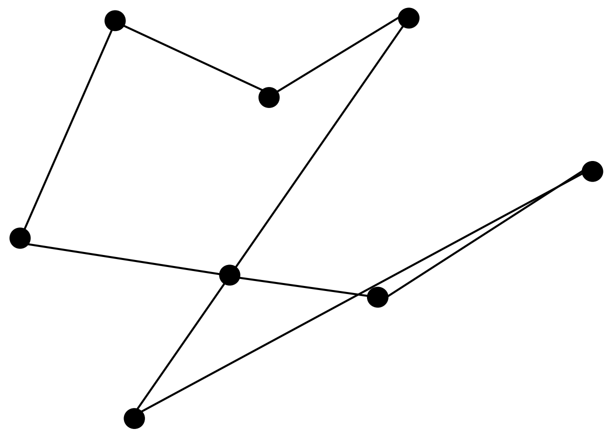
Nearest neighbor algorithm

1. comece com uma cidade i (arbitrária);
2. encontre o nó ainda não adicionado que seja mais próximo do último nó adicionado; Conecte estes dois nós.
3. Enquanto o último nó não tiver sido adicionado, volte para 2.
4. Quando o último nó tiver sido adicionado, conecte-o ao primeiro nó que foi adicionado.

Nearest neighbor algorithm (exemplo 1)



Nearest neighbor algorithm (exemplo 2)



PROBLEMA!

- Queremos garantir a otimalidade!

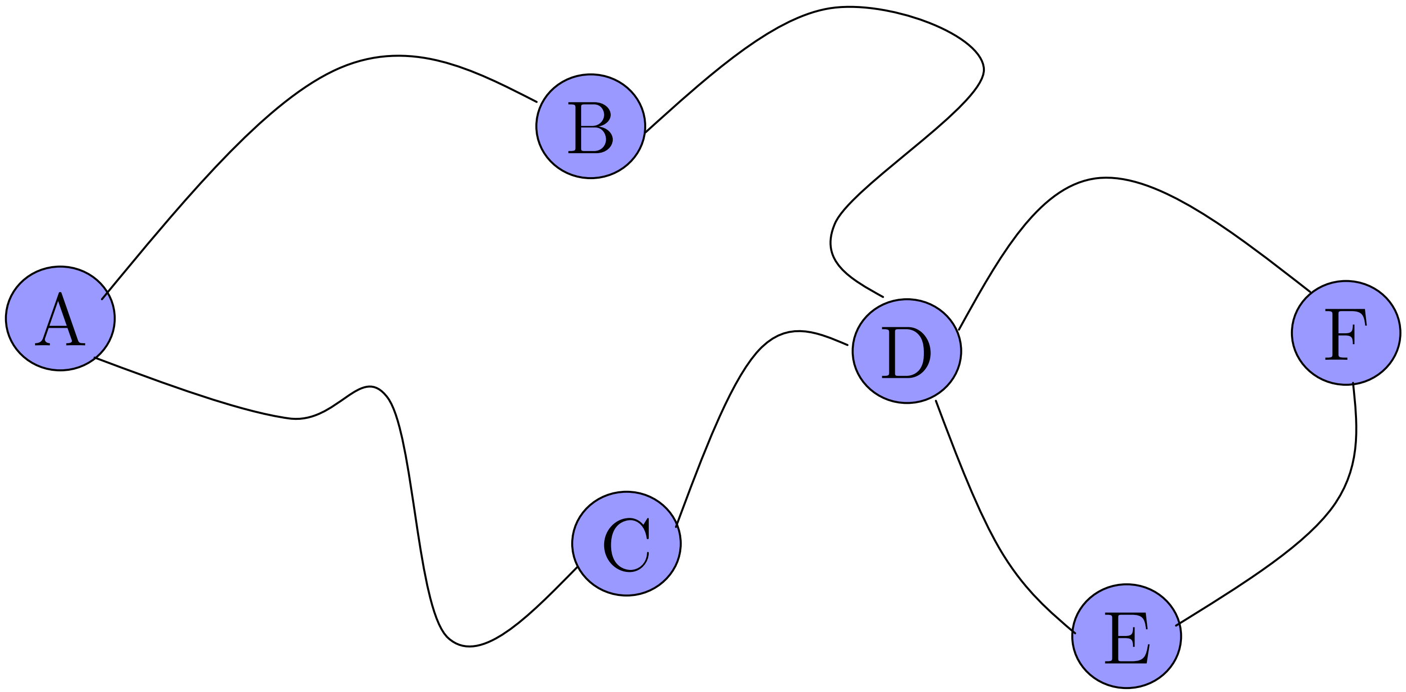
Programação dinâmica

Algumas definições

- Decisão multi-estágio:
  - *decisões*: alternativas para a conclusão de cada estágio.
  - *estado*: situação do processo.

- Princípio da otimalidade: toda sub-solução de uma solução ótima é ótima.

- Princípio da otimalidade: toda sub-solução de uma solução ótima é ótima.



Exemplo

Exemplo 5.1 A demanda mensal de aço tipo A produzido por uma empresa siderúrgica precisa ser atendida sem atrasos, sob pena de perda de vendas. A siderúrgica não dispõe, no momento, de nenhum estoque desse tipo de aço, e tem conhecimento de que sua demanda para os próximos quatro meses ($t = 1, 2, 3, 4$) é de 30, 20, 60 e 10 toneladas, respectivamente. O custo de produção do aço tipo A é constante durante os quatro meses e igual a \$2 mil por tonelada produzida, enquanto o custo de estocagem do aço de um mês para outro corresponde a 10% do custo de produção do aço armazenado. Devido a restrições tecnológicas, a produção do aço tipo A precisa ser feita em lotes e em quantidades predeterminadas múltiplas de 10 toneladas; ou seja, lotes de tamanhos 10, 20, 30 toneladas, e assim por diante. Além disso, a cada lote produzido, independentemente de seu tamanho, incorre-se em um custo fixo de preparação de \$10 mil. Qual o plano de produção de aço tipo A que minimiza os custos de produção, estocagem e preparação para esses quatro meses?

- Problema de dimensionamento de lotes:
  - O que é melhor ?

    ...(*lote a lote*) produzir várias vezes quantidades apropriadas e pagar o custo fixo de preparação ($ 10.000,00) a cada vez ou...

    ... produzir uma única vez (no começo), pagando o custo fixo uma única vez mas pagar custo de estoques ao longo de todo período ?

- Exemplos das estratégias:

- *Lote a lote* (produz a cada período a demanda do período):
  custo:

  produção: $2000 $\times$ (30+20+60+10) = $240.000

  preparação: 4 $\times$ 10.000 = $40.000

  estoque: R$ 0

  total: $280.000

- Exemplos das estratégias:

- *Um único lote* (produz no primeiro período apenas):
  custo:

  produção: \$2000 $\times$ (30+20+60+10) = 240.000

  preparação: 1 $\times$ 10.000 = 10.000

  estoque: \$18.000 + \$14.000 + \$2.000 = \$34.000

  total: 284.000

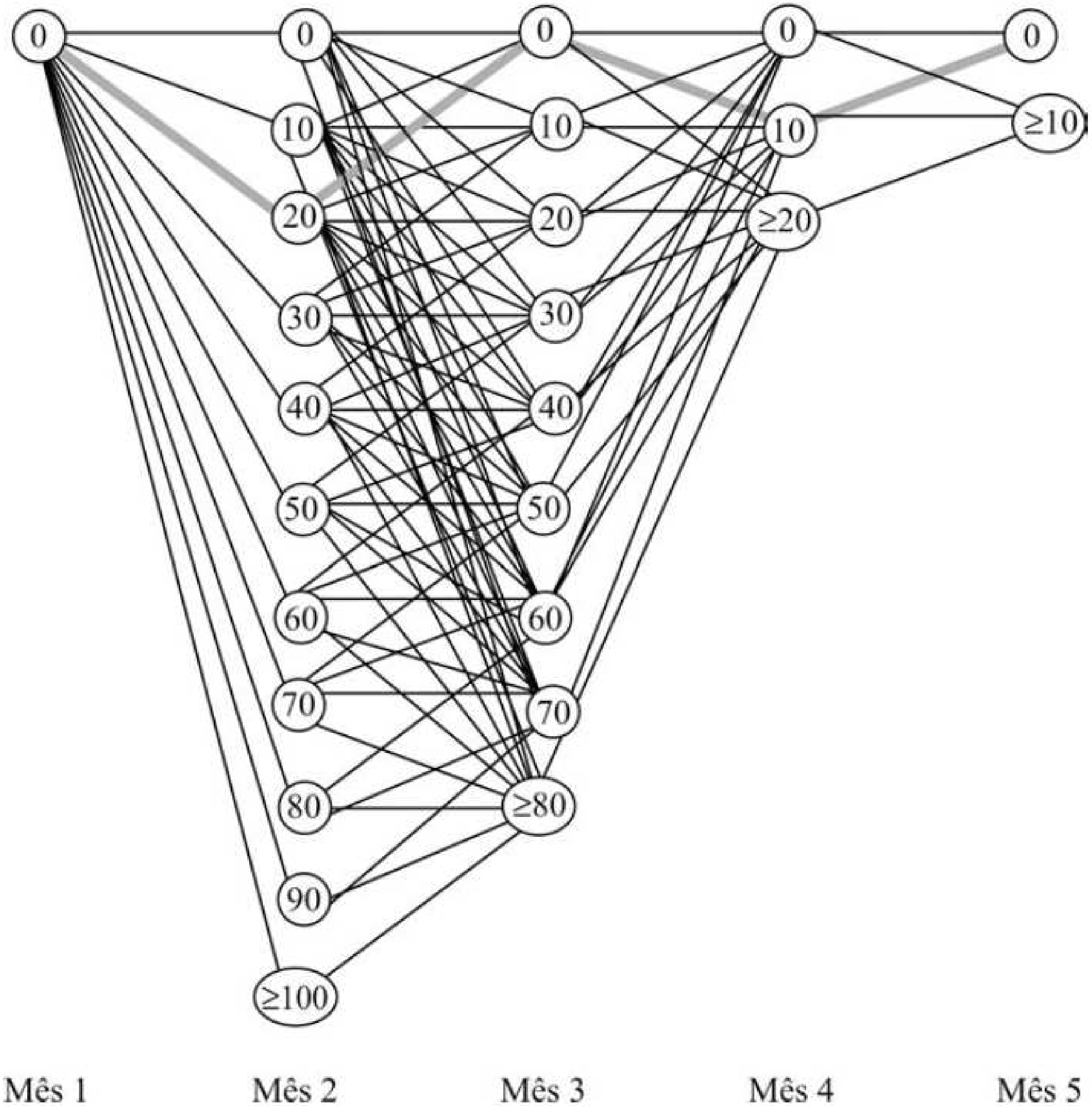
- Algumas conclusões:
  - Estoca-se apenas quantidades *completas* de demanda ?
  - O custo de produção (por ser fixo ao longo do período de planejamento) pode ser ignorado
  - Queremos balancear:

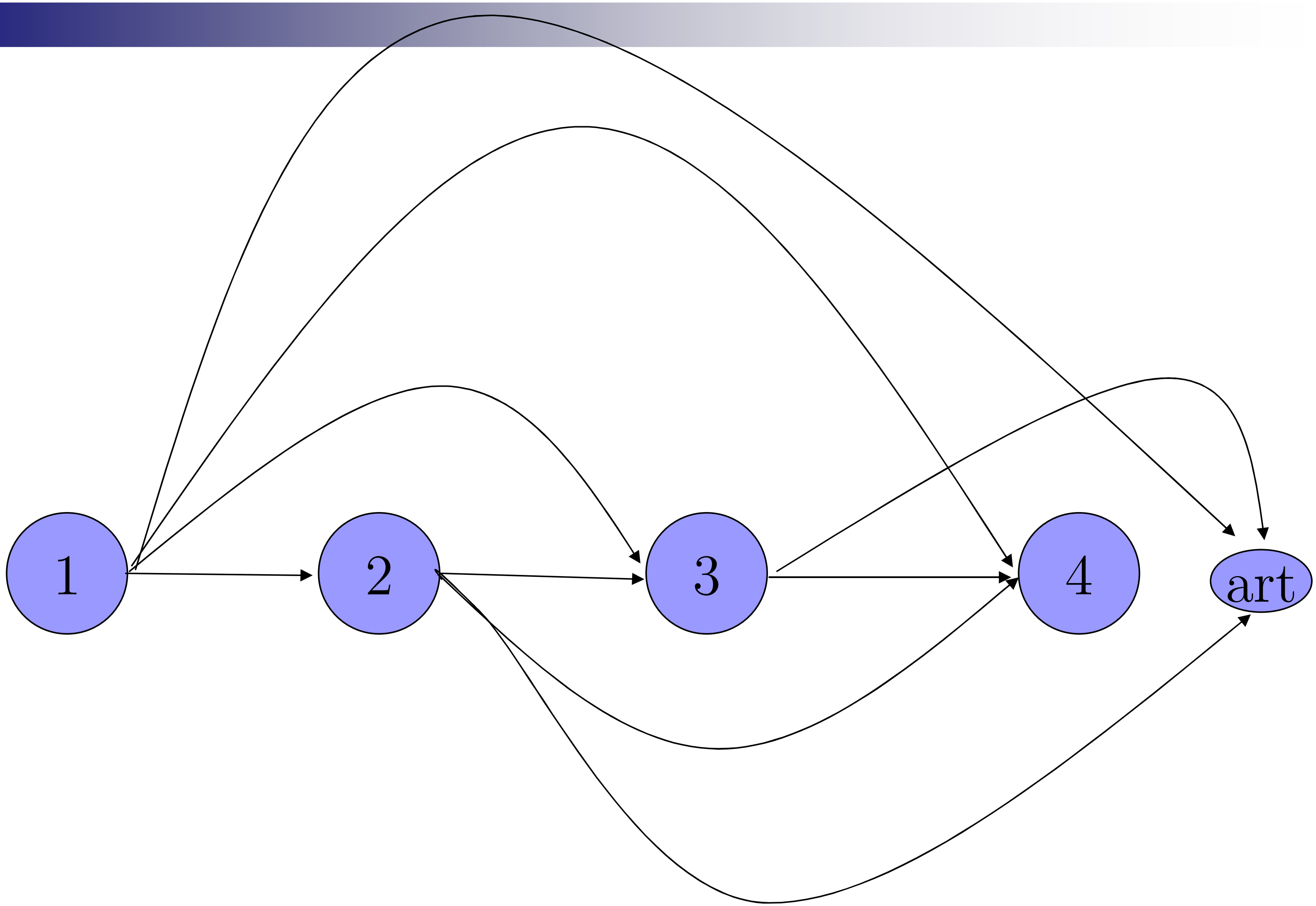
    custo de estoque $\times$ custos fixos

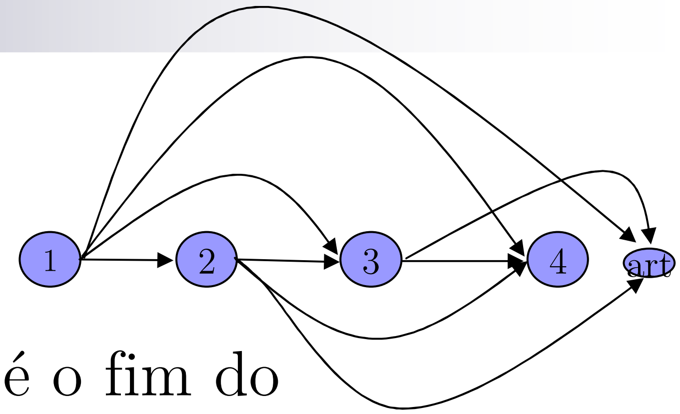
- *estado*: situação do sistema (no exemplo, quantidade de unidades em estoque).

  Por que ? Se eu souber quanto tenho em estoque, posso determinar a política ótima daqui pra frente sem me preocupar com as decisões anteriores

- decisão: produzir ? quanto ?


0
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
≥100
0
10
20
30
40
50
60
70
≥80
0
10
≥20
0
≥10
Mês 1
Mês 2
Mês 3
Mês 4
Mês 5


1
2
3
4
art



- Queremos encontrar o menor custo até o fim do planejamento: f(art).

$$f(\mathrm{art}) = \min_u \{g(u) + c_{u,\mathrm{art}}\}$$