Pesquisa Operacional / Programação Matemática

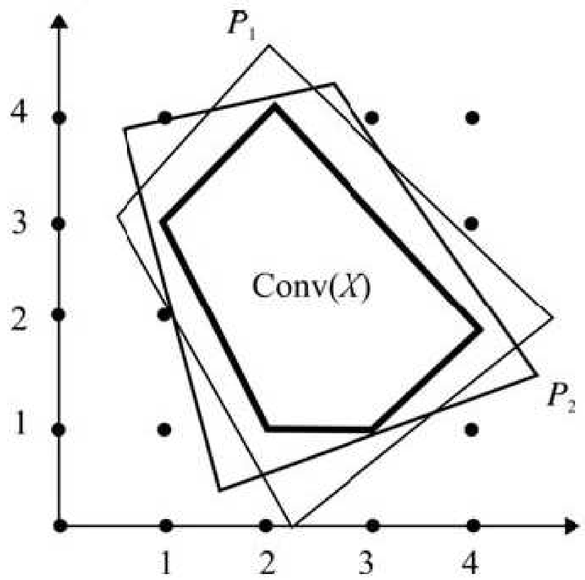
Otimização discreta

Planos de corte

Alysson M. Costa – ICMC/USP

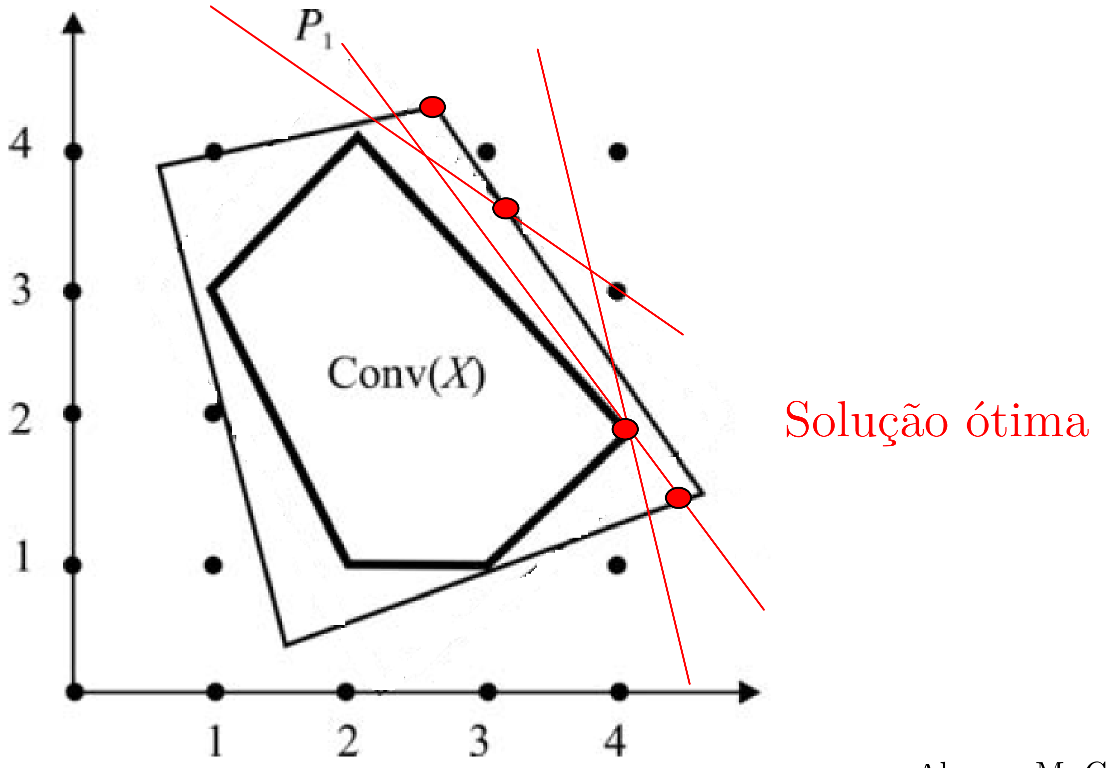
Envoltória convexa

- Se temos a envoltória convexa, podemos resolver um PIM como um PL.



Método de planos de corte

- Idéia: tentar aproximar a formulação atual da envoltória convexa.



Observações

- Note que:
  - não foi preciso "chegar" na envoltória convexa.
  - não existe a noção de "ramificação", como no branch-and-bound.
  - cada corte elimina a solução ótima atual do PL.
  - cada corte não elimina nenhuma solução inteira do problema.
  - No momento que uma solução inteira é encontrada, ela é a ótima.

- Dificuldade:

  É necessário encontrar-se um corte que:
  - elimine a solução ótima do PL atual
  - não elimine nenhuma solução inteira do problema.

Conceitos

<u>Definição 3.5</u> Uma desigualdade $\boldsymbol{\phi}\mathbf{x} \leq \phi_0$ é uma desigualdade válida para $X \subseteq R^n$ se $\boldsymbol{\phi}\mathbf{x} \leq \phi_0$ para todo $\mathbf{x} \in X$.

Proposição 3.2 A desigualdade $x \leq \lfloor b \rfloor$ é válida para $X = \{x \in Z^1 : x \leq b\}$.

Atenção: x$\leq$ b aparecia como restrição original (não se trata de uma ramificação)

Idéia básica (Chvátal-Gomory)

$$\sum_{j=1}^{n} \mathbf{a}_j x_j \le \mathbf{b}.$$

$\mathbf{u} \ge 0$

$$\sum_{j=1}^{n} \mathbf{u}^{\mathrm{T}} \mathbf{a}_j x_j \le \mathbf{u}^{\mathrm{T}} \mathbf{b}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \left\lfloor \mathbf{u}^{\mathrm{T}} \mathbf{a}_j \right\rfloor x_j \le \mathbf{u}^{\mathrm{T}} \mathbf{b}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \left\lfloor \mathbf{u}^{\mathrm{T}} \mathbf{a}_j \right\rfloor x_j \le \left\lfloor \mathbf{u}^{\mathrm{T}} \mathbf{b} \right\rfloor$$

Exemplo 1

Exemplo 3.20 Identifique uma desigualdade para cortar o ponto $(0,0,0,35/6)$ do conjunto:

$$X = \{x \in Z_+^4 : 5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 6x_4 \leq 35\}$$

Multiplicando a desigualdade acima por $u = 1/6$ e aplicando o procedimento de Chvátal-Gomory, tem-se

$$\lfloor 5/6 \rfloor x_1 + \lfloor 7/6 \rfloor x_2 + \lfloor 4/6 \rfloor x_3 + x_4 \leq \lfloor 35/6 \rfloor$$

portanto, a desigualdade válida $x_2 + x_4 \leq 5$ corta o ponto.

Exemplo 2

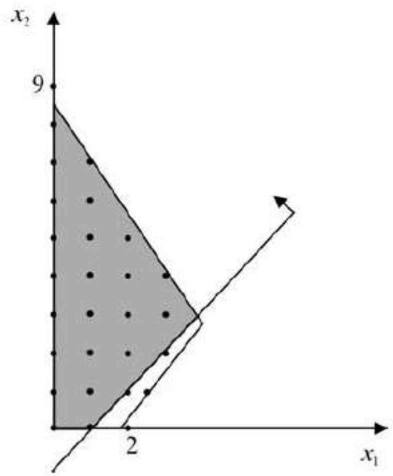
Exemplo 3.21 Considere o conjunto $X = \{7x_1 - 5x_2 \leq 13, \quad 3x_1 + 2x_2 \leq 17, \quad x \in Z_+^2\}$ associado às restrições do Exemplo 3.17.

Considere a soma ponderada das restrições com $\mathbf{u} = (3/20, 0)$, que resulta na desigualdade

$$\frac{21}{20}x_1 - \frac{3}{4}x_2 \leq \frac{39}{20}.$$

$$\left\lfloor \frac{21}{20} \right\rfloor x_1 + \left\lfloor -\frac{3}{4} \right\rfloor x_2 \leq \left\lfloor \frac{39}{20} \right\rfloor$$

A desigualdade válida é, então, $x_2 - x_1 \leq 1$



Chvátal-Gomory cutting planes algorithm

Dada uma solução do tableau do simplex com ao menos uma variável fracionária.

Def:

BI é o conjunto das variáveis básicas

NI é o conjunto das variáveis não-básicas

tome uma variável básica não-inteira:

$x_k = b_k - \sum_{j \in NI} a_{kj} x_j$

(b_k não inteiro)

Chvátal-Gomory cutting planes algorithm

$x_k = b_k - \sum_{j \in NI} a_{kj}\, x_j$

$$b_k = \lfloor b_k \rfloor + \beta_k$$

$$a_{kj} = \lfloor a_{kj} \rfloor + \alpha_{kj}$$

$$x_k = \lfloor b_k \rfloor + \beta_k - \sum_{j \in Ni} \alpha_{kj} x_{kj} - \sum_{j \in Ni} \lfloor a_{kj} \rfloor x_{kj}$$

$$\underbrace{\beta_k - \sum_{j \in Ni} \alpha_{kj} x_{kj}}_{} = x_k - \lfloor b_k \rfloor + \sum_{j \in Ni} \lfloor a_{kj} \rfloor x_{kj}$$

$$\beta_k - \underbrace{\sum_{j \in Ni} \alpha_{kj} x_{kj}}_{\geq 0} \leq \beta_k$$

Chvátal-Gomory cutting planes algorithm

$$\beta_k - \sum_{j \in Ni} \alpha_{kj} x_{kj} = x_k - \lfloor b_k \rfloor + \sum_{j \in Ni} \lfloor a_{kj} \rfloor x_{kj}$$

$$\beta_k - \sum_{j \in Ni} \alpha_{kj} x_{kj} \leq \beta_k < 1$$

$$x_k - \lfloor b_k \rfloor + \sum_{j \in Ni} \lfloor a_{kj} \rfloor x_{kj} < 1 \quad \leq \; 0$$

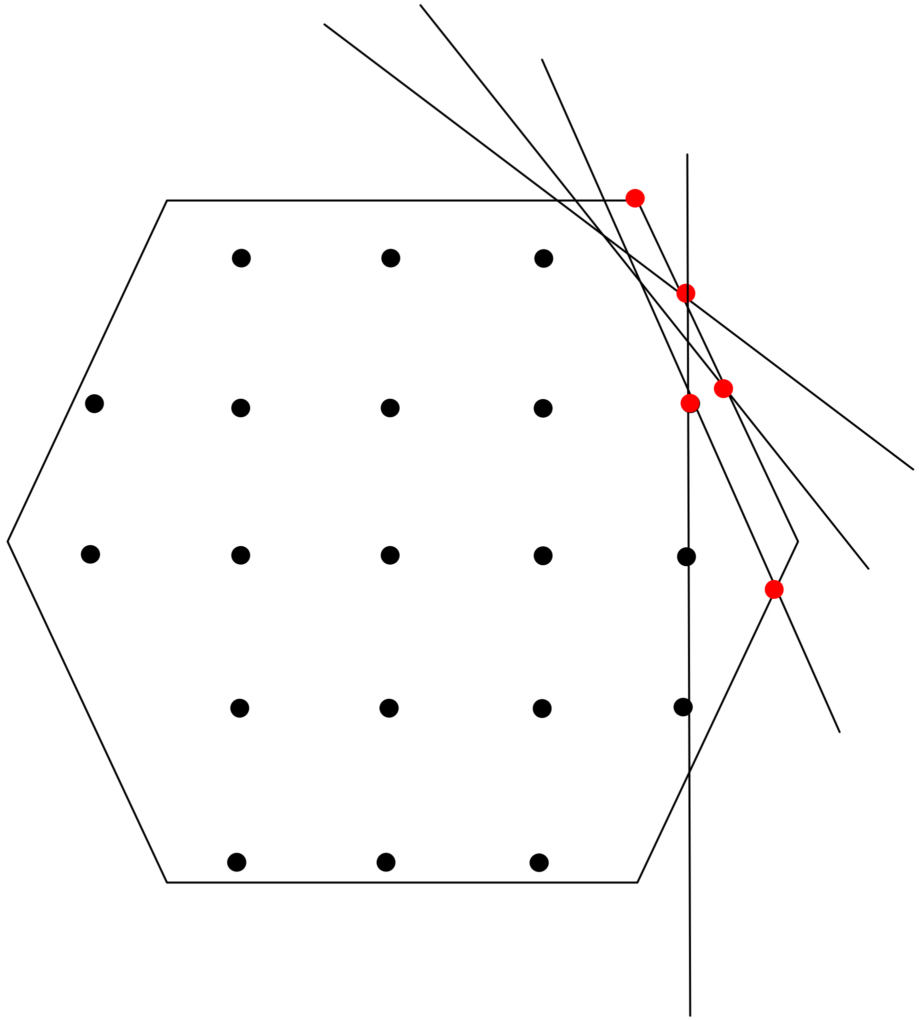
inteiros

$$\beta_k - \sum_{j \in Ni} \alpha_{kj} x_{kj} \leq 0$$

corta a solução atual! (Por que ?)

por que β_k na solução atual ≥ 0
e os x_{kj} valem 0.

Chvátal-Gomory cutting planes algorithm



Exemplo

Considere o problema

$$
\begin{aligned}
z &= \max\ 5x_1 - x_2 \\
7x_1 - 5x_2 + s_1 &= 13 \\
3x_1 + 2x_2 + s_2 &= 17 \\
\mathbf{x}, \mathbf{s} &\in Z_+^2
\end{aligned}
$$

Quadro 3.5

	x_1	x_2	s_1	s_2	
$\bar{z}$	0	0	$\frac{13}{29}$	$\frac{18}{29}$	$16\frac{11}{29}$
x_1	1	0	$\frac{2}{29}$	$\frac{5}{29}$	$3\frac{24}{29}$
x_2	0	1	$-\frac{3}{29}$	$\frac{7}{29}$	$2\frac{22}{29}$

$$\frac{2}{29}s_1 + \frac{5}{29}s_2 \geq \frac{24}{29}$$

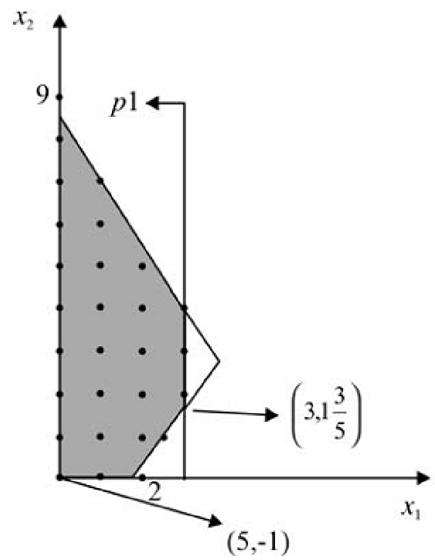
$$s_3 - 2s_1 - 5s_2 = -24, \quad s_3 \geq 0$$

$$\frac{2}{29}s_1 + \frac{5}{29}s_2 \geq \frac{24}{29}$$

$$2s_1 + 5s_2 \geq 24$$

$$2(13 - 7x_1 + 5x_2) + 5(17 - 3x_1 - 2x_2) \geq 24$$

$$x_1 \leq 3$$



Comentários de Ailsa Land e Susan Powell

While branch and bound began to be built into computer codes, the cutting plane approach was obviously more elegant, and we spent a great deal of time experimenting with it. As something of a side effect of this effort we produced a lot of code for both BB and cutting planes, which we published for use by other experimenters (Land and Powell, 1973). Despite the elegance of the cutting plane approach, the sad fact is that an accumulation of cutting planes on anything but a tiny problem inevitably leads to increasingly ill-conditioned matrices, and a failure to reach a solution. It is disingenuous of Balas (Balas et al., 1996), making the comment that the literature of computational experience of cutting planes is scant, to imply that there was not a lot of work done in this area. Work was done, but it was not published because as a method to solve problems branch and bound resoundingly won.