Pesquisa Operacional / Programação Matemática

Método Simplex: forma padrão

Alysson M. Costa – ICMC/USP

Forma geral de um problema

- Em vários problemas que formulamos, obtivemos:
  - Um objetivo de otimização (max ou min)
  - Restrições de igualdade
  - Restrições de desigualdade $\leq$
  - Restrições de desigualdade $\geq$

Forma Padrão

$$
\begin{aligned}
\text{Minimizar } f(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \\
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
&\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \\
x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ \ldots,\ x_n &\geq 0.
\end{aligned}
$$

- Caract
  - Problema de minimização
  - Todas as restrições são de igualdade
  - Todas as variáveis são não-negativas
  - Além disso: vamos pedir b$\geq$ 0.

Forma Padrão (matricial)

- Qualquer problema pode ser escrito na forma padrão.

$$
\begin{aligned}
\text{Minimizar} \quad f(\mathbf{x}) &= \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} \\
\mathbf{A}\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\
\mathbf{x} &\geq \mathbf{0},
\end{aligned}
$$

$$
\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}
$$

$$
\mathbf{c}^{\mathrm{T}} = (c_1 \quad c_2 \quad \cdots \quad c_n)
$$

$$
\mathbf{x}^{\mathrm{T}} = (x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n)
$$

$$
\mathbf{b}^{\mathrm{T}} = (b_1 \quad b_2 \quad \cdots \quad b_m)
$$

Def.: solução factível

- Uma solução é factível se atende a todas as restrições do problema.

$$\text{Minimizar} \quad f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 - x_2 + 4x_3$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 3 \\ x_2 + 2x_3 &= 4 \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

$x^T = (1, ($

$x^T = (0.25, \; 0.5, \; 1.75)$ é factível ?

Def.: solução ótima

- Uma solução é ótima se é factível **e** fornece o menor valor à função objetivo f.

- Se $(x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*)$ é ótima:

$$f(x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*) \leq f(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

para qualquer solução factível $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

Transformação para a forma padrão

- Problemas de maximização

Max $c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_n x_n$

$= \boxed{\text{Min } -c_1x_1 - c_2x_2 - \ldots - c_nx_n}$

Pois

$$f(\mathbf{x}^*) \geq f(\mathbf{x}), \text{ para toda solução } \mathbf{x} \text{ factível.}$$

$$-f(\mathbf{x}^*) \leq -f(\mathbf{x}), \text{ para toda solução } \mathbf{x} \text{ factível}$$

Transformação para a forma padrão

- Restrição de desigualdade:

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}\, x_n \leq b_1$

$= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}\, x_n + x_k = b_1$

$x_k \geq 0$

E para restrições de $\geq$?

variável de folga.

Transformação para a forma padrão

- Variáveis livres

x_i irrestrita.

$$x_i = x_i^+ - x_i^-, \text{ com } x_i^+ \geq 0, \; x_i^- \geq 0.$$

Exemplo

Coloque na forma padrão:

$$\text{Max} \quad 3x_1 + x_2$$

s.a

$$x_1 + x_2 \leq 4$$

$$x_1 + 2x_2 \geq -2$$

$$x_1 \text{ livre}$$

$$x_2 \geq 0$$

Escrita do problema "por colunas"

$$\text{Minimizar } f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{c}_j x_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{a}_j x_j = \boldsymbol{b}$$

$$x_j \geq 0, j = 1, \ldots, n,$$

$$\boldsymbol{a}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} : \ j\text{-ésima coluna da matriz } \mathbf{A}$$

Similar ao que fizemos no problema de corte, onde cada coluna era um padrão de corte.

Exemplo

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + \quad x_3 = 3 \\ \qquad\quad x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} x_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

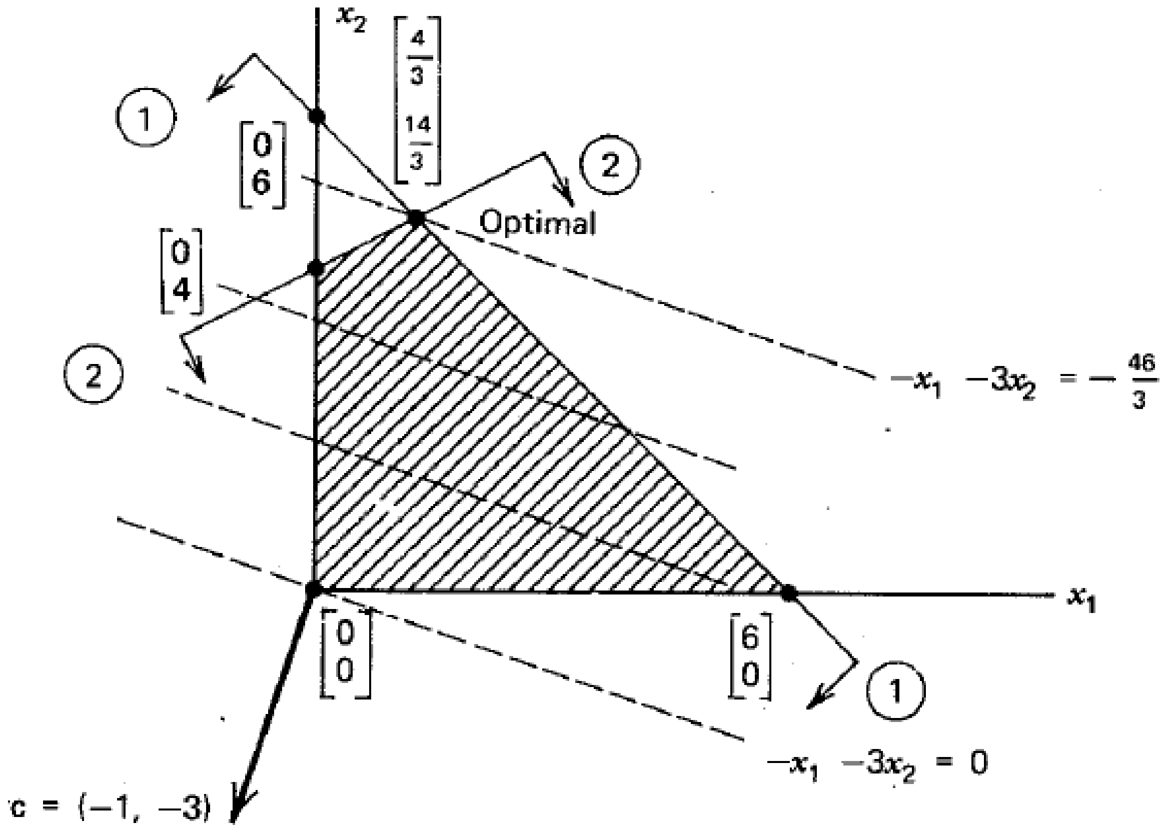
Exercício

Uma fábrica produz dois itens. O primeiro item gera um lucro de 1 unidade monetária e o segundo item um lucro de 3 unidades monetarias. A fábrica trabalha com duas matérias primas, A e B. Para a produção do item 1, é necessária uma unidade da matéria prima A. Como sobra da produção, é gerada uma peça da matéria prima B. Para a produção do item 2, são necessárias uma unidade da matéria prima A e duas unidades da matéria prima B. A fábrica dispõe, em estoque, de 6 unidades de A e 8 unidades de B.

a) Modele o problema de maximização do lucro da empresa.

b) Escreva a formulação obtida em A na forma padrão

c) Resolva graficamente



Linear programming and network flows (Bazaraa et al)