Programação Matemática

Método Simplex

Forma Padrão - Revisão

$$\text{Minimizar } f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ \ldots,\ x_n &\geq 0. \end{aligned}$$

- Características da forma padrão:
  - ✓ Problema de minimização
  - ✓ Todas as restrições são de igualdade
  - ✓ Todas as variáveis são não-negativas
  - ✓ Considerar b ≥ 0.

Partição básica (Revisão)

- Seja o sistema $Ax=b$, onde A_{mxn} , b_{mx1} , x_{nx1} ($m< n$ e posto de A é m).
- **Se é possível reorganizar as colunas de A de tal modo A=[B,N] e que:**
- $\mathbf{B}_{\mathbf{mxm}}$ é formada por ***m*** colunas linearmente independentes de A dada por:

$$\mathbf{B} = [\mathbf{a}_{B_1} \ \mathbf{a}_{B_2} \cdots \ \mathbf{a}_{B_m}]$$

Onde B_1, B_2,..., B_m são os índices das colunas escolhidas da matriz A (índices básicos)

Partição básica (Revisão)

- $\mathbf{N}_{\mathbf{mx\ (n\text{-}m)}}$ - formada pelas ***n-m*** colunas restantes de A.
- $\mathbf{N}_{\mathbf{mx\ (n\text{-}m)}}$ pode ser escrita como:

  Onde N_1, N_2,..., N_m são os índices das colunas da matriz A que pertencem a N (índices não-básicos)

$$\mathbf{N} = [\mathbf{a}_{N_1}\ \mathbf{a}_{N_2} \cdots \mathbf{a}_{Nn-m}]$$

Esta reorganização é definida como partição básica

$$\mathbf{A} = [\mathbf{B}\quad \mathbf{N}]$$

Partição básica (partição das variáveis)

- Consequentemente, a partição de A em [B N] cria uma partição das variáveis:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_\mathbf{B} \\ \mathbf{x}_\mathbf{N} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}_\mathbf{B} = \begin{bmatrix} x_{B_1} \\ x_{B_2} \\ \vdots \\ x_{B_m} \end{bmatrix}$$

variáveis básicas

$$\mathbf{x}_\mathbf{N} = \begin{bmatrix} x_{N_1} \\ \vdots \\ x_{N_{n-m}} \end{bmatrix}$$

variáveis não básicas

Solução geral do sistema

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \Leftrightarrow [\mathbf{BN}] \begin{bmatrix} \mathbf{x_B} \\ \mathbf{x_N} \end{bmatrix} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{Bx_B} + \mathbf{Nx_N} = \mathbf{b}.$$

$$\mathbf{x_B} = \mathbf{B^{-1}b} - \mathbf{B^{-1}Nx_N}$$

- A última expressão de x_B é conhecida como solução geral do sistema.

Solução básica

- Considere uma partição básica A=[B,N]. Uma solução é dita básica quando:

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{x}}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \\ \hat{\mathbf{x}}_N = \mathbf{0}. \end{cases}$$

- Se $x_B \geq 0$ então temos uma *solução básica factível*. Caso contrário, temos uma *solução básica não-factível.*
- Se $x_B > 0$ dizemos que a solução básica factível é não degenerada.

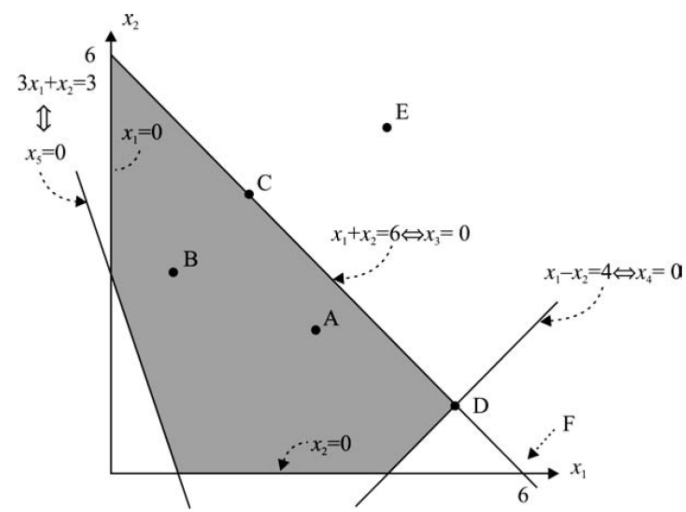
Voltando ao exemplo

$$\begin{aligned} x_1 &+ x_2 \leq 6 \\ x_1 &- x_2 \leq 4 \\ 3x_1 &+ x_2 \geq 3 \\ x_1 \geq 0&, \; x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \\ x_1 - x_2 + x_4 &= 4 \\ 3x_1 + x_2 - x_5 &= 3 \\ x_1 \geq 0,\; x_2 \geq 0,\; x_3 \geq 0,\; x_4 \geq 0,\; &x_5 \geq 0. \end{aligned}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_5 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x_B}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{N}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x_N}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \mathbf{B}\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{B}} = \mathbf{b}$$

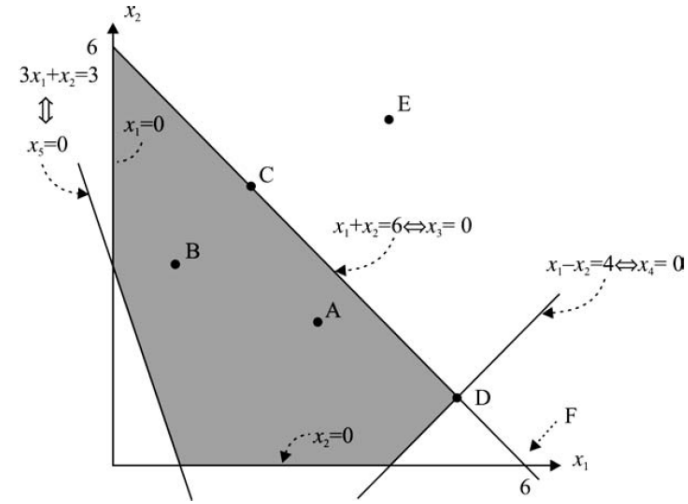


$$\hat{\mathrm{x}}_{\mathrm{B}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 13 \end{bmatrix} \longrightarrow$$ Solução básica factível

Voltando ao exemplo

- Vértice F:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x_B}} + \cancel{\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{N}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x_N}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}}$$



$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathrm{x}}_{\mathrm{B}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ 15 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

Solução básica *não*-factível

Propriedades

Se um problema de otimização linear tem uma solução ótima, então existe um vértice ótimo

Considere a região factível $S=\{\mathbf{x}\in\mathbf{R}^n$ tal que $\mathbf{Ax=b}, \mathbf{x}\geq\mathbf{0}\}$.
Um ponto $x \in S$ é um vértice se e somente se x for uma solução básica factível.

Método possível

- Enumerar todas as soluções básicas factíveis (vértices)

  $x_1, x_2, \ldots x_K$

- Escolher aquela (factível) com melhor função objetivo.

- Problema:

  K pode ser muito grande!

Simplex

Idéia:

•Partir de uma solução básica factível

•Visitar apenas as soluções básicas factíveis melhores que ela.

Método Simplex

Simplex

In this chapter we begin to discuss Dantzig's Simplex Method, which was conceived in the summer of 1947 for solving linear programming problems. The first significant application of this method occurred soon after in the fall of 1947. J. Laderman solved a diet–planning linear program with nine equality constraints in 27 nonnegative variables at the National Bureau of Standards. Using desk calculators, this problem took 120 man–days to solve and the worksheets were laboriously glued together and spread out like a "table cloth." Today, using modern–age computer facilities and sophisticated implementations of the simplex method, linear programs having more than tens–of–thousands of constraints and variables are readily solvable. Although several variants of the simplex method have evolved and other new competing algorithms have been proposed (see Chapter 8), the simplex method remains a viable and popular tool for solving linear programming problems. It also provides further insights into the facial structure of polyhedral sets that define the underlying feasible region for linear programs.

Perguntas

- Dada uma solução básica factível (ou seja, um vértice)
- 1) Esta solução é ótima ?
- 2)Caso não seja ótima, como encontrar uma solução básica factível melhor ?

Pergunta 1: A solução atual é ótima ?

- Considere uma solução básica factível:

$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_B \\ \hat{\mathbf{x}}_N \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{cases} \hat{\mathbf{x}}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \\ \hat{\mathbf{x}}_N = \mathbf{0}. \end{cases}$$

- E a solução geral do sistema usando a mesma partição :

$$x = \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{B}\mathbf{x}_B + \mathbf{N}\mathbf{x}_N = \mathbf{b}. \longrightarrow \boxed{\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}_N}$$

Pergunta 1: A solução atual é ótima ?

- A função objetivo pode ser expressa considerando a partição básica:

$$x = \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} \rightarrow \quad \mathbf{B}\mathbf{x}_B + \mathbf{N}\mathbf{x}_N = \mathbf{b}. \longrightarrow \boxed{\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}_N}$$

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_B^T & \mathbf{c}_N^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_B \\ \mathbf{x}_N \end{bmatrix} = \mathbf{c}_B^T\mathbf{x}_B + \mathbf{c}_N^T\mathbf{x}_N$$

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}_B^T\underbrace{(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}_N)}_{\mathbf{x}_B} + \mathbf{c}_N^T\mathbf{x}_N$$

$$= \mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}_N + \mathbf{c}_N^T\mathbf{x}_N.$$

Pergunta 1: A solução atual é ótima ?

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}_B^T \underbrace{(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}_N)}_{\mathbf{x}_B} + \mathbf{c}_N^T \mathbf{x}_N$$

$$= \underbrace{\mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}}_{f(\hat{\mathbf{x}})} - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}_N + \mathbf{c}_N^T \mathbf{x}_N .$$

valor da solução básica associada a esta partição

- Então

$$f(\mathbf{x}) = f(\hat{\mathbf{x}}) - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}_N + \mathbf{c}_N^T \mathbf{x}_N .$$

$\boxed{\lambda^T}$

$\boxed{\lambda^T = \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1}}$

Pergunta 1: A solução atual é ótima ?

- Definição (vetor multiplicador simplex): O vetor λ_{mx1}, dado por:

$$\boldsymbol{\lambda}^{T} = \mathbf{c}_{B}^{T}\mathbf{B}^{-1}$$

é chamado vetor multiplicador simplex (ou também, vetor de variáveis duais).

O vetor multiplicador simplex pode ser obtido por:

$$\lambda^{T} = c_{B}^{T}B^{-1} \Leftrightarrow \lambda = \left(B^{-1}\right)^{T} c_{B} \Leftrightarrow B^{T}\lambda = c_{B}$$

Retornando ... Pergunta 1: A solução atual é ótima ?

$$f(\mathbf{x}) = f(\hat{\mathbf{x}}) - \mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}_N + \mathbf{c}_N^T\mathbf{x}_N = f(\hat{\mathbf{x}}) - \boldsymbol{\lambda}^T\mathbf{N}\mathbf{x}_N + \mathrm{c}_N^T\mathbf{x}_N$$

$$= f(\hat{\mathbf{x}}) + (\mathbf{c}_N^T - \boldsymbol{\lambda}^T\mathbf{N})\mathbf{x}_N$$

Vamos expressar por coluna:

$$\mathbf{c}_N^T - \boldsymbol{\lambda}^T\mathbf{N} = (c_{N_1},\ c_{N_2}, \cdots,\ c_{N_{n-m}}) - \boldsymbol{\lambda}^T(\mathbf{a}_{N_1}, \mathbf{a}_{N_2}, \cdots, \mathbf{a}_{N_{n-m}})$$

$$= (c_{N_1} - \boldsymbol{\lambda}^T\mathbf{a}_{N_1},\ c_{N_2} - \boldsymbol{\lambda}^T\mathbf{a}_{N_2}, \cdots,\ c_{N_{n-m}} - \boldsymbol{\lambda}^T\mathbf{a}_{N_{n-m}})$$

$$\mathbf{x}_N = (x_{N_1}, x_{N_2}, \cdots, x_{N_{n-m}})$$

$$\boxed{f(\mathbf{x}) = f(\hat{\mathbf{x}}) + (c_{N_1} - \boldsymbol{\lambda}^T\mathbf{a}_{N_1})x_{N_1} + (c_{N_2} - \boldsymbol{\lambda}^T\mathbf{a}_{N_2})x_{N_2} + \ldots + (c_{N_{n-m}} - \boldsymbol{\lambda}^T\mathbf{a}_{N_{n-m}})x_{N_{n-m}}}$$

Custos relativos

$$\boxed{f(\mathbf{x}) = f(\hat{\mathbf{x}}) + (c_{N_1} - \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{a}_{N_1}) x_{N_1} + (c_{N_2} - \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{a}_{N_2}) x_{N_2} + \ldots + (c_{N_{n-m}} - \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{a}_{N_{n-m}}) x_{N_{n-m}}}$$

Definição: Os coeficientes $\hat{c}_{N_j} = (c_{N_j} - \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{a}_{N_j})$ das variáveis não-básicas na função objetivo descrito acima são chamados custos relativos ou custos reduzidos.

$$\hat{c}_{N_j} = (c_{N_j} - \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{a}_{N_j}) \longrightarrow \boxed{f(\mathbf{x}) = f(\hat{\mathbf{x}}) + \hat{c}_{N_1} x_{N_1} + \hat{c}_{N_2} x_{N_2} + \ldots + \hat{c}_{N_{n-m}} x_{N_{n-m}}}$$

Exemplo (Arenales et al, 2.22)

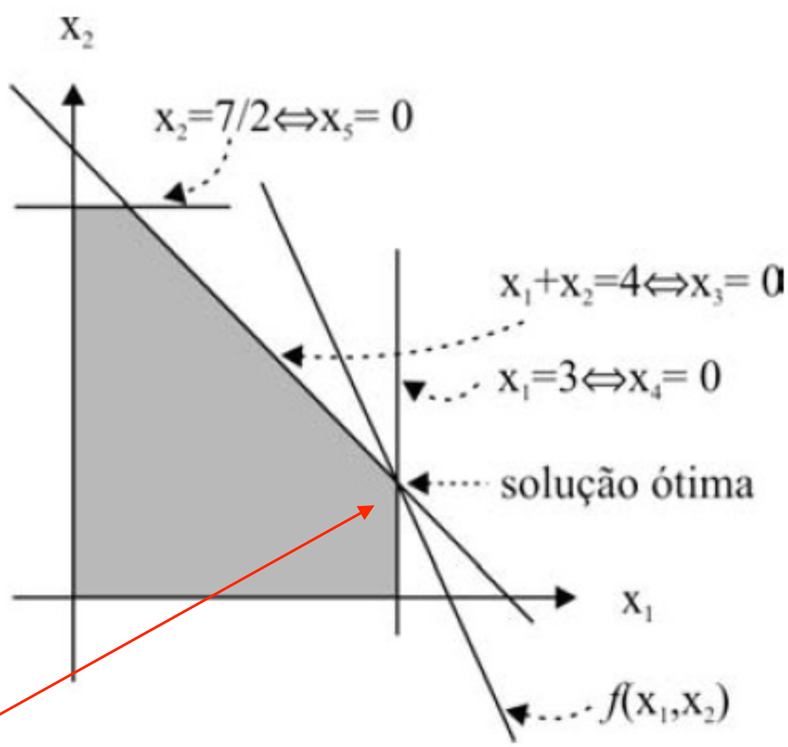
- Considere o problema:

$$\begin{aligned}
\text{Minimizar} \quad & f(x_1, x_2) = -2x_1 - x_2 \\
& x_1 + x_2 \leq 4 \\
& x_1 \leq 3 \\
& x_2 \leq \tfrac{7}{2} \\
& x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0
\end{aligned}$$

reescrito na forma padrão:

$$\begin{aligned}
\text{Minimizar} \quad & f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = -2x_1 - x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 \\
& x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\
& x_1 + x_4 = 3 \\
& x_2 + x_5 = \tfrac{7}{2} \\
& x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0,\ x_5 \geq 0.
\end{aligned}$$

• Resolução gráfica:



Intersecção das retas:
$x_1 + x_2 = 4$ e $x_1 = 3$

$$\longrightarrow$$

$$x_1^* = 3$$
$$x_2^* = 1$$
$$f(\mathbf{x}^*) = -7$$

- $x_1 + x_2 = 4$

(variável de folga associada: x_3)

- $x_1 = 3$

(variável de folga associada: x_4)

Logo, o vértice (solução básica) deve ser obtido com a partição:

$B = (1,2,5)$, $N = (3,4)$

- Atribuindo zero às variáveis não-básicas:

$x_3 = x_4 = 0$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 \quad &= 4 \\ x_1 \quad + x_4 \quad &= 3 \\ x_2 \quad + x_5 &= \tfrac{7}{2} \end{aligned} \longrightarrow \underbrace{\begin{aligned} x_1 + x_2 \quad &= 4 \\ x_1 \quad &= 3 \\ x_2 + x_5 &= 7/2 \end{aligned}}$$

$$x_1^* = 3,\ x_2^* = 1,\ x_5^* = \tfrac{5}{2}$$

$$(x_3^* = x_4^* = 0)$$

Todos positivos: solução básica factível.

- Vamos calcular os custos relativos:

$$B = \underbrace{(B_1,B_2,B_3)}_{\text{m variáveis básicas}} = (1,2,5)\ , \quad NB = \overbrace{(NB_1,NB_2)}^{\text{n-m variáveis não-básicas}} = (3,4)$$

$$\begin{cases}
\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{B_1} & \mathbf{a}_{B_2} & \mathbf{a}_{B_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\
\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{N_1} & \mathbf{a}_{N_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_3 & \mathbf{a}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
\mathbf{c}_\mathbf{B}^\mathrm{T} = \begin{pmatrix} c_{B_1} & c_{B_2} & c_{B_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\
\mathbf{c}_\mathbf{N}^\mathrm{T} = \begin{pmatrix} c_{N_1} & c_{N_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_3 & c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{cases}$$

Vamos calcular os custos relativos

$$\hat{c}_{N_j} = (c_{N_j} - \lambda^T \mathbf{a}_{N_j}) \longrightarrow \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}} = \mathbf{c}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}} \mathbf{B}^{-1} \longrightarrow \mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}} = \mathbf{c}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}} \mathbf{B}^{-1} = (-2 \quad -1 \quad 0) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = (-1 \; -1 \quad 0)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{B_1} & \mathbf{a}_{B_2} & \mathbf{a}_{B_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{N} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{N_1} & \mathbf{a}_{N_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_3 & \mathbf{a}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{c}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} c_{B_1} & c_{B_2} & c_{B_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\ \mathbf{c}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} c_{N_1} & c_{N_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_3 & c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

Vamos calcular os custos relativos

outra maneira de calcular λ^T

$$\lambda^T = c_B^T B^{-1} \Leftrightarrow \lambda = \left(B^{-1}\right)^T c_B \Leftrightarrow B^T \lambda = c_B$$

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 \quad &= -2 \\ \lambda_1 \quad + \lambda_3 &= -1 \\ \lambda_3 = 0 & \end{aligned} \longrightarrow \quad \lambda^T = (-1 \ -1 \ \ 0)$$

Vamos calcular os custos relativos

$$\hat{c}_{N_j} = (c_{N_j} - \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{a}_{N_j}) \qquad \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}} = (-1\ -1\ \ 0)$$

$$j = 1:\ \hat{c}_{N_1} = \hat{c}_3 = c_3 - \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}} \mathrm{a}_3 = 0 - (-1 \quad -1 \quad 0)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$$

$$j = 2:\ \hat{c}_{N_2} = \hat{c}_4 = c_4 - \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}} \mathrm{a}_4 = 0 - (-1 \quad -1 \quad 0)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$$

$$\boxed{f(\mathbf{x}) = f(\hat{\mathbf{x}}) + \hat{c}_{N_1} x_{N_1} + \hat{c}_{N_2} x_{N_2} + \ldots + \hat{c}_{N_{n-m}} x_{N_{n-m}}}$$

$$f(x) = -7 + 1x_3 + 1x_4$$

Condição de otimalidade

$$f(\mathbf{x}) = f(\hat{\mathbf{x}}) + (c_{N_1} - \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{a}_{N_1})x_{N_1} + (c_{N_2} - \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{a}_{N_2})x_{N_2} + \ldots + (c_{N_{n-m}} - \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{a}_{N_{n-m}})x_{N_{n-m}}$$

Propriedade 2.3 (*condição de otimalidade*) Considere uma partição básica $\mathbf{A} = [\mathbf{B}\ \mathbf{N}]$ em que a solução básica associada $\hat{\mathbf{x}}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$ (isto é, solução básica factível), e seja $\boldsymbol{\lambda}^T = \mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}$ o vetor multiplicador simplex. Se $(c_{N_j} - \boldsymbol{\lambda}^T\mathbf{a}_{N_j}) \geq 0$, $j = 1, \ldots, n-m$, (isto é, todos os custos relativos são não-negativos), então a solução básica é ótima.

Solução básica factível e custos relativos maiores que zero $\longrightarrow$ Solução ótima

problema de minimização

Resumo

- Já vimos:
  - Soluções básicas estão associadas a vértices (pontos extremos)
  - Se há uma solução ótima, então há um ponto extremo (solução básica) ótima.
  - Podemos definir os custos relativos de variáveis não básic $\hat{c}_{N_j} = (c_{N_j} - \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{a}_{N_j})$ $\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}} = \mathbf{c}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}} \mathbf{B}^{-1}$
  - Se, em um problema de minimização (maximização), para uma dada solução básica, todos os custos relativos são positivos (negativos), a solução é ótima.

Perguntas

- 1) A solução atual é ótima ?

  Respondida

- 2) Como encontrar uma solução básica factível melhor ?

•Resposta a pergunta 2: Próxima aula

Exemplo (Arenales et al, 2.22)

- Considere a partição básica para o problema abaixo escrito na forma padrão: B1=3, B2=4, B5=5, N1=1,N2=2 (é básica?) Verifique que a solução obtida não é ótima.

$$
\begin{aligned}
\text{Minimizar } f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = -2x_1 - x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 \\
x_1 + x_2 + x_3 \qquad\qquad &= 4 \\
x_1 \qquad + x_4 \qquad &= 3 \\
x_2 \qquad\quad + x_5 &= \tfrac{7}{2} \\
x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0,\ x_5 \geq 0.
\end{aligned}
$$