Pesquisa Operacional / Programação Matemática

Método Simplex:

Algoritmo e exemplo

Alysson M. Costa – ICMC/USP

Algoritmo simplex

- Até agora, supomos que temos uma partição básica factível já determinada. Em alguns casos, será necessário efetuar alguns procedimentos para obtê-la.

Fase I:

- Determine inicialmente uma partição básica factível $\mathbf{A} = [\mathbf{B},\mathbf{N}]$. A rigor, precisamos de dois vetores de índices básicos e não-básicos:

$$(B_1, B_2, \ldots, B_m) \text{ e } (N_1, N_2, \ldots, N_{n-m}).$$

  Os vetores das variáveis básicas e não-básicas são, respectivamente:

$$\mathbf{x}_\mathbf{B}^\mathrm{T} = \begin{pmatrix} x_{B_1} & x_{B_2} & \cdots & x_{B_m} \end{pmatrix} \text{ e } \mathbf{x}_N^\mathrm{T} = \begin{pmatrix} x_{N_1} & x_{N_2} & \cdots & x_{N_{n-m}} \end{pmatrix}.$$

  Faça iteração = 1.

Simplex - Fase II

Fase II:

{*início da iteração simplex*}

Passo 1: {*cálculo da solução básica*}

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{B}} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \ \ \text{(equivalentemente, resolva o sistema } \mathbf{B}\mathbf{x}_{\mathbf{B}} = \mathbf{b}\text{)} \\ \hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{N}} = \mathbf{0} \end{cases}$$

Passo 2: {*cálculo dos custos relativos*}

2.1) {*vetor multiplicador simplex*}

$$\boldsymbol{\lambda}^{\mathbf{T}} = \mathbf{c}_{\mathbf{B}}^{\mathbf{T}}\mathbf{B}^{-1} \quad \text{(equivalentemente, resolva o sistema } \mathbf{B}^{\mathbf{T}}\lambda = \mathbf{c}_{\mathbf{B}}\text{)}$$

2.2) {*custos relativos*}

$$\hat{c}_{N_j} = c_{N_j} - \boldsymbol{\lambda}^{\mathbf{T}}\mathbf{a}_{N_j} \qquad j = 1, 2, ..., n-m$$

2.3) {*determinação da variável a entrar na base*}

$$\hat{c}_{N_k} = \text{mínimo}\{\hat{c}_{N_j}, j = 1, ..., n-m\} \text{ (a variável } x_{N_k} \text{ entra na base)}$$

Simplex - Fase II

Passo 3: {*teste de otimalidade*}

Se $\hat{c}_{N_k} \geq 0$, então: *pare* {*solução na iteração atual é ótima*}

Passo 4: {*cálculo da direção simplex*}

$\mathbf{y} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_{N_k}$ (equivalentemente, resolva o sistema: $\mathbf{B}\mathbf{y} = \mathbf{a}_{N_k}$)

Passo 5: {*determinação do passo e variável a sair da base*}

Se $\mathbf{y} \leq \mathbf{0}$, então: *pare* {*problema não tem solução ótima finita:* $f(\mathbf{x}) \to -\infty$}

Caso contrário, determine a variável a sair da base pela razão mínima:

$$\hat{\varepsilon} = \frac{\hat{x}_{B_\ell}}{y_\ell} = \text{mínimo}\left\{\frac{\hat{x}_{B_i}}{y_i} \text{ tal que } y_i > 0,\ i = 1, \ldots, m\right\} \text{ (a variável } x_{B_\ell} \text{ sai da base)}$$

Simplex - fase II

Passo 6: {*atualização: nova partição básica, troque a* ℓ-ésima *coluna de* ***B*** *pela k*-ésima *coluna de* ***N***}*:*

matriz básica nova: $\mathbf{B} = [\mathbf{a}_{B_1} \cdots \mathbf{a}_{B_{\ell-1}}\ \mathbf{a}_{N_k}\ \mathbf{a}_{B_{\ell+1}} \cdots \mathbf{a}_{B_m}]$

matriz não-básica nova: $\mathbf{N} = [\mathbf{a}_{N_1} \cdots \mathbf{a}_{N_{k-1}}\ \mathbf{a}_{B_\ell}\ \mathbf{a}_{N_{k+1}} \cdots \mathbf{a}_{N_{n-m}}]$

iteração = iteração + 1

Retorne ao passo 1

{***fim da iteração simplex***}

Exemplo 2.26 Considere o seguinte problema de otimização linear:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & f(x_1, x_2) = -x_1 - 2x_2 \\ & x_1 + x_2 \le 6 \\ & x_1 - x_2 \le 4 \\ & -x_1 + x_2 \le 4 \\ & x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{aligned}$$

Introduzindo variáveis de folga, temos:

Tabela 2.13
Dados do problema.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	**b**
	1	1	1	0	0	6
A	1	–1	0	1	0	4
	–1	1	0	0	1	4
Min f	–1	–2	0	0	0	

Fase I:

$$(B_1, B_2, B_3) = (3, 4, 5), \qquad (N_1, N_2) = (1, 2),$$

Fácil, pois os coeficientes das variáveis de folga formam uma matriz identidade.

Tabela 2.14
Dados conforme partição na iteração 1.

	Índices					
	básicos			*não-básicos*		
	$B_1=3$	$B_2=4$	$B_3=5$	$N_1=1$	$N_2=2$	**b**
[**B** | **N**]	1	0	0	1	1	6
	0	1	0	1	–1	4
	0	0	1	–1	1	4
[$\mathbf{c}_B$ | $\mathbf{c}_N$]	0	0	0	–1	–2	$f = 0$

Passo 1:

$\{cálculo\ da\ solução\ básica\} = \mathbf{x_B} = (x_3, x_4, x_5)$

$$\text{Resolva o sistema } \mathbf{Bx_B} = \mathbf{b} \text{ e obtenha } \hat{\mathbf{x}}_\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Passo 2: {*Cálculo dos custos relativos*}

2.1) {*vetor multiplicador simplex*}: $(\mathbf{c_B} = (c_{B_1}, c_{B_2}, c_{B_3}) = (c_3, c_4, c_5) = (0, 0, 0))$.

A solução do sistema $\mathbf{B}^T\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{c_B}$ é $\boldsymbol{\lambda}^T = (0, 0, 0)$.

2.2) {*custos relativos*}: $(N_1 = 1, N_2 = 2)$

$$\hat{c}_1 = c_1 - \boldsymbol{\lambda}^T\mathbf{a}_1 = -1 - (0 \quad 0 \quad 0)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -1,$$

$$\hat{c}_2 = c_2 - \boldsymbol{\lambda}^T\mathbf{a}_2 = -2 - (0 \quad 0 \quad 0)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -2 \leftarrow k = 2. \text{ (a variável } x_{N_2} = x_2 \text{ entra na base)}$$

2.3) {determinação da variável a entra na base}
Como $\hat{c}_2 = \hat{c}_{N_2} = mínimo\{\hat{c}_{N_j},\ j = 1, 2\} = -2 < 0$, então a variável x_2 entra na base.

Passo 3: {teste de otimalidade}

Os custos relativos mostram a função objetivo em termos das variáveis não-básicas: $f(\mathbf{x}) = 0 - 1x_1 - 2x_2$. Como há custos relativos negativos, a solução atual não é ótima.

Passo 4: {cálculo da direção simplex}

Resolva o sistema $\mathbf{By} = \mathbf{a}_2$ e obtenha $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Passo 5: {determinação do passo e variável a sair da base}

$$\hat{\varepsilon} = mínimo\left\{\frac{\hat{x}_{B_1}}{y_1}, \frac{\hat{x}_{B_3}}{y_3}\right\} = mínimo\left\{\frac{6}{1}, \frac{4}{1}\right\} = 4 = \frac{\hat{x}_{B_3}}{y_3}.$$ (a variável $x_{B_3} = x_5$ sai da base)

Passo 6: {atualização: nova partição básica, troque a ℓ-ésima coluna de **B** *pela k-ésima coluna de* **N**}:

$(B_1, B_2, B_3) = (3, 4, 2) \qquad (N_1, N_2) = (1, 5),$

Tabela 2.15
Dados conforme partição na iteração 2.

	Índices					
	básicos			*não-básicos*		
	$B_1=3$	$B_2=4$	$B_3=2$	$N_1=1$	$N_2=5$	$\boldsymbol{b}$
$[\boldsymbol{B} \mid \boldsymbol{N}]$	1	0	1	1	0	6
	0	1	–1	1	0	4
	0	0	1	–1	1	4
$[\boldsymbol{c}_B \mid \boldsymbol{c}_N]$	0	0	–2	–1	0	$f = -8$

Exercício: continue até obter a solução ótima