Algoritmos e Estruturas de Dados II

Prof. Ricardo J. G. B. Campello

Árvores B – Parte III

Eliminação, Redistribuição & Concatenação

Adaptado e Estendido dos Originais de:

Leandro C. Cintra
Maria Cristina F. de Oliveira

Definição

- A **ordem** de uma árvore B é dada pelo número máximo de descendentes que uma página/nó, pode possuir
- Em uma árvore B de ordem **m**, o número máximo de chaves em uma página é **m – 1**
- **Exemplo:**
  - Uma árvore B de ordem 8 tem, no máximo, 8 descendentes e 7 chaves por página

2

Propriedade (No. Mín. de Chaves)

- Quando uma página é sub-dividida na inserção, as chaves são distribuídas "igualmente" entre as páginas resultantes:
  - Deste modo, o número mínimo de chaves em uma página/nó é dado por $\lceil m/2 \rceil - 1$ (exceto para a raiz)
- **Exemplos:**
  - árvore B de ordem 8: armazena no máximo 7 chaves por página e no mínimo 3 chaves por página
  - árvore B de ordem 7: armazena no máximo 6 chaves por página e no mínimo 3 chaves por página

3

Propriedades Gerais

- Para uma árvore B de ordem **m**:
  - Cada página tem:
    - no máximo, **m** descendentes
    - no mínimo $\lceil \mathbf{m/2} \rceil$ descendentes (exceto a raiz e as folhas)
  - A raiz tem, no mínimo, dois descendentes
    - a menos que seja uma folha
  - Todas as folhas estão no mesmo nível
  - Uma página não folha com **k** descendentes contém **k – 1** chaves
  - Uma página contém no mínimo $\lceil \mathbf{m/2} \rceil - \mathbf{1}$ chaves (exceto a raiz) e, no máximo, **m – 1** chaves

4

Altura de Pior Caso

- Qual a altura máxima que uma árvore com **N** chaves e ordem **m** pode atingir?
- Pior caso ocorre quando cada página tem apenas o número mínimo de descendentes, e a árvore possui, portanto, altura máxima e largura mínima

5

Altura de Pior Caso

- O número mínimo de descendentes para a raiz é 2
- Cada uma das 2 páginas descendentes da raiz possui no mínimo $\lceil \mathbf{m/2} \rceil$ descendentes
  - Logo, o 2º nível possui no mínimo $2 * \lceil \mathbf{m/2} \rceil$ descendentes
- Cada uma das $2 * \lceil \mathbf{m/2} \rceil$ páginas descendentes do 2º nível possui no mínimo $\lceil \mathbf{m/2} \rceil$ descendentes
  - Logo, o 3º nível possui no mínimo $2 * \lceil \mathbf{m/2} \rceil^2$ descendentes
- Em geral, para um nível **d** da árvore, o número mínimo de descendentes é dado por $\mathbf{2 * \lceil m/2 \rceil^{(d-1)}}$

6

Altura de Pior Caso

- Por outro lado, pode-se provar que uma árvore com **N** chaves tem **N + 1** potenciais descendentes a partir de seu nível mais profundo (nível das folhas)

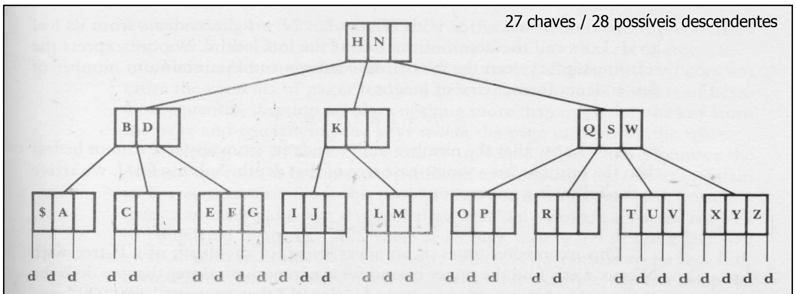


FIGURE 8.28 A B-tree with N keys can have $(N + 1)$ descendents from the leaf level.

7

Altura de Pior Caso

- Em Resumo:
  - Altura de pior caso ocorre quando cada página tem apenas o no. mínimo de descendentes
  - O no. mínimo de descendentes para um nível **d** da árvore de ordem **m** é dado por $\mathbf{2 * \lceil m/2 \rceil^{(d-1)}}$
  - Uma árvore com **N** chaves tem **N + 1** potenciais descendentes a partir de seu nível mais profundo
  - Qual o nível mais profundo **d** de pior caso para uma árvore B com **N** chaves e ordem **m** ?

8

Altura de Pior Caso

- Qual o nível mais profundo **d** de pior caso para uma árvore B com **N** chaves e ordem **m** ?
  - O no. de descendentes que existiriam abaixo do nível **d** mais profundo (nível das folhas) se a árvore possuísse mais um nível é **N + 1**, já que a árvore comporta **N** chaves
  - Mas, no pior caso, sabemos que o no. de descendentes em um dado nível **d** da árvore é $\mathbf{2 * \lceil m/2 \rceil^{(d-1)}}$
  - Logo, no pior caso, tem-se $\mathbf{2 * \lceil m/2 \rceil^{(d-1)}} = \mathbf{N} + 1$ para o nível **d** mais profundo, o que resulta $\mathbf{d} = 1 + \log_{\lceil \mathbf{m}/2 \rceil} [(\mathbf{N}+1)/2]$
  - No caso geral: $\boxed{\mathbf{d} \leq 1 + \log_{\lceil \mathbf{m}/2 \rceil} [(\mathbf{N}+1)/2]}$

9

Altura de Pior Caso

- Exemplo (**m** = 512 e **N** = 1.000.000):
  - $\mathbf{d} \leq 1 + \log_{256} (500.000{,}5) = 3{,}37$
  - Logo, a árvore terá no máximo 3 níveis
  - No pior caso 3 acessos serão necessários para localizar uma chave dentre 1.000.000

10

Eliminação de Chaves

- O ***split*** garante a manutenção das propriedades da árvore B durante a inserção
- Essas propriedades precisam ser mantidas, também, durante a eliminação de chaves

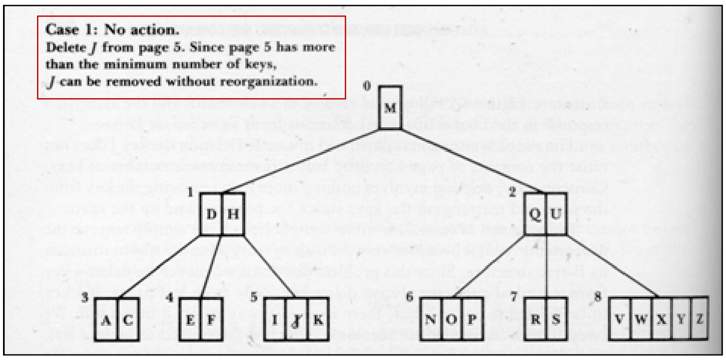
11

Eliminação: Caso 1

- **Caso 1:** eliminação de uma chave em uma página folha, sendo que o número mínimo de chaves na página é respeitado
- **Solução:** chave é retirada e os registros internos à página são reorganizados

12

Eliminação: Caso 1



Remover J (árvore com **m** = 6)

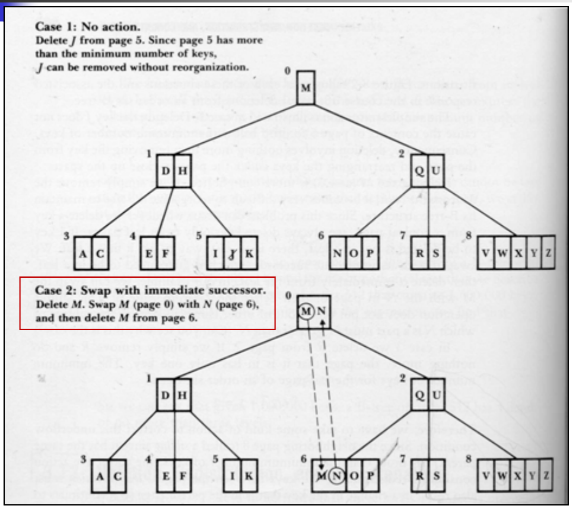
13

Eliminação: Caso 2

- **Caso 2:** eliminação de uma chave que não está em um nó folha
- **Solução:** sempre eliminamos de páginas folha
  - para tanto, troca-se a chave com sua sucessora imediata (ou predecessora imediata), que está numa folha. A seguir, elimina-se a chave da folha (Caso 1)
    - sucessora imediata: 1ª chave da folha descendente mais à esquerda da página/nó descendente direito
    - predecessora imediata: ... ?

14

Eliminação: Caso 2



Remover M

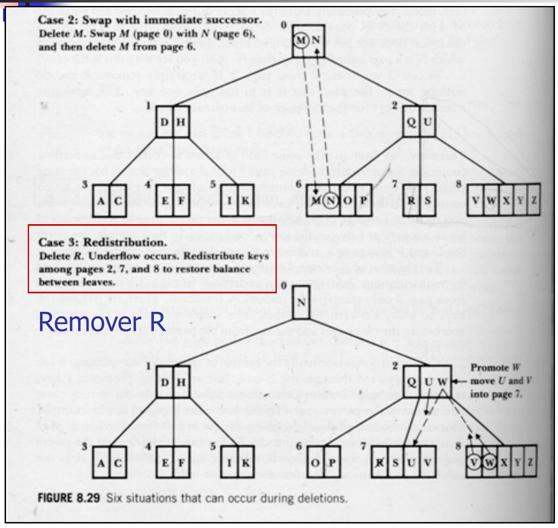
15

Eliminação: Caso 3

- **Caso 3:** eliminação causa *underflow* na página
  - no. mín. de $\lceil \mathbf{m/2} \rceil - \mathbf{1}$ chaves em pág. não raiz violado
- **Solução: Redistribuição**
  - procura-se uma página irmã direta (mesmo nó pai e chave separadora comum) que contenha mais chaves do que o mínimo:
    - se existir, redistribui-se as chaves entre essas páginas
    - senão, vide Caso 4...

16

Eliminação: Caso 3



Notas:

1. Redistribuição pode provocar uma alteração na chave separadora, que está no nó pai, mas não se propaga !
2. Redistribuição só pode ser aplicada para solução de underflows em páginas folha

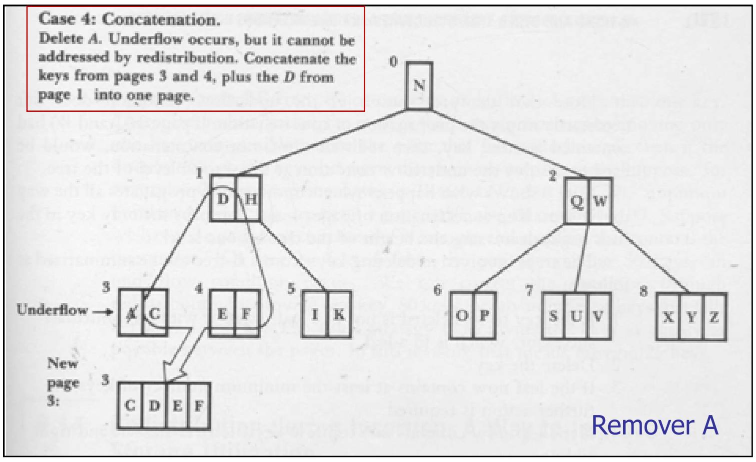
17

Eliminação: Caso 4

- **Caso 4:**
  - ocorre underflow e redistribuição não pode ser aplicada
    - implicaria underflow em qualquer das páginas irmãs diretas
- **Solução: Concatenação**
  - combina-se o conteúdo da página com o de uma irmã direta e adiciona-se a chave separadora da página pai para formar uma única página
  - concatenação é o inverso do processo de split
    - rebaixamento de chave da página pai ao invés de promoção
    - como conseqüência, pode ocorrer underflow da página pai

18

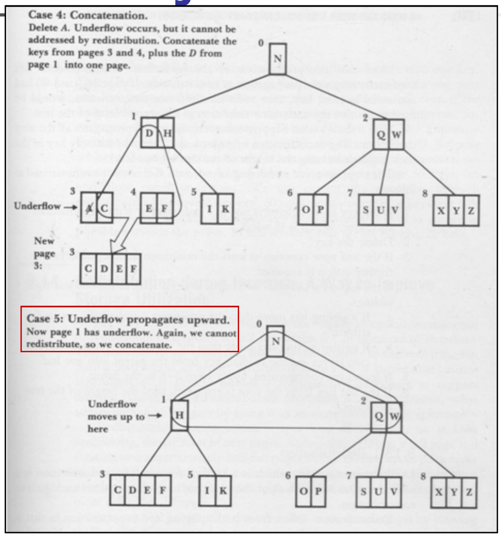
Eliminação: Caso 4



Eliminação: Caso 5

- **Caso 5:** underflow da página pai
- **Solução:**
  - utiliza-se concatenação novamente

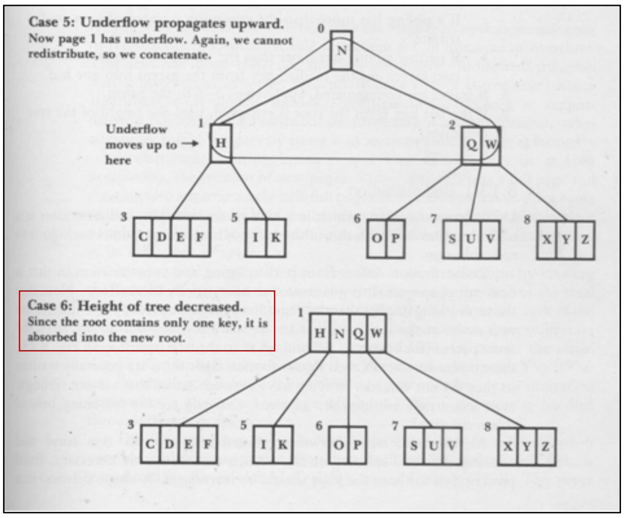
Eliminação: Caso 5



Eliminação: Caso 6

- **Caso 6:** diminuição da altura da árvore
  - ocorre quando o nó raiz tem uma única chave e aplica-se a concatenação nos seus nós filhos

Eliminação: Caso 6



23

Eliminação (Resumo)

1. Se a chave não estiver numa folha, troque-a com sua sucessora

2. Elimine a chave da folha

3. Se a página continuar com o número mínimo de chaves, **FIM**

4. Senão (underflow):

  4.1. Se uma das páginas irmãs diretas (à esquerda ou direita) tiver mais que o número mínimo de chaves, aplique redistribuição e **FIM**

  4.2. Senão:

   4.2.1. Concatene a pág. com uma das irmãs e a chave separadora do nó pai

   4.2.2. Se nó pai for raiz e sua última chave foi rebaixada, elimine a raiz e **FIM**

   4.2.3. Senão, se nó pai continuar com o número mínimo de chaves, **FIM**

   4.2.4. Senão (underflow no pai), volte ao passo 4.2.1 para o nó pai

24

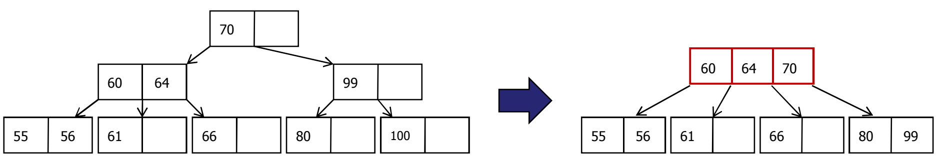
Eliminação (Nota 1)

- Embora esta hipótese não esteja contemplada no algoritmo de eliminação anterior, a operação de concatenação pode não apenas causar um underflow na página pai, mas pode também causar um overflow na própria página concatenada
- Basta que a página irmã já contenha m – 1 chaves
- Exemplo:
  - Árvore com **m** = 3 e chaves 55, 60, 61, 56, 70, 80, 64, 99, 100 e 66 inseridas nesta ordem
  - Remover chave 100...

25

Eliminação (Nota 1 – cont.)

- Exemplo (**m** = 3 e chaves 55, 60, 61, 56, 70, 80, 64, 99, 100 e 66)
  - Remover chave <u>100</u>:
    - rebaixamento de 99 causa **underflow**
    - rebaixamento de 70 para corrigir underflow (concatenação) causa **overflow** !



  - Solução com split (no quadro...) !

26

Eliminação (Nota 2)

- Na **redistribuição**, não existe regra obrigatória:
  - Estritamente, é necessário mover apenas 1 chave para a página com underflow para restabelecer as propriedades da árvore-B
  - Estratégia usual, no entanto, é redistribuir as chaves de forma equilibrada entre as páginas:
    - “Balanceamento” dos espaços disponíveis

27

Desempenho de Árvores B

- Qual a complexidade computacional de pior caso para as operações de busca, inserção e remoção de chaves?
  - Sabemos que, no pior caso, a altura da árvore é dada pelo maior inteiro **d** tal que: $\mathbf{d} \leq 1 + \log_{\lceil \mathbf{m}/2 \rceil} [(\mathbf{N}+1)/2]$
  - Ou seja, a altura é $O(\log_{\lceil m/2 \rceil} N)$
  - Logo, no pior caso, uma **busca** requer $O(\log_{\lceil m/2 \rceil} N)$ acessos

28

Desempenho de Árvores B

- Qual a complexidade computacional de pior caso para as operações de busca, inserção e remoção de chaves?
  - Toda inserção demanda uma busca ($O(\log_{\lceil m/2 \rceil} N)$ acessos)
  - Além disso, pode demandar operações de split
    - Cada split opera sobre um número fixo de páginas
      - Logo, cada split demanda $O(1)$ acessos
    - No pior caso, overflows se propagarão até a raiz
      - Nesse caso, teremos $O(\log_{\lceil m/2 \rceil} N)$ splits com $O(1)$ acessos cada
  - Logo, no pior caso, uma **inserção** requer $O(\log_{\lceil m/2 \rceil} N)$ acessos

29

Desempenho de Árvores B

- Qual a complexidade computacional de pior caso para as operações de busca, inserção e remoção de chaves?
  - Toda remoção demanda uma busca ($O(\log_{\lceil m/2 \rceil} N)$ acessos)
  - Além disso, pode demandar operações de concatenação
    - Cada concatenação opera sobre um número fixo de páginas
      - Logo, cada concatenação demanda $O(1)$ acessos
    - No pior caso, underflows se propagarão até a raiz
      - Nesse caso, teremos $O(\log_{\lceil m/2 \rceil} N)$ concatenações com $O(1)$ acessos cada
  - Logo, no pior caso, uma **remoção** requer $O(\log_{\lceil m/2 \rceil} N)$ acessos

30

Exercícios

- Capítulo 9 (Folk & Zoellick, 1987)
- Lista de Exercícios (CoTeia)
  - **Nota.** A lista faz referências à 2ª edição do livro de Folk & Zoellic.
    - FOLK, M. & ZOELLICK, B., *File Structures*, 2nd Edition, Addison-Wesley, 1992.

31

Bibliografia

- **M. J. Folk and B. Zoellick, *File Structures: A Conceptual Toolkit*, Addison Wesley, 1987.**

32