Pesquisa Operacional / Programação Matemática

Otimização discreta

Branch-and-bound

Alysson M. Costa – ICMC/USP

Como resolver PIMs ?

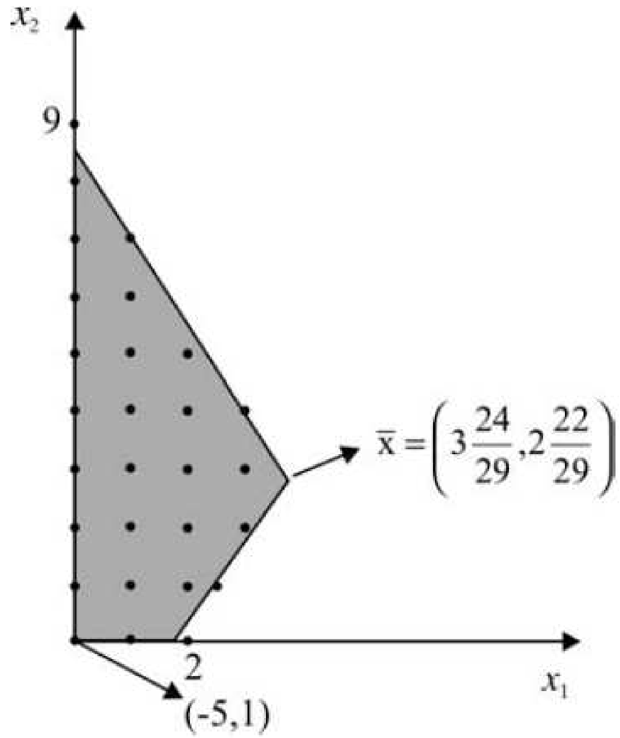
- Antes: todas as variáveis reais.
  - Simplex

Agora:

$$
\begin{aligned}
z = \max\ & \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} + \mathbf{d}^{\mathrm{T}}\mathbf{y} \\
& \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{y} \leq \mathbf{b} \\
& \mathbf{x} \in R_{+}^{n}, \mathbf{y} \in Z_{+}^{p}
\end{aligned}
$$

problema:

$$
\begin{aligned}
z = \max\ & 5x_1 - x_2 \\
& 7x_1 - 5x_2 \le 13 \\
& 3x_1 + 2x_2 \le 17 \\
& x \in Z_+^2
\end{aligned}
$$



- Apesar de não representar perfeitamente o problema original, a relaxação terá um papel fundamental nos métodos.

$$(P) \qquad z = \max\left\{\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} : \mathbf{A}\mathbf{x} \le \mathbf{b}, \mathbf{x} \in Z_+^n\right\}$$

$$(PL) \qquad \bar{z} = \max\left\{\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} : \mathbf{A}\mathbf{x} \le \mathbf{b}, \mathbf{x} \in R_+^n\right\}$$

Lembrete: $\bar{z} \ge z.$ (caso de maximização)

Definições:

Definição 3.1 Um subconjunto de R^n descrito por restrições lineares $P = \{\mathbf{x} \in R^n : \mathbf{Ax} \le \mathbf{b}\}$ é um poliedro.

Definição 3.2 Um poliedro $P \subset R^{n+p}$ é uma formulação para um conjunto $X \subset Z^n \times R^p$ se e somente se $X = P \cap (Z^n \times R^p)$.

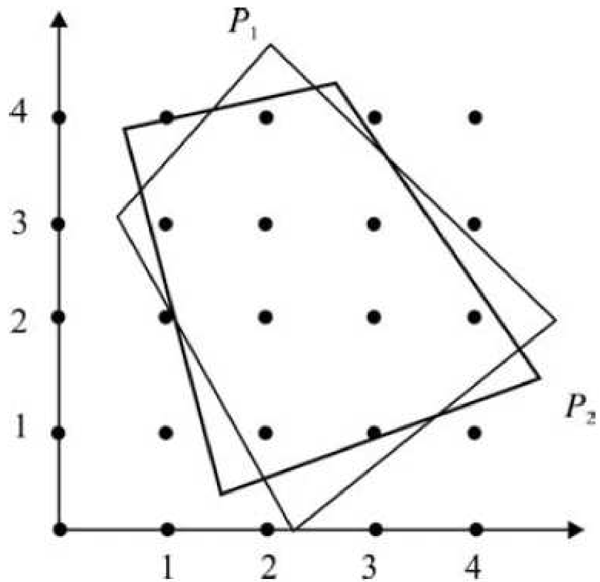


Figura 3.30 Duas formulações distintas para um problema de programação inteira.

Qual a "melhor" formulação ?

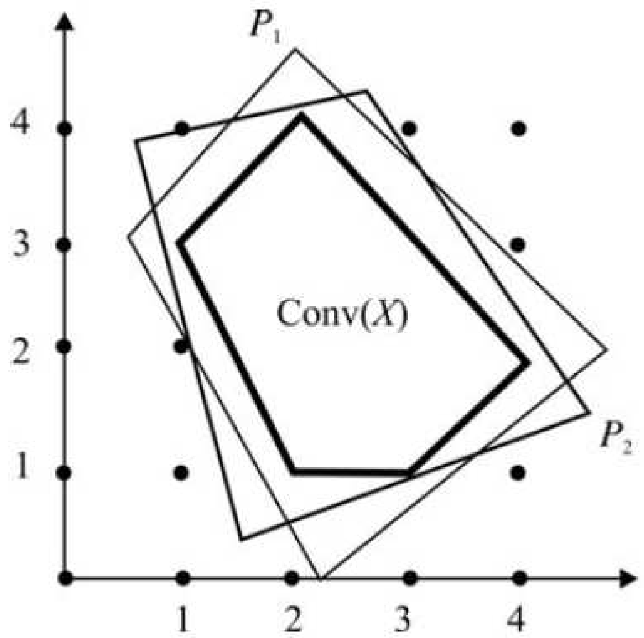
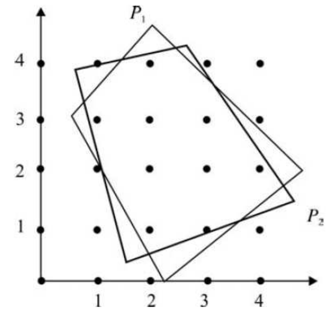


Figura 3.31 Envoltória convexa do conjunto X.



- por que melhor ?
- O que acontece se resolvermos o problema linear, neste caso ?

- Problema:
  - É difícil obter a envoltória convexa.

Enumeração

- idéia "inocente" inicial:

  listar todos os pontos possíveis.

- Contra exemplo clássico:

  Caixeiro viajante: n! soluções possíveis.

Enumeração implícita

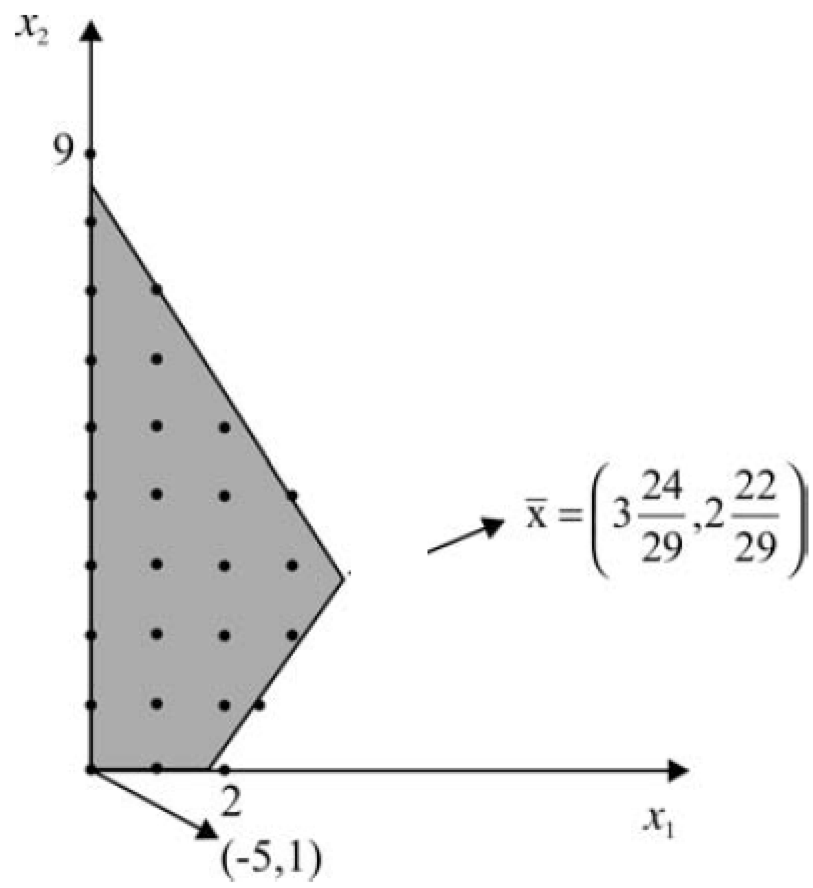
- Idéia: investigar apenas soluções *promissoras.*

- Como encontrar soluções promissoras ? Como saber onde investigar ?

Exemplo

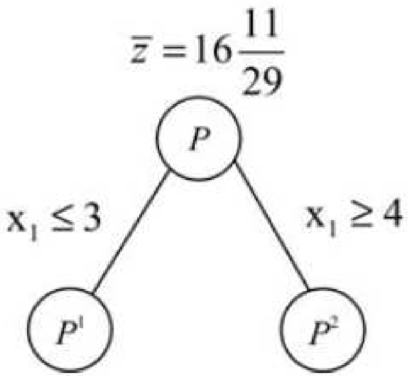
$$z = \max 5x_1 - x_2$$
$$7x_1 - 5x_2 \leq 13$$
$$3x_1 + 2x_2 \leq 17$$
$$x \in Z_+^2$$

$$\bar{z} = 16\frac{11}{29},$$



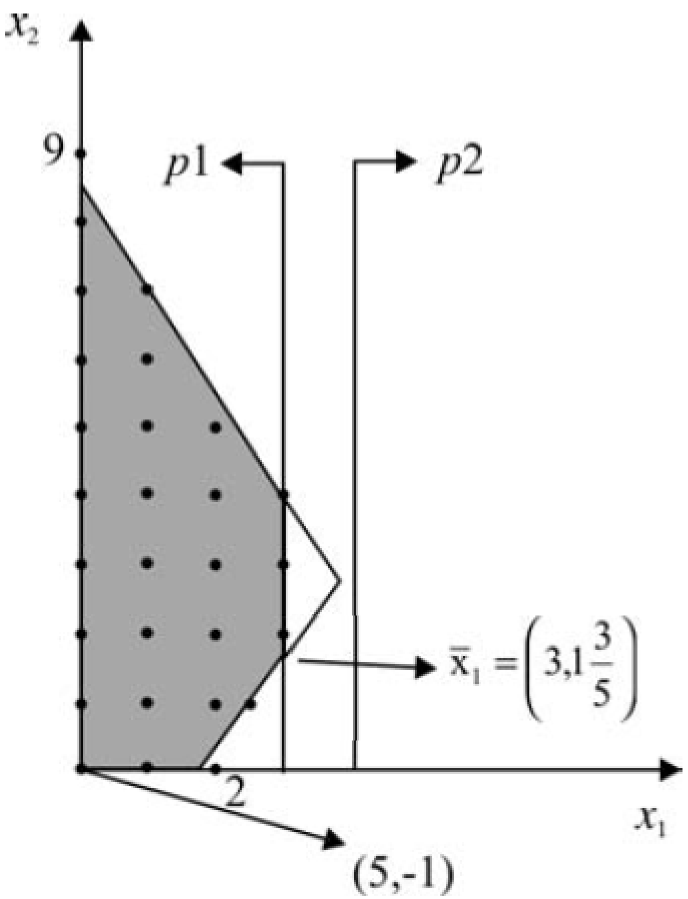
Na solução do problema original:
ou $x_1 \leq 3$ ou $x_1 \geq 4$

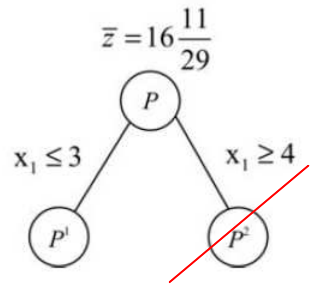
Vamos **dividir para conquistar!**



- A solução ótima está ou em P^1 ou em P^2. Investigamos (*a priori*) os dois.
- Nomenclatura:
  - a variável x_1 foi "ramificada"
  - os nós P^1 e P^2 são nós filhos de P.

- Nova situação:





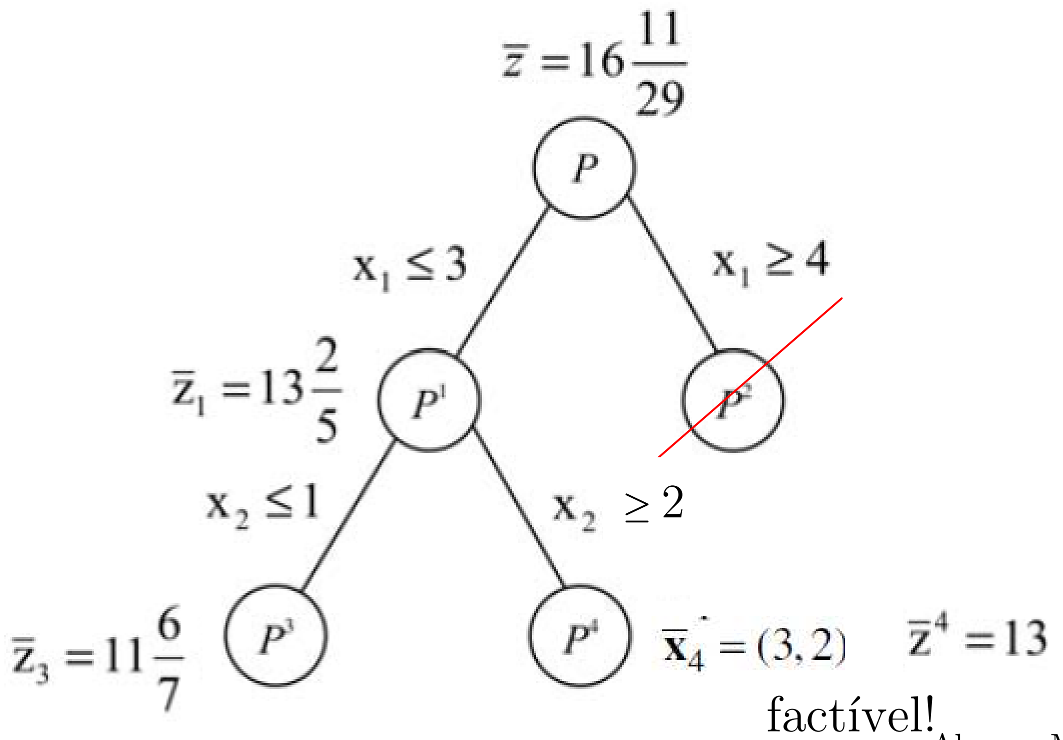
P^2 é vazio.
Vamos investigar P^1

$$\bar{z}^1 = 13\frac{2}{5}$$

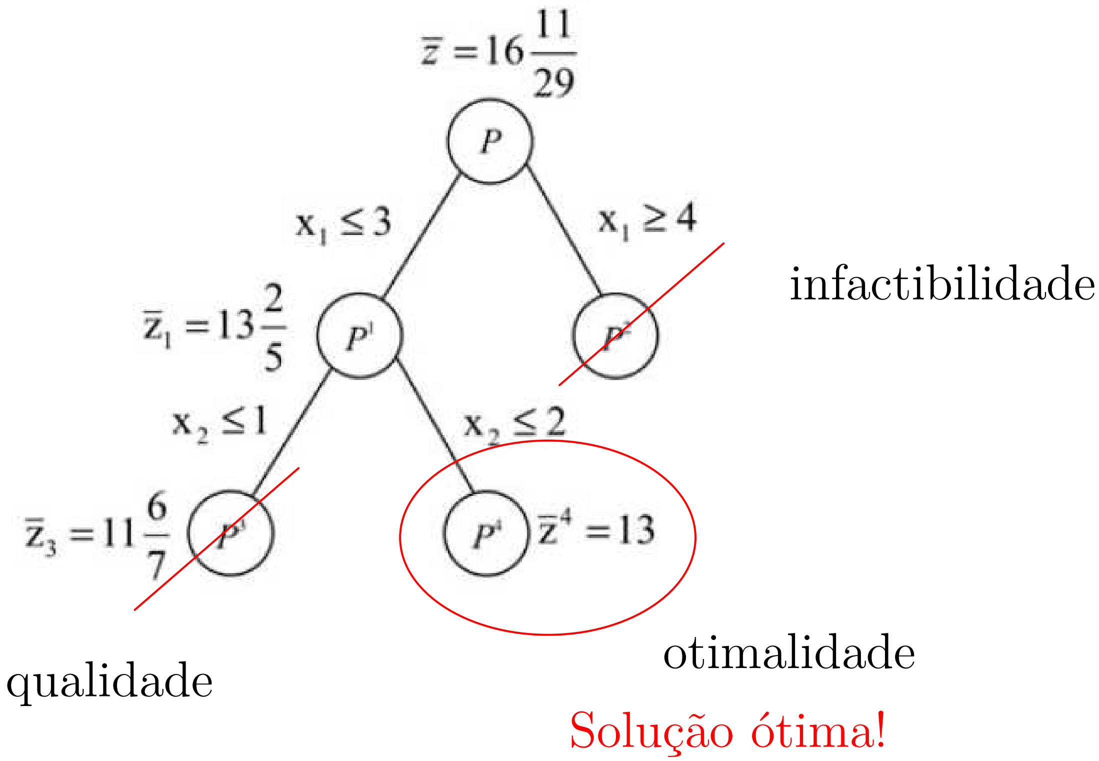
Continuação

- Repetimos o procedimento para P^1

$$\bar{x}_1 = \left(3, 1\frac{3}{5}\right)$$



Final da árvore

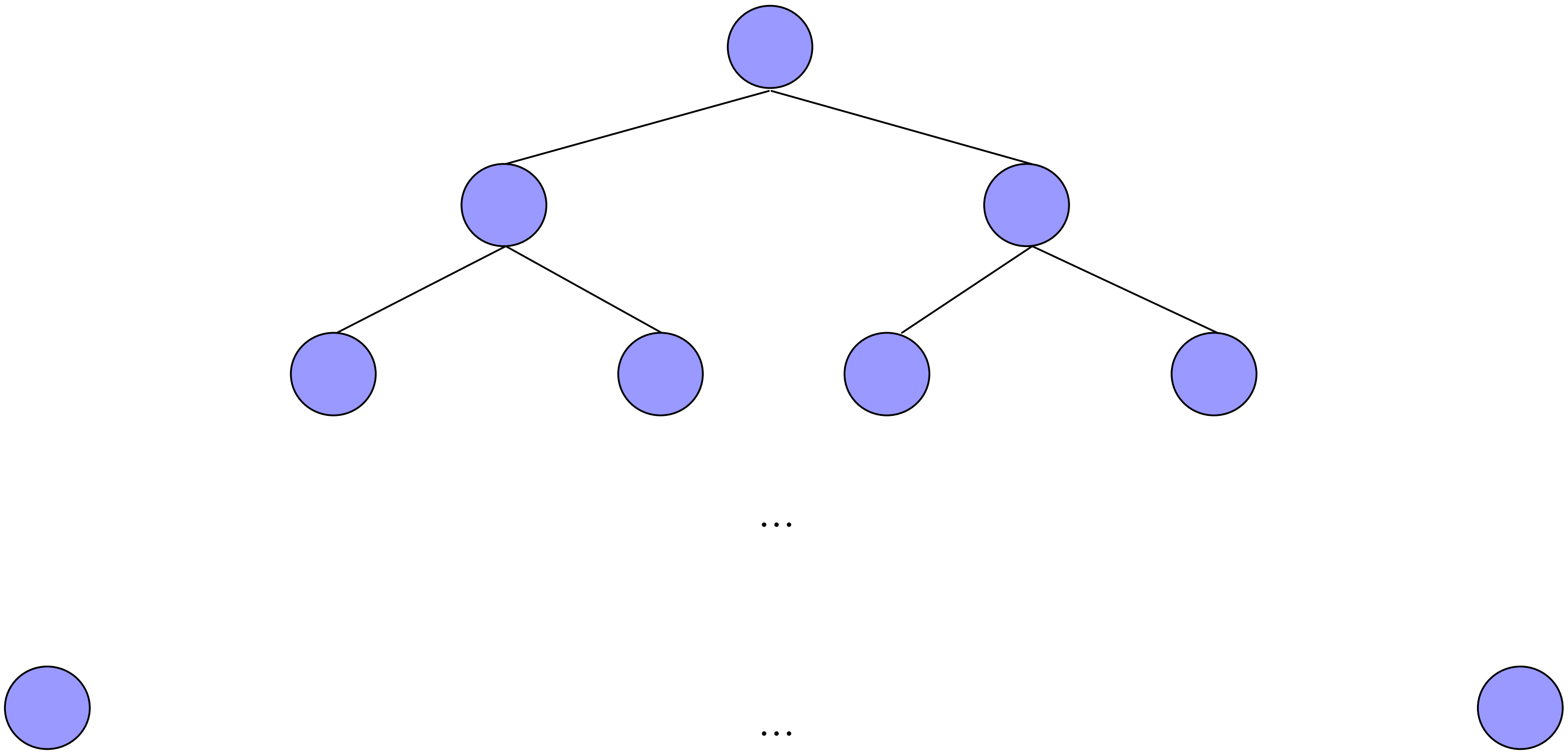


Resumo

- Tentamos resolver um problema inteiro-misto como um problema linear.
- Se conseguimos uma solução inteira, ela é a solução ótima.
- Caso contrário:
  - Ramificamos e resolvemos os nós filhos. (Observe que não há perda de qualidade - pois na ramificação, nenhuma solução inteira é perdida).

No pior caso

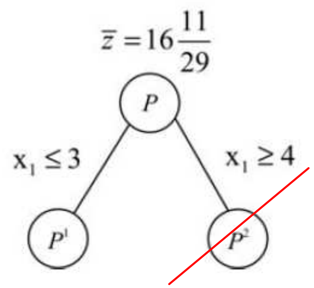
- teríamos que ramificar até as folhas da árvore...



Resumo

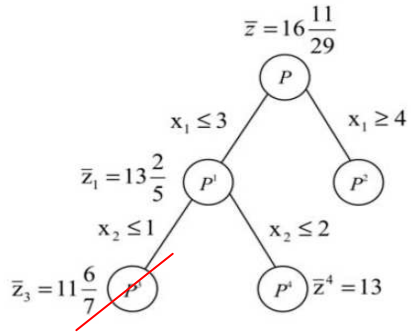
- Para tentar evitar a resolução de todos os nós (o que seria enumeração explícita), fazemos os seguintes testes:
  - infactibilidade;
  - qualidade;
  - otimalidade;

- Infactibilidade:



Não há solução para o problema relaxado, logo não há solução para o problema misto.

(consequentemente, não há o que explorar naquele nó, que pode ser cortado).

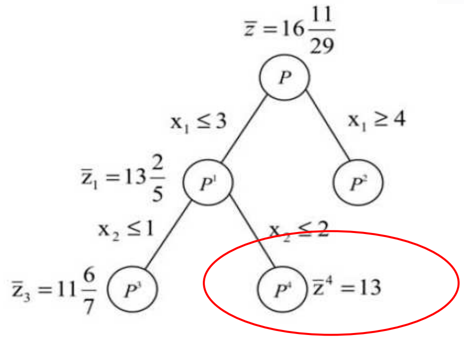


- Qualidade

A melhor solução naquele nó tem, no máximo, valor $\underline{z}$. Mas uma outra solução z inteira de melhor valor, já foi encontrada anteriormente.

(Consequentemente, não vale a pena explorar aquele nó e ele pode ser cortado)

- Otimalidade



A solução do PL no nó é factível para o problema original.

(Consequentemente, não há o que ramificar e a exploração daquele nó pode ser encerrada)

Algoritmo de B&B (max)

Passo 0 (Inicialização). Faça $\overline{z} = \infty$, $z^* = -\infty$, $\mathbf{x}^* = \varnothing$, $L = \{P\}$.

Passo 1 (Seleção de nó). Selecione o nó ativo i, associado ao problema P^i, da lista de nós ativos. Se a lista estiver vazia, vá para o *Passo 6*.

Passo 2 (Teste de eliminação 1). Se a região factível de PL^i for vazia, vá para o Passo 1.

Passo 3 (Teste de eliminação 2). Se o valor $\overline{z}^i$ da solução ótima de PL^i é tal que $\overline{z}^i \leq z^*$, vá para o *Passo 1*.

Passo 4 (Teste de eliminação 3). Se a solução ótima $\overline{\mathbf{x}}_i$ de PL^i é inteira com valor $\overline{z}^i$, e se $\overline{z}^i > z^*$, atualize $\mathbf{x}^*$ e z^*. Elimine nós ativos i da lista L, tais que $\overline{z}^i \leq z^*$, e volte para o *Passo 1*.

Passo 5 (Ramificação). Selecione uma variável da solução ótima $\overline{\mathbf{x}}_i$ de PL^i com valor não inteiro e divida P^i em dois problemas. Adicione estes problemas à lista L e vá para o *Passo 1*.

Passo 6 (Fim). Se $z^* = -\infty$, não existe solução factível; caso contrário, a solução incumbente $\mathbf{x}^*$ é uma solução ótima.

Outro exemplo[1]

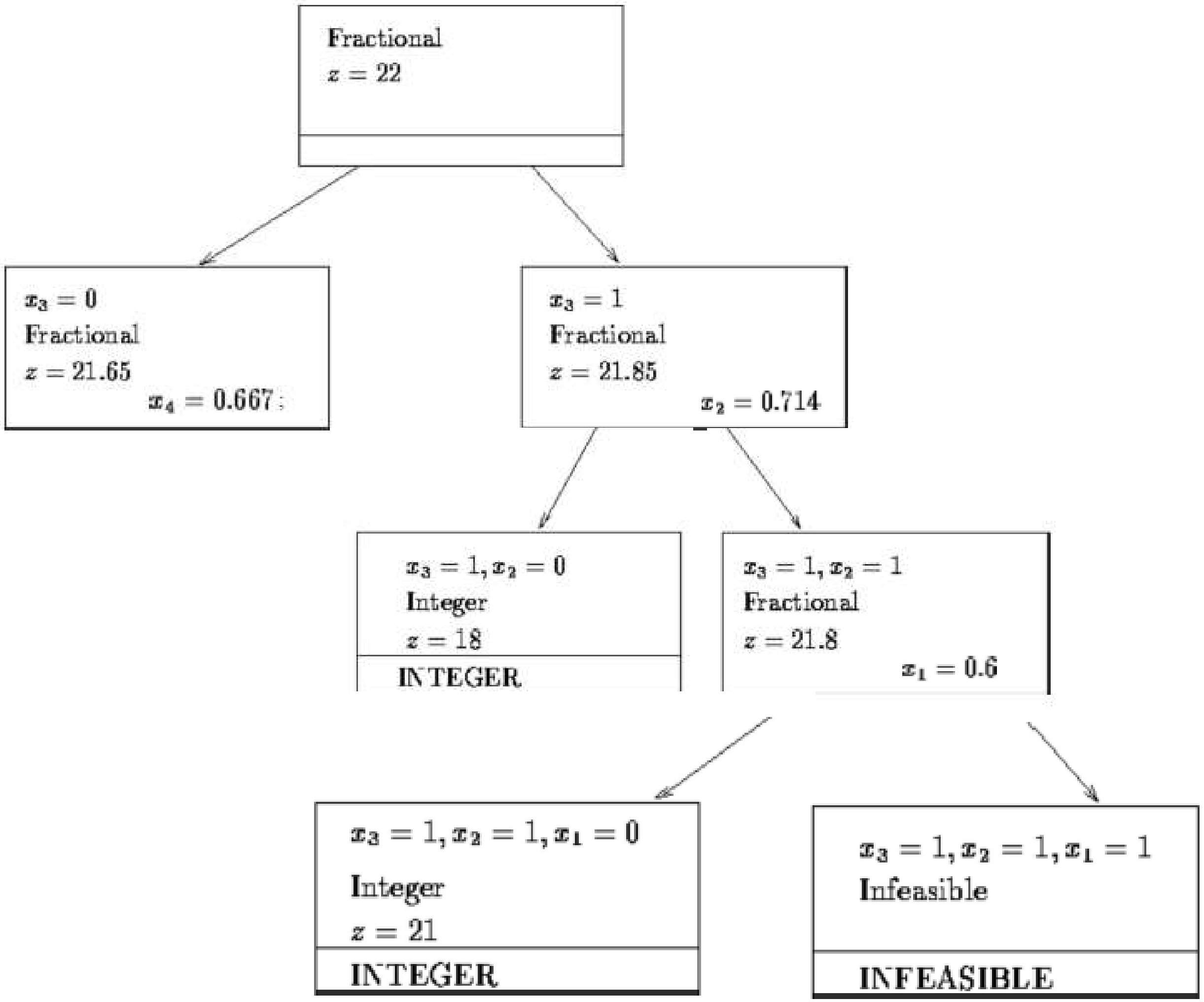
$$\begin{array}{ll} \text{Maximize} & 8x_1 + 11x_2 + 6x_3 + 4x_4 \\ \text{subject to} & 5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 3x_4 \leq 14 \\ & x_j \in \{0,1\}\ j = 1, \ldots 4. \end{array}$$

Fractional

$z = 22$

$x_3 = 0.5$

1 - retirado de http://mat.gsia.cmu.edu/orclass/integer/node13.html



Nesse ponto já podemos parar (por que ?)

Exemplo

Cplex http://www.ilog.com/products/cplex/

modelHeskia1.lp =

4 trabalhadores, 28 tarefas

modelTonge80.lp =

19 trabalhadores, 75 tarefas