LABIC

Redes Neurais Auto-organizáveis
Modelo de Hopfield

Profa. Roseli Ap. Francelin Romero

LABIC

Modelo de Hopfield (1982)

- O problema de Memória Associativa

"Armazene um conj. de p padrões x_i^{λ} de tal forma que quando uma nova entrada x_i é apresentada, a rede responde produzindo um dos padrões que melhor se parecem com x_i".

Vamos supor que os padrões são nomeados por λ = 1,2,...,p enquanto que os nós na rede são nomeados por i=1,2,...,N.

Ambos os padrões x_i^{λ} e são constituídos de valores 0 e 1.

LABIC

Modelo de Hopfield

- É claro que este probl. pode ser implementado num computador serial, simplesmente armazenando uma lista de padrões x_i^{λ}, escrevendo um programa que calcule a distância de Hamming entre o padrão teste x_i e cada dos padrões armazenados, encontrando qual deles possui a menor dist. de Hamming x_i e imprimindo o correspondente padrão armazenado.

LABIC

Modelo de Hopfield

- Objetivo: Mostrar como uma rede constituída de neurônios de McCullock-Pitts pode fazer isto.
- Partir de uma configuração inicial: $\gamma_i = x_i$
  deseja-se mostrar qual conjunto (se existir algum) de w_{ij}
  fará a rede ir para o estado $\gamma_i = x_i^{\lambda}$ que é o padrão de menor distância de Hamming de x_i
- O que se deseja é que a MEMÓRIA seja endereçável por conteúdo e insensível a erros pequenos no padrão de entrada.

LABIC

Modelo de Hopfield

- Importância:

memória endereçável por conteúdo pode ser de grande valia.

Suponha, por exemplo, que informação codificada sobre muitos cientistas famosos são armazenadas numa rede. Então,

padrão "evolução" ===> Darwin e

padrão "E=mc3" ====> Einstein

LABIC

Modelo de Hopfield

- OBS: sempre um padrão será recuperado (a menos que se inclua um padrão "não sei").

A rede numa recuperará uma combinação linear de Darwin com Einsten, em resposta à entrada:"evolução", mas o

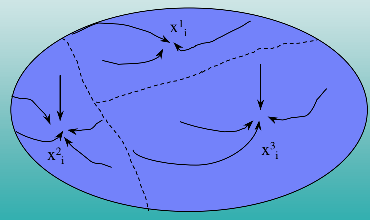
melhor matching de acordo com o que foi armazenado.

Modelo de Hopfield

- Outros exs. Memória Associativa
  - reconhecimento e reconstrução de imagens
  - recuperação de informação bibliográfica de referências parciais.

Modelo de Hopfield

- Espaço de configuração de um modelo com 3 atratores



Modelo de Hopfield

- O modelo de Hopfield foi proposto em 1982
- Função de Transferência (Mem. Assoc.):

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ -1 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

que é chamada função sinal.

- A saída de cada neurônio:

$s_j = \Sigma_i \; w_{ji} \, s_i$ onde os thresholds = 0

Modelo de Hopfield

- No caso deste modelo os nós são atualizados assincronamente. O modo sincronizado requer um clock central e é muito sensível a erros de tempo.
- Assíncrono:
  - seleciona-se aleatoriamente um nó (ou unidade) i para ser atualizado. Simulação
  - cada unidade se atualiza independentemente de acordo com uma constante de probabilidade por unidade de tempo. Unidades de Hardware Autônomas

Modelo de Hopfield

- Será assumido que uma configuração estável da rede é obtida quando todos os S_i não sofrem mais alterações.
- TESTE se um conj. de pesos é aceitável:

  se os padrões memorizáveis são por si só estáveis e então verificar se desvios pequenos nesses padrões são corrigidos quando a rede evolui.

Modelo de Hopfield

- Para motivar a escolha, consideremos o caso mais simples onde existe apenas um padrão xi para ser memorizado.
- A condição para que este padrão ser estável:

$\text{sinal}\,(\Sigma_i \; w_{ji} \; x_i\,) = x_j$ para todo j

o que significa que não houve mudança.

Então:

$w_{ji} \;\alpha\; x_j \; x_i$ desde que $x_i^2 = 1$

LABIC

Modelo de Hopfield

- A cte de proporcionalidade, por conveniência é tomada igual a 1/N, onde N é o no. de nós da rede.
- $w_{ji} = (1/N)\ x_j\ x_i$
- Uma configuração próxima (segundo a distância de Hamming) a x_j rapidamente convergirá para x_j
- Isto significa que a rede corrigirá erros como desejado e pode-se dizer que o padrão x_j é um atrator. Existem 2 atratores: o - x_j também é um atrator.

LABIC

Modelo de Hopfield

- Determinação dos pesos para recuperação de vários padrões
  - como conseguir que o sistema recupere o mais similar à entrada entre muitos padrões? A resposta mais simples é tomar w_{ji} similar ao caso anterior:

  $w_{ji} = (1/N)\ x_j^{\lambda}\ x_i^{\lambda}$ onde $\lambda = 1, 2, ..., p$ e p - no. de padrões

  REGRA DE HEBB OU REGRA DE HEBB GENERALIZADA

LABIC

Modelo de Hopfield

- Um modelo de memória associativa usando a regra de Hebb para todos os pares ji possíveis com unidades binárias e atualização assíncrona é chamada um Modelo de Hopfield.
- Em 1982, Hopfield introduziu a idéia de uma função de energia na teoria de RNA:

  $H = -0.5\ \Sigma\ w_{ji}\ S_i\ S_j$ é uma função de configuração do sistema.

LABIC

Modelo de Hopfield

- A propriedade central de uma função Energia é que ela sempre diminui (ou permanece constante) quando o sistema evolui de acordo com sua dinâmica. Assim, os atratores da Figura 1 são os mínimos locais da superfície energia.

LABIC

Algoritmo

- Dados M padrões exemplares de compr. N
- Passo1: Conexões (baseada nos modelos exemplares)

$$t_{ij} = \begin{cases} \Sigma_{\lambda=0}^{M-1}\ x_j^{\lambda}\ x_i^{\lambda} & i \neq j \\ 0 & i = j \quad 0 \leq i,j \leq N-1 \end{cases}$$

- Passo2: **Enquanto** (houver modelos desconh.para serem recuperados) **faça**

  1. Acrescentar um novo modelo (padrão de entrada)

     $y\ (0) = xi\ ;\ 0 \leq i \leq N-1$

  2. **Repita**

     $y_j\ (t+1) = \text{sinal}\ (\Sigma_{i=0}^{N-1}\ t_{ij}\ y_i\ (t)\ ),\quad 0 \leq j \leq N-1$

  até que $y_j\ (t+1)$ seja aproximadamente $y_j\ (t)$.

LABIC

Modelo de Hopfield

- Limitações
- O no. de padrões M que podem ser armazenados é muito limitado:

  $M \leq 0.15\ N$
- Um padrão exemplar será instável se ele tiver muitos bits em comum com outros padrões exemplares. Um modelo é considerado instável se ele é aplicado a rede no tempo zero e a rede converge para um modelo desconhecido.

LABIC

Modelo de Hopfield

- Estas limitações podem ser eliminadas se os padrões exemplares forem LI. e se possíveis ortogonais.
- Se N=1000, a complexidade de ligações é muito grande:

  T = (t_{ij}) ==> 1000 x 1000 conexões

LABIC

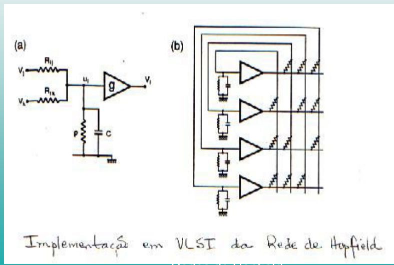
Modelo de Hopfield

- Existem estudos para se eliminar algumas conexões
- Impor um limiar para existência da conexão
- Se $|t_{ij}| \leq$ valor limiar ==> $t_{ij} = 0$

  caso contrário, permanece constante
- O valor de t_{ij} é no máximo M. Os valores variam entre -M e M.
- t_{ij} = sinal (t_{ij})   simplifica-se a ligação(inibitória ou excitatória)

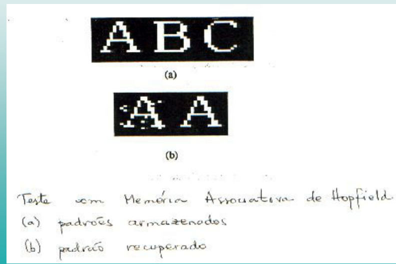
LABIC

Rede de Hopfield-circuito



LABIC

Exemplo de Memória Associativa



LABIC

Aplicação II - Otimização Combinatorial

- Probl. de Otimização: são problemas cuja solução é um membro de um conjunto de soluções factíveis.
- A solução ótima é uma sol. Factível que minimiza (ou maximiza) uma função custo.
- Exemplo: encontrar o menor caminho entre dois pontos numa rede de comunicação que consiste de centenas de nós, onde cada nó é conectado a um subconj. de outros nós.
- Caixeiro Viajante, Probl. Da Mochila, JSS, etc...
- Polinomial, Polinomial Não-determinístico (NP), Exponencial (EXP)

LABIC

Aplicação II

- Algoritmo tempo polinomial : $O(n^k)$,   k=cte, n-tamanho
- Algoritmo Exponencial: rodam em $O(k^n)$ - tempo
- Os probl. NP são considerados difíceis porque o melhor algoritmo para resolvê-lo parece rodar em tempo exp.
- Eles são probl., nos quais, uma boa solução subótima pode ser encontrada em tempo polinomial
- A rede de Hopfield pode ser usada para calcular uma boa solução para estes probl. Num modo eficiente.

LABIC

Aplicação II

- Probl. Do Caixeiro Viajante

O caixeiro deve visitar n cidades: A, B,C, ... cujas distâncias entre elas são conhecidas.

Objetivo: O probl. é encontrar um caminho fechado que passa por todas as cidades uma única vez, que é MÍNIMO.

- Representação de rotas com saídas da rede

C 6a. Posição: (0 0 0 0 0 1 0 0 0 ....0)

- Se tiver n cidades ==> n vetores com n posições

- Total de Neurônios: $N = n^2$ neurônios

LABIC

Aplicação II

- V_{Xi} = 0 - a cidade X não é visitada nesta posição

  1 - a cidade X é visitada na i-ésima posição
- Hopfield provou que os pontos de equilíbrio da rede são pontos de mínimo da função de Energia:

$$E = -0.5 \ \Sigma_{i=1}^{N} \Sigma_{i=1}^{N} T_{ij} V_j V_j \ - \Sigma_{i=1}^{N} V_j I_j$$

- $T_{ij} = ? \quad I_j = ?$
- $E = E1 + E2 + E3 + E4$

LABIC

Aplicação II

- E1 : uma cidade deve ser visitada uma única vez
- E2: duas cidades não podem ser visitadas ao mesmo tempo
- E3: As n cidades devem ser visitadas
- E4: comprimento do caminho deve ser mínimo

$$E1= A/2 \ \Sigma_X \Sigma_i \Sigma_{i \neq j} V_{Xi} V_{Xj}$$

$$E2= B/2 \ \Sigma_X \Sigma_{Y \neq X} \Sigma_i V_{Xi} V_{Yj}$$

$$E3= C/2 \ (\Sigma_X \Sigma_i V_{Xi} - n)^2$$

$$E4= D/2 \ \Sigma_i \Sigma_X \Sigma_{Y \neq X} d_{xy} \ V_{Xi} (V_{Y,j+} + V_{Y,j-})$$