



# Pesquisa Operacional / Programação Matemática

Otimização discreta



# Otimização discreta

- Voltemos ao problema das mesas e cadeiras:

$$\text{Max } 90m + 60c$$

s.a.

$$2m + 2c \leq 14$$

$$2m + c \leq 8$$

$$m, c \geq 0$$

$$m = 1$$

$$c = 6$$



# Otimização discreta

- Voltemos ao problema das mesas e cadeiras:

$$\text{Max } 90m + 60c$$

s.a.

$$2m + 2c \leq 15$$

$$2m + c \leq 8$$

$$m, c \geq 0$$

$$m = 0.5$$

$$c = 7$$



# Forma geral

- Problema de programação (linear) inteira mista (PIM):

$$z = \max \mathbf{cx} + \mathbf{dy}$$

$$\mathbf{Ax} + \mathbf{Dy} \leq \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} \in R_+^n, \mathbf{y} \in Z_+^p$$

- Problema de programação linear inteira (PI):

$$z = \max \mathbf{cx}$$

$$\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} \in Z_+^n$$



# Forma geral

- Problema de programação 0-1 (binária) (PB):

$$z = \max \mathbf{c}\mathbf{x}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} \in B^n$$



## Exemplo: PB

$$\begin{aligned} z &= \max 2x_1 + 3x_2 \\ 6x_1 + 8x_2 &\leq 10 \\ \mathbf{x} &\in B^2 \end{aligned}$$

Região factível:

$$X = \{(0, 0), (1, 0), (0, 1)\}$$

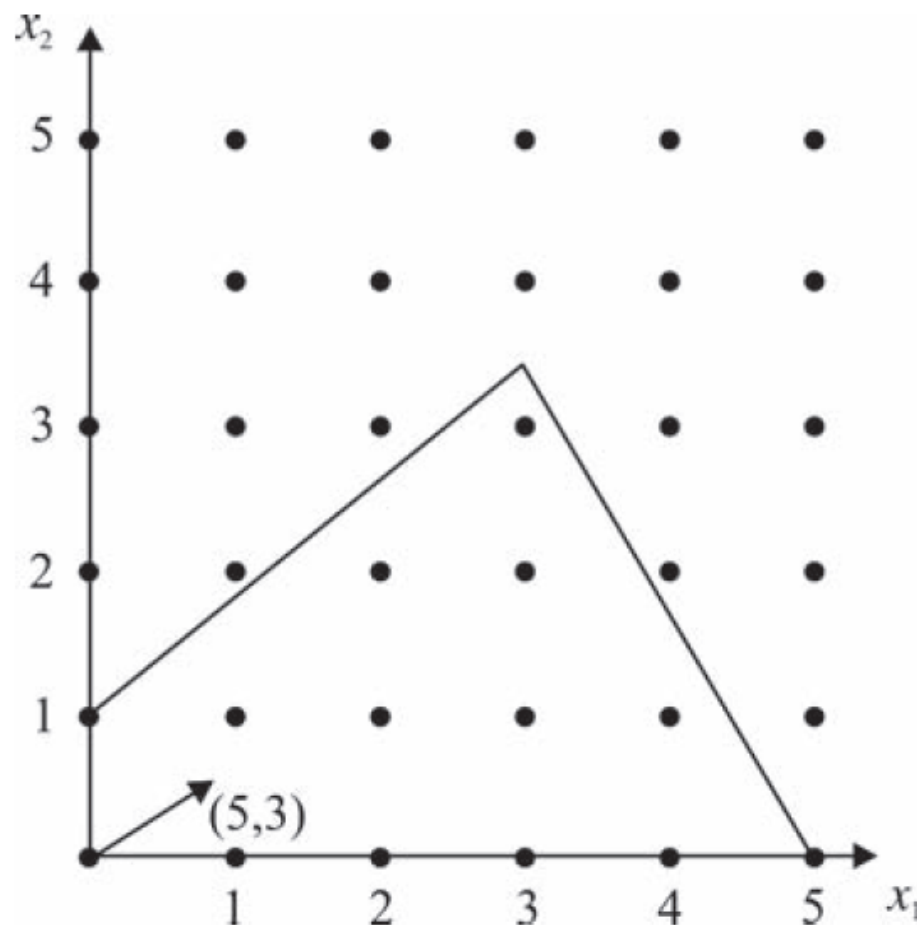
# Exemplo: PI

$$z = \max 10x_1 + 6x_2$$

$$9x_1 + 5x_2 \leq 45$$

$$-4x_1 + 5x_2 \leq 5$$

$$\mathbf{x} \in \mathbb{Z}_+^2$$



Região factível:

$$X = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1), (2, 0), (2, 1), (2, 2), (3, 0), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (4, 0), (4, 1), (5, 0)\}$$

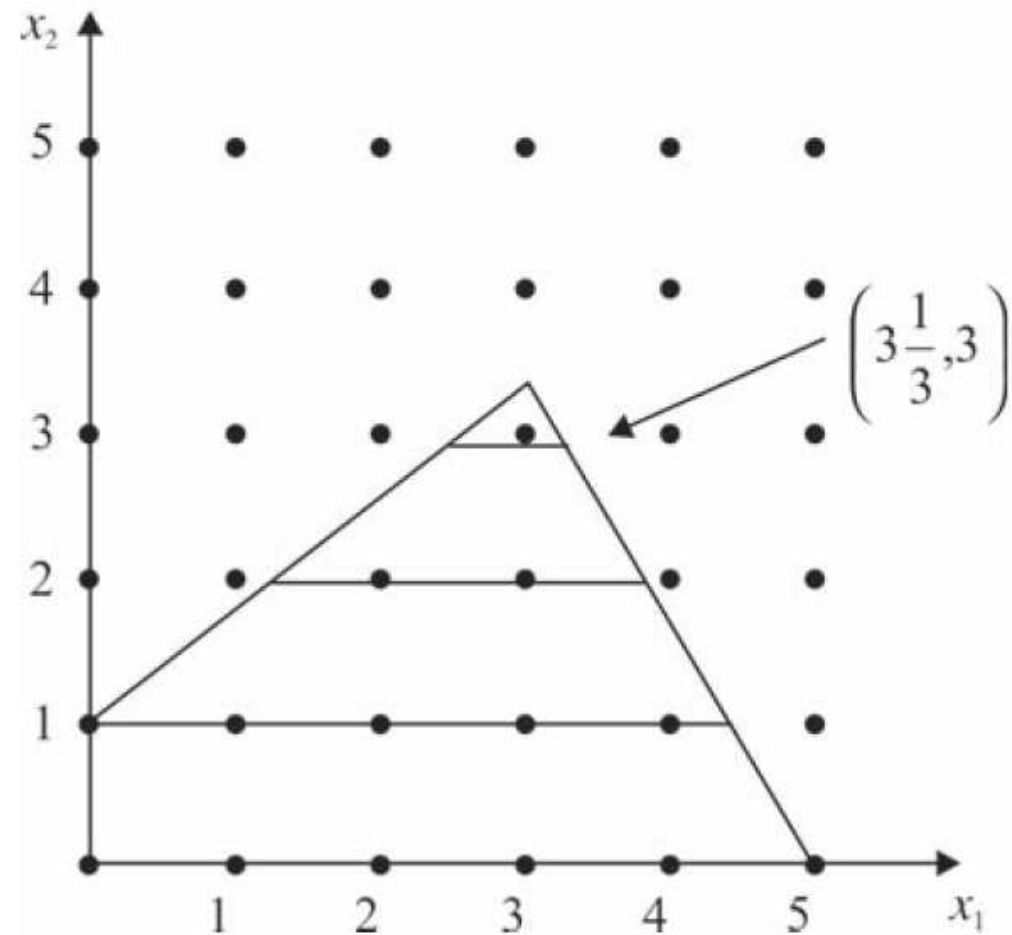
# Exemplo: PIM

$$z = \max 10x_1 + 6x_2$$

$$9x_1 + 5x_2 \leq 45$$

$$-4x_1 + 5x_2 \leq 5$$

$$x_1 \in R_+^1, x_2 \in Z_+^1$$



Região factível: os quatro segmentos de reta da figura



# Exemplo: Relaxação linear (PL)

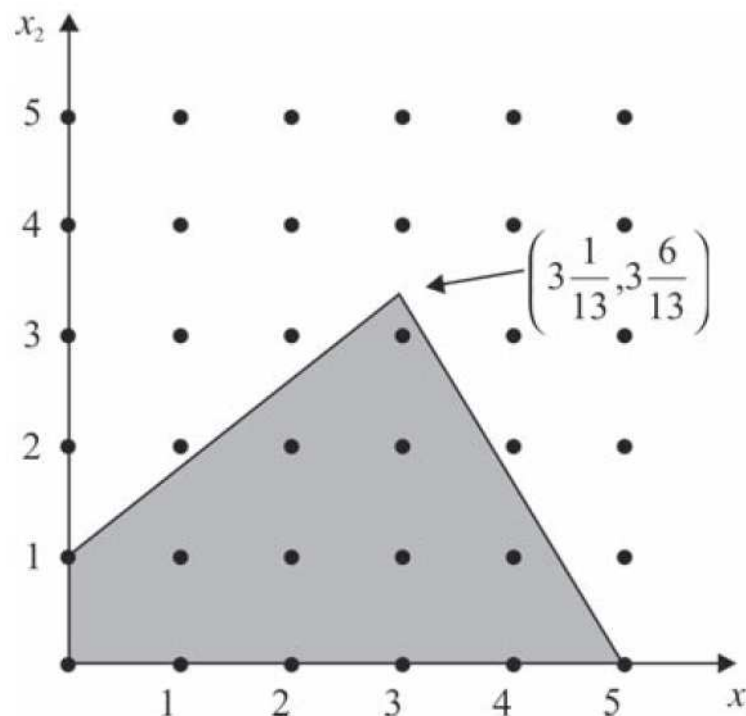
- Considere o exemplo "Otimização discreta" e relaxe as restrições de integralidade (PL):

$$\bar{z} = \max 10x_1 + 6x_2$$

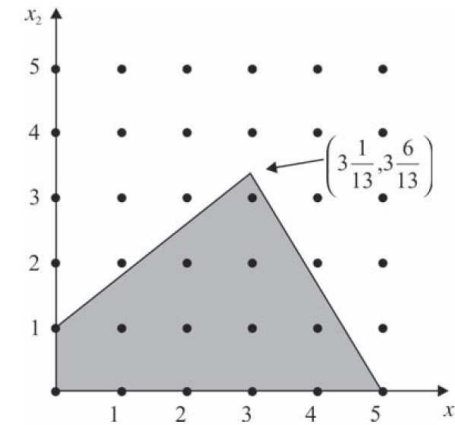
$$9x_1 + 5x_2 \leq 45$$

$$-4x_1 + 5x_2 \leq 5$$

$$\mathbf{x} \in R_+^2$$



- A solução relaxada pode estar bem dista ótima.



- Mais que isso: em problemas grandes, pode ser difícil, através de arredondamento, obter uma solução *factível*.

# Relações entre PI, PIM e PL

- Seja  $X_{PI}$ ,  $X_{PIM}$  e  $X_{PL}$  os conjuntos de soluções factíveis de PI, PIM e PL:

$$X_{PI} \subset X_{PL}$$

$$X_{PIM} \subset X_{PL}$$

- Isso implica que o valor da solução ótima de um PL será melhor que os valores das soluções ótimas dos PI e PIM associados.

Nos exemplos:

PL	PIM	PI
$\bar{z} = 51\frac{7}{13}$	$51\frac{1}{3}$	50



- A relaxação tem um papel chave nos principais algoritmos de resolução de PI e PIM.
- Idéia: ela fornece um *limitante*.