Transformações Geométricas 2D

M.C.F. de Oliveira
Rosane Minghim
2007

Transformações Geométricas

- Aplicadas aos modelos gráficos para alterar a geometria dos objetos, sem alterar a topologia
- Porque são necessárias:
  - Para posicionar os objetos em relação ao sistema de coordenadas global (‘*world coordinate system*’) – alterar tamanho, orientação, posição
  - Para ‘mover’ os objetos (gerando uma animação)
  - Para transformar descrições de objetos entre diferentes sistemas de coordenadas
  - Transformações fundamentais: translação, rotação e escala

2

Sistemas de Coordenadas

- Transformações entre sistemas de coordenadas
  - Aplicações gráficas freqüentemente requerem a transformação de descrições de objetos de um sistema de coordenadas para outro
  - Objeto pode ser descrito em um sistema de objetos não-cartesiano, e precisa ser convertido para um sistema cartesiano
  - Em aplicações de animação e modelagem, objetos individuais definidos em seu próprio sistema de coordenadas (SRO), coordenadas locais (SRO) são depois transformadas para posicionar os objetos no SRU

1) Transformações Fundamentais

Translação

$$P(x, y) \xrightarrow{\text{trans}} P'(x', y')$$

$$x' = x + dx, \quad y' = y + dy \qquad (1)$$

$$P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad P' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} \qquad (2)$$

$$P' = P + T \qquad (3)$$

Escala (em relação à origem)

$$P(x, y) \xrightarrow{\text{esc}} P'(x', y')$$

$$x' = sx \cdot x, \quad y' = sy \cdot y \tag{4}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} sx & 0 \\ 0 & sy \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$P' = S \cdot P \tag{5}$$

sx, sy > 0
sx, sy > 1.0
sx, sy < 1.0
sx = sy
sx ≠ sy

Rotação (θ) (em relação à origem)

$$P(x, y) \longrightarrow P'$$

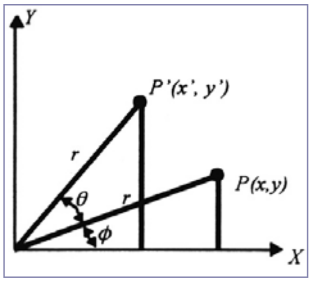
$$\begin{aligned} x' &= x \cdot \cos\theta - y \cdot \sin\theta , \\ y' &= x \cdot \sin\theta + y \cdot \cos\theta \end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$P' = R \cdot P \tag{7}$$

Obs.: Ângulos são definidos como <u>positivos</u> quando a rotação é feita no sentido <u>anti-horário</u>, e negativo caso contrário.

Derivando as equações de rotação (fig.):

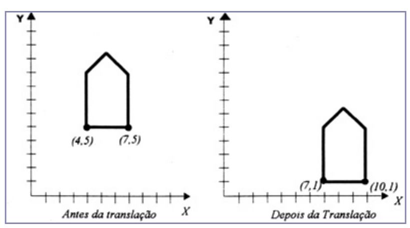


$$x = r \cdot \cos\phi\,, \quad y = r \cdot \sin\phi \qquad (8)$$

$$\begin{aligned} x' &= r \cdot \cos(\theta + \phi) = r \cdot \cos\phi \cdot \cos\theta - r \cdot \sin\phi \cdot \sin\theta \\ y' &= r \cdot \sin(\theta + \phi) = r \cdot \cos\phi \cdot \sin\theta + r \cdot \sin\phi \cdot \cos\theta \end{aligned} \qquad (9)$$

Pode-se obter (6) substituindo (8) em (9)

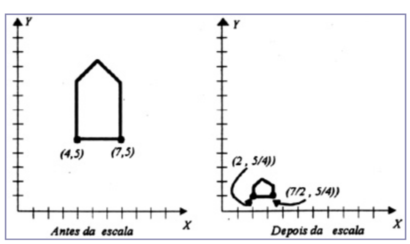
$P_1 = (4, 5)$
$P_2 = (7, 5)$



$P_1' = (7, 1)$
$P_2' = (10, 1)$

Translação de uma casa (3, -4)

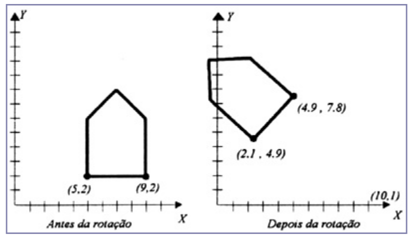
$P_1 = (4, 5)$
$P_2 = (7, 5)$



$P_1' = (2, 5/4)$
$P_2' = (7/2, 5/4)$

Escalonamento (não uniforme) de uma casa (½, ¼)

$P_1 = (5, 2)$
$P_2 = (9, 2)$



Rotação de uma casa (45º)

$P_1' = (2.1, 4.9)$
$P_2' = (4.9, 7.8)$

Observação

- Aplicar qualquer transformação a um objeto é equivalente à aplicar a transformação inversa ao seu sistema de coordenadas!!
- A transformação inversa é descrita pela inversa da matriz que define a transformação original
- Exercício: verifique com os exemplos da apostila!

2) Coordenadas Homogêneas e Matrizes de Transformação

Para a translação, rotação e escala, as matrizes de transformação são, respectivamente:

$$P' = T + P \qquad (3)$$
$$P' = R \cdot P \qquad (7)$$
$$P' = S \cdot P \qquad (5)$$

Para poder combinar facilmente seqüências de transformações, é interessante expressar as 3 como multiplicações matriz-ponto. Isso é possível representando os pontos em Coordenadas Homogêneas.
Um ponto (no espaço 2D) representado em coordenadas homogêneas é descrito por três coordenadas:

$$P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ W \end{pmatrix}$$

2) Coordenadas Homogêneas e Matrizes de Transformação

A transformação do sistema homogêneo para o sistema cartesiano se dá pela seguinte relação:

$$(x,y) = (x'/W, y'/W)$$

2) Coordenadas Homogêneas e Matrizes de Transformação

- Dizemos que dois conjuntos de coordenadas homogêneas, [x y W] e [x' y' W'] representam o mesmo ponto se e somente se um é múltiplo do outro

$$(x, y, W) \equiv (x', y', W') \Leftrightarrow \begin{aligned} x' &= tx \\ y' &= ty \\ W' &= tW \end{aligned}$$

- Assim, (2,3,4,6) e (4,6,8,12) são diferentes representações (no espaço homogêneo) para o mesmo ponto (no espaço cartesiano)

13

2) Coordenadas Homogêneas e Matrizes de Transformação

- Pontos onde W = 0 estão, por definição, fora do espaço vetorial

  (0, 0, 0) não é permitido
  $W = 0 \Rightarrow$ não é permitido

  Se $W \neq 0 \Rightarrow (x/w, y/w, 1)$
  $x/W, y/W \Rightarrow$ coordenadas cartesianas do ponto homogêneo

- Outras vantagens do espaço homogêneo: evita o uso de casas decimais e vírgulas, bem como problemas ocasionados pela representação de números muito grandes
  - (1, 2, 1,1000), (1, 2, 1, 1/1000000)

- Quando W = 1, a transformação entre os espaços é direta
  - $(x,y,1) \equiv (x,y)$

14

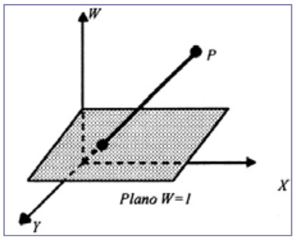


Fig. Espaço de Coordenadas Homogêneas XYW, com plano W=1 e o ponto P = (x, y, W) projetado sobre o plano W = 1.

Obs.: Se tomarmos todas as triplas que representam o mesmo ponto, isto é, todas as triplas da forma (tx, ty, tW), com $t \neq 0$, obtemos uma linha no espaço homogêneo 3D.

- Se “homogeneizamos” o ponto (dividimos por W), obtemos o ponto na forma (x, y, 1).

- Os pontos homogeneizados definem um plano dado pela equação W = 1 no espaço homogêneo (x, y, W).

15

Translação (Coordenadas Homogêneas)

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & dx \\ 0 & 1 & dy \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (10)$$

$$P' = T(dx, dy) \cdot P \qquad (11)$$

O que acontece se um ponto P é transladado para P’ e a seguir para P”?

$$P' = T(dx_1, dy_1) \cdot P \qquad (13)$$

$$P'' = T(dx_2, dy_2) \cdot P' \qquad (14)$$

$$P'' = T(dx_2, dy_2) \cdot (T(dx_1, dy_1) \cdot P) = (T(dx_2, dy_2) \cdot T(dx_1, dy_1)) \cdot P$$

e

$$T(dx_2, dy_2) \cdot T(dx_1, dy_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & dx_2 \\ 0 & 1 & dy_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & dx_1 \\ 0 & 1 & dy_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$\downarrow$

Transformação de Composição

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & dx_1+dx_2 \\ 0 & 1 & dy_1+dy_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = T(dx_1+dx_2, dy_1+dy_2)$$

$\downarrow$

aditiva!

16

Escala

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sx & 0 & 0 \\ 0 & sy & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (17)$$

$$P' = S(sx, sy) \cdot P \qquad (18)$$

Aplicando 2 escalas a um ponto P:

$$P' = S(sx_1, sy_1) \cdot P \qquad (19)$$
$$P'' = S(sx_2, sy_2) \cdot P' \qquad (20)$$

$$P'' = S(sx_2, sy_2) \cdot (S(sx_1, sy_1) \cdot P) = (S(sx_2, sy_2) \cdot S(sx_1, sy_1)) \cdot P$$

e

$$S(sx_2, sy_2) \cdot S(sx_1, sy_1) = \begin{bmatrix} sx_2 & 0 & 0 \\ 0 & sy_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} sx_1 & 0 & 0 \\ 0 & sy_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} sx_1 \cdot sx_2 & 0 & 0 \\ 0 & sy_1 \cdot sy_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \underset{\downarrow}{S(sx_1 \cdot sx_2, sy_1 \cdot sy_2)}$$

multiplicativa!

Rotação

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (22)$$

$$P' = R(\theta) \cdot P \qquad (24)$$

Como exercício, mostre que 2 rotações são aditivas

TRANSFORMAÇÕES AFINS:

- Seqüência arbitrária de rotações, translações e escalas.
- Preservam paralelismo de linhas, mas não preservam comprimentos e ângulos

TRANSFORMAÇÕES DE CORPO RÍGIDO:

- Matrizes de transformação da forma

Sub-matriz ortogonal

$$M = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{matrix}} & \begin{matrix} tx \\ ty \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} & 1 \end{bmatrix}$$

- Preservam ângulos e comprimentos
- Ex.: Seqüência arbitrária de rotações e translações

3) Composição de Transformações

Combinação de matrizes de transformação R, S e T → <u>Eficiência</u> (uma só transformação composta substitui uma série de transformações sucessivas)

<u>Ex. 01</u>: <u>Rotação</u> de um objeto em torno de um ponto arbitrário P_1:

1) Translação leva P_1 à origem 2) Efetua rotação 3) Efetua translação oposta

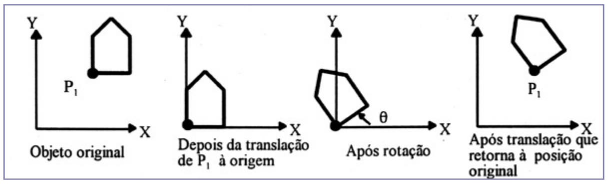


Fig. Rotação em relação a um ponto P1 (θ)

$$T(x_1, y_1) \cdot R(\theta) \cdot T(-x_1, -y_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & y_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -x_1 \\ 0 & 1 & -y_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & x_1 \cdot (1 - \cos\theta) + y_1 \cdot \sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta & y_1 \cdot (1 - \cos\theta) - x_1 \cdot \sin\theta \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(30)}$$

<u>Ex. 02</u>: <u>Escala</u> em relação a um ponto arbitrário P_1

(Translação para a origem, Escala, Translação oposta)

$$T(x_1, y_1) \cdot S(sx, sy) \cdot T(-x_1, -y_1) =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & y_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} sx & 0 & 0 \\ 0 & sy & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -x_1 \\ 0 & 1 & -y_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sx & 0 & x_1 \cdot (1 - sx) \\ 0 & sy & y_1 \cdot (1 - sy) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(31)}$$

<u>Ex. 03</u>: <u>Escala</u> e <u>Rotação</u> em relação a P_1, posicionamento em P_2

(Translada P_1 para a origem, Efetua escala e rotação desejadas, Translada origem para a nova posição P_2)

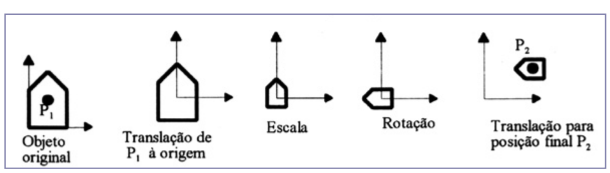


Fig. Escala e Rotação de uma casa

A matriz de transformação é: $T(x_2, y_2) \cdot R(\theta) \cdot S(sx, sy) \cdot T(-x_1, -y_1)$

Obs.: Se M1 e M2 representam duas transformações fundamentais (translação, rotação ou escala), existem alguns casos especiais em que:

$$M_1 \cdot M_2 = M_2 \cdot M_1$$

M1	M2
Translação	Translação
Escala	Escala
Rotação	Rotação
Escala Uniforme	Rotação

Nestes casos, não precisamos nos preocupar com a ordem de construção da matriz de transformação.

(Como exercício, verifique que isto é verdade.)

5) Eficiência

Uma composição genérica de transformações R, S e T, produz uma matriz da forma:

$$M = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & tx \\ r_{21} & r_{22} & ty \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

O cálculo de M·P requer 9 multiplicações e 6 adições. Como a última linha da matriz é constante, os cálculos efetivamente necessários são:

$$x' = x \cdot r_{11} + y \cdot r_{12} + tx$$
$$y' = x \cdot r_{12} + y \cdot r_{21} + ty$$

ou seja, quatro multiplicações, duas adições.

- Uma aplicação em que a eficiência é muito importante é na criação de sucessivas “vistas” de um mesmo objeto. Se cada vista é uma rotação de poucos graus da anterior, e puder ser gerada e apresentada suficientemente rápido, parecerá ao observador que o objeto está sendo rotacionado continuamente (animação!).
- A eficiência é crítica nesse caso em particular (rotações) porque os cálculos envolvidos utilizam funções trigonométricas e várias multiplicações em ponto-flutuante.

- Para obter a velocidade de apresentação necessária, as transformações devem ser efetuadas sobre os pontos do objeto o mais rapidamente possível.
- As equações de rotação (7) requerem 4 multiplicações e 2 adições, além das 4 chamadas às funções trigonométricas.
- Se θ é pequeno (poucos graus), sabemos que $\cos\theta \approx 1$. Nesse caso, podemos simplificar (7) para exigir 2 multiplicações, 2 adições, duas chamadas a funções.

$$\begin{aligned} x' &= x - y \cdot \sin\theta \\ y' &= y + x \cdot \sin\theta \end{aligned} \qquad (37)$$

- A equação acima aproxima os valores corretos de x’, y’, mas introduz um erro cumulativo. Uma aproximação melhor usaria x’ no lugar de x na 2ª equação:

$$\begin{aligned} x' &= x - y \cdot \sin\theta \\ y' &= x' \cdot \sin\theta + y = \\ &= (x - y \cdot \sin\theta) \cdot \sin\theta + y = \\ &= x \cdot \sin\theta + y \cdot (1 - \sin^2\theta) \end{aligned}$$