Programação Matemática

Maristela Santos
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação
Universidade de São Paulo

Forma geral de um PL

- Em vários problemas que formulamos, obtivemos:
  - Um objetivo de otimização (maximizar ou minimizar);
  - Restrições de igualdade = ;
  - Restrições de desigualdade do tipo ≥ ;
  - Restrições de desigualdade do tipo ≤ .

Forma Padrão - Definição

$$\text{Minimizar } f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ \ldots,\ x_n \geq 0. \end{aligned}$$

- Características da forma padrão:
  - ✓Problema de minimização
  - ✓Todas as restrições são de igualdade
  - ✓Todas as variáveis são não-negativas
  - ✓ Considerar b ≥ 0.

Forma Padrão (matricial)

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad f(\mathbf{x}) &= \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} \\ \mathbf{A}\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0}, \end{aligned}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Matriz mXn chamada matriz dos coeficientes (matriz tecnológica)

$$\mathbf{c}^{\mathrm{T}} = (c_1 \quad c_2 \quad \cdots \quad c_n)$$

Vetor de Custos

$$\mathbf{x}^{\mathrm{T}} = (x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n)$$

Vetor das Variáveis

$$\mathbf{b}^{\mathrm{T}} = (b_1 \quad b_2 \quad \cdots \quad b_m)$$

Vetor dos termos Independentes ou de recursos

Solução Factível - Definição

- Definição 1: Uma solução $(x_1, x_2, ... x_n)$ é factível se atende a todas as restrições do problema ($\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$) e as condições de não-negatividade ($\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$).

- Definição 2: O conjunto $S=\{\mathbf{x} \text{ tal que } \mathbf{Ax}=\mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$ é denominado de conjunto de soluções factíveis (também chamado de região factível).

Solução Factível - exemplo

$$\text{Minimizar} \quad f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 - x_2 + 4x_3$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 3 \\ x_2 + 2x_3 &= 4 \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

$x^T = (1, 0, 2)$ é factível. $f(1,0,2)=10$.

$x^T = (0.25, \ 0.5, \ 1.75)$ é factível ? f?

Solução Ótima - Definição

- Definição 3: Uma solução factível que fornece o menor valor à função objetivo f é chamada solução ótima, denotada por: $(x^*_1, x^*_2, \ldots x^*_n)$.

ou seja:

$(x^*_1, x^*_2, \ldots x^*_n) \in S$ é ótima se,

$$f(x^*_1, x^*_2, \ldots x^*_n) \leq f(x_1, x_2, \ldots x_n) \quad \forall \quad (x_1, x_2, \ldots x_n) \in S \;,$$

Transformação para a forma padrão

- Problemas de maximização

Max $c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_n x_n$ = Min $-c_1x_1 - c_2x_2 - ... - c_nx_n$

Pois

$$f(\mathbf{x}^*) \geq f(\mathbf{x}), \text{ para toda solução } \mathbf{x} \text{ factível.}$$

$$-f(\mathbf{x}^*) \leq -f(\mathbf{x}), \text{ para toda solução } \mathbf{x} \text{ factível}$$

Transformação para a forma padrão

- Restrição de desigualdade:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}\, x_n \leq b_1$$

Variável de folga (x_k)

$$x_k = b_1 - a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}\, x_n \geq 0$$

Restrição na forma de igualdade:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}\, x_n + x_k = b_1$$

Transformação para a forma padrão

- Restrição de desigualdade:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}\, x_n \geq b_1$$

Variável de folga (x_k)

$$x_k = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}\, x_n - b_1 \geq 0$$

Restrição na forma de igualdade:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}\, x_n - x_k = b_1$$

Transformação para a forma padrão

- Variáveis livres

x_i irrestrita.

$$x_i = x_i^+ - x_i^-, \text{ com } x_i^+ \geq 0,\ x_i^- \geq 0.$$

Resolução Gráfica

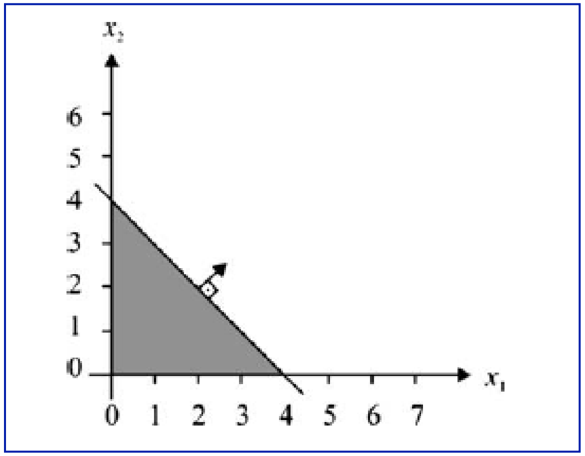
- Resolver um PL consiste em determinar uma solução ótima.
- Resolução gráfica: Problemas com duas variáveis.
- Visualização.

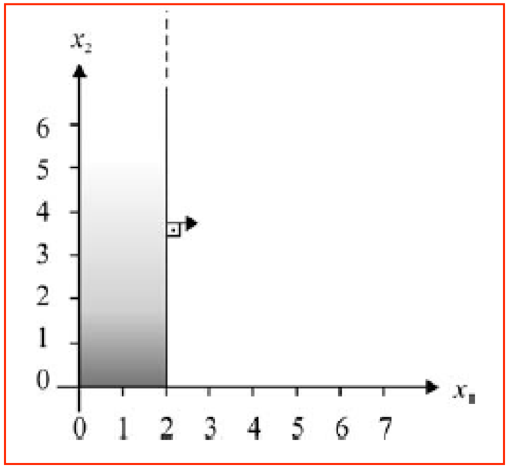
Resolução Gráfica - Exemplo

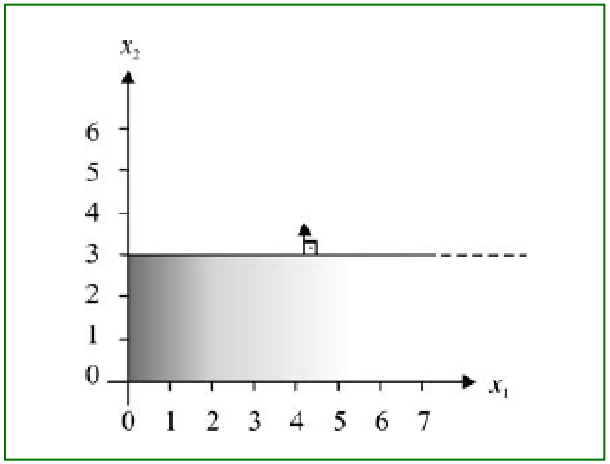
$$
\begin{aligned}
\text{Maximizar} \quad f(x_1, x_2) &= x_1 + 2x_2 \\
x_1 + x_2 &\leq 4 \\
x_1 &\leq 2 \\
x_2 &\leq 3 \\
x_1 \geq 0,\ x_2 &\geq 0.
\end{aligned}
$$

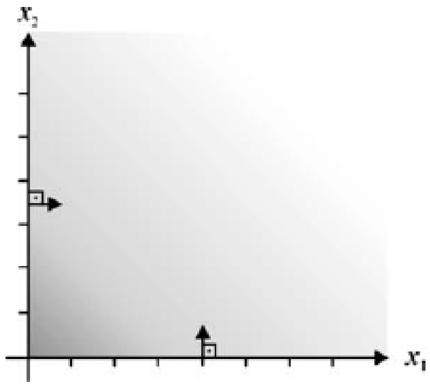
Solução Gráfica - Região factível

$$\mathbf{S} = \{(x_1, x_2) \text{ tal que } \boxed{x_1 + x_2 \le 4,}\ \boxed{x_1 \le 2,}\ \boxed{x_2 \le 3}, x_1 \ge 0, x_2 \ge 0\}$$



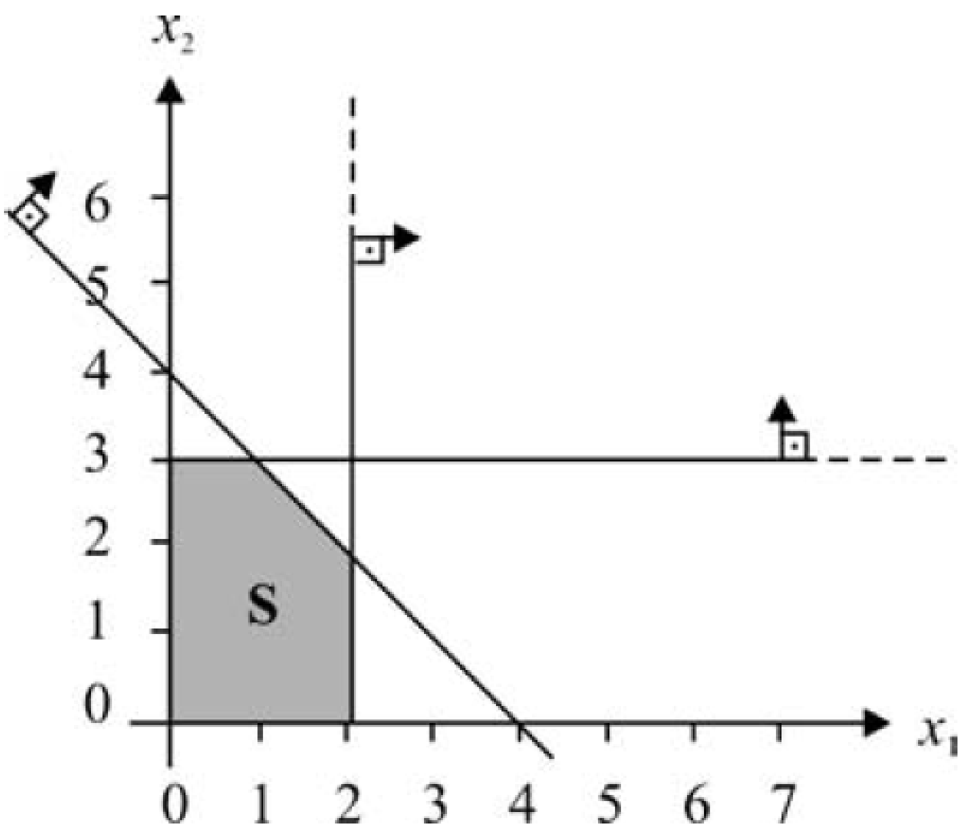




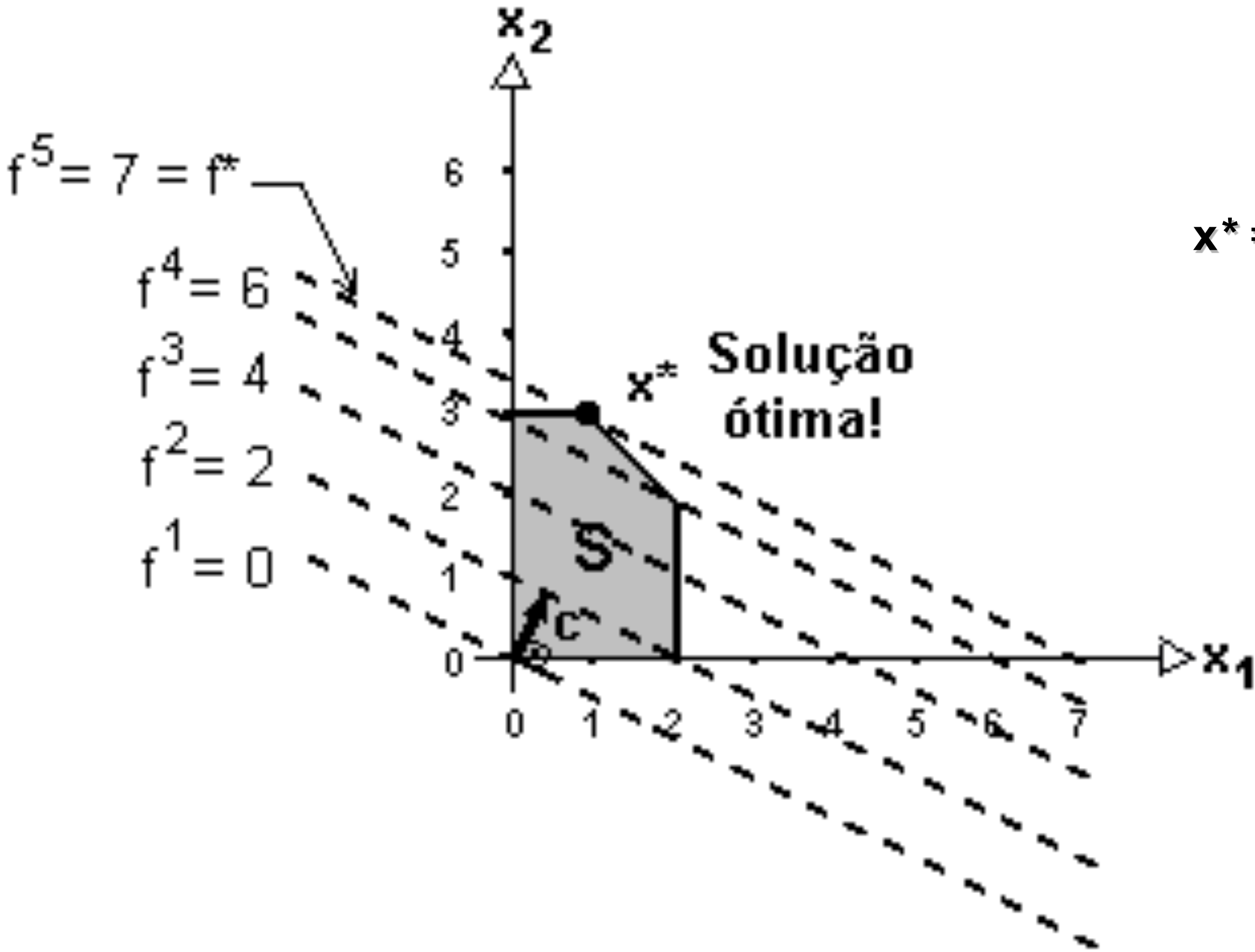


Solução Gráfica – Região factível

$$\mathbf{S} = \{(x_1, x_2) \text{ tal que } x_1 + x_2 \leq 4,\ x_1 \leq 2,\ x_2 \leq 3,\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0\}$$



Resolução Gráfica - Exemplo



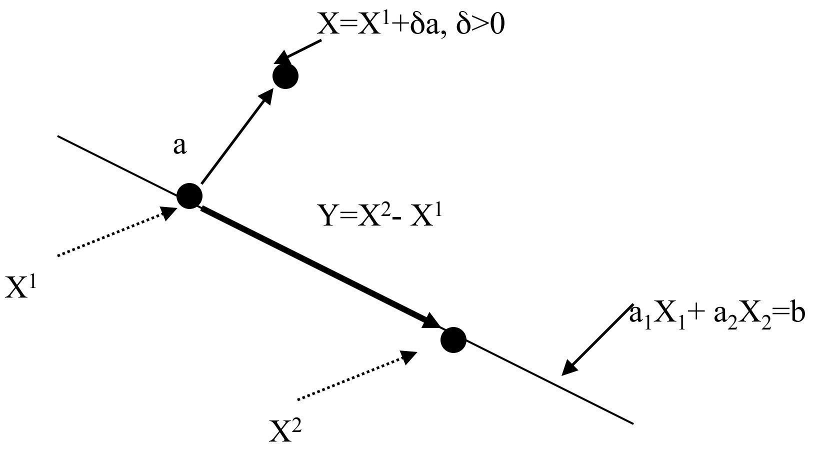
$$\mathbf{x}^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Resolução Gráfica – Conceitos básicos
Região Factível

- Considere uma reta qualquer:

  $a_1 x_1 + a_2 x_2 = b$

- **Afirmação:** O vetor $\mathbf{a}=(a_1 \;\; a_2)^T$ é perpendicular à reta.



Resolução Gráfica – Conceitos básicos Região Factível

Prova:
Com a notação matricial da reta: $a^T x=b$, onde $a^T=(a_1, a_2)$ e $x^T=(x_1, x_2)$. Considerando x^1 e x^2 dois pontos da reta, isto é, $a^T x^1 = b$ $a^T x^2 = b$, e $y=x^2-x^1$.
Então: $a^T y = a^T(x^2-x^1) = a^T x^1 - a^T x^2 = b - b = 0$.

Em geral, quando o espaço é o $\mathbf{R}^n$, a equação $\mathbf{a}^T\mathbf{x}=b$ define um conjunto chamado *hiperplano* e o vetor **a** é perpendicular ao hiperplano.

Resolução Gráfica – Conceitos básicos
Região factível

Afirmação: O vetor **a** aponta para o lado do plano cujos pontos satisfazem: $\mathbf{a}^T\mathbf{x}>b$.

Prova:

Os pontos do lado que aponta o vetor **a** são dados por:

$\mathbf{x}=\mathbf{x}^1+\delta\mathbf{a}, \quad \delta>0$

Portanto,

$\mathbf{a}^T\mathbf{x} = \mathbf{a}^T(\mathbf{x}^1+\delta\mathbf{a}) = \mathbf{a}^T\mathbf{x}^1 + \delta\, \mathbf{a}^T\mathbf{a} = b + \delta||\mathbf{a}||^2 > b,$

pois $\delta>0$ e $||\mathbf{a}||^2 = \ >0$ (considerando $\mathbf{a}\neq\mathbf{0}$.).

Resolução Gráfica – Conceitos básicos
Região Factível

Afirmação: O vetor **a** aponta para o lado do plano cujos pontos satisfazem: $\mathbf{a}^T\mathbf{x}>b$.

Prova:

Os pontos do lado que aponta o vetor **a** são dados por:

$\mathbf{x}=\mathbf{x}^1+\delta\mathbf{a}, \quad \delta>0$

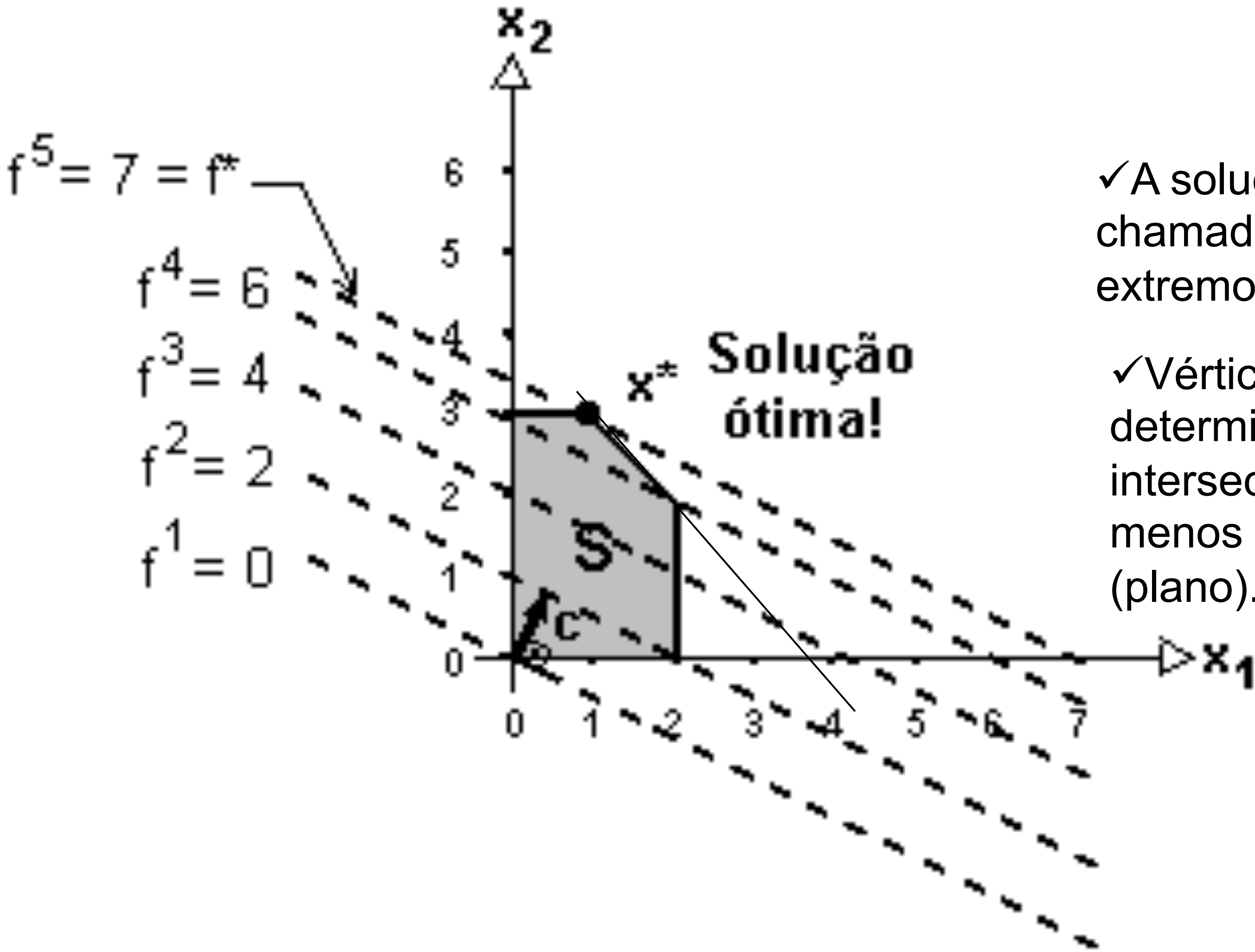
Portanto,

$\mathbf{a}^T\mathbf{x} = \mathbf{a}^T(\mathbf{x}^1+\delta\mathbf{a}) = \mathbf{a}^T\mathbf{x}^1 + \delta\, \mathbf{a}^T\mathbf{a} = b+\delta||\mathbf{a}||^2 > b$,

pois $\delta>0$ e $||\mathbf{a}||^2 = \;>0$ (considerando $\mathbf{a}\neq\mathbf{0}$.).

Pode-se utilizar deste resultado para desenhar a região factível S={**x** tal que **Ax**<=**b**, **x**≥**0**}.

Resolução Gráfica - Exemplo



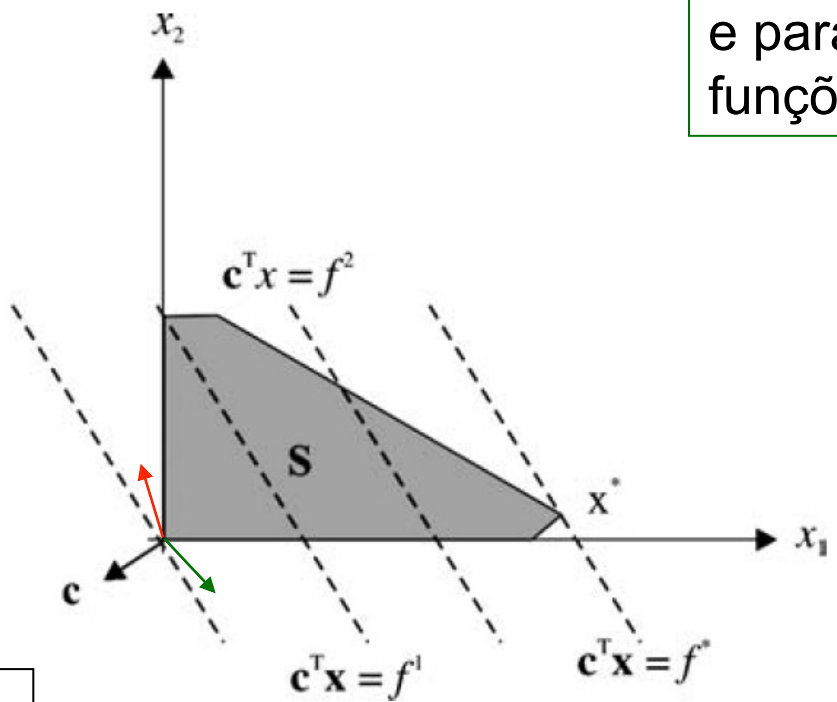
✓A solução ótima x* é chamada de ponto extremo ou vértice.

✓Vértices são determinados pela intersecção de pelo menos duas retas (plano).

Pontos extremos

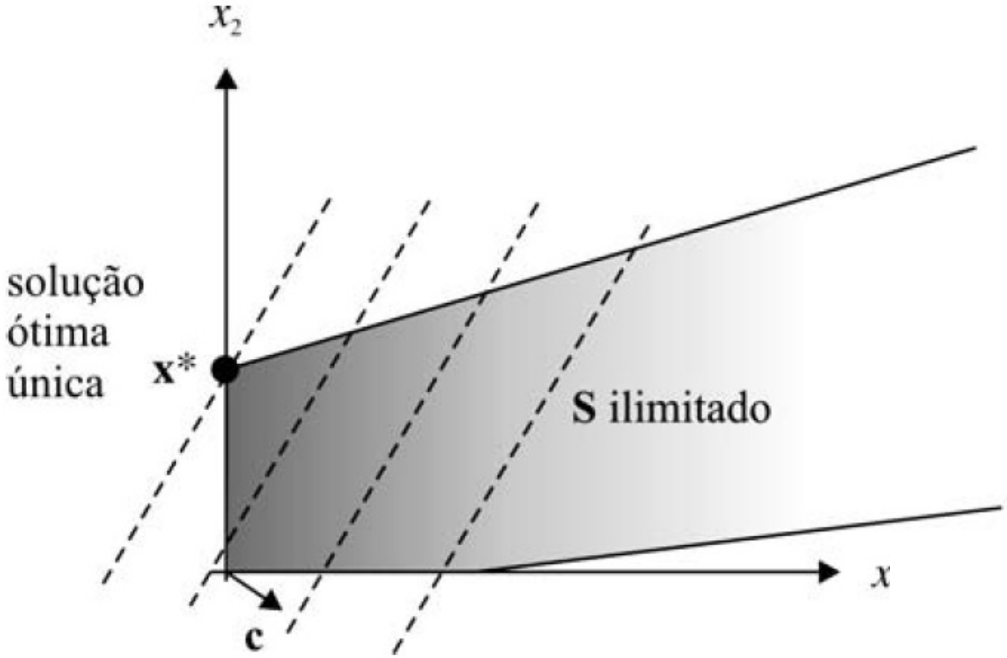
- Se um problema de otimização linear tem uma solução ótima, então existe um *vértice ótimo*.

e para outras funções objetivo ?



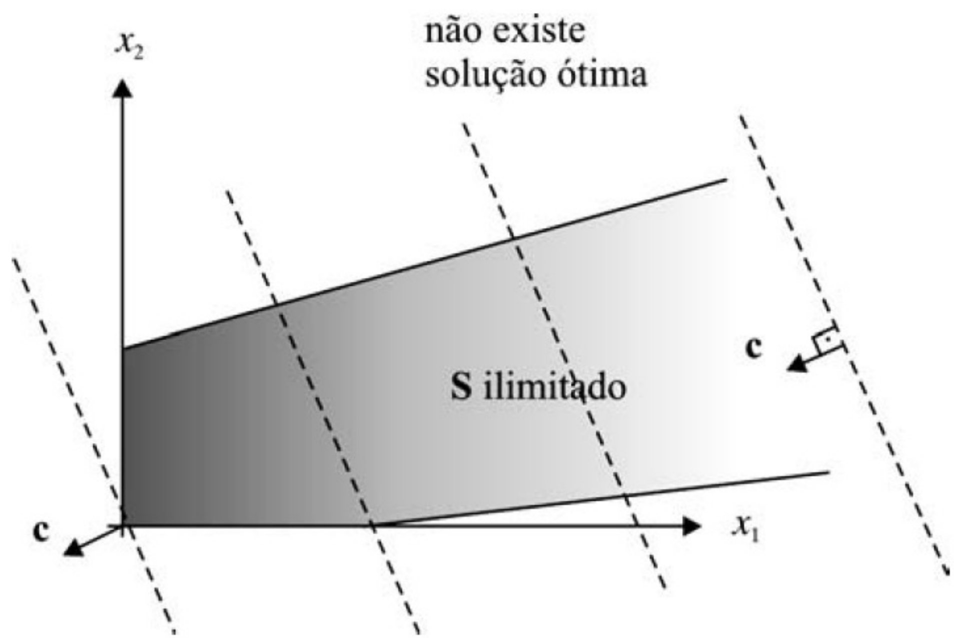
minimização

Região factível ilimitada



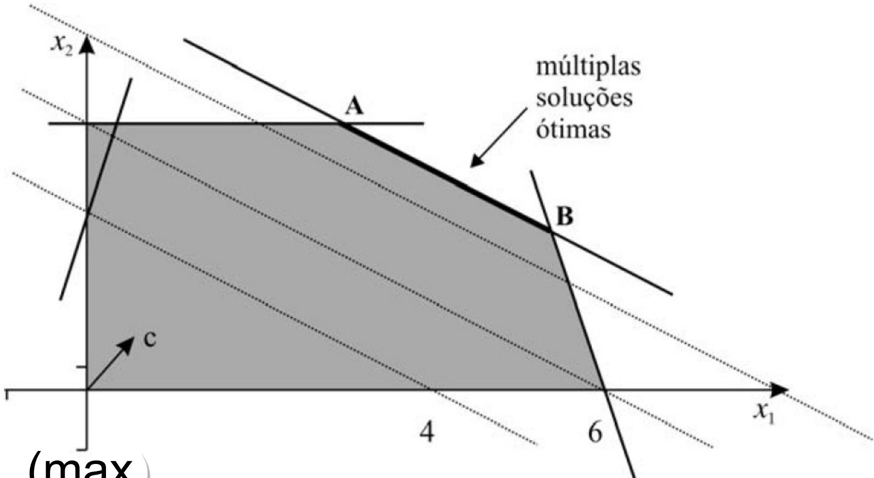
Região factível ilimitada e
solução ótima única (Minimização)

Região factível ilimitada e
não existe solução ótima



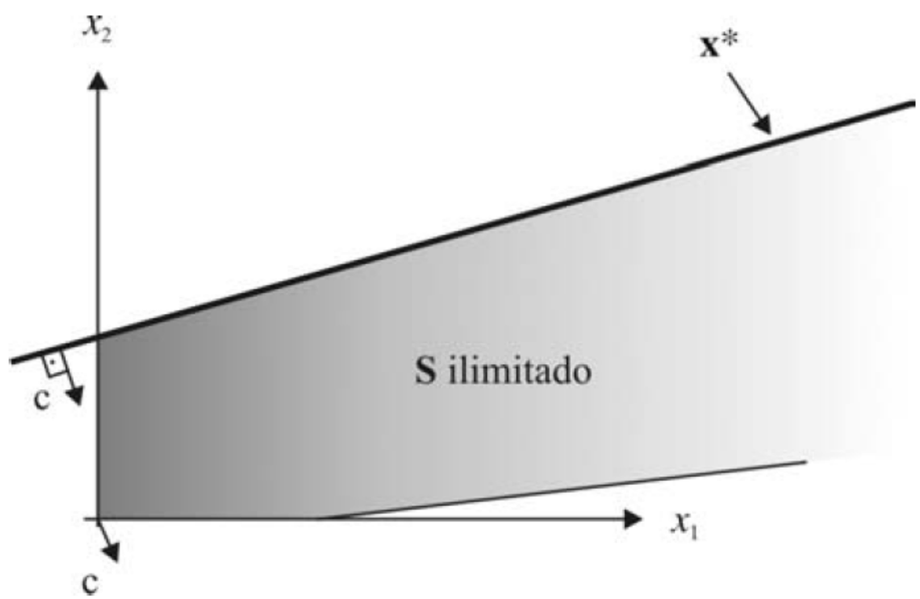
minimização

Múltiplos ótimos



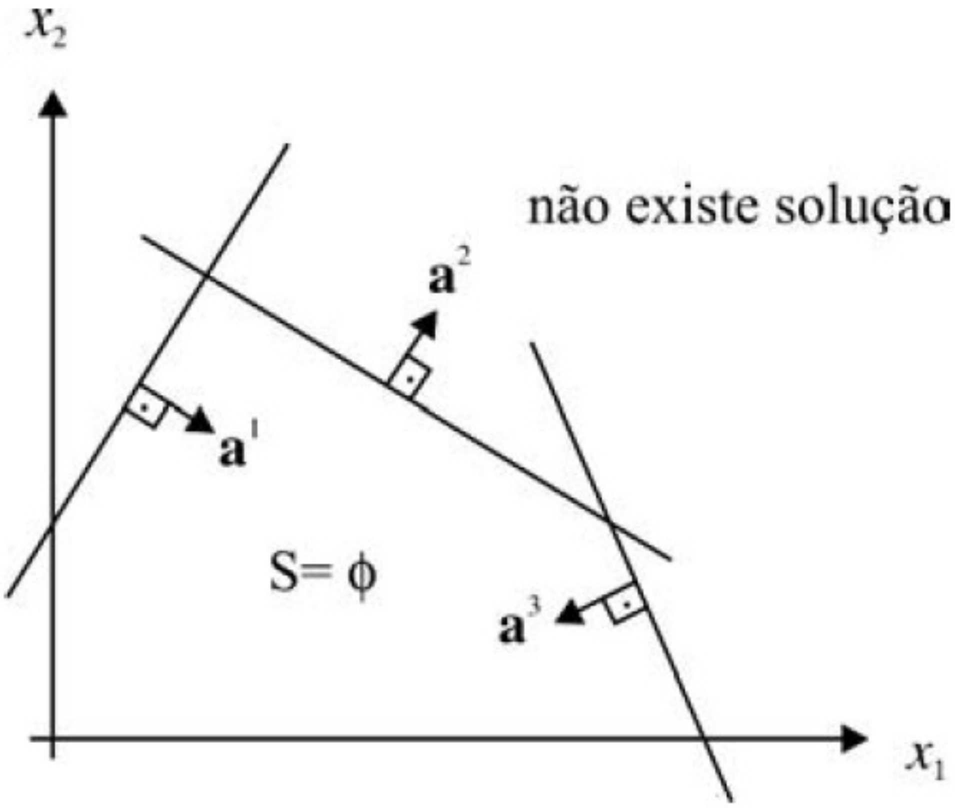
(max)

Múltiplas soluções ótimas

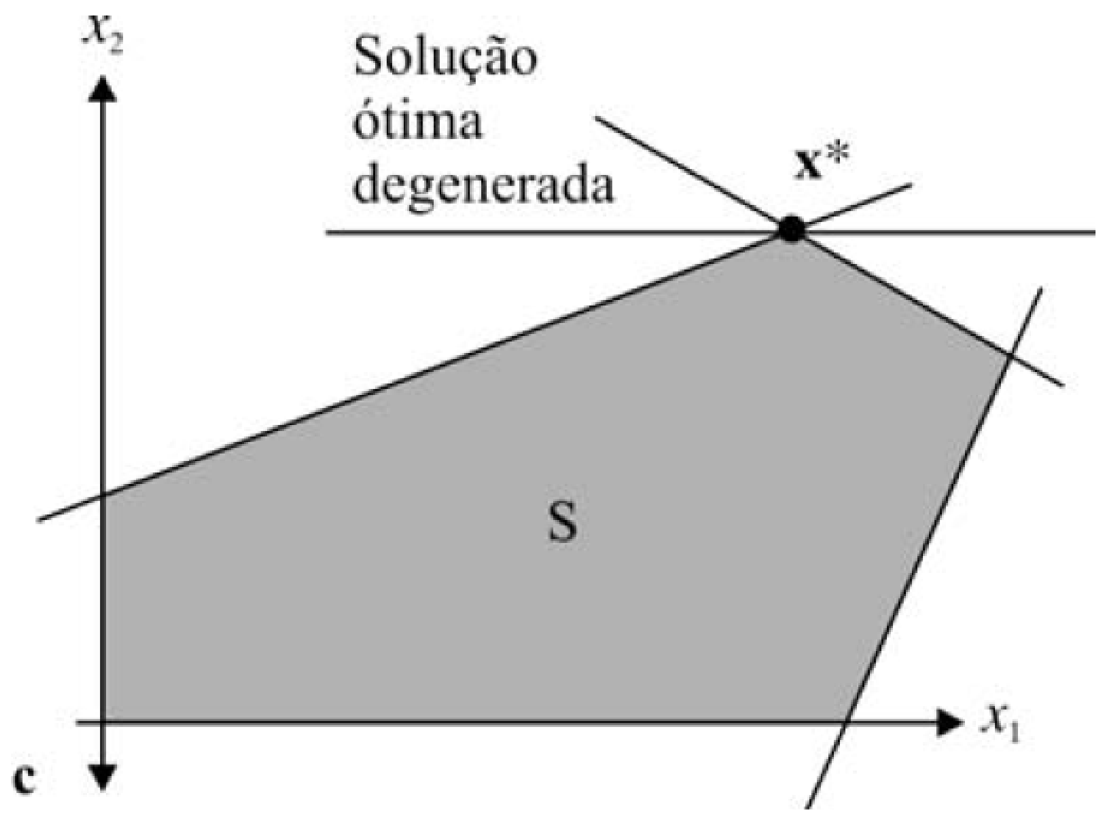


Região factível ilimitada
e infinitas soluções ótimas
(conjunto ilimitado de soluções
Ótimas).

Região infactível

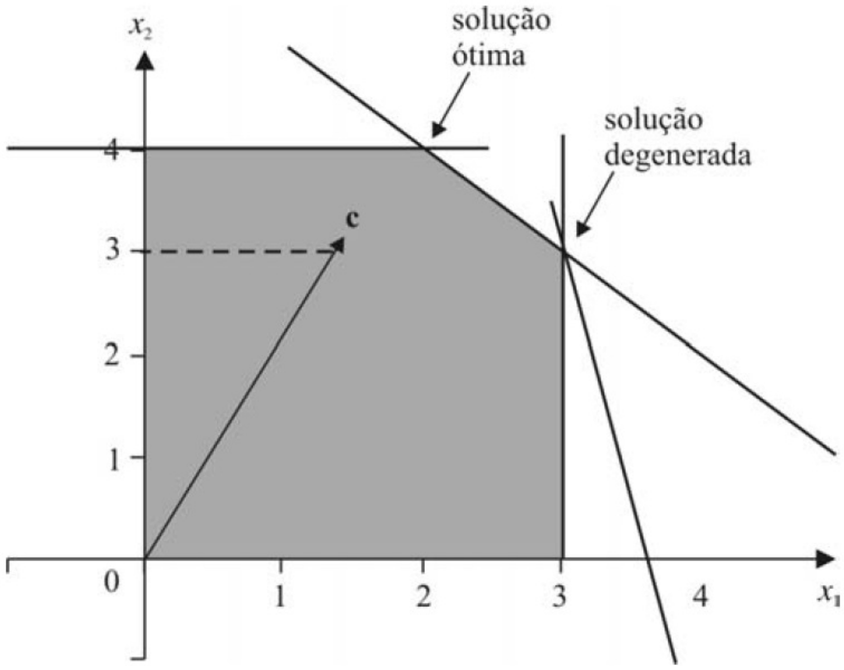


Solução degenerada

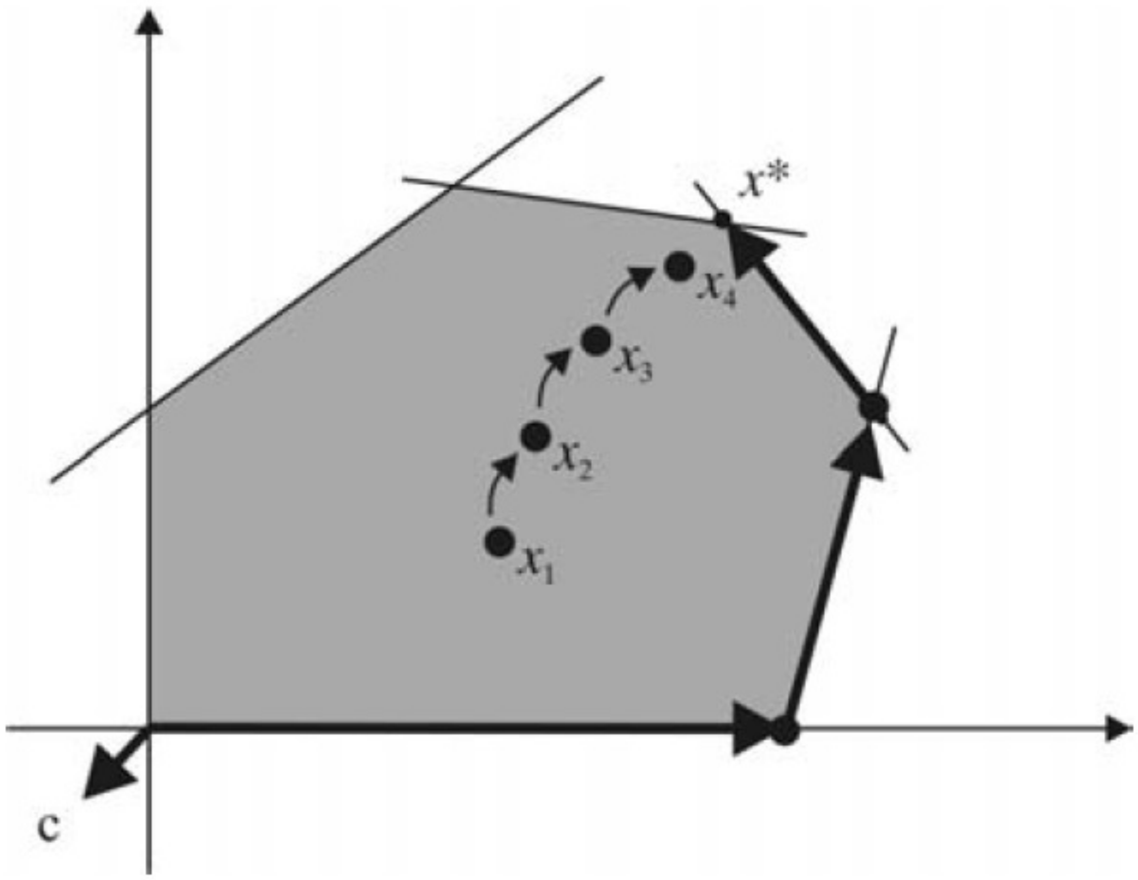


Exemplo: sol. degenerada

$$
\begin{aligned}
\text{Maximizar} \quad f(x_1, x_2) &= x_1 + 3x_2 \\
x_2 &\leq 4 \\
x_1 + x_2 &\leq 6 \\
x_1 &\leq 3 \\
5x_1 + x_2 &\leq 18 \\
x_1 \geq 0,\ x_2 &\leq 0.
\end{aligned}
$$



Método simplex (e met. de pontos interiores)



Exercícios

1) Considere o seguinte problema:

Minimizar $f(x_1, x_2) = -x_1 - x_2$

Sujeito a: $-x_1 + x_2 \leq 2$

$2x_1 - x_2 \leq 6$

$x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0$

a) Resolva o problema graficamente (isto é, desenhe a região factível e a(s) solução(ões) ótima(s)).

b) A solução $x_1 = x_2 = 0$ é um vértice da região factível? Identifique todos os vértices da região factível.

c) Desenhe as soluções $\mathbf{x}^1$=( )=(1 1) e $\mathbf{x}^2$=( )=(5, 1). Estas soluções são factíveis? Por que?

e) Considere agora uma outra função objetivo: ***Minimizar*** $f(x_1, x_2) = x_1 - x_2$. Verifique se a solução ótima obtida no item a. é também ótima considerando esta nova função objetivo.

Há múltiplas soluções ótimas? Identifique no gráfico.

Exercícios

2. Considere o seguinte problema:

Minimizar $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$

Sujeito a: $-x_1 + x_2 \geq 2$

$2x_1 - x_2 \leq 6$

$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$

Resolva o problema graficamente.

Considere agora: ***Maximizar*** $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ sujeito às mesmas restrições. O que mudou?

Construa uma nova função objetivo de modo que o problema tenha: **i)** um segmento de soluções ótimas; **ii)** uma semi-reta de solução ótimas.

d) considere o problema do item b) e inclua a terceira restrição $X_1 + X_2 \leq 1$. Resolva o problema resultante

Conceitos básicos

- Consideramos sempre o problema na forma padrão:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad f(\mathbf{x}) &= \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} \\ \mathbf{A}\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Dimensões:
A (m x n)
b (m x 1)

Soluções básicas

- Considere a seguinte região factível no R^2

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\le 6 \\ x_1 - x_2 &\le 4 \\ 3x_1 + x_2 &\ge 3 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 &\ge 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_3 &= 6 - (x_1 + x_2) \ge 0 \\ x_4 &= 4 - (x_1 - x_2) \ge 0 \\ x_5 &= (3x_1 + x_2) - 3 \ge 0, \end{aligned}$$

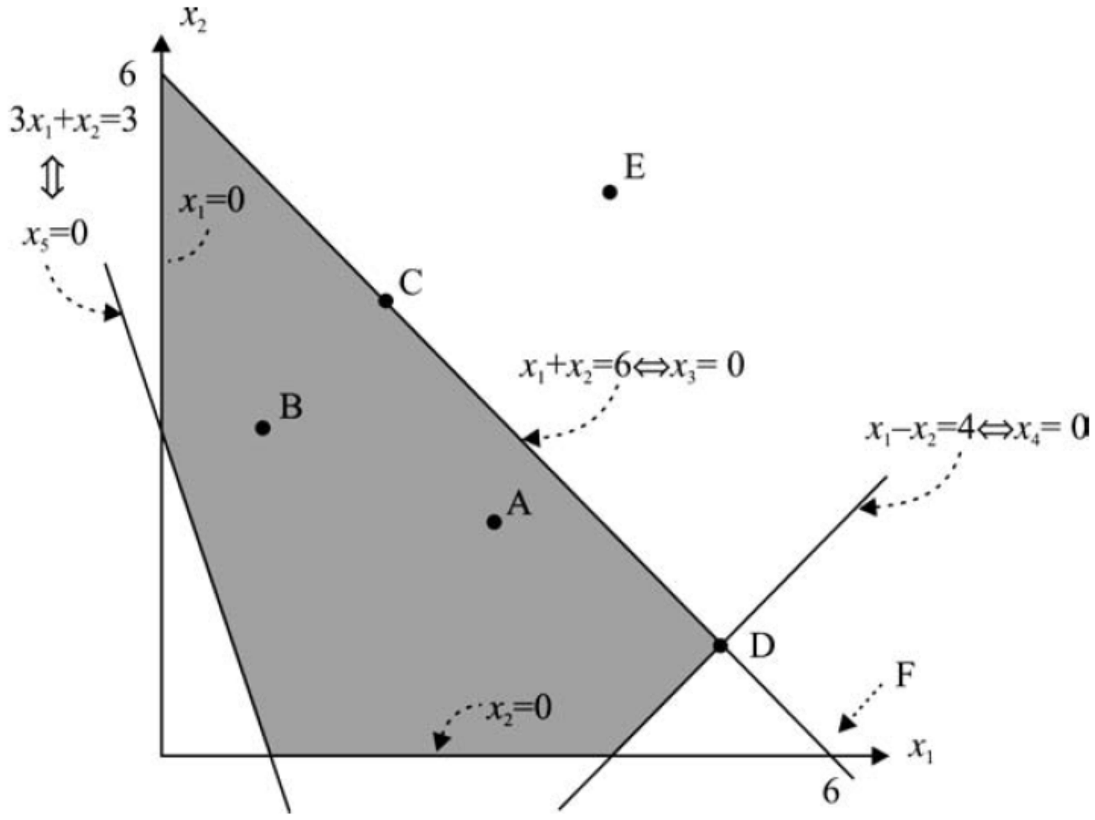
variáveis de folga

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \\ x_1 - x_2 + x_4 &= 4 \\ 3x_1 + x_2 - x_5 &= 3 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\ x_4 &\ge 0,\ x_5 \ge 0. \end{aligned}$$

Forma padrão

Exemplo

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \\ x_1 - x_2 + x_4 &= 4 \\ 3x_1 + x_2 - x_5 &= 3 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 &\geq 0,\ x_5 \geq 0. \end{aligned}$$



Alguns pontos

Ponto **A**:

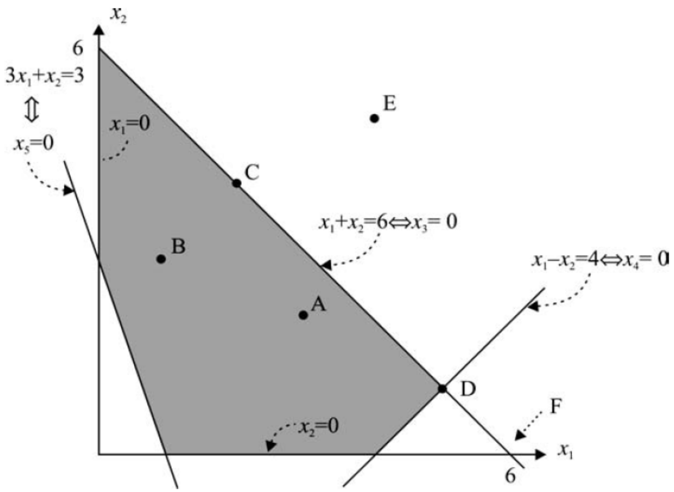
$x_1 = 3$

$x_2 = 2$

$x_3 = 6 - (3 + 2) = 1$

$x_4 = 4 - (3 - 2) = 3$

$x_5 = (3 \times 3 + 2) - 3 = 8$



Ponto **B**:

$x_1 = 1$

$x_2 = 3$

$x_3 = 6 - (1 + 3) = 2$

$x_4 = 4 - (1 - 3) = 6$

$x_5 = (3 \times 1 + 2) - 3 = 3$

Ponto **C**:

$x_1 = 2$

$x_2 = 4$

$x_3 = 6 - (2 + 4) = 0$

$x_4 = 4 - (2 - 4) = 6$

$x_5 = (3 \times 2 + 2) - 3 = 7$

Ponto **D**:

$x_1 = 5$

$x_2 = 1$

$x_3 = 6 - (5 + 1) = 0$

$x_4 = 4 - (5 - 1) = 0$

$x_5 = (3 \times 5 + 1) - 3 = 13.$

Factíveis (Por quê ?) (construção e não-negatividade)

Alguns pontos

Ponto **A**:

$x_1 = 3$

$x_2 = 2$

$x_3 = 6 - (3 + 2) = 1$

$x_4 = 4 - (3 - 2) = 3$

$x_5 = (3 \times 3 + 2) - 3 = 8$

Ponto **B**:

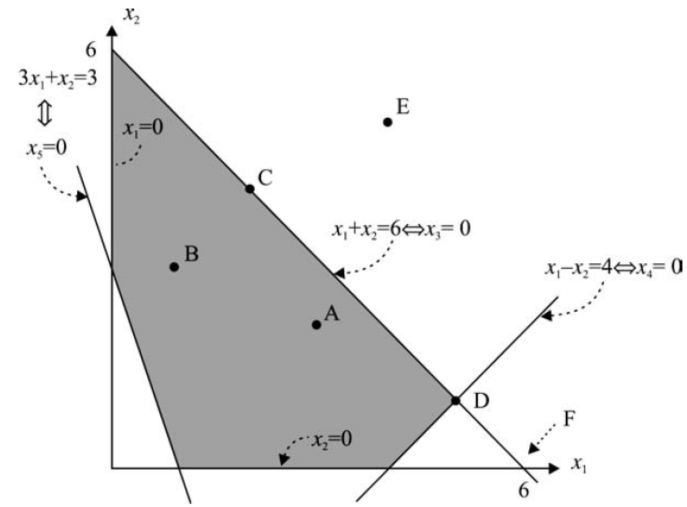
$x_1 = 1$

$x_2 = 3$

$x_3 = 6 - (1 + 3) = 2$

$x_4 = 4 - (1 - 3) = 6$

$x_5 = (3 \times 1 + 2) - 3 = 3$



No interior da região factível (todas as variáveis de folga são positivas).

Alguns pontos

Ponto **C**:

$x_1 = 2$

$x_2 = 4$

$x_3 = 6 - (2 + 4) = 0$

$x_4 = 4 - (2 - 4) = 6$

$x_5 = (3 \times 2 + 2) - 3 = 7$

Ponto **D**:

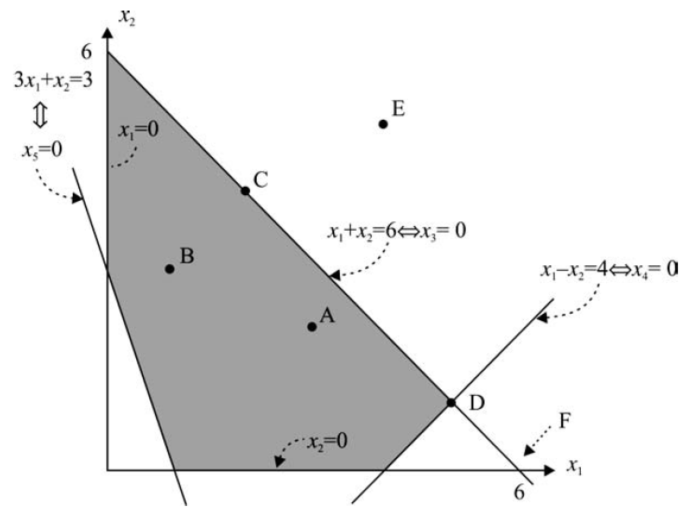
$x_1 = 5$

$x_2 = 1$

$x_3 = 6 - (5 + 1) = 0$

$x_4 = 4 - (5 - 1) = 0$

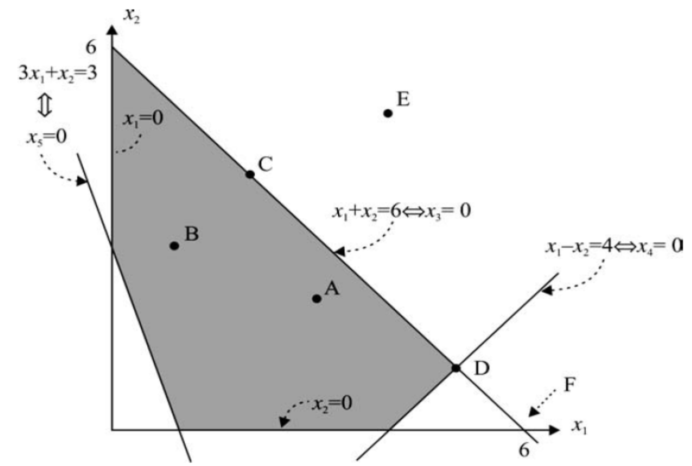
$x_5 = (3 \times 5 + 1) - 3 = 13.$



Na fronteira (alguma variável se anula)!

Variáveis nulas indicam restrições ativas!
Mais de uma variável se anula: vértice (mais de uma restrição ativa)!

Outros pontos



Ponto **E**:

$x_1 = 4$

$x_2 = 5$

$x_3 = 6 - (4 + 5) = -3$

$x_4 = 4 - (4 - 5) = 5$

$x_5 = (3 \times 4 + 5) - 3 = 14$

Ponto **F**:

$x_1 = 6$

$x_2 = 0$

$x_3 = 6 - (6 + 0) = 0$

$x_4 = 4 - (6 - 0) = -2$

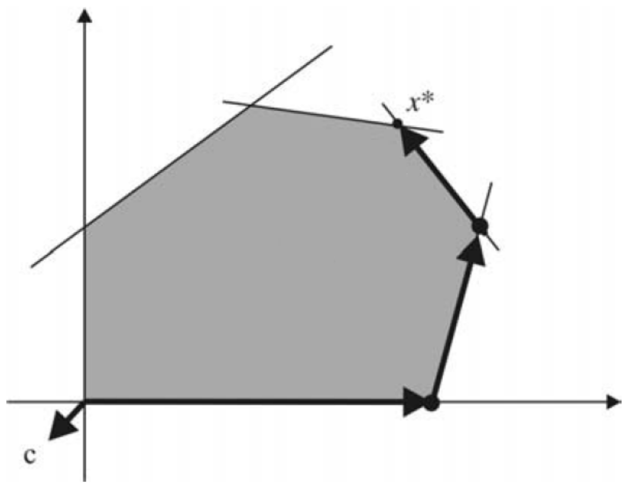
$x_5 = (3 \times 6 + 0) - 3 = 15$

Infactíveis:

Respeitam o sistema Ax = b
mas não respeitam as restrições de não-negatividade!

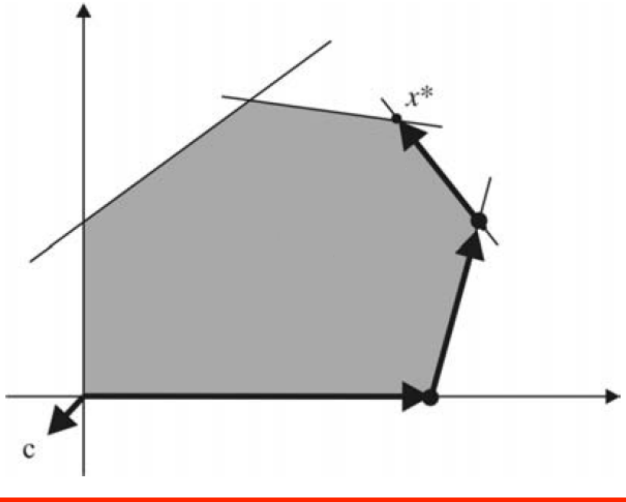
Região factível e vérctices

– Teorema 1: A região factível S={$\mathbf{x} \in R^n$ tal que $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$, $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$} é convexa.



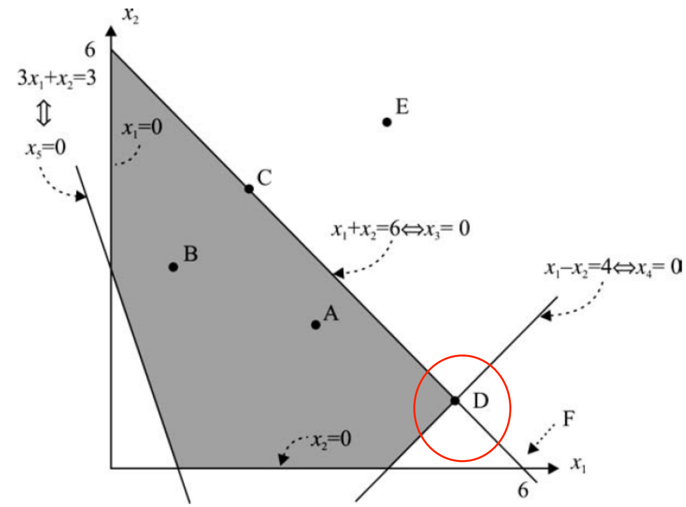
Vértices

- Vimos que sempre que existe uma solução ótima, existe um vértice ótimo.
- Também intuímos que uma maneira de achar a solução ótima seria visitar os vértices factíveis sucessivamente
- Como determinar vértices sem o auxílio do gráfico?



Vértices

- Duas restrições ativas*: duas variáveis nulas!



Ponto **D**: $\begin{cases} x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \\
x_1 - x_2 + x_4 &= 4 \\
3x_1 + x_2 - x_5 &= 3 \\
x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 &\geq 0,\ x_5 \geq 0.
\end{aligned}$$

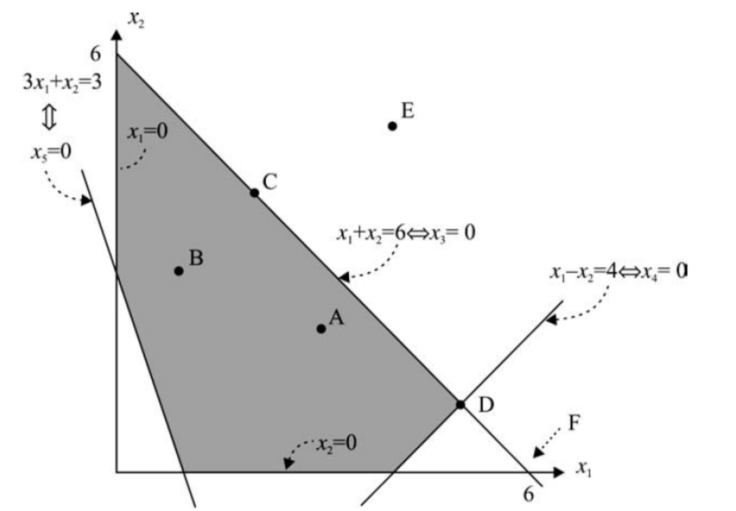
$$\longrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 6 \\ x_1 - x_2 = 4, \\ 3x_1 + x_2 - x_5 = 3 \end{cases}$$

3 equações, 3 incógnitas!

$$\boxed{\begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = 1 \\ x_5 = 13. \end{cases}}$$

* Caso geral: n-m variáveis nulas.

Vértices



- Factíveis:
  - Ao fixar (*n*-*m*) variáveis em zero, a resolução do sistema resulta em valores positivos para as variáveis restantes. (Ex. ponto D)
- Infactíveis
  - Ao fixar (*n*-*m*) variáveis em zero, a resolução do sistema resulta em **ao menos um valor negativo** para as variáveis restantes. (Ex. ponto F)

Escrevendo o sistema

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 - x_2 \quad + x_4 \\ 3x_1 + x_2 \quad - x_5 \end{bmatrix}}_{\mathbf{Ax}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}}$$

Apesar de fixarmos (*n*-*m*) variáveis em zero (no exemplo, x_3 e x_4), continuamos as escrevendo (embora de maneira isolada):

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \\ 3x_1 + x_2 - x_5 \end{bmatrix}}_{\substack{\text{variáveis} \\ \text{restantes}}} + \underbrace{\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\substack{\text{variáveis} \\ \text{a serem} \\ \text{fixadas}}} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Escrevendo o sistema

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \\ 3x_1 + x_2 - x_5 \end{bmatrix}}_{\substack{\text{variáveis} \\ \text{restantes}}} + \underbrace{\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\substack{\text{variáveis} \\ \text{a serem} \\ \text{fixadas}}} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Em notação matricial

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_5 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}_\mathrm{B}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{N}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}_\mathrm{N}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}}$$

Índices:

$$B = (B_1\ B_2\ B_3):$$
$$N = (N_1\ N_2):$$

$$B_1 = 1,\ B_2 = 2,\ B_3 = 5,$$
$$N_1 = 3,\ N_2 = 4,$$

Referenciando

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_5 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x_B}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{N}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x_N}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}}$$

colunas associadas

$$\mathbf{B} = [\mathbf{a}_{B_1}\ \mathbf{a}_{B_2}\ \mathbf{a}_{B_3}] = [\mathbf{a}_1\ \ \mathbf{a}_2\ \ \mathbf{a}_5]$$
$$\mathbf{N} = [\mathbf{a}_{N_1}\ \mathbf{a}_{N_2}] = [\mathbf{a}_3\ \ \mathbf{a}_4],$$

Índices:

$$B = (B_1\ B_2\ B_3):$$
$$N = (N_1\ N_2):$$
$$B_1 = 1,\ B_2 = 2,\ B_3 = 5,$$
$$N_1 = 3,\ N_2 = 4,$$

$$\mathbf{x}_B = \begin{bmatrix} x_{B_1} \\ x_{B_2} \\ x_{B_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}_N = \begin{bmatrix} x_{N_1} \\ x_{N_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}.$$

Resumindo

- Temos um problema de otimização e o escrevemos na forma padrão.

$$
\begin{aligned}
\text{Minimizar} \quad f(\mathbf{x}) &= \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} \\
\mathbf{A}\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\
\mathbf{x} &\geq \mathbf{0},
\end{aligned}
$$

- Escrevemos o sistema Ax=b na forma:

$$
\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{B}\mathbf{x}_{\mathrm{B}} + \mathbf{N}\mathbf{x}_{\mathrm{N}} = \mathbf{b}
$$

Resumindo

- Escolhendo (*n*-*m*) variáveis para x_N e o restante para X_B.

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{Bx_B} + \mathbf{Nx_N} = \mathbf{b}$$

- x_N=0 (e colunas de B invertível)

- BX_B = b é um sistema com o mesmo número de equações e incógnitas (*m*). Se as variáveis solução desse sistema são ≥ 0, vértice factível. Caso contrário, vértice Infactível.

Resolvendo o sistema

- E se B não for invertível ?

  Sempre escolhemos para B, *m* variáveis cujas colunas constituem uma matriz invertível.

- Supor que posto(A)=m (implica $m \leq n$). Se m=n, o sistema tem solução única (não tem problema), na forma padrão admitimos $m<n$. $Ax=b$ tem infinitas soluções.

Partição básica (Matriz básica)

$\mathbf{A} = [\mathbf{B} \;\; \mathbf{N}]$

- B_{mxm} - matriz básica - formada por *m* colunas linearmente independentes de A.

- B pode ser escrita como:

$$\mathbf{B} = [\mathbf{a}_{B_1} \; \mathbf{a}_{B_2} \cdots \mathbf{a}_{B_m}]$$

Onde B_1, B_2,..., B_m são os índices das colunas escolhidas da matriz A (índices básicos)

Partição básica (Matriz não-básica)

$\mathbf{A} = [\mathbf{B} \ \ \mathbf{N}]$

- $N_{mx\,(n-m)}$ - matriz não-básica - formada pelas *n-m* colunas restantes de A.

- N pode ser escrita como:

$$\mathbf{N} = [\mathbf{a}_{N_1} \ \mathbf{a}_{N_2} \cdots \ \mathbf{a}_{Nn-m}]$$

Onde N_1, N_2,..., N_m são os índices das colunas da matriz A que pertencem a N (índices não-básicos)

Partição básica (partição das variáveis)

- Consequentemente, a partição de A em [B N] cria uma partição das variáveis:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_B \\ \mathbf{x}_N \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}_B = \begin{bmatrix} x_{B_1} \\ x_{B_2} \\ \vdots \\ x_{B_m} \end{bmatrix}$$ variáveis básicas

$$\mathbf{x}_N = \begin{bmatrix} x_{N_1} \\ \vdots \\ x_{N_{n-m}} \end{bmatrix}$$ variáveis não básicas

Solução geral do sistema

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \Leftrightarrow [\mathbf{B}\mathbf{N}] \begin{bmatrix} \mathbf{x}_\mathbf{B} \\ \mathbf{x}_\mathbf{N} \end{bmatrix} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{B}\mathbf{x}_\mathbf{B} + \mathbf{N}\mathbf{x}_\mathbf{N} = \mathbf{b}.$$

$$\mathbf{x}_\mathbf{B} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}_\mathbf{N}$$

- A última expressão de x_B é conhecida como solução geral do sistema.

Solução básica

- Considere uma partição básica A=[B,N]. Uma solução é dita básica quando:

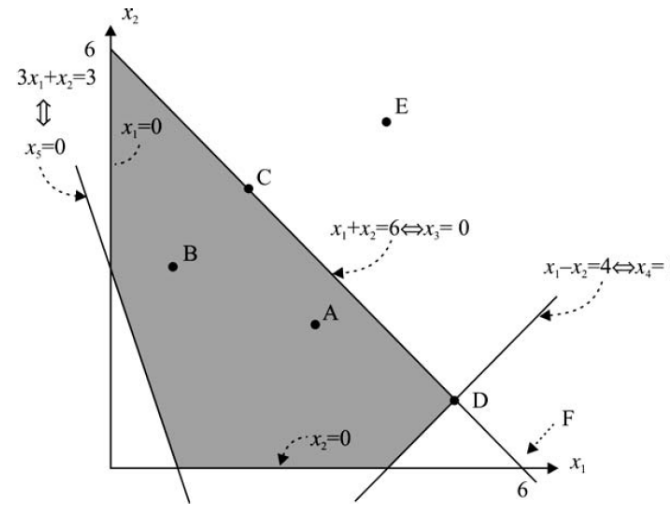
$$\begin{cases} \hat{\mathbf{x}}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \\ \hat{\mathbf{x}}_N = \mathbf{0}. \end{cases}$$

- Se todas as componentes de x_B são não-negativas, então temos uma *solução básica factível*. Caso contrário, temos uma *solução básica não-factível.*

Voltando ao exemplo

- Ponto D:

$$\underbrace{\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\1 & -1 & 0\\3 & 1 & -1\end{bmatrix}}_{\mathbf{B}}\underbrace{\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_5\end{bmatrix}}_{\mathbf{x_B}}+\underbrace{\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}}_{\mathbf{N}}\underbrace{\begin{bmatrix}x_3\\x_4\end{bmatrix}}_{\mathbf{x_N}}=\underbrace{\begin{bmatrix}6\\4\\3\end{bmatrix}}_{\mathbf{b}}$$



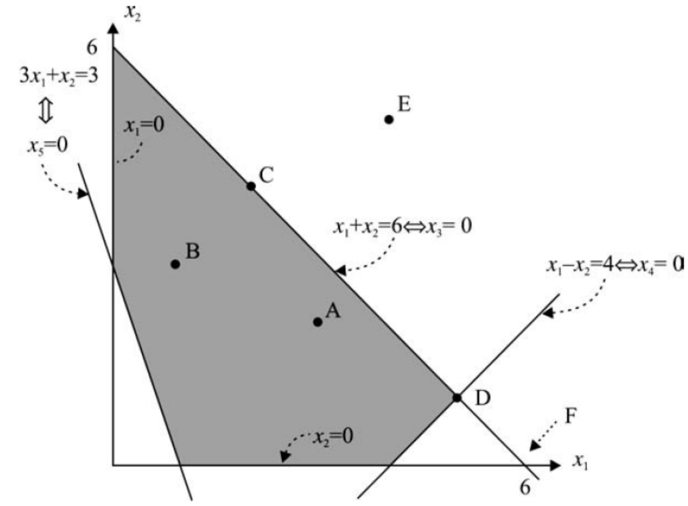
$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\1 & -1 & 0\\3 & 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\4\\3\end{bmatrix} \Leftrightarrow \mathbf{B}\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{B}}=\mathbf{b}$$

$$\hat{\mathrm{x}}_{\mathrm{B}}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\1\\13\end{bmatrix} \longrightarrow \text{Solução básica factível}$$

Voltando ao exemplo

- Ponto F:

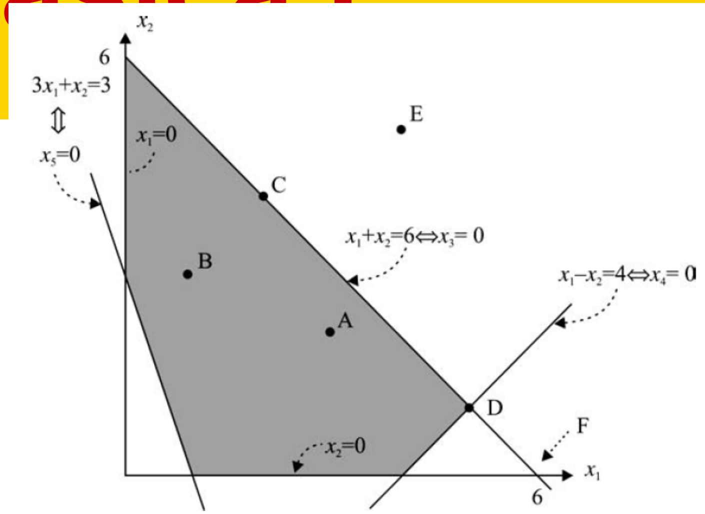
$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x_B}} + \cancel{\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{N}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x_N}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}}$$



$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathrm{x}}_{\mathrm{B}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ 15 \end{bmatrix} \longrightarrow$$ Solução básica *não*-factível

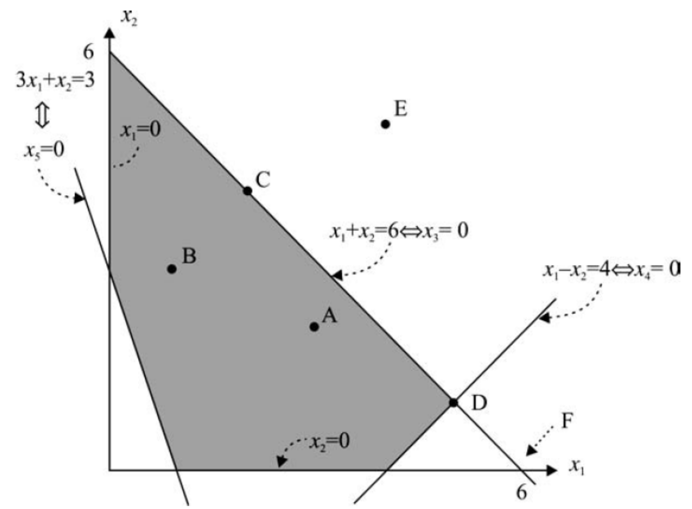
Propriedade básica I



- Considere região factível **S**= $\{x \in R^m \mid Ax=b, x \geq 0\}$.

Um ponto $x \in$ **S** é um vértice de **S** se e somente se x for uma solução básica factível.

Propriedade básica II



Se um problema de otimização linear tem uma solução ótima, então existe um vértice ótimo

Método possível

- Enumerar todas as soluções básicas (vértices)

x_1, x_2, ... x_K

- Escolher aquela com melhor função objetivo.

- Problema:

  K pode ser muito grande!

Simplex

Idéia:

- Partir de uma solução básica factível
- Visitar apenas as soluções básicas factíveis melhores que ela.

$\boxed{\text{Método Simplex}}$