Pesquisa Operacional / Programação Matemática

Método Simplex: Partições e soluções básicas e não-básicas.

Alysson M. Costa – ICMC/USP

Forma padrão

- Consideramos sempre o problema na forma padrão:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad f(\mathbf{x}) &= \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} \\ \mathbf{A}\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Dimensões:

A $(m \times n)$

b $(m \times 1)$

Soluções básicas

- Considere a seguinte região factível no R^2

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 &\le 6\\
x_1 - x_2 &\le 4\\
3x_1 + x_2 &\ge 3\\
x_1 \ge 0,\ x_2 &\ge 0.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_3 &= 6 - (x_1 + x_2) \ge 0\\
x_4 &= 4 - (x_1 - x_2) \ge 0\\
x_5 &= (3x_1 + x_2) - 3 \ge 0,
\end{aligned}
$$

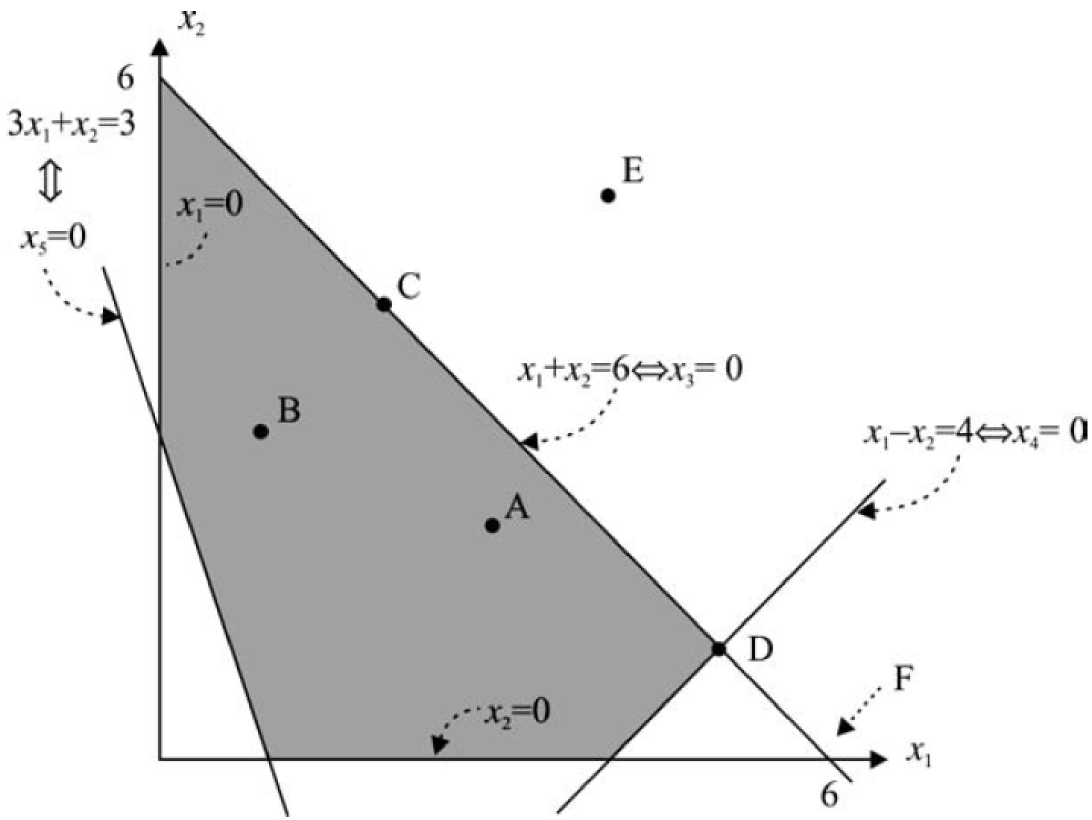
variáveis de folga

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 &= 6\\
x_1 - x_2 + x_4 &= 4\\
3x_1 + x_2 - x_5 &= 3\\
x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\ x_4 &\ge 0,\ x_5 \ge 0.
\end{aligned}
$$

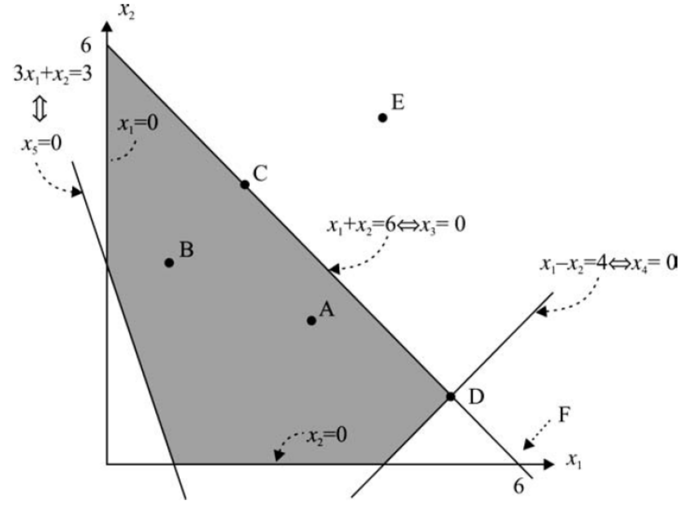
Forma padrão

Soluções básicas

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 \quad &= 6 \\
x_1 - x_2 \quad + x_4 \quad &= 4 \\
3x_1 + x_2 \quad - x_5 &= 3 \\
x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ &x_4 \geq 0,\ x_5 \geq 0.
\end{aligned}
$$



Alguns pontos



Ponto **A**:

$x_1 = 3$

$x_2 = 2$

$x_3 = 6 - (3 + 2) = 1$

$x_4 = 4 - (3 - 2) = 3$

$x_5 = (3 \times 3 + 2) - 3 = 8$

Ponto **B**:

$x_1 = 1$

$x_2 = 3$

$x_3 = 6 - (1 + 3) = 2$

$x_4 = 4 - (1 - 3) = 6$

$x_5 = (3 \times 1 + 2) - 3 = 3$

Ponto **C**:

$x_1 = 2$

$x_2 = 4$

$x_3 = 6 - (2 + 4) = 0$

$x_4 = 4 - (2 - 4) = 6$

$x_5 = (3 \times 2 + 2) - 3 = 7$

Ponto **D**:

$x_1 = 5$

$x_2 = 1$

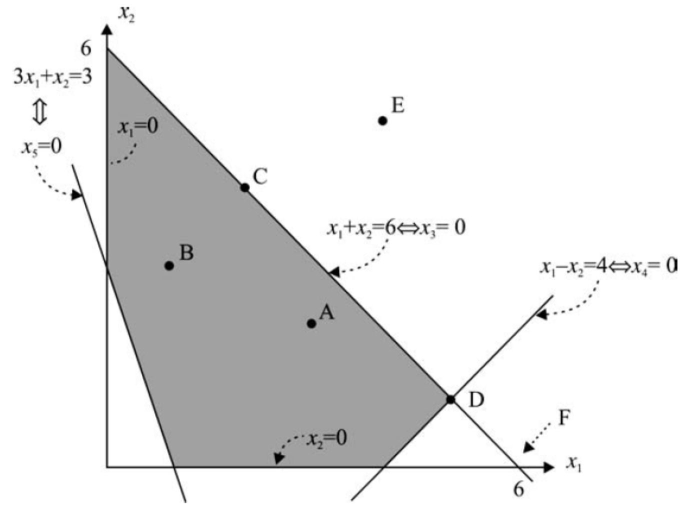
$x_3 = 6 - (5 + 1) = 0$

$x_4 = 4 - (5 - 1) = 0$

$x_5 = (3 \times 5 + 1) - 3 = 13.$

Factíveis (Por quê ?) (construção e não-negatividade)

Alguns pontos



Ponto **A**:

$x_1 = 3$

$x_2 = 2$

$x_3 = 6 - (3 + 2) = 1$

$x_4 = 4 - (3 - 2) = 3$

$x_5 = (3 \times 3 + 2) - 3 = 8$

Ponto **B**:

$x_1 = 1$

$x_2 = 3$

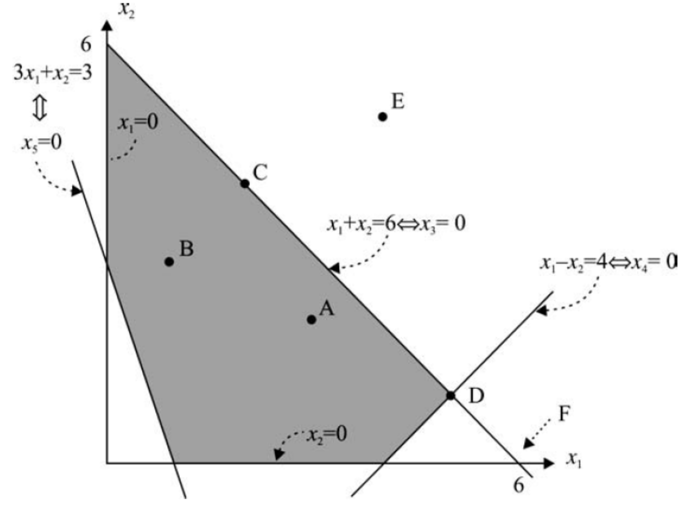
$x_3 = 6 - (1 + 3) = 2$

$x_4 = 4 - (1 - 3) = 6$

$x_5 = (3 \times 1 + 2) - 3 = 3$

No interior da região factível (todas as variáveis de folga são positivas).

Alguns pontos



Ponto **C**:

$x_1 = 2$

$x_2 = 4$

$x_3 = 6 - (2 + 4) = 0$

$x_4 = 4 - (2 - 4) = 6$

$x_5 = (3 \times 2 + 2) - 3 = 7$

Ponto **D**:

$x_1 = 5$

$x_2 = 1$

$x_3 = 6 - (5 + 1) = 0$

$x_4 = 4 - (5 - 1) = 0$

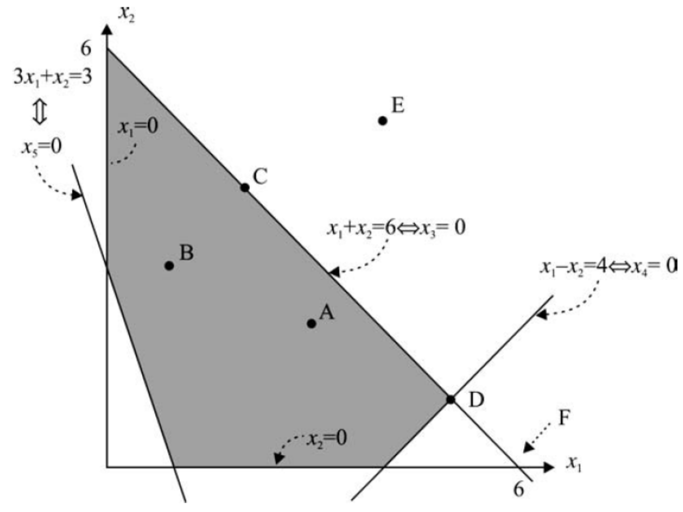
$x_5 = (3 \times 5 + 1) - 3 = 13.$

Na fronteira (alguma variável se anula)!

Variáveis nulas indicam restrições ativas.

Mais de uma variável se anula: vértice (no caso de duas variáveis) - mais de uma restrição ativa.

Outros pontos



Ponto **E**:

$x_1 = 4$

$x_2 = 5$

$x_3 = 6 - (4 + 5) = -3$

$x_4 = 4 - (4 - 5) = 5$

$x_5 = (3 \times 4 + 5) - 3 = 14$

Ponto **F**:

$x_1 = 6$

$x_2 = 0$

$x_3 = 6 - (6 + 0) = 0$

$x_4 = 4 - (6 - 0) = -2$

$x_5 = (3 \times 6 + 0) - 3 = 15$

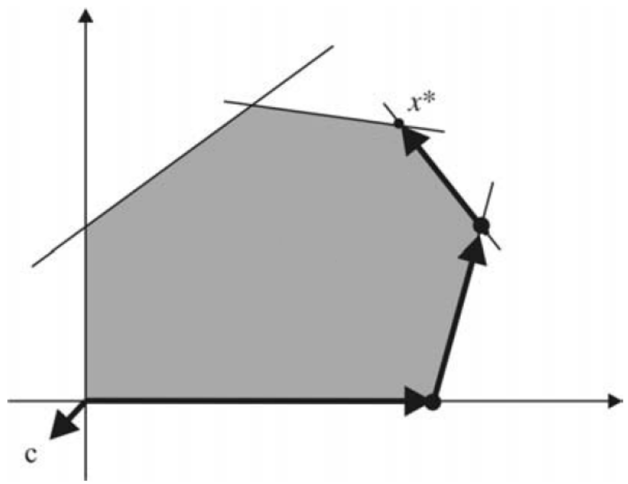
Infactíveis:

Respeitam o sistema Ax = b

mas não respeitam as restrições de não-negatividade!

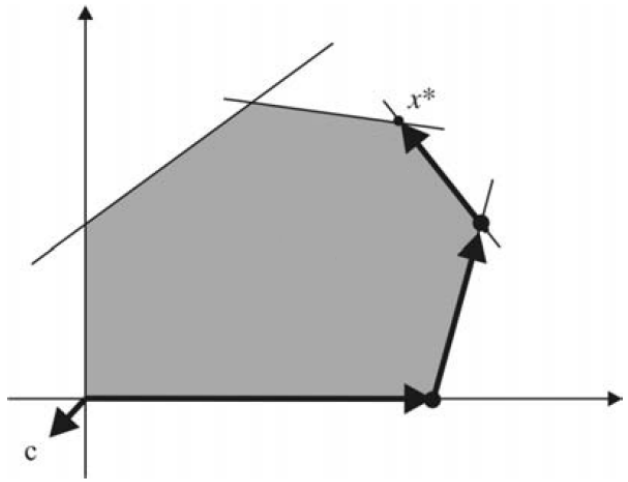
Pontos Extremos (P.E.)

- Teorema 1: A região definida por $Ax=b$, $x \geq 0$ é convexa.



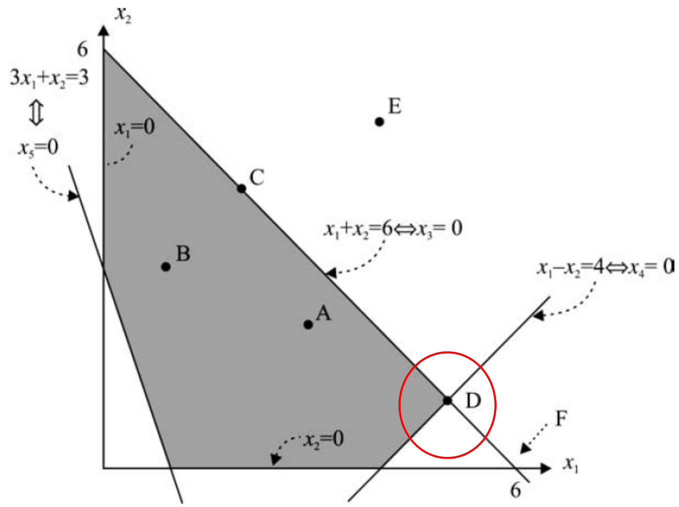
Pontos Extremos (P.E.)

- Vimos que sempre que existe uma solução ótima, existe um ponto extremo ótimo.
- Também intuímos que uma maneira de achar a solução ótima seria visitar os pontos extremos sucessivamente
- Como determinar pontos extremos sem o auxílio do gráfico?



Pontos Extremos (P.E.)

- Duas restrições ativas*:
  duas variáveis nulas!



Ponto **D**: $\begin{cases} x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 \quad &= 6 \\ x_1 - x_2 \quad + x_4 \quad &= 4 \\ 3x_1 + x_2 \quad - x_5 &= 3 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0,\ x_5 &\geq 0. \end{aligned} \longrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 6 \\ x_1 - x_2 = 4 \\ 3x_1 + x_2 - x_5 = 3 \end{cases},$$

3 equações, 3 incógnitas!

$$\boxed{\begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = 1 \\ x_5 = 13. \end{cases}}$$

* Caso geral: n-m variáveis nulas.

Pontos Extremos (P.E.)

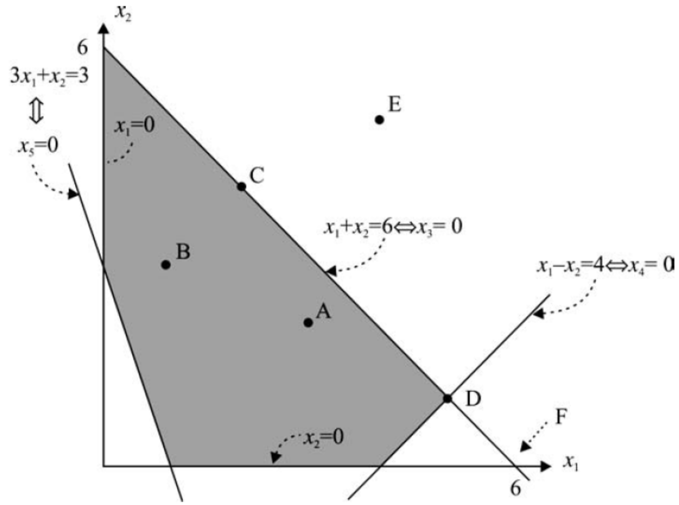
- Resumo:
  - Resultam do encontro de restrições.
  - Uma restrição equivale a uma variável (do problema na forma padrão) igual a zero.
  - No exemplo anterior:

3 equações

5 variáveis

(duas variáveis independentes)

Pontos Extremos (P.E.)



- Factíveis:
  - Ao fixar (n-m) variáveis em zero, a resolução do sistema resulta em valores positivos para as variáveis restantes. (Ex. ponto D)
- Infactíveis
  - Ao fixar (n-m) variáveis em zero, a resolução do sistema resulta em **ao menos um valor negativo** para as variáveis restantes. (Ex. ponto F)

Escrevendo o sistema

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 + x_2 + x_3 & & \\ x_1 - x_2 & + x_4 & \\ 3x_1 + x_2 & & - x_5 \end{bmatrix}}_{\mathbf{Ax}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}}$$

Apesar de fixarmos (*n-m*) variaveis em zero (no exemplo, x_3 e x_4), continuamos as escrevendo (embora de maneira isolada):

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \\ 3x_1 + x_2 - x_5 \end{bmatrix}}_{\text{variáveis restantes}} + \underbrace{\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\text{variáveis a serem fixadas}} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Escrevendo o sistema

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \\ 3x_1 + x_2 - x_5 \end{bmatrix}}_{\text{variáveis restantes}} + \underbrace{\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\text{variáveis a serem fixadas}} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_5 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x_B}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{N}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x_N}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}}$$

Índices:

$B = (B_1\ B_2\ B_3)$:

$N = (N_1\ N_2)$:

$B_1 = 1,\ B_2 = 2,\ B_3 = 5,$

$N_1 = 3,\ N_2 = 4,$

Referenciando

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_5 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x_B}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{N}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x_N}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}}$$

colunas associadas

$$\mathbf{B} = [\mathbf{a}_{B_1}\ \mathbf{a}_{B_2}\ \mathbf{a}_{B_3}] = [\mathbf{a}_1\ \ \mathbf{a}_2\ \ \mathbf{a}_5]$$

$$\mathbf{N} = [\mathbf{a}_{N_1}\ \mathbf{a}_{N_2}] = [\mathbf{a}_3\ \ \mathbf{a}_4],$$

Índices:

$B = (B_1\ B_2\ B_3)$:

$N = (N_1\ N_2)$:

$B_1 = 1,\ B_2 = 2,\ B_3 = 5,$

$N_1 = 3,\ N_2 = 4,$

$$\mathbf{x}_B = \begin{bmatrix} x_{B_1} \\ x_{B_2} \\ x_{B_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}_N = \begin{bmatrix} x_{N_1} \\ x_{N_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}.$$

Resumindo

- Temos um problema de otimização e o escrevemos na forma padrão.

- Escrevemos

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} \\ & \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \end{aligned}$$

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{Bx}_{\mathbf{B}} + \mathbf{Nx}_{\mathbf{N}} = \mathbf{b}$$

Resumindo

- Escolhendo (n-m) variáveis para x_N e o restante para X_B, temos os diversos pontos extremos.

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{Bx_B} + \mathbf{Nx_N} = \mathbf{b}$$

- $BX_B = b$ é um sistema com o mesmo número de equações e incógnitas (m). Se as variáveis solução desse sistema são ≥ 0, P.E. Factível. Caso contrário, P.E. Infactível.

Resolvendo o sistema

- E se B não for invertível ?

  Sempre escolhemos para B, m variáveis cujas colunas constituem uma matriz inversível.

Partição básica (Matriz básica)

$$\mathbf{A} = [\mathbf{B} \;\; \mathbf{N}]$$

- $B_{m\times m}$ - matriz básica - formada por *m* colunas linearmente independentes de A.

- B pode ser escrita como:

Onde B_1, B_2,..., B_m são os índices das colunas escolhidas da matriz A (índices básicos) $\mathbf{B} = [\mathbf{a}_{B_1} \; \mathbf{a}_{B_2} \cdots \mathbf{a}_{B_m}]$

Partição básica (Matriz não-básica)

$$\mathbf{A} = [\mathbf{B} \;\; \mathbf{N}]$$

- $N_{m\times(n\text{-}m)}$ - matriz não-básica - formada pelas *n*-*m* colunas restantes de A.

- N pode ser escrita como:

Onde N_1, N_2,..., N_m são os índices das colunas da matriz A que pertencem a N (índi $\mathbf{N} = [\mathbf{a}_{N_1} \;\; \mathbf{a}_{N_2} \cdots \mathbf{a}_{Nn-m}]$

Partição básica (partição das variáveis)

- Consequentemente, a partição de A em [B N] cria uma partição das variáveis:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x_B} \\ \mathbf{x_N} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x_B} = \begin{bmatrix} x_{B_1} \\ x_{B_2} \\ \vdots \\ x_{B_m} \end{bmatrix}$$

variáveis básicas

$$\mathbf{x_N} = \begin{bmatrix} x_{N_1} \\ \vdots \\ x_{N_{n-m}} \end{bmatrix}$$

variáveis não básicas

Solução geral do sistema

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \Leftrightarrow [\mathbf{BN}] \begin{bmatrix} \mathbf{x_B} \\ \mathbf{x_N} \end{bmatrix} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{Bx_B} + \mathbf{Nx_N} = \mathbf{b}.$$

$$\mathbf{x_B} = \mathbf{B^{-1}b} - \mathbf{B^{-1}Nx_N}$$

- A última expressão de x_B é conhecida como solução geral do sistema.

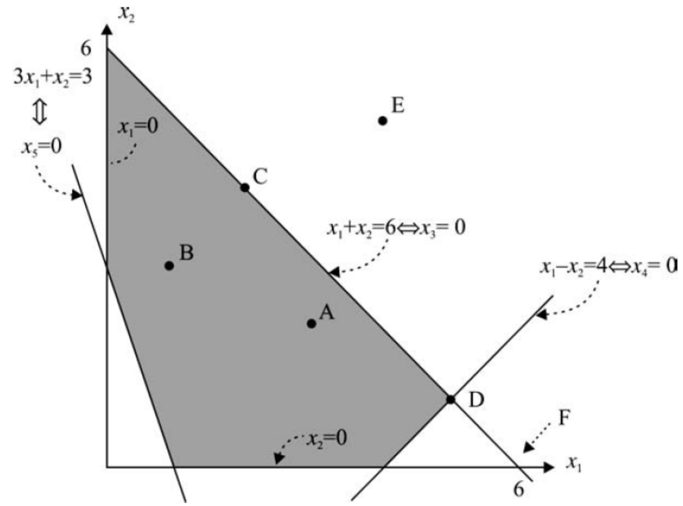
Solução básica

- Uma solução é dita básica quando:

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{x}}_{\mathrm{B}} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \\ \hat{\mathbf{x}}_{\mathrm{N}} = \mathbf{0}. \end{cases}$$

- Se todas as componentes de x_{B} são não-negativas, então temos uma *solução básica factível*. Caso contrário, temos uma *solução básica não-factível.*

Voltando ao exemplo



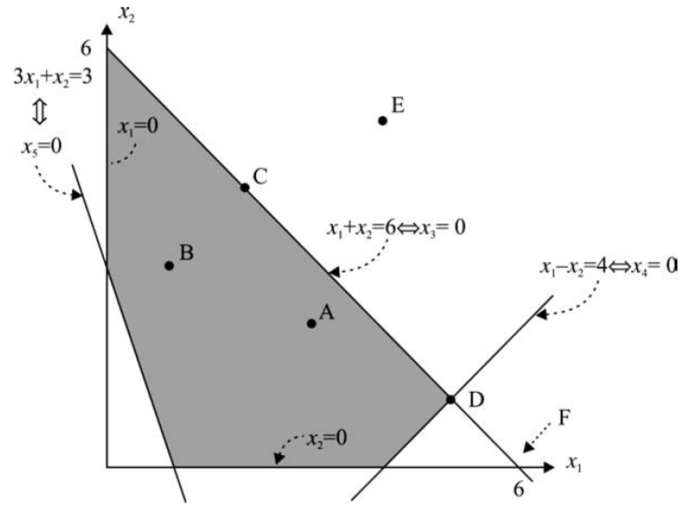
- Ponto D:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_5 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}_B} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{N}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}_N} = \underbrace{\begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \mathbf{B}\hat{\mathbf{x}}_B = \mathbf{b}$$

$$\hat{x}_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 13 \end{bmatrix} \longrightarrow$$ Solução básica factível.

Voltando ao exemplo



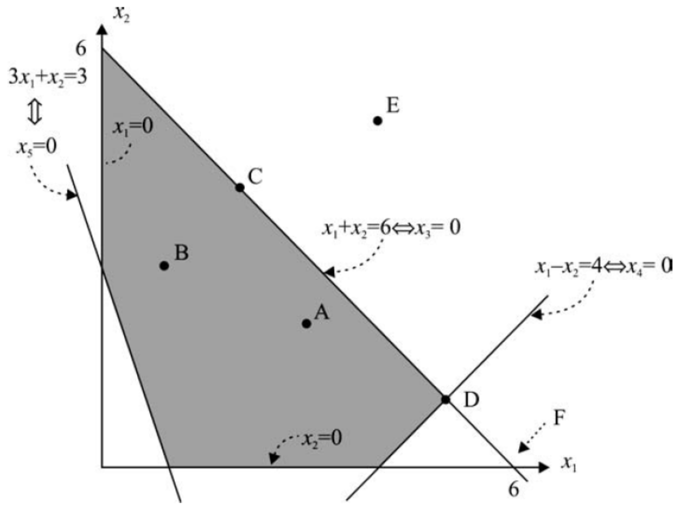
- Ponto F:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x_B}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{N}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x_N}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathrm{x}}_{\mathrm{B}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ 15 \end{bmatrix} \longrightarrow$$ Solução básica *não*-factível.

Propriedade básica I

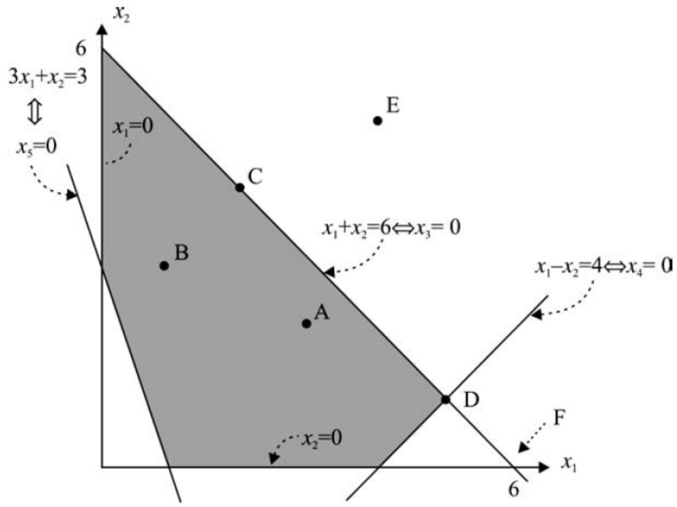


- Considere região factível $\mathbf{S}=\{x\in R^n \mid Ax=b, x\geq 0\}$.

Um ponto $x \in \mathbf{S}$ é um vértice de $\mathbf{S}$ se e somente se x for uma solução básica factível.

Teorema 2.

Propriedade básica II



Se um problema de otimização linear tem uma solução ótima, então existe um vértice ótimo

Método possível

- Enumerar todas as soluções básicas (vértices)

x_1, x_2, ... x_K

- Escolher aquela com melhor função objetivo.

- Problema:
  K pode ser muito grande!

Simplex

Idéia:

- Partir de uma solução básica factível
- Visitar apenas as soluções básicas factíveis melhores que ela.

$\boxed{\text{Método Simplex}}$