Pesquisa Operacional / Programação Matemática

Otimização discreta

Branch-and-bound

Como resolver PIMs ?

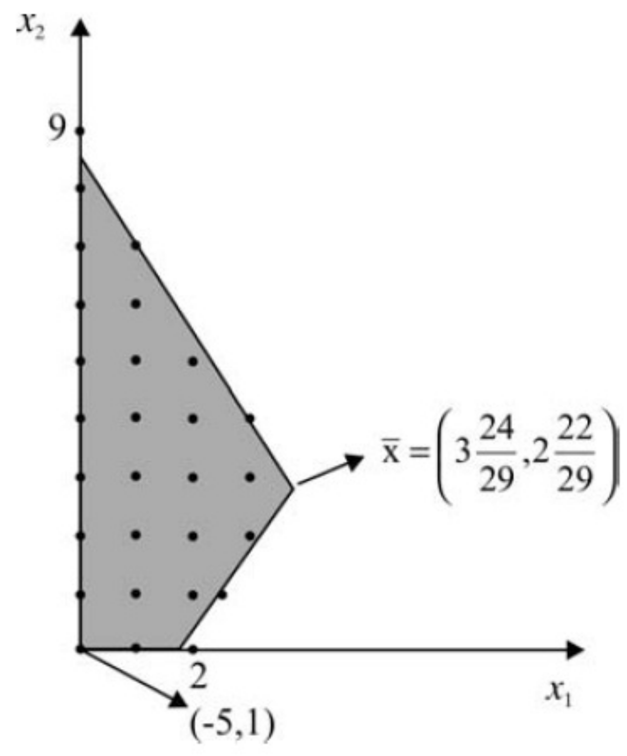
- Antes: todas as variáveis reais.
  - Simplex

Agora:

$$
\begin{aligned}
z = \max\ & \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} + \mathbf{d}^{\mathrm{T}}\mathbf{y} \\
& \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{y} \le \mathbf{b} \\
& \mathbf{x} \in R_{+}^{n}, \mathbf{y} \in Z_{+}^{p}
\end{aligned}
$$

problema:

$$z = \max 5x_1 - x_2$$
$$7x_1 - 5x_2 \le 13$$
$$3x_1 + 2x_2 \le 17$$
$$x \in Z_+^2$$



- Apesar de não representar perfeitamente o problema original, a relaxação terá um papel fundamental nos métodos.

$$(P) \qquad z = \max\left\{\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} : \mathbf{A}\mathbf{x} \le \mathbf{b}, \mathbf{x} \in Z_+^n\right\}$$

$$(PL) \qquad \overline{z} = \max\left\{\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} : \mathbf{A}\mathbf{x} \le \mathbf{b}, \mathbf{x} \in R_+^n\right\}$$

Lembrete: $\overline{z} \ge z.$ (caso de maximização)

Definições:

Definição 3.1 Um subconjunto de R^n descrito por restrições lineares $P = \{\mathbf{x} \in R^n : \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}\}$ é um poliedro.

Definição 3.2 Um poliedro $P \subset R^{n+p}$ é uma formulação para um conjunto $X \subset Z^n \times R^p$ se e somente se $X = P \cap (Z^n \times R^p)$.

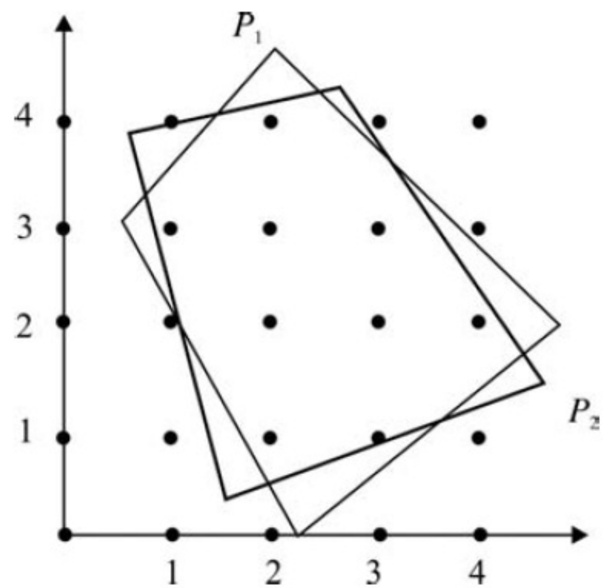


Figura 3.30 Duas formulações distintas para um problema de programação inteira.

Qual a "melhor" formulação ?

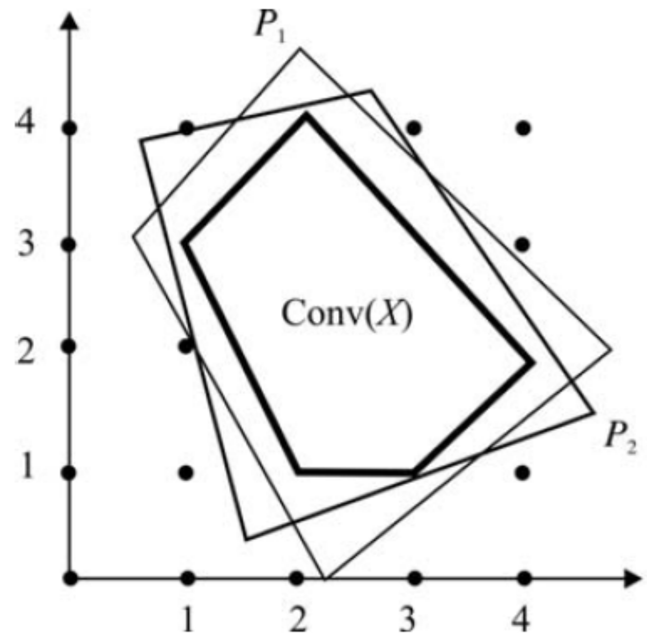
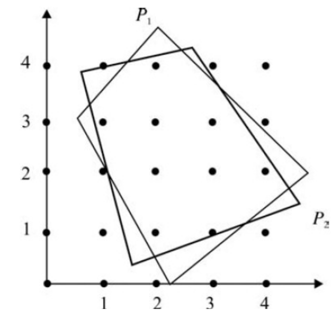


Figura 3.31 Envoltória convexa do conjunto X.



- por que melhor ?
- O que acontece se resolvermos o problema linear, neste caso ?

- Problema:
  - É difícil obter a envoltória convexa.

Enumeração

- idéia "inocente" inicial:

  listar todos os pontos possíveis.

- Contra exemplo clássico:

  Caixeiro viajante: n! soluções possíveis.

Enumeração implícita

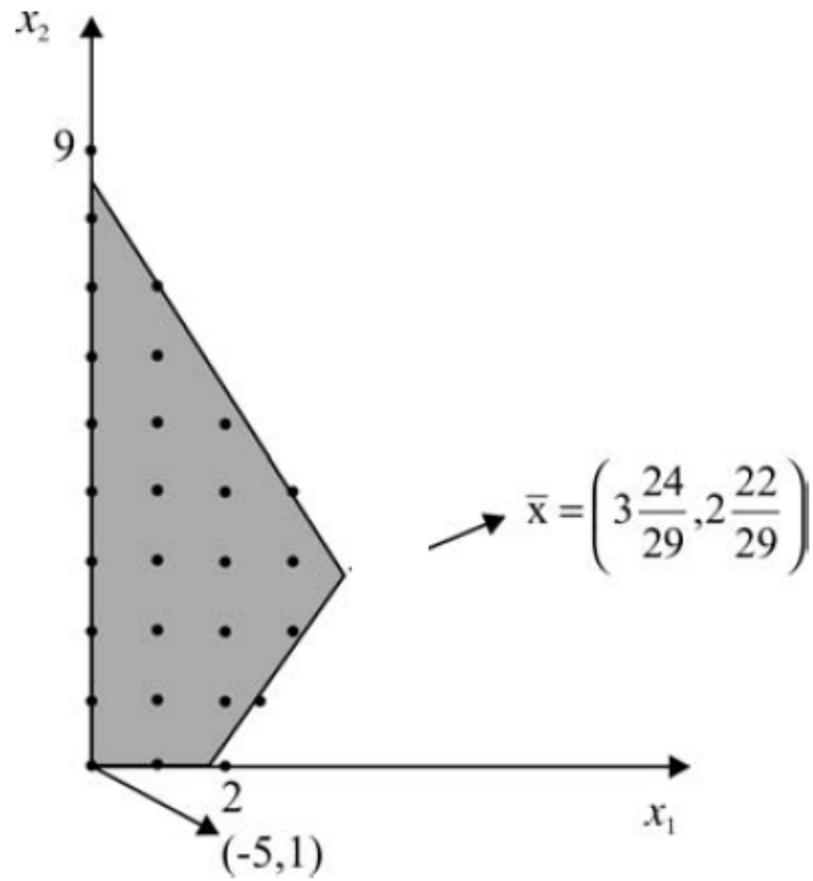
- Idéia: investigar apenas soluções *promissoras.*

- Como encontrar soluções promissoras ? Como saber onde investigar ?

Exemplo

$$z = \max 5x_1 - x_2$$
$$7x_1 - 5x_2 \leq 13$$
$$3x_1 + 2x_2 \leq 17$$
$$x \in Z_+^2$$

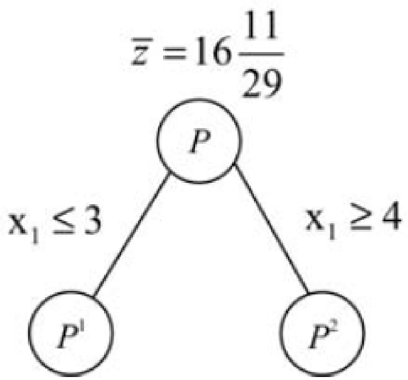
$$\bar{z} = 16\frac{11}{29},$$



Na solução do problema original:

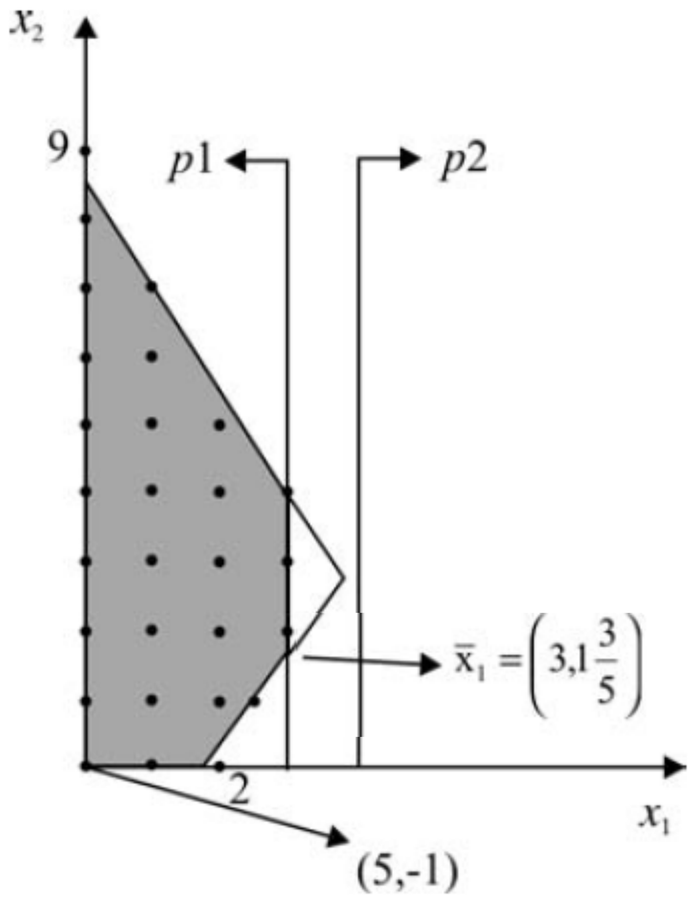
ou $x_1 \leq 3$ ou $x_1 \geq 4$ $z=475/29 \cong 16.38$

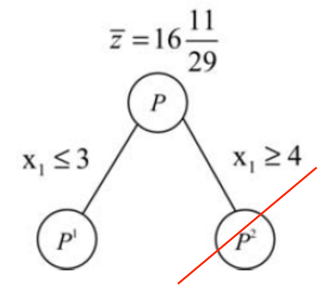
Vamos **dividir para conquistar!**



- A solução ótima está ou em P^1 ou em P^2. Investigamos (*a priori*) os dois.
- Nomenclatura:
  - a variável x_1 foi "ramificada"
  - os nós P^1 e P^2 são nós filhos de P.

- Nova situação:





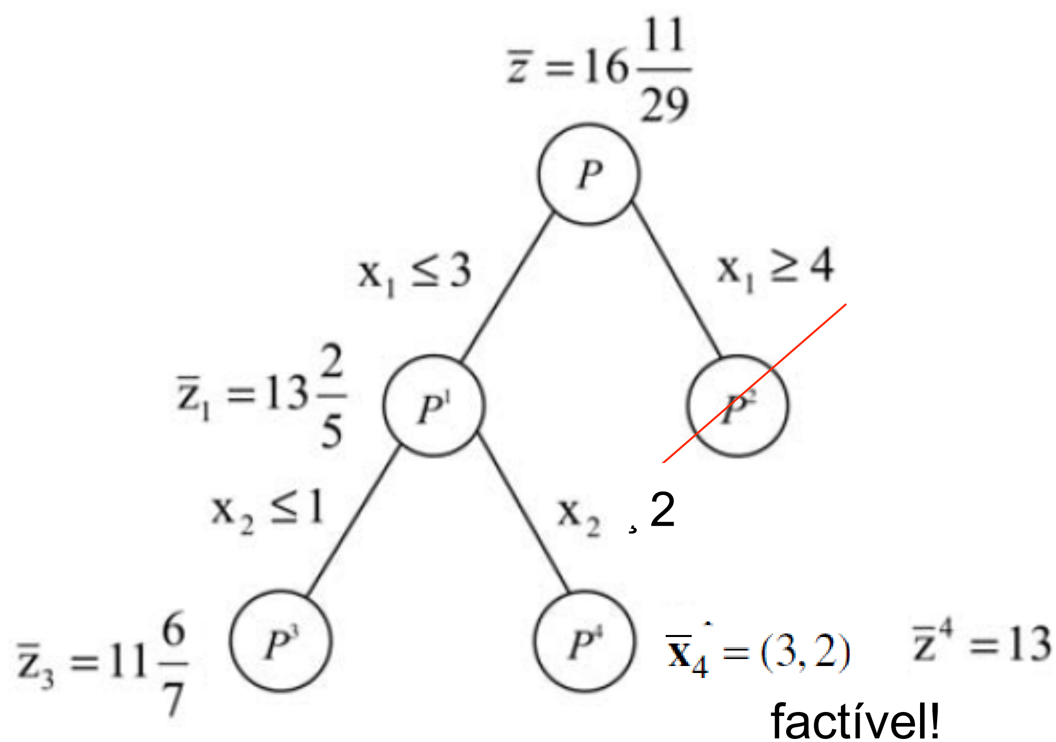
P^2 é vazio.
Vamos investigar P^1

$$\bar{z}^1 = 13\frac{2}{5}$$

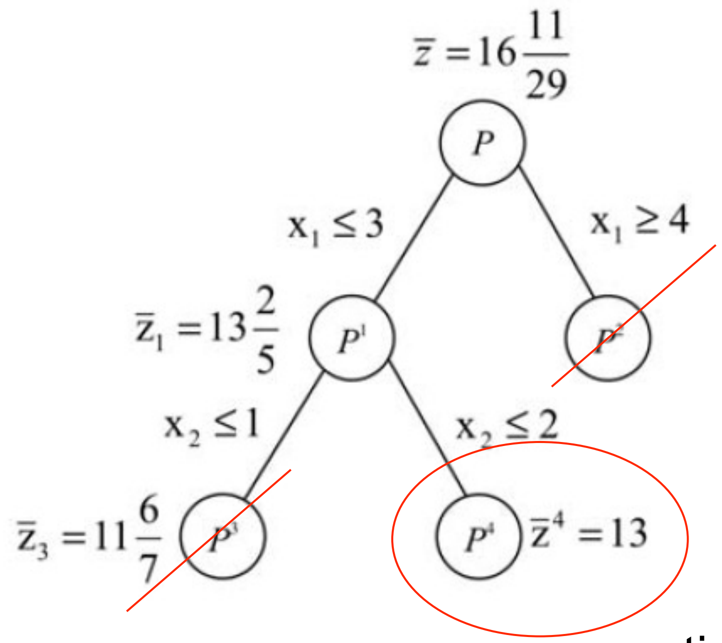
Continuação

- Repetimos o procedimento para P^1

$$\bar{x}_1 = \left(3, 1\frac{3}{5}\right)$$



Final da árvore



infactibilidade

qualidade

otimalidade

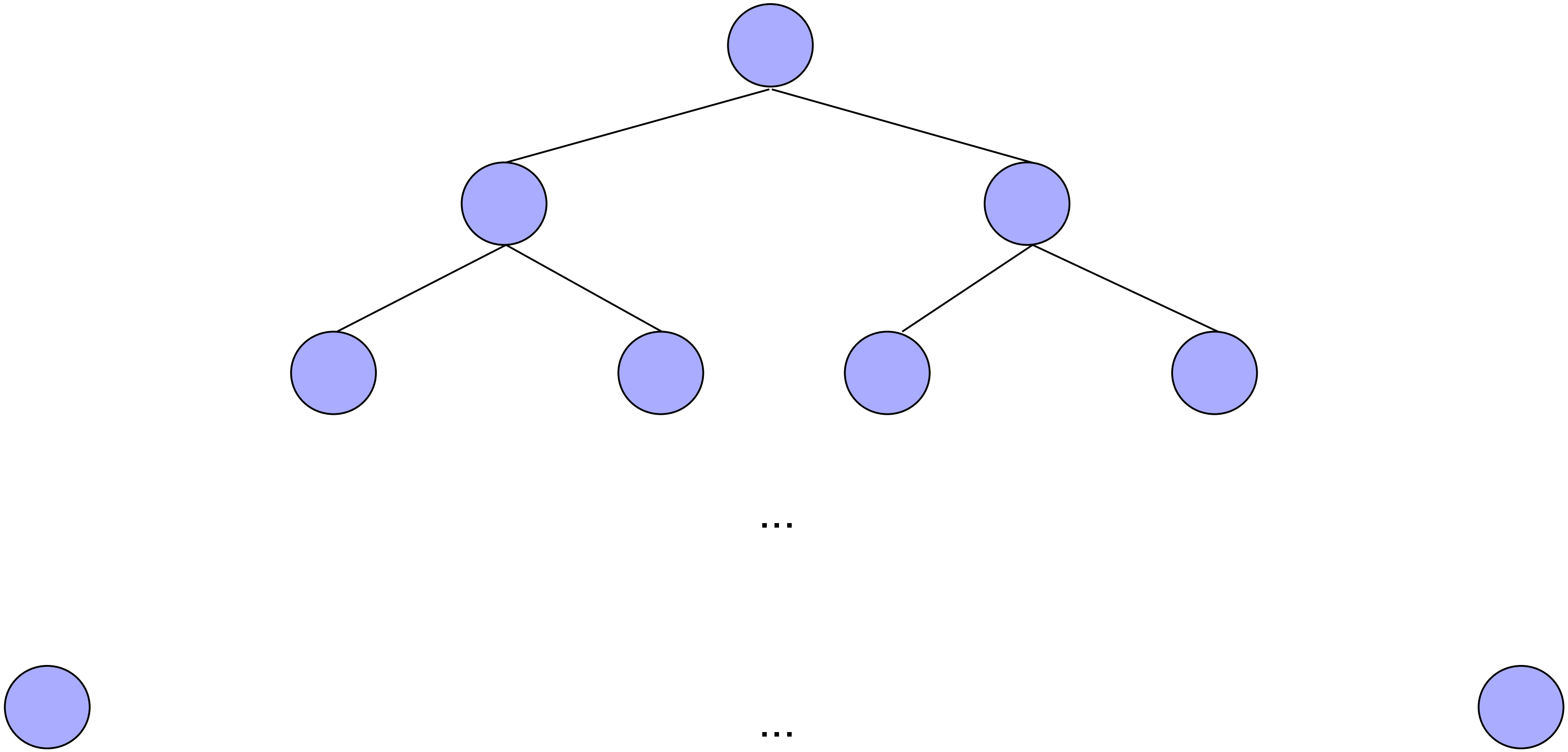
Solução ótima!

Resumo

- Tentamos resolver um problema inteiro-misto como um problema linear.
- Se conseguimos uma solução inteira, ela é a solução ótima.
- Caso contrário:
  - Ramificamos e resolvemos os nós filhos. (Observe que não há perda de qualidade - pois na ramificação, nenhuma solução inteira é perdida).

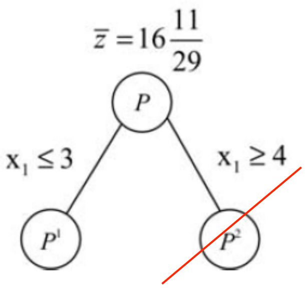
No pior caso

- teríamos que ramificar até as folhas da árvore...



Resumo

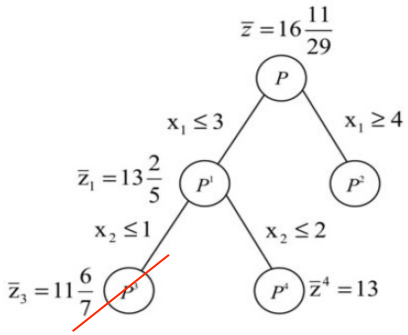
- Para tentar evitar a resolução de todos os nós (o que seria enumeração explícita), fazemos os seguintes testes:
  - infactibilidade;
  - qualidade;
  - otimalidade;



- Infactibilidade:

Não há solução para o problema relaxado, logo não há solução para o problema misto.

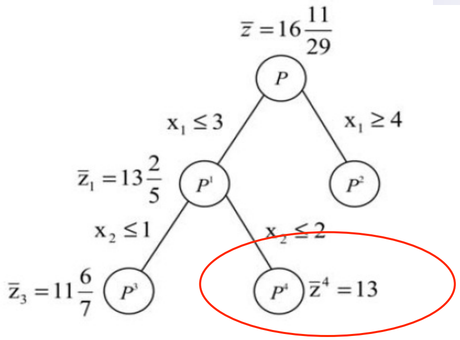
(consequentemente, não há o que explorar naquele nó, que pode ser cortado).



- Qualidade

A melhor solução naquele nó tem, no máximo, valor $\underline{z}$. Mas uma outra solução z inteira de melhor valor, já foi encontrada anteriormente.

(Consequentemente, não vale a pena explorar aquele nó e ele pode ser cortado)



- Otimalidade

A solução do PL no nó é factível para o problema original.

(Consequentemente, não há o que ramificar e a exploração daquele nó pode ser encerrada)

Algoritmo de B&B (max)

Passo 0 (Inicialização). Faça $\overline{z} = \infty$, $z^* = -\infty$, $\mathbf{x}^* = \emptyset$, $L = \{P\}$.

Passo 1 (Seleção de nó). Selecione o nó ativo i, associado ao problema P^i, da lista de nós ativos. Se a lista estiver vazia, vá para o *Passo 6*.

Passo 2 (Teste de eliminação 1). Se a região factível de PL^i for vazia, vá para o Passo 1.

Passo 3 (Teste de eliminação 2). Se o valor $\overline{z}^i$ da solução ótima de PL^i é tal que $\overline{z}^i \leq z^*$, vá para o *Passo 1*.

Passo 4 (Teste de eliminação 3). Se a solução ótima $\overline{\mathbf{x}}_i$ de PL^i é inteira com valor $\overline{z}^i$, e se $\overline{z}^i > z^*$, atualize $\mathbf{x}^*$ e z^*. Elimine nós ativos i da lista L, tais que $\overline{z}^i \leq z^*$, e volte para o *Passo 1*.

Passo 5 (Ramificação). Selecione uma variável da solução ótima $\overline{\mathbf{x}}_i$ de PL^i com valor não inteiro e divida P^i em dois problemas. Adicione estes problemas à lista L e vá para o *Passo 1*.

Passo 6 (Fim). Se $z^* = -\infty$, não existe solução factível; caso contrário, a solução incumbente $\mathbf{x}^*$ é uma solução ótima.

Exemplo 2

$$\text{Maximizar} \quad z = 5x_1 + 8x_2$$

$$\text{sujeito a :}$$

$$x_1 + x_2 \leq 6$$

$$5x_1 + 9x_2 \leq 45$$

$$x_1, x_2 \in Z^+$$

Exemplo 2

$$\text{Maximizar} \quad z = 5x_1 + 8x_2$$

$$\text{sujeito a :}$$

$$x_1 + x_2 \leq 6$$

$$5x_1 + 9x_2 \leq 45$$

$$x_1, x_2 \in Z^+$$

Exemplo 2

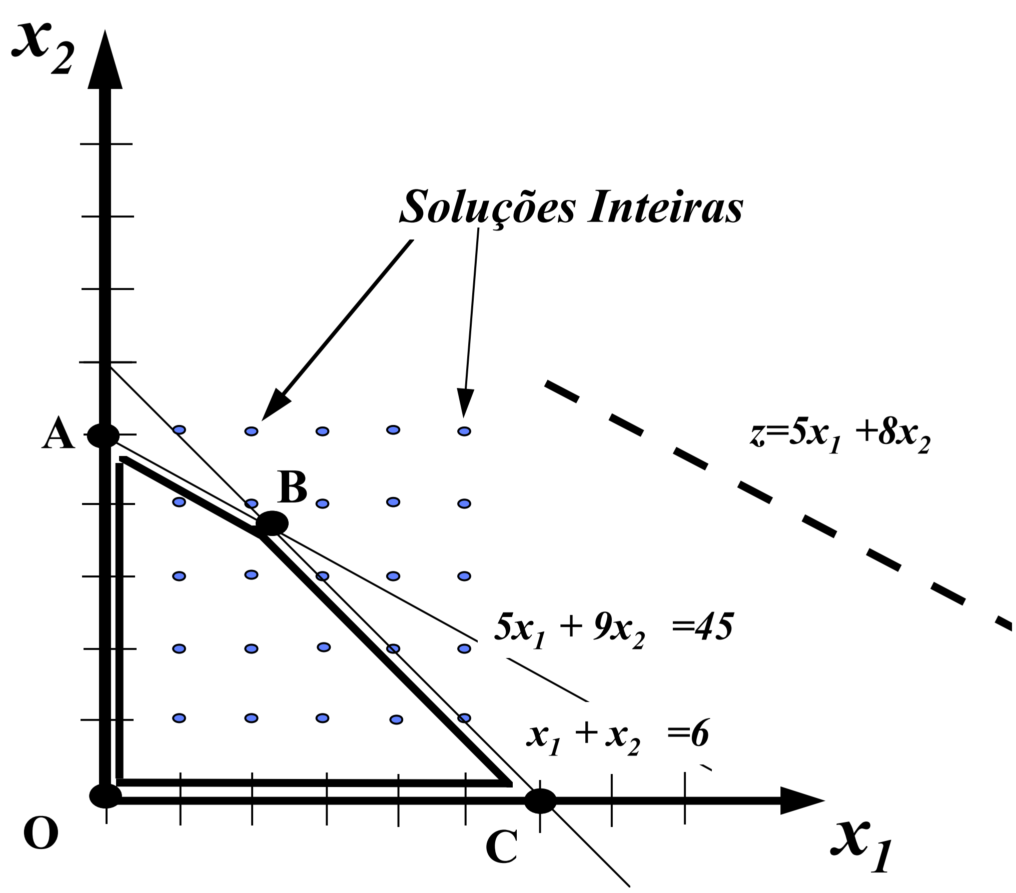
Solução Contínua

$$x_1 = \frac{9}{4} \qquad x_2 = \frac{15}{4} \qquad Z = 41\frac{1}{4}$$

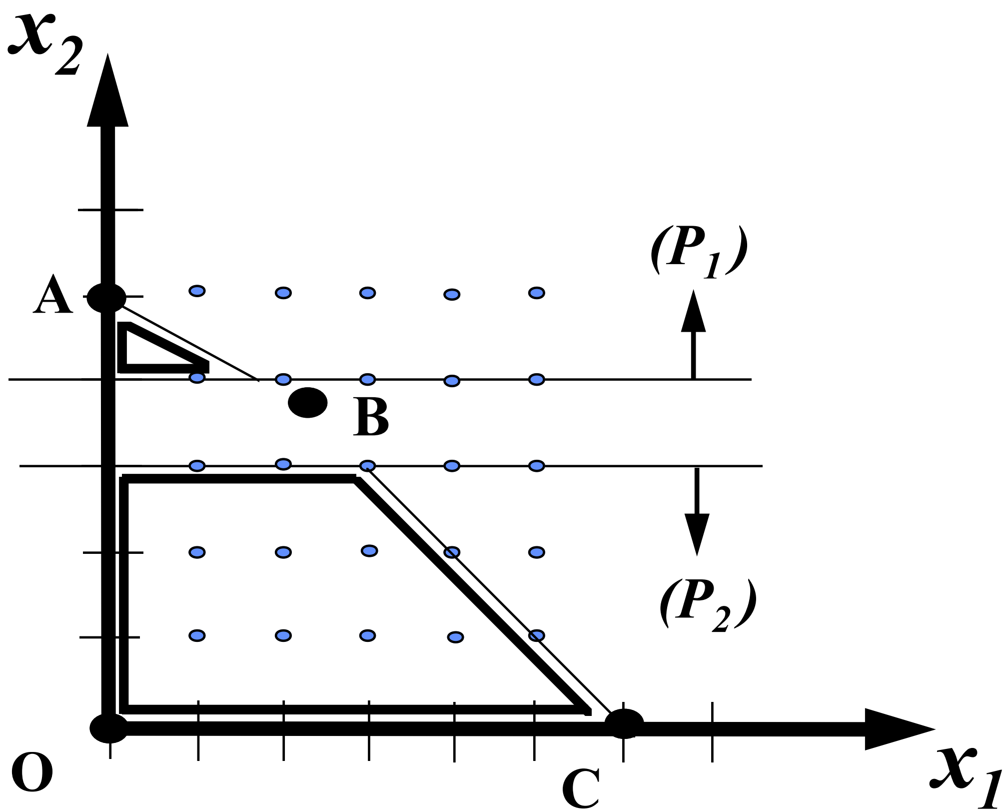
Disjuntiva

$$x_2 \geq \left\lfloor \frac{15}{4} \right\rfloor + 1 \geq 4 \quad \textbf{ou} \quad x_2 \leq \left\lfloor \frac{15}{4} \right\rfloor \leq 3$$

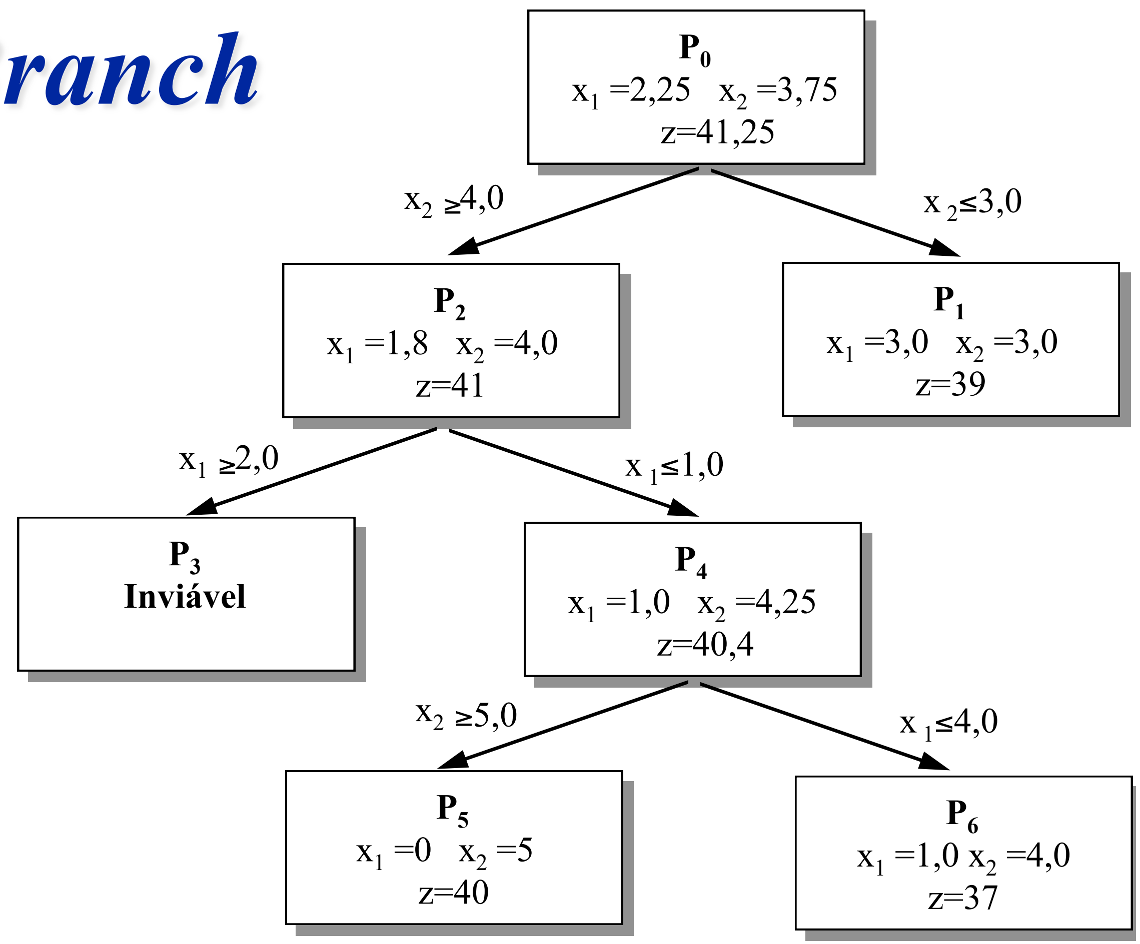
Exemplo 2



Resultado da Divisão (Branch)

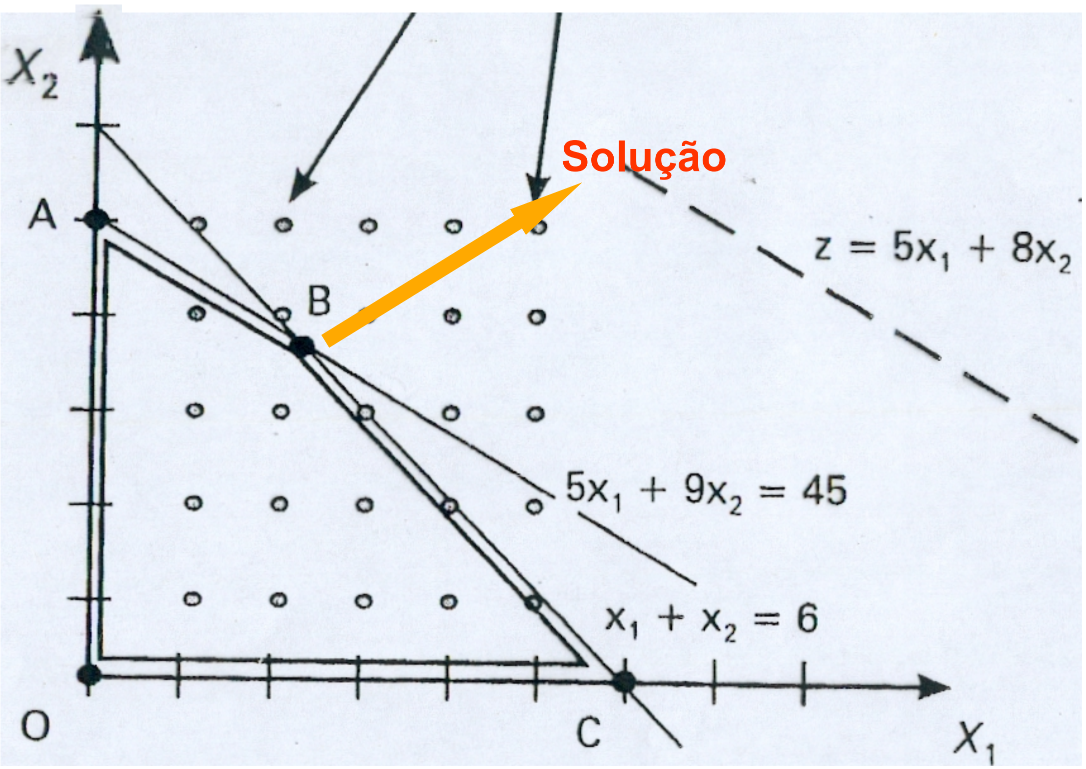


Árvore de Branch



Exemplo

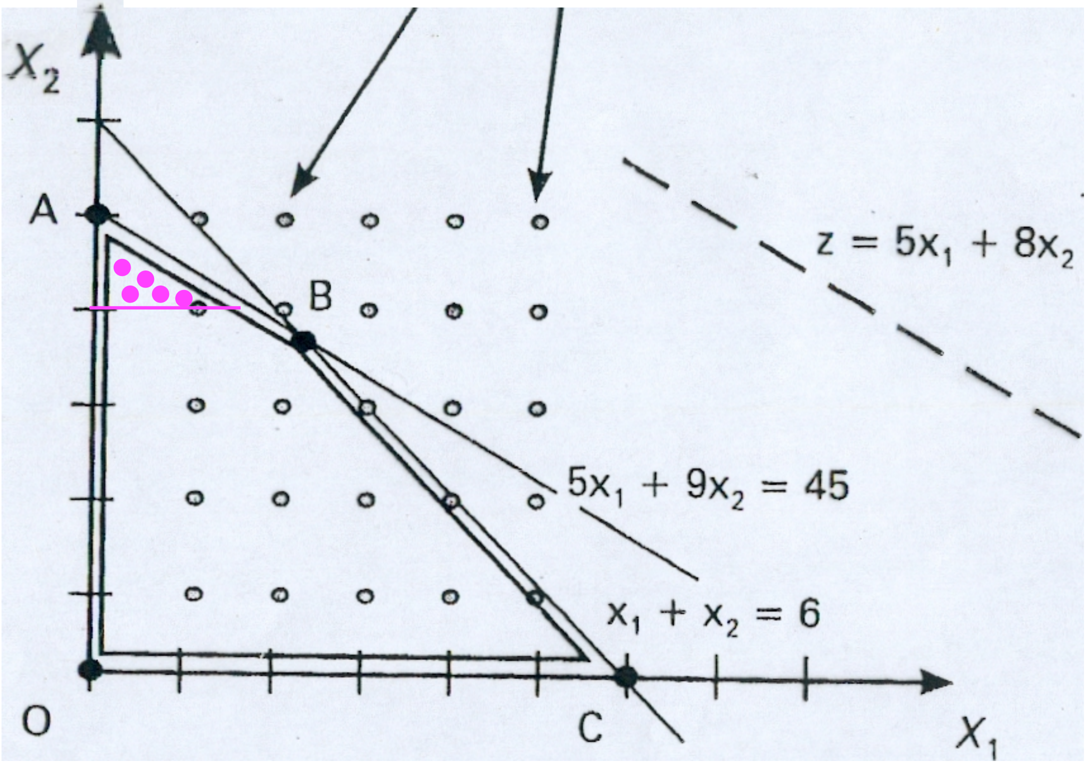
Max Z = 5x1 + 8x2
Sujeito a
x1 + x2 <= 6
5x1 + 9x2 <= 45
x1 = 2,25
x2= 3,75



Exemplo

Max Z = 5x1 + 8x2
Sujeito a
x1 + x2 <= 6
5x1 + 9x2 <= 45
x2>=4

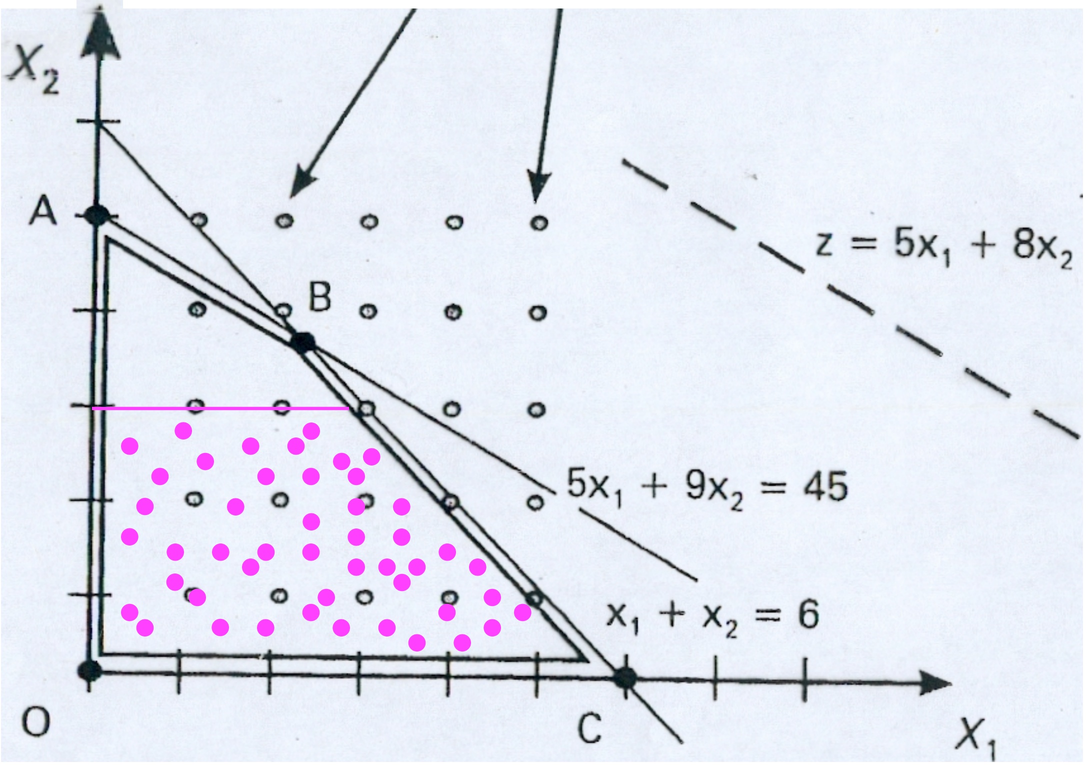
Solução:
x1=1,8
x2=4



Exemplo

Max Z = 5x1 + 8x2
Sujeito a
x1 + x2 <= 6
5x1 + 9x2 <= 45
x2<=3

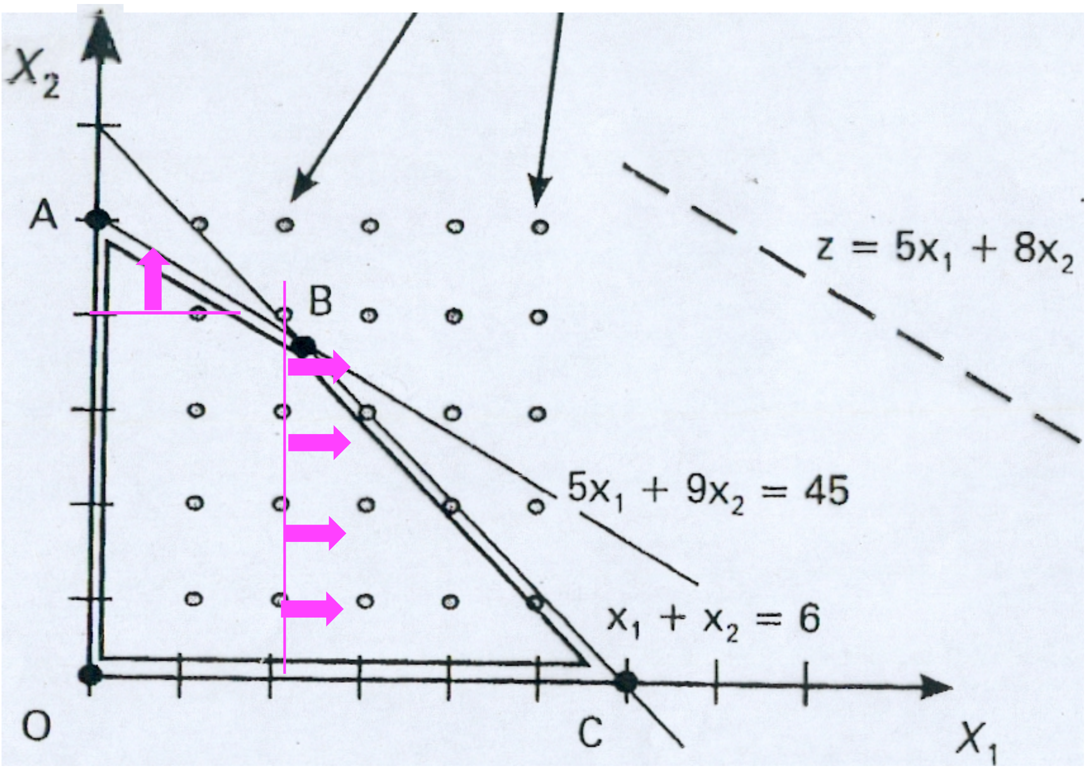
Solução:
x1=3
x2=3



Exemplo

Max Z = 5x1 + 8x2
Sujeito a
x1 + x2 <= 6
5x1 + 9x2 <= 45
x2>=4
x1>=2

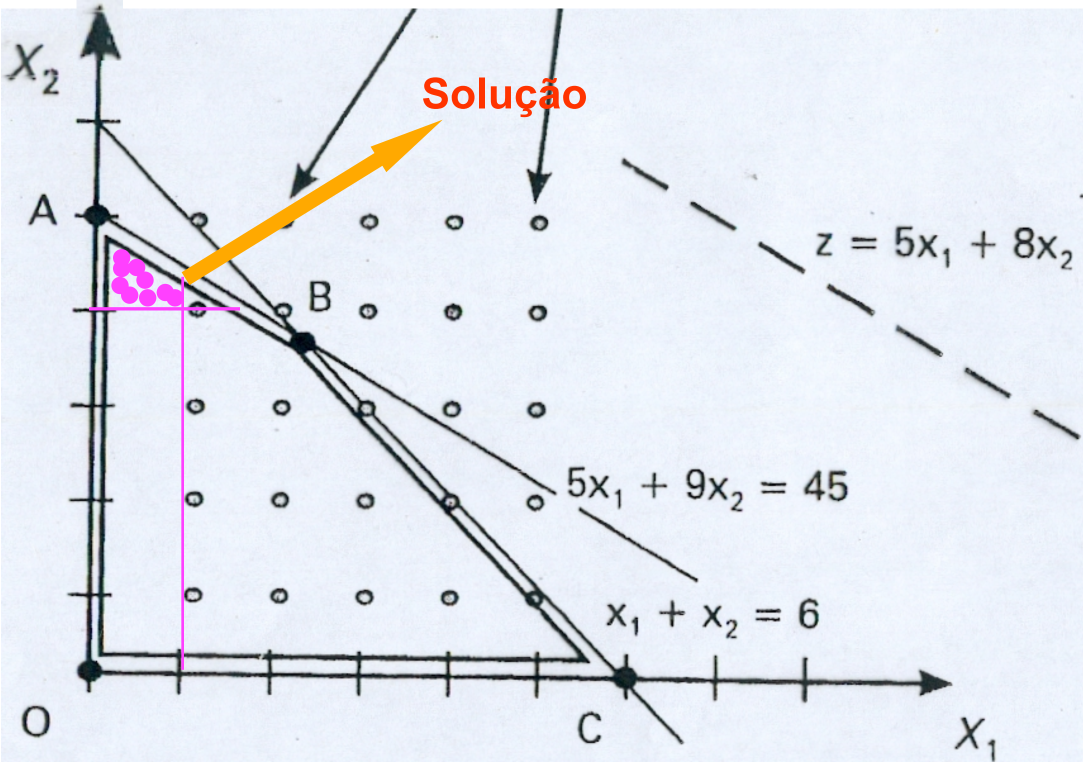
Solução: inviável



Exemplo

Max Z = 5x1 + 8x2
Sujeito a
x1 + x2 <= 6
5x1 + 9x2 <= 45
x2>=4
x1<=1

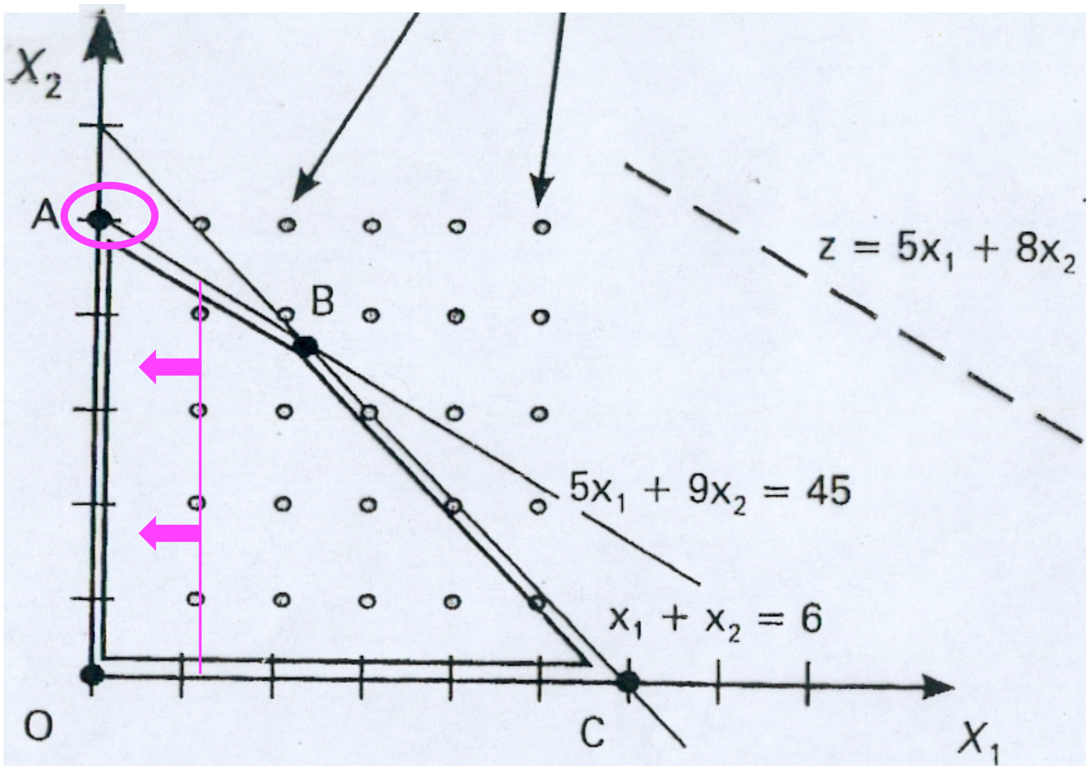
Solução:
x1=1
x2=4,4



Exemplo

Max Z = 5x1 + 8x2
Sujeito a
x1 + x2 <= 6
5x1 + 9x2 <= 45
x2>=4
x1<=1
x2>=5

Solução:
x1=0
x2=5



Exemplo

Max Z = 5x1 + 8x2
Sujeito a
x1 + x2 <= 6
5x1 + 9x2 <= 45
x2>=4
x1<=1
x2<=4

Solução:
x1=1
x2=4