

# Introdução às Redes Neurais

## Redes RBF

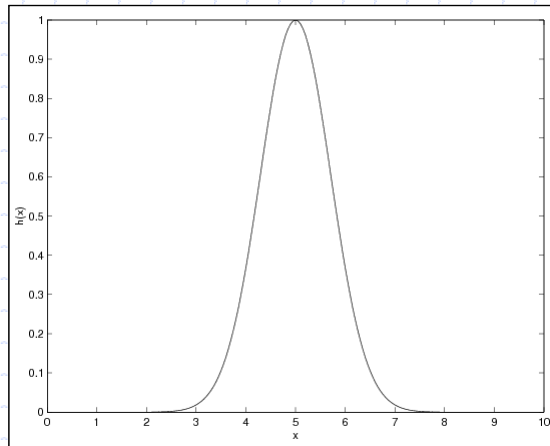
Prof. Ricardo J. G. B. Campello

## Redes RBF

- ◆ Redes RBF (*Radial Basis Functions*) são uma classe de redes com arquitetura *feedforward*
  - Assim como as MLPs, os valores das entradas se propagam na rede em um único sentido
- ◆ Essas redes diferem das MLPs especialmente no modelo de neurônio que utilizam
  - Neurônios com *resposta radial* a excitações
  - Modelam o conceito biológico de *campo receptivo*

## Redes RBF

### ◆ Resposta Radial Típica:



3

## Redes RBF

### ◆ Resposta Radial

- Presentes em alguns tipos de células nervosas:
  - Células auditivas: possuem maior sensibilidade a frequências *próximas* a um determinado tom
  - Células da retina: maior sensibilidade a excitações luminosas *próximas* ao centro do seu campo receptivo
- Modelo matemático:
  - **Função de Base Radial**

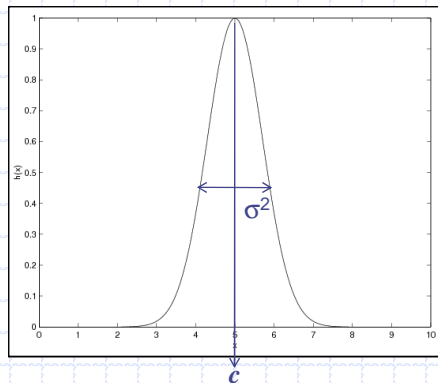
4

## Função de Base Radial

### ◆ Diferentes Modelos Matemáticos Possíveis

#### ■ Gaussiana:

$$h(x) = \exp\left(-\frac{(x-c)^2}{\sigma^2}\right)$$



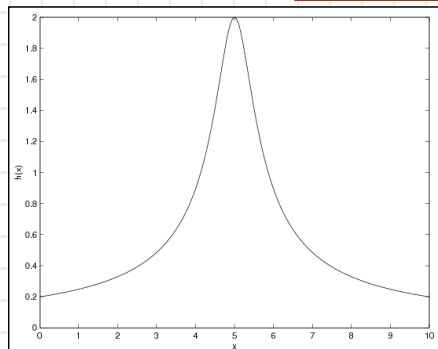
5

## Função de Base Radial

### ◆ Diferentes Modelos Matemáticos Possíveis

#### ■ Multi-Quadrática Inversa:

$$h(x) = \frac{1}{\sqrt{(x-c)^2 + \sigma^2}}$$



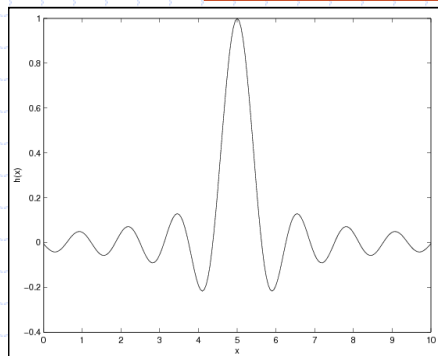
6

## Função de Base Radial

### ◆ Diferentes Modelos Matemáticos Possíveis

#### ■ Chapéu Mexicano:

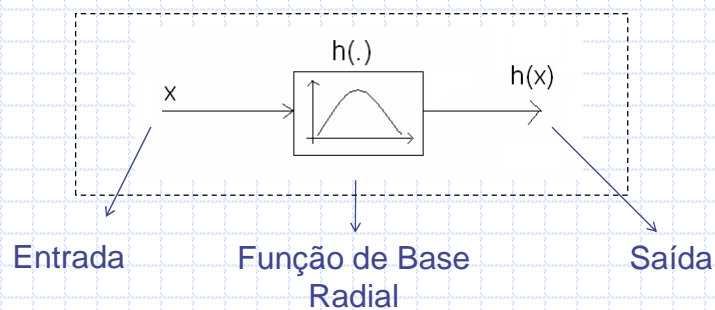
$$h(x) = \begin{cases} \frac{\sin((x-c)/\sigma)}{((x-c)/\sigma)} & \text{se } x \neq c \\ 1 & \text{caso contrário} \end{cases}$$



7

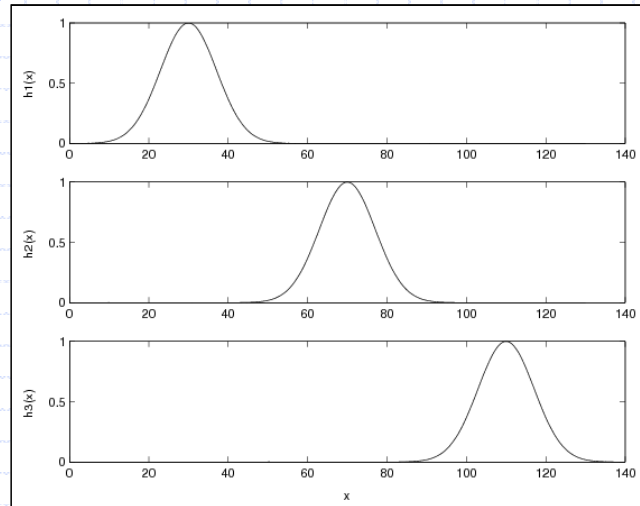
## Modelo do Neurônio RBF

### ◆ Modelo Básico do Neurônio:



8

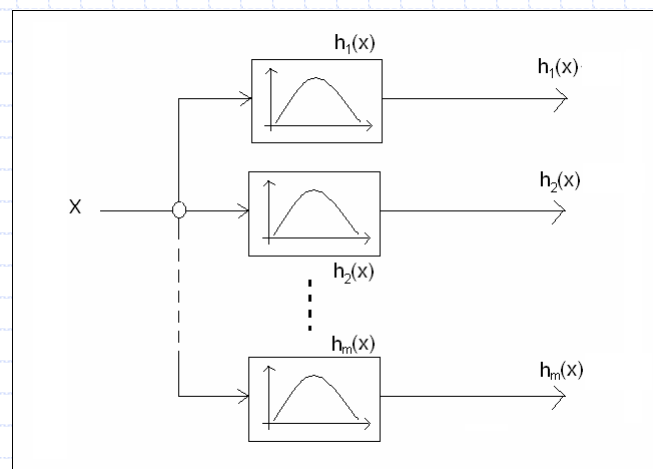
## Campos Receptivos Distintos



9

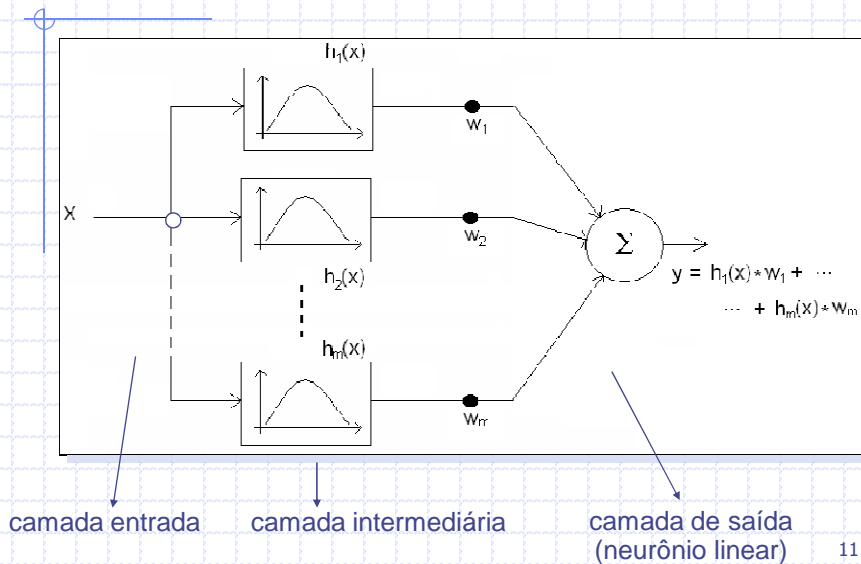
## Múltiplos Neurônios

- ◆ Neurônios com campos receptivos distintos:



10

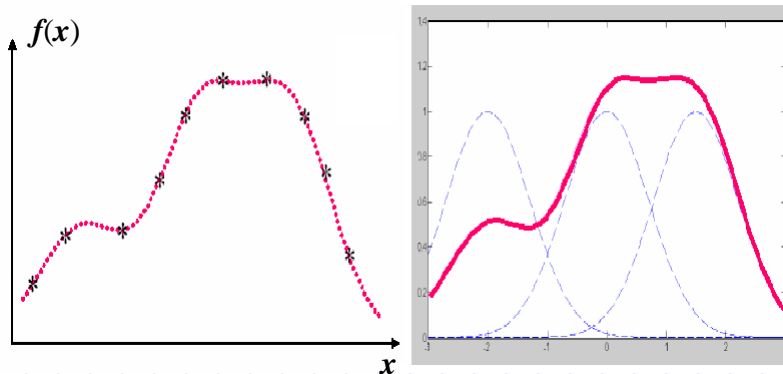
## Modelo RBF (1 entrada)



11

## Aproximação de Funções

◆ RBFs são **Aproximadores Universais** !

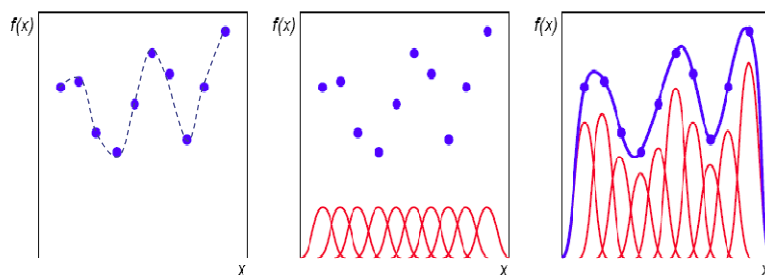


12

# Aproximação de Funções

## ◆ RBFs são **Aproximadores Universais** !

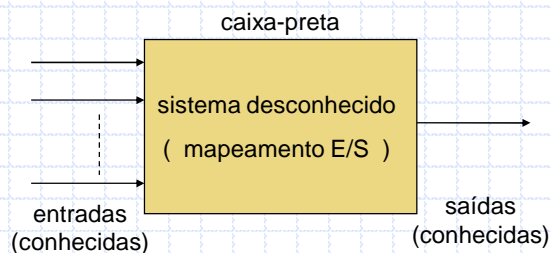
- Basta aumentar o número de neurônios (funções de base radial) para obter a precisão desejada.
- Tomando cuidado com super-treinamento (*overfitting*) !



# Aproximação de Funções

## ◆ RBFs são **Aproximadores Universais** !

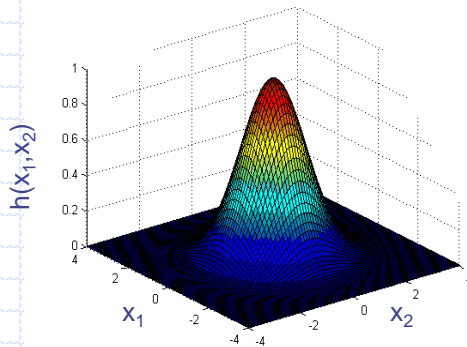
- Diversos problemas podem ser representados como problemas de aproximação de funções
  - Classificação, Tomada de decisão, etc
  - Por exemplo, operador humano de um processo complexo...



## Modelo RBF (2 entradas)

◆ Função Radial para 2 Entradas (Gaussiana):

$$h(x_1, x_2) = \exp\left(-\frac{(x_1 - c_1)^2}{\sigma_1^2}\right) \times \exp\left(-\frac{(x_2 - c_2)^2}{\sigma_2^2}\right)$$

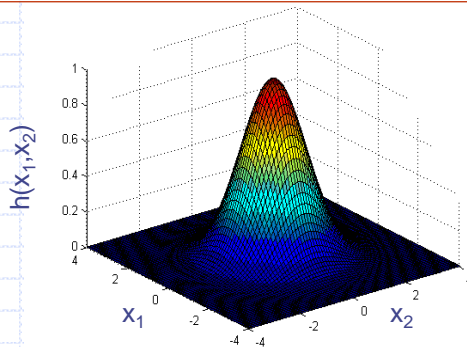


15

## Modelo RBF (2 entradas)

◆ Função Radial para 2 Entradas (Gaussiana):

$$h(x_1, x_2) = \exp\left(-(\mathbf{x} - \mathbf{c})^T \cdot \begin{bmatrix} 1/\sigma_1^2 & 0 \\ 0 & 1/\sigma_2^2 \end{bmatrix} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{c})\right) \quad \begin{cases} \mathbf{x} = [x_1 & x_2]^T \\ \mathbf{c} = [c_1 & c_2]^T \end{cases}$$

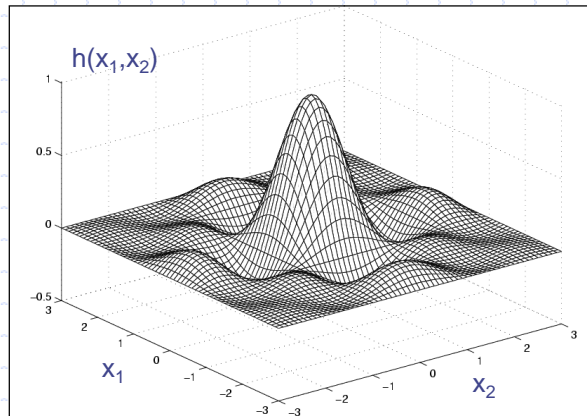


16



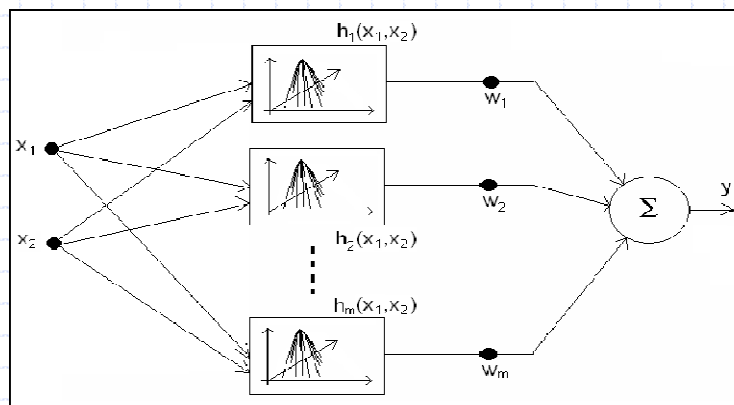
## Modelo RBF (2 entradas)

- ◆ Função Radial para 2 Entradas (Chapéu Mexicano):



17

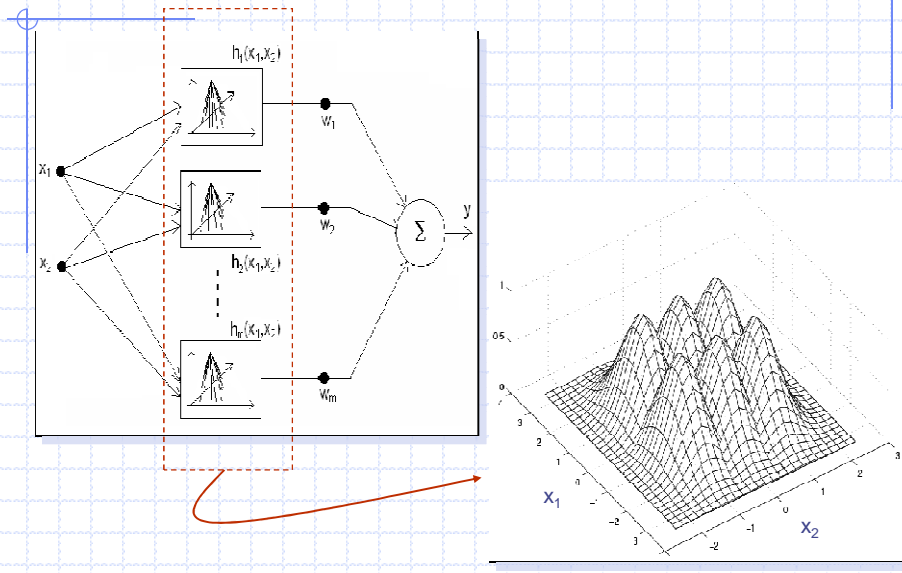
## Modelo RBF (2 entradas)



$$y = \sum_{i=1}^m w_i \cdot h_i(x_1, x_2)$$

18

## Modelo RBF (2 entradas)



## Modelo RBF (n entradas)

◆ Função Radial para n Entradas (Gaussiana):

$$h(x_1, \dots, x_n) = \exp\left(-(\mathbf{x} - \mathbf{c})^T \cdot \Phi^{-1} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{c})\right)$$

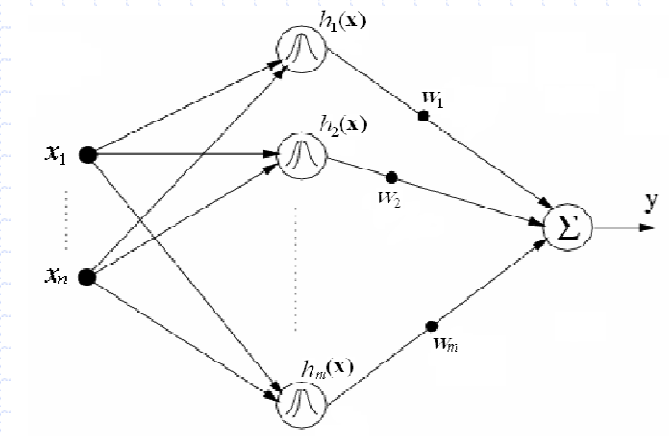
$$\begin{cases} \mathbf{x} = [x_1 & \dots & x_n]^T \\ \mathbf{c} = [c_1 & \dots & c_n]^T \\ \Phi = \text{diag}(\sigma_1^2, \dots, \sigma_n^2) \end{cases}$$

◆ Nota: matriz  $\Phi$  não precisa ser diagonal

- flexibilidade x complexidade (no. de parâmetros)

20

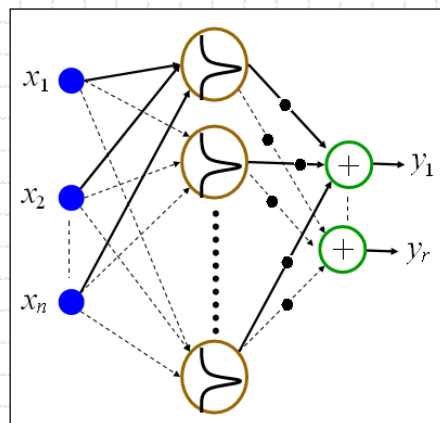
## Modelo RBF (n entradas)



$$y = \sum_{i=1}^m w_i \cdot h_i(x_1, \dots, x_n) = \mathbf{w}^T \cdot \mathbf{h}$$

21

## Modelo RBF (n entradas / r saídas)



$$y_j = \sum_{i=1}^m w_{ij} \cdot h_i(x_1, \dots, x_n) \quad \text{ou} \quad \mathbf{y} = \mathbf{W} \cdot \mathbf{h}$$

22

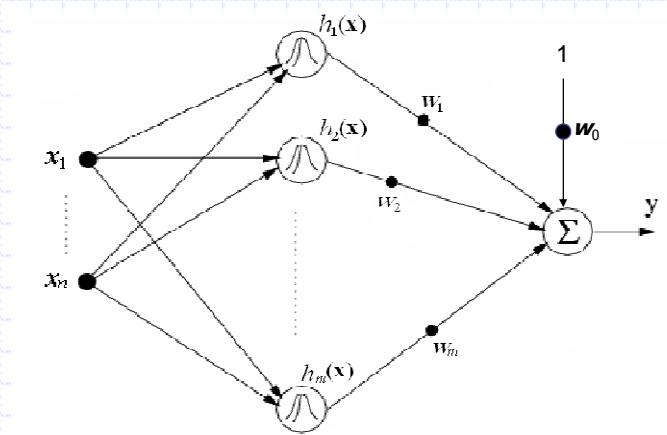
## RBF vs. MLP

- Algunas diferenças e semelhanças entre RBFs e MLPs:

MLP	RBF
Aproximadores Universais	Aproximadores Universais
1 ou mais camadas intermediárias	Em geral 1 camada intermediária
Em geral demandam menos neurônios / parâmetros para uma mesma precisão	Em geral demandam mais neurônios / parâmetros para uma mesma precisão
Treinamento mais complexo	Treinamento mais simples
Difícil interpretação, senão impossível	Possível interpretação (se vista como sistema fuzzy)

23

## Nota (Adição de Termo Constante)



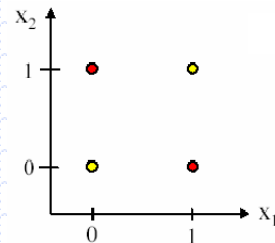
$$y = w_0 + \sum_{i=1}^m w_i \cdot h_i(x_1, \dots, x_n)$$

24

## Exercício

- Sabemos que o problema XOR consiste em classificar 4 padrões (descritos por 2 variáveis) em 2 classes diferentes, ou seja:

$x_1$	$x_2$	Classe
0	0	1
0	1	2
1	0	2
1	1	1



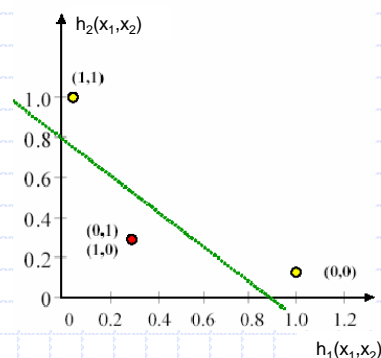
Note que esse problema não é linearmente separável, ou seja, não existe uma função linear que separe as classes no espaço  $x_1 \times x_2$

25

## Exercício (cont.)

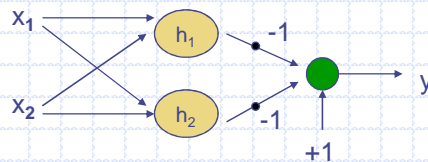
- No entanto, os padrões podem passar a ser linearmente separáveis após serem processados por funções de base radial, desde que essas sejam escolhidas de forma apropriada. P. ex., escolhendo 2 funções Gaussianas  $h_1$  e  $h_2$  com centros dados por  $[0,0]$  e  $[1,1]$ , respectivamente, e desvios padrão unitários para ambas, tem-se:

$x_1$	$x_2$	$h_1(x_1, x_2)$	$h_2(x_1, x_2)$
0	0	1	0,1353
0	1	0,3679	0,3679
1	0	0,3679	0,3679
1	1	0,1353	1



## Exercício (cont.)

- ◆ Considere então a rede RBF com essas funções de base radial e pesos  $w_1 = w_2 = -1$  e  $w_0 = 1$  (aditivo na saída):



- ◆ Escreva analiticamente a expressão da saída da rede em função das entradas  $x_1$  e  $x_2$  e mostre que essa rede é capaz de classificar corretamente os padrões XOR assumindo que esses padrões pertencem à classe 1 se  $y < 0$  e à classe 2 se  $y > 0$

27

## Bibliografia

- ◆ Braga, et al., "Redes Neurais Artificiais: Teoria e Aplicações", LTC, 2ª Edição, 2007
- ◆ Haykin, "Neural Networks", Prentice Hall, 2<sup>nd</sup> Edition, 1999
- ◆ Kovács, "Redes Neurais Artificiais: Fundamentos e Aplicações", Collegium Cognitio, 2ª Edição, 1996

28