Algoritmos e Estruturas de Dados II

Grafos VI:

Caminhos Mínimos (Dijkstra)

Prof. Ricardo J. G. B. Campello

Parte deste material é baseado em adaptações e extensões de slides disponíveis em http://ww3.datastructures.net (Goodrich & Tamassia).

1

Organização

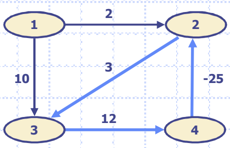
- Revisão de Caminhos Mínimos
  - Princípio da Otimalidade
  - Equações Funcionais (one-to-all)
- Algoritmo de Dijkstra
  - Hipóteses
  - Idéia
  - Exemplo
  - Algoritmo
  - Justificativas
- Análise de Complexidade Comparativa

2

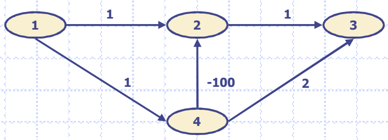
Princípio de Otimalidade

Se não existirem ciclos direcionados com custo total negativo (**diciclos negativos**), então:

- Um sub-caminho simples de um caminho mais curto simples é também um caminho mais curto simples por si só.

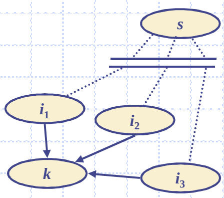


Presença de Diciclo Negativo: 1-2-3 é o caminho simples ótimo, mas 1-2 não é (ver 1-3-4-2).



Ausência de Diciclo Negativo: 1-4-2-3 é o caminho simples ótimo, assim como são 1-4 e 1-4-2.

Equações Funcionais



Caso um-para-todos (one-to-all):

A propriedade anterior implica um conjunto de equações necessárias e suficientes para a otimalidade de caminhos mais curtos.

Seja $c_{i,k}$ o peso da aresta direcionada (i,k) ligando algum vértice i ao vértice k e $d(k)$ a distância do caminho mais curto entre um vértice de origem s e um vértice qualquer k do grafo.

Então:

$$\begin{cases} d(s) = 0 \\ d(k) = \min_i\{d(i) + c_{i,k} : (i\,,\,k) \text{ existe}\} \quad \forall\, k \neq s \end{cases}$$

PS. $d(k)$ é definida como $d(k) = \infty$ se não existe caminho entre s e k.

Algoritmo de Dijkstra (one-to-all)

- Hipóteses sobre o grafo:
  - Direcionado
  - Simples*
  - Ponderado apenas com pesos não-negativos
    - Hipótese mais restritiva que a exigida pelo princípio de otimalidade
    - Porém, não é restritiva para várias aplicações práticas
- Abordagem:
  - **gulosa** (*greedy*)
  - provada ser globalmente ótima nesse caso !

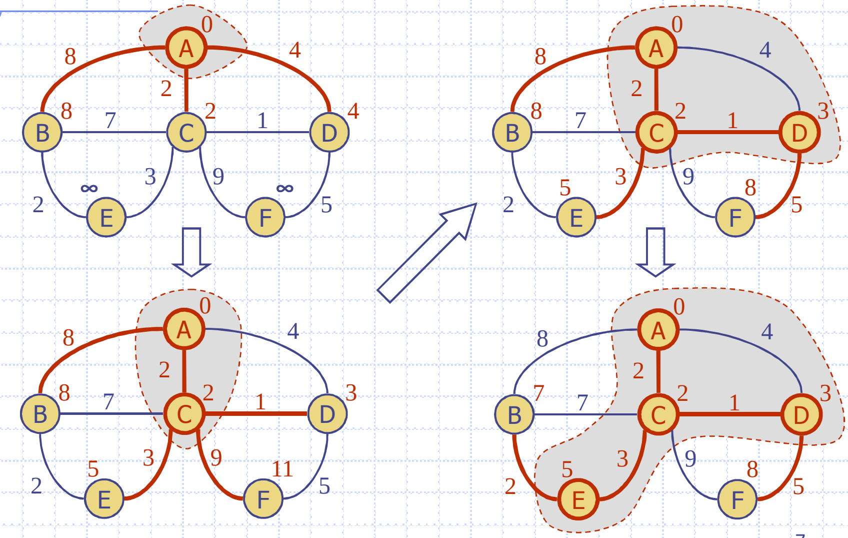
5

Algoritmo de Dijkstra (one-to-all)

- Idéia:
  - Cada vértice v armazena a distância $d(v)$ do caminho mais curto conhecido partindo do vértice de origem s até v.
  - Cresce-se a árvore de caminhos mais curtos definitivos (convergidos) como uma "nuvem", partindo de s.
  - A cada iteração, um novo vértice u, adjacente a um daqueles que já convergiram (nuvem), terá também convergido.
    - Trata-se do vértice fora da nuvem com o menor valor $d(u)$
    - Esse vértice é então incluído na nuvem
  - Apenas os vértices adjacentes a u que ainda não convergiram precisam ser atualizados, o que torna Dijkstra muito eficiente.
    - Bellman-Ford atualiza todos a cada iteração!

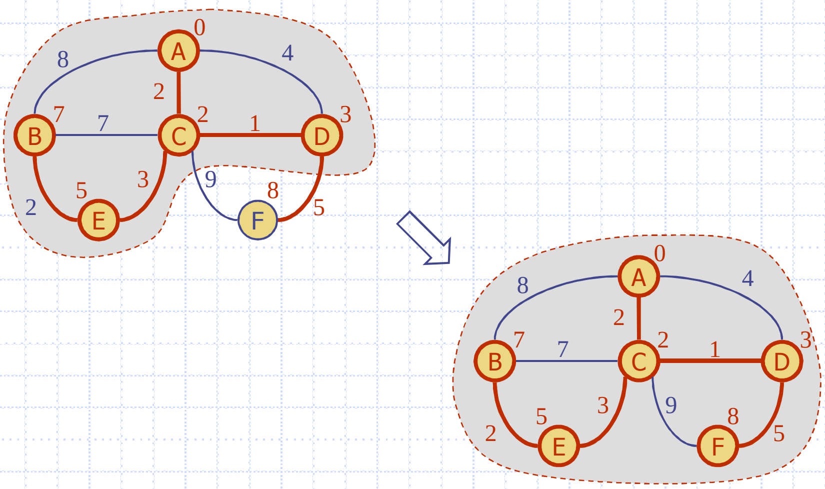
6

Exemplo (Dijkstra)



7

Exemplo (Dijkstra)



8

Algoritmo Dijkstra

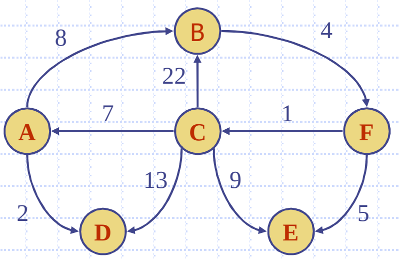
- Uma fila de prioridade Q armazena cada vértice v fora da nuvem de convergência.
- Vértice v armazena:
  - $d(v)$ (chave para Q)
    - variável *v.distance*
  - vértice predecessor no caminho mínimo
    - variável *v.parent*
- Fila de Prioridade Q:
  - **insert**(Q, v, k): insere item v com chave k
  - **remove**(Q): remove e retorna item com menor chave
  - **replaceKey**(Q, v, k): substitui por k a chave do item v e reorganiza a fila

```
Algoritmo Dijkstra(G, s)
  Q ← nova fila de prioridade
  para todo  v ∈ vertices(G)
    se  v = s     v.distance ← 0
    senão         v.distance ← ∞
    insert(Q, v, v.distance)
  enquanto (¬ isEmpty(Q) )
    u ← remove(Q)
    para todo  e ∈ outgoingEdges(G, u)
      z ← opposite(G, u, e)
      se  z.distance > u.distance + e.weight
        z.distance ← u.distance + e.weight
        z.parent ← u
        replaceKey(Q, z, z.distance)
```

* Nota: variável *e.weight* é o peso armazenado na aresta *e*

Exercício

- Execute Dijkstra no grafo direcionado abaixo a partir da origem no vértice **F**, ilustrando a cada iteração:
  - O conteúdo da fila de prioridade como uma lista ordenada
  - As matrizes de distâncias mínimas e de vértices predecessores

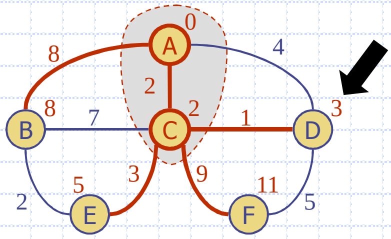


  - Ilustre também a **árvore de caminhos mínimos** obtida

10

Justificativa (Dijkstra)

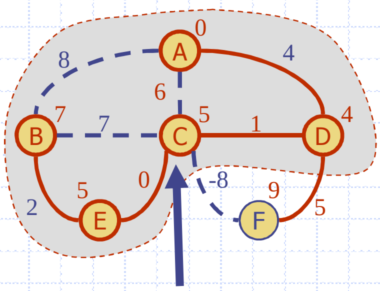
- Dijkstra é baseado na abordagem gulosa de adicionar vértices por distância crescente:
  - A menor distância $d(u)$ fora da nuvem é certamente definitiva pois qualquer outro caminho só com pesos não negativos não pode ser menor!



11

Porque Dijkstra Não Funciona com Pesos Negativos ?

- Se um vértice com aresta incidente negativa pudesse ser adicionado à nuvem de convergência, ele poderia modificar as distâncias de vértices já dentro da nuvem.



Menor distância de C a partir da origem A é 1, mas C já está na nuvem com d(C)=5 !

12

Desempenho

- **Dijkstra**:
  - É possível implementar de forma eficiente como:
    - $O((n + m) \log n)$
  - Alternativamente, pode-se substituir a fila de prioridade por uma busca seqüencial em uma lista:
    - $O(n^2 + m)$
    - Pode ser mais rápida para grafos densos (m grande).
    - Implementação em C: ver (Skiena & Revilla, 2003).
  - Obtenção de todos os caminhos (**all-to-all**):
    - n execuções de Dijkstra, uma para cada vértice como origem
    - $O((n^2 + nm) \log n)$ ou $O(n^3 + nm)$

Comparações

- **Bellman-Ford (one-to-all)**:
  - Complexidade (tempo): $O(nm)$
  - Tipicamente mais lento que Dijkstra, mas menos restritivo, no sentido que não permite apenas diciclos negativos
  - É capaz de detectar naturalmente a presença de tais diciclos
  - Facilmente adaptável para caminhos máximos
- **Floyd-Warshall (all-to-all)**:
  - Complexidade (tempo): $O(n^3)$
  - Tipicamente mais rápido que múltiplas execuções de Dijkstra
  - Também restringe apenas diciclos negativos
  - Matriz de distâncias indica todas alcançabilidades entre vértices

14

Exercícios

1. Compare a complexidade computacional dos algoritmos de Dijkstra e Bellman-Ford quando o grafo for:
   - esparso (m proporcional a n)
   - denso (m proporcional a n^2)
2. Desenhe um grafo não-direcionado simples, conexo e ponderado com 8 vértices e 16 arestas. Transforme esse grafo em um digrafo e exercite o algoritmo Dijkstra executando-o manualmente a partir de diferentes origens:
   - Apresente cada execução através de duas matrizes, uma com as distâncias (d[k]) e outra com os vértices predecessores nos caminhos mínimos (p[k]). Nessas matrizes, cada coluna k corresponde a um vértice do grafo e cada linha t corresponde a uma iteração do algoritmo
   - Apresente também a árvore de caminhos mínimos resultante de cada execução
3. Retire algumas arestas do grafo do exercício anterior de forma tal que o digrafo permaneça fortemente conexo e cada par de vértices adjacentes só possua uma aresta direcionada incidente em ambos. Então repita o Exercício 2.

15

Bibliografia

- M. T. Goodrich and R. Tamassia, *Data Structures and Algorithms in C++/Java*, John Wiley & Sons, 2002/2005.
- N. Ziviani, Projeto de Algoritmos, Thomson, 2a. Edição, 2004.
- T. H. Cormen, C. E. Leiserson, and R. L. Rivest, *Introduction to Algorithms*, MIT Press, 2nd Edition, 2001.
- S. Skiena e M. Revilla, *Programming Challenges: The Programming Contest Training Manual*, Springer-Verlag, 2003.

16