Introdução à Ciência da Computação II

Análise de Algoritmos: Parte I

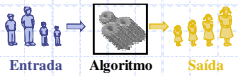
Prof. Ricardo J. G. B. Campello

Este material consiste de adaptações e extensões de slides disponíveis em http://ww3.datastructures.net (Goodrich & Tamassia).

Sumário

- Noções de Análise de Algoritmos
  - Método Experimental e Suas Limitações
  - Contagem de Operações Primitivas
  - Taxa de Crescimento da Contagem
  - Funções Importantes para Mensurar a Contagem
  - Exemplos

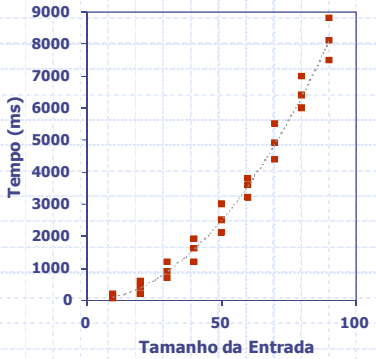
Tempo de Execução



- Um **algoritmo** é um procedimento passo-a-passo para realizar uma dada tarefa em tempo finito
- O **tempo de execução** de um algoritmo tipicamente cresce à medida que se aumenta o tamanho de sua entrada
- O **tamanho da entrada** é o valor de uma dada grandeza de interesse que reflete o tamanho de uma instância particular de problema a ser solucionado pelo algoritmo
- Exemplo (tamanho da entrada para um algoritmo de ordenação):
  - tamanho da entrada = no. de elementos a serem ordenados

Método Experimental

- Escreva um programa que implemente um algoritmo
- Execute o programa variando a composição e o tamanho da entrada
- Use alguma funcionalidade da linguagem para obter medidas do tempo. Por exemplo:
  - Função clock() de C (time.h)
  - Método currentTimeMillis() de Java (classe System)
- Esboce um gráfico



Limitações do Método Experimental

- É preciso implementar o algoritmo, muitas vezes complexo
- Os resultados podem não servir como indicativo do tempo de execução para outras entradas que não foram consideradas nos testes
- Para comparar dois algoritmos, devem ser utilizadas exatamente as mesmas condições, configurações e ambientes de hardware e software

Análise Teórica

- Baseada em uma descrição de alto nível do algoritmo, ao invés de uma dada implementação / linguagem
  - Descrição de alto nível: por ex., **pseudo-código**
- Caracteriza o tempo de execução como uma função do tamanho da entrada, n
- Leva em consideração todas as possíveis entradas
- Permite avaliar a rapidez de um algoritmo de forma independente de qualquer ambiente de hardware e/ou software

Pseudo-Código

- Descrição de alto-nível de um algoritmo
- Mais estruturada que texto simples
- Menos detalhada que um programa
- Notação muito utilizada para descrever algoritmos
- Esconde detalhes de projeto dos programas
- Não existe um padrão universal

Exemplo: encontrar o valor máximo em um arranjo

Algoritmo *arrayMax*(*A*, *n*)
  Entrada: vetor *A* de *n* inteiros
  Saída: elemento máximo de *A*

  atualMax ← *A*[0]
  para *i* ← 1 **até** *n* − 1 **faça**
    se *A*[*i*] > *atualMax* **então**
      atualMax ← *A*[*i*]
  retorne *atualMax*

Exemplo de Convenção

- Controle do fluxo de execução:
  - **se** … **então** … [**senão** …]
  - **enquanto** … **faça** …
  - **repita** … **até que** …
  - **para** … **faça** …
  - indentação substitui chaves
- Declaração de rotinas:
  - **Algoritmo** *nome*(*arg1*, *arg2*, …)
    Entrada: …
    Saída: …
- Arranjos:
  - *A*[0] … *A*[*N*-1] (*N* elementos)
- Chamadas a rotinas:
  - *nome*(*arg1*, *arg2*, …)
- Retorno de rotinas:
  - **retorne** *expressão* ou *valor*
- Expressões:
  - ← **Atribuição** (mesmo que = em Java, C, C++)
  - = **Teste de igualdade** (mesmo que == em Java, C, C++)
  - n^2 Sobrescritos e outros formatos matemáticos são utilizados

Operações Primitivas

- São ações básicas executadas pelos algoritmos
- Aparecem no pseudo-código
- Não dependem da linguagem de programação
- Considera-se que tenham tempo de execução constante

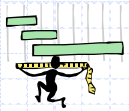
- Exemplos:
  - Atribuição de valor a uma variável
  - Operação aritmética com dois números
  - Comparação de dois números
  - Indexação em um arranjo
  - Seguir uma referência ou ponteiro
  - Chamar ou retornar de uma rotina*

Contagem de Operações Primitivas

- Inspecionando o pseudo-código pode-se determinar o no. máx. de operações primitivas executadas por um algoritmo, em função do tamanho da entrada
- Exemplo (algoritmo para encontrar o valor máximo em um arranjo):

Algoritmo *arrayMax*(A, n)	# operações
atualMax $\leftarrow A[0]$	2
para $i \leftarrow 1$ **até** $n-1$ **faça**	$1 + 2n$
se $A[i] > atualMax$ **então**	$2(n-1)$
$atualMax \leftarrow A[i]$	$2(n-1)$
/* incremento implícito do contador i */	$2(n-1)$
retorne *atualMax*	1
Total:	$6n \leq t(n) \leq 8n-2$

Estimando o Tempo de Execução



- O algoritmo *arrayMax* executa:
  - $6n$ operações primitivas no **melhor caso**
  - $8n - 2$ operações primitivas no **pior caso**
- Suponhamos que:

  t_1 = tempo gasto pela operação primitiva mais rápida

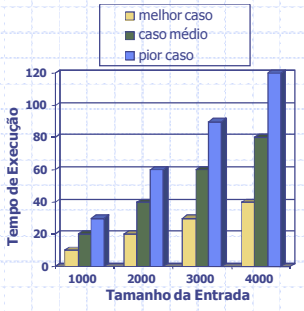
  t_2 = tempo gasto pela operação primitiva mais lenta
- Seja $T(n)$ o tempo de **pior caso** de *arrayMax*. Então:

$$t_1 (8n - 2) \leq T(n) \leq t_2 (8n - 2)$$

- Portanto, $T(n)$ é limitado por duas funções **lineares**

Análise de Pior Caso

- O tempo de execução de um algoritmo tipicamente cresce à medida que se aumenta o *tamanho* de sua entrada
- O **caso médio** algumas vezes é difícil de se determinar
  - depende da *composição* da entrada
  - demanda teoria de probabilidade
- Em geral é melhor considerar o tempo de execução do **pior caso**:
  - Em geral é fácil identificar a pior entrada
    - p. ex. Quick-Sort determinístico
  - Garantindo o desempenho do pior caso garante-se o desempenho dos demais



Outro Exemplo – Busca Binária

- O algoritmo compara o valor procurado x com o elemento que está no centro do arranjo V
  - Se forem iguais, o algoritmo pára
  - Se não forem, o algoritmo verifica se x pode estar na metade esquerda ou direita do arranjo, descartando a outra metade
- A busca prossegue na parte em que x pode ser encontrado...

Algoritmo *BB*(V, n, x)

Entrada: vetor V de n inteiros ordenados e valor x a ser encontrado

Saída: posição onde x foi encontrado no vetor ou −1 em caso de insucesso

```
i ← 0
s ← n − 1
enquanto i ≤ s faça
        k ← (i + s ) / 2;
        se x = V[k] então
                retorne k
        se x > V[k] então
                i ← k + 1
        senão   s ← k − 1
retorne (− 1)
```


Análise – Busca Binária

- É preciso descobrir quantas vezes o algoritmo repete o laço **enquanto** no pior caso (que corresponde ao insucesso da busca)
- Inicialmente, o intervalo de busca em V possui n elementos
  - $i \leftarrow 0$ e $s \leftarrow n - 1$
- Após 1 comparação, restarão $n / 2$ elementos
- Após 2 comparações, restarão $n / 4$ elementos
- ...
- Após quantas comparações restarão **zero** elementos (**pior caso**)?
  - A resposta é $\lceil \log_2 n \rceil$ (teto($\log_2 n$) ou $\log_2 n$ arredondado para cima)

Análise de Pior Caso da BB

Algoritmo $BB(V, n, x)$

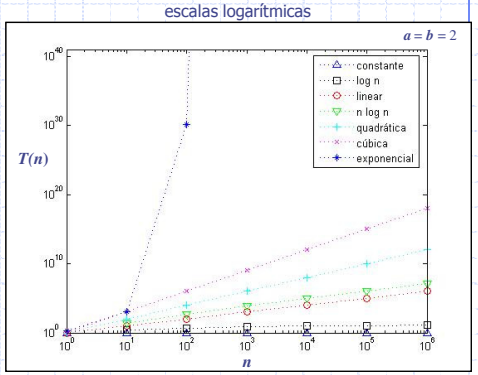
Entrada: vetor A de n inteiros ordenados e valor x a ser encontrado
Saída: posição onde x foi encontrado ou -1 se não for encontrado

$i \leftarrow 0$	1
$s \leftarrow n - 1$	2
enquanto $i \leq s$ **faça**	$\log_2 n + 1$
$k \leftarrow (i + s)/2;$	$3 \log_2 n$
se $x = V[k]$ **então**	$2 \log_2 n$
retorne k	
se $x > V[k]$ **então**	$2 \log_2 n$
$i \leftarrow k + 1$	
senão $s \leftarrow k - 1$	$2 \log_2 n$
retorne (-1)	1

Total: $T(n) = 10 \log_2 n + 5$ (função **logarítmica**)

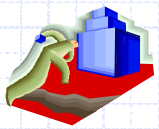
Sete Funções Importantes

- Sete funções que aparecem com mais freqüência nas análises de algoritmos:
  - Constante: ~ 1
  - Logarítmica: $\sim \log_b n$
  - Linear: $\sim n$
  - n-log-n: $\sim n \log_b n$
  - Quadrática: $\sim n^2$
  - Cúbica: $\sim n^3$
  - Exponencial: $\sim a^n$
- Usualmente as bases logarítmica e exponencial são tais que $a = b = 2$
- Nesse curso adota-se a convenção de omitir a base logarítmica usual $b = 2$



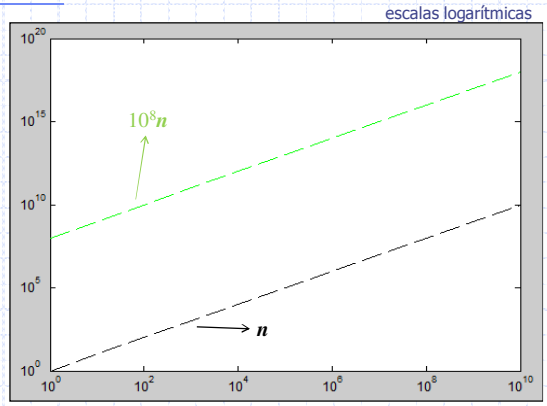
Taxa de Crescimento de $T(n)$

- Mudar o ambiente de hardware/ software:
  - Afeta $T(n)$ por um fator **constante**, mas
  - Não altera a **taxa de crescimento** de $T(n)$.
- As taxas de crescimento linear e logarítmica de $T(n)$ são **propriedades intrínsecas** dos algoritmos *arrayMax* e *BB*, respectivamente.



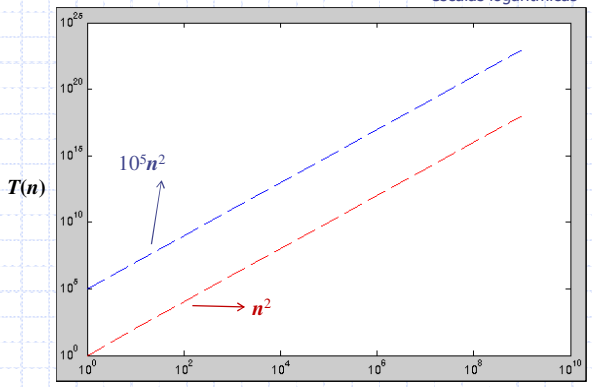
Fatores Constantes

escalas logarítmicas



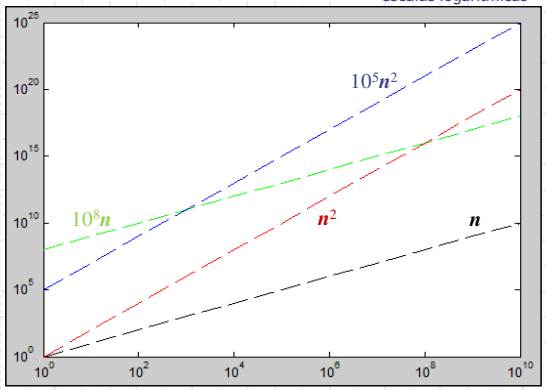
Fatores Constantes

escalas logarítmicas



Fatores Constantes

escalas logarítmicas



Termos de Menor Ordem

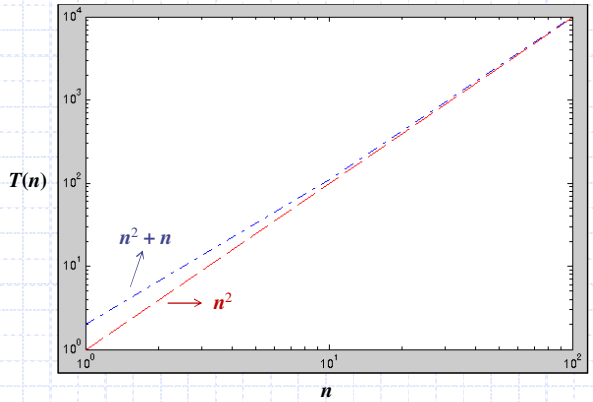
- Assim como fatores constantes não afetam a taxa de crescimento, termos de menor ordem também tendem a não mais afetá-la conforme o tamanho da entrada n cresce
- Exemplo:

n	1	10	100	1.000
n^2	1	100	10.000	1.000.000
$n^2 + n$	2	110	10.100	1.001.000
Δ	100%	10%	1%	0,1%

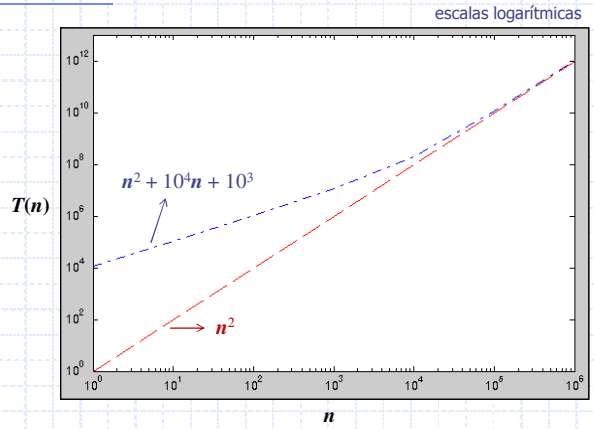
- Incremento dado por um termo de menor ordem aumenta em termos absolutos, mas diminui em termos relativos

Termos de Menor Ordem

escalas logarítmicas

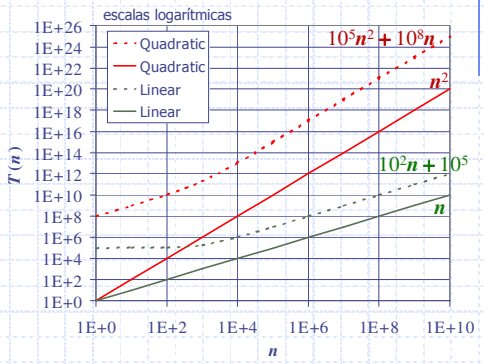


Termos de Menor Ordem



Em Resumo

- Assintoticamente, a taxa de crescimento é dominada pelo termo de maior ordem
- Exemplos:
  - $10^3n + 10^5$ é uma função **linear** do tamanho da entrada n
  - $10^5n^2 + 10^8n$ é uma f. **quadrática** de n
- "Não importam" :
  - fatores constantes ou
  - termos de menor ordem



$T(n)$ *vs.* Tempo Cronológico

segundos
minutos
séculos

Características Aproximadas do Hardware	
Número de Instruções executadas por Ciclo do relógio (IPC)	8
Freqüência (1 / período do ciclo em min.)	3E+09
No. de Instruções por minuto	24E+09

$T(n)$	n = 20	n = 40	n = 60	n = 80
n	5,3E-08	1,1E-07	1,6E-07	2,1E-07
$n \log n$	2,3E-07	5,7E-07	9,5E-07	1,3E-06
n^2	1,1E-06	4,3E-06	9,6E-06	1,7E-05
n^3	2,1E-05	1,7E-04	5,8E-04	1,4E-03
2^n	2,8E-03	48,9	1,0	1,0E+06
3^n	0,2	5,4E+08	1,9E+18	6,6E+27

25

Exercícios

- Estime o número de operações primitivas do código em linguagem C abaixo para cálculo iterativo do fatorial:

```
long int FAT(long int X){
        long int I, P;
        P = 1;
        for(I=1; I<=X; I++)
                P=P*I;
        return P;
}
```

- OBS: ignore a chamada da função e declaração das variáveis

Exercícios

- Estime o número de operações primitivas do famoso algoritmo de ordenação Bubble-Sort (algoritmo da bolha):

```
Algoritmo Bubble(V, n)
    Entrada: vetor V de n inteiros
    Saída: vetor V ordenado em ordem crescente
    para j ← n – 1 até 1 faça
        para i ← 0 até j – 1 faça
            se V[i] > V[i+1] então    /* troca V[i] com V[i+1] */
                aux ← V[i]
                V[i] ← V[i+1]
                V[i+1] ← aux
    retorne V   /* por referência */
```

- OBS: faça a estimativa para os números **mínimo** e **máximo**, e explique quais tipos de entrada (vetor V) levariam a esses extremos

Bibliografia

- M. T. Goodrich & R. Tamassia, *Data Structures and Algorithms in C++/Java*, John Wiley & Sons, 2002/2005
- M. T. Goodrich & R. Tamassia, *Estruturas de Dados e Algoritmos em Java*, Bookman, 2002
- N. Ziviani, *Projeto de Algoritmos*, Thomson, 2a. Edição, 2004
- T. H. Cormen et al., *Introduction to Algorithms*, MIT Press, 2nd Edition, 2001