Pesquisa Operacional / Programação Matemática

Método Simplex:

Direção simplex. Tamanho do passo. Mudança de base.

Alysson M. Costa – ICMC/USP

Resumo

- Já vimos:
  - Soluções básicas estão associadas a pontos extremos
  - Se há uma solução ótima, então há um ponto extremo (solução básica) ótima.
  - Podemos definir os custos relativos de variáveis não básicas como:

$$\hat{c}_{N_j} = (c_{N_j} - \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{a}_{N_j}) \qquad \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}} = \mathbf{c}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}} \mathbf{B}^{-1}$$

  - Se, em um problema de minimização (maximização), para uma dada solução básica, todos os custos relativos são positivos (negativos), a solução é ótima.

Perguntas

- 1) A solução atual é ótima ?

  Respondida (ver último ítem do slide anterior)

- 2) Como encontrar uma solução básica factível melhor ?

  Método simplex!

A solução não é ótima

- Existe ao menos uma variável não-básica x_{N_k} para a qual:

$$\hat{c}_{N_k} = c_{N_k} - \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{a}_{N_k} < 0$$

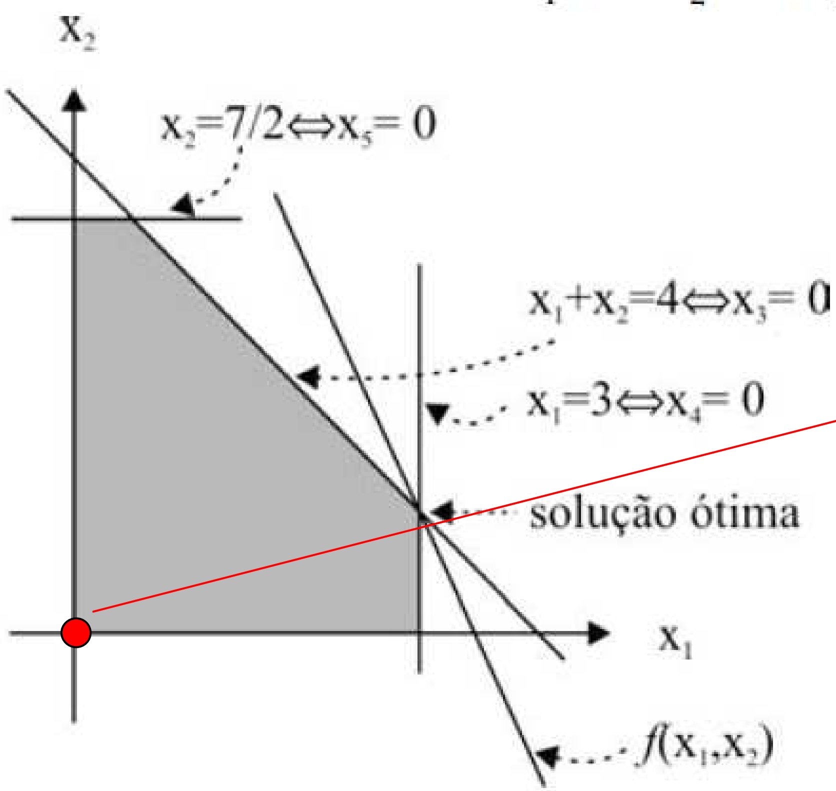
(Ou a propriedade 2.3 estaria atendida e a solução seria ótima).

*problema de minimização

Exemplo

$$\text{Minimizar } f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = -2x_1 - x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 \qquad\qquad &= 4 \\ x_1 \qquad\quad + x_4 \qquad &= 3 \\ x_2 \qquad\qquad + x_5 &= \tfrac{7}{2} \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 &\geq 0,\ x_5 \geq 0. \end{aligned}$$



$N_1 = 1, N_2 = 2$

$B_1 = 3, B_2 = 4, B_3 = 5$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{B_1} & \mathbf{a}_{B_2} & \mathbf{a}_{B_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_3 & \mathbf{a}_4 & \mathbf{a}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{N_1} & \mathbf{a}_{N_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c}_{\mathbf{B}}^T = \begin{pmatrix} c_{B_1} & c_{B_2} & c_{B_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_3 & c_4 & c_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{c}_{\mathbf{N}}^T = \begin{pmatrix} c_{N_1} & c_{N_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \end{pmatrix}$$

- *Multiplicador simplex:*

$$\boldsymbol{\lambda}^T = \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (\mathrm{B} = \mathrm{B}^{-1} = \mathrm{I})$$

A solução não é ótima

$$\hat{c}_{N_j} = \left(c_{N_j} - \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{a}_{N_j} \right)$$

$$j = 1: \quad \hat{c}_{N_1} = \hat{c}_1 = c_1 - \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}} \mathbf{a}_1 = -2 - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -2$$

$$j = 2: \quad \hat{c}_{N_2} = \hat{c}_2 = c_2 - \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}} \mathbf{a}_2 = -1 - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -1$$

Estratégia simplex

- Vamos perturbar soluções não-ótimas.

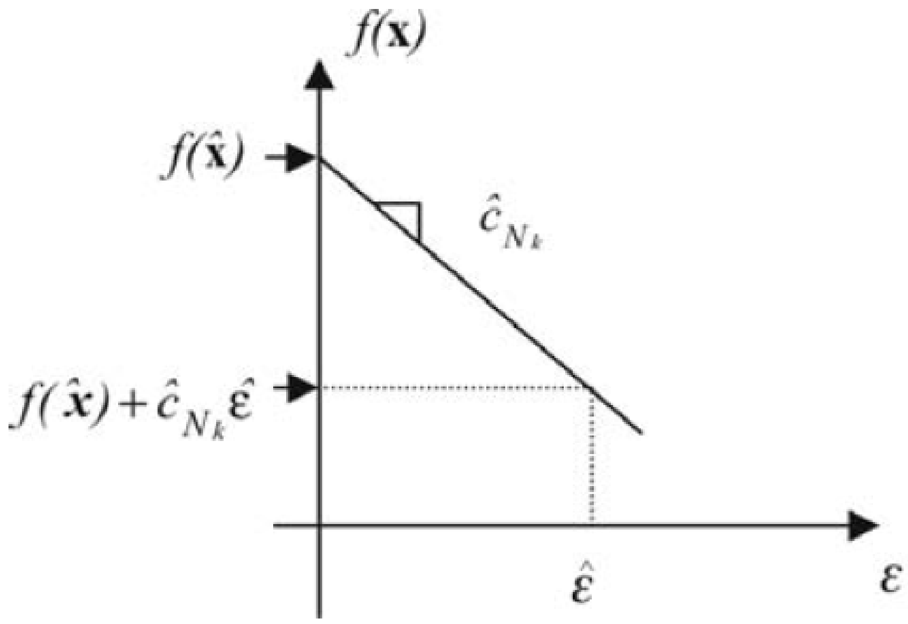
$$\begin{cases} x_{N_k} = \varepsilon \geq 0, \text{ (variável com custo relativo negativo)} \\ x_{N_j} = 0, \quad j = 1, 2, \ldots., n-m, \ \ i \neq k. \end{cases}$$

isto é, escolhemos **uma** variável com custo relativo negativo e adicionamos uma pequena perturbação. A nova função objetivo vale:

$$f(\mathbf{x}) = f(\hat{\mathbf{x}}) + \hat{c}_{N_1} \underbrace{0}_{x_{N_1}} + \cdots + \hat{c}_{N_k} \underbrace{\varepsilon}_{x_{N_k}} + \ldots + \hat{c}_{N_{n-m}} \underbrace{0}_{x_{N_{n-m}}} =$$

$$= f(\hat{\mathbf{x}}) + \hat{c}_{N_k} \varepsilon < f(\hat{\mathbf{x}})$$

Resultado na função objetivo



Pergunta: a solução pertubada é factível ?
Sim, se a pertubação é $\boxed{\text{suficientemente pequena}}$ e a solução básica original é não degenerada.

qual o maior $\boldsymbol{\varepsilon}$?

Direção simplex e tamanho do passo

- Mudando as variáveis não-básicas, obrigatoriamente temos que mudar as variáveis básicas:

$$\mathbf{x}_{\mathrm{N}} = \begin{pmatrix} x_{N_1} \\ \vdots \\ x_{N_k} \\ \vdots \\ x_{N_{n-m}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \varepsilon \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \leftarrow k \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}_{\mathrm{N}} = \hat{\mathbf{x}}_{\mathrm{B}} - \underbrace{\mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_{N_k}}_{\mathbf{y}} \varepsilon = \hat{\mathbf{x}}_{\mathrm{B}} - \mathbf{y}\varepsilon$$

direção simplex!

Direção simplex e tamanho do passo

Definição 2.9 (*direção simplex*) Chamamos de direção simplex o vetor $\mathbf{y} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_{N_k}$, o qual fornece os coeficientes de como as variáveis básicas são alteradas pela estratégia simplex. A direção simplex é solução do sistema de equações lineares $\mathbf{By} = \mathbf{a}_{N_k}$.

- As novas variáveis básicas (pertubadas) devem continuar não-negativas:

$$\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}_\mathbf{N} = \hat{\mathbf{x}}_\mathbf{B} - \underbrace{\mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_{N_k}}_{\mathbf{y}}\varepsilon = \hat{\mathbf{x}}_\mathbf{B} - \mathbf{y}\varepsilon$$

$$x_{B_i} = \hat{x}_{B_i} - y_i\varepsilon \geq 0, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Direção simplex e tamanho do passo

$$x_{B_i} = \hat{x}_{B_i} - y_i \varepsilon \geq 0, \quad i = 1, \ldots, m.$$

- Temos, pois:

$$\text{se } \; y_i \leq 0, \text{ então } x_{B_i} \geq 0, \quad \text{para todo } \; \varepsilon \geq 0$$

$$\text{se } \; y_i > 0, \text{ como } x_{B_i} = \hat{x}_{B_i} - y_i \varepsilon \geq 0, \text{ então}, \quad \varepsilon \leq \frac{\hat{x}_{B_i}}{y_i}$$

Logo, o maior valor de ε é dado por

$$\hat{\varepsilon} = \frac{\hat{x}_{B_\ell}}{y_\ell} = \text{mínimo}\left\{ \frac{\hat{x}_{B_i}}{y_i} \; \text{tal que} \; y_i > 0 \right\}.$$

O que acontece se...

- Se no momento de calcular o passo máximo, todos os y_i são negativos...

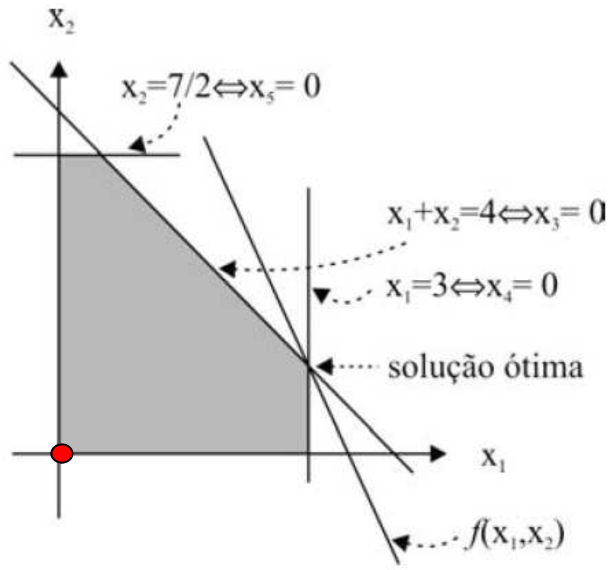
... significa que para qualquer valor de **ε**, a nova solução é factível. Como quanto maior **ε**, maior o decrescimento da função objetivo, a **solução ótima será ilimitada**!

Exemplo

Considere o exemplo anterior:

$$\text{Minimizar } f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = -2x_1 - x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 \quad &= 4 \\ x_1 \quad + x_4 \quad &= 3 \\ x_2 \quad + x_5 &= \tfrac{7}{2} \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 &\geq 0, x_5 \geq 0. \end{aligned}$$



$$(B_1, B_2, B_3) = (3, 4, 5) \qquad (N_1, N_2) = (1, 2).$$

Solução básica: $\mathbf{x_B} = (x_3, x_4, x_5)$, (obtida para $x_{N_i} = 0$)

$$\hat{\mathbf{x}}_\mathbf{B} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \longrightarrow \hat{\mathbf{x}}_\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ \frac{7}{2} \end{pmatrix}$$

Exemplo

A solução é ótima ?

multiplicador simplex:

$$\mathbf{c}_\mathbf{B} = (c_{B_1}, c_{B_2}, c_{B_3}) = (c_3, c_4, c_5) = (0, 0, 0)$$

$$\boldsymbol{\lambda}^T = \mathbf{c}_\mathbf{B}^T \mathbf{B}^{-1} \longrightarrow \boldsymbol{\lambda} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

custos relativos:

$$\hat{c}_1 = c_1 - \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{a}_1 = -2 - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -2 \quad \Big| \quad \hat{c}_2 = c_2 - \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{a}_2 = -1 - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -1$$

Não é ótima. (Por quê ?)

Exemplo

direção simplex $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$

$$\mathbf{By} = \mathbf{a}_{N_1} \longrightarrow \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

A direção simplex indica a maneira como as variáveis básicas se modificam, ao se aumentar uma dada variável não-básica (no caso, $N_1=1$)

$$x_{B_i} = \hat{x}_{B_i} - y_i\,\varepsilon$$

$$\begin{aligned} x_3 &= 4 - \varepsilon \\ x_4 &= 3 - \varepsilon \\ x_3 &= \tfrac{7}{2}\,. \end{aligned}$$

Exemplo

Tamanho do passo:

$$\hat{\varepsilon} = mínimo\left\{\frac{\hat{x}_{B_1}}{y_1}, \frac{\hat{x}_{B_2}}{y_2}\right\} = mínimo\left\{\frac{4}{1}, \frac{3}{1}\right\} = 3 = \frac{\hat{x}_{B_2}}{y_2}$$

Com o valor de $\hat{\varepsilon} = 3$, a variável $x_{B_2} = x_4$ se anula

a variável não-básica x_1 torna-se positiva: $x_1 = \hat{\varepsilon} = 3$

No caso geral:

- Ao resolvermos:

determi

$$\hat{\varepsilon} = \frac{\hat{x}_{B_\ell}}{y_\ell} = \text{mínimo}\left\{ \frac{\hat{x}_{B_i}}{y_i} \ \text{tal que} \ \ y_i > 0 \right\}$$

ır (sair da base).

- Anteriormente, ao escolhermos uma variável não-básica com custo relativo negativo, escolhemos a variável não-básica que vai assumir valor positivo (entrar na base).

No caso geral

- Partição anterior:

$$(x_{B_1} \cdots x_{B_\ell} \cdots x_{B_m} \mid 0 \cdots x_{N_k} \cdots)$$

escolhida para entrar
(custo relativo negativo)

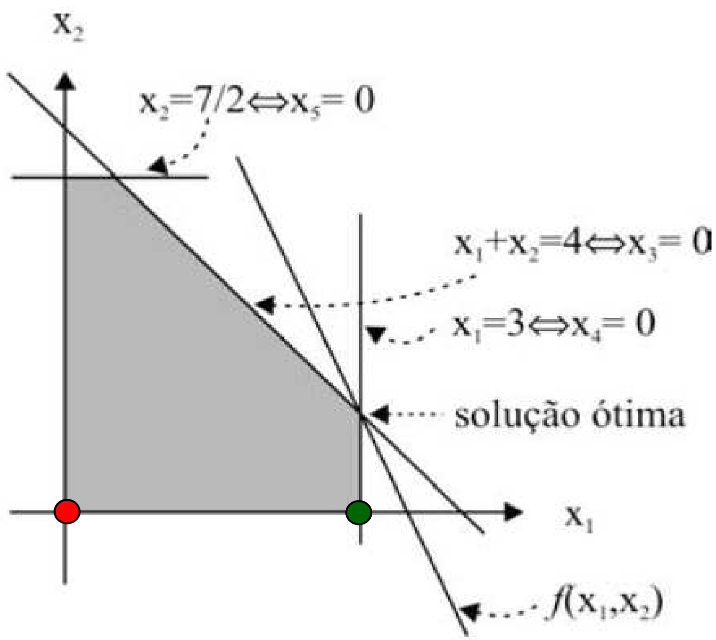
escolhida para sair
(primeira ao se anular ao aumentarmos x_{N_k})

A nova solução

- Pode-se mostrar que a nova matriz B é inversível.
- Como os valores das variáveis da nova B são não-negativos, trata-se de uma solução factível.
- Seu custo é:

$$f(\mathbf{x}) = f(\hat{\mathbf{x}}) + \hat{c}_{N_k}\hat{\varepsilon} \; < \; f(\hat{\mathbf{x}})$$

Graficamente, no exemplo



* Índice da variável não-básica escolhida para entrar ($N_1 = 1$) (escolhemos aquela com menor custo relativo)

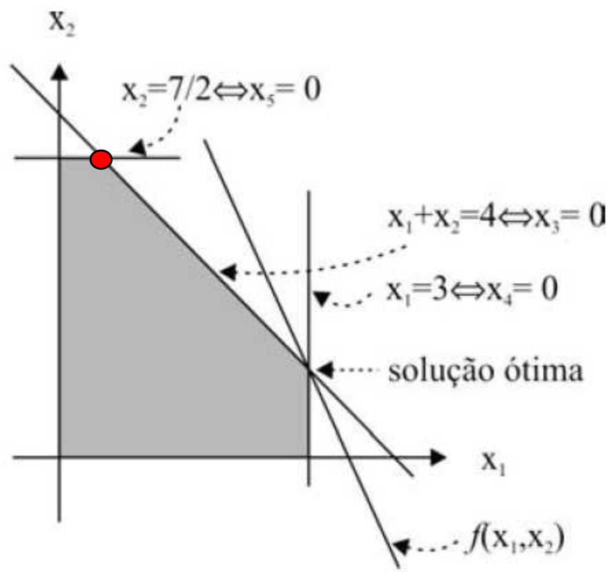
* Índice da variável básica escolhida para sair ($B_2 = 4$)
(escolhemos aquela que primeiro se anulava ao aumentarmos **ε**.)

Nova partição: B = (3,1,5) N=(4,2)

Exercício

- Seja o mesmo exemplo anterior

$$
\begin{aligned}
\text{Minimizar } f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = -2x_1 - x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5& \\
x_1 + x_2 + x_3 \qquad\qquad &= 4 \\
x_1 \qquad + x_4 \qquad &= 3 \\
x_2 \qquad\qquad + x_5 &= \tfrac{7}{2} \\
x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0,\ x_5 &\geq 0.
\end{aligned}
$$



$$
\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{B_1} & \mathbf{a}_{B_2} & \mathbf{a}_{B_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}
\qquad
\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{N_1} & \mathbf{a}_{N_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_3 & \mathbf{a}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}
$$