# Pesquisa Operacional / Programação Matemática

Método Simplex:

variáveis duais, custos relativos e condições de otimalidade.



Alysson M. Costa – ICMC/USP

# Idéia do método simplex

- Partir de uma solução básica

- Visitar uma solução básica (P.E.) vizinho que seja melhor que ela (se houver).

# Perguntas

- 1) A solução atual é ótima ?

- 2) Como encontrar uma solução básica factível melhor ?

# Pergunta 1: A solução atual é ótima ?

- Temos uma solução básica factível: $\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_B \\ \hat{\mathbf{x}}_N \end{bmatrix} \begin{matrix} \geq 0 \\ = 0 \end{matrix}$

- Vamos usar essa **partição** em uma solução **geral** (com $x_n$ não necessariamente zero):

- Qual o valor de desta solução geral ?

$$\mathbf{B}\mathbf{x}_B + \mathbf{N}\mathbf{x}_N = \mathbf{b}. \longrightarrow \boxed{\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}_N}$$

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_B^T & \mathbf{c}_N^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_B \\ \mathbf{x}_N \end{bmatrix} = \mathbf{c}_B^T \mathbf{x}_B + \mathbf{c}_N^T \mathbf{x}_N$$

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}_B^T \underbrace{(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}_N)}_{\mathbf{x}_B} + \mathbf{c}_N^T \mathbf{x}_N$$

- Qual o valor desta solução ?

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}_B^T \underbrace{(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}_N)}_{\mathbf{x}_B} + \mathbf{c}_N^T \mathbf{x}_N$$

$$= \underbrace{\mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}} - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}_N + \mathbf{c}_N^T \mathbf{x}_N .$$

valor da solução básica associada a esta partição: $f(\hat{\mathbf{x}})$

- Logo:

$$\boxed{\boldsymbol{\lambda}^T}$$

$$f(\mathbf{x}) = f(\hat{\mathbf{x}}) - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}_N + \mathbf{c}_N^T \mathbf{x}_N .$$

$$\boxed{\boldsymbol{\lambda}^T = \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1}}$$

$$f(\mathbf{x}) = f(\hat{\mathbf{x}}) - \mathbf{c}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}_{\mathrm{N}} + \mathbf{c}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}_{\mathrm{N}} = f(\hat{\mathbf{x}}) - \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\mathbf{N}\mathbf{x}_{\mathrm{N}} + \mathrm{c}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}_{\mathrm{N}}$$

$$= f(\hat{\mathbf{x}}) + (\mathbf{c}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\mathbf{N})\mathbf{x}_{\mathrm{N}}$$

Vamos expressar por coluna:

$$\mathbf{c}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}} - \bar{\boldsymbol{\lambda}}^{\mathrm{T}}\mathbf{N} = (c_{N_1}, c_{N_2}, \cdots, c_{N_{n-m}}) - \boldsymbol{\lambda}^T(\mathbf{a}_{N_1}, \mathbf{a}_{N_2}, \cdots, \mathbf{a}_{N_{n-m}})$$

$$= (c_{N_1} - \boldsymbol{\lambda}^T\mathbf{a}_{N_1}, c_{N_2} - \boldsymbol{\lambda}^T\mathbf{a}_{N_2}, \cdots, c_{N_{n-m}} - \boldsymbol{\lambda}^T\mathbf{a}_{N_{n-m}})$$

$$\mathbf{x}_{\mathrm{N}} = (x_{N_1}, x_{N_2}, \cdots, x_{N_{n-m}})$$

$$\boxed{f(\mathbf{x}) = f(\hat{\mathbf{x}}) + (c_{N_1} - \boldsymbol{\lambda}^T\mathbf{a}_{N_1})x_{N_1} + (c_{N_2} - \boldsymbol{\lambda}^T\mathbf{a}_{N_2})x_{N_2} + \ldots + (c_{N_{n-m}} - \boldsymbol{\lambda}^T\mathbf{a}_{N_{n-m}})x_{N_{n-m}}}$$

# Custos relativos

$$\boxed{f(\mathbf{x}) = f(\hat{\mathbf{x}}) + (c_{N_1} - \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{a}_{N_1})x_{N_1} + (c_{N_2} - \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{a}_{N_2})x_{N_2} + \ldots + (c_{N_{n-m}} - \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{a}_{N_{n-m}})x_{N_{n-m}}}$$

$$\hat{c}_{N_j} = (c_{N_j} - \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{a}_{N_j})$$

$$\boxed{f(\mathbf{x}) = f(\hat{\mathbf{x}}) + \hat{c}_{N_1} x_{N_1} + \hat{c}_{N_2} x_{N_2} + \ldots + \hat{c}_{N_{n-m}} x_{N_{n-m}}}$$

# Exemplo (Arenales et al, 2.22)

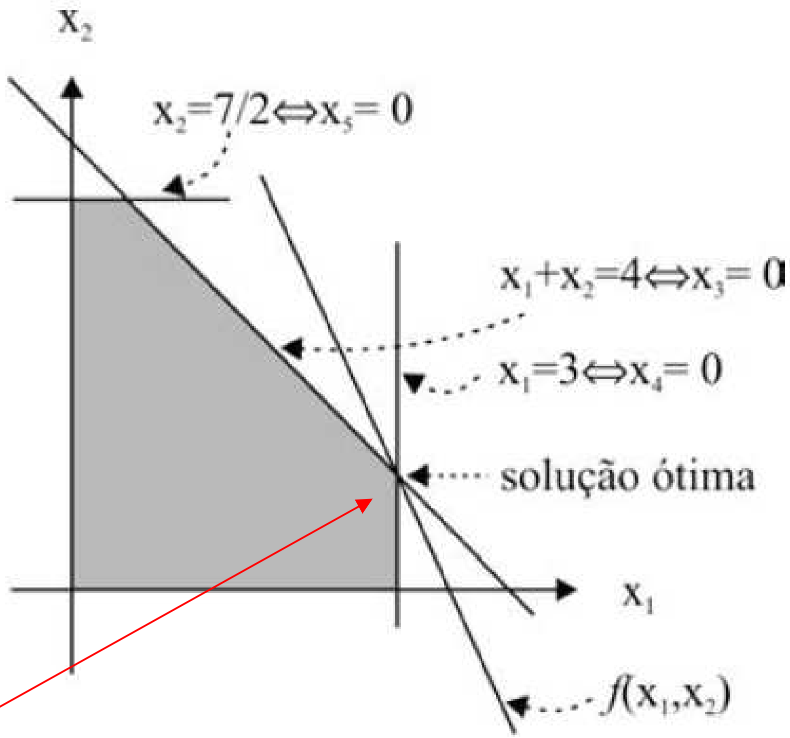
- Considere o problema:

$$\begin{aligned}
\text{Minimizar} \quad & f(x_1, x_2) = -2x_1 - x_2 \\
& x_1 + x_2 \leq 4 \\
& x_1 \leq 3 \\
& x_2 \leq \tfrac{7}{2} \\
& x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0
\end{aligned}$$

reescrito na forma padrão:

$$\begin{aligned}
\text{Minimizar} \quad & f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = -2x_1 - x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 \\
& x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\
& x_1 + x_4 = 3 \\
& x_2 + x_5 = \tfrac{7}{2} \\
& x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0,\ x_5 \geq 0.
\end{aligned}$$

- Resolução gráfica:




Intersecção das retas:
$x_1 + x_2 = 4$ e $x_1 = 3$

$\longrightarrow$

$$x_1^* = 3$$
$$x_2^* = 1$$
$$f(\mathbf{x}^*) = -7$$

- $x_1 + x_2 = 4$

(variável de foga associada: $x_3$)

- $x_1 = 3$

(variável de foga associada: $x_4$)

Logo, o ponto extremo deve ser obtido com a partição:

$B = (1,2,5)$ , $NB = (3,4)$

- Atribuindo zero às variáveis não-básicas:

$x_3 = x_4 = 0$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 \qquad &= 4 \\ x_1 \qquad + x_4 \qquad &= 3 \\ x_2 \qquad + x_5 &= \tfrac{7}{2} \end{aligned} \longrightarrow \underbrace{\begin{aligned} x_1 + x_2 \qquad &= 4 \\ x_1 \qquad &= 3 \\ x_2 + x_5 &= 7/2 \end{aligned}}$$

$$x_1^* = 3,\ x_2^* = 1,\ x_5^* = \tfrac{5}{2}$$

$$(\ x_3^* = x_4^* = 0\ )$$

Todos positivos: solução básica factível.

- Vamos calcular os custos relativos:

$$\mathrm{B} = \underbrace{(\mathrm{B}_1,\mathrm{B}_2,\mathrm{B}_3)}_{\text{m variáveis básicas}} = (1,2,5)\ ,\quad \mathrm{NB} = \overbrace{(\mathrm{NB}_1,\mathrm{NB}_2)}^{\text{n-m variáveis não-básicas}} = (3,4)$$

$$\begin{cases} \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{B_1} & \mathbf{a}_{B_2} & \mathbf{a}_{B_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{N} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{N_1} & \mathbf{a}_{N_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_3 & \mathbf{a}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{c}_{\mathbf{B}}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} c_{B_1} & c_{B_2} & c_{B_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\ \mathbf{c}_{\mathbf{N}}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} c_{N_1} & c_{N_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_3 & c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\hat{c}_{N_j} = (c_{N_j} - \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{a}_{N_j})$$

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}} = \mathbf{c}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}} \mathbf{B}^{-1} = (-2 \quad -1 \quad 0) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = (-1 \ -1 \ \ 0)$$

$$\begin{cases} \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{B1} & \mathbf{a}_{B2} & \mathbf{a}_{B3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{N} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{N_1} & \mathbf{a}_{N_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_3 & \mathbf{a}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{c}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} c_{B1} & c_{B2} & c_{B3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\ \mathbf{c}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} c_{N1} & c_{N2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_3 & c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\hat{c}_{N_j} = (c_{N_j} - \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{a}_{N_j})$$

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}} = \mathbf{c}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}} \mathbf{B}^{-1} = (-2 \quad -1 \quad 0) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = (-1 \; -1 \quad 0)$$

outra maneira de calcular $\lambda^{\mathrm{T}}$

$$\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}} = \mathbf{c}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}} \mathbf{B}^{-1}$$

$$\mathrm{B}\lambda^{\mathrm{T}} = \mathrm{c_B}^{\mathrm{T}}$$

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 \quad &= -2 \\ \lambda_1 \quad + \lambda_3 &= -1 \\ \lambda_3 &= 0 \end{aligned} \longrightarrow \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}} = (-1 \; -1 \quad 0)$$

$$\hat{c}_{N_j} = (c_{N_j} - \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{a}_{N_j}) \qquad \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}} = (-1\ -1\ \ 0)$$

$$j=1:\ \hat{c}_{N_1} = \hat{c}_3 = c_3 - \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}} \mathrm{a}_3 = 0 - \begin{pmatrix}-1 & -1 & 0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = 1$$

$$j=2:\ \hat{c}_{N_2} = \hat{c}_4 = c_4 - \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}} \mathrm{a}_4 = 0 - \begin{pmatrix}-1 & -1 & 0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = 1$$

# Condição de otimalidade

**Propriedade 2.3** (*condição de otimalidade*) Considere uma partição básica $\mathbf{A} = [\mathbf{B}\ \mathbf{N}]$ em que a solução básica associada $\hat{\mathbf{x}}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$ (isto é, solução básica factível), e seja $\boldsymbol{\lambda}^T = \mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}$ o vetor multiplicador simplex. Se $(c_{N_j} - \boldsymbol{\lambda}^T\mathbf{a}_{N_j}) \geq 0$, $j = 1, ..., n - m$, (isto é, todos os custos relativos são não-negativos), então a solução básica é ótima.

Solução básica factível e custos relativos maiores que zero $\longrightarrow$ Solução ótima

Solução ótima $\longrightarrow$ Solução básica factível e custos relativos maiores que zero

a volta vale se a solução básica factível é não degenerada.

problema de minimização