O desenvolvimento da questão faz parte da avaliação. Defina as variáveis e suas distribuições e diga que teorema ou propriedade você utilizou.

1. Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória da distribuição de Poisson com parâmetro θ.

   (a) Determine os parâmetros da priori conjugada de θ sabendo que $E(\theta) = 4$ e o coeficiente de variação a priori é 0,5.

   (b) Mostre que a média a posteriori é da forma $\gamma_n \overline{x} + (1 - \gamma_n)\mu_0$, onde $\mu_0 = E(\theta)$ e $\gamma_n \to 1$ quando $n \to \infty$. Interprete este resultado.

   Solução:

   (a) Se $\theta \sim Gama(a, b)$ sabemos que $E(\theta) = a/b$ e $Var(\theta) = a/b^2$ e o coeficiente de variação é dado por
   $$\frac{\sqrt{Var(\theta)}}{E(\theta)} = \frac{\sqrt{a}/b}{a/b} = \frac{\sqrt{a}}{a} = \frac{1}{2}.$$
   Portanto, $a = 0,25a^2 \;\Rightarrow\; a(0,25a - 1) = 0$ cujas raizes são $a = 0$ e $a = 4$. Como os parâmetros da distribuição Gama são positivos segue que $a = 4$. Da expressão da média a priori segue que $b = 1$.

   (b) Se $X_i \sim Poisson(\theta)$, $i = 1, \ldots, n$ e os $X_i's$ são independentes então,
   $$p(x_1, \ldots, x_n|\theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\theta^{x_i} e^{-\theta}}{x_i!} \propto e^{-n\theta}\theta^y, \text{ sendo } \quad y = \sum_{i=1}^{n} x_i.$$
   Do item anterior temos que a função de densidade de probabilidade de θ é
   $$p(\theta) = \frac{1}{\Gamma(4)}\theta^3 e^{-\theta} \propto \theta^3 e^{-\theta}$$
   e pelo teorema de Bayes segue que
   $$p(\theta|x_1, \ldots, x_n) \propto e^{-n\theta}\theta^y\theta^3 e^{-\theta} \propto \theta^{3+y} e^{-(1+n)\theta}.$$
   Por comparação com a função de densidade da distribuição Gama e como $4+y > 0$ e $1 + n > 0$ segue que a distribuição a posteriori de θ é $Gama(4 + y, 1 + n)$. Para a e b quaisquer, a média a posteriori então fica
   $$E(\theta|x_1, \ldots, x_n) = \frac{a + n\overline{x}}{b + n} = \frac{a}{b + n} + \frac{n\overline{x}}{b + n} = \frac{a}{b}\frac{b}{b + n} + \frac{n}{b + n}\overline{x}.$$
   Denotando por $a/b = \mu_0$ e $\gamma_n = n/(b + n)$ segue que $1 - \gamma_n = b/(b + n)$ e
   $$E(\theta|x_1, \ldots, x_n) = (1 - \gamma_n)\mu_0 + \gamma_n\overline{x}, \text{ com } \lim_{n\to\infty} \gamma_n = 1.$$

Este resultado mostra que a média a posteriori é uma média ponderada entre a média a priori e a média amostral e os pesos somam 1, ou seja

$$\min\{\mu_0, \overline{x}\} \leq E(\theta|x_1, \ldots, x_n) \leq \max\{\mu_0, \overline{x}\}.$$

Além disso,

$$\lim_{n\to\infty} E(\theta|x_1, \ldots, x_n) = \overline{x}$$

indicando que para amostras grandes os parâmetros da distribuição a priori terão pouca influência na média a posteriori.

2. Uma droga será administrada em 2 tipos diferentes A e B de animais. Sabe-se que a resposta média θ é a mesma nos dois tipos de animais mas seu valor é desconhecido e deve ser estimado. Além disso, a variância da resposta é 4 vezes maior em animais do tipo A. Sejam $X_1, \ldots, X_m$ e $Y_1, \ldots, Y_n$ amostras aleatórias independentes de respostas dos animais dos tipos A e B respectivamente.

   (a) Mostre que $\hat{\theta} = \alpha\overline{X} + (1-\alpha)\overline{Y}$ é um ENV para θ.

   (b) Assumindo distribuições normais para X e Y e valores fixos de m e n obtenha o valor de α que gera um ENV de variância mínima.

   Solução:

   (a) Do enunciado segue que $E(X) = \theta$ e $E(Y) = \theta$, portanto $\overline{X}$ e $\overline{Y}$ que são os momentos de 1a ordem são ENV de θ, i.e. $E(\overline{X}) = E(\overline{Y}) = \theta$. Logo,

   $$E(\hat{\theta}) = \alpha E(\overline{X}) + (1-\alpha)E(\overline{Y}) = \alpha\theta + (1-\alpha)\theta = \theta$$

   e assim $\hat{\theta}$ é um ENV para θ.

   (b) Denotemos $Var(X)$ e $Var(Y)$ por σ_X^2 e σ_Y^2 respectivamente. Lembrando que

   $$Var(\overline{X}) = \sigma_X^2/m \qquad \text{e} \qquad Var(\overline{Y}) = \sigma_Y^2/n$$

   e como as amostras são independentes segue que

   $$\begin{aligned} Var(\hat{\theta}) &= \alpha^2 Var(\overline{X}) + (1-\alpha)^2 Var(\overline{Y}) \\ &= \alpha^2\sigma_X^2/m + (1-\alpha)^2\sigma_Y^2/n \\ &= 4\alpha^2\sigma_Y^2/m + (1-\alpha)^2\sigma_Y^2/n \qquad (1) \end{aligned}$$

   pois do enunciado temos que $\sigma_X^2 = 4\sigma_Y^2$. Da desigualdade de Cramer-Rao temos que,

   $$Var(\hat{\theta}) \geq I(\theta)^{-1}$$

   sendo $I(\theta)$ a informação de Fisher de θ com base nestas amostras. Para que o estimador tenha variância minima precisamos então ter $Var(\hat{\theta}) = I(\theta)^{-1}$. Lembremos que, se $Z \sim N(\theta, \sigma^2)$ então

   $$\begin{aligned} \log p(z|\theta) &= -\frac{1}{2}\left(\log(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{\sigma^2}(z-\theta)^2\right) \\ \frac{\partial \log p(z|\theta)}{\partial\theta} &= \frac{1}{\sigma^2}(z-\theta) \\ \frac{\partial \log p(z|\theta)}{\partial\theta} &= -\frac{1}{\sigma^2} \end{aligned}$$

e portanto, a informação de Fisher total (com base nas 2 amostras) será

$$\frac{m}{\sigma_X^2} + \frac{n}{\sigma_Y^2} = \frac{m}{4\sigma_Y^2} + \frac{n}{\sigma_Y^2}.$$

A variância minima então é dada por

$$Var(\hat{\theta}) = \left[\frac{m}{4\sigma_Y^2} + \frac{n}{\sigma_Y^2}\right]^{-1} \tag{2}$$

e o valor de α é obtido igualando-se (1) e (2).