MAE 311 - INFERÊNCIA ESTATÍSTICA

1a. Lista de Exercícios - 2*o*. semestre de 2009

Profa. Mônica Carneiro Sandoval

1. Seja X uma v.a. com f.d.p.

$$f(x \mid \beta) = \frac{1}{\beta}\exp\left\{-\frac{x-\alpha}{\beta}\right\},\ x \geq \alpha,\ \alpha \in \Re,\ \beta > 0\,.$$

Suponha que α é conhecido. Sejam $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de X.

a) Qual é o suporte da distribuição de X? Ele depende de parâmetro desconhecido?

b) Mostre que a distribuição de X faz parte da família exponencial unidimensional.

c) Mostre que $(X-\alpha)/\beta$ tem distribuição exponencial de média 1.

d) Calcule a esperança e a variância de X.

e) Mostre que $\hat{\beta} = \sum_{i=1}^{n}(X_i - \alpha)/n$ é um estimador não viciado para β.

f) Obtenha a veriância de $\hat{\beta}$.

g) Qual é a estimativa de β se $\alpha = 2$ e foi observada a amostra 3,2; 4,1; 8,1; 4,9; 4,3; 8,0; 9,6; 3,5; 3,5; 5,3; 7,2; 9,1?

h) Mostre que $\sum_{i=1}^{n} X_i$ é uma estatística suficiente completa.

2. Sejam X_1, X_2 uma a.a. da v.a. $X \sim P(\theta)$. Mostre que $T = X_1 + 2X_2$ não é uma estatística suficiente para θ.

3. Uma v.a. X tem distribuição de Maxwell, $M(\theta)$, se sua f.d.p. é dada por

$$f(x|\theta) = \frac{\sqrt{2}x^2}{\pi\theta^3}exp\left\{\frac{-x^2}{2\theta^2}\right\}, \quad x > 0, \theta > 0.$$

Mostre que a distribuição $M(\theta)$ faz parte da família exponencial e mostre que $E(X^2) = 3\theta^2$ e $Var(X^2) = 6\theta^4$.

4. Sejam $X_1, \ldots, X_n$ uma a.a. da v.a. $X \sim \mathrm{U}(-\theta, \theta)$, $\theta > 0$. Mostre que $X_{(1)}$ e $X_{(n)}$ são conjuntamente suficientes para θ.

5. a) Sejam $X_1, \ldots, X_n$ uma a.a. da v.a. $X \sim \mathrm{N}(\theta,\, \theta^2)$, $-\infty < \theta < \infty$. Mostre que a família de distribuições de X faz parte da família exponencial. Encontre uma estatística suficiente para θ. Esta estatística é completa? Sugestão: Considere $g(\mathbf{X}) = 2(\Sigma X_i)^2 - (n+1)\Sigma X_i^2$.

b) Sejam $X_1, \ldots, X_n$ uma a.a. da v.a. $X \sim \mathrm{N}(\theta,\, \theta)$, $0 < \theta < \infty$. Mostre que a família de distribuições de X faz parte da família exponencial e, então, encontre uma estatística suficiente completa para θ.

6. Seja X uma variável aleatória com distribuição normal com média μ e variância σ^2. Seja Y uma variável aleatória com distribuição normal com média μ e variância $\sigma^2/4$. Sejam X e Y independentes Para estimar a média μ, os seguintes procedimentos foram propostos:

(i) selecionar uma amostra aleatória $Y_1, \dots, Y_n$ de tamanho n da v.a. Y e utilizar $\hat{\beta}_1 = \bar{Y}$ para estimar μ.

(ii) Selecionar uma amostra $Y_1, \dots, Y_{n_1}$ de tamanho $n_1 = n/2$ (supor n par) da v.a. Y e calcular a média amostral $\bar{Y}_{n_1}$. Selecionar uma amostra $X_1, \dots, X_{n_2}$ de tamanho $n_2 = n/2$ da v.a. X e calcular $\bar{X}_{n_2}$. Usar $\hat{\beta}_2 = \frac{\bar{X}_{n_2} + \bar{Y}_{n_1}}{2}$ para estimar μ.

a) Verifique se $\hat{\beta}_1$ e $\hat{\beta}_2$ são não viciados para μ.

b) Baseando-se no erro quadrático médio, determine qual dos dois estimadores é mais indicado para estimar μ. Por que? **7.** Sejam $X_1, \dots, X_n$ uma a.a. da v.a. X com distribuição Beta(α, β) com f.d.p. dada por

$$f(x|\alpha, \beta) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}, \quad 0 < x < 1,\, \alpha > 0,\, \beta > 0.$$

onde $B(.,.)$ é a função beta.

a) Encontre uma estatística conjuntamente suficiente para (α, β).

b)Suponha que β é conhecido, encontre uma estatística suficiente para α.

c) Suponha que α é conhecido, encontre uma estatística suficiente para β.

8. Sejam $X_1, \dots, X_n$ uma amostra aleatória da distribuição de $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$, $\mu \in \Re$ conhecido, $\sigma^2 > 0$.

a) Usando o critério da fatoração, mostre que $\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2$é uma estatística suficiente para σ^2.

b) Mostre que a distribuição de X pertence à família exponencial unidimensional.

9. Exercício 2.7

10. Exercício 1.8

11. Exercício 1.9

12. Exercício 1.10

13. Exercício 1.11

14. Exercício 1.12

15. Exercício 1.13