MAE0311 - Inferência Estatística

Fernando Henrique Ferraz Pereira da Rosa

10 de setembro de 2003

Lista 2[1]

2.2 Sejam $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória da variável aleatória $X \sim Binomial(2, \theta)$.

(a) Encontre o limite inferior da variância dos estimadores não viciados de σ^2.

Temos por definição que

$$LI(\theta) = \frac{1}{nI_F(\theta)} \tag{1}$$

onde

$$I_F(\theta) = E\left[\left(\frac{\delta \log f(X|\theta)}{\delta\theta}\right)^2\right].$$

Achemos em primeiro lugar a função escore:

$$\begin{aligned}
\frac{\delta \log f(X|\theta)}{\delta\theta} &= \frac{\delta\left(\log\binom{2}{X}\theta^X(1-\theta)^{2-X}\right)}{\delta\theta} \\
&= \frac{\delta\left(\log\binom{2}{X} + X\log\theta + (2-X)\log(1-\theta)\right)}{\delta\theta} \\
&= \frac{X}{\theta} - \frac{2-X}{1-\theta} = \frac{X(1-\theta) - \theta(2-X)}{\theta(1-\theta)} \\
&= \frac{X - 2\theta}{\theta(1-\theta)}
\end{aligned}$$

A partir daí temos que:

$$\begin{aligned}
I_F(\theta) &= E\left[\left(\frac{X-2\theta}{\theta(1-\theta)}\right)^2\right] = E\left[\frac{(X-2\theta)^2}{\theta^2(1-\theta)^2}\right] = E\left[\frac{X^2 - 4X\theta + 4\theta^2}{\theta^2(1-\theta)^2}\right] \\
&= \frac{E\left[X^2\right] - 4E[X]\theta + 4\theta^2}{\theta^2(1-\theta)^2} \qquad (2)
\end{aligned}$$

Usando agora do fato de que $E[X] = 2\theta$ e $E\left[X^2\right] = 2\theta(\theta+1)$, a equação 2 se reduz a:

[1] Powered by $\LaTeX\,2_\varepsilon$, R 1.7.1 and Gentoo 1.4

$$
\begin{aligned}
(2) \quad &= \frac{2\theta(\theta+1) - 8\theta\theta + 4\theta^2}{\theta^2(1-\theta)^2} = \frac{2\theta^2 + 2\theta - 8\theta^2 + 4\theta^2}{\theta^2(1-\theta)^2} = \frac{2\theta - 2\theta^2}{\theta^2(1-\theta)^2} \\
&= \frac{2\theta(1-\theta)}{\theta^2(1-\theta)^2} = \frac{2}{\theta(1-\theta)}. \qquad (3)
\end{aligned}
$$

Tomando o resultado da equação 3 e inserindo isso na equação 1, temos:

$$LI(\theta) = \frac{1}{n\frac{2}{\theta(1-\theta)}} = \frac{\theta(1-\theta)}{2n}$$

(b) Encontre uma estatística suficiente para θ.

Para achar uma estatística suficiente para θ devemos ser capazes de fatorar a função de máxima verossimilhança de X da seguinte maneira:

$$L(\theta; x) = h(x_1, \ldots, x_n) g_\theta(T(x_1, \ldots, x_n))$$

Dada $f(x|\theta) = \binom{2}{x}\theta^x(1-\theta)^{2-x}, x = 0, 1, 2$ temos que:

$$
\begin{aligned}
L(\theta; x) \quad &= \binom{2}{x_1}\theta^{x_1}(1-\theta)^{2-x_1} \ldots \binom{2}{x_n}\theta^{x_n}(1-\theta)^{2-x_n} \\
&= \underbrace{\prod_{i=1}^{n}\binom{2}{x_i}}_{h(x_1,\ldots,x_n)} \underbrace{\theta^{\sum_{i=1}^{n} x_i}(1-\theta)^{2n-\sum_{i=1}^{n} x_i}}_{g_\theta(T(x_1,\ldots,x_n))}
\end{aligned}
$$

O que nos leva pelo teorema da fatoração à estatística suficiente:

$$T(X_1, \ldots, X_n) = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

(c) Obtenha um estimador não viciado para θ que seja função da estatística suficiente.

Se tomarmos

$$\hat{\theta} = \overline{X} = \frac{1}{n}T(X_1, \ldots, X_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

Sabemos que

$$E[\hat{\theta}] = E[\overline{X}] = E[X] = 2\theta$$

Como queremos estimar θ sem vício, basta *arrumarmos* esse estimador:

$$E[\hat{\theta}'] = \theta \Rightarrow \hat{\theta}' = \frac{\overline{X}}{2}$$

Temos então que $\hat{\theta} = \overline{X}/2$ é um estimador que é função de uma estatística suficiente e não é viciado para θ.

(d) Verifique se o estimador é eficiente.

Para que o estimador seja eficiente devemos ter $e(\hat{\theta}) = 1$. Sabemos que:

$$e(\hat{\theta}) = \frac{LI(\theta)}{Var(\hat{\theta})} \tag{4}$$

Calculando as partes dessa equação que ainda não sabemos:

$$Var(\hat{\theta}) = Var\left(\frac{\overline{X}}{2}\right) = \frac{1}{4}Var(\overline{X}) = \frac{\sigma_X^2}{4n} = \frac{2\theta(1-\theta)}{4n} = \frac{\theta(1-\theta)}{2n}$$

Substituindo as partes conhecidas na equação 4:

$$e(\hat{\theta}) = \frac{\frac{\theta(1-\theta)}{2n}}{\frac{\theta(1-\theta)}{2n}} = 1$$

Logo o estimador é eficiente.

2.6 Seja $f(x|\theta)$ uma função de densidade para a qual as condições de regularidade estão satisfeitas. Mostre que

$$E\left[\left(\frac{\delta \log f(X|\theta)}{\delta\theta}\right)^2\right] = -E\left[\frac{\delta^2 \log f(X|\theta)}{\delta\theta^2}\right]. \tag{5}$$

Partindo da definição de esperança de uma função de uma variável aleatória e desenvolvendo o lado esquerdo da equação 5 , temos:

$$\begin{aligned}
E\left[\left(\frac{\delta \log f(X|\theta)}{\delta\theta}\right)^2\right] &= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\delta \log f(X|\theta)}{\delta\theta}\right)^2 f(X|\theta)\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{f(X|\theta)}\frac{\delta f(X|\theta)}{\delta\theta}\right)^2 f(X|\theta)\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\delta f(X|\theta)}{\delta\theta}\right)^2 \frac{1}{f(X|\theta)^2} f(X|\theta)\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\delta f(X|\theta)}{\delta\theta}\right)^2 f(X|\theta)\mathrm{d}x \qquad (6)
\end{aligned}$$

Vamos partir do lado direito da equação 5 agora:

$$-E\left[\frac{\delta^2 \log f(X|\theta)}{\delta\theta^2}\right] = -\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\delta^2 \log f(X|\theta)}{\delta\theta^2} f(X|\theta)\mathrm{d}x$$

$$
\begin{aligned}
&= -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta}{\delta\theta}\left[\frac{1}{f(X|\theta)}\frac{\delta f(X|\theta)}{\delta\theta}\right] f(X|\theta)\mathrm{d}x \\
&= -\int_{-\infty}^{\infty} \left[-\frac{\frac{\delta f(X|\theta)}{\delta\theta}}{f(X|\theta)^2}\frac{\delta f(X|\theta)}{\delta\theta} + \frac{1}{f(X|\theta)}\frac{\delta^2 f(X|\theta)}{\delta\theta^2}\right] f(X|\theta)\mathrm{d}x \\
&= -\int_{-\infty}^{\infty} -\left(\frac{\delta f(X|\theta)}{\delta\theta}\right)^2 \frac{1}{f(X|\theta)} + \frac{\delta^2 f(X|\theta)}{\delta\theta^2}\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\delta f(X|\theta)}{\delta\theta}\right)^2 \frac{1}{f(X|\theta)}\mathrm{d}x - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta^2 f(X|\theta)}{\delta\theta^2}\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\delta f(X|\theta)}{\delta\theta}\right)^2 \frac{1}{f(X|\theta)}\mathrm{d}x - \frac{\delta^2}{\delta\theta^2}\int_{-\infty}^{\infty} f(X|\theta)\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\delta f(X|\theta)}{\delta\theta}\right)^2 \frac{1}{f(X|\theta)}\mathrm{d}x - \frac{\delta^2}{\delta\theta^2}1 \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\delta f(X|\theta)}{\delta\theta}\right)^2 \frac{1}{f(X|\theta)}\mathrm{d}x \qquad (7)
\end{aligned}
$$

Notando agora que (6) = (7), fica então provada a equação (5).

2.9 Sejam $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória da varíavel aleatória $X \sim N(\mu, 1)$.

(a) Mostre que o estimador $\hat{\gamma} = \overline{X}^2 - 1/n$ é não viciado para $g(\mu) = \mu^2$.

$$E[\hat{\gamma}] = E[\overline{X}^2 + 1/n] = E[\overline{X}^2] + 1/n = \mu^2 + 1/n - 1/n = \mu^2$$

Onde obtivemos $E[\overline{X}^2]$ a partir do fato de que $E[X^2] = Var(X) + E^2[X]$.

(b) Existe ENVVUM para μ^2?

Temos que X pertence à família exponencial com parâmetros $d(\mu) = \frac{-\mu^2}{2}, c(\mu) = \mu, T(X) = x$ e $S(x) = \frac{x^2}{2}$. Como $c(\mu)$ contém um intervalo da reta em seu domínio de variação, concluímos que há ENVVUM para μ. Para μ^2 não se pode garantir o mesmo por causa da não bijetividade da função $g(x) = x^2$ escolhida.

(c) Encontre o limite inferior da variância dos estimadores não viciados de $g(\mu) = \mu^2$ e verifique se $\hat{\gamma}$ é eficiente.

$$LI(g(\mu)) = \frac{g'(\mu)^2}{nI_F(\mu)}.$$

Precisamos então encontrar:

$$I_F(\mu) = E\left[\left(\frac{\delta \log f(X|\mu)}{\delta\mu}\right)^2\right]$$

Onde temos:

$$f(X|\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2}}$$

Desse modo:

$$\log f(X|\mu) = \log \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \log e^{\frac{-(X-\mu)^2}{2}} = \log \frac{1}{\sqrt{2\pi}} - \frac{1}{2}(X-\mu)^2$$

Derivando isso em relação a μ uma vez:

$$\frac{\delta \log f(X|\mu)}{\delta\mu} = \frac{\delta\left(-(X-\mu)^2\right)}{\delta\mu} = \frac{\delta\left(\frac{-X^2}{2} + X\mu - \frac{\mu^2}{2}\right)}{\delta\mu} = X - \mu$$

Então:

$$E\left[\left(\frac{\delta \log f(X|\mu)}{\delta\mu}\right)^2\right] = E\left[X^2 - 2X\mu + \mu^2\right] = \mu^2 + 1 - 2\mu\mu + \mu^2 = 1$$

Logo:

$$LI(\mu^2) = \frac{4\mu^2}{n}$$

Vamos agora calcular a variância do estimador $\hat{\gamma}$:

$$Var(\hat{\gamma}) = Var(\overline{X}^2 - 1/n) = Var(\overline{X}^2)$$

Assim nosso problema fica reduzido a encontrar a variância de $\overline{X}^2$:

$$Var(\overline{X}^2) = E[\overline{X}^4] - E^2[\overline{X}^2] \tag{8}$$

A quantidade à direita já conhecemos, pois calculamos ela para resolver o primeiro item deste exercício. Precisamos então somente calcular $E[\overline{X}^4]$. Para isso, vamos primeiro encontrar a função de distribuição da soma de normais, em seguida fazer uma transformação dessa soma para outra variável aleatória e a partir daí encontrar a distribuição de $\overline{X}$. Então vamos encontrar sua função geradora de momentos, derivá-la 4 vezes e calcular seu valor no ponto 0.
Em primeiro lugar, notemos que $\sum_{i=1}^{n} X_i$ é uma soma de normais independentes, de forma que:

$$X_i \sim N(\mu, 1) \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} X_i \sim N(n\mu, n)$$

Chamemos de Y a soma das normais. Já temos a distribuição de Y, mas queremos a de $\frac{1}{n}Y$. Basta então considerarmos a transformação da variável aleatória Y pela função $g(y) = y/n$ e achar sua função de distribuição.

Seja $\overline{X} = g(Y)$, temos que:

$$f_{\overline{X}}(x) = f_Y[g^{-1}(x)] \left| \frac{d}{\mathrm{d}x} g^{-1}(x) \right|$$

Segue que:

$$g(y) = y/n \Rightarrow g^{-1}(x) = nx$$

E que:

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} e^{\frac{-(x-n\mu)^2}{2n}}$$

Então:

$$f_{\overline{X}}(x) = n \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} e^{\frac{-(nx-n\mu)^2}{2n}}$$

Com a função de densidade podemos enfim encontrar a função geradora de momentos, pela sua definição:

$$\phi_{\overline{X}}(t) = E[e^{t\overline{X}}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} \frac{n}{\sqrt{2\pi n}} e^{\frac{-(nx-n\mu)^2}{2n}} \mathrm{d}x = e^{\frac{t(t+2n\mu)}{n}}$$

Assim:

$$E[\overline{X}^4] = \phi_{\overline{X}}^{(4)}(0) = \mu^4 + \frac{6\mu^2}{n} + \frac{3}{n^2}$$

Voltando isso na equação 8:

$$Var(\overline{X}^2) = \mu^4 + \frac{6\mu^2}{n} + \frac{3}{n^2} - \left(\mu^2 + \frac{1}{n}\right)^2 = \frac{2}{n}\left(2\mu^2 + \frac{1}{n}\right)$$

Aplicando os valores conhecidos na equação 4, temos:

$$e(\hat{\gamma}) = \frac{\frac{4\mu^2}{n}}{\frac{2}{n}\left(2\mu^2 + \frac{1}{n}\right)} \neq 1$$

Portanto $\hat{\gamma}$ não é um estimador eficiente para μ^2. Ele é entretanto assintoticamente eficiente.

2.11 Sejam $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória da variável aleatória X com distribuição geométrica com parâmetro θ, isto é,

$$f(x|\theta) = \theta(1-\theta)^x, \qquad x = 0, 1, 2, \ldots, \quad 0 < \theta < 1.$$

Encontre o ENVVUM para $1/\theta$.

Notemos que X pertence a família exponencial. Basta fazermos:

$$e^{\log \theta (1-\theta)^x} = e^{\log \theta + x \log 1 - \theta}$$

Donde: $T(x) = x, c(\theta) = \log 1 - \theta, d(\theta) = \log\theta$ e $S(x) = 0$.

Temos ainda que:

$$\theta \in [0,1] \Rightarrow c(\theta) \in (\infty, 0]$$

De forma que o domínio de variação de $c(\theta)$ contém um retângulo unidimensional. Vale então o teorema 2.5.2 e a estatística $T(X_1, \ldots, X_n) = \sum_{i=1}^n X_i$ é *suficiente* e *completa* para θ.

Notemos agora que $\overline{X}$, que é função 1:1 de T e portanto também é suficiente, apresenta a seguinte propriedade:

$$E[\overline{X}] = E[X] = \frac{1-\theta}{\theta}$$

Manipulando essa expressão:

$$\theta E[\overline{X}] = 1 - \theta \Rightarrow \theta E[\overline{X}] + \theta = 1 \Rightarrow E[\overline{X}] + 1 = \frac{1}{\theta} \Rightarrow E[\overline{X} + 1] = \frac{1}{\theta}$$

O que nos garante que $\hat{\theta} = \overline{X} + 1$ é um estimador não viciado de θ, e, de acordo com o Teorema de Lehmann-Scheffé, é um ENVVUM.

Sobre

A versão eletrônica desse arquivo pode ser obtida em `http://www.feferraz.net`