MAE 311 - INFERÊNCIA ESTATÍSTICA

3a. Lista de Exercícios - 2*o*. semestre de 2009

Profa. Mônica Carneiro Sandoval

1. Seja X uma variável aleatória com distribuição exponencial de parâmetro θ, $\theta > 0$, e função densidade de probabilidade

$$f(x \mid \theta) = \theta e^{-\theta x}\, \mathrm{I}_{(0,\,\infty)}\,(x)\,, \quad \theta > 0\,.$$

Sejam $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de X. Encontre o EMV de $E[X]$. Ele é ENVVUM?

2. Seja X uma variável aleatória com distribuição de Poisson de parâmetro θ, $\theta > 0$. Sejam $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de X. Encontre o EMV de $P[X \leq 1]$.

3. Seja X uma variável aleatória com distribuição uniforme discreta com função de probabilidade

$$f(x \mid N) = \frac{1}{N}, \quad x = 1, 2, 3, ..., N;$$

$N = 1, 2, ...$ Sejam $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de X. Encontre o EMV de N.

4. Sejam $X_1, \ldots, X_n$ uma a.a. da v.a. $X \sim \mathrm{U}(a, a + \theta)$, $\theta > 0$ e a é conhecido. Encontre o EMV de θ. Ele é não viciado? Encontre o EMV de $E[X]$.

5. Sejam $X_1, \ldots, X_n$ uma a.a. da v.a. X com função densidade de probabilidade

$$f(x \mid \theta) = \exp\{-(x - \theta)\}, \quad x > \theta,$$

onde $\theta > 0$. Seja $X_{(1)} = min(X_1, \ldots, X_n)$. Mostre que $X_{(1)}$ é o EMV de θ.

6. Sejam $X_1, \ldots, X_n$ uma a.a. da v.a. X com distribuição Gama (α, β) e função densidade de probabilidade

$$f(x \mid \alpha, \beta) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha - 1} \mathrm{e}^{-\beta x}, \quad x > 0$$

onde $\Gamma(.)$ é a funcção. Admita que α é conhecido. Encontre o EMV de β. Encontre o EMV de $E[X]$.

7. Sejam $X_1, \ldots, X_n$ uma a.a da v.a. X com f.d.p. dada por:

$$f(x|\theta_1, \theta_2) = \frac{\theta_2}{\theta_1} \left(\frac{x}{\theta_1} \right)^{\theta_2 - 1}, \quad 0 < x \leq \theta_1, \theta_2 > 0$$

a) Encontre uma estatística conjuntamente suficiente para (θ_1, θ_2)

Suponha agora que θ_1 é conhecido:

b) encontre a estatística suficiente para θ_2 .

c) Mostre que o EMV é não viciado para $1/\theta_2$.

d) Verifique se o EMV é eficiente.

(Sugestão: obtenha a f.d.p. de $Y = -\log \frac{X}{\theta_1}$)

8. Considere as variáveis aleatórias independentes X e Y com distribuições exponenciais cujas respectivas médias desconhecidas são λ e θ. Suponha que duas amostras aleatórias da tamanhos n e m (uma para cada variável) sejam observadas. O parâmentro de interesse é $\pi = \lambda/\theta$.

a) Mostre que a função densidade conjunta de X e Y pertence à família exponencial.

b) Encontre um ENVVUM de π.

c) Encontre um EMV de π.

d) Compare os erros quadráticos médios associados aos estimadores definidos em (b) e (c). Qual a sua conclusão?

9. Exercício 3.3

10. Exercício 3.4

11. Exercício 3.6

12. Exercício 3.7

13. Exercício 3.12

14. Exercício 3.13

15. Exercício 3.18

16. Exercício 3.20