Algoritmos e Estruturas de Dados II

Grafos I:

Conceitos & Aplicações

Prof. Ricardo J. G. B. Campello

Parte deste material é baseado em adaptações e extensões de slides disponíveis em http://ww3.datastructures.net (Goodrich & Tamassia).

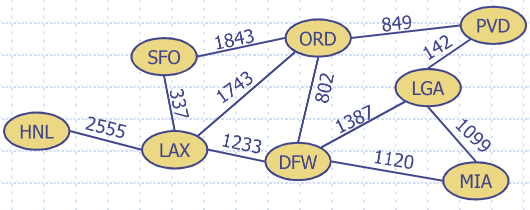
Organização

- Introdução aos Grafos
  - Definição
  - Terminologia
  - Algumas Propriedades
- Exemplos de Aplicações de Grafos

2

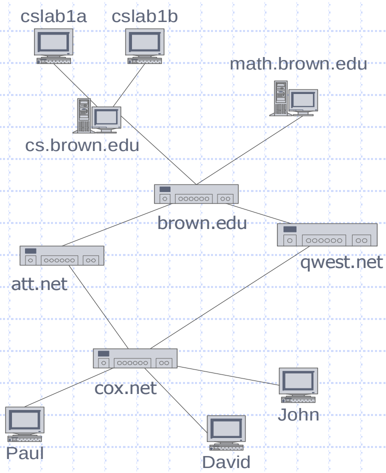
Definição

- Um **grafo** pode ser definido como um par (V, A), onde:
  - V : conjunto de nós chamados vértices (ou nós).
  - A : conjunto de pares de vértices chamados arestas (ou arcos).
- Tanto vértices quanto arestas podem armazenar elementos.
  - Quando arestas armazenam grandezas numéricas, o grafo é dito **ponderado**.
- Exemplo:
  - Um vértice pode representar um aeroporto e armazenar um código de 3 letras.
  - Uma aresta pode representar uma rota de vôo entre dois aeroportos e armazenar a distância entre eles.



Algumas Aplicações

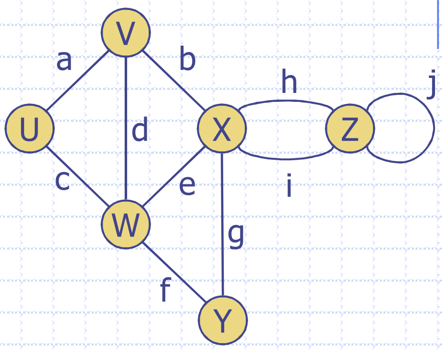
- Modelagem de Circuitos Eletrônicos:
  - Placas de circuito impresso.
  - Circuitos integrados.
- Redes de Transporte:
  - Representação de Rodovias.
  - Mapa de Vôos.
- Redes de Computadores:
  - Redes Locais.
  - Internet.
- Bancos de Dados:
  - Diagrama Entidade-Relacionamento.
- ...



4

Terminologia

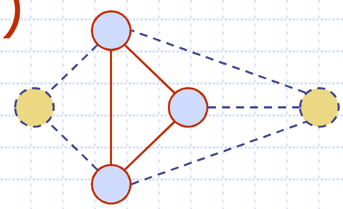
- **Vértice final** de uma aresta:
  - **U** e **V** são vértices finais (*end vertices* ou *endpoints*) de **a.**
- **Arestas incidentes** em um vértice:
  - **a**, **d** e **b** são incidentes em **V**.
- **Vértices adjacentes**:
  - **U** e **V** são vértices adjacentes.
- **Grau** de um vértice (***deg***):
  - **X** tem grau 5 (número de arestas incidentes em **X**).
- **Laços**:
  - **j** é um laço (*self-loop*).
- Arestas **paralelas** (ou **múltiplas**):
  - **h** e **i** são arestas paralelas (possuem vértices finais x e z em comum).



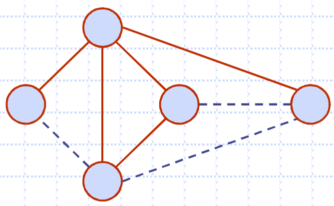
Grafos desprovidos de laços e de arestas paralelas são denominados **simples**.

Terminologia (cont.)

- Um **subgrafo** S de um grafo *G* é um grafo tal que:
  - Os vértices de S são um subconjunto dos vértices de *G*.
  - As arestas de S são um subconjunto das arestas de *G*.
- Um **subgrafo gerador** (*spanning sugraph*) de *G* é um subgrafo que contém todos os vértices de *G*.



Subgrafo

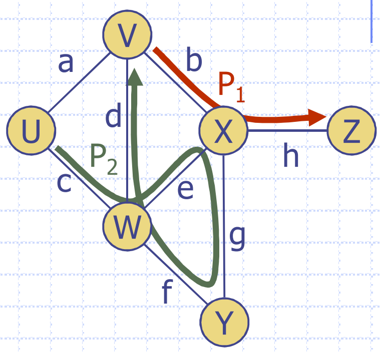


Subgrafo gerador

6

Terminologia (cont.)

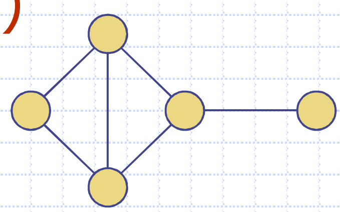
- **Caminho**:
  - seqüência alternante de vértices e arestas.
  - começa com um vértice.
  - termina em um vértice.
  - cada aresta é precedida e seguida por seus vértices finais.
- **Caminho simples**:
  - caminho no qual todos os seus vértices e arestas são distintos.
- Exemplos:
  - P_1=(V,b,X,h,Z) é um caminho simples.
  - P_2=(U,c,W,e,X,g,Y,f,W,d,V) é um caminho que não é simples.



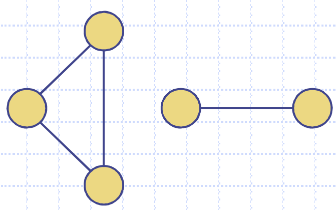
7

Terminologia (cont.)

- Um grafo G é **conexo** se existe um caminho entre qualquer par de vértices de G.
- Um **componente conexo** de um grafo G é um subgrafo conexo de G.
- G é dito **completamente conexo** ou **completo** se cada par de vértices é adjacente.



Grafo conexo

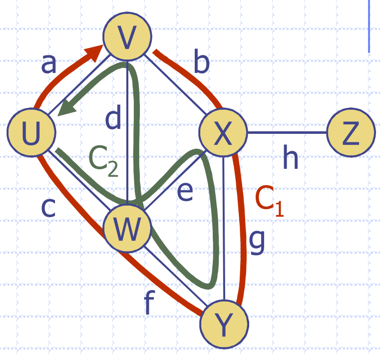


Grafo não-conexo com dois componentes conexos

8

Terminologia (cont.)

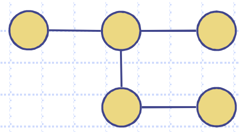
- **Ciclo**:
  - Caminho circular (o primeiro e último vértices são iguais).
- **Ciclo simples**:
  - Ciclo cujas arestas e vértices intermediários são todos distintos.
- Exemplos:
  - C_1=(V,b,X,g,Y,f,W,c,U,a,V) é um ciclo simples.
  - C_2=(U,c,W,e,X,g,Y,f,W,d,V,a,U) é um ciclo não-simples.



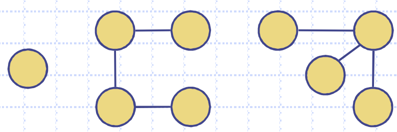
Grafo desprovido de ciclos é denominado **acíclico**.

Terminologia (cont.)

- Uma **árvore** é um grafo conexo que não possui ciclos.
  - A árvore é dita **livre** ou **não enraizada** se não possui raiz.
- Uma **floresta** é um grafo que não possui ciclos.
  - Logo, toda árvore é uma floresta, mas a recíproca não é verdadeira.
- Os componentes conexos de uma floresta são árvores.



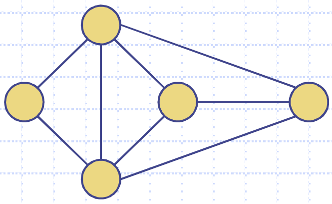
Árvore



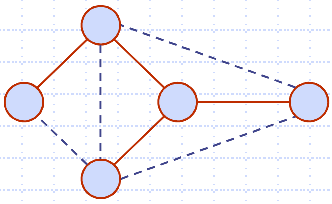
Floresta

Terminologia (cont.)

- Uma **árvore geradora** (*spanning tree*) de um grafo conexo é um subgrafo gerador que é uma árvore.
- Uma árvore geradora não é única, a menos que o grafo seja uma árvore.
- Existem muitas aplicações de árvores geradoras:
  - P. ex. no projeto de redes de comunicação.
- Uma **floresta geradora** de um grafo é um subgrafo gerador que é uma floresta



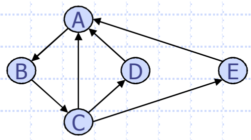
Grafo



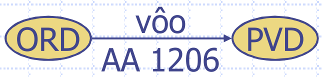
Árvore geradora

11

Terminologia (cont.)



- **Aresta direcionada** (*directed edge*):
  - um **par ordenado** de vértices (u,v).
  - primeiro vértice u é a **origem**.
  - segundo vértice v é o **destino**.
  - indica uma **relação assimétrica**.
- **Aresta não-direcionada**:
  - um **par não-ordenado** de vértices (u,v).
  - indica uma **relação simétrica**.
- **Grafo direcionado (digrafo)**:
  - todas as arestas são direcionadas
  - e.g., mapa de rotas de vôo.
- **Grafo não-direcionado**:
  - todas as arestas são não-direcionadas.
  - e.g., mapa de distâncias de vôos.

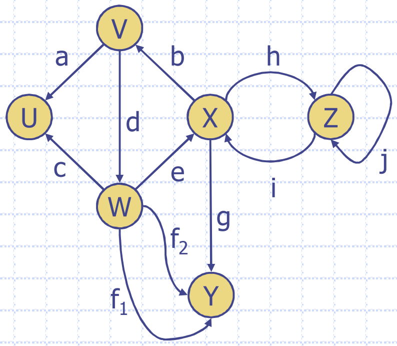


PS. Um grafo **misto** pode ser sempre transformado em um grafo direcionado.

12

Terminologia (cont.)

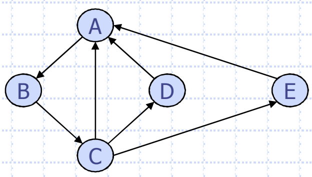
- Arestas **paralelas** (ou múltiplas):
  - $\mathbf{f_1}$ e $\mathbf{f_2}$ são arestas direcionadas paralelas (possuem mesma origem e destino).
- **Grau de entrada** (*in-degree*):
  - O grau de entrada do vértice **X** é 2, pois possui 2 arestas de entrada (***incoming edges***), i.e., arestas que o possuem como destino.
- **Grau de saída** (*out-degree*):
  - O grau de saída do vértice **X** é 3, pois possui 3 arestas de saída (***outgoing edges***), i.e., arestas que o possuem como origem.
- Não fosse por $\mathbf{f_1}$, $\mathbf{f_2}$, e **j** o grafo ao lado seria **simples**.



Essa é uma hipótese para muitos algoritmos em grafos.

Terminologia (cont.)

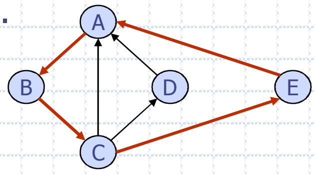
- Um conceito importante em grafos direcionados é o conceito de **alcançabilidade** (*reachability*):
  - Dados dois vértices u e v de um digrafo G diz-se que u **alcança** v (v é **alcançável** a partir de u) se G possui um caminho direcionado de u para v.
- Um digrafo G é dito **fortemente conexo** (*strongly connected*) se para quaisquer dois vértices u e v de G, u alcança v e vice-versa.
  - Propriedade fundamental, por exemplo, no projeto da malha viária de uma cidade (sentido das ruas e avenidas).
  - Exemplo:



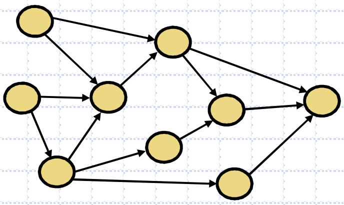
14

Terminologia (cont.)

- Um **ciclo direcionado** de um digrafo é um ciclo onde todas as arestas são percorridas de acordo com suas respectivas direções.
  - Exemplo:



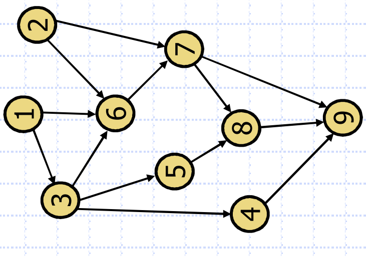
- Um digrafo é dito **acíclico** se não possui ciclos direcionados.
  - Exemplo:



15

Terminologia (cont.)

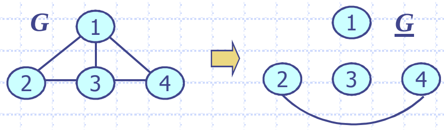
- Uma **ordenação topológica** é uma ordenação dos vértices tal que para qualquer aresta do digrafo o vértice de origem possui ordem menor que o vértice de destino.
  - Tal ordenação existe apenas para digrafos acíclicos.
  - Exemplo de Aplicação:
    - Grafos de precedência entre tarefas – política de execução seqüencial
  - Exemplo:



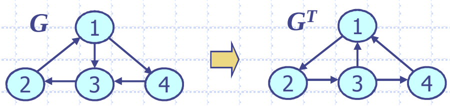
16

Terminologia (cont.)

- O **complemento** $\underline{G}$ de um grafo não-direcionado G é o grafo obtido a partir dos vértices de G conectados apenas com as arestas não existentes em G:



- O **grafo transposto** G^T de um grafo direcionado G é o grafo obtido a partir de G com todas as suas arestas em direções opostas:



17

Algumas Propriedades Úteis

* Propriedade 1:

$$\Sigma_v \deg(v) = 2m$$

Prova: cada aresta é contada duas vezes.

* Propriedade 2:

Em um grafo não-direcionado simples:

$$m \leq n\,(n-1)/2$$

Prova: cada vértice tem grau máx. $(n-1)$.

* Propriedade 3:

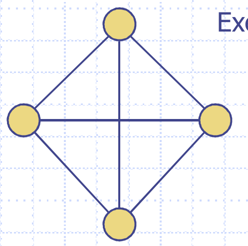
Em um grafo direcionado simples:

$$m \leq n\,(n-1)$$

Prova: para cada aresta não direcionada podemos ter duas direcionadas.

Notação:

n	número de vértices.
m	número de arestas.
$\deg(v)$	grau do vértice v i.e. o no. de arestas incidentes em v.



Exemplo:

- $n = 4$
- $m = 6$
- $\deg(v_i) = 3$
- $\Sigma_v \deg(v) = 12$

18

Terminologia (cont.)

- Um grafo simples G é dito **denso** se m se aproxima do limitante superior na propriedade 2 ou 3 anterior.
- G é dito **esparso** se m é muito menor do que o limitante.
  - e.g. próximo a $n-1$ para G conexo.

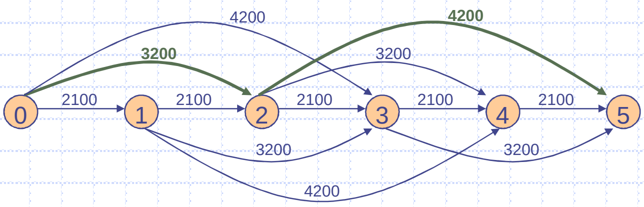
Outros Exemplos de Aplicações

- **Caminhos Mais Curtos**:
  - O coordenador de um projeto de pesquisa com duração de 5 anos planeja uma política de substituição de computadores.
  - Novos modelos podem ser adquiridos por $3000 cada. Se vendidos após 1 ano, eles retêm um valor de $1200. Após 2 anos, o valor de revenda cai para $500, e após 3 anos os computadores estão obsoletos e não possuem valor.
  - Custos de manutenção crescem com a idade, sendo estimados em $300 no 1o. ano de serviço, $400 no 2o. e $500 no 3o.
  - Considerando que não se deseja utilizar computadores obsoletos no projeto:
    - *obtenha uma política de substituição de computadores com custo total mínimo ao longo dos 5 anos de projeto.*

20

Outros Exemplos de Aplicações

- **Caminhos Mais Curtos (cont.)**:
  - cada nó indica o número de anos completos do projeto
  - um arco ligando um nó a outro indica a compra de um computador no instante referente ao nó de saída e a venda desse computador no instante referente ao nó de chegada
  - o custo de cada arco é: (compra)+(manutenção)-(revenda)
  - solução de custo mínimo: caminho mais curto de 0 a 5.



Outros Exemplos de Aplicações

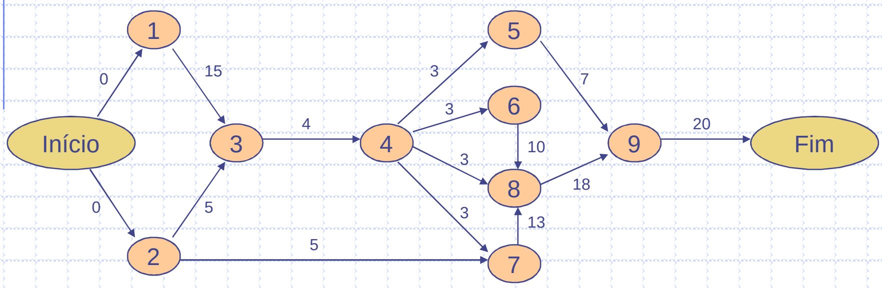
- **Caminhos Mais Longos**:
  - Considere um projeto de construção que tenha sido previamente subdividido em atividades, conforme a tabela abaixo:

k	Atividade a_k	Duração a_k (dias)	Atividades Predecessoras
1	Fundação	15	---
2	Saneamento	5	---
3	Pilares	4	1, 2
4	Vigas	3	3
5	Teto	7	4
6	Eletricidade Básica	10	4
7	Aquecimento	13	2, 4
8	Paredes	18	4, 6, 7
9	Acabamento	20	5, 8

  - Para planejar adequadamente a compra de material e contratação de empregados, é necessário uma agenda de tarefas.

Outros Exemplos de Aplicações

- **Caminhos Mais Longos (cont.)**:
  - Podemos representar esse problema na forma de um grafo direcionado, denominado **Rede CPM** (*CPM Project Network*):

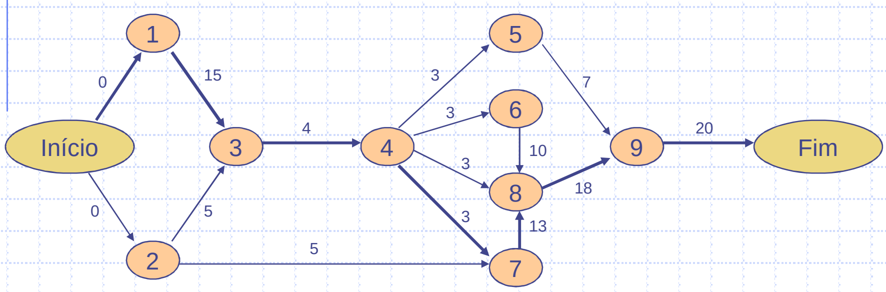


  - um nó para cada atividade, mais nós artificiais de início e fim.
  - pesos dos arcos correspondem à duração da atividade referente ao nó de partida do arco.

23

Outros Exemplos de Aplicações

- **Caminhos Mais Longos (cont.)**:
  - Note que o menor tempo factível para o início de uma atividade a_j é dado pelo caminho mais longo do nó de início ao nó j.

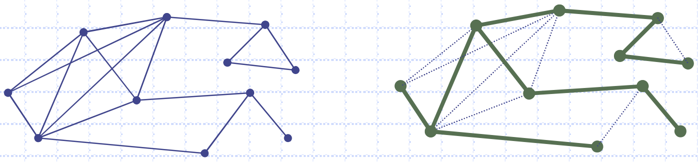


  - Logo, o tempo mínimo para completar o projeto é dado pelo **caminho mais longo** entre os nós de início e fim da rede CPM.
  - Para o exemplo acima, tem-se: Início-1-3-4-7-8-9-Fim = 73 dias.

24

Outros Exemplos de Aplicações

- **Árvores Geradoras Mínimas**:
  - Muitos problemas de otimização podem ser formulados na forma de um grafo conexo e solucionados encontrando a sua árvore geradora mínima (*shortest spanning tree*), também denominada árvore geradora de custo mínimo.
  - Exemplo: Dentre um conjunto de alternativas, qual o subconjunto de linhas de comunicação (e.g. fibras ópticas) que obrigatoriamente interliguem todo um conjunto de cidades a um custo mínimo?



25

Exercícios

- Exercite os conceitos discutidos sobre grafos elaborando exemplos originais para ilustrar cada um desses conceitos.
- Elabore e represente por grafos alguns exemplos de problemas que possam ser solucionados através de:
  - Caminhos mais curtos
  - Caminhos mais longos
  - Árvores geradoras mínimas
  - Ordenação topológica

Nota: Consulte a literatura!

Bibliografia

- M. T. Goodrich and R. Tamassia, *Data Structures and Algorithms in C++/Java*, John Wiley & Sons, 2002/2005.
- N. Ziviani, Projeto de Algoritmos, Thomson, 2a. Edição, 2004.
- T. H. Cormen, C. E. Leiserson, and R. L. Rivest, *Introduction to Algorithms*, MIT Press, 2nd Edition, 2001.