

## Lista de Exercícios – Programação Inteira

Adaptado de uma lista da Profa. Franklina. Para mais exercícios consulte o livro do Arenales. Em particular, para exercícios de modelagem, consulte também material da primeira parte do curso.

**1)** Resolva os problemas a seguir usando o método B&B (Use um solver para resolver os problemas lineares, se achar conveniente).

a)     $\text{Max } z = 5x + 2y$   
s.a     $3x + y \leq 12$   
        $x + y \leq 5$   
        $x, y \geq 0, x \text{ e } y \text{ inteiros}$

b)     $\text{Max } z = 2x + 3y$   
s.a     $x + 2y \leq 10$   
        $3x + 4y \leq 25$   
        $x, y \geq 0, x \text{ e } y \text{ inteiros}$

c)     $\text{Max } z = 4x + 3y$   
s.a     $4x + 9y \leq 26$   
        $8x + 5y \leq 17$   
        $x, y \geq 0, x \text{ e } y \text{ inteiros}$

**2)** Considere o problema da mochila abaixo:

$$\begin{aligned} \max \quad & 9x_1 + 7x_2 + 5x_3 + 2x_4 \\ \text{s.a.} \quad & 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 \leq 7 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 = 0 \text{ ou } 1 \end{aligned}$$

Usando o método Branch-and-bound determina a solução ótima do problema. Elabore uma maneira sistemática e fácil de se obter a relaxação linear para este problema.

**3)** Considere o problema abaixo:

$$\begin{aligned} \max \quad & 6x_1 + 9x_2 + 7x_3 \\ \text{sujeito a} \quad & 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 \leq 14 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \text{ e inteiros} \end{aligned}$$

Usando o método Branch-and-bound determina a solução ótima do problema.

**4)** Considere o problema inteiro abaixo e sua respectiva resolução por relaxação linear:

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + x_2 \\ \text{sujeito a} \quad & 3x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ & -3x_1 + 2x_2 \leq 0 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \text{ e inteiros} \end{aligned}$$

	$x_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	
$x_1$	1	0	1/6	-1/6	1
$x_2$	0	1	1/4	1/4	3/2
	0	0	5/12	1/12	5/2

Qual o corte de Chvatal-Gomory associado a este tableau simplex? Expresse este corte em termos das variáveis originais do problema.

Reotimize e expresse o novo corte de chvatal-gomory, se houver.

5) Explique com poucas palavras e um desenho a idéia do método de plano de cortes.

6) Explique com poucas palavras a idéia do método de Branch-and-cut.

7) Exercícios de modelagem. Considere o problema de localização de armazéns cujo objetivo é escolher os armazéns que devem ser instalados para servir um conjunto de clientes. Neste modelo existem uma capacidade associada a cada local possível e uma procura associada a cada cliente. A procura dos clientes associados a um certo armazém não pode exceder a sua capacidade. O objetivo do problema é ainda satisfazer os pedidos a um custo global mínimo, que envolve os custos mensais da renda dos armazéns e os custos de transporte da mercadoria entre os armazéns e os clientes. Considere 4 possíveis armazéns (A,B,C e D) com capacidades de 35, 28, 22 e 28 respectivamente e com as rendas mensais indicadas na tabela. Existe um conjunto de 5 clientes (a,b,c,d, e e) que representam as procuras de 14, 12, 10, 12 e 8, respectivamente. Os custos de transporte unitários entre cada possível armazém e cada cliente são indicados na tabela.

Rendas		Custos de Transporte				
		a	b	c	d	e
A	50	2	5	1	2	5
B	32	4	4	9	1	4
C	28	1	8	5	6	2
D	36	7	1	2	1	8
		14	12	10	12	8

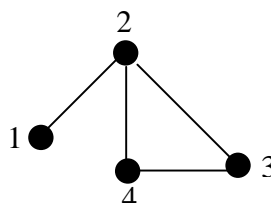
Formule um modelo de programação inteira que lhe permita determinar qual o conjunto ótimo de armazéns a selecionar. Considere as variáveis  $x_{ij}$  a quantidade a ser transportada do armazém i até o cliente j. As variáveis binárias  $y_i$  assumem o valor 1 se o armazém i é selecionado e 0, caso contrário. Resolva o problema utilizando o Excel.

6) Considere o problema de localização apresentado no exercício 6 em que é necessário respeitar as seguintes restrições:

- Dos locais C e D, exatamente 1 deve ser selecionado
- A seleção do local A ou do local B implica na exclusão do local C.
- A seleção do local A ou do local B implica a seleção do local D.

Formule um modelo de programação inteiro apropriado para a resolução deste problema. Resolva o problema utilizando o excel.

8) Exercícios (Disciplina: Programação Linear, Prof. Manoel Campelo Colaboração: Heider Augusto) Um grafo G é um par ordenado  $G = (V,E)$ , onde V é um conjunto não vazio de pontos e E um conjunto de pares não ordenados de V. Cada elemento de V é chamado vértice, e de E aresta. Denotaremos por  $n$  a cardinalidade de V e por  $m$  a



cardinalidade de  $E$ . Um grafo pode ser descrito graficamente representando cada vértice por um ponto e cada aresta por uma linha ligando os pontos correspondentes. Por exemplo:

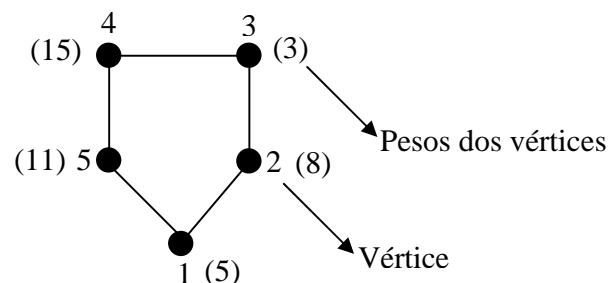
$G = (V, E)$  onde

$V = \{1, 2, 3, 4\}$

$E = \{(1, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$

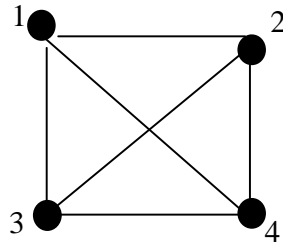
Dois vértices  $u, v \in V$  são adjacentes se  $(u, v) \in E$ . Para cada  $v \in V$ , definimos  $E(v)$  como o conjunto de vértices adjacentes a  $v$ , i. e.  $E(v) = \{u : (u, v) \in E\}$ . Uma aresta  $(u, v) \in E$  é dita incidente a  $u$  e a  $v$ . Duas arestas são adjacentes se incidem a um vértice comum.

**8.1)** Dado um grafo  $G = (V, E)$ , um subconjunto de vértices  $S \subseteq V$  é um conjunto independente em  $G$  se quaisquer dois vértices em  $S$  não são adjacentes em  $G$ . Se a cada vértice  $v_i \in V$  está associado um peso  $w_i \in \mathbb{R}$ , define-se um conjunto independente de peso máximo em  $G$  como aquele cujo vértices totalizam a maior soma de pesos, entre todos os conjuntos independentes de  $G$ . Por exemplo, no grafo abaixo, o conjunto  $S = \{1, 4\}$  é um conjunto independente de peso 20. Sendo assim, modele o problema do conjunto independente máximo. Determine uma solução heurística para o problema (similar ao problema da programação de exames – material- heurística).



**8.2)** O problema das  $p$ -medianas pode ser definido como segue: Em um grafo  $G = (V, E)$  deve-se encontrar um subconjunto de vértices  $V_p \subset V$  (conjunto de medianas) com cardinalidade  $p$ , tal que a soma das distâncias de cada vértice restante em  $\{V - V_p\}$  (conjunto de demandas) até seu vértice mais próximo em  $V_p$  seja a mínima possível. O objetivo do problema das  $p$ -medianas é determinar  $p$  instalações em um conjunto pré-definido com  $n$  ( $n > p$ ) instalações candidatas que deverão atender a um conjunto existente de demandas, de forma que a soma total das distâncias percorridas de cada

ponto de demanda até a instalação mais próxima seja a mínima possível. Considerando  $d_{ij}$  a distância entre  $i \in V$  e  $j \in V$ , elabore um modelo para o problema das p-medianas.



**9)** (Anais XXXI SPBO, 1999 – A. Ignacio, V. Ferreira-Filho e R. Galvão) O problema de localização de concentradores (PLC) é um problema clássico no projeto de redes de computadores. Concentradores são dispositivos que facilitam o compartilhamento de linhas de alta capacidade, e mais eficientes, entre vários usuários. O PLC pode ser esquematizado como segue. Dado um conjunto de possíveis localizações para os concentradores bem como suas capacidades, procura-se determinar quantos concentradores devem ser usados, onde localizá-los e quais usuários alocar a cada um dos concentradores sem violar sua capacidade, de modo a minimizar o custo total. Especificamente, sejam:  $n$  o número de usuários,  $m$  o número de possíveis localizações de concentradores,  $c_{ij}$  ( $i=1,2,\dots,n$ ,  $j=1,2,\dots,m$ ) o custo de ligar o usuário  $i$  ao concentrador localizado em  $j$ ,  $d_j$  ( $j=1,2,\dots,m$ ) o custo de se usar uma unidade da capacidade do concentrador localizado em  $j$  e  $v_j$  ( $j=1,2,\dots,m$ ) o custo fixo de se estabelecer um concentrador no local  $j$ . Limitações nas estações instaladas nos concentradores, tais como número de portas de entrada, espaço disponível em memória, estrutura de endereçamento e esquemas de compartilhamento de recursos, determinam uma quantidade máxima de usuários que podem ser conectados a cada um desses nós. É assumido que  $a_{ij}$  ( $i=1,2,\dots,n$ ,  $j=1,2,\dots,m$ ) é a quantidade da capacidade do concentrador  $j$  necessária para atender ao usuário  $i$ , se este é alocado a  $j$ , e que  $b_j$  ( $j=1,2,\dots,m$ ) é a capacidade máxima do concentrador que pode ser instalado no local  $j$ . Elabore um modelo para o PLC.

Atenção: Todos os problemas de programação inteira do livro ou do material on-line pode ser utilizado para a elaboração da prova, portanto, estudem....

### Programação Dinâmica (Programação Matemática - Hillier e Lieberman)

**10)** O proprietário de uma cadeia de três mercearias comprou cinco caixas de cerejas frescas. A distribuição de probabilidade estimada de vendas potenciais das cerejas antes que se estraguem difere de uma mercearia para outra. Por isso, o proprietário deseja saber como deveria distribuir as caixas de modo a maximizar os lucros. Por razões administrativas as caixas não podem ser divididas. A tabela abaixo representa o lucro esperado em cada mercearia para o número de caixas alocadas.

No. de Caixas	Mercearia 1	Mercearia 2	Mercearia 3
0	0	0	0
1	3	5	4
2	7	10	6
3	9	11	11
4	12	11	12
5	13	11	12

**11)** Um estudante tem ainda sete dias para o início do período de provas de suas quatro disciplinas. Ele precisa de pelo menos 1 dia para cada disciplina e deseja se concentrar em apenas uma das disciplinas em cada dia. Qual a alocação ótima de dias para as disciplinas, sabendo que a estimativa de notas é dada na tabela abaixo.

Numero de dias	Disciplina 1	Disciplina 2	Disciplina 3	Disciplina 4
<b>1</b>	3	5	2	6
<b>2</b>	5	5	4	7
<b>3</b>	6	6	7	9
<b>4</b>	7	9	8	9

**12)** Seja a versão inteira do problema da mochila. Nesta versão, múltiplas cópias de um mesmo item podem ser colocadas na mochila:

$$\text{Max } 20x_1 + 15x_2 + 5x_3$$

s.a

$$2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \leq 5$$

$$x_i \in \mathbb{Z}, i = 1 \dots 5$$

Indique o que são, para o problema: estado, etapa e decisão.

Resolva **por programação dinâmica (outros tipos de solução não serão aceitas)**. Apresente todos os cálculos e diga que itens (e em que quantidade) aparecem na mochila na solução ótima.

Dica: lembre-se que você pode ignorar estados que nunca são atingidos a cada etapa.

**13)** A equipe brasileira de natação está organizando sua equipe masculina de revezamento 400m que será composta por quatro nadadores. A prova é dividida em quatro partes de 100m sendo 100m nado livre, 100m peito, 100m costas e 100m borboleta. Dada a tabela de tempos abaixo, encontre **por programação dinâmica** a melhor forma de dispor os atletas. Note que César Cielo, estrelinha, disse que só participaria da prova se nadasse sua especialidade, Livre, então essa modalidade já foi alocada para ele. Apresente a solução final ótima e o seu valor. Existem soluções alternativas? Justifique sua resposta.

**Atenção: antes de começar a resolver, defina etapa, decisão e estado (1 ponto).**

Dica: para simplificar as contas, retire 50s de todos os tempos.

	Livre	Peito	Borboleta	Costas
<b><i>Fernando Silva</i></b>	-	54	51	53
<b>Nicholas Santos</b>	-	57	52	52
<b>César Cielo</b>	50	-	-	-
<b>Eduardo Deboni</b>	-	54	55	53