Exemplo: Simplex

Minimizar $f(x_1, x_2) = -x_1 - x_2$

sujeito a: $x_1 + x_2 \le 6$

$x_1 - x_2 \le 4$

$-x_1 + x_2 \le 4$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$

3ª. iteração Base ótima $(B_1, B_2, B_3) = (2, 1, 5)$ $(N_1, N_2) = (4, 3)$

- *solução básica:* $\mathbf{x_B} = (x_2, x_1, x_5)$

Resolva o sistema $\mathbf{Bx_B} = \mathbf{b}$, cuja matriz aumentada é dada por: $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 6 \\ -1 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 4 \end{array}\right]$,

que pode ser resolvido pelo método de eliminação de Gauss, cuja solução é

$\hat{\mathbf{x}}_\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix}$ e a função objetivo vale $f(\hat{\mathbf{x}}) = -6$.

Exemplo: Simplex

- *otimalidade:*

i) *vetor dual:* $((c_{B_1}, c_{B_2}, c_{B_3}) = (c_2, c_1, c_5) = (-1, -1, 0))$

Resolva o sistema $\mathbf{B}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{c}_{\mathbf{B}}$, cuja matriz aumentada é dada por $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$,

e cuja solução é $\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}} = [-1 \quad 0 \quad 0]$.

Exemplo: Simplex

ii) *custos relativos:* $(N_1 = 4, N_2 = 3)$

$$\hat{c}_4 = c_4 - \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\mathbf{a}_4 = 0$$

$$\hat{c}_3 = c_3 - \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\mathbf{a}_3 = 1$$

Como $\hat{c}_j \geq 0$ para todas variáveis não básicas, segue que a solução

atual

$$\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{N}} = \begin{bmatrix} x_4 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ou $$\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix}$$ é ótima.

A otimalidade na última iteração decorreu do fato da função objetivo em termos das variáveis não básicas ser $f(\mathbf{x}) = -6 + 0x_4 + x_3 \geq -6$, para todo $x_4 \geq 0$ e $x_3 \geq 0$. Entretanto, $f(\mathbf{x}) = -6$, para todo $x_4 > 0$ e $x_3 = 0$, ou seja, a solução básica pode ser alterada com valores não nulos para x_4, sem que a função objetivo se altere. Portanto, o problema tem múltiplas soluções ótimas, as quais podem ser determinadas por se atribuir valores diferentes a x_4.

Se a solução básica ótima fosse degenerada????

Exemplo: Simplex (solução ilimitada

Minimizar $f(x_1, x_2) = -x_1 - x_2$

sujeito a: $x_1 - x_2 \leq 4$

$-x_1 + x_2 \leq 4$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$

Na forma padrão

	x_1	X_2	x_3	x_4	**B**
A	1	−1	1	0	4
	−1	1	0	1	4
Min f	−1	−1	0	0	

Exemplo: Simplex (solução ilimitada

Minimizar $f(x_1, x_2) = -x_1 - x_2$

sujeito a: $x_1 - x_2 \leq 4$

$-x_1 + x_2 \leq 4$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$

Na forma padrão

	x_1	X_2	x_3	x_4	**B**
A	1	-1	1	0	4
	-1	1	0	1	4
Min f	-1	-1	0	0	

A partir da partição básica inicial:

$(B_1, B_2) = (3, 4)$ $(N_1, N_2) = (1, 2).$

Na segunda iteração do método simplex obtemos:

Exemplo: Simplex (solução ilimitada

$\boxed{2^a. \text{ Iteração}}$ $(B_1, B_2) = (1, 4)$ $(N_1, N_2) = (3, 2)$

- *solução básica:* $\mathbf{x_B} = (x_1, x_4)^T$

Resolva o sistema $\mathbf{Bx_B} = \mathbf{b}$, cuja matriz aumentada é $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & 4 \end{array}\right]$ e sua solução é

$\hat{\mathbf{x}}_\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix}$ e a função objetivo é $f(\hat{\mathbf{x}}) = c_{B_1}\hat{x}_{B_1} + c_{B_2}\hat{x}_{B_2} = -1 \times 4 + 0 \times 8 = -4$

- *otimalidade:*

i) *multiplicador simplex:* ($\mathbf{c}_B = (c_{B_1}, c_{B_2})^T = (c_1, c_4) = (-1, 0)$)

Resolva o sistema $\mathbf{B}^T\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{c_B}$, cuja matriz aumentada é $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{array}\right]$ e obtenha

$\boldsymbol{\lambda} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

ii) *custos relativos:* ($N_1 = 3$, $N_2 = 2$)

$\hat{c}_3 = c_3 - \boldsymbol{\lambda}^T\mathbf{a}_3 = 1$

$\hat{c}_2 = c_2 - \boldsymbol{\lambda}^T\mathbf{a}_2 = -1 \leftarrow k=2$ (x_2 entra na base)

A função objetivo em termos das variáveis não básicas é $f(\mathbf{x}) = 0 + 1x_3 - 1x_2$

Exemplo: Simplex (solução ilimitada

- *direção simplex*

  Resolva o sistema $\mathbf{By} = \mathbf{a}_2$, cuja matriz aumentada é $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{array}\right]$ e obtenha

$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Temos então que, se aumentamos o valor da variável x_2, a função objetivo decresce (custo relativo negativo).
Note que x_2 pode crescer indefinidamente, já que a direção simplex não tem componentes positivas
(direções deste tipo são chamados raios da região factível).

Base inicial – FASE I

- Como determinar uma partição básica factível inicial (A=(B, N)).
- Algumas classes de problemas de otimização linear oferecem naturalmente a solução básica factível

$$\begin{aligned}&\text{Minimizar } f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T\mathbf{x}\\&\text{sujeito a: } \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}\\&\qquad\qquad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\end{aligned}$$

em que $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$.

Base inicial – FASE I

$$\begin{aligned}&\text{Minimizar } f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T\mathbf{x}\\ &\text{sujeito a: } \mathbf{Ax} \le \mathbf{b}\\ &\qquad\qquad \mathbf{x} \ge \mathbf{0}\end{aligned}$$

em que $\mathbf{b} \ge \mathbf{0}$.

Após a introdução das variáveis de folga, digamos, $\mathbf{x}_f$, temos:

$$\begin{aligned}&\text{Minimizar } f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T\mathbf{x}\\ &\text{sujeito a: } \mathbf{Ax} + \mathbf{x}_f = \mathbf{b}\\ &\qquad\qquad \mathbf{x} \ge \mathbf{0},\ \mathbf{x}_f \ge \mathbf{0},\end{aligned}$$

A matriz dos coeficientes das restrições agora é dada por [**A I**] e uma partição básica factível é dada por:

- $\mathbf{B} = \mathbf{I}$: as variáveis básicas são as variáveis de folga $\mathbf{x_B} = \mathbf{x}_f$
- $\mathbf{N} = \mathbf{A}$: as variáveis não-básicas são as variáveis originais $\mathbf{x_N} = \mathbf{x}$,

e a solução básica factível é dada por:

$$\begin{cases}\mathbf{x_B} = \mathbf{x}_f = \mathbf{b} \ge \mathbf{0},\\ \mathbf{x_N} = \mathbf{x} = \mathbf{0}.\end{cases}$$

Base inicial – FASE I

- Suponha agora que as restrições são, originalmente, de igualdade:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad f(\mathbf{x}) &= \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \mathbf{A}\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0}, \end{aligned}$$

- Precisamos encontrar uma partição básica factível de A, isto é, uma partição da forma:

$$\mathbf{A} = [\mathbf{B}\ \mathbf{N}]$$

tal que existe $\mathbf{B}^{-1}$ e $\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$

Quantas partições existem ?

- Tome $A_{10 \times 20}$
  Precisamos identificar dez colunas L.I. de A para formar B, e o sistema $Bx_b = b$, tem que ter $x_B \geq 0$.
- Procedimento possível:
  – 1. Escolher dez (m) colunas
  – 2. Verificar se $x_B \geq 0$.
  – 3. Se não, escolher outras dez colunas e retornar ao passo 2.

Quantas possíveis partições existem ?

- Se formos testar partição a partição, quantos testes temos que fazer ?

$$C_{10}^{20} = \frac{20!}{10!(20-10)!} = 184.756$$

impraticável para problemas grandes!

Introduzindo novas variáveis de folga

- Quando tínhamos variáveis de folga, funcionava, pois:

$$\begin{array}{l} \mathbf{Ax} \le \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \ge \mathbf{0} \end{array} \quad \text{equivalente a} \quad \begin{array}{l} \mathbf{Ax} + \mathbf{x}_f = \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \ge \mathbf{0},\ \mathbf{x}_f \ge \mathbf{0}. \end{array}$$

uma partição [I N] onde as variáveis de folga começam como as variáveis básicas.

- Se não for o caso, podemos forçar variáveis de folga:

$$\begin{array}{l} \mathbf{Ax} + \mathbf{y} = \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \ge \mathbf{0},\ \mathbf{y} \ge \mathbf{0}. \end{array}$$

Fase I

$$\mathbf{Ax} + \mathbf{y} = \mathbf{b}$$
$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0},\ \mathbf{y} \geq \mathbf{0}.$$

- Obviamente, essas variáveis não podem aparecer na solução final (pois elas não existem - são variáveis artificiais).
- Método duas-fases: resolvemos primeiro um problema:

$$\text{Minimizar } f_a(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{m} y_i$$
$$\mathbf{Ax} + \mathbf{y} = \mathbf{b}$$
$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0},\ \mathbf{y} \geq \mathbf{0}.$$

Fase I

$$\text{Minimizar } f_a(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{m} y_i$$

$$\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0},\ \mathbf{y} \geq \mathbf{0}.$$

- Se conseguimos uma solução de custo zero para o problema acima (fase I), a base final não contém nenhuma variável artificial (por quê ?)

- Neste caso, a base final do problema da fase I é uma base inicial para o problema real (fase II).

Fase I

- E se não conseguimos uma solução de custo zero ? (Isto é, na solução ótima da fase I, existe uma variável artificial na base).

  (Não existe solução factível para o nosso problema)

Exemplo

$$\text{Minimizar} \quad f(\mathbf{x}) = x_1 - x_2 + 2x_3$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 3$$
$$2x_1 - x_2 + 3x_3 \leq 4$$
$$x_i \geq 0,\ i = 1, 2, 3$$

$$\Big\downarrow \text{Forma padrão}$$

$$\text{Minimizar} \quad f(\mathbf{x}) = x_1 - x_2 + 2x_3 + 0x_4$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 3$$
$$2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 4$$
$$x_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, 4$$

Qual o problema da fase I a resolver ?

- **Caso A:** introduzimos uma variável artificial pra cada restrição:

$$\begin{aligned}
\text{Minimizar} \quad & f_a(x_1,\ldots,x_6) = x_5 + x_6 \\
& x_1 + x_2 + \quad x_3 \qquad + x_5 \qquad = 3 \\
& 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 \quad + \mathrm{x}_6 \quad = 4 \\
& x_i \geq 0,\ i = 1,\ldots,6
\end{aligned}$$

e minimizamos o custo destas variáveis.

Qual o problema da fase I a resolver ?

- **Caso B:** note que x_4 já fornece uma coluna da matriz identidade. Assim, a rigor, precisamos apenas de uma variável artificial

$$
\begin{aligned}
\text{Minimizar} \quad & f_a(x_1, \ldots, x_5) = x_5 \\
& x_1 + x_2 + x_3 \phantom{{}+x_4} + x_5 = 3 \\
& 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 \phantom{{}+x_5} = 4 \\
& x_i \geq 0, i = 1, \ldots, 5\ ,
\end{aligned}
$$

e minimizamos o custo desta variável.

Exemplo

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & f(\mathbf{x}) = x_1 - x_2 + 2x_3 + 0x_4 \\ & x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ & 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 4 \\ & x_i \geq 0,\ i = 1,\dots,4 \end{aligned}$$

Exemplo 2.31 Considere o problema de otimização linear definido no Exemplo 2.30 e o problema artificial definido no caso B, em que apenas uma variável artificial é introduzida. Problema artificial:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & f_a(x_1,\dots,x_5) = x_5 \\ & x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 3 \\ & 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 4 \\ & x_i \geq 0,\ i = 1,\dots,5 \end{aligned}$$

Obtenha a solução do problema original.

Exemplo 2 –Simplex tableau

$$
\begin{aligned}
&Minimize \quad -3x_1 + 4x_2 \\
&sujeito\, a: \\
&x_1 + x_2 \le 4 \\
&2x_1 + 3x_2 \ge 18 \\
&x_1 \ge 0, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

Obtenha a uma base factível inicial do problema.

Outra possibilidade

- Em vez de resolver um problema auxiliar (fase I) para encontrar a base, simplesmente penalizamos as variáveis artificiais no problema original (fase II), de modo a garantir que elas sejam nulas na sol

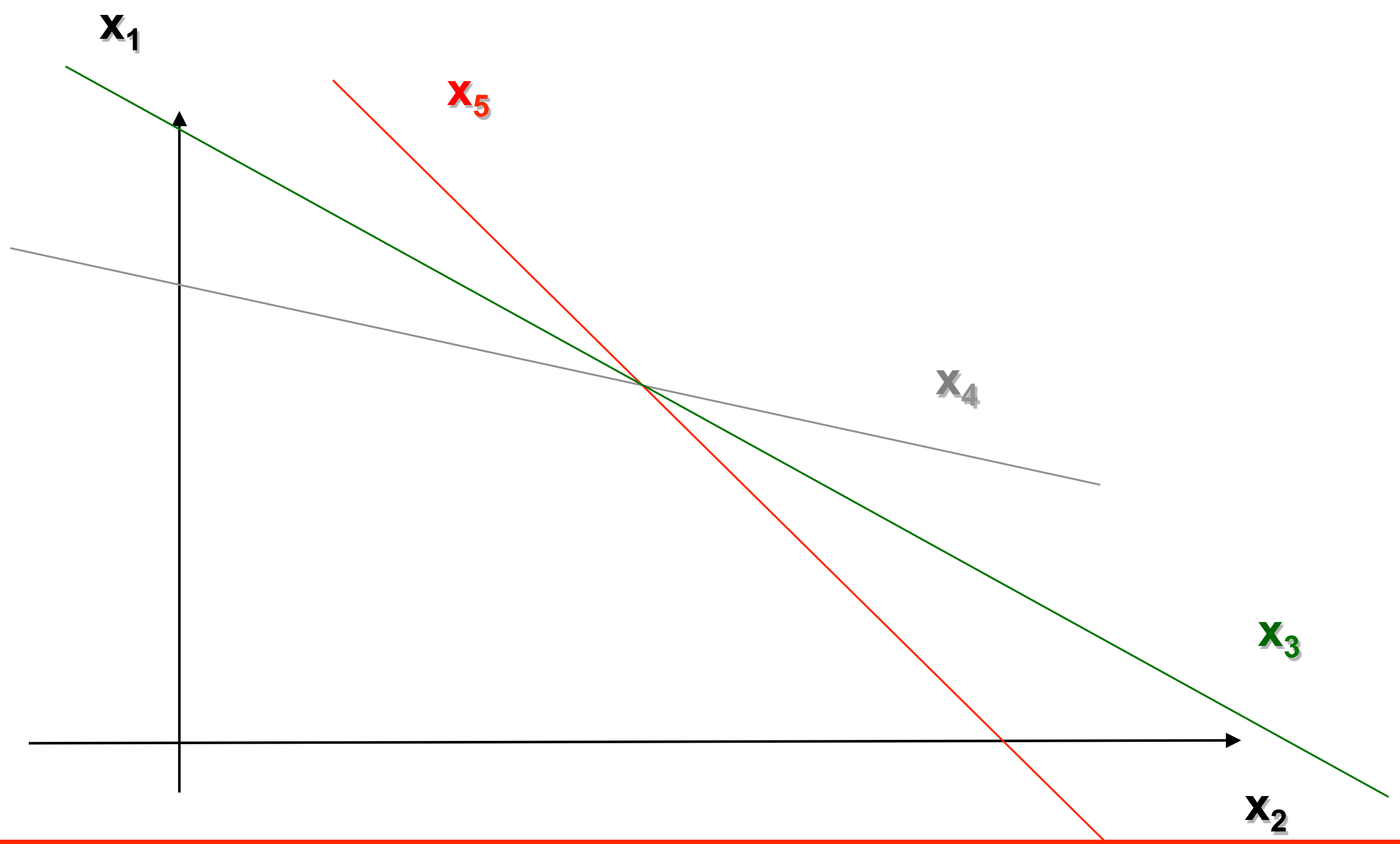
$$\text{Minimizar} \quad f_a(x_1, \ldots, x_5) = x_1 - x_2 + 2x_3 + 1000x_5$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \quad x_3 \qquad + x_5 &= 3 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 \qquad &= 4 \\ x_i \geq 0,\ i = 1,\ \ldots,\ 5. \end{aligned}$$

valor suficientemente grande para garantir que x_5 não aparece na solução ótima.

Degeneração

- O que acontece quando temos soluções degeneradas ?



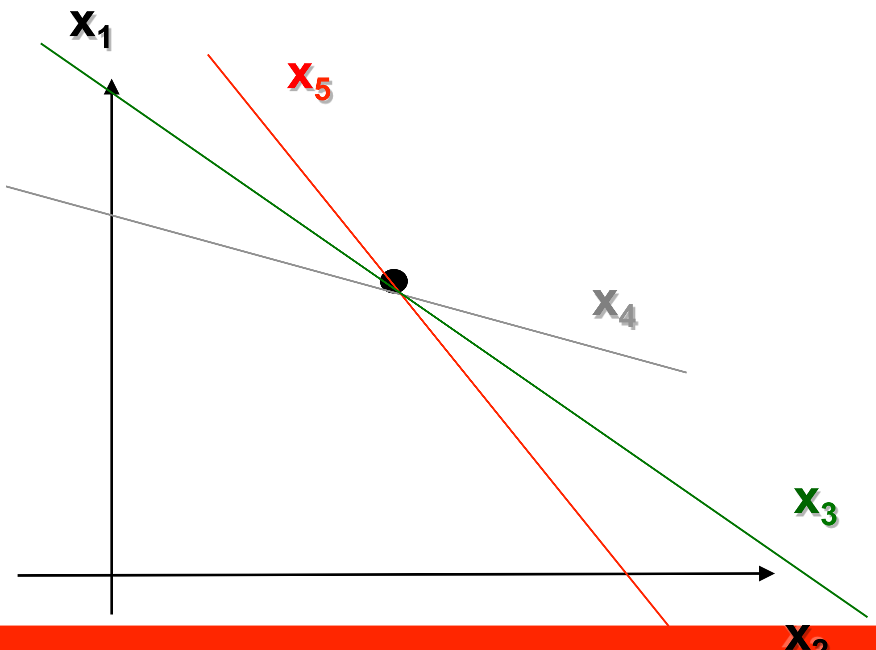
Degeneração

- base associada ao ponto extremo: 5 variáveis, 3 restrições, grau de liberdade: 2
- Precisamos fixar duas variáveis de folga em zero:

$I_N=(4,3)$ ou

$I_N=(4,5)$ ou

$I_N=(3,5)$

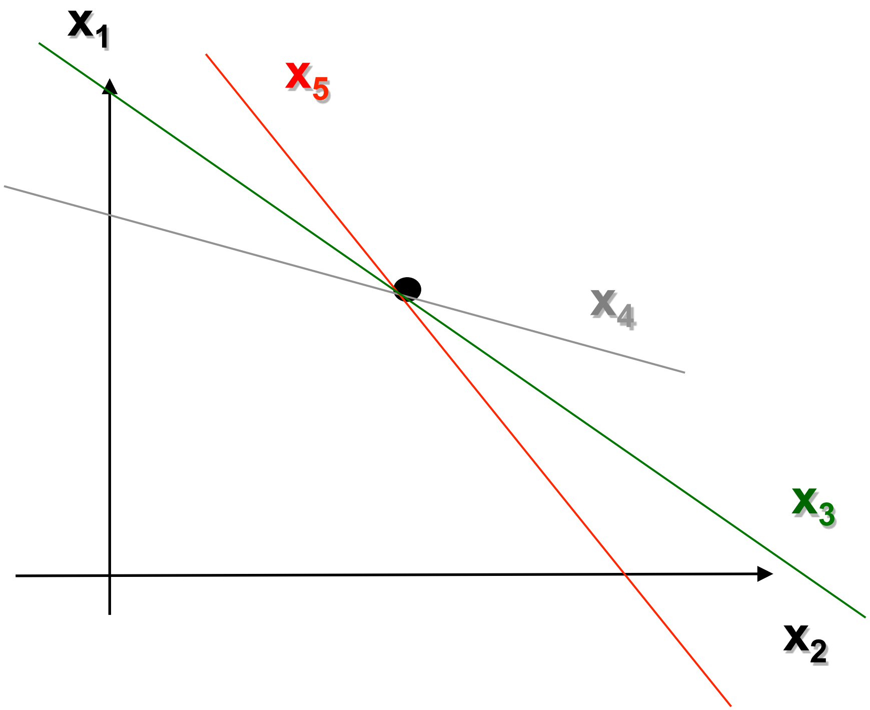


Degeneração

$I_N=(1,3)$ ou

$I_N=(1,5)$ ou

$I_N=(3,5)$

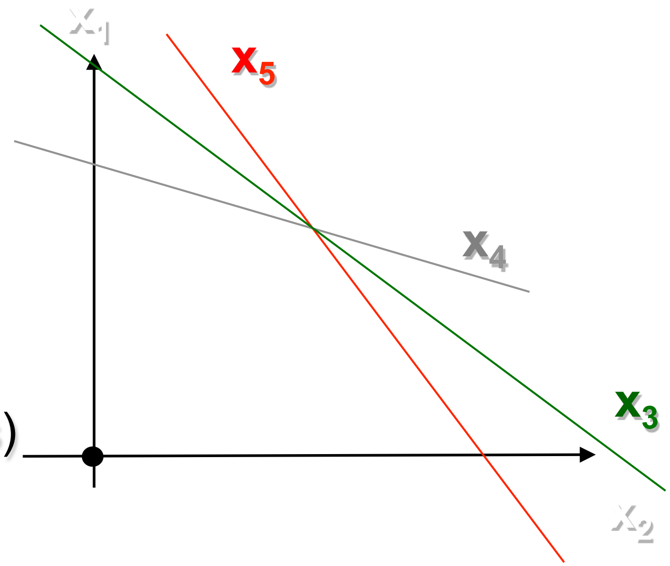


Exemplo

$x_1 + x_2 \leq 10$

$2x_1 + x_2 \leq 15$

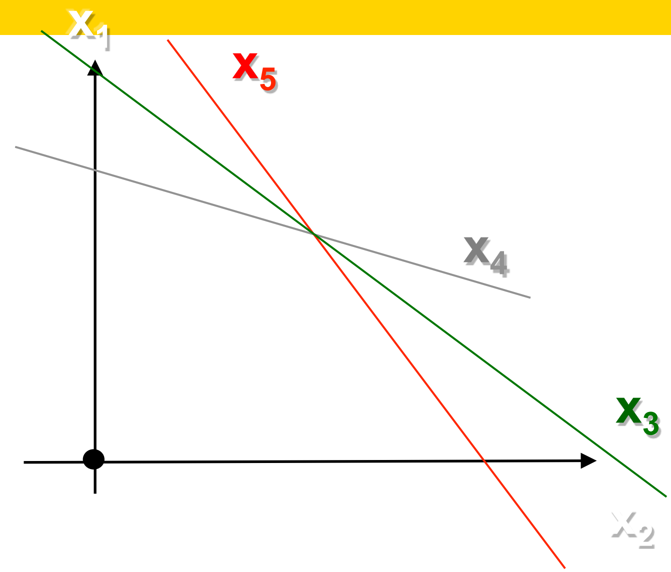
$x_1 + 2x_2 \leq 15$



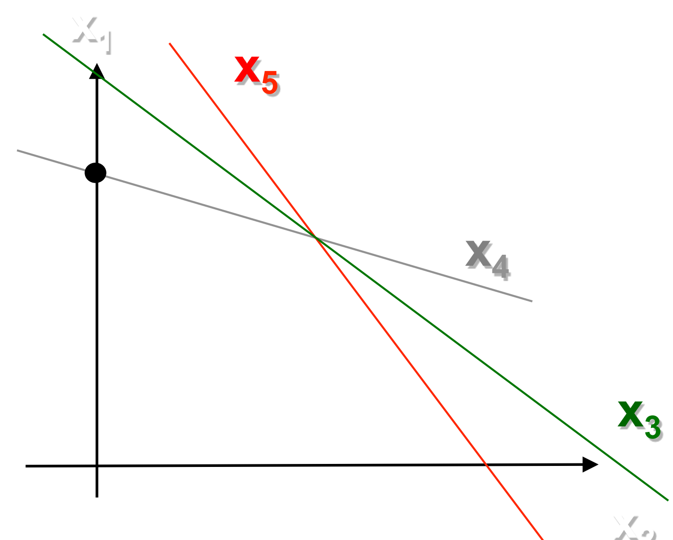
(ignoremos os custos relativos)
suponha que x_1 entra na base

x_3	1	1	1	0	0	10
x_4	2	1	0	1	0	15
x_5	1	2	0	0	1	15

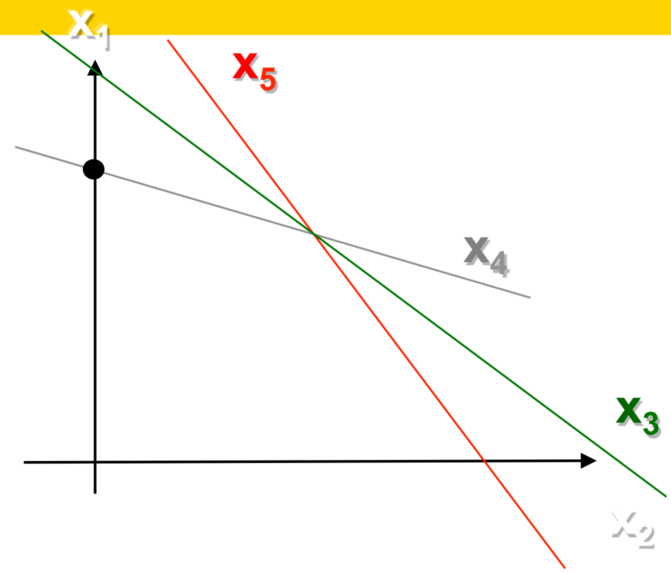
x_3	1	1	1	0	0	10
x_1	2	1	0	1	0	15
x_5	1	2	0	0	1	15



x_3	0	½	1	-½	0	5/2
x_1	1	½	0	½	0	15/2
x_5	0	3/2	0	-½	1	15/2

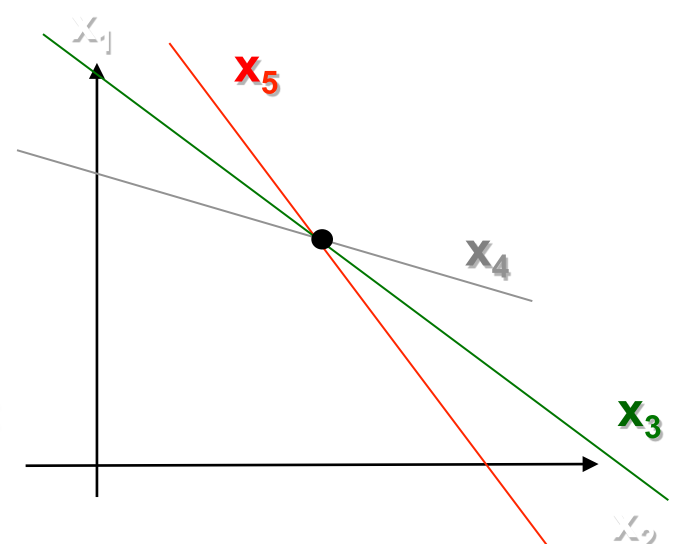


x_3	0	½	1	-½	0	5/2
x_1	1	½	0	½	0	15/2
x_5	0	3/2	0	-½	1	15/2



x_2	0	1	2	-1	0	5
x_1	1	0	-1	1	0	5
x_5	0	0	-3	1	1	0

Múltiplas bases:
mesmo ponto!



Problema

- Há casos em que podemos passar muito tempo pivoteando entre soluções básicas degeneradas!
- Estagnação (stalling): Função objetivo mesmo, bases diferentes.
- CICLAGEM: Após algumas iterações trocando bases degeneradas, volta-se a uma base já visitada. (Método pode não convergir)

Exemplo

(*Cycling*)

Consider the following example given by Beale:

$$
\begin{array}{llllllll}
\text{Minimize} & & - 3/4\,x_4 & + 20x_5 & - 1/2\,x_6 & + 6x_7 & & \\
\text{subject to } x_1 & & + 1/4\,x_4 & - 8x_5 & - x_6 & + 9x_7 & = & 0 \\
\quad x_2 & & + 1/2\,x_4 & - 12x_5 & - 1/2\,x_6 & 3x_7 & = & 0 \\
\quad\quad x_3 & & & & + x_6 & & = & 1 \\
x_1,\ x_2,\ x_3, & & x_4, & x_5, & x_6, & x_7 & \geq & 0.
\end{array}
$$

Exemplo de ciclagem (Bazaraa)

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
z	1	0	0	0	$\frac{3}{4}$	-20	$\frac{1}{2}$	-6	0
x_1	0	1	0	0	$\frac{1}{4}$	-8	-1	9	0
x_2	0	0	1	0	$\frac{1}{2}$	-12	$-\frac{1}{2}$	3	0
x_3	0	0	0	1	0	0	1	0	1

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
z	1	-3	0	0	0	4	$\frac{7}{2}$	-33	0
x_4	0	4	0	0	1	-32	-4	36	0
x_2	0	-2	1	0	0	4	$\frac{3}{2}$	-15	0
x_3	0	0	0	1	0	0	1	0	1

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
z	1	-1	-1	0	0	0	2	-18	0
x_4	0	-12	8	0	1	0	8	-84	0
x_5	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	0	1	$\frac{3}{8}$	$-\frac{15}{4}$	0
x_3	0	0	0	1	0	0	1	0	1

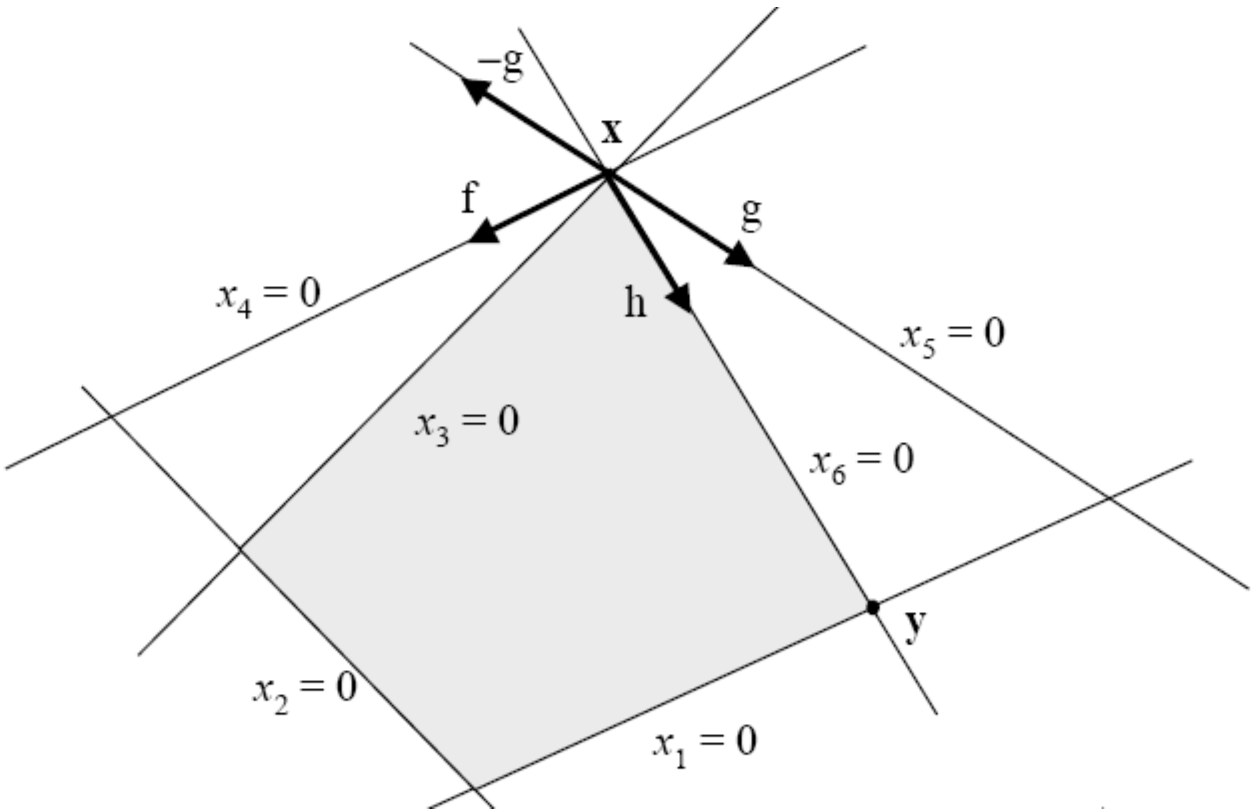
	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
z	1	2	-3	0	$-\frac{1}{4}$	0	0	3	0
x_6	0	$-\frac{3}{2}$	1	0	$\frac{1}{8}$	0	1	$-\frac{21}{2}$	0
x_5	0	$\frac{1}{16}$	$-\frac{1}{8}$	0	$-\frac{3}{64}$	1	0	$\frac{3}{16}$	0
x_3	0	$\frac{3}{2}$	-1	1	$-\frac{1}{8}$	0	0	$\frac{21}{2}$	1

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
z	1	1	-1	0	$\frac{1}{2}$	-16	0	0	0
x_6	0	2	-6	0	$-\frac{5}{2}$	56	1	0	0
x_7	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{16}{3}$	0	1	0
x_3	0	-2	6	1	$\frac{5}{2}$	-56	0	0	1

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
z	1	0	2	0	$\frac{7}{4}$	-44	$-\frac{1}{2}$	0	0
x_1	0	1	-3	0	$-\frac{5}{4}$	28	$\frac{1}{2}$	0	0
x_7	0	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{6}$	-4	$-\frac{1}{6}$	1	0
x_3	0	0	0	1	0	0	1	0	1

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
z	1	0	0	0	$\frac{3}{4}$	-20	$\frac{1}{2}$	-6	0
x_1	0	1	0	0	$\frac{1}{4}$	-8	-1	9	0
x_2	0	0	1	0	$\frac{1}{2}$	-12	$-\frac{1}{2}$	3	0
x_3	0	0	0	1	0	0	1	0	1

Exemplo de ciclagem



Degeneração

- Regras (Evitar a ciclagem):
- Regra de Bland
- Regra Lexicográfica (Dantzig e Thapa, 1997)
- (Convergência teórica, computacionalmente ineficiêntes)
- Na prática: Perturbação no vetor dos requerimentos (que podem ajudar a estagnação)