

**O desenvolvimento da questão faz parte da avaliação. Defina sempre as variáveis e suas distribuições, e diga que teorema ou propriedade você utilizou.**

1. A proporção  $\theta$  de itens defeituosos em um grande lote é desconhecida e deve ser estimada. Assume-se que a distribuição a priori de  $\theta$  é Beta com parâmetros  $\alpha = 2$  e  $\beta = 2$ . Foram selecionados ao acaso 20 itens e 2 eram defeituosos.
  - (a) Obtenha a distribuição a posteriori de  $\theta$ .
  - (b) Obtenha a estimativa de Bayes de  $\theta$  usando perda quadrática.
  - (c) Repita a estimação usando perda 0-1.
  - (d) Comente os resultados e compare com a estimativa pelo método dos momentos.
2. O número de defeitos em rolos de 100 metros de uma fita magnética tem distribuição de Poisson com média  $\theta$  desconhecida. A distribuição a priori de  $\theta$  é Gama com média e variância iguais a 3. Cinco rolos foram selecionados ao acaso e observou-se 2, 1, 6, e 3 defeitos.
  - (a) Obtenha a distribuição a posteriori de  $\theta$ .
  - (b) Obtenha a estimativa Bayesiana de  $\theta$  usando perda quadrática.
  - (c) Repita a estimação para perda 0-1 e compare com o resultado do item anterior.
  - (d) Compare estas estimativas com a estimativa de máxima verossimilhança ( $\bar{x}$ ).
3. Suponha que as alturas (em cm) de indivíduos de uma população seguem uma distribuição normal cuja média  $\theta$  é desconhecida e o desvio-padrão é 5 cm. A distribuição a priori de  $\theta$  é normal com média 173 cm e desvio-padrão 2,5 cm.
  - (a) Calcule o menor número de observações para que o desvio-padrão a posteriori seja 1 cm.
  - (b) Uma amostra aleatória de 10 indivíduos foi selecionada e sua altura média foi de 177 cm. Calcule a estimativa de Bayes de  $\theta$ .
  - (c) No item anterior como deveria ser a distribuição a priori para que a estimativa de Bayes seja bem próxima de 177 cm.
4. Para cada um dos itens abaixo considere uma amostra aleatória  $X_1, \dots, X_n$  tomada de uma distribuição cuja função de (densidade) de probabilidade é  $p(x|\theta)$  onde  $\theta$  é um parâmetro desconhecido. Assinale verdadeiro (V) ou falso (F).
  - (a) Se  $X_i = f_i(\theta) + \epsilon_i$  o método de mínimos quadrados só poderá ser usado se os dados forem normais.
  - (b) O teorema de Bayes só pode ser usado para variáveis aleatórias contínuas.
  - (c) A distribuição a posteriori depende da ordem em que as observações são processadas.
  - (d) Quanto menor for a informação a priori, maior será a influência das observações na distribuição a posteriori.
  - (e) A constante normalizadora do teorema de Bayes não depende de  $\theta$ .