הטכניון - מכון טכנולוגי לישראל

הפקולטה להנדסת תעשיה וניהול ע"ש ויליאם משה דוידסון

Technion - Israel Institute of Technology

The William Davidson Faculty of Industrial Engineering and Management

---

תאריך הבחינה: 08.07.15

שם המרצה: ד"ר אלה לוין

מבוא להסתברות וסטטיסטיקה – 094481

מבחן מועד א' - סמסטר אביב תשע"ה

טור א'

משך הבחינה: שלוש שעות.

חומר מותר: שני דפי עזר A4 כתובים משני הצדדים, מחשבון כיס פשוט.

בנוסף מצורפים דפי התפלגויות מיוחדות, טבלאות התפלגויות דגימה וטבלת בדיקת השערות.

למבחן שני חלקים. **יש לענות על כל השאלות** בכל אחד מחלקי הבחינה:

א. החלק הראשון מכיל שאלות רב-ברירתיות (סגורות). **על חלק זה יש לענות רק בדף המיועד לכך המצורף למבחן**. אין לסמן יותר מתשובה אחת לכל שאלה. הציון יינתן על סמך הסימונים בדף התשובות בלבד!

ב. החלק השני מכיל שתי שאלות פתוחות, עליהן יש לענות **במחברת המצורפת ולא על גבי שאלון זה**. בחלק זה עליכם לפרט ולהסביר את כל השלבים שביצעתם בדרך לפתרון. את הפתרון יש לכתוב בעט שחור או כחול בלבד. ניתן להשתמש בטיוטה שלא תיבדק.

בסוף המבחן יש להחזיר את שאלון הבחינה, את דף התשובות ואת מחברת הפתרון.

ב ה צ ל ח ה !

חלק ראשון – יש לענות על כל השאלות בחלק זה. משקל כל שאלה: 7 נק'

שאלה 1

אורך החיים של רכיב אלקטרוני הוא מ"מ T בעל התפלגות מעריכית עם תוחלת של 10^5 שעות. דוגמים מתהליך היצור רכיבים עד שנמצא לראשונה רכיב שאורך חייו לפחות 90,000 שעות.

ההסתברות שידרשו לכך יותר מ-6 דגימות נמצאת באינטרוול:

א. $[0, 0.025)$

ב. $[0.025, 0.05)$

ג. $[0.05, 0.075)$

ד. $[0.075, 0.1)$

שאלה 2

חוקר מעוניין לאמוד את הסיכוי p לחלות במחלת השפעת בחורף. הוא דוגם חמישה אנשים בריאים ומתבונן בסטטיסטי X, שהינו מספר האנשים שחלו בשפעת בחורף. להלן שני אומדים ל-p:

$$T_1 = \frac{X}{5}, \quad T_2 = \frac{X+1}{7}$$

הוצעו הטענות הבאות לגבי האומדים:

טענה 1: שני האומדים מוטים

טענה 2: שני האומדים חסרי הטייה

טענה 3: עבור $p = 0.5$ האמד הראשון T_1 עדיף על פני האמד השני T_2 על סמך קריטריון MSE

סמן את התשובה הנכונה:

א. טענות 3, 1 נכונות.

ב. טענות 3, 2 נכונות.

ג. רק טענה 3 נכונה.

ד. אף טענה אינה נכונה.

שאלה 3

בדרך לאוניברסיטה שלושה רמזורים בלתי תלויים. ההסתברות לאור ירוק ברמזור הראשון היא 1/2, בשני 1/3, ובשלישי 1/4.

יהי T – מספר הרמזורים האדומים בהם עוצר סטודנט בדרכו לאוניברסיטה במהלך 10 ימים בלתי תלויים.

א. התוחלת של T שווה ל- 19.167 והשונות של T שווה ל- 65.97.

ב. התוחלת של T שווה ל- 10.833 והשונות של T שווה ל- 6.597.

ג. התוחלת של T שווה ל- 19.167 והשונות של T שווה ל- 6.597.

ד. התוחלת של T שווה ל- 1.9167 והשונות של T שווה ל- 65.97.

שאלה 4

יהי $X_1,...X_{40}$ מדגם מקרי מהתפלגות מסוימת בעלת תוחלת μ_X ושונות השווה ל-8. התקבל במדגם ש- $\sum_{i=1}^{40} x_i = 208$. נגדיר מ"מ Y בעלת תוחלת μ_Y כך ש- $\mu_Y = e^{0.5\cdot\mu_X+1}$. רווח הסמך ל- μ_Y ברמת בטחון של 99% הוא:

א. $[7.178,186.6]$

ב. $[20.573,65.105]$

ג. $[4.048,6.352]$

ד. $[23.612,56.727]$

שאלה 5

מתוך 5000 מכתבים המגיעים לסניף דואר ביום, 10% בעלי כתובת שגויה ויש להחזירם לשולח.

ההסתברות המקורבת שביום מסוים יגיעו לסניף לכל היותר 450 מכתבים עם כתובת שגויה נמצאת בטווח:

א. $[0,0.25)$

ב. $[0.25,0.5)$

ג. $[0.5,0.75)$

ד. $[0.75,1]$

שאלה 6

מדגם מקרי של 10 מדינות נבחרו באופן מקרי כדי לבחון האם קיים קשר לינארי בין הכנסה חציונית של משק בית בעשרות אלפי דולר -Y ובין אחוז בעלי תואר ראשון במדינה- X.

הניחו שהנתונים מהווים מדגם מקרי מהמודל הלינארי $Y = \beta_0 + \beta_1 X + \varepsilon,\ \varepsilon \sim N(0,\sigma^2)$.

להלן חישובי עזר:

$$\sum_{i=1}^{10} Y_i = 499.7 \quad \sum_{i=1}^{10} (Y_i - \bar{Y})^2 = 367.4$$

$$\sum_{i=1}^{10} X_i = 285.6 \quad \sum_{i=1}^{10} (X_i - \bar{X})^2 = 120.3$$

$$\sum_{i=1}^{10} (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y}) = 186.6$$

על פי נתונים אלה, ניתן להסיק כי:

א. $SSR = 326.25$

ב. אומדן לסטיית תקן של הרגרסיה נמצא בטווח $[9.5,10]$.

ג. על סמך סטטיסטי המבחן $T = 5.45$ לבדיקת מובהקות הרגרסיה נדחה את השערת האפס ברמת מובהקות של 5%, אך לא נדחה אותה ברמת מובהקות של 1%.

ד. על סמך סטטיסטי המבחן $T = 5.45$ לבדיקת מובהקות הרגרסיה נדחה את השערת האפס בכל רמת מובהקות סבירה.

שאלה 7

ידוע שאצל ילדים הורמון גדילה מופרש לדם כל שעתיים למשך 10 דקות. אם למשל הופרש ההורמון בין 10:00-10:10 הוא יופרש בפעם הבאה בין 12:00-12:10. קבוצת ילדים נבדקת בזה אחר זה בבדיקת דם. ההסתברות שהילד השני שנבדק בזמן הפרשת ההורמון הוא העשירי שנבדק נמצאת בטווח:

א. $[0,0.15)$

ב. $[0.15,0.3)$

ג. $[0.3,0.45)$

ד. $[0.45,0.6)$

חלק שני - שאלות פתוחות. יש לענות על שתי השאלות בחלק זה.

שאלה 8 (30 נקודות)

בטבלה שלהלן מרוכזים נתונים של מדידות טמפרטורת המים בחוף תל אביב ובחוף חיפה בקיץ האחרון:

	חוף תל אביב	חוף חיפה
גודל המדגם	30	12
ממוצע	21.3	19.4
סטיית תקן	5	4

ידוע שטמפרטורת מי-הים מתפלגת נורמאלית.

א. מעוניינים לבדוק אם תוחלת טמפרטורת המים בחוף תל-אביב גבוהה מ-20 מעלות. נסחו את ההשערות. רשמו את סטטיסטי המבחן וציינו את ההתפלגות שלו תחת השערת האפס.

ב. בדקו את ההשערות ברמת מובהקות של 5% באמצעות סטטיסטי המבחן וחישוב P-value.

ג. האם ניתן לדעת ללא חישוב נוסף מה תהיה המסקנה עבור רמת מובהקות קטנה 1%? הסבירו במשפט אחד.

ד. האם ניתן להסיק ברמת מובהקות של 1% שתוחלת טמפרטורת המים בחוף תל-אביב שונה מתוחלת טמפרטורת המים בחוף חיפה? נסחו את ההשערות. יש לענות תוך שימוש ברווח סמך וחישוב P-value. ציינו את ההנחה הנדרשת.

שאלה 9 (21 נקודות)

נלקח מדגם ציונים בגודל 65 במבחן בסטטיסטיקה. במדגם התקבלו ממוצע 76.6 וסטיית תקן 12.8.
מעוניינים לבדוק את השערה שההתפלגות היא נורמלית.

א. נסחו את מערכת ההשערות.

ב. ציינו מהם פרמטרים של ההתפלגות הנבדקת.

ג. רשמו את האומדים של הפרמטרים וחשבו את האומדנים. איך מפולג האומד הנקודתי לתוחלת תחת השערת האפס (ציינו את סוג ההתפלגות והפרמטרים שלה).

ד. הנתונים חולקו לקטעים והתוצאות סוכמו באופן הבא:

קטע i	n_i שכיחות בקטע i
[-∞, 50)	3
[50, 60)	3
[60, 70)	15
[70, 80)	24
[80, ∞)	20
	65

חשבו את סטטיסטי פירסון. האם ברמת מובהקות של 5% ניתן לומר שהנתונים נלקחו מהתפלגות נורמלית?