הטכניון - מכון טכנולוגי לישראל

הפקולטה להנדסת תעשיה וניהול ע"ש ויליאם משה דוידסון

Technion - Israel Institute of Technology

The William Davidson Faculty of Industrial Engineering and Management

---

תאריך הבחינה: 08.07.15

שם המרצה: ד"ר אלה לוין

מבוא להסתברות וסטטיסטיקה – 094481

מבחן מועד א' - סמסטר אביב תשע"ה

טור א'

פתרון

משך הבחינה: שלוש שעות.

חומר מותר: שני דפי עזר A4 כתובים משני הצדדים, מחשבון כיס פשוט.

בנוסף מצורפים דפי התפלגויות מיוחדות, טבלאות התפלגויות דגימה וטבלת בדיקת השערות.

למבחן שני חלקים. **יש לענות על כל השאלות** בכל אחד מחלקי הבחינה:

א. החלק הראשון מכיל שאלות רב-ברירתיות (סגורות). **על חלק זה יש לענות רק בדף המיועד לכך המצורף למבחן**. אין לסמן יותר מתשובה אחת לכל שאלה. הציון יינתן על סמך הסימונים בדף התשובות בלבד!

ב. החלק השני מכיל שתי שאלות פתוחות, עליהן יש לענות **במחברת המצורפתולא על גבי שאלון זה**. בחלק זה עליכם לפרט ולהסביר את כל השלבים שביצעתם בדרך לפתרון. את הפתרון יש לכתוב בעט שחור או כחול בלבד. ניתן להשתמש בטיוטה שלא תיבדק.

בסוף המבחן יש להחזיר את שאלון הבחינה, את דף התשובותואת מחברת הפתרון.

ב ה צ ל ח ה !

חלק ראשון – יש לענות על כל השאלות בחלק זה. משקל כל שאלה: 7 נק'

שאלה 1

אורך החיים של רכיב אלקטרוני הוא מ״מ T בעל התפלגות מעריכית עם תוחלת של 10^5 שעות. דוגמים מתהליך היצור רכיבים עד שנמצא לראשונה רכיב שאורך חייו לפחות 90,000 שעות.

ההסתברות שידרשו לכך יותר מ-6 דגימות נמצאת באינטרוול:

א. $[0, 0.025)$

ב. $[0.025, 0.05)$

ג. $[0.05, 0.075)$

ד. $[0.075, 0.1)$

פתרון:

$$E(T) = \frac{1}{\lambda} = 10^5$$

$$T \sim \exp(10^{-5})$$
$$P(T > 90000) = e^{-10^{-5} \cdot 90000} = e^{-9} = 0.406$$
$$Y \sim Geo(0.406)$$
$$P(Y > 6) = (1 - 0.406)^6 = 0.594^6 = 0.044$$

שאלה 2

חוקר מעוניין לאמוד את הסיכוי p לחלות במחלת השפעת בחורף . הוא דוגם חמישה אנשים בריאים ומתבונן בסטטיסטי X, שהינו מספר האנשים שחלו בשפעת בחורף. להלן שני אומדים ל-p :

$$T_1 = \frac{X}{5}, \quad T_2 = \frac{X+1}{7}$$

הוצעו הטענות הבאות לגבי האומדים:

טענה 1: שני האומדים מוטים

טענה 2: שני האומדים חסרי הטייה

טענה 3: עבור $p=0.5$ האמד הראשון T_1 עדיף על פני האמד השני T_2 על סמך קריטריון MSE

סמן את התשובה הנכונה:

א. טענות 3, 1 נכונות.

ב. טענות 3, 2 נכונות.

ג. רק טענה 3 נכונה.

ד. אף טענה אינה נכונה.

<u>פתרון:</u>

$$X \sim Bin(n=5,p) \Rightarrow E(X)=np=5p,$$
$$Var(X)=np(1-p)=5p(1-p)$$
$$E(T_1)=E\left(\frac{X}{5}\right)=\frac{E(X)}{5}=\frac{5p}{5}=p$$

ולכן T_1 הינו אומד חסר הטיה ל-p .

$$E(T_2)=E\left(\frac{X+1}{7}\right)=\frac{E(X)+1}{7}=\frac{5p+1}{7}$$

ולכן T_2 הינו אומד מוטה ל-p .

$$MSE_{T_1}(p)=Var(T_1)+bias^2(T_1)=\frac{Var(X)}{5^2}+0=\frac{p(1-p)}{5}$$
$$MSE_{T_2}(p)=Var(T_2)+bias^2(T_2)=\frac{5p(1-p)}{7^2}+\left(\frac{5p+1}{7}-p\right)^2$$
$$\underline{p=0.5:}$$
$$MSE_{T_1}(p=0.5)=\frac{0.5(1-0.5)}{5}=0.05$$
$$MSE_{T_2}(p=0.5)=\frac{5\cdot 0.5(1-0.5)}{7^2}+\left(\frac{5\cdot 0.5+1}{7}-0.5\right)^2=0.025$$
$$\Rightarrow MSE_{T_1}(p=0.5)>MSE_{T_2}(p=0.5)$$

לכן, האומד השני עדיף על סמך קריטריון MSE.

אף טענה אינה נכונה.

שאלה 3

בדרך לאוניברסיטה שלושה רמזורים בלתי תלויים. ההסתברות לאור ירוק ברמזור הראשון היא 1/2, בשני 1/3, ובשלישי 1/4.

יהי T – מספר הרמזורים האדומים בהם עוצר סטודנט בדרכו לאוניברסיטה במהלך 10 ימים בלתי תלויים.

א. התוחלת של T שווה ל- 19.167 והשונות של T שווה ל- 65.97.

ב. התוחלת של T שווה ל- 10.833 והשונות של T שווה ל- 6.597.

ג. התוחלת של T שווה ל- 19.167 והשונות של T שווה ל- 6.597.

ד. התוחלת של T שווה ל- 1.9167 והשונות של T שווה ל- 65.97.

פתרון:

נדגיר את המשתנים המקריים הבאים:

A: מספר הפעמיים שהרמזור הראשון היה אדום כשהסטודנט עבר בדרכו לאוניברסיטה במהלך 10 ימים בלתי תלויים

B: מספר הפעמיים שהרמזור השני היה אדום כשהסטודנט עבר בדרכו לאוניברסיטה במהלך 10 ימים בלתי תלויים

C: מספר הפעמיים שהרמזור השלישי היה אדום כשהסטודנט עבר בדרכו לאוניברסיטה במהלך 10 ימים בלתי תלויים

$$T = A + B + C$$

$$A \sim Bin(10, 1/2)$$

$$B \sim Bin(10, 2/3)$$

$$C \sim Bin(10, 3/4)$$

A, B ו C הינם משתנים מקרים בלתי תלויים.

$$E(T) = E(A+B+C) = E(A) + E(B) + E(C) = 10 \cdot 1/2 + 10 \cdot 2/3 + 10 \cdot 3/4 = 19.167$$

$$Var(T) = Var(A+B+C) \underset{\text{independent}}{=} Var(A) + Var(B) + Var(C)$$

$$= 10 \cdot 1/2 \cdot 1/2 + 10 \cdot 2/3 \cdot 1/3 + 10 \cdot 3/4 \cdot 1/4 = 6.597$$

<u>דרך נוספת:</u>

נגדיר מ״מ X – מספר הרמזורים האדומים בהם עוצר סטודנט בדרכו לאוניברסיטה.

דוגמה לחישוב ההסתברויות:

$$P(X=0)=P(G,G,G)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{24}$$

$$P(X=1)=P(G,G,R)+P(G,R,G)+P(R,G,G)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}=\frac{6}{24}$$

$$P(X=2)=P(G,R,R)+P(R,R,G)+P(R,G,R)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}=\frac{11}{24}$$

$$P(X=3)=P(R,R,R)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}=\frac{6}{24}$$

על כן פונקציית ההסתברות של X:

$$P_x(x)=\begin{cases}1/24 & x=0\\ 6/24 & x=1\\ 11/24 & x=2\\ 6/24 & x=3\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

$$E(X)=\sum_x x\cdot P(X=x)=0\cdot 1/24+1\cdot 6/24+2\cdot 11/24+3\cdot 6/24=1.9167$$

$$Var(X)=E(X^2)-E(X)^2=\sum_x x^2\cdot P(X=x)-E(X)^2=$$

$$=\left(0^2\cdot 1/24+1^2\cdot 6/24+2^2\cdot 11/24+3^2\cdot 6/24\right)-1.9167^2=0.6597$$

ידוע כי: $T=\sum_{i=1}^{10}X_i$ ועל כן:

$$E(T)=E(\sum_{i=1}^{10}X_i)=10E(X)=10\cdot 1.9167=19.167$$

$$Var(T)=Var(\sum_{i=1}^{10}X_i)\overset{\text{Ind.}}{=}10Var(X)=10\cdot 0.6597=6.597$$

שאלה 4

יהי $X_1,...X_{40}$ מדגם מקרי מהתפלגות מסוימת בעלת תוחלת μ_X ושונות השווה ל-8. התקבל במדגם ש- $\sum_{i=1}^{40} x_i = 208$. נגדיר מ״מ Y בעלת תוחלת μ_Y כך ש- $\mu_Y = e^{0.5\cdot\mu_X+1}$. רווח הסמך ל- μ_Y ברמת בטחון של 99% הוא:

א. $[7.178,186.6]$

ב. $[20.573,65.105]$

ג. $[4.048,6.352]$

ד. $[23.612,56.727]$

פתרון:

תחילה נחשב רווח סמך לתוחלת של X. לפי מג״מ:

$$\overline{X} \overset{\cdot}{\sim} N(\mu_X, \frac{\sigma^2}{n}) \longrightarrow Z = \frac{\overline{X}-\mu_X}{\sigma/\sqrt{n}} \overset{\cdot}{\sim} N(0,1)$$

$$\overline{X} = \frac{208}{40} = 5.2, \qquad z_{1-\alpha/2} = z_{1-0.01/2} = z_{0.995} = 2.576$$

על כן:

$$\mu_X \in \left[\overline{X} \pm z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] = \left[5.2 \pm 2.576\cdot\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{40}}\right] = [5.2 \pm 1.152] = [4.048,6.352]$$

μ_Y הוא פונקציה מונוטונית עולה של μ_X ועל כן:

$$\mu_Y \in [e^{0.5\cdot 4.048+1}, e^{0.5\cdot 6.352+1}] = [20.573,65.105]$$

שאלה 5

מתוך 5000 מכתבים המגיעים לסניף דואר ביום, 10% בעלי כתובת שגויה ויש להחזירם לשולח.

ההסתברות המקורבת שביום מסוים יגיעו לסניף לכל היותר 450 מכתבים עם כתובת שגויה נמצאת בטווח:

א. $[0,0.25)$

ב. $[0.25,0.5)$

ג. $[0.5,0.75)$

ד. $[0.75,1]$

<u>פתרון:</u>

נגדיר Y – מספר המכתבים המגיעים עם כתובת שגויה:

$$Y \sim Bin(5000, 0.1)$$

$$E(Y) = 5000 \times 0.1 = 500, \qquad Var(Y) = 5000 \times 0.9 \times 0.1 = 450$$

ההסתברות המדויקת הינה קשה לחישוב:

$$P(Y \le 450) = \sum_{i=0}^{450} \binom{5000}{i} 0.1^{i} 0.9^{(5000-i)}$$

ועל כן, נחשב קירוב להסתברות. התנאים לקירוב נורמלי להתפלגות בינומית מתקיימים:

$$np = 500 > 5, \quad nq = 4500 > 5$$

ולכן

$$Y \dot{\sim} N(500, 450)$$

$$P(Y \le 450) = P\left(Z \le \frac{450-500}{\sqrt{450}}\right) = 1 - P(Z \le 2.35) = 0.0094$$

<u>שאלה 6</u>

מדגם מקרי של 10 מדינות נבחרו באופן מקרי כדי לבחון האם קיים קשר לינארי בין הכנסה חציונית של משק בית בעשרות אלפי דולר -Y ובין אחוז בעלי תואר ראשון במדינה-X.

הניחו שהנתונים מהווים מדגם מקרי מהמודל הלינארי $Y = \beta_0 + \beta_1 X + \varepsilon,\ \varepsilon \sim N(0, \sigma^2)$.
להלן חישובי עזר:

$$\sum_{i=1}^{10} Y_i = 499.7 \quad \sum_{i=1}^{10} (Y_i - \bar{Y})^2 = 367.4$$

$$\sum_{i=1}^{10} X_i = 285.6 \quad \sum_{i=1}^{10} (X_i - \bar{X})^2 = 120.3$$

$$\sum_{i=1}^{10} (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y}) = 186.6$$

על פי נתונים אלה, ניתן להסיק כי:

א. $SSR = 326.25$

ב. אומדן לסטיית תקן של הרגרסיה נמצא בטווח $[9.5,10]$.

ג. על סמך סטטיסטי המבחן $T = 5.45$ לבדיקת מובהקות הרגרסיה נדחה את השערת האפס ברמת מובהקות של 5%, אך לא נדחה אותה ברמת מובהקות של 1%.

ד. על סמך סטטיסטי המבחן $T = 5.45$ לבדיקת מובהקות הרגרסיה נדחה את השערת האפס בכל רמת מובהקות סבירה.

<u>פתרון:</u>

$$R = \frac{S_{xy}}{\sqrt{S_{xx} \cdot S_{yy}}} = \frac{186.6}{\sqrt{120.3 \cdot 367.4}} = 0.888$$

$$SSR = S_{yy} R^2 = 289.44$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{SSE}{n-2} = \frac{SST - SSR}{n-2} = \frac{367.4 - 289.44}{8} = 9.75$$
$$\rightarrow \hat{\sigma} = 3.12$$

$$H_0 : \beta_1 = 0$$
$$H_1 : \beta_1 \neq 0$$

סטטיסטי המבחן: $T = \frac{\hat{\beta}_1}{\sqrt{\hat{\sigma}^2 / S_{xx}}} \underset{H_0}{\sim} t_{(n-2)}$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{S_{xy}}{S_{xx}} = \frac{186.6}{120.3} = 1.55$$

$$T_{cal} = \frac{1.55 - 0}{\sqrt{9.75 / 120.3}} = 5.45$$

$$P-Value = 2\cdot\left(1-P\left(t_{(8)} < 5.45\right)\right)$$
$$P\left(t_{(8)} < 5.45\right) > 0.9995$$
$$\rightarrow \left(1-P\left(t_{(8)} < 5.5\right)\right) < 0.0005$$
$$\rightarrow P-Value < 0.001$$

לכן, נדחה את השערת האפס בכל רמת מובהקות סבירה.

<u>שאלה 7</u>

ידוע שאצל ילדים הורמון גדילה מופרש לדם כל שעתיים למשך 10 דקות. אם למשל הופרש ההורמון בין 10:00-10:10 הוא יופרש בפעם הבאה בין 12:00-12:10. קבוצת ילדים נבדקת בזה אחר זה בבדיקת דם. ההסתברות שהילד השני שנבדק בזמן הפרשת ההורמון הוא העשירי שנבדק נמצאת בטווח:

א. $[0,0.15)$

ב. $[0.15,0.3)$

ג. $[0.3,0.45)$

ד. $[0.45,0.6)$

<u>פתרון:</u>

נגדיר מאורע A – בדיקת הדם התרחשה בזמן הפרשת ההורמון לדם

לפי התפלגות אחידה, ההסתברות למאורע A היא:

$$P(A) = \frac{10}{120} = \frac{1}{12}$$

נגדיר מ״מ X – מספר הילדים שנבדקו עד השני שנבדק בזמן הפרשת ההורמון.

$$X \sim NB\left(\frac{1}{12}, 2\right)$$

$$P(X=10) = \binom{9}{1}\left(\frac{1}{12}\right)^2\left(\frac{11}{12}\right)^8 = 0.031$$

חלק שני - שאלות פתוחות. יש לענות על שתי השאלות בחלק זה.

שאלה 8 (30 נקודות)

בטבלה שלהלן מרוכזים נתונים של מדידות טמפרטורת המים בחוף תל אביב ובחוף חיפה בקיץ האחרון:

	חוף תל אביב	חוף חיפה
גודל המדגם	30	12
ממוצע	21.3	19.4
סטיית תקן	5	4

ידוע שטמפרטורת מי-הים מתפלגת נורמאלית.

א. מעוניינים לבדוק אם תוחלת טמפרטורת המים בחוף תל-אביב גבוהה מ-20 מעלות. נסחו את ההשערות. רשמו את סטטיסטי המבחן וציינו את ההתפלגות שלו תחת השערת האפס.

ב. בדקו את ההשערות ברמת מובהקות של 5% באמצעות סטטיסטי המבחן וחישוב P-value.

ג. האם ניתן לדעת ללא חישוב נוסף מה תהיה המסקנה עבור רמת מובהקות קטנה 1%? הסבירו במשפט אחד.

ד. האם ניתן להסיק ברמת מובהקות של 1% שתוחלת טמפרטורת המים בחוף תל-אביב שונה מתוחלת טמפרטורת המים בחוף חיפה? נסחו את ההשערות. יש לענות תוך שימוש ברווח סמך וחישוב P-value. ציינו את ההנחה הנדרשת.

פתרון:

נגדיר את המשתנים המקריים הבאים:

X- טמפרטורת המים בחוף תל-אביב

Y- טמפרטורת המים בחוף חיפה

$$X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$$

$$\mathrm{Y} \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$$

א.

$$H_0 : \mu_X = 20$$
$$H_1 : \mu_X > 20$$

סטטיסטי המבחן: $T = \frac{\bar{X} - 20}{\sqrt{\frac{S_X^2}{n_X}}} \underset{H_0}{\sim} t_{(29)}$

ב.

המבחן הינו: נדחה את השערת האפס בר"מ α אם $T > t_{1-\alpha}^{(29)}$.

$\alpha = 0.05$

נחשב את **<u>סטטיסטי המבחן</u>** לפי המדגם. נתון: $\bar{x} = 21.3$ ו $s^2 = 5^2$

$$T_{calc} = \frac{21.3 - 20}{\sqrt{\frac{25}{30}}} = 1.424$$

$$t_{0.95}^{(29)} = 1.699$$
$$T_{calc} = 1.424 < 1.699$$

ולכן לא נדחה את השערת האפס בר"מ 0.05 ולא ניתן להסיק כי טמפרטורת המים בחוף תל-אביב גבוהה מ-20 מעלות.

חישוב **<u>P-value:</u>**

$$P - value = P_{H_0}(T \geq 1.424) = 1 - P(t_{(29)} < 1.424)$$
$$\Rightarrow 0.9 < P(t_{(29)} < 1.424) < 0.95$$
$$\Rightarrow 0.05 < P - value < 0.1$$

ג. P-value גדול מ-0.05 ועל כן גדול גם 0.01. לכן גם ברמת מובהקות של 0.01 לא נדחה את השערת האפס.

ד.

$$H_0 : \mu_X - \mu_Y = 0$$
$$H_1 : \mu_X - \mu_Y \neq 0$$

ההנחה הנדרשת: $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2$ - שונויות שוות.

סטטיסטי המבחן: $T = \frac{\left(\bar{X} - \bar{Y}\right) - 0}{\sqrt{\frac{S_p^2}{n_X} + \frac{S_p^2}{n_Y}}} \underset{H_0}{\sim} t_{(40)}$

כאשר :

$$S_p^2 = \frac{(n_X - 1)S_X^2 + (n_Y - 1)S_Y^2}{n_X + n_Y - 2}$$

$$s_p^2 = \frac{(30-1)\cdot 25 + (12-1)\cdot 16}{30+12-2} = 22.525$$

$$T_{cal} = \frac{21.3 - 19.4 - 0}{\sqrt{22.525 \cdot \left(\frac{1}{30} + \frac{1}{12}\right)}} = 1.172$$

<u>דרך P-value:</u>

$$P - value = P_{H_0}(T \geq 1.172) + P_{H_0}(T \leq -1.172) = 2P\left(t_{(40)} \geq 1.172\right) = 2\left(1 - P\left(t_{(40)} < 1.172\right)\right)$$

$$\Rightarrow 0.85 < P\left(t_{(40)} < 1.172\right) < 0.9$$

$$\Rightarrow 0.1 < \left(1 - P\left(t_{(40)} < 1.357\right)\right) < 0.15$$

$$\Rightarrow 0.2 < P - value < 0.3$$

$0.01 = \alpha < P - value$ ולכן לא נדחה את השערת האפס ברמת מובהקות 0.01.

<u>דרך רווח סמך</u>

רווח סמך להפרש התוחלות כאשר השונויות לא ידועות אך מניחים שהן שוות ברמת בטחון $1-\alpha$:

$$\mu_X - \mu_Y \in \left[\bar{X} - \bar{Y} \pm t_{1-\alpha/2}^{(n_x+n_y-2)} \sqrt{\frac{S_p^2}{n_X} + \frac{S_p^2}{n_Y}}\right]$$

$$1 - \alpha = 0.99 \Rightarrow 1 - \alpha / 2 = 0.995$$

$$t_{1-\alpha/2}^{(n_x+n_y-2)} = t_{0.995}^{(40)} = 2.704$$

$$\Rightarrow \mu_X - \mu_Y \in \left[\left(21.3 - 19.4\right) \pm 2.704\sqrt{22.525\left(\frac{1}{30} + \frac{1}{12}\right)}\right] = [-2.483\ ,\ 6.283]$$

ברמת בטחון 99% רווח סמך <u>מכיל</u> את הערך אפס בתוכו, ולכן <u>לא נדחה</u> את השערת האפס ברמת מובהקות 0.01.

שאלה 9 (21 נקודות)

נלקח מדגם ציונים בגודל 65 במבחן בסטטיסטיקה. במדגם התקבלו ממוצע 76.6 וסטיית תקן 12.8.
מעוניינים לבדוק את השערה שההתפלגות היא נורמלית.

א. נסחו את מערכת ההשערות.

ב. ציינו מהם פרמטרים של ההתפלגות הנבדקת.

ג. רשמו את האומדים של הפרמטרים וחשבו את האומדנים. איך מפולג האומד הנקודתי לתוחלת תחת השערת האפס (ציינו את סוג ההתפלגות והפרמטרים שלה).

ד. הנתונים חולקו לקטעים והתוצאות סוכמו באופן הבא:

קטע i	n_i שכיחות בקטע i
[-∞, 50)	3
[50, 60)	3
[60, 70)	15
[70, 80)	24
[80, ∞)	20
	65

חשבו את סטטיסטי פירסון. האם ברמת מובהקות של 5% ניתן לומר שהנתונים נלקחו מהתפלגות נורמלית?

פתרון

א. X-מ״מ שמציין ציון במבחן

$$H_0 : X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$$
$$H_1 : \text{otherwise}$$

ב. פרמטרים של ההתפלגות הנבדקת: תוחלת μ ושונות σ^2.

ג. אומד נקודתי לתוחלת: $\overline{X}_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$

אומד נקודתי לשונות: $S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\overline{X}^2}{n-1}$

אומדנים:

$$\overline{x}_{65} = 76.6$$
$$s^2 = 12.8^2$$

$$\overline{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

את הקטע ה- i נסמן $[a_i, a_{i+1})$ אזי: $\hat{p}_{i,0} = \phi\left(\frac{a_{i+1} - \overline{x}}{s}\right) - \phi\left(\frac{a_i - \overline{x}}{s}\right)$

$$\hat{p}_1 = \phi\left(\frac{50-76.6}{12.8}\right) - \phi\left(\frac{-\infty-76.6}{12.8}\right) = \phi(-2.08) - 0 = 1 - 0.9812 = 0.0188$$
$$n\hat{p}_1 = E_1 = 0.0188 \cdot 65 = 1.222$$
$$\hat{p}_2 = \phi\left(\frac{60-76.6}{12.8}\right) - \phi\left(\frac{50-76.6}{12.8}\right) = \phi(-1.3) - \phi(-2.08) = 0.0792$$
$$n\hat{p}_2 = E_2 = 5.148$$
$$\hat{p}_3 = \phi\left(\frac{70-76.6}{12.8}\right) - \phi\left(\frac{60-76.6}{12.8}\right) = \phi(-0.5156) - \phi(-1.3) = 0.206$$
$$n\hat{p}_3 = E_3 = 13.39$$
...

E_i **שכיחות צפויה בקטע i תחת השערת האפס נכונה**	$\hat{p}_{i,0}$ **ההסתברות תחת השערת האפס נכונה ש X נמצא בקטע i**	n_i **שכיחות בקטע i**	**קטע i**
1.222	0.0188	3	[-∞, 50)
5.1025	0.0785	3	[50, 60)
13.3705	0.2057	15	[60, 70)
19.6105	0.3017	24	[70, 80)
25.6945	0.3953	20	[80, ∞)

	65	**1**	**65**

נצרף את הקטע הראשון לקטע השני כך שבקטע המאוחד יש יותר מ-5 תצפיות ומתקבלת הטבלה הבאה:

קטע i	n_i **שכיחות בקטע i**	$\hat{p}_{i,0}$	E_i
[-∞, 60)	6	0.0973	6.3245
[60, 70)	15	0.2057	13.3705
[70, 80)	24	0.3017	19.6105
[80, ∞)	20	0.3953	25.6945
	65	**1**	**65**

לאחר האיחוד יש $k = 4$ קטעים.

סטטיסטי פירסון:

$$X_p^{\ 2} = \sum_{i=1}^{k} \frac{\left(O_i - E_i\right)^2}{E_i} = \frac{\left(6-6.3245\right)^2}{6.3245} + \ldots + \frac{\left(20-25.6945\right)^2}{25.6945}$$
$$= 2.46$$

דוחים H_0 בר״מ α אם $X_p^{\ 2} > \chi^2_{1-\alpha,(k-1-l)}$.

כיון שאמדנו 2 פרמטרים $\left(\mu,\sigma\right)$ יש **1** =4-1-2 דרגת חופש.

הנקודה הקריטית היא: $\chi^2_{0.95,(1)} = 3.84$. נקבל כי: $X_p^{\ 2} = 2.46 < 3.84$ לכן בר״מ של 5% לא דוחים H_0.

אין מספיק עדות כדי לדחות ההשערה על התפלגות נורמלית.