הטכניון - מכון טכנולוגי לישראל

הפקולטה להנדסת תעשיה וניהול ע"ש ויליאם משה דוידסון

Technion - Israel Institute of Technology

The William Davidson Faculty of Industrial Engineering and Management

---

תאריך הבחינה: 22.07.16

שם המרצה: ד"ר אלה לוין

מבוא להסתברות וסטטיסטיקה – 094481

מבחן מועד א' - סמסטר אביב תשע"ו

טור א'

משך הבחינה: שלוש שעות.

חומר עזר מותר: שני דפי עזר A4 כתובים משני הצדדים, מחשבון כיס פשוט.
בנוסף מצורפים דפי התפלגויות מיוחדות, טבלאות התפלגויות דגימה וטבלת בדיקת השערות.

למבחן שני חלקים. **יש לענות על כל השאלות** בכל אחד מחלקי הבחינה:

א. החלק הראשון מכיל שאלות רב-ברירתיות (סגורות). **על חלק זה יש לענות רק בדף המיועד לכך המצורף למבחן**. אין לסמן יותר מתשובה אחת לכל שאלה. הציון יינתן על סמך הסימונים בדף התשובות בלבד!

ב. החלק השני מכיל שתי שאלות פתוחות, עליהן יש לענות **במחברת המצורפת ולא על גבי שאלון זה**. בחלק זה עליכם לפרט ולהסביר את כל השלבים שביצעתם בדרך לפתרון. את הפתרון יש לכתוב בעט שחור או כחול בלבד. ניתן להשתמש בטיוטה שלא תיבדק.

בסוף המבחן יש להחזיר את שאלון הבחינה, את דף התשובות ואת מחברת הפתרון.

ב ה צ ל ח ה !

חלק ראשון – יש לענות על כל השאלות בחלק זה. משקל כל שאלה: 8 נק'

שאלה 1

יהיו A, B ו- C שלושה מאורעות המקיימים $P(A)=P(B)=P(C)=p$ ונגדיר:

P_1 - ההסתברות שיקרה בדיוק מאורע אחד אם המאורעות בלתי-תלויים.

P_2 - ההסתברות שיקרה בדיוק מאורע אחד אם המאורעות זרים.

למה שוות ההסתברויות המוגדרות P_1, P_2?

א. $P_1=3p(1-p)^2 \qquad P_2=3p$

ב. $P_1=3p \qquad P_2=3p(1-p)^2$

ג. $P_1=p(1-p)^2 \qquad P_2=p$

ד. $P_1=p \qquad P_2=p(1-p)^2$

שאלה 2

שמוליק נבחן בקורס בסטטיסטיקה, נסמן את הציון שקיבל במבחן ב-N. שמוליק חושש להתבונן בציון שקיבל במבחן ולשם כך הוא החליט להטיל מטבע הוגן. אם המטבע יצא עץ, שמוליק יגיד שהציון שקיבל הוא 2N ואם המטבע יצא פלי, שמוליק יגיד שקיבל ציון 0.

דניס הציע לו לאמוד את הציון שקיבל בדרך שונה. אם המטבע יצא עץ, שמוליק יגיד שהציון שקיבל הוא N ואם המטבע יצא פלי, שמוליק יגיד שקיבל ציון 0.

אילו מהטענות הבאות נכונה?

א. האמד של דניס וגם האמד של שמוליק מוטים.
ב. ההסתברות ששמוליק יסתכל על הציון האמיתי במבחן (N) היא 1/3 .
ג. ההסתברות ששמוליק יסתכל על הציון האמיתי במבחן (N) היא 1/4 .
ד. ה-MSE של האמד של דניס קטן מה-MSE של האמד של שמוליק.

שאלה 3

אייפון חדש יוצא לשוק, וידוע שסניף של Apple store יכול להכיל לכל היותר 200 איש בשעה. כמו כן, ידוע שמספר האנשים שמגיעים לסניף בדקה מרגע השקת האייפון החדש מפולג פואסון עם פרמטר $\lambda = 3$. חשב בקירוב את ההסתברות שבשעה הראשונה לאחר השקת האייפון הסניף יוצף בקונים.

באילו מבין התחומים הבאים נמצאת הסתברות זו?

א. [0.04,0.06)
ב. [0.06,0.08)
ג. [0.08,0.1)
ד. [0.1,0.12)

שאלה 4

מזה זמן רב ידוע, כי קיימים לפחות שני מצבי שינה שונים. האחד רגיל והשני שבו העפעפיים של האדם הישן נעים במהירות. מצב זה נקרא .R.E.M (במצב זה לרוב חולמים). התופעה קיימת גם אצל תינוקות. המחקר הנ"ל עוסק בשינויים בנשימתם של תינוקות במצבי שינה שונים. המדגם כלל 10 תינוקות בני יום אחד.

המדדים שנמדדו בשני מצבי השינה (רגיל ו .R.E.M) הם:

T - נפח האוויר שנכנס לריאות בנשימה אחת. F- מספר נשימות בדקה. V - נפח אויר שנכנס בדקה לכל ק"ג משקל.

ידוע כי **בזמן שינה רגילה** הממוצעים עבור T, F, V **באוכלוסייה** של תינוקות כאלה הם: 19.1, 50, 293 בהתאמה וסטיות התקן באוכולוסייה הן 4.1, 11, 43 .

במדגם התקבלו התוצאות הבאות על נשימה של תינוקות **במצב שינה .R.E.M**:
הממוצעים עבור T, F, V הם: 18.7, 62, 152 בהתאמה.

חוקר מחפש את המדד הטוב ביותר (המובהק ביותר) לביצוע הבחנה בין שני מצבי השינה הנ"ל. לשם כך, הוא בדק עבור כל אחד מהמדדים הנ"ל את ההשערה, כי הנשימה במצב שינה .R.E.M **זהה** לנשימה בשינה רגילה נגד ההשערה כי הנשימה בשני מצבים אלו שונה.
מניחים עבור כל המדדים כי: השונויות באוכלוסייה בשני מצבי השינה זהות וההתפלגויות נורמליות.

טענה 1: עבור כל אחד מהמדדים הנ"ל רמת המובהקות המינימלית שבה נדחה את ההשערה, כי הנשימה במצב שינה .R.E.M זהה לנשימה בשינה רגילה היא: עבור T - 0.7566, עבור F - 0.0006, עבור V- 0

טענה 2: עבור כל אחד מהמדדים הנ"ל רמת המובהקות המינימלית שבה נדחה את ההשערה, כי הנשימה במצב שינה .R.E.M זהה לנשימה בשינה רגילה היא: עבור T - 0.3783, עבור F - 0.9993, עבור V - 1

טענה 3: מדד T הוא המדד המובהק ביותר (מבין שלושת המדדים) לקיום ההבדל בנשימה במצבי שינה השונים.

בחר את התשובה הנכונה ביותר:

א. טענה 1 נכונה, טענות 2 ו- 3 שגויות.
ב. טענה 3 נכונה, טענות 1 ו- 2 שגויות.
ג. רק טענה 2 נכונה.
ד. כל הטענות שגויות.

שאלה 5

על מנת לבחון מודל רגרסיה, נלקח מדגם של 77 תצפיות.

להלן נתון לוח ניתוח השונויות בו חסרים מספר ערכים:

Source	DF	SS	MS	F
Regression	1	--	--	102.35
Error	--	6342.1	--	
Total	--	--		

הערה: $|T| = \sqrt{F}$

להלן שלוש טענות:

טענה 1: ברמת סמך 0.05 הרגרסיה מובהקת.

טענה 2: SSR = 1.364*SSE

טענה 3: $R^2 = 0.577$

בחר את התשובה הנכונה ביותר:

א. טענות 1 ו- 2 נכונות, טענה 3 שגויה.
ב. טענות 2 ו- 3 נכונות, טענה 1 שגויה.
ג. טענות 1 ו- 3 נכונות, טענה 2 שגויה.
ד. כל הטענות נכונות.

שאלה 6

בכד יש 2 כדורים שחורים, 20 כדורים לבנים, 200 כדורים אדומים ו- 2000 כדורים כחולים. מוציאים עם החזרה 101 כדורים. נסמן ב- X את סכום מספר הכדורים השחורים והלבנים שהוצאו.

אזי ההסתברות $P(X \geq 3 | X \geq 2)$ נמצאת באינטרוול:

א. $[0, 0.25)$
ב. $[0.25, 0.4)$
ג. $[0.4, 0.65)$
ד. $[0.65, 0.8)$

חלק שני - שאלות פתוחות. יש לענות על שתי השאלות בחלק זה.

שאלה 7 (25 נקודות)

במדגם של 100 משפחות שלהן בן אחד לפחות, נרשם (בלוח השכיחויות) מספר הילדים שנולדו עד הבן הראשון (כולל אותו).

נניח כי ההסתברות ללידת בן היא 0.5 והמינים בלידות השונות הם ב״ת.

נתון לוח השכיחויות :

מספר הילדים	מספר המשפחות
1	58
2	20
3	7
4	5
5	4
6	3
7	1
8	2

א. נגדיר את Y כמספר הילדים שנולדו עד הבן הראשון (כולל אותו). כיצד מתפלג Y ? ציינו את סוג ההתפלגות ואת הפרמטרים שלה.

כעת רוצים לבדוק האם ניתן להניח את ההתפלגות שציינת בסעיף א׳ :

ב. רשום את ההשערות הנבדקות.

ג. מהו הפרמטר תחת H_0 שבאמצעותו יש לעשות בדיקת השערות. האם יש לו התפלגות? אם כן ציין את סוג ההתפלגות ואת הפרמטרים שלה.

ד. ציין את סטטיסטי המבחן הנדרש לביצוע בדיקת השערות. האם יש לו התפלגות? אם כן ציין את סוג ההתפלגות ואת הפרמטרים שלה.

ה. בדוק אם אכן הנתונים בלוח השכיחויות מתאימים להתפלגות שציינת בסעיף א׳ באמצעות סטיסטי המבחן ברמת מובהקות $\alpha = 0.05$ ו- $\alpha = 0.10$. מהי מסקנתך לגבי שתי רמות המובהקות?

שאלה 8 (27 נקודות)

חלק א' (13 נקודות)

בודקים את ההשערה , כי הכמות הממוצעת של פניצילין בתרופה הנמכרת בבתי-מרקחת היא 10 גרם.
במדגם מקרי של 10 בקבוקי פניצילין נמצאו כמויות החומר הבאות (בגרמים) :

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	ממוצע	סטיית תקן
10.1	10.3	9.4	9.7	10.2	8.9	10.3	10.4	8.9	9.8	9.8	0.566

א. ציין את ההנחות הדורשות לביצוע מבחן סטטיסטי והגדר את מערכת ההשערות.
ב. מהו סטטיסטי המבחן? כיצד הוא מפולג? ציין את סוג ההתפלגות ואת הפרמטרים שלה.
ג. ציין את אזורי הדחייה ואי-דחייה של השערת האפס ברמת מובהקות 0.01 . מהי מסקנתך לפי המבחן המתאים?
ד. האם ייתכן שממוצע כמות החומר באוכלוסייה הוא 10 גרם? בדוק באמצעות P-value ברמת מובהקות 0.01 ?

חלק ב' (14 נקודות)

נתון משתנה מקרי בעל התפלגות נורמלית, עם תוחלת μ וסטיית תקן $\sigma=8.5$. במעבדה שעורכת ניסוי נאסף מדגם בגודל n מהתפלגות זו, ובנו רווח סמך ברמת סמך 95% עבור μ. רווח הסמך שהתקבל הינו : $[1400.07 , 1407.93]$.

א. מהו גודל המדגם?
ב. בדקו את מערכת ההשערות הבאה ברמת מובהקות 0.05 :

$$H_0: \mu = 1410$$
$$H_1: \mu \neq 1410$$

באמצעות :

1) רווח הסמך הנתון
2) סטטיסטי מבחן
3) P-value

ג. המעבדה שעורכת את הניסוי מעוניינת ברמת סמך גבוהה יותר, של 99%. השתמשו בחישוביכם בסעיף ב' על מנת לספק להם מסקנה בנוגע למערכת השערות זו עבור רמת סמך 99%.