הטכניון - מכון טכנולוגי לישראל

הפקולטה להנדסת תעשיה וניהול ע"ש ויליאם משה דוידסון

Technion - Israel Institute of Technology

The William Davidson Faculty of Industrial Engineering and Management

---

תאריך הבחינה: 20.02.17

שם המרצה: ד"ר אלה לוין

מבוא להסתברות וסטטיסטיקה – 094481

מבחן מועד א' - סמסטר חורף תשע"ז

טור א'

משך הבחינה: שלוש שעות.

חומר עזר מותר: שני דפי עזר A4 כתובים משני הצדדים, מחשבון כיס פשוט.
בנוסף מצורפים דפי התפלגויות מיוחדות, טבלאות התפלגויות דגימה וטבלת בדיקת השערות.

למבחן שני חלקים. **יש לענות על כל השאלות** בכל אחד מחלקי הבחינה:

א. החלק הראשון מכיל שאלות רב-ברירתיות (סגורות). **על חלק זה יש לענות רק בדף המיועד לכך המצורף למבחן**. אין לסמן יותר מתשובה אחת לכל שאלה. הציון יינתן על סמך הסימונים בדף התשובות בלבד!

ב. החלק השני מכיל שתי שאלות פתוחות, עליהן יש לענות **במחברת המצורפת ולא על גבי שאלון זה**. בחלק זה עליכם לפרט ולהסביר את כל השלבים שביצעתם בדרך לפתרון. את הפתרון יש לכתוב בעט שחור או כחול בלבד. ניתן להשתמש בטיוטה שלא תיבדק.

בסוף המבחן יש להחזיר את שאלון הבחינה, את דף התשובות ואת מחברת הפתרון.

ב ה צ ל ח ה !

חלק ראשון – יש לענות על כל השאלות בחלק זה. משקל כל שאלה: 7 נק'

שאלה 1

במחלבת אלפא התנובה הממוצעת של פרה ביום היא 20 ליטר עם סטיית תקן 4 ליטר. במחלבת ביטא התנובה הממוצעת של פרה ביום היא 24 ליטר עם סטיית תקן 6 ליטר.
נניח אי תלות בין הפרות. באיזה אינטרוול נמצאת ההסתברות שהתנובה הכוללת של 100 פרות ממחלבת ביטא תעלה על התנובה הכוללת של 100 פרות ממחלבת אלפא ביותר מ-240 ליטר?

א. [0.91 , 0.93)
ב. [0.93 , 0.95)
ג. [0.95 , 0.97)
ד. [0.97 , 0.99]

שאלה 2

בדרך לאוניברסיטה ישנם שלושה רמזורים בלתי תלויים. ההסתברות לאור ירוק ברמזור הראשון היא 1/2, בשני 1/3, ובשלישי 1/4.
יהי T – מספר הרמזורים האדומים בהם עוצר סטודנט בדרכו לאוניברסיטה במהלך 5 ימים בלתי תלויים.
בחרו את התשובה הקרובה ביותר:

א. השונות של T שווה ל – 0.132
ב. השונות של T שווה ל – 3.297
ג. השונות של T שווה ל – 12.082
ד. השונות של T שווה ל – 16.483

שאלה 3

בכל יום גשום, מודדים את כמות הגשם שירדת בשלוש נקודות שונות בחיפה ומפרסמים את הממוצע של שלושת המדידות הללו. ידוע כי בכל נקודה בעיר יורדת כמות גשם המתפלגת נורמלית עם תוחלת 20 מ"מ ושונות 12 (באופן בלתי תלוי בנקודות האחרות). בהנחה כי הימים ב"ת זה בזה, מהי תוחלת מספר הימים הגשומים בחיפה עד אשר יפרסמו לראשונה שירדה בעיר כמות גשם הגדולה מ-25 מ"מ (בחרו בתשובה הקרובה ביותר)?

א. 1.006
ב. 4.930
ג. 9.470
ד. 161.290

שאלה 4

בניסוי על "אפקט הפלסיבו" מעוניינים לבדוק את ההשפעה של כדורי פלסיבו למניעת כאב ראש. בניסוי זה מציגים לחולה קופסת תרופות בה ישנם שני סוגי תרופות שנראות זהות לחלוטין ורק החוקר יודע להבדילן: אופטלגין (נגד כאב ראש) ותרופת פלסיבו (למשל סוכרזית). ידוע כי הקופסא מכילה 10 כדורים בסך הכול וכן ידוע שבדיוק 8 תרופות מסוג אחד (אופטלגין או פלסיבו) ובדיוק 2 מהסוג השני. נניח כי ההסתברות לכך ש – 8 מהתרופות הינן מסוג פלסיבו שווה ל- 3/4 וההסתברות לכך ש- 8 מהתרופות הינן מסוג אופטלגין שווה ל- 1/4.

גרישה שסובל הרבה מכאבי ראש משתתף בניסוי זה: בכל שלב בניסוי הוא מוציא תרופה אחת באקראי מהקופסא. אם שלף תרופת פלסיבו החוקר מבקש ממנו לסיים את הניסוי, אך אם שלף אופטלגין הוא מחזיר את האופטלגין לקופסא וממשיך לשלוף מהקופסא עד שמתקבלת תרופת פלסיבו.

ידוע כי הניסוי נמשך יותר משני שלבים. ההסתברות שבקופסא היו שמונה תרופות אופטלגין נמצאת בקטע:

א. $[0.6,0.7)$

ב. $[0.7,0.8)$

ג. $[0.8,0.9)$

ד. $[0.9,1.0)$

שאלה 5

יהי $X_1,...,X_n$ מדגם מקרי מהתפלגות נורמלית בעלת תוחלת μ ושונות 1.

איזה מבין האומדים הבאים הינו אומד חסר הטיה לפרמטר μ^2 ?

א. $(\bar{X})^2-1$

ב. $(\bar{X})^2$

ג. $(\bar{X})^2-\frac{1}{n}$

ד. $n\cdot(\bar{X})^2$

שאלה 6

יהי $X_1,...,X_n$ מדגם מקרי מהתפלגות נורמלית $N(\mu_X,\sigma^2)$ ו- $Y_1,...,Y_n$ מדגם מקרי מהתפלגות נורמלית $N(\mu_Y,\sigma^2)$. שני המדגמים בלתי תלויים.

רווח סמך להפרש התוחלות $\mu_X-\mu_Y$ ברמת ביטחון 98% הינו : $[2.45,8.15]$.

איזה מבין הטענות הבאות **נכונה**?

א. בבדיקת השערות : $H_0:\mu_X-\mu_Y=5$ לא נדחה את השערת האפס ברמת מובהקות של2% וייתכן $H_1:\mu_X-\mu_Y\neq 5$ שנדחה את השערת האפס ברמת מובהקות של 5%.

ב. בבדיקת השערות : $H_0:\mu_X-\mu_Y=0$ נדחה את השערת האפס ברמת מובהקות של 2% וייתכן $H_1:\mu_X-\mu_Y\neq 0$ שלא נדחה את השערת האפס ברמת מובהקות של 5%.

ג. בבדיקת השערות : $H_0:\mu_X-\mu_Y=0$ לא נדחה את השערת האפס ברמת מובהקות של 2% וייתכן $H_1:\mu_X-\mu_Y\neq 0$ שנבצע טעות מסוג שני.

ד. על סמך הנתונים האלו לא ניתן לחשב את הפרש הממוצעים של שני המדגמים.

שאלה 7

על מנת לבחון את הקשר בין גיל המכוניות לבין מחיר המכירה שלהן עבור מכוניות RENAULT FLUENCE, נלקח מדגם מקרי של 20 מכוניות RENAULT FLUENCE ועבור כל מכונית נרשם הגיל שלה בשנים ומחיר המכונית ביחידות של אלפי דולרים.

הניחו כי הותאם מודל רגרסיה ליניארית פשוטה עבור הקשר בין X ל- Y, כאשר X הינו גיל המכונית בשנים ו- Y מחיר המכונית ביחידות של אלפי דולרים.

על סמך נתוני המדגם נתון כי:

$$\bar{X} = 4.5$$

$$\bar{Y} = 20.35$$

$$S_{XX} = 52.99$$

$$S_{YY} = 576.84$$

בנוסף, נתון כי לפי משוות קו הרגרסיה מחיר המכירה של המכוניות יורד ב-3.042 אלפי דולרים כאשר גיל המכונית עולה בשנה.

איזה מבין הטענות הבאות **אינה** נכונה?

א. האומדן לשונות של הרגרסיה שווה ל: 4.8

ב. ברמת מובהקות 5% ניתן להסיק כי קיים קשר לינארי בין גיל המכונית לבין מחיר המכירה שלה.

ג. ה- PVALUE עבור בדיקת מובהקות הרגרסיה גדול מ- 0.005 אך קטן מ-0.05.

ד. על סמך קו הרגרסיה הניבוי למחיר המכירה של מכונית RENAULT FLUENCE שגילה 5 שנים הינו **בקירוב** 19 אלפי דולרים.

חלק שני - שאלות פתוחות. יש לענות על שתי השאלות בחלק זה.

שאלה 8 (27 נקודות)

סטטיסטיקאי עומד להכריע בין שתי ההשערות הבאות:

$$H_0 : \mu = 50$$
$$H_1 : \mu = 60$$

ידוע כי סטיית התקן של האוכלוסייה היא 20. הסטטיסטיקאי קובע לעצמו את כלל ההחלטה הבא: אם $\bar{x}$ במדגם יהיה גדול מ-54, נדחה את H_0, אך אם $\bar{x}$ יהיה קטן מ-54 או שווה לו, לא נדחה את H_0. דגמו באקראי 100 תצפיות.

א. מהו הסטטיסטי שיהווה אומד נקודתי מתאים לפרמטר הנבדק. כיצד הוא מפולג (סוג ההתפלגות והפרמטרים שלה). ציין האם ההתפלגות מדויקת או מקורבת.

ב. מהו סטטיסטי המבחן המתאים? כיצד הוא מפולג? ציין האם ההתפלגות מדויקת או מקורבת, ציין את סוג ההתפלגות ופרמטרים שלה.

ג. ציין את אזורי הדחייה ואי-הדחייה של השערת האפס במונחים של שברונים של התפלגות הדגימה המתאימה בר״מ של 2%.

ד. במדגם הנתון מה ההסתברות לטעות מסוג I ומה ההסתברות לטעות מסוג II?

ה. למה שווה עצמת המבחן? האם גודל המדגם הנתון מספיק על מנת להשיג עצמה של 99% או יותר?

ו. כיצד תשפיע הכפלת גודל המדגם על ההסתברות של כל אחת מהטעויות? הסבר בקצרה.

שאלה 9 (24 נקודות)

בוחרים באקראי שלושה קלפים מחבילת קלפים, עם החזרה, ורושמים את מספר הקלפים שמופיע בהם הציור "לב" (h).

לאחר 64 חזרות על ניסוי זה התקבלו התוצאות הבאות:

h	0	1	2	3
f(h)	21	31	12	0

כאשר f(h) מסמן את מספר הפעמים שהתקבלו h קלפים עם צורת לב (h מקבל את הערכים 0, 1, 2, 3).
בחבילת קלפים תקינה ישנם סך הכל 52 קלפים אשר מחולקים לארבעה סוגים, 13 קלפים מכל סוג: לב, תלתן, יהלום ועלה.
מעוניינים לבדוק את ההשערה שהקלפים אכן נדגמו באופן מקרי מחבילת קלפים תקינה.

א. רשום את מערכת ההשערות לבדיקת ההשערות.
ב. רשום מהו סטטיסטי המבחן אשר משמש לבדיקת ההשערות.
ג. כיצד מתפלג (בקירוב) סטטיסטי המבחן המשמש לבדיקת השערות?
ד. בדוק באמצעות סטטיסטי המבחן ברמת מובהקות 0.05 את ההשערה שהקלפים אכן נדגמו באופן מקרי מחבילת קלפים תקינה. מהי מסקנתך?
ה. חשב P-value. מהי מסקנתך?