הטכניון - מכון טכנולוגי לישראל

הפקולטה להנדסת תעשיה וניהול ע"ש ויליאם משה דוידסון

Technion - Israel Institute of Technology

The William Davidson Faculty of Industrial Engineering and Management

---

תאריך הבחינה: 05.03.14

שם המרצה: ד"ר אלה לוין

מבוא להסתברות וסטטיסטיקה – 094480

מבחן מועד ב' - סמסטר חורף תשע"ד

טור א'

משך הבחינה: שלוש שעות.

חומר מותר: שני דפי עזר A4 כתובים משני הצדדים, מחשבון כיס פשוט.
בנוסף מצורפים דפי התפלגויות מיוחדות, טבלאות התפלגויות דגימה וטבלת בדיקת השערות.

למבחן שני חלקים. **יש לענות על כל השאלות** בכל אחד מחלקי הבחינה:

א. החלק הראשון מכיל שאלות רב-ברירתיות (סגורות). **על חלק זה יש לענות רק בדף המיועד לכך המצורף למבחן**. אין לסמן יותר מתשובה אחת לכל שאלה. הציון יינתן על סמך הסימונים בדף התשובות בלבד! לא יתקבלו שום טענות על סימון שגוי בדף התשובות ומחברת הטיוטה לא תיבדק.

ב. החלק השני מכיל שתי שאלות פתוחות, עליהן יש לענות **במחברת המצורפת** ולא על גבי שאלון זה. בחלק זה עליכם לפרט ולהסביר את כל השלבים שביצעתם בדרך לפתרון. את הפתרון יש לכתוב בעט שחור או כחול בלבד. ניתן להשתמש בטיוטה שלא תיבדק.

בסוף המבחן יש להחזיר את שאלון הבחינה, את דף התשובות, את מחברת הפתרון ואת מחברות הטיוטה כולן.

ב ה צ ל ח ה !

חלק ראשון – יש לענות על כל השאלות בחלק זה. משקל כל שאלה: 6 נק'

שאלה 1:

בכד ישנם 40 רכיבים ממסופרים: 12 מהם בצבע כחול, 8 מהם בצבע ירוק, 5 מהם בצבע כתום ו- 15 מהם בצבע ורוד. בוחרים באקראי (וללא החזרה) מדגם של 8 רכיבים מהכד.
בהינתן כי המדגם שנבחר מכיל בדיוק 2 רכיבים ירוקים, ההסתברות שהמדגם יכיל לפחות רכיב אחד כחול או לפחות רכיב אחד כתום הינה:

א. 0.941
ב. 0.970
ג. 0.988
ד. 0.994

שאלה 2:

ידוע כי ביצועי תלמידים במבחן מסוים מתפלגים נורמלית. חוקר רצה לבדוק האם רמת העייפות של התלמידים משנה את תוצאות המבחן. הוא נתן למדגם מקרי של 17 תלמידים לבצע את המבחן ורשם את התוצאות. לאחר מכן החוקר עייף את התלמידים באמצעות תרגילי כושר מגוונים ולבסוף נתן לכל אחד מהם לבצע את המבחן בשנית.
במבחן על ההפרש בין תוחלות התוצאות של התלמידים לפני ואחרי תרגילי הכושר התקבל $P-value=0.01$.
למה שווה היה סטטיסטי המבחן?

א. 2.921
ב. 2.325
ג. 2.567
ד. לא ניתן לדעת מהנתונים

שתי השאלות הבאות מתייחסות לנתונים הבאים:

בשעשועון נושא פרסים מוצבות לפני המשתתף שתי קופסאות, קטנה וגדולה. בכל קופסה יש אחת משתי הודעות אפשריות: "פרס כספי" או "פשיטת רגל". בתוך הקופסה הקטנה ישנו "פרס כספי" בשווי 100 ₪ בהסתברות 0.75 והודעת "פשיטת רגל" אחרת. בתוך הקופסה הגדולה ישנו "פרס כספי" בשווי 300 ₪ בהסתברות 0.5 והודעת "פשיטת רגל" אחרת.

המשתתף צריך להחליט איזו משתי הקופסאות הוא מעוניין לפתוח ראשונה.

במידה והקופסה הראשונה שפתח מכילה הודעת "פשיטת רגל", המשחק נגמר והמשתתף הולך הביתה ללא כלום.

במידה ובקופסה הראשונה שפתח ישנו "פרס כספי", הוא זוכה בפרס ופותח גם את הקופסה השנייה (ומקבל מה שבתוכה).

הודעת "פשיטת רגל" בקופסה השנייה שנפתחה לא משפיעה על פרס שבו זכה מהקופסה הראשונה.

הניחו שהמשתתף מעדיף תוחלת רווח גבוהה ושונות רווח נמוכה.

שאלה 3:

א. תוחלת הרווח למשתתף אשר פותח ראשית את הקופסה הקטנה גבוהה יותר מתוחלת הרווח למשתתף שפותח ראשית את הקופסה הגדולה.

ב. שונות הרווח למשתתף אשר פותח ראשית את הקופסה הקטנה גבוהה יותר משונות הרווח למשתתף שפותח ראשית את הקופסה הגדולה.

ג. לא ניתן לדעת מהנתונים איזו קופסה עדיף למשתתף לפתוח.

ד. משיקולי תוחלת ושונות רווח, עדיף למשתתף לפתוח ראשית את הקופסה הקטנה.

שאלה 4:

בשעשועון המתואר שיחקו משתתפים רבים. 89 מתוכם פתחו ראשית את הקופסה הגדולה. עבור משתתפים אלו, ההסתברות שהפרס הכספי הממוצע למשתתף יעלה על 200 ₪ נמצאת באינטרוול:

א. $[0 , 0.1)$

ב. $[0.1 , 0.25)$

ג. $[0.25 , 0.5)$

ד. $[0.5 , 1)$

שאלה 5:

בכד ישנם 3 כדורים הממוספרים בספרות 1,2,3. מוציאים באקראי שני כדורים בזה אחר זה וללא החזרה.

נסמן: X_1 - הספרה על הכדור שהוצא בהוצאה הראשונה. X_2 - הספרה על הכדור שהוצא בהוצאה השנייה.

השונות המשותפת של X_1 ו- X_2 נמצאת באינטרוול:

א. $(-\infty,-2)$

ב. $[-2,-0.75)$

ג. $[-0.75,-0.25)$

ד. $[-0.25,\infty)$

שאלה 6:

על בסיס מדגם גדול יחסית של צרכנים קיבלו רווח סמך ברמת סמך 99% לפרופורציית הצרכנים שמעדיפים חנות א' על פני חנות ב': $(0.226,0.574)$.

להלן שתי טענות:

I. על-סמך המידע הנתון, פרופורציית הצרכנים במדגם שהעדיפו חנות א' על פני חנות ב' שווה ל-40%.

II. אם נקטין את רמת הסמך ל-95%, נקבל רווח סמך רחב יותר.

מה ניתן לומר על שתי הטענות?

א. שתי הטענות נכונות.

ב. טענה I נכונה וטענה II שגויה.

ג. טענה I שגויה וטענה II נכונה.

ד. שתי הטענות שגויות.

שאלה 7:

יהי $X_1,...,X_n$ מדגם מקרי מהתפלגות $N(0,\sigma^2)$. נניח $n>2$.

נגדיר שני אומדים לפרמטר σ^2 : $V_1 = X_2^2, \quad V_2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{n}$.

אזי:

א. V_1 ו- V_2 הינם אומדים חסרי הטיה ל- σ^2 .

ב. V_1 הינו אומד חסר הטיה ו- V_2 אומד מוטה ל- σ^2 .

ג. V_2 הינו אומד חסר הטיה ו- V_1 אומד מוטה ל- σ^2 .

ד. V_1 ו- V_2 הינם אומדים מוטים ל- σ^2 .

שאלה 8:

מפלגה חדשה מעוניינת לאמוד את פרופורציית התומכים בה באוכלוסייה, בעזרת רווח סמך ברמת סמך 99%.
מהו גודל המדגם המינימלי הדרוש כדי להבטיח שאורכו של הרווח לא יעלה על 0.1?

א. 67

ב. 166

ג. 664

ד. 955

שאלה 9

קו רגרסיה הותאם ל-62 נתונים . נתון :

$$S_{xx} = 36, \quad S_{yy} = 594$$

כאשר התאימו את הקו עם Y כמשתנה תלוי קיבלו סכום ריבועי שאריות השווה ל-540.

להלן ארבע טענות המתייחסות למודל שבו Y מוסבר ו-X מסביר :

I. אומדן לשונות של האומד לשיפוע שווה ל-9.

II. אחוז השונות המוסברת הוא כ-9%.

III. ניתן להסיק כי סימן מקדם המתאם הוא חיובי.

IV. ניתן לומר שקיים קשר לינארי מובהק בין X לבין Y ברמת מובהקות של 5%.

אזי :

א. כל ארבע הטענות נכונות.

ב. יש בדיוק שלוש טענות נכונות.

ג. יש בדיוק שתי טענות נכונות.

ד. יש בדיוק טענה נכונה אחת.

חלק שני - שאלות פתוחות. יש לענות על שתי השאלות שבחלק זה.

שאלה 10 (24 נקודות):

ליעקב אבינו יש 2 עדרים: עדר A ועדר B. בתחילת השנה:

עדר A מכיל בדיוק 8 כבשות (נקבות) לבנות (ואין נקבות נוספות בעדר).

עדר B מכיל בדיוק 10 כבשות (נקבות) חומות (ואין נקבות נוספות בעדר).

בסוף השנה כל כבשה ממליטה בדיוק כבשה אחת שצבעה יכול להיות חום או לבן.

ההסתברות שכבשה לבנה תמליט כבשה לבנה היא 0.9.

ההסתברות שכבשה חומה תמליט כבשה חומה היא 0.8.

אין תלות בין כבשים שונות.

א. מהי ההסתברות שבעדר A יוולדו בסוף השנה בדיוק 6 כבשים לבנות?

ב. מהי ההסתברות שבשנה מסויימת כל הכבשות שנולדו (בשני העדרים יחדיו) היו בעלות אותו הצבע? בסעיף זה ניתן לכתוב את התשובה בצורת ביטוי אלגברי.

ג. נגדיר את המ"מ הבאים:

X מ"מ המציין את מספר הכבשות הלבנות שנולדו בסוף השנה.

Y מ"מ המציין את מספר הכבשות החומות שנולדו בסוף השנה.

חשבו את השונות המשותפת ואת מקדם המתאם בין X ל- Y.

<u>רמז</u>: $X = X_1 + X_2$, $Y = Y_1 + Y_2$ כאשר:

X_1 מספר הכבשות הלבנות שנולדו בעדר A.

X_2 מספר הכבשות הלבנות שנולדו בעדר B.

Y_1 מספר הכבשות החומות שנולדו בעדר A.

Y_2 מספר הכבשות החומות שנולדו בעדר B.

ד. מהי המשמעות של הערך שהתקבל עבור מקדם המתאם בסעיף הקודם? הסבירו מדוע ערך זה הגיוני.

שאלה 11 (22 נקודות):

מנהל בית ספר רוצה להזמין שולחנות לכיתה חדשה. כדי לעמוד בתקן, אורך השולחנות צריך להיות 120 ס״מ. ממפעל מסוים נלקחו עשרה שולחנות לבדיקה מדגמית והתקבל כי האורך הממוצע שלהם היה 120.5 ס״מ וסטיית התקן היתה 1.07.

א. ציינו מהו הפרמטר הנבדק ומהו האומד הנקודתי. האם האומד חסר הטיה או מוטה? (הוכיחו).

ב. בדקו בר״מ של 10% אם המפעל עומד בתקן מבחינת תוחלת אורך השולחנות:

i. נסחו את מערכת ההשערות המתאימה.

ii. בדקו את ההשערות באמצעות סטטיסטי המבחן ובאמצעות P-value.

iii. ציינו את ההנחות הדרושות.

ג. נניח שלמנהל בית ספר למעשה לא אכפת אם השולחנים קצת קטנים מדי. יש לו בעיה חמורה של מקום ולמעשה הוא אינו מעוניין שהשולחנות יהיו גדולים מן המידה הדרושה. מהי המסקנה מן המדגם שהתקבל במקרה זה? נסחו מערכת השערות מתאימה ובדקו אותה בר״מ 10%.

התפלגויות בדידות מיוחדות

התפלגות	סימון	פונקצית הסתברות	פונקצית התפלגות מצטברת	פרמטרים	ערכים אפשריים	תוחלת	שונות	הערות
בינומית	$X \sim Bin(n,p)$	$\binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$	*	$n=1,2,3,...$ $0 \le p \le 1$	$0,1,2,\ldots,n$	np	$np(1-p)$	מספר "הצלחות" מתוך n ניסויי Ber(p) בלתי תלויים
גיאומטרית	$X \sim Geo(p)$	$p(1-p)^{x-1}$	$1-(1-p)^x$	$0 \le p \le 1$	$1,2,3,\ldots$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$	מספר ניסיונות עד ל"הצלחה" ראשונה (כולל) בסדרת ניסויי Ber(p) בלתי תלויים
בינומית שלילית	$X \sim NB(r,p)$	$\binom{x-1}{r-1} p^r (1-p)^{x-r}$	*	$r=1,2,3,...$ $0 \le p \le 1$	$r, r+1, r+2, \ldots$	$\frac{r}{p}$	$r\frac{(1-p)}{p^2}$	מספר ניסיונות עד ל"הצלחה" ה- r (כולל) בסדרת ניסויי Ber(p) בלתי תלויים
היפר-גיאומטרית	$X \sim HG(N,D,n)$	$\frac{\binom{D}{x}\binom{N-D}{n-x}}{\binom{N}{n}}$	*	$N=1,2,3,...$ $D=1,2,...,N$ $n=1,2,...,N$	$\max(0, n+D-N)$, $,...,\min(n,D)$	$n\frac{D}{N}$	$n\frac{D}{N}\left(1-\frac{D}{N}\right)\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$	מספר פריטים "מיוחדים" בתוך מדגם של n פריטים (ללא החזרה) שהוצאו מתוך אוכלוסיה בת N פריטים ומתוכם D מיוחדים
אחידה בדידה	$X \sim Unif[a,b]$	$\frac{1}{b-a+1}$	$\frac{x-a+1}{b-a+1}$	$a \in \mathbb{Z}$ $b=a+N-1$ $N \in \mathbb{N}$	$a, a+1, \ldots b-1, b$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)(b-a+2)}{12}$	מקבל ערכים שלמים בקטע [a,b] בהסתברות שווה
פואסונית	$X \sim Pois(\lambda)$	$\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$	*	$\lambda > 0$	$0,1,2,\ldots$	λ	λ	מספר אירועים ביחידת זמן. λ הינו פרמטר הקצב
מולטינומית	$(X_1, X_2, ..., X_k) \sim Multi(n, p_1, p_1, ..., p_k)$	$\frac{n!}{x_1!x_2!\cdots x_k!} p_1^{x_1} p_2^{x_2} \cdots p_k^{x_k}$	*	$n=1,2,3,...$ $0 \le p_i \le 1 \quad \forall i$ $\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$	$x_i = 0,1,...,n$ $\sum_{i=1}^{k} x_i = n$	$E(X_i) = np_i$	$Var(X_i) = np_i q_i$	$X_i \sim Bin(n, p_i)$ $Cov(X_i, X_j) = -np_i p_j$ $i \ne j$

התפלגויות רציפות מיוחדות

התפלגות	סימון	פונקצית צפיפות	פונקצית התפלגות מצטברת	פרמטרים	ערכים אפשריים	תוחלת	שונות	הערות
אחידה רציפה	$X \sim U(\alpha,\beta)$	$\frac{1}{\beta-\alpha}$	$\frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}$	$-\infty<\alpha,\beta<\infty$ $\beta>\alpha$	$\alpha \le x \le \beta$	$\frac{\alpha+\beta}{2}$	$\frac{(\beta-\alpha)^2}{12}$	בחירה אקראית של מספר ממשי בקטע $[\alpha,\beta]$
מעריכית (אקספו-ננציאלית)	$X \sim Exp(\lambda)$	$\lambda e^{-\lambda x}$	$1-e^{-\lambda x}$	$\lambda>0$	$x \ge 0$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	זמן בין 2 אירועים פואסוניים סמוכים. λ הינו קצב האירועים
נורמלית	$X \sim N(\mu,\sigma^2)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	$\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$	$-\infty<\mu<\infty$ $\sigma^2>0$	$-\infty<x<\infty$	μ	σ^2	$\frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$
גמא	$X \sim Gamma(\alpha,\lambda)$	$\frac{\lambda^\alpha x^{\alpha-1}e^{-x\lambda}}{\Gamma(\alpha)}$ $\Gamma(\alpha)=\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx$ $\Gamma(n)=(n-1)!$	מסובך	$\alpha,\lambda>0$	$x \ge 0$	$\frac{\alpha}{\lambda}$	$\frac{\alpha}{\lambda^2}$	זמן עד האירוע ה- α בזרם אירועים פואסוניים (רק כאשר α מספר שלם) $Gamma(1,\lambda)=Exp(\lambda)$
בטא	$X \sim Beta(\alpha,\beta)$	$\frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{B(\alpha,\beta)}$ $B(\alpha,\beta)=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$	מסובך	$\alpha,\beta>0$	$0 \le x \le 1$	$\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$	$\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$	$Beta(1,1)=U(0,1)$

מבחני השערות

מבחן השערות	H_0	סטטיסטי המבחן	H_1	אזור דחייה
על תוחלת μ כאשר σ ידועה	$\mu=\mu_0$	$Z=\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$	$\mu<\mu_0$ $\mu>\mu_0$ $\mu\neq\mu_0$	$Z<-z_{1-\alpha}$ $Z>z_{1-\alpha}$ $\begin{cases}Z<-z_{1-\alpha/2}\\ Z>z_{1-\alpha/2}\end{cases}$
על תוחלת μ כאשר σ לא ידועה	$\mu=\mu_0$	$T=\frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}};\quad \nu=n-1$ $S=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{X})^2}{n-1}}$	$\mu<\mu_0$ $\mu>\mu_0$ $\mu\neq\mu_0$	$T<-t_{1-\alpha}$ $T>t_{1-\alpha}$ $\begin{cases}T<-t_{1-\alpha/2}\\ T>t_{1-\alpha/2}\end{cases}$
על הפרש תוחלות $\mu_1-\mu_2$ כאשר המדגמים ב"ת, ו- σ_1,σ_2 ידועות	$\mu_1-\mu_2=d_0$	$Z=\frac{(\overline{X}_1-\overline{X}_2)-d_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$	$\mu_1-\mu_2<d_0$ $\mu_1-\mu_2>d_0$ $\mu_1-\mu_2\neq d_0$	$Z<-z_{1-\alpha}$ $Z>z_{1-\alpha}$ $\begin{cases}Z<-z_{1-\alpha/2}\\ Z>z_{1-\alpha/2}\end{cases}$
על הפרש תוחלות $\mu_1-\mu_2$ כאשר המדגמים ב"ת, ו- $\sigma_1=\sigma_2$ אך לא ידועות	$\mu_1-\mu_2=d_0$	$T=\frac{(\overline{X}_1-\overline{X}_2)-d_0}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}$ $\nu=n_1+n_2-2$ $S_p^2=\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$	$\mu_1-\mu_2<d_0$ $\mu_1-\mu_2>d_0$ $\mu_1-\mu_2\neq d_0$	$T<-t_{1-\alpha}$ $T>t_{1-\alpha}$ $\begin{cases}T<-t_{1-\alpha/2}\\ T>t_{1-\alpha/2}\end{cases}$
על הפרש תוחלות $\mu_1-\mu_2$ כאשר המדגמים מזווגים	$\mu_D=d_0$	$T=\frac{\overline{D}-d_0}{S_D/\sqrt{n}};\quad \nu=n-1$ $S_D=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(D_i-\overline{D})^2}{n-1}}$	$\mu_D<d_0$ $\mu_D>d_0$ $\mu_D\neq d_0$	$T<-t_{1-\alpha}$ $T>t_{1-\alpha}$ $\begin{cases}T<-t_{1-\alpha/2}\\ T>t_{1-\alpha/2}\end{cases}$

מבחני השערות (המשך)

מבחן השערות	H_0	סטטיסטי המבחן	H_1	אזור דחייה
על פרופורצייה p	$p = p_0$	$Z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$	$p < p_0$ $p > p_0$ $p \neq p_0$	$Z < -z_{1-\alpha}$ $Z > z_{1-\alpha}$ $\begin{cases} Z < -z_{1-\alpha/2} \\ Z > z_{1-\alpha/2} \end{cases}$
על הפרש פרופורציות $p_1 - p_2$	$p_1 - p_2 = 0$	$Z = \frac{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - 0}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$ כאשר $\hat{p}$ - פרופורציית בעלי התכונה בשני מדגמים ביחד	$p_1 - p_2 < 0$ $p_1 - p_2 > 0$ $p_1 - p_2 \neq 0$	$Z < -z_{1-\alpha}$ $Z > z_{1-\alpha}$ $\begin{cases} Z < -z_{1-\alpha/2} \\ Z > z_{1-\alpha/2} \end{cases}$
על שונות σ^2	$\sigma^2 = \sigma_0^2$	$X^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$ $\nu = n - 1$	$\sigma^2 < \sigma_0^2$ $\sigma^2 > \sigma_0^2$ $\sigma^2 \neq \sigma_0^2$	$X^2 < \chi^2_{\alpha}$ $X^2 > \chi^2_{1-\alpha}$ $\begin{cases} X^2 < \chi^2_{\alpha/2} \\ X^2 > \chi^2_{1-\alpha/2} \end{cases}$
על יחס שונויות $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$	$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$	$F = \frac{S_1^2}{S_2^2}$ $\nu_1 = n_1 - 1 ; \nu_2 = n_2 - 1$	$\sigma_1^2 < \sigma_2^2$ $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$ $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$	$F < F_{\alpha}^{(\nu_1,\nu_2)}$ $F > F_{1-\alpha}^{(\nu_1,\nu_2)}$ $\begin{cases} F < F_{\alpha/2}^{(\nu_1,\nu_2)} \\ F > F_{1-\alpha/2}^{(\nu_1,\nu_2)} \end{cases}$

Standard Normal Distribution

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

x	1.282	1.645	1.96	2.326	2.576	3.09	3.291	3.891	4.417
$\Phi(x)$	0.9	0.95	0.975	0.99	0.995	0.999	0.9995	0.99995	0.99995
$2[1-\Phi(x)]$	0.2	0.1	0.05	0.02	0.01	0.002	0.001	0.0001	0.00001

$P[Z>1.54] = 1 - \Phi(1.54) = 1 - 0.9382 = 0.0618$

$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$

T Distribution

	1-α												
v	0.55	0.6	0.65	0.7	0.75	0.8	0.85	0.9	0.95	0.975	0.99	0.995	0.9995
1	0.158	0.325	0.510	0.727	1.000	1.376	1.963	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	636.619
2	0.142	0.289	0.445	0.617	0.816	1.061	1.386	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	31.599
3	0.137	0.277	0.424	0.584	0.765	0.978	1.250	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	12.924
4	0.134	0.271	0.414	0.569	0.741	0.941	1.190	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	8.610
5	0.132	0.267	0.408	0.559	0.727	0.920	1.156	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	6.869
6	0.131	0.265	0.404	0.553	0.718	0.906	1.134	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.959
7	0.130	0.263	0.402	0.549	0.711	0.896	1.119	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	5.408
8	0.130	0.262	0.399	0.546	0.706	0.889	1.108	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	5.041
9	0.129	0.261	0.398	0.543	0.703	0.883	1.100	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.781
10	0.129	0.260	0.397	0.542	0.700	0.879	1.093	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.587
11	0.129	0.260	0.396	0.540	0.697	0.876	1.088	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.437
12	0.128	0.259	0.395	0.539	0.695	0.873	1.083	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	4.318
13	0.128	0.259	0.394	0.538	0.694	0.870	1.079	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	4.221
14	0.128	0.258	0.393	0.537	0.692	0.868	1.076	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	4.140
15	0.128	0.258	0.393	0.536	0.691	0.866	1.074	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	4.073
16	0.128	0.258	0.392	0.535	0.690	0.865	1.071	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	4.015
17	0.128	0.257	0.392	0.534	0.689	0.863	1.069	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.965
18	0.127	0.257	0.392	0.534	0.688	0.862	1.067	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.922
19	0.127	0.257	0.391	0.533	0.688	0.861	1.066	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.883
20	0.127	0.257	0.391	0.533	0.687	0.860	1.064	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.850
21	0.127	0.257	0.391	0.532	0.686	0.859	1.063	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.819
22	0.127	0.256	0.390	0.532	0.686	0.858	1.061	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.792
23	0.127	0.256	0.390	0.532	0.685	0.858	1.060	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.768
24	0.127	0.256	0.390	0.531	0.685	0.857	1.059	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.745
25	0.127	0.256	0.390	0.531	0.684	0.856	1.058	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.725
26	0.127	0.256	0.390	0.531	0.684	0.856	1.058	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.707
27	0.127	0.256	0.389	0.531	0.684	0.855	1.057	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.690
28	0.127	0.256	0.389	0.530	0.683	0.855	1.056	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.674
29	0.127	0.256	0.389	0.530	0.683	0.854	1.055	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.659
30	0.127	0.256	0.389	0.530	0.683	0.854	1.055	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.646
40	0.126	0.255	0.388	0.529	0.681	0.851	1.050	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.551
60	0.126	0.254	0.387	0.527	0.679	0.848	1.045	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.460
120	0.126	0.254	0.386	0.526	0.677	0.845	1.041	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617	3.373
∞	0.126	0.253	0.385	0.524	0.674	0.842	1.036	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.291

Chi-Square Distribution Percentiles

1-α

v	0.005	0.01	0.025	0.05	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9	0.95	0.975	0.99	0.995
1	0.00004	0.00016	0.00098	0.00393	0.01579	0.15	0.45	1.07	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88
2	0.010	0.020	0.0506	0.103	0.211	0.71	1.39	2.41	4.61	5.99	7.38	9.21	10.60
3	0.072	0.115	0.216	0.352	0.584	1.42	2.37	3.66	6.25	7.81	9.35	11.34	12.84
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.064	2.19	3.36	4.88	7.78	9.49	11.14	13.28	14.86
5	0.412	0.554	0.831	1.145	1.610	3.00	4.35	6.06	9.24	11.07	12.83	15.09	16.75
6	0.676	0.872	1.24	1.64	2.20	3.83	5.35	7.23	10.64	12.59	14.45	16.81	18.55
7	0.989	1.24	1.69	2.17	2.83	4.67	6.35	8.38	12.02	14.07	16.01	18.48	20.28
8	1.34	1.65	2.18	2.73	3.49	5.53	7.34	9.52	13.36	15.51	17.53	20.09	21.95
9	1.73	2.09	2.70	3.33	4.17	6.39	8.34	10.66	14.68	16.92	19.02	21.67	23.59
10	2.16	2.56	3.25	3.94	4.87	7.27	9.34	11.78	15.99	18.31	20.48	23.21	25.19
11	2.60	3.05	3.82	4.57	5.58	8.15	10.34	12.90	17.28	19.68	21.92	24.72	26.76
12	3.07	3.57	4.40	5.23	6.30	9.03	11.34	14.01	18.55	21.03	23.34	26.22	28.30
13	3.57	4.11	5.01	5.89	7.04	9.93	12.34	15.12	19.81	22.36	24.74	27.69	29.82
14	4.07	4.66	5.63	6.57	7.79	10.82	13.34	16.22	21.06	23.68	26.12	29.14	31.32
15	4.60	5.23	6.26	7.26	8.55	11.72	14.34	17.32	22.31	25.00	27.49	30.58	32.80
16	5.14	5.81	6.91	7.96	9.31	12.62	15.34	18.42	23.54	26.30	28.85	32.00	34.27
17	5.70	6.41	7.56	8.67	10.09	13.53	16.34	19.51	24.77	27.59	30.19	33.41	35.72
18	6.26	7.01	8.23	9.39	10.86	14.44	17.34	20.60	25.99	28.87	31.53	34.81	37.16
19	6.84	7.63	8.91	10.12	11.65	15.35	18.34	21.69	27.20	30.14	32.85	36.19	38.58
20	7.43	8.26	9.59	10.85	12.44	16.27	19.34	22.77	28.41	31.41	34.17	37.57	40.00
21	8.03	8.90	10.28	11.59	13.24	17.18	20.34	23.86	29.62	32.67	35.48	38.93	41.40
22	8.64	9.54	10.98	12.34	14.04	18.10	21.34	24.94	30.81	33.92	36.78	40.29	42.80
23	9.26	10.20	11.69	13.09	14.85	19.02	22.34	26.02	32.01	35.17	38.08	41.64	44.18
24	9.89	10.86	12.40	13.85	15.66	19.94	23.34	27.10	33.20	36.42	39.36	42.98	45.56
25	10.52	11.52	13.12	14.61	16.47	20.87	24.34	28.17	34.38	37.65	40.65	44.31	46.93
26	11.16	12.20	13.84	15.38	17.29	21.79	25.34	29.25	35.56	38.89	41.92	45.64	48.29
27	11.81	12.88	14.57	16.15	18.11	22.72	26.34	30.32	36.74	40.11	43.19	46.96	49.64
28	12.46	13.56	15.31	16.93	18.94	23.65	27.34	31.39	37.92	41.34	44.46	48.28	50.99
29	13.12	14.26	16.05	17.71	19.77	24.58	28.34	32.46	39.09	42.56	45.72	49.59	52.34
30	13.79	14.95	16.79	18.49	20.60	25.51	29.34	33.53	40.26	43.77	46.98	50.89	53.67
40	20.71	22.16	24.43	26.51	29.05	34.87	39.34	44.16	51.81	55.76	59.34	63.69	66.77
50	27.99	29.71	32.36	34.76	37.69	44.31	49.33	54.72	63.17	67.50	71.42	76.15	79.49
60	35.53	37.48	40.48	43.19	46.46	53.81	59.33	65.23	74.40	79.08	83.30	88.38	91.95
70	43.28	45.44	48.76	51.74	55.33	63.35	69.33	75.69	85.53	90.53	95.02	100.43	104.21
80	51.17	53.54	57.15	60.39	64.28	72.92	79.33	86.12	96.58	101.88	106.63	112.33	116.32
90	59.20	61.75	65.65	69.13	73.29	82.51	89.33	96.52	107.57	113.15	118.14	124.12	128.30
100	67.33	70.06	74.22	77.93	82.36	92.13	99.33	106.91	118.50	124.34	129.56	135.81	140.17

F distribution percentiles (0.95)

$1-\alpha=$ 0.95

דרגות חופש במונה

ד"ח במכנה	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	161.4	199.5	215.7	224.6	230.2	234.0	236.8	238.9	240.5	241.9	243.9	245.9	248.0	249.1	250.1	251	252	253	254
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38	19.40	19.41	19.43	19.45	19.45	19.46	19.47	19.48	19.49	19.50
3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.74	8.70	8.66	8.64	8.62	8.59	8.57	8.55	8.53
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.91	5.86	5.80	5.77	5.75	5.72	5.69	5.66	5.63
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.68	4.62	4.56	4.53	4.50	4.46	4.43	4.40	4.37
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	4.00	3.94	3.87	3.84	3.81	3.77	3.74	3.70	3.67
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.57	3.51	3.44	3.41	3.38	3.34	3.30	3.27	3.23
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.28	3.22	3.15	3.12	3.08	3.04	3.01	2.97	2.93
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.07	3.01	2.94	2.90	2.86	2.83	2.79	2.75	2.71
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.91	2.85	2.77	2.74	2.70	2.66	2.62	2.58	2.54
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85	2.79	2.72	2.65	2.61	2.57	2.53	2.49	2.45	2.40
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75	2.69	2.62	2.54	2.51	2.47	2.43	2.38	2.34	2.30
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67	2.60	2.53	2.46	2.42	2.38	2.34	2.30	2.25	2.21
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60	2.53	2.46	2.39	2.35	2.31	2.27	2.22	2.18	2.13
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	2.48	2.40	2.33	2.29	2.25	2.20	2.16	2.11	2.07
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.42	2.35	2.28	2.24	2.19	2.15	2.11	2.06	2.01
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49	2.45	2.38	2.31	2.23	2.19	2.15	2.10	2.06	2.01	1.96
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	2.34	2.27	2.19	2.15	2.11	2.06	2.02	1.97	1.92
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38	2.31	2.23	2.16	2.11	2.07	2.03	1.98	1.93	1.88
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35	2.28	2.20	2.12	2.08	2.04	1.99	1.95	1.90	1.84
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37	2.32	2.25	2.18	2.10	2.05	2.01	1.96	1.92	1.87	1.81
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34	2.30	2.23	2.15	2.07	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.78
23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37	2.32	2.27	2.20	2.13	2.05	2.01	1.96	1.91	1.86	1.81	1.76
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25	2.18	2.11	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.79	1.73
25	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28	2.24	2.16	2.09	2.01	1.96	1.92	1.87	1.82	1.77	1.71
26	4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.27	2.22	2.15	2.07	1.99	1.95	1.90	1.85	1.80	1.75	1.69
27	4.21	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.31	2.25	2.20	2.13	2.06	1.97	1.93	1.88	1.84	1.79	1.73	1.67
28	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24	2.19	2.12	2.04	1.96	1.91	1.87	1.82	1.77	1.71	1.65
29	4.18	3.33	2.93	2.70	2.55	2.43	2.35	2.28	2.22	2.18	2.10	2.03	1.94	1.90	1.85	1.81	1.75	1.70	1.64
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16	2.09	2.01	1.93	1.89	1.84	1.79	1.74	1.68	1.62
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.08	2.00	1.92	1.84	1.79	1.74	1.69	1.64	1.58	1.51
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99	1.92	1.84	1.75	1.70	1.65	1.59	1.53	1.47	1.39
120	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.18	2.09	2.02	1.96	1.91	1.83	1.75	1.66	1.61	1.55	1.50	1.43	1.35	1.25
∞	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88	1.83	1.75	1.67	1.57	1.52	1.46	1.39	1.32	1.22	1.01

F distribution percentiles (0.99)

$1-\alpha=$ 0.99

דרגות חופש במונה

ד"ח במכנה	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	4052.2	4999.5	5403.4	5624.6	5763.6	5859.0	5928.4	5981.1	6022.5	6055.8	6106.3	6157.3	6208.7	6234.6	6260.6	6287	6313	6339	6366
2	98.50	99.00	99.17	99.25	99.30	99.33	99.36	99.37	99.39	99.40	99.42	99.43	99.45	99.46	99.47	99.47	99.48	99.49	99.50
3	34.12	30.82	29.46	28.71	28.24	27.91	27.67	27.49	27.35	27.23	27.05	26.87	26.69	26.60	26.50	26.41	26.32	26.22	26.13
4	21.20	18.00	16.69	15.98	15.52	15.21	14.98	14.80	14.66	14.55	14.37	14.20	14.02	13.93	13.84	13.75	13.65	13.56	13.46
5	16.26	13.27	12.06	11.39	10.97	10.67	10.46	10.29	10.16	10.05	9.89	9.72	9.55	9.47	9.38	9.29	9.20	9.11	9.02
6	13.75	10.92	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.98	7.87	7.72	7.56	7.40	7.31	7.23	7.14	7.06	6.97	6.88
7	12.25	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.72	6.62	6.47	6.31	6.16	6.07	5.99	5.91	5.82	5.74	5.65
8	11.26	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.91	5.81	5.67	5.52	5.36	5.28	5.20	5.12	5.03	4.95	4.86
9	10.56	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.35	5.26	5.11	4.96	4.81	4.73	4.65	4.57	4.48	4.40	4.31
10	10.04	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.20	5.06	4.94	4.85	4.71	4.56	4.41	4.33	4.25	4.17	4.08	4.00	3.91
11	9.65	7.21	6.22	5.67	5.32	5.07	4.89	4.74	4.63	4.54	4.40	4.25	4.10	4.02	3.94	3.86	3.78	3.69	3.60
12	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.50	4.39	4.30	4.16	4.01	3.86	3.78	3.70	3.62	3.54	3.45	3.36
13	9.07	6.70	5.74	5.21	4.86	4.62	4.44	4.30	4.19	4.10	3.96	3.82	3.66	3.59	3.51	3.43	3.34	3.25	3.17
14	8.86	6.51	5.56	5.04	4.69	4.46	4.28	4.14	4.03	3.94	3.80	3.66	3.51	3.43	3.35	3.27	3.18	3.09	3.00
15	8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.00	3.89	3.80	3.67	3.52	3.37	3.29	3.21	3.13	3.05	2.96	2.87
16	8.53	6.23	5.29	4.77	4.44	4.20	4.03	3.89	3.78	3.69	3.55	3.41	3.26	3.18	3.10	3.02	2.93	2.84	2.75
17	8.40	6.11	5.18	4.67	4.34	4.10	3.93	3.79	3.68	3.59	3.46	3.31	3.16	3.08	3.00	2.92	2.83	2.75	2.65
18	8.29	6.01	5.09	4.58	4.25	4.01	3.84	3.71	3.60	3.51	3.37	3.23	3.08	3.00	2.92	2.84	2.75	2.66	2.57
19	8.18	5.93	5.01	4.50	4.17	3.94	3.77	3.63	3.52	3.43	3.30	3.15	3.00	2.92	2.84	2.76	2.67	2.58	2.49
20	8.10	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.70	3.56	3.46	3.37	3.23	3.09	2.94	2.86	2.78	2.69	2.61	2.52	2.42
21	8.02	5.78	4.87	4.37	4.04	3.81	3.64	3.51	3.40	3.31	3.17	3.03	2.88	2.80	2.72	2.64	2.55	2.46	2.36
22	7.95	5.72	4.82	4.31	3.99	3.76	3.59	3.45	3.35	3.26	3.12	2.98	2.83	2.75	2.67	2.58	2.50	2.40	2.31
23	7.88	5.66	4.76	4.26	3.94	3.71	3.54	3.41	3.30	3.21	3.07	2.93	2.78	2.70	2.62	2.54	2.45	2.35	2.26
24	7.82	5.61	4.72	4.22	3.90	3.67	3.50	3.36	3.26	3.17	3.03	2.89	2.74	2.66	2.58	2.49	2.40	2.31	2.21
25	7.77	5.57	4.68	4.18	3.85	3.63	3.46	3.32	3.22	3.13	2.99	2.85	2.70	2.62	2.54	2.45	2.36	2.27	2.17
26	7.72	5.53	4.64	4.14	3.82	3.59	3.42	3.29	3.18	3.09	2.96	2.81	2.66	2.58	2.50	2.42	2.33	2.23	2.13
27	7.68	5.49	4.60	4.11	3.78	3.56	3.39	3.26	3.15	3.06	2.93	2.78	2.63	2.55	2.47	2.38	2.29	2.20	2.10
28	7.64	5.45	4.57	4.07	3.75	3.53	3.36	3.23	3.12	3.03	2.90	2.75	2.60	2.52	2.44	2.35	2.26	2.17	2.06
29	7.60	5.42	4.54	4.04	3.73	3.50	3.33	3.20	3.09	3.00	2.87	2.73	2.57	2.49	2.41	2.33	2.23	2.14	2.03
30	7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17	3.07	2.98	2.84	2.70	2.55	2.47	2.39	2.30	2.21	2.11	2.01
40	7.31	5.18	4.31	3.83	3.51	3.29	3.12	2.99	2.89	2.80	2.66	2.52	2.37	2.29	2.20	2.11	2.02	1.92	1.80
60	7.08	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.95	2.82	2.72	2.63	2.50	2.35	2.20	2.12	2.03	1.94	1.84	1.73	1.60
120	6.85	4.79	3.95	3.48	3.17	2.96	2.79	2.66	2.56	2.47	2.34	2.19	2.03	1.95	1.86	1.76	1.66	1.53	1.38
∞	6.64	4.61	3.78	3.32	3.02	2.80	2.64	2.51	2.41	2.32	2.18	2.04	1.88	1.79	1.70	1.59	1.47	1.32	1.01