ทฤษฎีบท 2.1 ถ้า $1 \le x, y, z \le 2$ จะได้ว่าสมการ $2^x + 3^y + 4^z = M^2$ จะมีผลเฉลยก็ต่อเมื่อ $x = y = z$ และไม่มีผลเฉลยสำหรับกรณีอื่น ๆ

พิสูจน์ เมื่อ $1 \le x, y, z \le 2$ จะแบ่งกรณีของ $2^x + 3^y + 4^z = M^2$ เป็น 8 กรณีตามข้อความด้านล่าง

$2^1 + 3^1 + 4^1 = 3^2 = M^2$

2.1.1) $2^1 + 3^1 + 4^1 = 3^2 = M^2$

2.1.2) $2^1 + 3^1 + 4^2 = 21 \ne M^2$

2.1.3) $2^1 + 3^2 + 4^1 = 15 \ne M^2$

2.1.4) $2^2 + 3^1 + 4^1 = 11 \ne M^2$

2.1.5) $2^1 + 3^2 + 4^2 = 27 \ne M^2$

2.1.6) $2^2 + 3^1 + 4^2 = 23 \ne M^2$

2.1.7) $2^2 + 3^2 + 4^1 = 17 \ne M^2$

2.1.8) $2^2 + 3^2 + 4^2 = 29 \ne M^2$

จากกรณีที่ 2.1.1) เมื่อ $x = y = z = 1$ จะให้ผลเฉลยโดยที่ $M = 3$ ในขณะกรณีที่ 2.1.1)-2.1.8) ไม่มีผลเฉลยที่สอดคล้องกับสมการ

3.ผลเฉลยทั้งหมดของสมการ $p^x + (p+1)^y + (p+2)^z = M^2$ เมื่อ $p = 4N+1,\ 1 \le x, y, z \le 2$

โดยจะพิจารณาสมการ $p^x + (p+1)^y + (p+2)^z = M^2$ สำหรับทุกจำนวนเฉพาะ $p = 4N+1$ เมื่อ $1 \le x, y, z \le 2$

ทฤษฎีบท 3.1 ให้ $1 \le x, y, z \le 2$ ถ้า $p = 4N+1$ แล้วจะสมการ $p^x + (p+1)^y + (p+2)^z = M^2$ จะไม่มีผลเฉลย

พิสูจน์ ให้ $1 \le x, y, z \le 2$ และ $p = 4N+1$เป็นจำนวนเฉพาะ จะได้ว่าสามารถแบ่งได้เป็น 8 กรณี

3.1.1. $(4N+1)^1 + (4N+2)^1 + (4N+3)^1 = M^2$

3.1.2. $(4N+1)^1 + (4N+2)^1 + (4N+3)^2 = M^2$

3.1.3. $(4N+1)^1 + (4N+2)^2 + (4N+3)^1 = M^2$

3.1.4. $(4N+1)^2 + (4N+2)^1 + (4N+3)^1 = M^2$

3.1.5. $(4N+1)^1+(4N+2)^2+(4N+3)^2=M^2$

3.1.6. $(4N+1)^2+(4N+2)^1+(4N+3)^2=M^2$

3.1.7. $(4N+1)^2+(4N+2)^2+(4N+3)^1=M^2$

3.1.8. $(4N+1)^2+(4N+2)^2+(4N+3)^2=M^2$

โดยจะพิจารณาแต่ละกรณีแยกกันดังนี้

3.1.1. $(4N+1)^1+(4N+2)^1+(4N+3)^1=M^2$

จากสมการจะได้ว่า

$$(4N+1)+(4N+2)+(4N+3) = 12N+6 = 6(2N+1)$$

จะเห็นว่า 2 คือจำนวนที่เป็นตัวประกอบของ 6 ซึ่งมีเลขชี้กำลังเท่ากับ 1

เพราะ $(2N+1)$ เป็นจำนวนคี่

จะได้ว่า $6(2N+1)$ ไม่ใช่สมการกำลังสอง

เพราะฉะนั้น $(4N+1)^1+(4N+2)^1+(4N+3)^1=M^2$ ไม่มีผลเฉลย

3.1.2. $(4N+1)^1+(4N+2)^1+(4N+3)^2=M^2$

3.1.3. $(4N+1)^1+(4N+2)^2+(4N+3)^1=M^2$

3.1.4. $(4N+1)^2+(4N+2)^1+(4N+3)^1=M^2$

3.1.5. $(4N+1)^1+(4N+2)^2+(4N+3)^2=M^2$

3.1.6. $(4N+1)^2+(4N+2)^1+(4N+3)^2=M^2$

3.1.7. $(4N+1)^2+(4N+2)^2+(4N+3)^1=M^2$

จากสมการจะได้ว่า

$$(16N^2+8N+1)+(16N^2+16N+4)+(4N+3)=4(8N^2+7N+2)$$

เราจะสมมติว่ามีจำนวน N ที่ทำให้ $4(8N^2+7N+2)=M^2$ เกิดข้อขัดแย้ง เมื่อ M^2 เป็นจำนวนคู่

จะได้ว่า $M=2T$ เมื่อ T เป็นจำนวนเต็ม และ $M^2=4T^2$

จากพจน์พหุนามทางด้านขวามือของสมการจะได้ว่าผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์

$p^x+(p+1)^y+(y+2)^z=M^2$ เมื่อ p เป็นจำนวนเฉพาะที่มากกว่าเท่ากับ 2 และ $1\le x,y,z\le 2$

$$8N^2+7N+2=T^2$$

โดนจะแบ่งกรณีเป็น 2 กรณี คือในกรณีที่ N เป็นจำนวนคู่ และกรณีที่ N เป็นจำนวนคู่

สมมติ N เป็นจำนวนคู่ จะได้ว่า T^2 เป็นจำนวนคู่

จะเห็นว่าจำนวนคู่ $N = 2, 4, 6, 8, 10, \ldots$!!............!!จะทำให้ได้ค่าหลักหน่วยของ T^2 เท่ากับ $8, 8, 2, 0, 2$

เมื่อรากที่ 2 ที่เป็นจำนวนคู่ของ T^2 จะไม่สามารถลงท้ายหลักหน่วยเป็น 2 และ 8

เพราะฉะนั้นเราจะพิจารณาเฉพาะกรณีที่ N ลงท้ายหลักหน่วยด้วย 8 นิยามโดย $N = 10K + 8$ เมื่อ $K \leq 0$

จะได้ว่า

$$8(10K+8)^2 + 7(10K+8) + 2 = 5(160K^2 + 270K + 114) = T^2$$

จากสมการข้างบนจะพบว่า 5 เป็นมีเล็กชี้กำลังเป็นจำนวนคี่ และ 5 หาร $(160K^2 + 270K + 114)$ ไม่ลงตัว จะได้ว่า $5(160K^2 + 270K + 114) \neq T^2$ ซึ่งเกิดข้อขัดแย้ง

สมมติ N เป็นจำนวนคู่ จะได้ว่า T^2 เป็นจำนวนคี่

จะเห็นว่าจำนวนคู่ $N = 1, 3, 5, 7, 9, \ldots$!!............!!จะทำให้ได้ค่าหลักหน่วยของ T^2 เท่ากับ $7, 5, 7, 3, 3$

เมื่อรากที่ 2 ที่เป็นจำนวนคู่ของ T^2 จะไม่สามารถลงท้ายหลักหน่วยเป็น 7 และ 3

เพราะฉะนั้นเราจะพิจารณาเฉพาะกรณีที่ N ลงท้ายหลักหน่วยด้วย 3 นิยามโดย $N = 10K + 3$ เมื่อ $K \leq 0$

จะได้ว่า

$$8(10K+3)^2 + 7(10K+3) + 2 = 5(160K^2 + 110K + 19) = T^2$$

จากสมการข้างบนจะพบว่า 5 เป็นมีเล็กชี้กำลังเป็นจำนวนคี่ และ 5 หาร $(160K^2 + 110K + 19)$ ไม่ลงตัว จะได้ว่า $5(160K^2 + 110K + 19) \neq T^2$ ซึ่งเกิดข้อขัดแย้ง

3.1.8. $(4N+1)^2 + (4N+2)^2 + (4N+3)^2 = M^2$

จากพจน์ทางด้านซ้ายของสมการจะได้ว่า

$$(16N^2 + 8N + 1) + (16N^2 + 16N + 4) + (16N^2 + 24N + 9) = 2(24N^2 + 24N + 7)$$

จะเห็นว่า 2 เป็นจำนวนเฉพาะที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนคี่ และ $(24N^2 + 24N + 7)$ เป็นจำนวนคี่ จะได้ว่า $2(24N^2 + 24N + 7)$ ไม่ใช่จำนวนกำลังสอง

$\therefore$ จากการพิสูจน์ 8 กรณีข้างต้นจะสรุปได้ว่าสมการ $(4N+1)^2 + (4N+2)^2 + (4N+3)^2 = M^2$ ไม่มีผลเฉลย

4.ผลเฉลยของสมการ $p^x + (p+1)^y + (p+2)^z = M^2$ เมื่อ $p = 4N+3,\ 1 \leq x, y, z \leq 2$

ทฤษฎีบท 4.1

4.1.1. ...

4.1.2. $(4N+1)^1 + (4N+2)^1 + (4N+3)^2 = M^2$

4.1.3. $(4N+1)^1 + (4N+2)^2 + (4N+3)^1 = M^2$

4.1.4. ...

4.1.5. $(4N+1)^1 + (4N+2)^1 + (4N+3)^2 = M^2$

4.1.6. $(4N+1)^1 + (4N+2)^2 + (4N+3)^1 = M^2$

4.1.7.