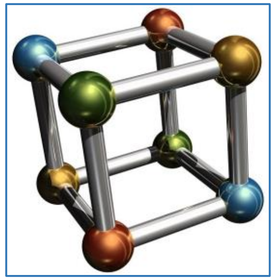
다항식과 보간법


매트랩 이해 및 실습

최병조
임베디드시스템공학과

강의 주제

• Matlab의 역사와 간단한 사용법	• **다항식, 커브 피팅, 인터폴레이션**
• 배열, 행렬 만들기와 소리 다루기	• 3차원 그래프 그리기
• 행렬과 그림 다루기	• GUIDE로 GUI 만들기
• 라이브스크립트, 웹 게시, 엑셀 연동	• 애니메이션 GUI
• 2차원 그래프 그리기 기초	• 앱 디자이너로 GUI 만들기
• 다양한 2차원 그래프 그리기	• GUI 프로젝트 발표
• 함수 만들기	• MuPAD로 수학 문제 풀기
• 중간고사	• 기말고사

You will be able to

- Represent polynomials as arrays,
- Manipulate polynomials,
- Find the best fit of the given data using least square method, and
- Apply interpolation schemes to find the in-between values.

- All the scripts are available at
  - https://goo.gl/FGUkX3

인천대학교
INCHEON NATIONAL UNIVERSITY

다항식 (Polynomials)

- Functions of the form:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

  - n is the degree, or the order of the polynomial.

- Examples

$$f(x) = 5x^5 + 6x^2 + 4x + 2$$ polynomial of degree 5

$$f(x) = 2x^2 - 4x + 20$$ polynomial of degree 2

$$f(x) = 12 - 4x$$ polynomial of degree 1

다항식 표현하기

- MATLAB represents a polynomial as a vector of coefficients of the x with the highest power first.

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

$$p = \begin{bmatrix} a_n & a_{n-1} & \ldots a_1 & a_0 \end{bmatrix}$$

$$f(x) = 5x^5 + 6x^2 + 4x + 2$$ ⇨ **p = [5 0 0 6 4 2];**

$$f(x) = 2x^2 - 4x + 20$$ ⇨ **d = [2 -4 20];**

$$f(x) = 12 - 4x$$ ⇨ **p = [-4 12];**

다항식의 값

- Value of a polynomial *p* at a value of *x*

```
y = polyval(p, x);
```

- Examples

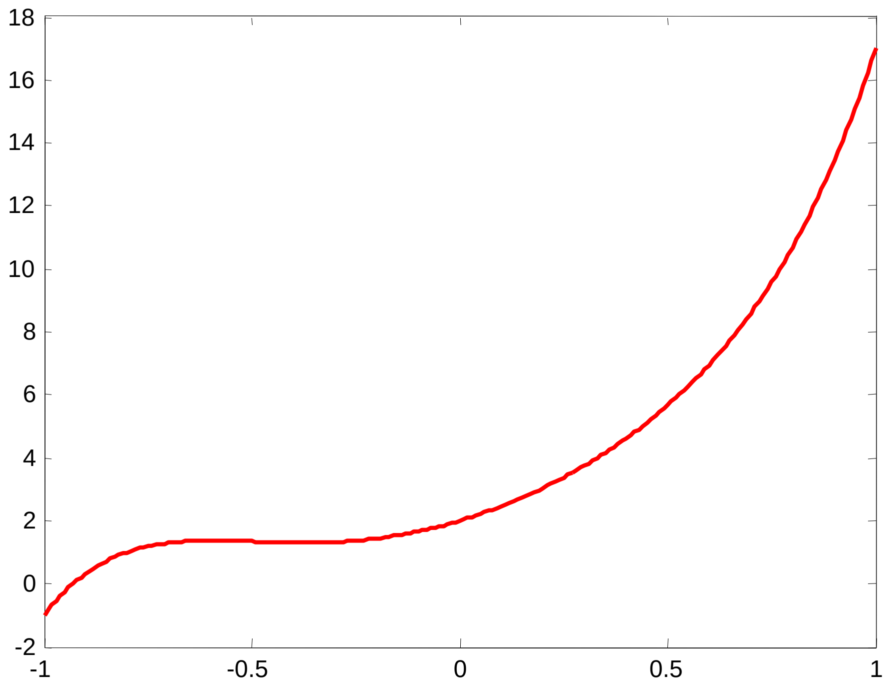
m09_polyval.m

$$f(x) = 5x^5 + 6x^2 + 4x + 2$$

```
p = [ 5 0 0 6 4 2];
x = 0;
y = polyval(p,x)

x = [0 1];
y = polyval(p,x)

x = -1:0.01:1;
figure, plot(x, polyval(p,x));
```



다항식의 근

- 근(Roots): a set of values where the polynomial has the value of zero.

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$
$$= a_n (x - r_n)(x - r_{n-1}) \ldots (x - r_1)$$

$$p = [a_n \quad a_{n-1} \quad \ldots a_1 \quad a_0]$$

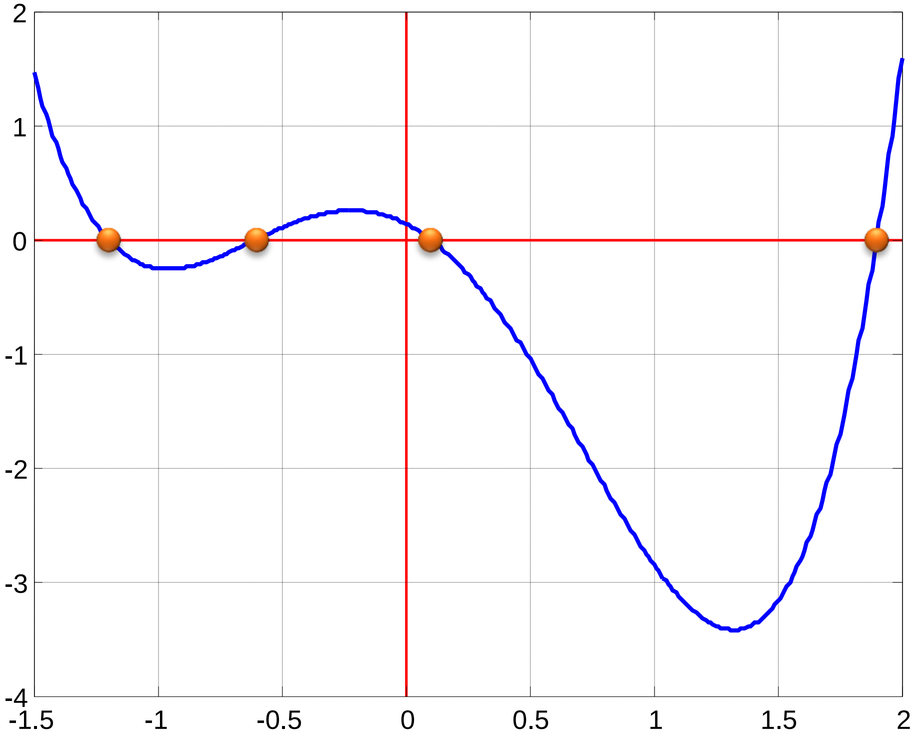
$$r = \mathrm{roots}(p);$$

$$p = \mathrm{poly}(r);$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} r_n \\ r_{n-1} \\ \vdots \\ r_2 \\ r_1 \end{bmatrix}$$

다항식 곡선과 근 나타내기

- $f(x) = (x+1.2)(x+0.6)(x-0.1)(x-1.9)$



- Step 1: 근 알아내기
- Step 2: 다항식 계수 표현하기 $p = \mathrm{poly}(r);$
- Step 3: 곡선의 x-좌표 나타내기
- Step 4: 곡선의 y-좌표 나타내기
- Step 5: 그래프로 그리기

`m09_poly.m`

예제 1: 다항식과 근

- Plot the following polynomial for the range of x=-2.1~2.1 together with its real roots. $f(x) = x^5 - 5x^3 + 4x$

m09_roots.m

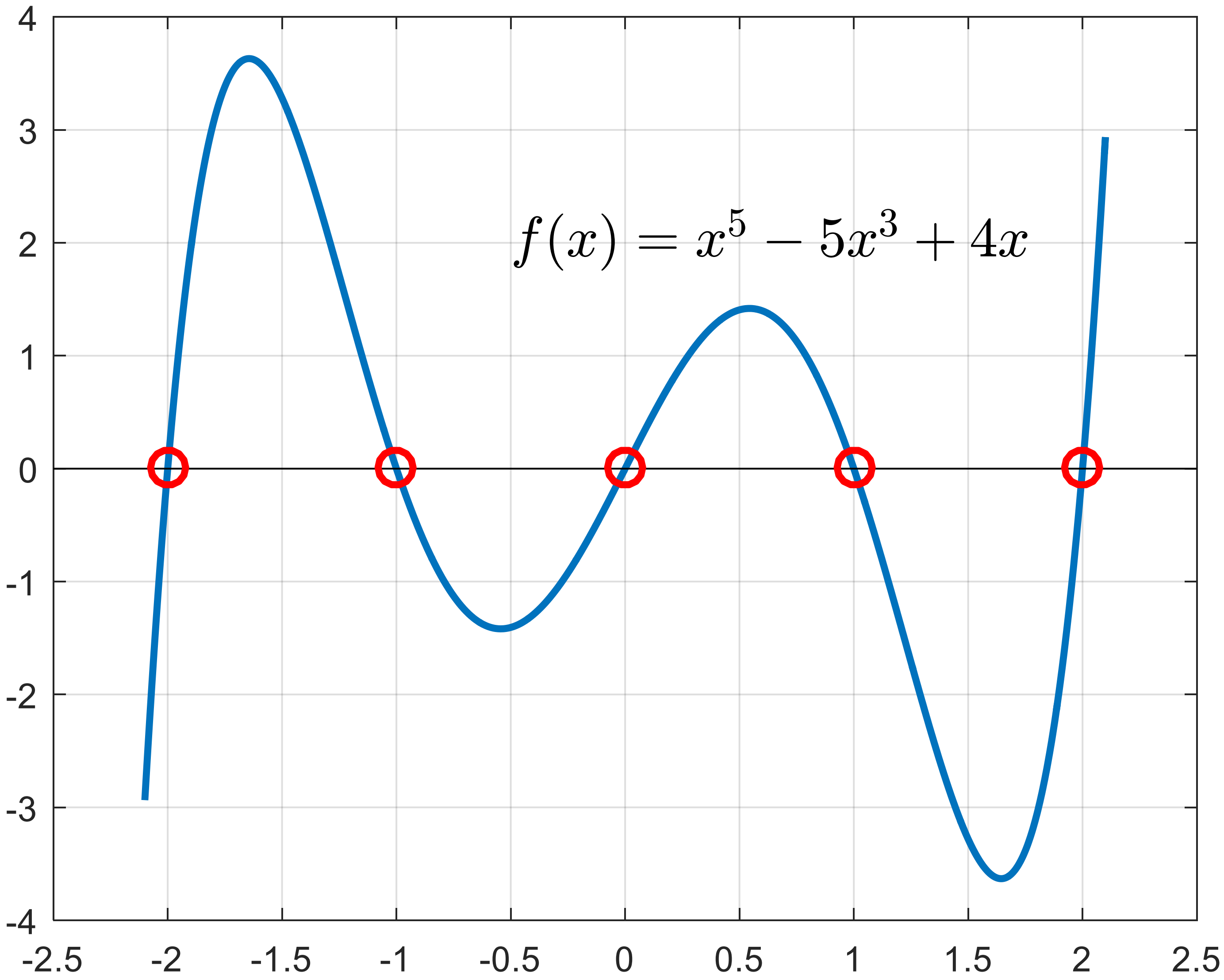
```
p = [1  0  -5  0  4  0];
x = -2.1:0.01:2.1;
% Plot the polynomial
figure(1), plot(x, polyval(p, x), 'LineWidth',2);
hold on; plot([-2.5 2.5],  [0 0]);

% Find its roots and plot them using markers.
r = roots(p); ry = zeros(size(r));
h = plot(r,ry,'ro', 'MarkerSize', 10, 'LineWidth', 2);

% Display the polynomial in mathematical terms.
text( -0.5, 2, '$f(x) = - 5 x^3 + 4x$', ...
    'Interpreter', 'latex', 'FontSize', 16);
```

예제 1: 다항식과 근

- 실행 결과
  - 근: $0, \pm 1, \pm 2$
  - 4개의 지역적 최대 최소



다항식의 곱

- conv: gives the product of two polynomials.

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

$$g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0$$

$$p = [a_n \quad a_{n-1} \quad \ldots a_1 \quad a_0]$$

$$q = [b_m \quad b_{m-1} \quad \ldots b_1 \quad b_0]$$

$$r = \mathrm{conv}(p, q); \quad \Rightarrow \quad r(x) = f(x) g(x)$$

더하기, 곱하기, 나누기

- Addition: sum of two equal length vectors

```
p1 = [1   0   -5   0   4   0];
p2 = [0   0    0   1   2   0];
pa = p1 + p2
```

$p_1(x) = x^5 - 5x^3 + 4x$

$p_2(x) = x^2 + 2x$

`m09_arithmetic.m`

- Multiplication: convolution of two vectors

```
pm = conv(p1, p2)
```

$p_m(x) = p_1(x) \times p_2(x)$

- Division: deconvolution of two vectors

```
[q r] = deconv(p1, p2)
```

$p_1(x) = p_2(x) \times q(x) + r(x)$

다항식의 미분 1/2

- Derivative of a single polynomial

```
p1  = [1  0  -5  0  4  0];
p1d = polyder(p1)
```

$$p_1(x) = x^5 - 5x^3 + 4x$$

$$p_{1d}(x) = \frac{dp_1(x)}{dx}$$

m09_polyder.m

- Derivative of a product of two polynomials

```
p2 = [1  2  0];
pd = polyder(p1, p2)
```

$$p_2(x) = x^2 + 2x$$

$$p_d(x) = \frac{d}{dx}[p_1(x) \times p_2(x)]$$

인천대학교 INCHEON NATIONAL UNIVERSITY

다항식의 미분 2/2

- Derivative of a quotient of two polynomials

```
[q d ] = polyder(p, v)
```

$$\frac{q(x)}{d(x)} = \frac{d}{dx}\left[\frac{p(x)}{v(x)}\right]$$

m09_polyder.m

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{p}{v}\right) = \frac{p'v - pv'}{v^2}$$

- Example

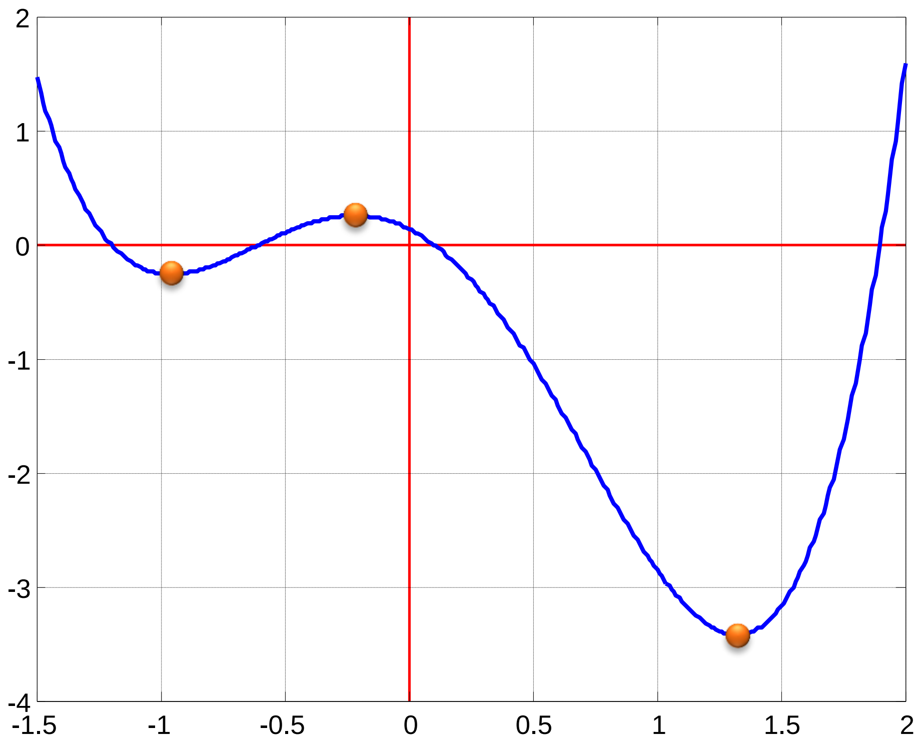
$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^4 - 3x^2 - 1}{x+4}\right) \Rightarrow \begin{cases} p(x) = x^4 - 3x^2 - 1 \\ v(x) = x+4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p = [\ 1\ \ 0\ \ \text{-}3\ \ 0\ \ \text{-}1] \\ v = [1\ \ 4] \end{cases}$$

$$\frac{(4x^3 - 6x)(x+4) - (x^4 - 3x^2 - 1)}{(x+4)^2} = \frac{3x^4 + 16x^3 - 3x^2 - 24x + 1}{x^2 + 8x + 16} \Rightarrow \begin{cases} q = [\ 3\ \ 16\ \ \text{-}3\ \ \text{-}24\ \ 1] \\ d = [1\ \ 8\ \ 16] \end{cases}$$

다항식과 최대 최소 나타내기

- $f(x) = (x+1.2)(x+0.6)(x-0.1)(x-1.9)$

  http://atta.inu.ac.kr/class/matlab/2015/m09/m09_poly_minimax.html



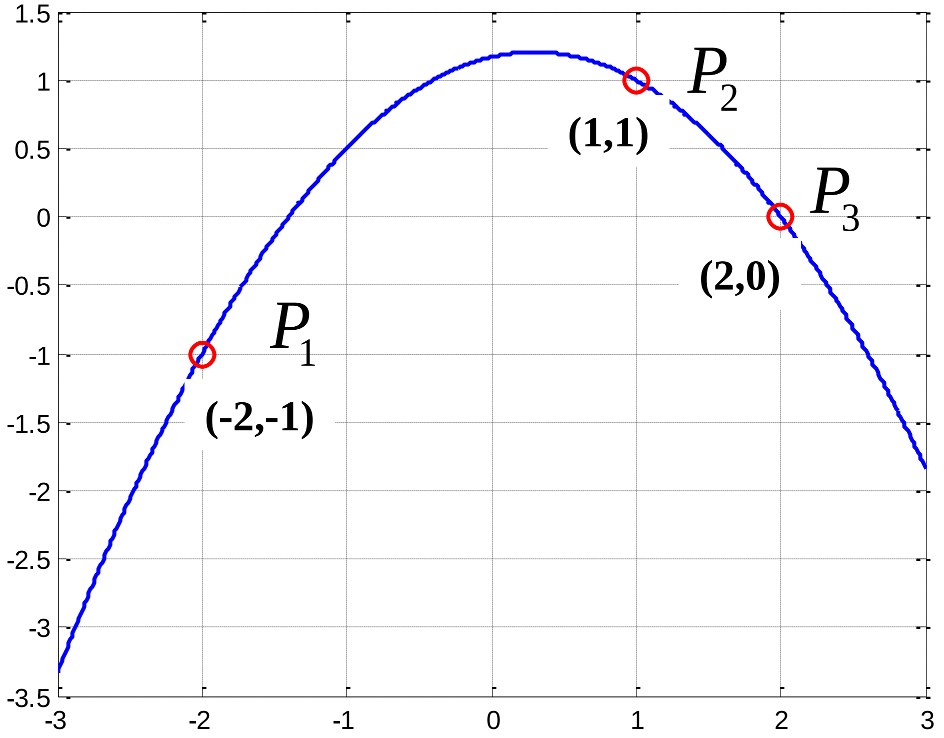
- Step 1: 다항식 미분하기
- Step 2: 미분식의 근 구하기
- Step 3: 그 근 값에서 다항식의 값 구하기
- Step 4: 곡선과 함께 최대 최소 나타내기

`m09_poly_minimax.m`

예제 2: 점을 지나는 다항식

- Find a polynomial passing through the red points.

  http://atta.inu.ac.kr/class/matlab/2015/m09/m09_poly_3points.html



$$y = ax^2 + bx + c$$

- Substitute the points to the polynomial and get the unknown coefficients.

예제 2 - 답안

- The matrix equation after the substitution.

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

m09_poly_3points.m

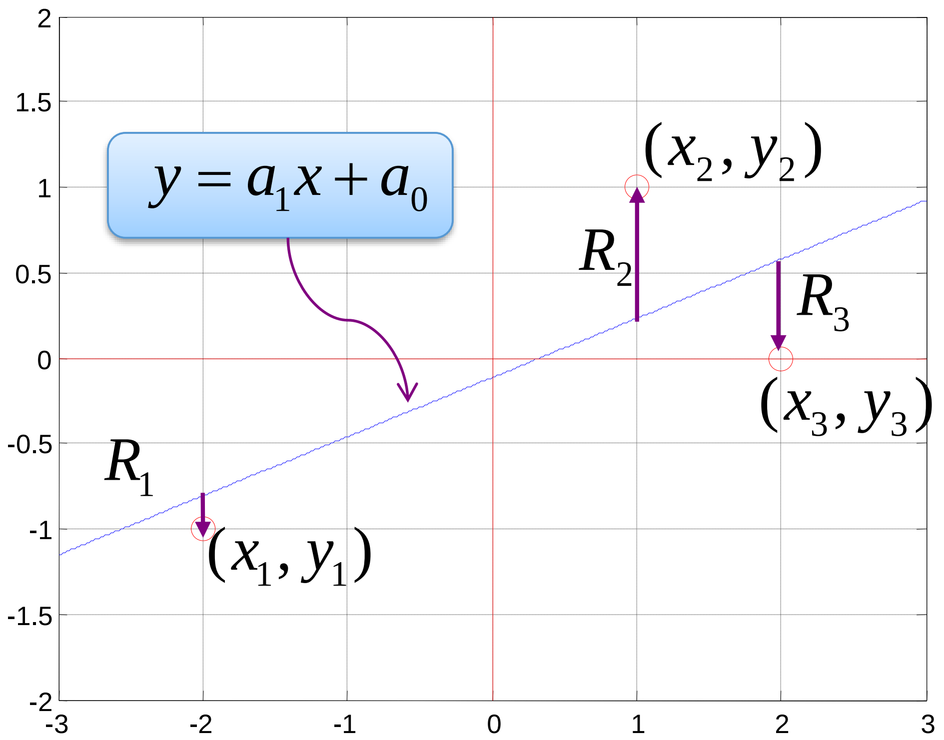
```
px = [-2 1 2];
py = [-1 1 0];
A  = [4 -2 1; 1 1 1; 4 2 1];
c  = inv(A) * py';
x  = -3:0.01:3;
y  = polyval(c,x);
figure(1);
h = plot(x,y,'b-',px,py,'ro','LineWidth',2);
grid;
set(h(2),'MarkerSize',10);
```

최소 자승법 (Least Square Method)

- Find a_1 and a_0 *s.t.* square errors become min.

$$R = R_1^2 + R_2^2 + R_3^2$$

$$= \left(a_1 x_1 + a_0 - y_1\right)^2 + \left(a_1 x_2 + a_0 - y_2\right)^2 + \left(a_1 x_3 + a_0 - y_3\right)^2$$



Solution

$$\frac{\partial R}{\partial a_1} = 0 \qquad \frac{\partial R}{\partial a_0} = 0$$

```
p = polyfit(x,y,n)
```

최소 자승법 - 1차 다항식

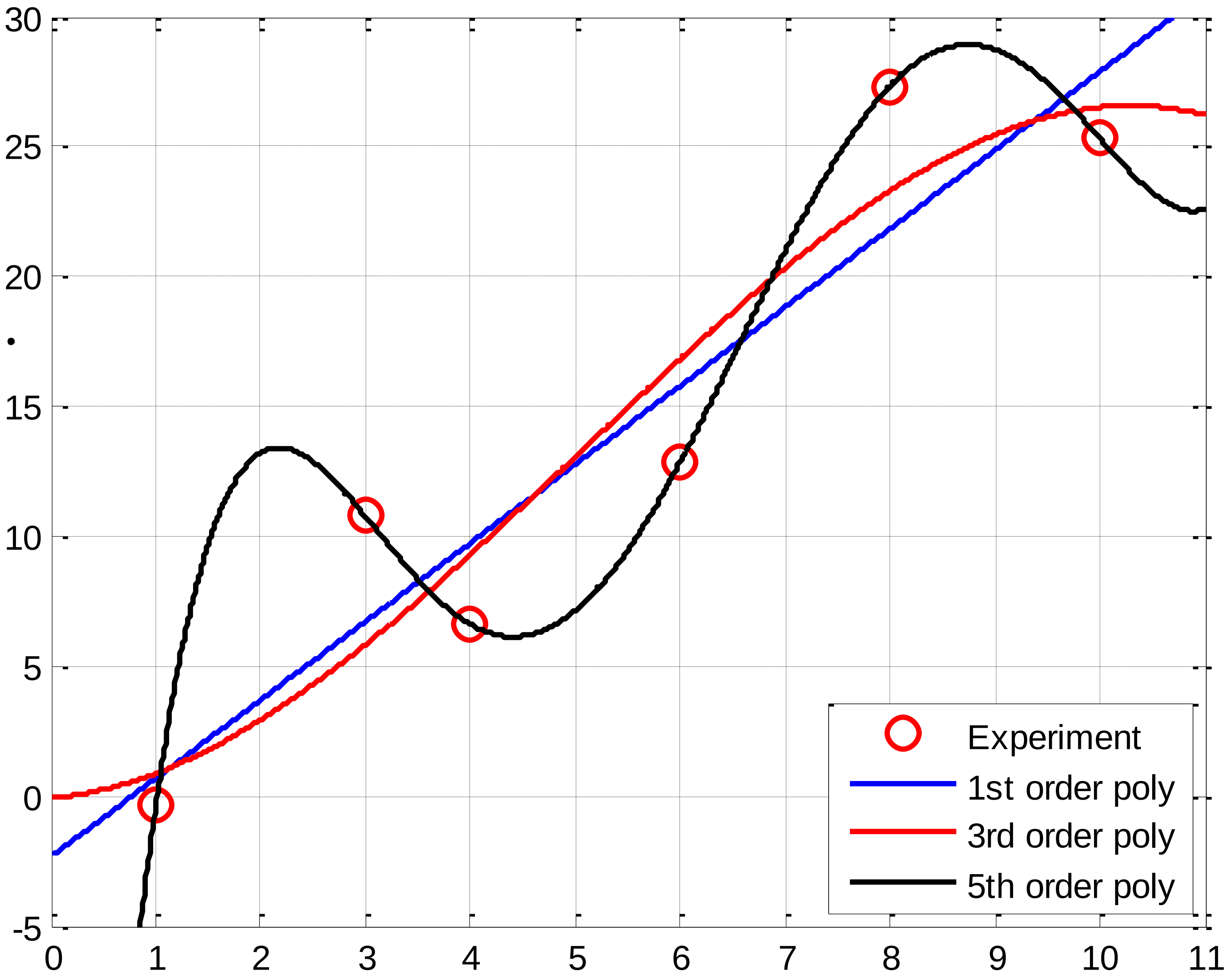
- 1st order polynomial approximation using the least square method

m09_polyfit_3points.m

```
px = [-2 1 2];
py = [-1 1 0];
p  = polyfit(px, py, 1);
x  = -3:0.01:3;
y  = polyval(p,x);
figure(1);
h = plot(x,y,'b-',px,py,'ro','LineWidth',2);
grid;
set(h(2),'MarkerSize',10);
hold on;
plot([-3 3],[0 0],'r-',[0 0], [-2 2],'r-');
hold off;
```

최소 자승법 - 고차 다항식 1/2

- Compare several polynomial curve fitting schemes with different degrees.



최소 자승법 - 고차 다항식 2/2

m09_polyfit_6points.m

```
%% Experimental Data
x = [1 3 4 6 8 10];
y = 2.5*x+2+4*randn(size(x));
figure(1);
plot(x,y,'ro','LineWidth',2,'MarkerSize',10);
grid; hold on; axis([0 11 -5 30]);
%% Polyfit using polynomials
x1 = 0:0.01:11;
linespec = ['b-','r-','k-'];
for n=1:2:5
    p = polyfit(x,y,n);
    y1 = polyval(p,x1);
    plot(x1,y1,linespec(n), 'LineWidth', 2);
end
hold off;
legend('Experiment','1st order poly', '3rd order poly',...
       '5th order poly', 'Location', 'SouthEast');
```

최소 자승법 – 특수 함수 응용

Function		Polyfit Form	axis
linear	$y = mx + b$	`p=polyfit(x,y,1)`	plot
power	$y = bx^m$	`p=polyfit(log(x),log(y),1)`	loglog
exponential	$y = be^{mx}$ $y = b10^{mx}$	`p=polyfit(x, log(y),1)` `p=polyfit(x, log10(y),1)`	semilogy
logarithmic	$y = m\ln(x) + b$ $y = m\log(x) + b$	`p=polyfit(log(x), y,1)` `p=polyfit(log10(x),y,1)`	semilogx
reciprocal	$y = \frac{1}{mx + b}$	`p=polyfit(x,1./y,1)`	plot

지수 함수의 예

- polyfit( )을 이용하여 지수 함수로 데이터 피팅 하기
  - 다음과 같은 지수 함수의 양변에 자연로그를 취하면,

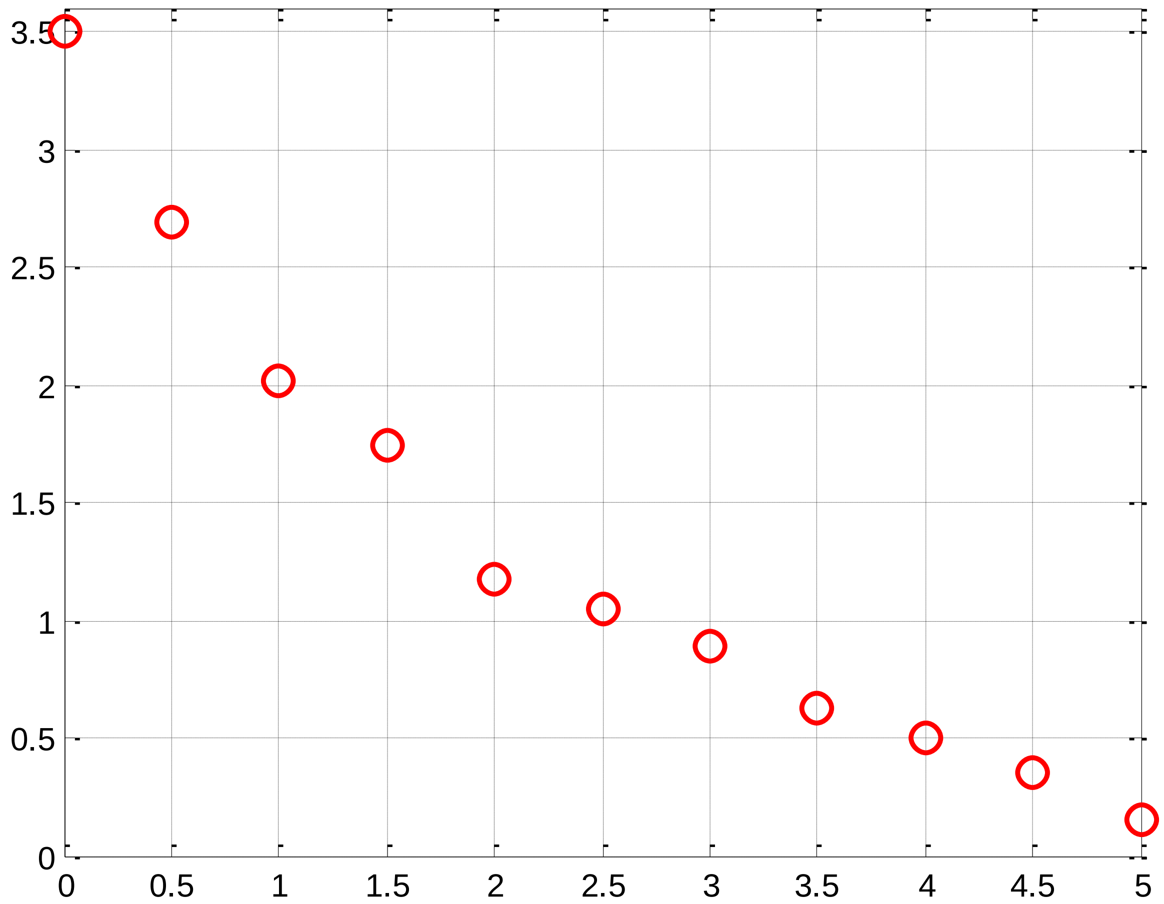
    $y = be^{mx} \Rightarrow \log y = \log b + mx \rightarrow Y = B + mx$
  - 이제 x에 대한 1차 다항식이므로 (x, Y)를 이용하여 B와 m을 구한다.
  - p = polyfit(x, Y, 1)
    - 이 때 Y는 log y 값을 나타낸 것이다.
  - m = p(1), B = p(2) → $b = e^B$

예제 3 -지수 함수로의 데이터 피팅

- 측정된 실험 결과를 다음 수식으로 나타내려고 합니다.

  $$y = be^{mx}$$

  이 때 실험결과를 가장 잘 표현하는 b와 m을 구하시오.




```
x = 0:0.5:5;
y = [3.50 2.69 2.02 1.74 1.17 1.05 0.89 0.63 0.50 0.35 0.15];
```

예제 3 - 답안

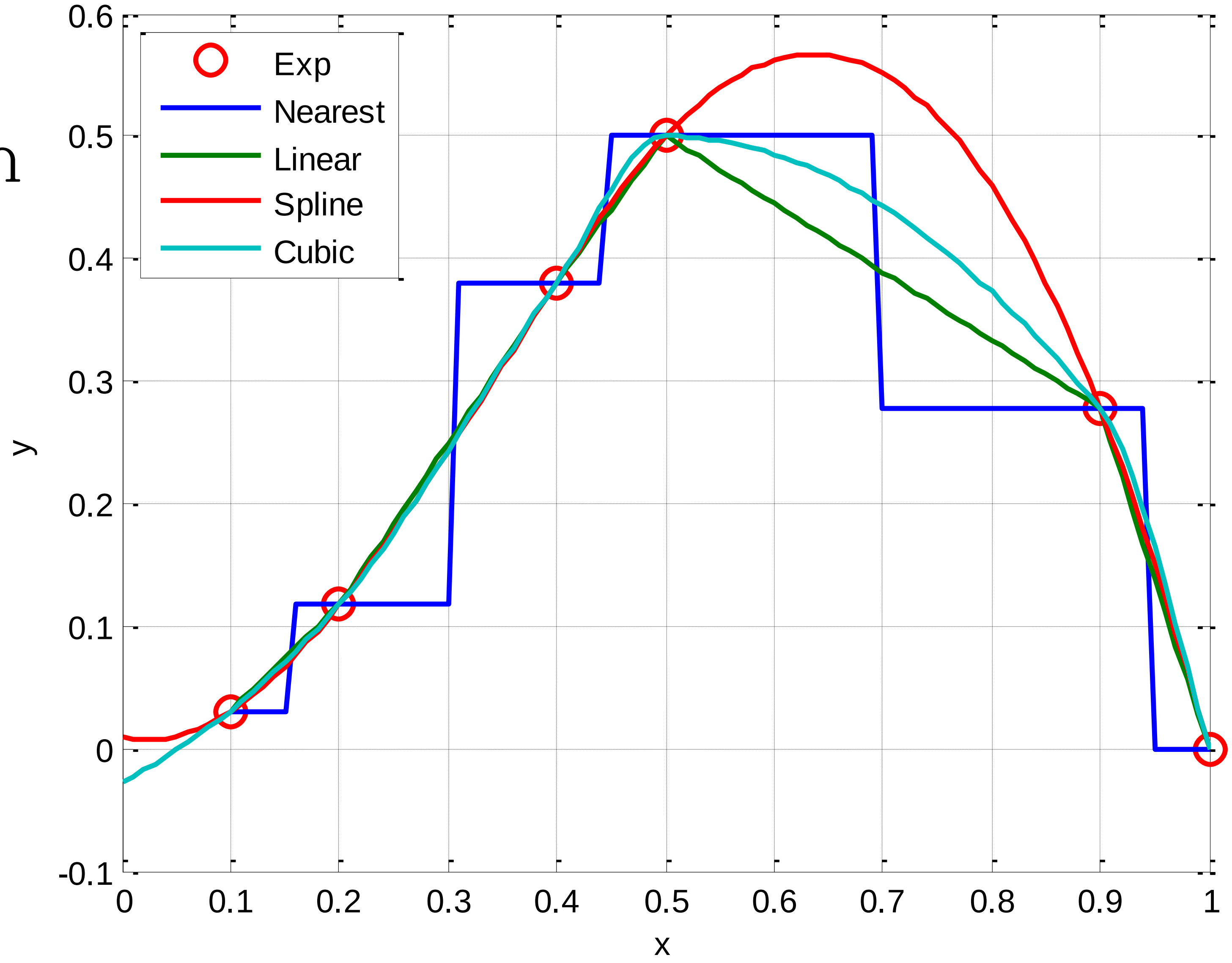
- 어떤 모델이 가장 잘 실험 데이터를 표현할 수 있을까요?

m09_polyfit_exp.m

```
x = 0:0.5:5;
y = [3.50 2.69 2.02 1.74 1.17 1.05 0.89 0.63 0.50 0.35 0.15];
figure(1);
plot(x,y,'ro','LineWidth',2,'MarkerSize',10);
grid; hold on; axis([0 5 0 3.6]);
Y = log(y);
p = polyfit( x, Y, 1 );
m = p(1);
b = exp(p(2));
fprintf('b = %f\n', b );
fprintf('m = %f\n', m );
x1 = linspace(0, 5, 1000);
y1 = b * exp( m*x1 );
plot( x1, y1, 'b-' );
```

보간법

- 1-D Interpolation




```
yi = interp1( x, y, xi, 'method' )
```

인천대학교 INCHEON NATIONAL UNIVERSITY

보간법 - 스크립트

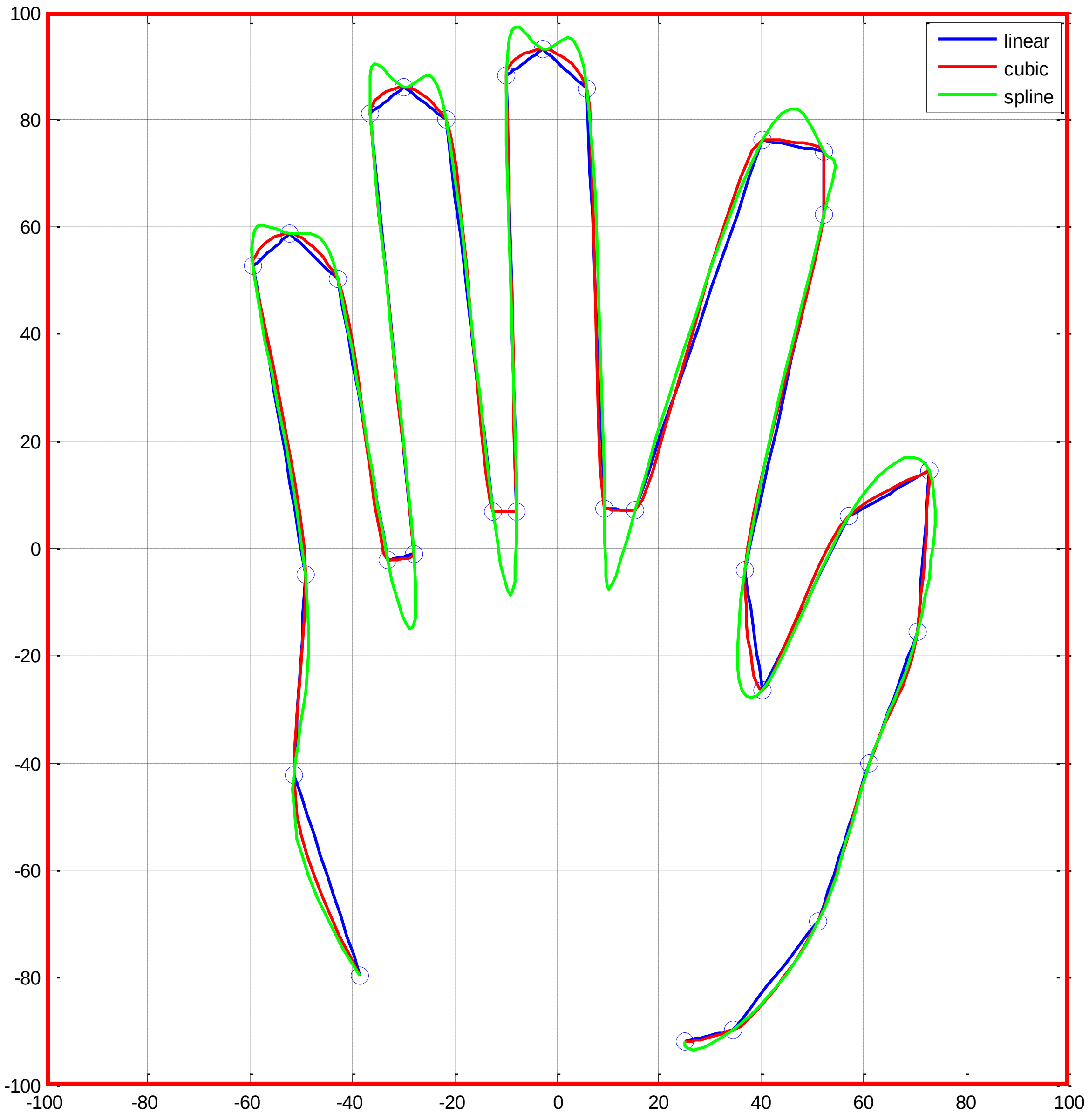
- 다양한 보간법 적용 방법

m09_interp.m

```
x = [0.1 0.2 0.4 0.5 0.9 1.0];
y = x .* sin(pi*x);
figure(1);
plot(x,y,'ro','LineWidth',2,'MarkerSize',10);
grid; hold on;
xlabel('x'); ylabel('y');
xi = 0:0.01:1;
yi_n = interp1(x,y,xi,'nearest');
yi_l = interp1(x,y,xi,'linear');
yi_s = interp1(x,y,xi,'spline');
yi_c = interp1(x,y,xi,'pchip');
plot(xi,yi_n,xi,yi_l,xi,yi_s,xi,yi_c,'LineWidth',2);
legend('Exp','Nearest','Linear','Spline','Cubic', ...
       'Location','NorthWest');
```

예제 4: 왼손 본뜨기

- 30개의 점을 찍어 당신의 왼손을 spline과 linear 보간법을 적용하여 본 뜨는 프로그램을 작성하시오.



인천대학교
INCHEON NATIONAL UNIVERSITY

m09_interp_2d.m

```
% Drawing my hand by interpolation
N = 30;
figure('Position', [10 10 900 900]);
Sx = 100 * [-1 1 1 -1 -1];
Sy = 100 * [-1 -1 1 1 -1];
plot( Sx, Sy, 'r-', 'LineWidth', 4 );
grid on; hold on;
h = helpdlg('왼손을 네모안에 놓고 그 주위에 점 30개를 클릭 하세요', ...
    'Point Selection');
x = zeros(N,1);
y = zeros(N,1);
for n=1:N
    [x1 y1] = ginput(1);
    plot( x1, y1, 'bo', 'MarkerSize', 10 );
    x(n) = x1;
    y(n) = y1;
end
```

```
k   = 0:N-1;
ki = 0:0.1:N-1;

xi1 = interp1( k, x, ki, 'linear' );
yi1 = interp1( k, y, ki, 'linear' );

xi2 = interp1( k, x, ki, 'pchip' );
yi2 = interp1( k, y, ki, 'pchip' );

xi3 = interp1( k, x, ki, 'spline' );
yi3 = interp1( k, y, ki, 'spline' );

h = plot( xi1, yi1, 'b-', xi2, yi2, 'r-', ...
          xi3, yi3, 'g-', 'LineWidth', 2 );

legend( h, {'linear', 'cubic', 'spline'} );
hold off;
```

Key Takeaways

- 다항식의 근을 구하고 최대, 최소를 구할 수 있다.
  - p = poly(r), r = roots(p),
    y = polyval(p, x), pd = polyder(p)
- 실험 데이터를 가장 잘 표현하는 다항식이나 특수 함수를 구할 수 있다.
  - p = polyfit(x, y, n)
- 띄엄 띄엄 얻은 샘플 데이터를 이용하여 그 사잇값들을 짐작할 수 있다.
  - yi = interp1(x, y, xi, 'spline')

Note

Note