UNIVERSITÉ LIBRE DE BRUXELLES

ULB

École polytechnique de Bruxelles

Service de Mathématiques

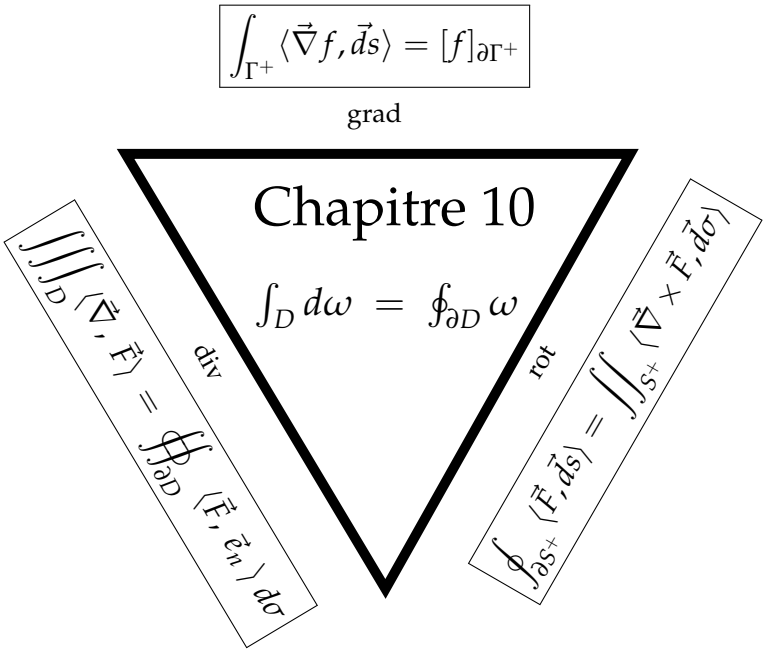
Analyse II

Chapitre 10

Analyse vectorielle

Anne DELANDTSHEER

IRCI 2
MATH-H-2000



Année académique 2020 - 2021

Réforme des syllabi

A partir de 1994, la secrétaire Carinne HANON a commencé à taper en LaTeX texte et formules de l'ensemble des syllabi d'Analyse. Elle a progressivement poursuivi le travail et a tapé les textes et formules des modifications que j'apportais régulièrement aux syllabi. Mais un nouveau format et une utilisation plus fine de LaTeX étaient devenus nécessaires. J'en ai profité pour restructurer en profondeur les chapitres 1, 2, 3, 4, 7, 8, 10, 14 et 15.

La typographie actuelle de ces notes doit beaucoup à l'excellente utilisation du langage LaTeX par un groupe de quatre étudiants à l'issue de leur seconde année à l'École polytechnique de Bruxelles durant l'été 2015, puis par de nouvelles équipes d'étudiants Bacheliers en Polytechnique durant les étés 2016, 2017, 2018 2019 et 2020.

Je remercie ici Nicolas ENGLEBERT, Elisabeth et François GRUWÉ, Raphaël HANNAERT , Gilles DECROLY, Christophe LANNOY, Lucie CUVELLLIEZ, Nathan FARBER, Jean KIMUS, Louis NEWMAN, Raphaël LINSEN, Serge DESIDE, Gulliver VAN ESSCHE , Sami ABDUL SATER, Butrint AVDIJAJ, Younes BOUHJAR, Benoît DUBUS et Lucas PRIEËLS pour leur efficacité, leur sens de la collaboration, leur enthousiasme et l'intelligence de leur travail.
Nicolas a coordonné le travail, a revu le format des syllabi et a tapé une part importante des sections que j'ai réécrites ; Lucie, Nathan, Jean, Louis, Raphaël LINSEN, Serge et Gulliver ont prolongé son travail ; Elisabeth, François, Louis et Gulliver ont réalisé de splendides figures en TikZ ; Raphaël LINSEN et Serge, non contents de refaire "au propre" certains dessins manuscrits, ont complété l'offre par des animations. Raphaël HANNAERT, Gilles et Christophe ont traduit en Beamer certaines des anciennes présentations Powerpoint (certaines parties des chapitres 2, 3, 4, 6, 11, 12, 15, 17 et 22). Comme on n'écrit pas la même chose suivant les outils disponibles, cela m'a fourni une bonne base pour les retravailler, les compléter et en faire de nouvelles portant sur d'autres sections ou chapitres.
Enfin, en 2020, Sami, Butrint, Younes, Benoît et Lucas ont poursuivi le travail ...
Vu la brièveté des délais, des coquilles peuvent s'être glissées dans les nouvelles éditions des syllabi ..., si vous en trouvez, n'hésitez pas à m'en faire part, au cours ou par courriel à ANNE.DELANDTSHEER@ULB.BE
Le travail n'est pas fini, le cours a débuté une nouvelle vie, il est fait pour vous et évolue encore.

Il reste que le principal artisan de votre réussite, c'est vous ! Cette branche n'est pas facile. Venez au cours, travaillez-le crayon à la main, cherchez à comprendre les liens entre les différentes affirmations, référez-vous mentalement au sens des formules, non à leur numéro, et testez-vous face à une page blanche. A vous de jouer !

Anne DELANDTSHEER

Table des matières

10 Analyse vectorielle **1**
10.1 Surfaces dans $\mathbb{R}^3$ . . . 1
10.1.1 Introduction . . . 1
10.1.2 Surfaces paramétrées . . . 3
10.1.3 Voyage le long d'une ligne de coordonnées . . . 5
10.1.4 Plan tangent et vecteur normal induit par la paramétrisation . . . 7
10.1.5 Orientation d'une surface . . . 9
10.1.6 Aire d'une portion de surface . . . 10
10.1.7 Élément d'aire sur une surface de niveau. . . . 15
10.1.8 Mauvaises approximations d'une surface . . . 19
10.1.9 Aire d'un graphe : la voie directe . . . 20
10.2 Intégrales de surface et flux . . . 23
10.2.1 Intégrale de surface d'une fonction scalaire : intuition . . . 23
10.2.2 $\int_S f d\sigma$: définition après paramétrisation. . . . 24
10.2.3 Propriétés de l' intégration d'une fonction scalaire sur une surface . . . 26
10.2.4 Flux d'un champ de vecteurs à travers une surface orientée $(S, \vec{1}_n)$ . . . 27
10.2.5 Propriétés des flux . . . 32
10.2.6 2-forme différentielle . . . 33
10.2.7 Différentielle extérieure d'une forme différentielle ; 2-forme exacte . . . 35
10.2.8 Forme fermée . . . 36
10.2.9 2-forme différentielle sur une surface paramétrée. . . . 37
10.2.10 Intégrale d'une 2-forme différentielle sur une surface . . . 38
10.3 Coordonnées curvilignes . . . 39
10.3.1 Différentielle d'un changement de coordonnées. . . . 39
10.3.2 Lignes et surfaces de coordonnées. . . . 43
10.3.3 Coordonnées curvilignes orthogonales. . . . 44
10.3.4 Les coordonnées polaires sont orthogonales. . . . 46
10.3.5 Les coordonnées cylindriques sont orthogonales. . . . 47
10.3.6 Les coordonnées sphériques sont orthogonales. . . . 48
10.3.7 Le champ de bases des gradients. . . . 49
10.4 Champs de vecteurs et div, grad, rot. . . . 50
10.4.1 Définition de champs de vecteurs . . . 50
10.4.2 L'opérateur "nabla" (ou "del") . . . 54
10.4.3 Différentielle d'un champ de vecteurs. . . . 55
10.4.4 Divergence d'un champ de vecteurs . . . 56
10.4.5 Interprétation de la divergence d'un champ (de vitesses). . . . 57
10.4.6 Rotationnel d'un champ de vecteurs . . . 59
10.4.7 Interprétation du rotationnel d'un champ. . . . 61

10.4.8 Linéarité de div, grad, rot, ... 63
10.4.9 Nullités remarquables et laplacien. 63
10.4.10 Autres identités avec div, grad, rot 63
10.4.11 Fonctions harmoniques 65
10.4.12 Champs de gradients ou champs conservatifs. 66
10.4.13 Recherche d'un potentiel 67
10.4.14 Condition nécessaire de conservatisme 69
10.4.15 Invariance sous isométrie 70
10.4.16 Grad en coordonnées curvilignes orthogonales 71
10.4.17 Div en coordonnées curvilignes orthogonales. 74
10.4.18 Rot en coordonnées curvilignes orthogonales. 77
10.4.19 Laplacien en coordonnées curvilignes orthogonales. 78
10.4.20 Grad, rot, div, laplacien en coord. cylindriques. 79
10.4.21 Grad, rot, div, laplacien en coord. sphériques. 79
10.4.22 Fonctions et champs radiaux 80
10.5 Le théorème du gradient 82
10.5.1 Théorème fondamental dans $\mathbb{R}$: rappel 82
10.5.2 Théorème du gradient 82
10.5.3 Intégrales curvilignes indépendantes du chemin 83
10.5.4 CNS pour qu'un champ soit conservatif 84
10.5.5 Conservatisme en termes de travail, de circulation 85
10.5.6 Travail d'une force d'après Newton. 86
10.5.7 Force conservatrice et conservation d'énergie 87
10.5.8 Interprétation intuitive du gradient ... 88
10.6 Théorème de Green 2D 89
10.6.1 Théorème de Green : présentation générale 89
10.6.2 Théorème de Green : la formule 90
10.6.3 Démonstration pour les domaines normaux 90
10.6.4 ... et pour une réunion finie de domaines normaux. 92
10.6.5 Théorème de Green : version rotationnel 92
10.6.6 Théorème de Green : version divergence. 93
10.6.7 CS de conservatisme dans un domaine simplement connexe 93
10.6.8 Ce champ est-il conservatif ou non ? 94
10.6.9 Application au calcul d'aire dans $\mathbb{R}^2$ 96
10.7 Théorème de Stokes (rotationnel) 97
10.7.1 La formule magique 97
10.7.2 Preuve sur une portion de surface paramétrée 99
10.7.3 Preuve sur une surface orientable 101
10.7.4 Le théorème de Stokes : une merveille ! 102
10.7.5 Flux d'un rotationnel sur une surface fermée 103
10.7.6 Interprétation du rotationnel 103
10.7.7 Rotationnel du champ de vitesses d'un solide tournant autour d'un axe fixe 104
10.7.8 CS pour qu'un champ soit conservatif 104
10.8 Théorème d'Ostrogradski (divergence) 106
10.8.1 Théorème de Gauss-Ostrogradski 106
10.8.2 Interprétation de div$\vec{F}$ 107
10.8.3 Démonstration si D est normale 108
10.8.4 ... et lorsque D est disséquable en un nombre fini de domaines normaux. 109

10.8.5 Application électrostatique 110
10.8.6 Equation de conservation 110
10.8.7 Théorème de la divergence en toutes dimensions 111
10.9 Théorème du laplacien 112
10.9.1 Interprétation du laplacien 112
10.9.2 Première formule de Green 113
10.9.3 Deuxième formule de Green 113
10.9.4 La formule de Green pour l'énergie 113
10.9.5 Petite histoire d'une grande œuvre 114

A Orientation dans $\mathbb{R}^n$ 115
A.1 Orientation dans $\mathbb{R}^n$ 115
A.1.1 Orientation positive d'une région nD dans $\mathbb{R}^n$ 115
A.1.2 Orientation d'une surface S dans $\mathbb{R}^3$ 118
A.1.3 Orientabilité d'une surface 119
A.1.4 Surfaces lisses d'une surface dans $\mathbb{R}^3$ 120

B Différentes mesures dans $\mathbb{R}^n$ 121
B.1 m-mesure d'une m-variété dans $\mathbb{R}^n$. 121
B.1.1 Aire d'une portion de surface dans $\mathbb{R}^n$. 121
B.1.2 m-mesure d'une m-image dans $\mathbb{R}^n$. 121
B.2 Indépendance vis-à-vis de la paramétrisation. 122
B.2.1 m-mesure d'une hypersurface dans $\mathbb{R}^{m+1}$. 122
B.3 Mesure d'une hypersphère. 123
B.4 La mesure d'une sphère de rayon r dérive de celle d'une boule de rayon r 125

C Typographie des syllabi 135

Chapitre 10

Analyse vectorielle

Ce chapitre traite d'abord des surfaces paramétrées dans l'espace euclidien de dimension 3 et des intégrales de surface, puis des opérateurs div, grad rot et des théorèmes fondamentaux de l'analyse vectorielle, c'est-à-dire des différentes incarnations du théorème de Stokes, à savoir le théorème du gradient, le théorème de Green dans le plan, le théorème du rotationnel (Stokes au sens strict) et le théorème de la divergence (Gauss-Ostrogradski).

Tous ces thèmes sont indispensables à l'étude des sciences de l'ingénieur. Nous rencontrons des surfaces partout. Pratiquement toute la physique et la grande majorité des modèles mathématiques multidimensionnels utilisent dans leurs mise en équation ou dans leur résolution des tels opérateurs de dérivation, des équations aux dérivées partielles et des théorèmes apparentés au théorème de Stokes. Et même lorsque les problèmes sont traités numériquement et sont naturellement discrets, les méthodes utilisées s'appuient souvent sur celles de l'analyse et de la géométrie différentielle. Ainsi, les animations utilisées dans le cinéma actuel utilisent de la géométrie différentielle discrète, qui se base elle-même sur la géométrie différentielle continue, plus simple (par exemple : le mouvement des vagues dans le film Titanic recourt à de telles mathématiques).

Enfin, si pour étudier l'analyse vectorielle, il fallait une motivation directement palpable par l'étudiant ingénieur de première et deuxième année, il la trouvera dans ses cours de physique et d'électricité. Par la suite, il rencontrera encore ces théorèmes, soit dans des étapes de modélisation, soit dans le traitement d'EDP.

10.1 Surfaces dans $\mathbb{R}^3$

10.1.1 Introduction

Intuitivement, nous voyons une surface comme un ensemble de points dans $\mathbb{R}^3$ qui, au voisinage de chacun de ses points, ressemble à un disque ou un rectangle déformé, la déformation s'étant faite continûment. On peut imaginer une membrane élastique qu'on étire plus ou moins dans les différentes directions. Si on a, préalablement à l'étirement, dessiné un quadrillage sur le rectangle, on a déjà une bonne vision de ce qu'est une surface paramétrée et ses lignes de coordonnées, le principal sujet d'étude dans cette section. Les surfaces de $\mathbb{R}^3$ que nous avons rencontrées dès le chapitre 8 n'étaient néanmoins pas toutes présentées sous forme paramétrique, mais plutôt définies par une équation cartésienne comme dans les cas (i) et (ii) ci-dessous. Voici les présentations classiques d'une surface $\mathcal{S}$ dans $\mathbb{R}^3$.

(i) S est le graphe d'une fonction continue f de deux variables réelles à valeurs réelles

$$\mathcal{S} \equiv z = f(x, y)$$

(ii) l'ensemble de niveau c d'une fonction h de (x, y, z) :

$$\mathcal{S} \equiv h(x, y, z) = c \qquad \text{(équation cartésienne de } \mathcal{S}\text{)}$$

(iii) l'image d'une fonction $\vec{g}$ continue de deux variables réelles u et v à valeurs dans $\mathbb{R}^3$

$$\mathcal{S} \equiv \begin{cases} x &= g_1(u, v) \\ y &= g_2(u, v) \\ z &= g_3(u, v) \end{cases} \qquad \text{(équations paramétriques de } S\text{)}$$

Notons qu'il nous faudra ajouter des hypothèses sur f, h et $\vec{g}$ pour que $\mathcal{S}$ soit bien une surface (un objet de dimension 2) et que $\mathcal{S}$ soit lisse.

Voici six exemples familiers de surfaces, données chacune par une équation cartésienne et donc directement interprétable comme un ensemble de niveau.

■ **Exemple 10.1**

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_1 &\equiv a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \\
\mathcal{S}_2 &\equiv \frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} + \frac{(z - z_0)^2}{c^2} = 1 \quad \text{où } (a, b, c) \neq (0, 0, 0) \\
\mathcal{S}_3 &\equiv z = xy \\
\mathcal{S}_4 &\equiv z = x^2 + y^2 \\
\mathcal{S}_5 &\equiv z^2 = x^2 + y^2 \\
\mathcal{S}_6 &\equiv x^2 + y^2 = R^2 \ (R > 0)
\end{aligned}$$

$\mathcal{S}_3$ et $\mathcal{S}_4$ sont directement présentées comme le graphe d'une fonction de (x, y), tandis que $\mathcal{S}_1$ peut l'être si $c \neq 0$, contrairement à $\mathcal{S}_2, \mathcal{S}_5$ et $\mathcal{S}_6$. ■

Voici des hypothèses de régularité raisonnables sur les descriptions de surfaces comme graphe d'une fonction f ou ensemble de niveau d'une fonction h.

(i) Si $\mathcal{S} \equiv z = f(x, y)$, nous demandons que f soit une fonction continue sur son domaine D et que D soit ouvert et connexe. La surface $\mathcal{S}$ est alors connexe et de dimension 2. Si f est de classe C^1 (ou plus généralement différentiable), alors $\mathcal{S}$ possède un plan tangent π_0 en chacun de ses points $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ et

$$\pi_0 \equiv z - f(x_0, y_0) = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0, y_0)} (x - x_0) + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0, y_0)} (y - y_0)$$

(ii) Si $\mathcal{S} \equiv h(x, y, z) = c$ est l'ensemble de niveau c d'une fonction continue h définie dans un ouvert connexe D de $\mathbb{R}^3$, il est souhaitable que h soit de classe C^1 et que pour tout point $(x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{S}, \vec{\nabla} h(x_0, y_0, z_0) \neq \vec{0}$. Ceci garantit que $\mathcal{S}$ admet un plan tangent π_0 au point (x_0, y_0, z_0) et celui-ci est orthogonal à $\vec{\nabla} h(x_0, y_0, z_0)$:

$$\pi_0 \equiv \langle \vec{\nabla} h(x_0, y_0, z_0), (x - x_0, y - y_0, z - z_0) \rangle = 0$$

Quoique les graphes des fonctions différentiables se manipulent sans danger et avec aisance et quoique les équations cartésiennes des plans, des quadriques et des surfaces de révolution nous sont familières, l'outil le plus général et le plus efficace pour traiter et effectuer des calculs sur les surfaces est sans conteste la paramétrisation. Et même si la surface ne se laisse pas décrire par une seule paramétrisation, on peut recourir à plusieurs paramétrisations (ou "cartes") qui se recouvrent partiellement pour assurer de bon "raccords".

Dans ce qui suit, nous nous focaliserons sur les surfaces munies d'une paramétrisation, mais nous aurons souvent en tête leur incarnation géométrique comme sous-ensemble de points de l'espace $\mathbb{R}^3$ (admettant diverses paramétrisations). Nous avons rencontré une telle ambivalence avec les courbes (lieu géométrique *versus* courbe paramétrée). Bien sûr, les notions les plus importantes sont celles qui sont géométriques, c'est-à-dire indépendantes de la paramétrisation. Un sujet important en géométrie différentielle est de déterminer comment varient les différents objets mathématiques sous l'effet d'un changement de paramétrisation. Mais la toute première chose à faire est d'étudier les surfaces paramétrées.

10.1.2 Surfaces paramétrées

Notations. Dans $\mathbb{R}^3$, nous noterons $\vec{r} = (x, y, z)$ et $\vec{r_0} = (x_0, y_0, z_0)$.

■ **Exemple 10.2** Si $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont deux vecteurs linéairement indépendant de $\mathbb{R}^3$, alors

- Soit $\pi_1 \equiv \vec{r} = u\vec{a} + v\vec{b}$ où u, v parcourent $\mathbb{R}$. π_1 est le plan passant par l'origine et parallèle à $\vec{a}$ et $\vec{b}$.
- Soit $\pi_2 \equiv \vec{r} = \vec{r}_0 + u\vec{a} + v\vec{b}$ où u, v parcourent $\mathbb{R}$. π_2 est le plan passant par $\vec{r_0}$ et parallèle à $\vec{a}$ et $\vec{b}$.
- Soit $\pi_3 \equiv \begin{pmatrix} u\cos v \\ u\sin v \\ 0 \end{pmatrix}$ où $u \in \mathbb{R}^+$ et $v \in [0, 2\pi[$. π_3 est une paramétrisation inattendue du plan $z = 0$. Elle n'est pas régulière car le domaine de variation de v n'est pas un ouvert.

■

■ **Exemple 10.3**

$$S \equiv \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\sin\theta\cos\phi \\ R\sin\theta\sin\phi \\ R\cos\theta \end{pmatrix} \qquad \text{où } \theta \in [0, \pi], \phi \in [0, 2\pi[$$

Cette paramétrisation n'est pas bijective : si $\theta = 0$ ou π, alors la longitude ϕ est indéterminée. De plus, des points de même latitude, mais de longitudes 0 et $2\pi - \epsilon$ sont à distance $< \epsilon R$ (pour ϵ suffisamment petit), ce qui montre que la fonction qui donne θ et ϕ en fonction de (x, y, z) n'est pas continue. ■

Définition 10.1 Une surface $\mathcal{S}$ dans $\mathbb{R}^3$ est paramétrée par $\vec{g}$ ssi

$$\mathcal{S} \equiv \vec{r} = \vec{g}(u, v)$$

où $\vec{g} : D \to \mathbb{R}^3$ et D est un ouvert connexe de $\mathbb{R}^2$. ■

Définition 10.2 La paramétrisation $\vec{g}$ est bijective ssi $\vec{g}$ est bijective de D sur $\mathcal{S}$. Dans ce cas, pour tout point $\vec{p}$ sur $\mathcal{S}$, il existe un et un seul couple de réels $(u,v) \in D$ tel que $\vec{p} = \vec{g}(u,v)$. On dira alors que (u,v) sont les **coordonnées** de $\vec{p}$ relativement à la paramétrisation $\vec{g}$ (à ne pas confondre avec les coordonnées (x,y,z) de $\vec{p}$ dans $\mathbb{R}^3$). Si de plus $\vec{g}^{-1}$ est continue, $\vec{g}$ sera dite **bicontinue**. ■

Définition 10.3 Le point $(u_0,v_0) \in D$ et $\vec{g}(u_0,v_0) \in \mathcal{S}$ est **régulier** ssi $\vec{g}$ est de classe C^1 au voisinage de (u_0,v_0) et $\left(\frac{\partial \vec{g}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{g}}{\partial v}\right)\Big|_{(u_0,v_0)} \neq \vec{0}$ ■

Définition 10.4 La paramétrisation $\vec{g}$ est **quasi régulière** ssi elle est régulière en tout point (u,v) intérieur à D.
La paramétrisation $\vec{g}$ est **régulière** (au sens strict) ssi elle est bijective bicontinue et régulière en tout point $(u,v) \in D$. ■

L'idéal est de travailler avec des paramétrisations régulières, mais nous verrons qu'il est commode de considérer des paramétrisations quasi régulières (comme dans les exemples ci-dessous).

■ **Exemple 10.4** La paramétrisation classique d'une sphère suivant la longitude et la colatitude n'est pas bijective à cause des pôles $\vec{p_N}$ et $\vec{p_S}$. De plus, le domaine $[0,\pi] \times [0,2\pi[$ n'est pas ouvert et $\vec{g}^{-1} : \mathcal{S}\backslash\{\vec{p_N},\vec{p_S}\} \to]0,\pi[\times[0,2\pi[$ n'est pas continue : il y a des discontinuité au méridien $\phi = 0$: la longitude n'y est pas continue (la fonction $\vec{g}$ "réalise un collage le long de ce méridien"). ■

■ **Exemple 10.5**

$$\mathcal{S} \equiv \begin{cases} x = z\cos\theta \\ y = z\sin\theta \\ z = z \end{cases} \qquad \text{où } z \in \mathbb{R}, \theta \in [0,2\pi[$$

est le cône d'équation cartésienne $z^2 = x^2 + y^2$. La paramétrisation ci-dessus n'est pas régulière pour des raisons analogues à l'exemple précédent (il y a aussi un "collage" le long du méridien $\theta = 0$). ■

■ **Exemple 10.6**

$$\mathcal{S} \equiv \begin{cases} x = x \\ x = y \\ z = x^2 + y^2 \end{cases} \qquad \text{où } (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

est le paraboloïde de révolution $z = x^2 + y^2$. Cette paramétrisation est régulière. ■

Définition 10.5 — Paramétrisation de Monge.
Si $\mathcal{S} \equiv z = f(x,y)$ où $f \in C^0(D \subset \mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, alors $\vec{g} : D \to \mathbb{R}^3 : (x,y) \mapsto (x,y,f(x,y))$ est la **paramétrisation de Monge** de $\mathcal{S}$ associée à f. ■

$\mathcal{S}$ admet alors pour équations paramétriques

$$\begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = f(x,y) \end{cases} \qquad \text{où } (x,y) \in D$$

et les paramètres (x,y) ont une interprétation immédiate dans le repère $Oxyz$. Nous aurions aussi pu appeler les paramètres u et v plutôt que x et y. Si D est un ouvert connexe et $f \in C^1$,

cette paramétrisation est régulière (pourquoi ?).

Deux paramétrisations sont C^1-équivalentes ssi on passe de l'une à l'autre via une bijection bi-C^1.

Définition 10.6 Une paramétrisation $\tilde{\vec{g}} : \tilde{D} \to \mathcal{S} : (\tilde{u}, \tilde{v}) \mapsto \tilde{\vec{g}}(\tilde{u}, \tilde{v})$ est C^1**-équivalente** à $\vec{g} : D \to \mathcal{S} : (u, v) \mapsto \vec{g}(u, v)$ ssi il existe $\vec{h} \in C^1(D, \tilde{D})$ telle que $\tilde{\vec{g}} = \vec{g} \circ \vec{h}$ et $\tilde{\vec{h}}^{-1} \in C^1$. ■

Le fait de permuter les paramètres fournit évidemment une paramétrisation C^1-équivalente à la précédente, la fonction $\vec{h}$ de changement de paramètres étant alors la symétrie bilatérale relativement à la diagonale principale $u = v$ dans $\mathbb{R}^2$, qui envoie le domaine D sur $\tilde{D}$ et réciproquement.

Proposition 10.1
Si $\vec{p}_0$ est un point régulier pour $(S, \vec{g})$, alors $\vec{p}_0$ est régulier pour toute paramétrisation de $\mathcal{S}$ C^1-équivalente à $\vec{g}$.

10.1.3 Voyage le long d'une ligne de coordonnées

HINT : revoir les section 8.8.7 à 8.8.11 : sous-espace tangent à l'image d'une fonction, mesures et coefficients de dilatation.

Soit $\vec{p}_0 = \vec{g}(u_0, v_0)$ où $(u_0, v_0) \in D$. Lorsqu'on fixe $v = v_0$ et qu'on fait varier u, on obtient une courbe sur $\mathcal{S}$, appelée ligne u, paramétrée par $u \mapsto \vec{g}(u, v_0)$. La dérivée de cette fonction donne la vitesse et la direction dans laquelle on se déplace sur $\mathcal{S}$ lorsque u varie.

Définition 10.7 La **ligne** u par le point $\vec{p}_0$ est la courbe d'équation paramétrique $\vec{r} = \vec{g}(u, v_0)$ où $(u, v_0) \in D$. ■

Les lignes u et les lignes v sur $\mathcal{S}$ sont appelées **lignes de coordonnées** (relativement à la paramétrisation $\vec{g}$).

▷ $\left.\dfrac{\partial \vec{g}}{\partial u}\right|_{(u_0,v_0)}$ est le vecteur vitesse par rapport au paramètre u en (u_0, v_0).
Il est tangent à la ligne u par $\vec{p}_0$.

▷ L'approximation linéaire du déplacement sur $\mathcal{S}$ correspondant à un accroissement Δu du paramètre u à partir du point $\vec{p}_0 = \vec{g}(u_0, v_0)$ est

$$d\vec{g}|_{(u_0,v_0)}(\Delta u \vec{1}_u) = \Delta u \left.\frac{\partial \vec{g}}{\partial u}\right|_{(u_0,v_0)}$$

où $\vec{1}_u$ est le vecteur unité dans le plan ouv, de sorte que $\Delta u \vec{1}_u = (\Delta u, 0)$ dans le plan ouv.

On définit de manière analogue les lignes v. Ceci permet de voir comment on se déplace sur la surface $\mathcal{S}$ en fonction des paramètres u et v.

Si le domaine des paramètres est un rectangle $D = \mathcal{U} \times \mathcal{V}$, nous pouvons imaginer D comme une bande élastique rectangulaire quadrillée (pour matérialiser quelques parallèles aux axes $u = c^{te}$ ou $v = c^{te}$) au repos. On étire ensuite la bande élastique jusqu'à ce qu'elle prenne la forme de la surface $\mathcal{S}$. Le quadrillage initial est alors étiré et devient une décomposition de $\mathcal{S}$

en "pavés curvilignes".

▷ $\left.\dfrac{\partial \vec{g}}{\partial u}\right|_{(u_0,v_0)}$ donne le **coefficient local d'étirement** en $\vec{p_0}$ le long de la ligne u et donne la **direction** de cet étirement. Ainsi le segment allant de (u_0, v_0) à $(u_0 + \Delta u, v_0)$ est étiré en un arc de courbe de la ligne u du 1er ordre à partir de (u_0, v_0) par le segment allant de $\vec{g}|_{(u_0,v_0)}$ à $\vec{g}|_{(u_0,v_0)} + \Delta u \left.\dfrac{\partial \vec{g}}{\partial u}\right|_{(u_0,v_0)}$.

De même, le segment allant de (u_0, v_0) à $(u_0, v_0 + \Delta v)$ est étiré en une partie de la ligne v par $\vec{p_0}$, elle-même approchée au 1er ordre à partir de (u_0, v_0) par le segment allant de (u_0, v_0) à $\vec{g}|_{(u_0,v_0)}$ à $\vec{g}|_{(u_0,v_0)} + \Delta v \left.\dfrac{\partial \vec{g}}{\partial v}\right|_{(u_0,v_0)}$.

On peut noter que le quatrième sommet $(u_0 + \Delta u, v_0 + \Delta v)$ du rectangle R_Δ (de côtés $\Delta u, \Delta v$) défini par les deux segments cartésiens ci-dessus est envoyé par $\vec{g}$ sur un point approché au premier ordre à partir de (u_0, v_0) par $\vec{g}|_{(u_0,v_0)} + \Delta u \left.\dfrac{\partial \vec{g}}{\partial u}\right|_{(u_0,v_0)} + \Delta v \left.\dfrac{\partial \vec{g}}{\partial v}\right|_{(u_0,v_0)}$.

Le rectangle R_Δ est lui-même étiré en une portion de surface S_Δ approchée au premier ordre par le parallélogramme π_Δ défini par les deux segments allant de $\vec{g}|_{(u_0,v_0)}$ à respectivement $\vec{g}|_{(u_0,v_0)} + \Delta u \left.\dfrac{\partial \vec{g}}{\partial u}\right|_{(u_0,v_0)}$ et $\vec{g}|_{(u_0,v_0)} + \Delta v \left.\dfrac{\partial \vec{g}}{\partial v}\right|_{(u_0,v_0)}$.

En bref, si on suppose $\Delta u > 0$ et $\Delta v > 0$, le rectangle R_Δ d'aire $\Delta u \Delta v$ est étiré en une portion de surface S_Δ approchée au premier ordre par le parallélogramme π_Δ d'aire

$$\left\| \Delta u \left.\frac{\partial \vec{g}}{\partial u}\right|_{(u_0,v_0)} \times \Delta v \left.\frac{\partial \vec{g}}{\partial v}\right|_{(u_0,v_0)} \right\| = \Delta u \Delta v \left.\left\| \frac{\partial \vec{g}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{g}}{\partial v} \right\|\right|_{(u_0,v_0)} = \Delta u \Delta v \operatorname{dil} \vec{g}|_{(u_0,v_0)}$$

Nous dirons que le rectangle élastique R_Δ s'étale en une portion de surface dont l'aire vaut en première approximation $\operatorname{dil} \vec{g}|_{(u_0,v_0)}$ fois l'aire de R_Δ. Nous retrouvons la notion de coefficient de dilatation (local) de $\vec{g}$ près de (u_0, v_0) vue à la section 8.8.11.

CONCLUSION.

Ceci était connu ! Nous avons seulement explicité la vision de la fonction $\vec{g}$ comme une opération de déformation d'un rectangle élastique R en une surface S.

Si nous avions noté les coordonnées des points (u, v) sur le rectangle élastique avant déformation, nous lisons directement les coordonnées relatives à la paramétrisation $\vec{g}$ (ou les paramètres, ou les coordonnées curvilignes) des points de S.

Le "coefficient local d'étirement" des lignes u est donné localement par $\left\| \dfrac{\partial \vec{g}}{\partial u} \right\|$,
tandis que le "coefficient local d'étalement" des portions de surface est donné localement par $\left\| \dfrac{\partial \vec{g}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \vec{g}}{\partial v} \right\| = \operatorname{dil} \vec{g}$.

Ces deux coefficients sont des coefficients de dilatation de fonctions : l'un pour les fonctions du type $u \mapsto \vec{g}(u, v_0)$, l'autre pour la fonction $(u, v) \mapsto \vec{g}(u, v)$. Notons encore que le premier est la norme du vecteur vitesse $\left\| \dfrac{\partial \vec{g}}{\partial u} \right\|$ (par rapport à u le long de la ligne u), tandis que le second est

l'aire du parallélogramme défini par les deux vecteurs vitesse le long des lignes coordonnées. Nous appellerons $\dfrac{\partial \vec{g}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \vec{g}}{\partial v}$ le vecteur d'étalement de $\vec{g}$ autour de (u_0, v_0).

10.1.4 Plan tangent et vecteur normal induit par la paramétrisation

Si la surface paramétrée $(S, \vec{g})$ est régulière, alors, pour tout (u_0, v_0), $\left.\dfrac{\partial \vec{g}}{\partial u}\right|_{(u_0,v_0)}$ et $\left.\dfrac{\partial \vec{g}}{\partial v}\right|_{(u_0,v_0)}$ sont linéairement indépendants. Si on les voit plantés au point $\vec{g}(u_0, v_0)$, ils y sont tangents à S et définissent le plan tangent T_0 à S en $\vec{g}(u_0, v_0)$.

Le vecteur $\dfrac{\partial \vec{g}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \vec{g}}{\partial v}$ est non nul en (u_0, v_0) et est orthogonal à S (et à T_0).

Définition 10.8 — Plan tangent, vecteur normal unité et vecteur d'étalement.
Si $\vec{p_0} = \vec{g}(u_0, v_0)$ est un point régulier de $(S, \vec{g})$, alors

- le **plan tangent** T_0 à S en $\vec{p_0}$ est le plan passant par $\vec{p_0}$ de direction parallèle à $\left.\dfrac{\partial \vec{g}}{\partial u}\right|_{(u_0,v_0)}$ et $\left.\dfrac{\partial \vec{g}}{\partial v}\right|_{(u_0,v_0)}$.
- Le vecteur unité **normal** à S en $\vec{p_0}$ induit par la paramétrisation $\vec{g}$ est
$$\vec{N}_{\vec{p_0}} = \vec{N}_0 = \frac{\left.\left(\dfrac{\partial \vec{g}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \vec{g}}{\partial v}\right)\right|_{(u_0,v_0)}}{\left\|\left.\left(\dfrac{\partial \vec{g}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \vec{g}}{\partial v}\right)\right|_{(u_0,v_0)}\right\|}.$$
- Le vecteur d'étalement de $\vec{g}$ en (u_0, v_0) est
$$\left.\left(\frac{\partial \vec{g}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{g}}{\partial v}\right)\right|_{(u_0,v_0)} = \operatorname{dil} \vec{g}|_{(u_0,v_0)}\, \vec{N}_0.$$

■

Une telle définition de T_0 et N_0 doit être reçue avec circonspection. En effet, elle dépend *a priori* de la paramétrisation de S. De plus, on souhaite bien sûr que toute tangente en $\vec{p_0}$ à une courbe régulière sur S soit incluse dans le plan T_0 en $\vec{p_0}$. La proposition qui suit et son corollaire nous rassureront sur ce point : tout va bien !

Entre-temps, déduisons-en une équation cartésienne de T_0 :
$$T_0 = \left\{ \vec{p} \in \mathbb{R}^3; \left\langle \vec{p} - \vec{p_0}, \left.\left(\frac{\partial \vec{g}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{g}}{\partial v}\right)\right|_{(u_0,v_0)} \right\rangle = 0 \right\},$$
ou encore
$$T_0 \equiv \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ \left.\dfrac{\partial x}{\partial u}\right|_{(u_0,v_0)} & \left.\dfrac{\partial y}{\partial u}\right|_{(u_0,v_0)} & \left.\dfrac{\partial z}{\partial u}\right|_{(u_0,v_0)} \\ \left.\dfrac{\partial x}{\partial v}\right|_{(u_0,v_0)} & \left.\dfrac{\partial y}{\partial v}\right|_{(u_0,v_0)} & \left.\dfrac{\partial z}{\partial v}\right|_{(u_0,v_0)} \end{vmatrix} = 0.$$
Alternativement, on peut écrire des équations paramétriques de T_0 :
$$T_0 \equiv \vec{p} = \vec{g}|_{(u_0,v_0)} + d\vec{g}|_{(u_0,v_0)}(u - u_0, v - v_0) \qquad \text{où } u, v \in \mathbb{R},$$

$$T_0 \equiv \vec{p} = \vec{g}|_{(u_0,v_0)} + (u-u_0)\left.\frac{\partial \vec{g}}{\partial u}\right|_{(u_0,v_0)} + (v-v_0)\left.\frac{\partial \vec{g}}{\partial v}\right|_{(u_0,v_0)} \qquad \text{où } u,v \in \mathbb{R}\,,$$

ou encore

$$T_0 \equiv \vec{p} = \vec{p_0} + \lambda\left.\frac{\partial \vec{g}}{\partial u}\right|_{(u_0,v_0)} + \mu\left.\frac{\partial \vec{g}}{\partial v}\right|_{(u_0,v_0)} \qquad \text{où } \lambda,\mu \in \mathbb{R}\,.$$

Le plan vectoriel parallèle à T_0 (et passant par $(0,0,0)$) est appelé le **plan vectoriel tangent à** S au point (u_0,v_0). C'est le plan engendré par les deux vecteurs $\left.\frac{\partial \vec{g}}{\partial u}\right|_{(u_0,v_0)}$ et $\left.\frac{\partial \vec{g}}{\partial v}\right|_{(u_0,v_0)} \in \mathbb{R}^3$ (plantés à l'origine comme il se doit et non au point $\vec{g}(u_0,v_0)$). Comme nous l'avons fait pour les courbes, nous glisserons sur cette nuance.

Les propositions suivantes légitimisent la définition du plan tangent.

Proposition 10.2
Soit $(S,\vec{g})$ une surface régulière et $\vec{p_0} \in S$. La tangente par $\vec{p_0}$ à toute courbe régulière tracée sur S par $\vec{p_0}$ est dans le plan tangent à S en $\vec{p_0}$.

Démonstration.
Toute courbe régulière $C \equiv \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$ dans le domaine des paramètres induit une courbe régulière tracée sur S : $\vec{\gamma}(t) := \vec{g}(u(t),v(t))$. La réciproque est vraie via $\vec{g}^{-1}$.
Si $(u(0),v(0)) =: (u_0,v_0)$, alors $\vec{\gamma}(0) = \vec{g}(u_0,v_0) = \vec{p_0}$ et

$$\vec{\gamma}'(t) = u'(t)\left.\frac{\partial \vec{g}}{\partial u}\right|_{(u(t),v(t))} + v'(t)\left.\frac{\partial \vec{g}}{\partial v}\right|_{(u(t),v(t))}$$

donc

$$\vec{\gamma}'(0) = u'(0)\left.\frac{\partial \vec{g}}{\partial u}\right|_{(u(0),v(0))} + v'(0)\left.\frac{\partial \vec{g}}{\partial v}\right|_{(u(0),v(0))}.$$

Ceci prouve que le vecteur vitesse de $\vec{\gamma}$ est la combinaison linéaire de deux vecteurs vitesse selon les coordonnées u et v, avec les mêmes coefficients que ceux dans le plan des paramètres muni de la base $\vec{1_u}, \vec{1_v}$.
En particulier, la tangente à $\Gamma \equiv \vec{r} = \vec{\gamma}(t)$ est incluse dans le plan tangent à S en $\vec{p_0}$. ■

Corollaire 10.3

(i) Le plan tangent à S au point régulier $\vec{p_0}$ est indépendant de la paramétrisation régulière de S.

(ii) Le vecteur unité normal à S en $\vec{p_0}$ est, au signe près, indépendant de la paramétrisation régulière de S.

NOTATION.
Si $\vec{\gamma} : t \mapsto \vec{\gamma}(t)$ paramétrise une courbe sur S, on a que $\vec{\gamma}'(t) = u'(t)\left.\frac{\partial \vec{g}}{\partial u}\right|_{(u(t),v(t))} + v'(t)\left.\frac{\partial \vec{g}}{\partial v}\right|_{(u(t),v(t))}$ où $(u(t),v(t)) = \vec{g}^{-1}(\vec{\gamma}(t))$ décrit la courbe associée à $\vec{\gamma}$ dans le plan des paramètres (u,v).
On note de manière concise

$$d\vec{\gamma} = du\frac{\partial \vec{g}}{\partial u} + dv\frac{\partial \vec{g}}{\partial v}$$

Proposition 10.4
$\vec{p} \mapsto \vec{N}_p$ est un champ continu de vecteur normés normaux sur S

Démonstration.
La régularité de $\vec{g}$ implique que $(u,v) \mapsto \dfrac{\partial \vec{g}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \vec{g}}{\partial v}$ est continue et que $(u,v) \mapsto \left\| \dfrac{\partial \vec{g}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \vec{g}}{\partial v} \right\|$ l'est aussi et ne s'annule pas. Le quotient de deux fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas étant continu, on observe que $(u,v) \mapsto \dfrac{\dfrac{\partial \vec{g}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \vec{g}}{\partial v}}{\left\| \dfrac{\partial \vec{g}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \vec{g}}{\partial v} \right\|}$ est continue. Comme les paramètres u, v dépendent continument de $\vec{p}$ (car $\vec{g}^{-1} \in C^0$), la preuve est faite. ■

Ainsi donc, toute paramétrisation régulière $\vec{g}$ de S dans l'espace $\mathbb{R}^3$ muni d'un repère $Oxyz$ (donc orienté et muni d'un produit vectoriel) induit sur S une orientation, incarnée par le champ continu de vecteurs unité normaux $\vec{p} \mapsto \vec{N}_{\vec{p}}$.

10.1.5 Orientation d'une surface

Rappelons que nous travaillons dans $\mathbb{R}^3$, espace euclidien 3D muni d'un repère orthonormé $Oxyz$ et d'un produit vectoriel. Ainsi $\mathbb{R}^3$ est dit orienté. Dans ce cas, on définira une surface orientée comme suit.

Définition 10.9
Une surface S dans $\mathbb{R}^3$ est **orientée** par la donnée d'un champ continu $\vec{N}$ de vecteur normés normaux sur S. On notera cette surface orientée $(S, \vec{N})$. ■

Nous avons prouvé que

Proposition 10.5
Toute surface paramétrée régulière $(S, \vec{g})$ est orientée par le champ continu de vecteurs normaux normés $S \to \mathbb{R}^3 : \vec{p} \mapsto \vec{N}_p$ induit par $\vec{g}$.

Une autre manière d'exprimer cette orientation est de considérer en chaque point de S le couple de vecteurs $\left(\dfrac{\partial \vec{g}}{\partial u}, \dfrac{\partial \vec{g}}{\partial v} \right)$. Nous avons vu que $\vec{N}_p = \dfrac{\dfrac{\partial \vec{g}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \vec{g}}{\partial v}}{\left\| \dfrac{\partial \vec{g}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \vec{g}}{\partial v} \right\|}$. Mais ce couple induit un sens de rotation (que nous dirons "positif") dans le plan tangent à S, à savoir le sens qui envoie $\dfrac{\partial \vec{g}}{\partial u}$ sur $\dfrac{\partial \vec{g}}{\partial v}$ par une rotation d'angle compris entre 0 et π. Le champ des rotations d'angle $+\frac{\pi}{2}$ dans les plans tangents est continu puisque $\left(\dfrac{\partial \vec{g}}{\partial u}, \dfrac{\partial \vec{g}}{\partial v} \right)$ est continu et $\dfrac{\partial \vec{g}}{\partial u} \nparallel \dfrac{\partial \vec{g}}{\partial v}$.

Proposition 10.6
Dans un espace orienté $\mathbb{R}^3$, la donnée sur une surface S d'un champ continu de couples de vecteurs tangents $(\vec{a}, \vec{b})$ linéairement indépendants est équivalente à celle d'un champ continu de vecteurs normés normaux à S.

Il existe des surfaces non orientables, telles le ruban de Möbius et la bouteille de Klein (voir Annexe A).

10.1.6 Aire d'une portion de surface

Soit S une surface paramétrée "compacte-régulière", c'est-à-dire qu'il existe une paramétrisation de S, disons $\vec{g} : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^3$ telle que $\mathcal{D}$ est un compact mesurable dans $\mathbb{R}^2$, $\vec{g}$ est continue sur $\mathcal{D}$ et sa restriction à l'intérieur de $\mathcal{D}$ est une paramétrisation bijective régulière en tout point de $\vec{g}(\text{int } \mathcal{D}) \subset S$.

Notons qu'alors $S = \vec{g}(\mathcal{D})$ est une partie compacte (i.e. bornée et fermée) de $\mathbb{R}^3$.

Si $\mathcal{D}$ est un pavé P de $\mathbb{R}^2$ disséqué en sous-pavés délimités par les lignes $u = u_i (i = i, \ldots, k)$ et $v = v_j (j = i, \ldots, l)$ dans $\mathbb{R}^2$, alors la surface $S = \vec{g}(\mathcal{D})$ est disséquée en sous-pavés curvilignes délimités par les lignes de même équations, mais cette fois en tant que coordonnées de points de S. Nous avons vu que si P_{ij} est le pavé de $\mathbb{R}^2$ d'équations

$$P_{ij} \equiv \begin{cases} u_i & \leq u \leq u_{i+1} \\ v_i & \leq u \leq v_{j+1} \end{cases},$$

alors $\vec{g}(P_{ij})$ est le pavé curviligne sur S de mêmes équations et l'aire de celui-ci est approchée par l'aire du parallélogramme

$$T_{\vec{g},1,(u_i,v_j)}(P_{ij})$$

qui est un translaté du parallélogramme engendré par $\left.\dfrac{\partial \vec{g}}{\partial u}\right|_{(u_i,v_j)}$ et $\left.\dfrac{\partial \vec{g}}{\partial v}\right|_{(u_i,v_j)}$. Cette aire vaut donc dil $\vec{g}|_{((u_i,v_j)} \Delta u_i \Delta v_j$, où $\Delta u_i := u_{i+1} - u_i$ et $\Delta v_j := v_{j+1} - u_j$ sont supposés positifs.
Ainsi l'aire de S vaut

$$\mu_2(S) = \sum_{(i,j)} \vec{g}(P_{ij}) \approx \sum_{\substack{i=1,\ldots,k \\ j=1,\ldots,l}} \text{dil } \vec{g}|_{(u_i,v_j)} \, \Delta u_i \Delta v_j.$$

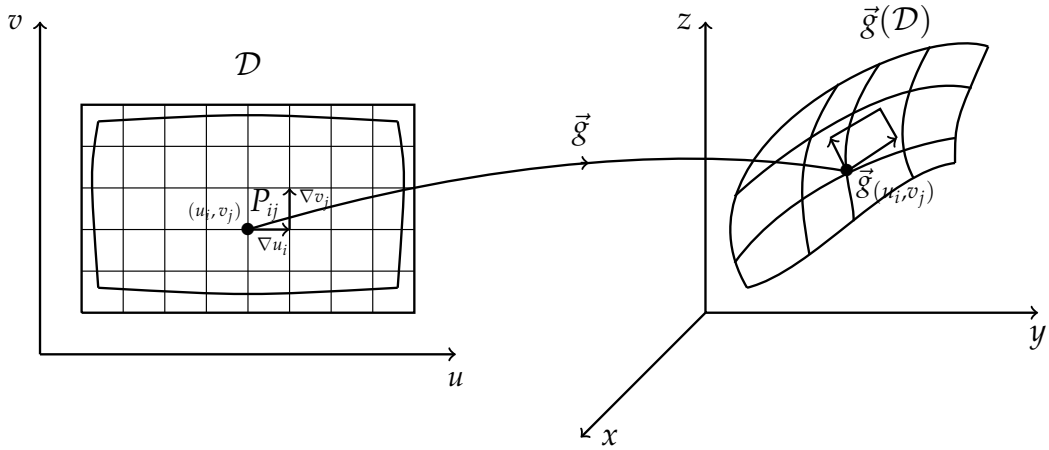


FIGURE 10.1 – Calcul de l'aire de la déformée d'un pavé cartésien par la transformation $\vec{g}$ (dissection en sous-pavés). Les sous-pavés "rectilignes" de $\mathbb{R}^2$ deviennent "curvilignes".

Si on considère une suite de subdivisions de D à normes tendant vers 0 (c'est-à-dire que max Δu_i et max $\Delta v_j \to 0$), alors la limite des approximations correspondantes (existe et) vaut

$$\iint_D \text{dil } \vec{g}|_{(u,v)} \, du \, dv = \iint_D \left\| \frac{\partial \vec{g}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{g}}{\partial v} \right\| \, du \, dv.$$

Définition 10.10
L'aire d'une surface $S = \vec{g}(D)$ paramétrée par $\vec{g} : D \to \mathbb{R}^3$ où D est un compact mesurable dans $\mathbb{R}^2$ et $\vec{g}$ est injective sur int D vaut

$$\mu_2(S) := \iint_D \left\| \frac{\partial \vec{g}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{g}}{\partial v} \right\| \, du \, dv = \iint_D \operatorname{dil} \vec{g}|_{(u,v)} \, dudv \, .$$

■

Les hypothèses $\vec{g} \in C^1$ sur D compact et mesurable garantissent l'existence de cette intégrale de Riemann. On peut prouver que le résultat obtenu est indépendant de la paramétrisation, c'est-à-dire qu'elle donne le même résultat pour deux paramétrisations C^1-équivalentes. Ceci légitimise cette définition : l'aire de S est bien une notion géométrique.
S est donnée par les équations paramétriques

$$\begin{cases} x = x(u,v) = g_1(u,v) \\ y = y(u,v) = g_2(u,v) \\ z = z(u,v) = g_3(u,v) \end{cases} \quad \text{où } (u,v) \in D.$$

■ **Exemple 10.7** La figure ci-dessous illustre notre démarche dans le cas particulier d'un huitième de sphère unité paramétrée par la longitude θ et la colatitude φ.

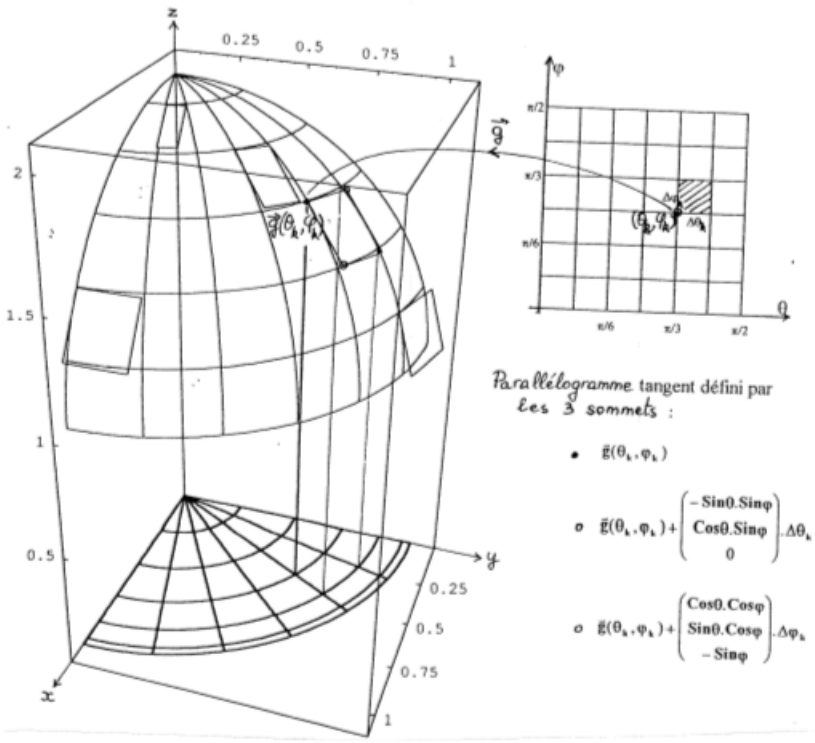


FIGURE 10.2 – Approximation de la partie de la sphère unité située dans le 1er octant.

■

Voici différentes formules pour le coefficient de dilatation local de $\vec{g}$.

$$\operatorname{dil} \vec{g} = \sqrt{\det \left({}^t(\operatorname{mat} \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v)})(\operatorname{mat} \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v)}) \right)}$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{dil}_{\vec{g}} &= \sqrt{\det\left[\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix}\right]} \\
&= \sqrt{\det\begin{pmatrix} \left\langle \frac{\partial \vec{g}}{\partial u}, \frac{\partial \vec{g}}{\partial u} \right\rangle & \left\langle \frac{\partial \vec{g}}{\partial u}, \frac{\partial \vec{g}}{\partial v} \right\rangle \\ \left\langle \frac{\partial \vec{g}}{\partial u}, \frac{\partial \vec{g}}{\partial v} \right\rangle & \left\langle \frac{\partial \vec{g}}{\partial v}, \frac{\partial \vec{g}}{\partial v} \right\rangle \end{pmatrix}} \\
&= \sqrt{\det\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}} = \sqrt{EG - F^2}
\end{aligned}
$$

où E, F, G sont définis comme étant les produits scalaires des vecteurs vitesse $\dfrac{\partial \vec{g}}{\partial u}$ et $\dfrac{\partial \vec{g}}{\partial v}$ apparaissant dans la matrice précédente,

$$
\begin{aligned}
&= \left\| \frac{\partial \vec{g}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{g}}{\partial v} \right\| \\
&= \left| \begin{vmatrix} \vec{1}_x & \vec{1}_y & \vec{1}_z \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} \right| \\
&= \sqrt{\begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}^2} \\
&= \sqrt{\left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)^2} \\
&= \sqrt{L^2 + M^2 + N^2}
\end{aligned}
$$

où L, M, N sont définis comme étant les trois déterminants jacobiens apparaissant à la ligne précédente.

R Au début du 19ème siècle, Gauss a été chargé de travaux de géodésie, à savoir la triangulation et le nivellement du Royaume de Hanovre. Il en a profité pour créer la géométrie différentielle. C'est à cette occasion qu'il introduit les notations E, F, G dans son ouvrage "*Etude générale sur les surfaces courbes*" (1827).

Intuition infinitésimale.

$$
\boxed{d\sigma := \mathrm{dil}_{\vec{g}}\, du\, dv = \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv = \sqrt{L^2 + M^2 + N^2}\, du\, dv}
$$

est appelé **élément d'aire** sur S. Il correspond à l'aire de l'approximation du 1 er ordre du pavé curviligne sur S, image d'un pavé "infinitésimal" de côtés $du\, dv$ dans le plan ouv. Répétons que

nous ne donnons aucun sens au mot infinitésimal, son rôle se limite à nous rappeler que nous remplaçons localement $\vec{g}$ par son approximation affine (développement de Taylor d'ordre 1).

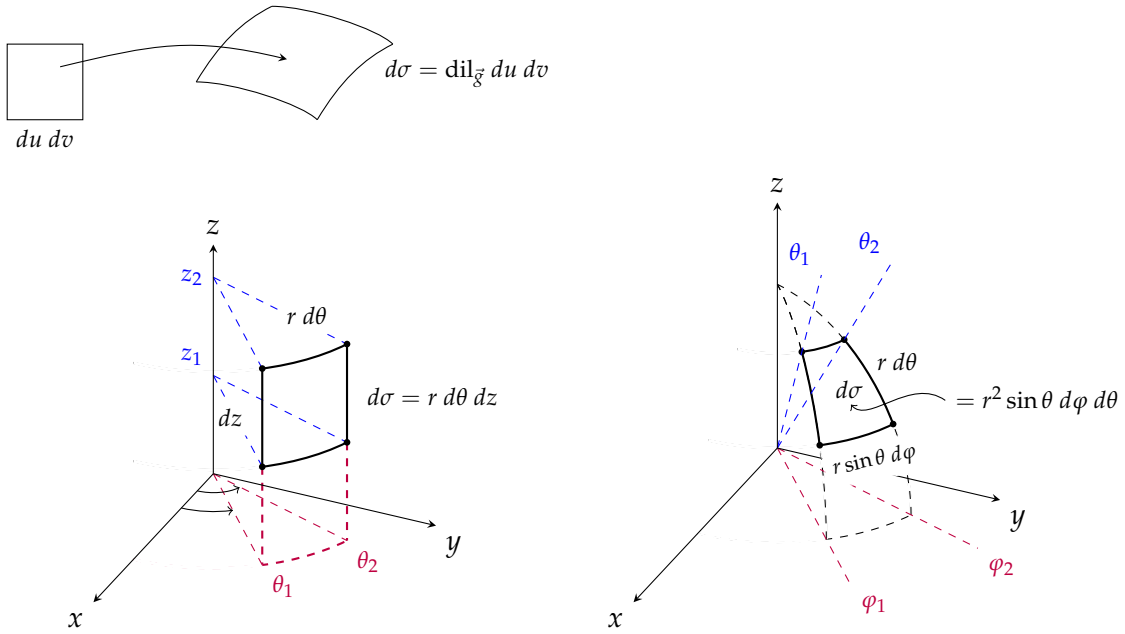


FIGURE 10.3 – Eléments d'aire en coordonnées cylindriques (gauche) et en coordonnées sphériques (droite).

■ **Exemple 10.8** *Aire du graphe d'une fonction $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.*
Nous utiliserons la paramétrisation de Monge

$$\vec{g} : D \to \mathbb{R}^3 : (x, y) \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x,y) \end{pmatrix},$$

de sorte que l'image de $\vec{g}$ est le graphe de f

$$(\mathrm{dil}_{\vec{g}})^2 = \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{\partial f}{\partial x} \\ 0 & 1 & \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix} 1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 & \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} & 1 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \end{pmatrix}$$

$$= \left(1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2\right)\left(1 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right) - \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 = 1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2.$$

L'élément d'aire est donc $\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy$ et l'aire du graphe de $f : D \to \mathbb{R}$ est donc $\mu_2(\mathrm{gph}\, f) = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy$.

Cas particulier : **si** f est constante, alors on trouve $\mu_2(\mathrm{gph}\, f) = \iint_D 1 = \mu_2(D)$,
ce qui est rassurant, puisque le graphe de f est alors un translaté de son domaine D.

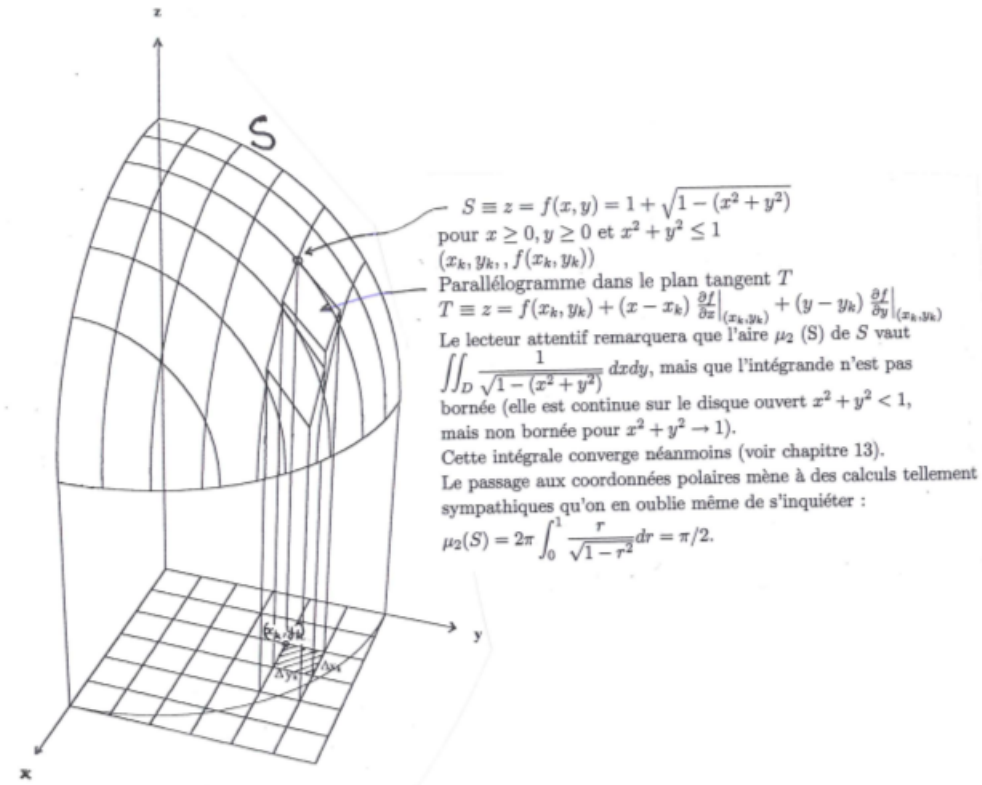


FIGURE 10.4 – Approximations utilisées pour calculer l'aire d'un huitième de sphère lorsqu'on le voit comme le graphe d'une fonction.

■

■ **Exemple 10.9** *Aire d'une surface de révolution.*
Si S est la portion de surface obtenue par rotation , autour de l'axe ox de la courbe

$$\begin{cases} y = f(x) & \text{où} \quad f \in C^1([a,b] \subset \mathbb{R}, \mathbb{R}^+) \\ z = 0 \end{cases},$$

alors S est l'image de la fonction

$$\vec{g} : [a,b] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3 : (x,\theta) \mapsto \begin{cases} x = x \\ y = f(x)\cos\theta \\ z = f(x)\sin\theta \end{cases}$$

et on vérifie facilement que

$$\text{dil}_{\vec{g}} = \left\| \frac{\partial \vec{g}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{g}}{\partial \theta} \right\| = f\sqrt{1+(f')^2},$$

d'où

$$\mu_2(S) = \int_a^b \int_0^{2\pi} f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,d\theta dx$$

et donc

$$\mu_2(S) = 2\pi \int_a^b f\sqrt{1+(f')^2}$$

qui est une intégrale simple. ◡ ■

L'exemple suivant est celui d'une surface de niveau d'une fonction scalaire de trois variables. Comme son traitement est un peu plus long, nous lui dédions la section suivante.

10.1.7 Élément d'aire sur une surface de niveau.

Comment ramener localement un ensemble de niveau au graphe d'une fonction ?

Soit $S \equiv h(x,y,z) = c$ et soit $(x_0, y_0, z_0) \in S$.
Si $\dfrac{\partial h}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, alors il existe un voisinage V de (x_0, y_0, z_0) dans lequel l'équation

$$h(x,y,z) = c$$

peut se ramener à une équation

$$z = Z(x,y).$$

De plus,

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial h}{\partial x}}{\frac{\partial h}{\partial z}} \quad \text{et} \quad \frac{\partial Z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial h}{\partial y}}{\frac{\partial h}{\partial z}}.$$

L'élément d'aire, dans le voisinage V, vaut donc

$$\begin{aligned}
\sqrt{\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)^2 + 1} \quad dx\,dy &= \sqrt{\left(\frac{\frac{\partial h}{\partial x}}{\frac{\partial h}{\partial z}}\right)^2 + \left(\frac{\frac{\partial h}{\partial y}}{\frac{\partial h}{\partial z}}\right)^2 + 1}\, dx\,dy \\
&= \frac{\sqrt{(\frac{\partial h}{\partial x})^2 + (\frac{\partial h}{\partial y})^2 + (\frac{\partial h}{\partial z})^2}}{|\,\frac{\partial h}{\partial z}\,|}\, dx\,dy.
\end{aligned}$$

La fonction h étant supposée de classe C^1, le coefficient de $dx\,dy$ est donc une fonction continue de x et y. On peut aussi écrire

$$\begin{aligned}
\sqrt{\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)^2 + 1} \quad dx\,dy &= \frac{\|\vec{\nabla} h\|}{\left|\dfrac{\partial h}{\partial z}\right|}\, dx\,dy \\
&= \frac{\sqrt{\left\langle \vec{\nabla} h, \vec{\nabla} h \right\rangle}}{|\left\langle \vec{\nabla} h, \vec{1}_z \right\rangle|}\, dx\,dy \\
&= \frac{1}{|\cos\gamma|}\, dx\,dy,
\end{aligned}$$

où γ est l'angle que fait $\vec{1}_z$ avec le vecteur $\vec{\nabla} h$, puisqu'alors

$$\left|\left\langle \vec{\nabla} h, \vec{1}_z \right\rangle\right| = \|\vec{\nabla} h\|\,\|\vec{1}_z\|\,|\cos\gamma|.$$

Autrement dit $\sqrt{\left(\dfrac{\partial Z}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial Z}{\partial y}\right)^2 + 1}$ est l'inverse de $|\cos\gamma|$, où $|\cos\gamma|$ est la longueur de la projection du vecteur normal normé $\vec{\nabla} h / \|\vec{\nabla} h\|$ sur l'axe oz. (Rappelons que nous avons supposé que $\vec{\nabla} h$ n'est pas orthogonal à $\vec{1}_z$, c'est-à-dire que $\dfrac{\partial h}{\partial z} \neq 0$).

Rappel géométrique.
Si nous notons α (resp. β, γ) comme les angles que fait $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ avec $\vec{1}_x$ (resp. $\vec{1}_y, \vec{1}_z$), alors

$$\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \cos\alpha\,\vec{1}_x + \cos\beta\,\vec{1}_y + \cos\gamma\,\vec{1}_z.$$

Cas où une des composantes de $\vec{\nabla} h$ ne s'annule pas sur S

Les réels $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ sont appelés **cosinus directeurs** du vecteur $\vec{v}$.
Si $\dfrac{\partial h}{\partial z}$ ne s'annule pas, alors l'aire de la surface $S \equiv h(x,y,z) = c$ vaut donc

$$\boxed{\mu_2(S) = \iint_D \frac{\|\vec{\nabla} h\|}{|\frac{\partial h}{\partial z}|}\, dx\, dy = \iint_D \frac{1}{|\cos\gamma|}\, dx\, dy\ ,}$$

où D est la projection de S sur le plan oxy et où $\vec{\nabla} h$ et $\dfrac{\partial h}{\partial z}$ sont calculés en $(x, y, Z(x,y)) \in S$.

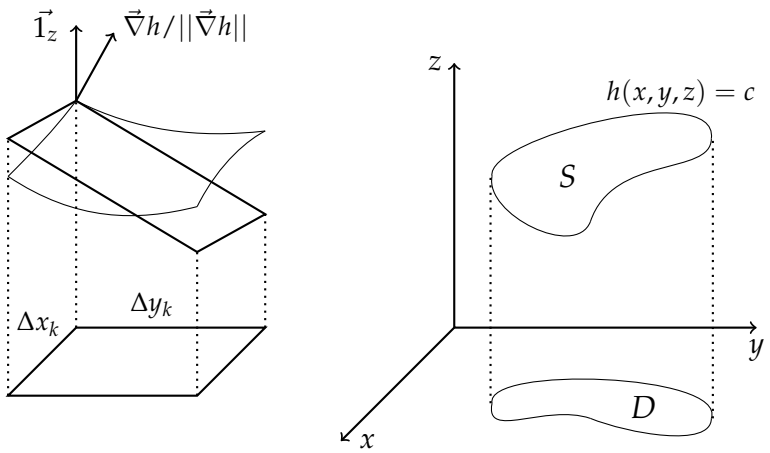


FIGURE 10.5 – Projections d'une surface sur le plan oxy.

On peut procéder de manière analogue si $\dfrac{\partial h}{\partial y}$ ou si $\dfrac{\partial h}{\partial x}$ ne s'annule pas : il suffit de permuter les rôles de x, y et z. Le cas plus général, où chacune de ces dérivées s'annule quelque part, est l'objet de la sous-section suivante

Cas général : traitement par dissection

Si $S \subseteq \mathbb{R}^3$ est définie par l'équation cartésienne

$$h(x,y,z) = c,$$

où $h : A \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ est de classe C^1, telle que $\|\vec{\nabla} h\|$ ne s'annule pas sur S, alors on dissèque S en un nombre fini de portions de surfaces plus petites, qui peuvent être décrites comme étant les graphes de fonctions de deux des trois variables x, y, z. Après avoir calculé l'aire de chacune de ces sous-portions, on somme les résultats pour obtenir l'aire de S. (On utilise ici l'additivité de l'aire, propriété qui est bien cohérente avec toutes les définitions que nous avons données jusqu'ici).

Mais est-ce faisable ? L'hypothèse "$\|\vec{\nabla} h(x_0, y_0, z_0)\| \neq 0 \quad \forall (x_0, y_0, z_0)$" nous assure que l'une au moins des trois dérivées $\dfrac{\partial h}{\partial x}, \dfrac{\partial h}{\partial y}, \dfrac{\partial h}{\partial z}$ est non nulle en (x_0, y_0, z_0). Le théorème de la fonction implicite (voir chapitre 8 annexe B) nous assure donc qu'il est possible de résoudre l'équation $h(x,y,z) = c$ par rapport à l'une de ses variables x, y ou z au voisinage de tout $(x_0, y_0, z_0) \in S$, ce qui revient bien à voir S dans ce voisinage comme le graphe d'une fonction des deux

autres variables. Puisque nous pouvons effectuer ceci en tout point (x_0, y_0, z_0) de S et que la compacité supposée de S nous permet de sélectionner un nombre fini des voisinages ci-dessus suffisant à recouvrir S, la dissection préconisée au début de cette section est donc (du moins théoriquement) réalisable.

■ Exemple 10.10

Calculons l'aire de la sphère $S \equiv x^2 + y^2 + z^2 = a^2$. Pour cela, calculons d'abord l'aire de l'hémisphère supérieure d'équation $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$, qui se projette bijectivement sur le disque $x^2 + y^2 \leq a^2$ du plan $z = 0$, puis doublons le résultat obtenu. Nous trouvons

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \quad \text{et} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$$

D'où

$$\begin{aligned}
\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1} &= \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{a^2 - x^2 - y^2} + 1} \\
&= \sqrt{\frac{x^2 + y^2 + a^2 - x^2 - y^2}{a^2 - x^2 - y^2}} \\
&= \sqrt{\frac{a^2}{a^2 - x^2 - y^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}.
\end{aligned}$$

Notons que, plutôt que de calculer explicitement z, $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, ce qui n'était qu'un jeu d'enfant ici, mais pourrait, pour d'autres surfaces, se révéler très pénible, voire impossible, nous aurions pu poser $h(x, y, z) := x^2 + y^2 + z^2$ et utiliser le résultat 10.7.9 pour calculer notre intégrande :

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{(\frac{\partial h}{\partial x})^2 + (\frac{\partial h}{\partial y})^2 + (\frac{\partial h}{\partial z})^2}}{\mid \frac{\partial h}{\partial z} \mid} = \frac{\sqrt{(2x)^2 + (2y)^2 + (2z)^2}}{\mid 2z \mid} &= \frac{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{\mid 2z \mid} \\
&= \frac{2\sqrt{a^2}}{\mid 2z \mid} = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}.
\end{aligned}$$

Le résultat obtenu nous suggère de passer aux coordonnées cylindriques, où

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2 - r^2}}.$$

Fubini nous conduit au calcul de

$$\int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{a}{\sqrt{a^2 - r^2}} r \, dr \, d\theta.$$

Attention : l'intégrande n'est pas définie en $r = a$. Pire : elle tend vers $+\infty$ lorsque r tend vers a^-. L'intégrale intérieure est donc dite "généralisée" (chapitre **13**). Nous calculons dès lors

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} (\lim_{h \to a^-} \int_0^h \frac{a}{\sqrt{a^2 - r^2}} r \, dr) \, d\theta &= \int_0^{2\pi} \lim_{h \to a^-} (-a\sqrt{a^2 - r^2}) \,]_0^h \, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left[\lim_{h \to a^-} (-a\sqrt{a^2 - h^2}) + a^2 \right] d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} a^2 \, d\theta = a^2 \, [\theta]_0^{2\pi} = 2\pi a^2.
\end{aligned}$$

L'aire de la sphère est donc $4\pi a^2$.
Pourquoi avons-nous affaire à une intégrale généralisée ? Aurions-nous pu l'éviter ?
L'intégrande $a/\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ est bien une fonction continue sur $V = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+$, mais elle n'est pas bornée sur V, car pour $(x, y, z) \in S$ tendant vers un point (x_0, y_0, z_0) de $S \cap \text{fr}\, V$ (c'est-à-dire tel que $z_0 = 0$ et $x_0^2 + y_0^2 = a^2$),

$$\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1} \longrightarrow +\infty,$$

ce qui correspond géométriquement au fait que la surface est perpendiculaire au plan oxy des variables libres x et y. Ceci est à mettre en parallèle avec le fait qu'au voisinage de (x_0, y_0, z_0), on ne peut pas résoudre

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

relativement à z (mais bien relativement à x ou à y).
Nous pouvons éviter le recours aux intégrales généralisées en disséquant la sphère, non pas en deux hémisphères plus l'équateur (d'aire nulle), mais en un nombre plus grand de morceaux, par exemple comme suit. Considérons les 8 sommets $(\pm\frac{a}{\sqrt{3}}, \pm\frac{a}{\sqrt{3}}, \pm\frac{a}{\sqrt{3}})$ d'un cube inscrit dans la sphère et dont les arêtes sont parallèles aux axes. Les projections centrées à l'origine des 6 faces de ce cube sur la sphère S définissent une partition de S en 6 pavés curvilignes de dimension 2 et 12 courbes d'aire nulle (les projections des arêtes du cube). Il est clair que sur chacun de ces 6 pavés curvilignes, on peut exprimer une des trois variables x, y, z en fonction de deux autres, et que le coefficient de l'élément d'aire y est une fonction continue et bornée, donc intégrable. Le lecteur peut calculer effectivement les 6 intégrales correspondantes

$$\int_{S_i} d\sigma \qquad (i = 1, \ldots, 6)$$

puis les sommer, pour se convaincre qu'en pratique, il est bien plus efficace de calculer une intégrale généralisée comme plus haut, plutôt que ces 6 intégrales !

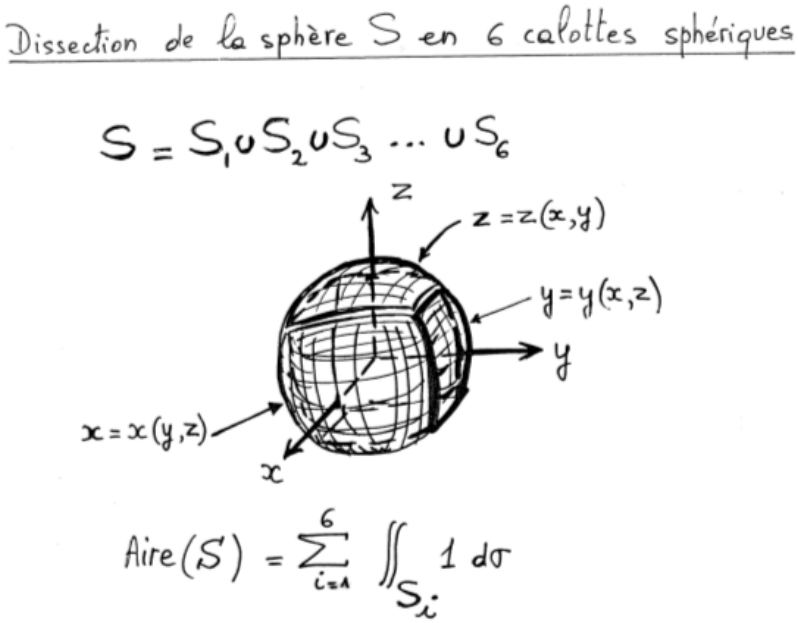


FIGURE 10.6 – Dissection de la sphère S en 6 calottes sphériques.

■

10.1.8 Mauvaises approximations d'une surface

On a pu définir la longueur d'une courbe C comme la limite commune de toutes les suites de longueurs de courbes polygonales inscrites dans C (voir section 10.3). Une telle démarche ne peut s'étendre sans précautions ni aux surfaces, ni aux variétés de dimension ≥ 2 en général, comme le montre l'exemple suivant. Cet exemple montre que même pour une surface aussi régulière qu'un cylindre de révolution, la suite des aires de surfaces polyédriques inscrites ne converge pas nécessairement vers l'aire de la surface approchée, même lorsque les aires des faces tendent vers 0.

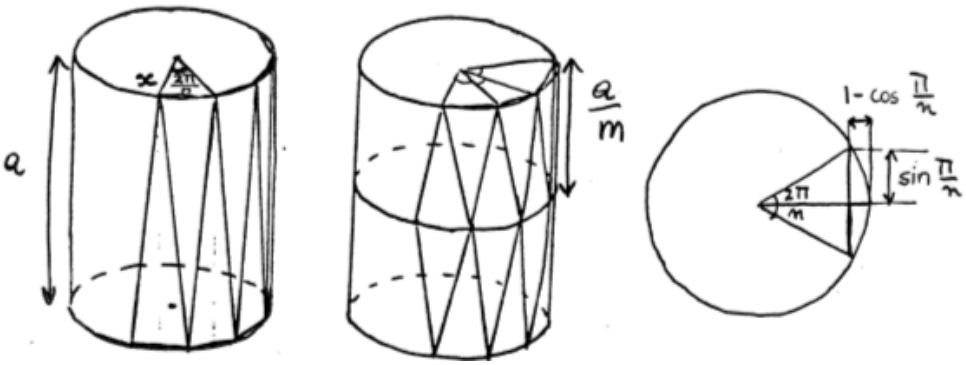


FIGURE 10.7 – Différentes approximations d'un cylindre par triangulation.

Soit un cylindre circulaire de rayon 1 et de hauteur a.
Considérons l'ensemble E des images de x par les puissances d'une antirotation d'angle $\dfrac{2\pi}{2n}$ de tour conservant ce cylindre. Approchons la surface latérale du cylindre par la triangulation dont les sommets sont les points de l'ensemble E.

$$\text{Aire totale } =: A(1,n) = 2n \sin\frac{\pi}{n}\sqrt{a^2 + \left(1 - \cos\frac{\pi}{n}\right)^2}.$$

Si on subdivise d'abord le cylindre en m cylindres superposés de hauteur $\dfrac{a}{m}$ et qu'après on pratique une telle triangulation des surfaces latérales de ces m cylindres, on obtient :

$$\begin{aligned}
\text{Aire totale } =: A(m,n) &= m\,2n \sin\frac{\pi}{n}\sqrt{\left(\frac{a}{m}\right)^2 + \left(1 - \cos\frac{\pi}{n}\right)^2} \\
&= 2n \sin\frac{\pi}{n}\sqrt{a^2 + m^2\left(1 - \cos\frac{\pi}{n}\right)^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{m\to\infty} A(m,n) &= +\infty \\
\lim_{n\to\infty} A(n,n) &= 2\pi a \\
\lim_{n\to\infty} A(n^2,n) &= 2\pi a^2 + \frac{\pi^4}{4}.
\end{aligned}$$

10.1.9 Aire d'un graphe : la voie directe

Dans ce qui suit, nous reconstruisons la formule de l'aire du graphe d'une fonction sans passer par la paramétrisation d'une telle surface.

$$S \equiv z = f(x,y)\ ,\ (x,y) \in D$$

Nous supposons $f \in C^1(D, \mathbb{R})$, D compact.

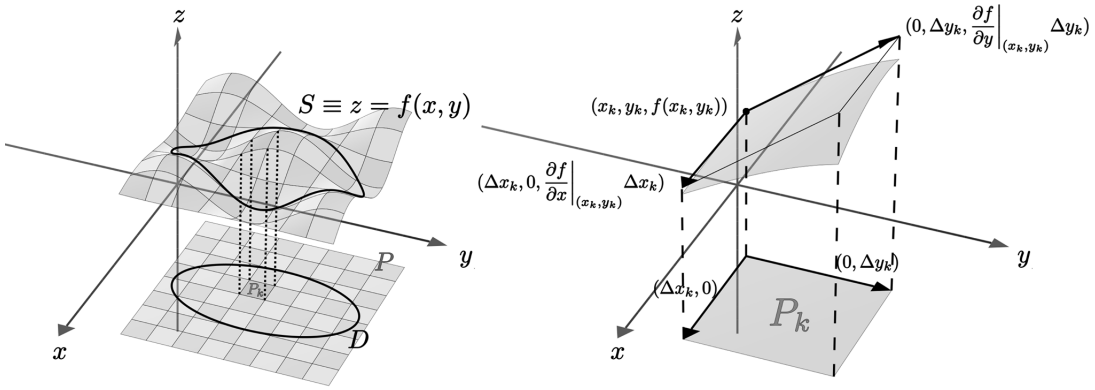


FIGURE 10.8 – Graphe de f, subdivision du domaine et zoom sur l'approximation affine au-dessus d'un sous-pavé P_k.

Soient

- ▷ P un pavé fermé recouvrant D,
- ▷ $\mathcal{P}_\ell = (P_k)_{k=1,\cdots,\ell}$ une subdivision de P en ℓ sous-pavés fermés,
- ▷ $x_k, y_k, \Delta x_k, \Delta y_k$ définis par $P_k = P((x_k, y_k), (x_k + \Delta x_k, y_k), (x_k, y_k + \Delta y_k))$, où $\Delta x_k, \Delta y_k > 0$.

On approche la portion du graphe de f se projetant sur P_k par la portion du graphe de l'approximation affine de f à partir de (x_k, y_k) se projetant sur P_k, qui est un parallélogramme translaté de

$$P\begin{pmatrix} (& 0 & , & 0 & , & 0 &) \\ (& \Delta x_k & , & 0 & , & \frac{\partial f}{\partial x}\big|_{(x_k,y_k)}\Delta x_k &) \\ (& 0 & , & \Delta y_k & , & \frac{\partial f}{\partial y}\big|_{(x_k,y_k)}\Delta y_k &) \end{pmatrix},$$

dont l'aire vaut

$$\begin{aligned} A_k &= \left\| (\Delta x_k, 0, \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x_k) \times (0, \Delta y_k, \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y_k) \right\| \\ &= \left| \det\left(\begin{pmatrix} \Delta x_k & 0 & \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x_k \\ 0 & \Delta y_k & \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_k & 0 \\ 0 & \Delta y_k \\ \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x_k & \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y_k \end{pmatrix} \right) \right| \\ &= \left| \begin{vmatrix} \vec{1}_x & \vec{1}_y & \vec{1}_z \\ \Delta x_k & 0 & \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x_k \\ 0 & \Delta y_k & \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y_k \end{vmatrix} \right| = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1}\ \Delta x_k \Delta y_k \end{aligned}$$

où toutes les dérivées sont évaluées en (x_k, y_k).

L'aire A de S est donc approchée par

$$\sum_{k=1}^{\ell} \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1}\Bigg|_{(x_k,y_k)} \Delta x_k \Delta y_k,$$

qui est une somme de Riemann de la fonction

$$(x,y) \mapsto \begin{cases} \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1}\Bigg|_{(x,y)} & \text{si } (x,y) \in \operatorname{int} D \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Or cette fonction est continue sur int D et bornée sur D (pourquoi ?). On en déduit qu'elle est intégrable sur D et que pour une suite de subdivisions $(\mathcal{P}_\ell)$ dont les normes tendent vers 0, la suite de sommes de Riemann correspondantes tend vers

$$\iint_D \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1}\Bigg|_{(x,y)} dxdy \qquad \text{(pourquoi ?)}.$$

Nous retrouvons ainsi l'aire du graphe de f :

$$A := \iint_D \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1} = \iint_D \sqrt{\|\vec{\nabla} f\|^2 + 1}.$$

Pour une meilleure intuition : revoir les interprétations géométriques

- de $\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}$ comme la valeur absolue de la pente en $(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$ de la section plane de gph f par le plan vertical $y = y_0$ parallèle à $\vec{1}_z$ et $\vec{1}_y$,

- et de $\|\vec{\nabla} f\|$ comme la valeur absolue de la pente de gph f dans la direction où f varie le plus, comme nous l'avons vu en 8.8.3.

Cas particulier.
Si f est constante, on retrouve évidemment

$$A = \iint_D 1 = \text{aire de } D.$$

♢ Scrupules

L'approximation faite de la portion de surface se projettant sur P_j par le parallélogramme tangent de ses coins et se projetant également sur P_j semble "raisonnable" seulement si P_j n'est pas sur la frontière de D. Le raisonnement ci-dessous montre que la contribution des sous-pavés à cheval sur la frontière tend vers 0 (pour une suite de subdivisions à norme tendant vers 0) précisément parce qu'on a supposé cette frontière de mesure nulle.

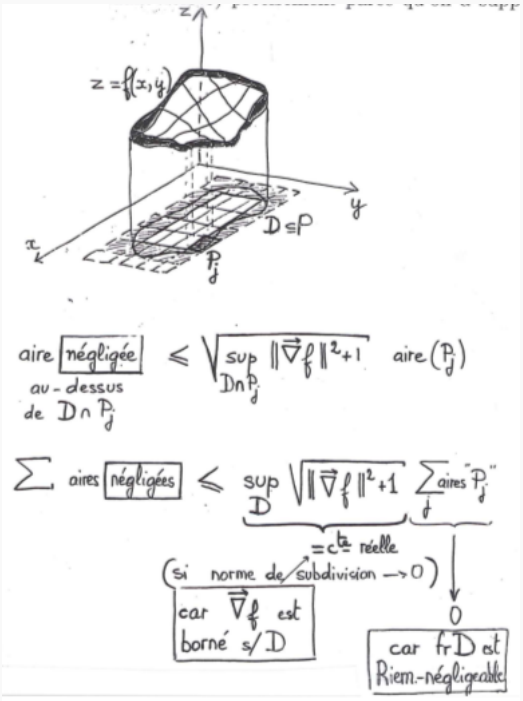


FIGURE 10.9 – Contribution des sous-pavés à cheval sur la frontière du domaine.

10.2 Intégrales de surface et flux

En suivant une démarche semblable à celle qui nous a conduits aux notions d'intégrales curvilignes présentées précédemment, nous allons à présent définir l'intégrale d'une fonction scalaire, puis d'un champ de vecteurs ou d'une 2-forme différentielle, sur une surface, orientée ou non, plongée dans $\mathbb{R}^3$ (ou plus précisément dans l'espace euclidien de dimension 3 muni d'un repère dit orthonormé). Le lecteur attentif remarquera que tout ceci peut s'étendre aux surfaces plongées dans $\mathbb{R}^m (m \geq 3)$.

10.2.1 Intégrale de surface d'une fonction scalaire : intuition

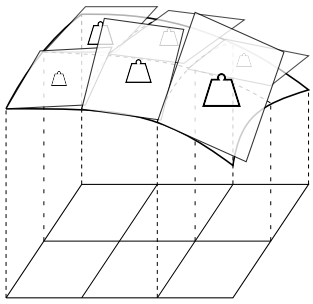


FIGURE 10.10 – Surface S découpée en sous-surfaces S_i, chacune de masse différente.

Intuitivement, si S est une portion de surface matérielle dont la masse spécifique au point $\vec{x}$ est $f(\vec{x})$, alors l'intégrale de f sur S mesurera la **masse totale** M de S, ce qu'on notera

$$M = \iint_S f d\sigma \quad \text{ou} \quad \int_S f d\sigma.$$

En particulier, si f est constante,

$$M = \iint_S f d\sigma = f \iint_S 1\, d\sigma = f\, \mu_2(S),$$

alors M est le produit de cette masse spécifique constante par l'aire de S, que nous avons appris à calculer en 10.7.
Nous définirons la masse spécifique moyenne f_{moy} sur S de telle sorte que

$$\iint_S f d\sigma = f_{moy} \mu_2(S)\,.$$

Pour calculer $\mu_2(S)$, nous avions considéré une suite de dissections $\mathcal{D}_n$ de S en sous-portions de surface $S_1, \cdots, S_k, \cdots S_{m(n)}$ (de diamètre maximal δ_n tendant vers 0 avec $n \to +\infty$), et suggéré de définir

$$\iint_S d\sigma := \mu_2(S) := \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{m(n)} \mu_2(S_k).$$

Très naturellement, on aimerait écrire

$$\iint_S f d\sigma \overset{\heartsuit}{=} \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} f\left(\vec{\xi}_k\right) \mu_2(S_k),$$

où $\vec{\xi}_k$ est un point arbitrairement choisi sur S_k.

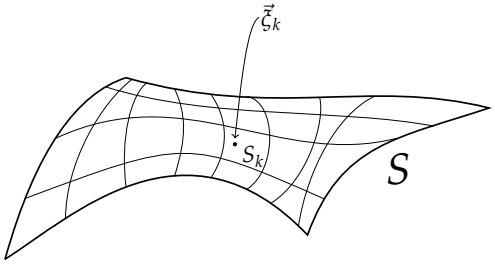


FIGURE 10.11 – Dissection de S en une suite de sous-surfaces S_k.

10.2.2 $\int_S f d\sigma$: définition après paramétrisation.

En fait, nous n'avons pas calculé $\mu_2(S_k)$ en général, loin de là ! D'abord, nous n'avions considéré que certaines dissections $(S_1, \ldots, S_{m(n)})$ de S, induites par une paramétrisation particulière de S et un pavage cartésien du domaine D de cette paramétrisation.
Ensuite, nous avions approché $\mu_2(S_k)$ par l'aire A_k d'un certain parallélogramme tangent à S .
Enfin, nous n'avons pas démontré la convergence de

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} A_k$$

et encore moins établi $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} A_k = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \mu_2(S_k)$, mais nous avons utilisé la formule ainsi suggérée pour **motiver** la définition :

Définition 10.11

$$\iint_S d\sigma := \iint_D \left\| \frac{\partial \vec{g}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{g}}{\partial v} \right\| du\, dv,$$

où

$$S = \vec{g}(D) \quad \text{et} \quad \vec{g} : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : (u,v) \mapsto \begin{pmatrix} g_1(u,v) \\ g_2(u,v) \\ g_3(u,v) \end{pmatrix}$$

est de classe C^1. ■

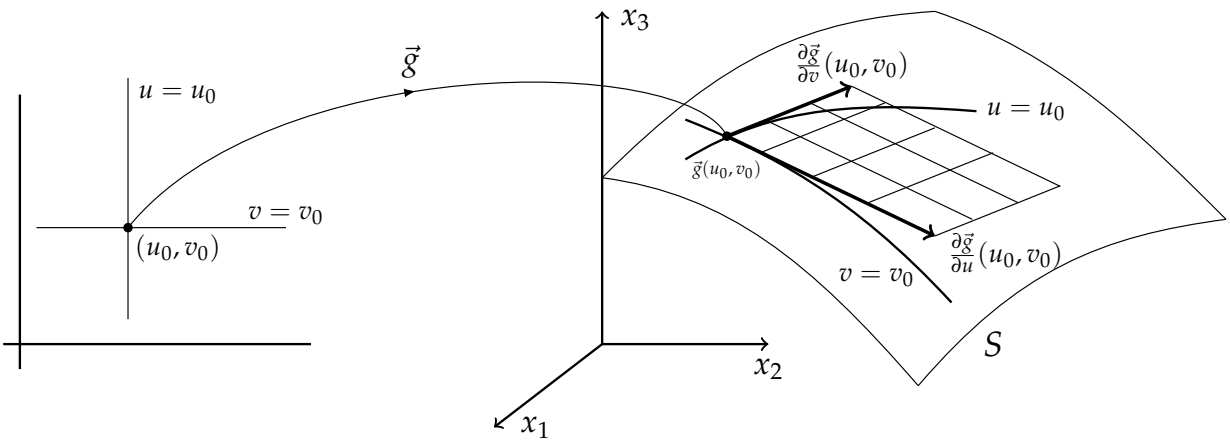


FIGURE 10.12 – Application de $\vec{g}$ à un point (u_0, v_0) de D.

Rappelons les notations commodes :

$$
\begin{aligned}
S &\equiv \begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases} \qquad \text{où } (u,v) \in D, \\
d\sigma &= \left\| \frac{\partial}{\partial u}(x,y,z) \times \frac{\partial}{\partial v}(x,y,z) \right\| du\, dv \\
&= \sqrt{\left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)^2}\, du\, dv \\
\text{où} \qquad & \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}, \ldots
\end{aligned}
$$

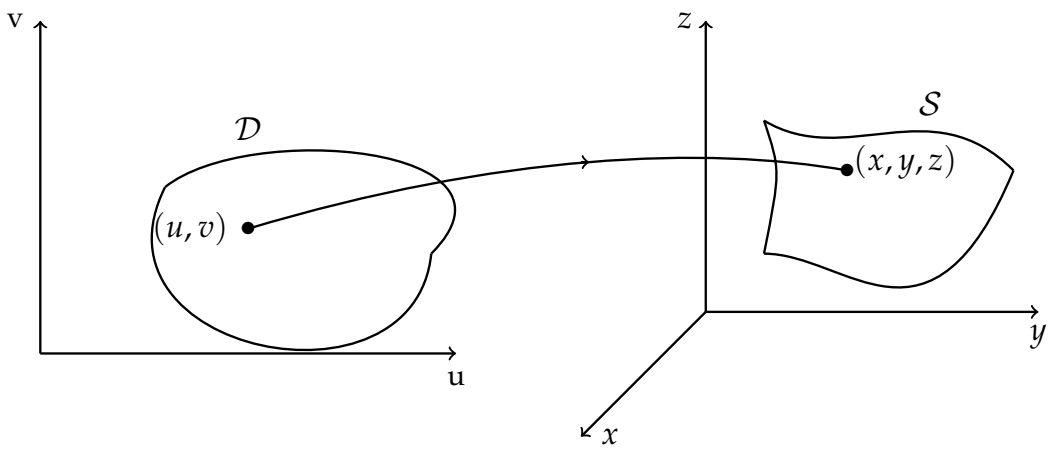


FIGURE 10.13 – Domaine D et surface S.

Une démarche semblable nous amène à **définir**

Définition 10.12

$$\iint_S f d\sigma := \iint_D f|_{(x(u,v),y(u,v),z(u,v))} \left\| \frac{\partial(x,y,z)}{\partial u} \times \frac{\partial(x,y,z)}{\partial v} \right\|\Big|_{(u,v)} du\, dv$$

Cette définition pose bien sûr le problème de l'existence de l'intégrale de Riemann du second membre. Si D est un ouvert borné connexe mesurable, que $\vec{g}$ est de classe C^1 et $d\vec{g}$ est de rang maximal sur D, que $\vec{g}$ est bijective sur $\vec{g}(D)$, et que $\vec{g}(D) \subseteq S \subseteq \vec{g}(\text{adh}D)$; si de plus, f est continue sur adh D, de sorte que l'intégrande est continue et bornée sur D, alors cette intégrale de Riemann existe bien.
La légitimité de cette définition se pose encore : celle-ci recourt explicitement à une paramétrisation de S, or nous cherchons à définir une notion indépendante d'un choix de paramétrisation pour S. On peut montrer que c'est bien le cas (admis).
En fait, nous souhaitons mieux encore : une notion d'intégrale d'une fonction scalaire sur une surface qui ne dépende que de la fonction, de la surface et de la métrique de l'espace (euclidien) ambiant, donc indépendante de la base orthonormée qui nous permet d'identifier cet

espace euclidien à $\mathbb{R}^n$. On peut également montrer que cette notion résiste aux changements de base orthonormés (ou encore aux isométries de $\mathbb{R}^n$).

10.2.3 Propriétés de l' intégration d'une fonction scalaire sur une surface

Mentionnons d'abord les deux additivités de l'intégration :

(i) **Additivité de l'intégration de f sur des domaines disjoints .**

Proposition 10.7

$$\iint_{S_1 \cup S_2} f \, d\sigma = \iint_{S_1} f \, d\sigma + \iint_{S_2} f \, d\sigma$$

si $S_1 \cap S_2 = \phi$ (et même dès que $\mu_2(S_1 \cap S_2) = 0$).
Plus généralement :

$$\iint_{S_1 \cup S_2} f \, d\sigma = \iint_{S_1} f \, d\sigma + \iint_{S_2} f \, d\sigma - \iint_{S_1 \cap S_2} f \, d\sigma$$

(ii) **Linéarité de l'intégration de différentes fonctions scalaires sur S.**

Proposition 10.8 L'opérateur d'intégration sur S :

$$C^o(S) \to \mathbb{R} : f \mapsto \iint_S f \, d\sigma$$

est **linéaire** , autrement dit :

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall f, g \in C^o(S) : \iint_S (\lambda f + \mu g) d\sigma = \lambda \iint_S f \, d\sigma + \mu \iint_S g \, d\sigma.$$

(iii) **Croissance de l'intégration de fonctions scalaires sur S .**

Proposition 10.9 L'opérateur ci-dessus ((ii)) est croissant, c'est-à-dire que

$$f \leq g \text{ sur } S \Longrightarrow \iint_S f \, d\sigma \leq \iint_S g \, d\sigma.$$

En particulier :

* l'intégrale d'une fonction positive sur S est un nombre positif. On a effectivement affaire à des intégrales non orientées sur des surfaces non orientées (contrairement aux flux de champs de vecteurs),

* $m \leq f \leq M$ sur $S \Longrightarrow m\mu_2(S) \leq \iint_S f \, d\sigma \leq M\mu_2(S)$.
  Ceci permet de prouver le théorème suivant.

(iv) **Théorème de la moyenne**

Théorème 10.10 Si f est continue sur S (connexe), alors

$$\exists\, \vec{\xi} \in S : \quad \iint_S f \, d\sigma = f(\vec{\xi})\mu_2(S)$$

Définition 10.13 La **valeur moyenne** de f sur S est

$$\iint_S f \, d\sigma / \mu_2(S).$$

■

10.2.4 Flux d'un champ de vecteurs à travers une surface orientée $(S, \vec{1}_n)$

Commençons par un cas particulier :
Flux d'un champ de vitesses constant à travers une surface plane dans le sens de $\vec{1}_n$
Soit $\vec{F}$ le champ de vitesses de l'écoulement d'un fluide et supposons-le constant.

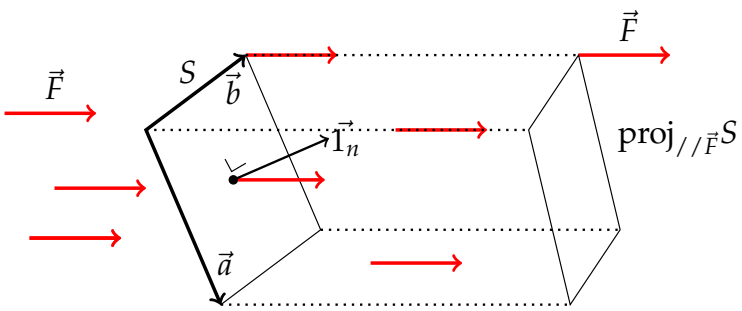


FIGURE 10.14 – Flux du champ de vecteurs $\vec{F}$ à travers une surface orientée S.

Soit S une portion de surface plane d'aire $\mu_2(S)$. Soit $\vec{1}_n$ un vecteur normé orthogonal à S . Munissons S de l'orientation induite par le vecteur normal $\vec{1}_n$. Ce vecteur $\vec{1}_n$ sera alors appelé le **vecteur normal unité** de S^+, contrairement à son opposé, $-\vec{1}_n$ qui est l'autre vecteur normal normé à S. Par définition, le **flux** $\mathcal{F}$ de $\vec{F}$ à travers S est le produit de l'aire de S par la composante de $\vec{F}$ selon $\vec{1}_n$, c'est-à-dire

$$\mathcal{F} := \left\langle \vec{F}, \vec{1}_n \right\rangle \mu_2(S).$$

Par exemple, si $S = P(\vec{a}, \vec{b})$ et que

$$\vec{1}_n = (\vec{a} \times \vec{b}) / \|\vec{a} \times \vec{b}\|,$$

alors

$$\mu_2(S) = \|\vec{a} \times \vec{b}\| \quad ,$$

de sorte que

$$\mathcal{F} = \left\langle \vec{F} \, , \, \vec{a} \times \vec{b} \right\rangle.$$

Ici $\vec{F} = F_y \vec{1}_y$ est de direction constante

$$|\mathcal{F}| = \|\vec{F}\| \; \mu_2(\mathrm{proj}_{\vec{F}} S)$$

la valeur absolue du flux est le produit de la norme de $\vec{F}$ par l'aire de la projection de S sur un plan orthogonal à $\vec{F}$. Le flux est positif si le vecteur vitesse $\vec{F}$ et le vecteur normal unité $\vec{1}_n$ forment un angle aigu. Plus généralement,
la contribution de F_y au flux de $\vec{F}$ à travers S^+ est $\pm F_y \cdot \mu_2(\text{proj } S)_{ozx}$

Cas général. Soit $(S, \vec{1}_n)$ une surface munie d'un champ continu de vecteurs normaux normés, soit $\vec{F}$ un champ de vecteurs défini dans un domaine contenant S.

Définition 10.14 Le **flux de $\vec{F}$ à travers** $(S, \vec{1}_n)$, ou **intégrale de $\vec{F}$ sur** S^+ est :

$$\iint_{(S,\vec{1}n)} \left\langle \vec{F}, \vec{d\sigma} \right\rangle := \iint_S \left\langle \vec{F}, \vec{1}_n \right\rangle d\sigma$$

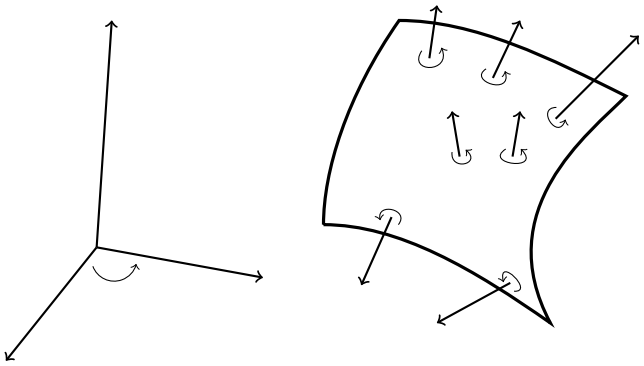


FIGURE 10.15 – Surface munie d'un champ continu de vecteurs normaux, normés et orientés.

R

$$\iint_{S,-\vec{1}n} \left\langle \vec{F}, \vec{d\sigma} \right\rangle = \iint_S \left\langle \vec{F}, -\vec{1}_n \right\rangle d\sigma = -\iint_S \left\langle \vec{F}, \vec{1}_n \right\rangle d\sigma = -\iint_{S,\vec{1}n} \left\langle \vec{F}, \vec{d\sigma} \right\rangle.$$

Il s'agit donc bien d'une intégrale orientée, puisque le signe de la fonction scalaire qu'on est amené à intégrer dépend de l'orientation de S.
La terminologie "flux de $\vec{F}$ à travers S" est claire si on voit $\vec{F}$ comme le champ de vitesses d'un fluide traversant une portion de surface S dans la direction de $\vec{1}_n$.

AUTRES NOTATIONS
On rencontre couramment

$$\iint_{S^+} F \cdot dA \text{ ou } \iint_{S^+} \vec{F} \cdot \vec{dS} \text{ plutôt que } \iint_{S^+} \left\langle \vec{F}, \vec{d\sigma} \right\rangle.$$

Calculons ce flux en choisissant une paramétrisation $\vec{g} : (u,v) \mapsto \vec{g}(u,v)$ **compatible avec l'orientation** de $(S, \vec{1}_n)$, c'est-à-dire telle que

$$\vec{1}_n = \left(\frac{\partial \vec{g}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{g}}{\partial v} \right) / \left\| \frac{\partial \vec{g}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{g}}{\partial v} \right\|$$

$$\left\langle \vec{F}, \vec{1}_n \right\rangle d\sigma = \begin{vmatrix} F_x & F_y & F_z \\ \frac{\partial g_1}{\partial u} & \frac{\partial g_2}{\partial u} & \frac{\partial g_3}{\partial u} \\ \frac{\partial g_1}{\partial v} & \frac{\partial g_2}{\partial v} & \frac{\partial g_3}{\partial v} \end{vmatrix} du\, dv = \left\langle \vec{F}, \frac{\partial \vec{g}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{g}}{\partial v} \right\rangle du\, dv$$

En écrivant $\vec{F} = F_x\vec{1}_x + F_y\vec{1}_y + F_z\vec{1}_z$ et $g_1(u,v) = x(u,v), g_2(u,v) = y(u,v), \cdots$, c'est-à-dire avec les notations $S \equiv \begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases}$, où (u,v) parcourt D, on obtient ainsi la proposition suivante.

Proposition 10.11 $\displaystyle\iint_{S^+} \left\langle \vec{F}, d\vec{\sigma} \right\rangle$

$$= \iint_D \left(F_x|_{\vec{g}(u,v)} \left.\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right|_{(u,v)} + F_y|_{\vec{g}(u,v)} \left.\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right|_{(u,v)} + F_z|_{\vec{g}(u,v)} \left.\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|_{(u,v)} \right) du\, dv$$

$$= \iint_D \left\langle \left.\vec{F}\right|_{\vec{g}(u,v)}, L\,\vec{1}_x + M\,\vec{1}_y + N\,\vec{1}_z \right\rangle du\, dv.$$

Interprétations géométriques

Soit $\vec{1}_n = \left(\frac{\partial \vec{g}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{g}}{\partial v}\right) / \left\| \frac{\partial \vec{g}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{g}}{\partial v} \right\|$. Rappelons que

(i) $\displaystyle\left\| \frac{\partial(x,y,z)}{\partial u} \times \frac{\partial(x,y,z)}{\partial v} \right\| = \sqrt{\left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)^2}$

est l'aire du parallélogramme P sous-tendu par $\left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}\right)$ et $\left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}\right)$. Cela peut s'interpréter aisément sur la figure 10.17 comme le théorème de Pythagore appliqué au "vecteur aire" présenté sur la figure 10.18.

(ii) $\displaystyle\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ est l'**aire algébrique** (ou orientée) du **parallélogramme orienté** $P_{xy} = P\left(\left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}\right), \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}\right)\right)$ dans le plan oxy correspondant à la projection de P sur le plan $z = 0$.

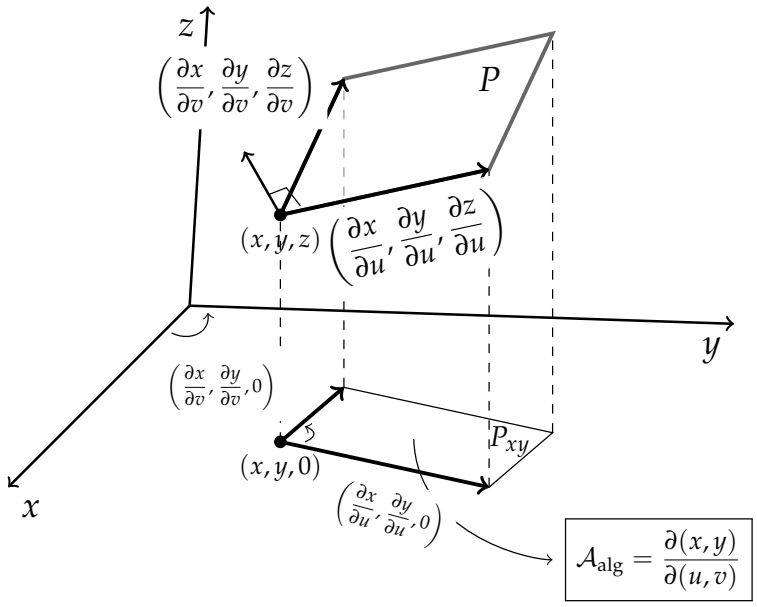


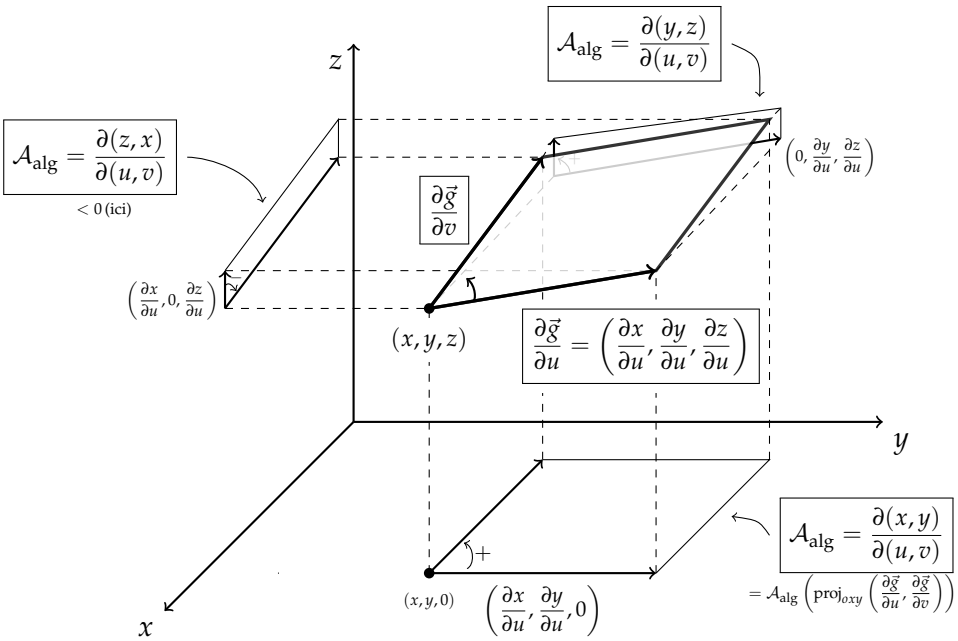
FIGURE 10.16 – Parallélogramme P ainsi que sa projection P_{xy} sur le plan $z = 0$.

La **contribution** de la composante F_z selon $\vec{1}_z$ au flux de $\vec{F}$

— à travers $(P, \vec{1}_n)$ est le produit $F_z \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ de F_z par l'aire orientée de la projection $(P, \vec{1}_n)$ sur oxy parallèlement à $\vec{1}_z$,

— à travers $(S, \vec{1}_n)$ est

$$\iint_D F_z \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} du\, dv.$$



$$\begin{aligned}\langle \vec{F}, \frac{\partial \vec{g}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{g}}{\partial v} \rangle = {} & F_x \cdot \mathcal{A}_{\text{alg}}\left(\text{proj}_{oyz}\left(\frac{\partial \vec{g}}{\partial u}, \frac{\partial \vec{g}}{\partial v}\right)\right) \\ & + F_y \cdot \mathcal{A}_{\text{alg}}\left(\text{proj}_{ozx}\left(\frac{\partial \vec{g}}{\partial u}, \frac{\partial \vec{g}}{\partial v}\right)\right) \\ & + F_z \cdot \mathcal{A}_{\text{alg}}\left(\text{proj}_{oxy}\left(\frac{\partial \vec{g}}{\partial u}, \frac{\partial \vec{g}}{\partial v}\right)\right)\end{aligned}$$

FIGURE 10.17 – Décomposition du flux de $\vec{F}$ selon ses composantes.

Ainsi, en suivant

(i) la définition 10.14 qui définit le flux d'un champ vectoriel $\vec{F}$ comme

$$\iint_{S^+} \langle \vec{F}, \vec{d\sigma} \rangle \ ,$$

(ii) la proposition 10.11 qui utilise la paramétrisation de S^+ pour réécrire l'intégrale :

$$\iint_{S^+} \langle \vec{F}, \vec{d\sigma} \rangle = \iint_D \left\langle \vec{F}, \frac{\partial \vec{g}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{g}}{\partial v} \right\rangle \, du \, dv \ ,$$

(iii) et en définissant le vecteur "aire" $\vec{A}$ qui contient et l'aire (le scalaire) et l'orientation du parallélogramme orienté formé par les vecteurs vitesse :

$$\underbrace{\vec{A}}_{\text{vecteur "aire"}} := \frac{\partial \vec{g}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{g}}{\partial v} = (\mathrm{dil}\, \vec{g}) \vec{1}_n = \begin{vmatrix} \vec{1}_x & \vec{1}_y & \vec{1}_z \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} \ ,$$

le flux de $\vec{F}$ peut se réécrire comme

$$\iint_D \left\langle \vec{F}, \vec{A} \right\rangle \, du \, dv \ ,$$

où

$$\begin{aligned} \langle \vec{F}, \vec{A} \rangle &= F_x A_x + F_y A_y + F_z A_z \\ &= F_x \, \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} + F_y \, \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} + F_z \, \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \ . \end{aligned}$$

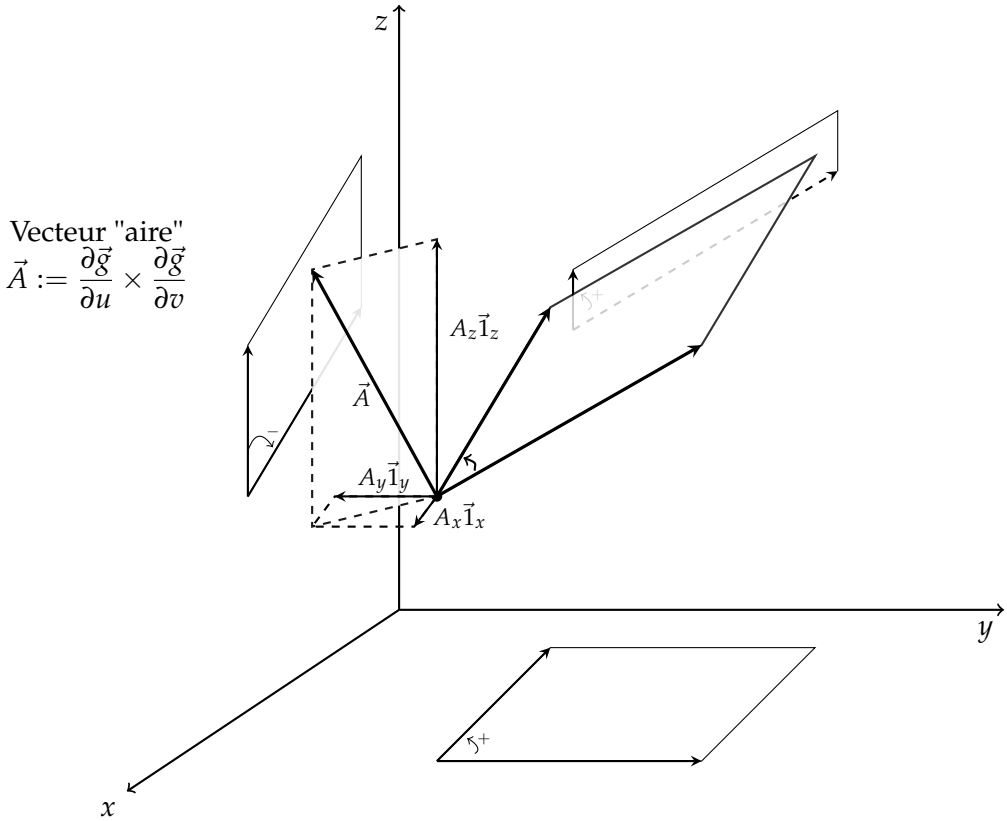


FIGURE 10.18 – Définition du vecteur d'aire $\vec{A}$, qui facilite la notation du calcul de flux.

10.2.5 Propriétés des flux

Celles-ci résultent directement de la définition et des propriétés des intégrales de surface de fonctions scalaires ou des intégrales de Riemann dans $\mathbb{R}^2$. Mentionnons le caractère intrinsèque de la notion de flux d'un champ de vecteurs , qui ne dépend ni de la paramétrisation de la surface, ni du choix du système d'axes orthonormé dont on munit notre espace euclidien muni d'une métrique.

(i) **Linéarité des flux** (superposition de champs de vecteurs)
L'opérateur $\iint_{S^+}$ (d'intégration sur une surface orientée S^+) est **linéaire** dans l'espace vectoriel des champs de vecteurs continus sur $U \supseteq S$(respectivement 2-formes différentielles continues sur $U \supseteq S$ (voir sections suivantes).

Proposition 10.12

$$\iint_{S^+} \left\langle \lambda \vec{F} + \mu \vec{G}, \vec{d\sigma} \right\rangle = \lambda \iint_{S^+} \left\langle \vec{F}, \vec{d\sigma} \right\rangle + \mu \iint_{S^+} \left\langle \vec{G}, \vec{d\sigma} \right\rangle$$

ou en termes de formes différentielles :

$$\iint_{S^+} \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \omega_i = \sum_{i=1}^{k} \left(\lambda_i \iint_{S^+} \omega_i \right).$$

(ii) **Majoration de la valeur absolue du flux**
Il n'y a pas de relation d'ordre acceptable entre champs de vecteurs. Il ne peut donc être question de croissance de l'opérateur "flux à travers S^+". Tout au plus peut-on prouver qu'en valeur absolue, le flux de $\vec{F}$ à travers S^+ est majoré par le produit de la norme moyenne de $\vec{F}$ par l'aire de S. En effet :

$$\begin{aligned} \left| \iint_S \left\langle \vec{F}, \vec{1}_n \right\rangle d\sigma \right| &= \left| \iint_{S^+} \left\langle \vec{F}, \vec{d\sigma} \right\rangle \right| \\ &\leq \iint_S \left| \left\langle \vec{F}, \vec{d\sigma} \right\rangle \right| \\ &\leq \iint_S \|\vec{F}\| d\sigma = (\text{moyenne de } \|\vec{F}\||_S) \iint_S d\sigma. \end{aligned}$$

Proposition 10.13

$$\left| \iint_S \left\langle \vec{F}, \vec{1}_n \right\rangle d\sigma \right| \leq (\text{moyenne de } \|\vec{F}\||_S) \cdot \mu_2(S) \leq \sup_S \|\vec{F}\| \cdot \mu_2(S)$$

(iii) **Additivité du flux d'un champ par rapport au domaine d'intégration**

Proposition 10.14

$$\iint_{S_1^+} \left\langle \vec{F}, \vec{d\sigma} \right\rangle + \iint_{S_2^+} \left\langle \vec{F}, \vec{d\sigma} \right\rangle = \iint_{S_1^+ + S_2^+} \left\langle \vec{F}, \vec{d\sigma} \right\rangle$$

où nous avons à définir $S_1^+ + S_2^+$. Le cas le plus simple est celui où S_1 et S_2 sont disjoints (sauf éventuellement sur une partie de leurs bords si ceux-ci ne contribuent pas à l'intégrale) : $S_1^+ + S_2^+$ est alors la réunion $S_1 \cup S_2$, munie de l'orientation S_1^+ sur S_1 et de celle

de S_2^+ sur S_2 .
Sinon $S_1 \cap S_2$ est parcouru

— 2 fois si les orientations de S_1^+ et de S_2^+ coïncident sur $S_1 \cap S_2$,

— 0 fois si les orientations de S_1^+ et de S_2^+ sont opposées sur $S_1 \cap S_2$.

10.2.6 2-forme différentielle

2-forme différentielle $3D$.
Soit f une fonction scalaire définie sur un domaine G de $\mathbb{R}^3$. Rappelons que la 1-forme différentielle $f\ dx$ associe à tout point $(x_0, y_0 z_0)$ de G la forme linéaire

$$f(x_0, y_0, z_0)dx : \ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : (x, y, z) \mapsto f(x_0, y_0, z_0)x$$

puisque dx correspond à la projection orthogonale sur l'axe ox.
La **2-forme différentielle** $f\ dx \wedge dy$ associe à tout point (x_0, y_0, z_0) de G la forme bilinéaire

$$f(x_0, y_0, z_0)dx \wedge dy : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : \big((x, y, z), (x', y', z')\big) \mapsto f(x_0, y_0, z_0) \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}$$

On adapte facilement cette définition à $dx \wedge dx, dy \wedge dx, dy \wedge dz$, etc. Et on remarque que

$$dx \wedge dx = 0 \quad \text{car} \quad \begin{vmatrix} x & x' \\ x & x' \end{vmatrix} = 0,$$

$$dy \wedge dx = -dx \wedge dy \quad \text{car} \quad \begin{vmatrix} y & y' \\ x & x' \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix},$$

de sorte que le **produit extérieur** $\wedge$ de formes différentielles est **antisymétrique**. Dans la suite, il nous suffira de retenir cette propriété cruciale, mais nous pouvons dès à présent oublier la véritable nature des formes différentielles : seule importera la manière de les manipuler. De même, on peut calculer des intégrales curvilignes de 1-formes sans se préoccuper de ce que sont les 1-formes, en se disant qu'elles nous offrent un calcul formel efficace des intégrales curvilignes, c'est déjà pas mal.

Une **2-forme différentielle sur** G est une expression du type

$$F_x dy \wedge dz + F_y dz \wedge dx + F_z dx \wedge dy,$$

où F_x, F_y et F_z sont des fonctions scalaires sur G.

En 3D, il y a donc une identification canonique entre les 2-formes différentielles et les champs de vecteurs sur G... !

$\diamondsuit$ En tout point $(x_0, y_0, z_0) \in G$ la 2-forme différentielle devient la forme bilinéaire de $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$:

$$(\vec{a}, \vec{b}) \mapsto \begin{vmatrix} F_x(x_0, y_0, z_0) & F_y(x_0, y_0, z_0) & F_z(x_0, y_0, z_0) \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

2-forme différentielle nD.

♢ $dx_i \wedge dx_j$ est une forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^n$, à savoir :

$$dx_i \wedge dx_j : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : (u, v) \to \begin{vmatrix} u_i & u_j \\ v_i & v_j \end{vmatrix} = u_i v_j - u_j v_i.$$

Il est immédiat qu'effectivement $dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i$.

On définit de manière naturelle la multiplication d'une forme bilinéaire par un scalaire (i.e. un réel) et la somme de deux formes bilinéaires : le résultat est encore une forme bilinéaire. Ceci donne un sens à

$$\sum_{i,j} \alpha_{ij} dx_i \wedge dx_j$$

lorsque $\alpha_{ij} \in \mathbb{R}$.
Ainsi donc, si les G_{ij} sont des fonctions scalaires sur D, la 2-forme différentielle

$$\omega = \sum_{i,j} G_{ij} dx_i \wedge dx_j$$

est une application de D dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, l'espace (vectoriel réel) des formes bilinéaires sur $\mathbb{R}^n$. Autrement dit, pour tout $\vec{x}$ fixé dans $D, \omega(\vec{x})$ est la forme bilinéaire

$$\sum_{i,j} G_{ij}(\vec{x}) dx_i \wedge dx_j$$

qui envoie le couple de vecteurs $(\vec{u}, \vec{v})$ sur le réel

$$\sum_{i,j} G_{ij}(\vec{x}) \begin{vmatrix} u_i & u_j \\ v_i & v_j \end{vmatrix} = \sum_{i,j} G_{ij}(\vec{x})(u_i v_j - u_j v_i).$$

Rassurons le lecteur qui s'est perdu ici : nous ne ferons aucun usage de ceci.

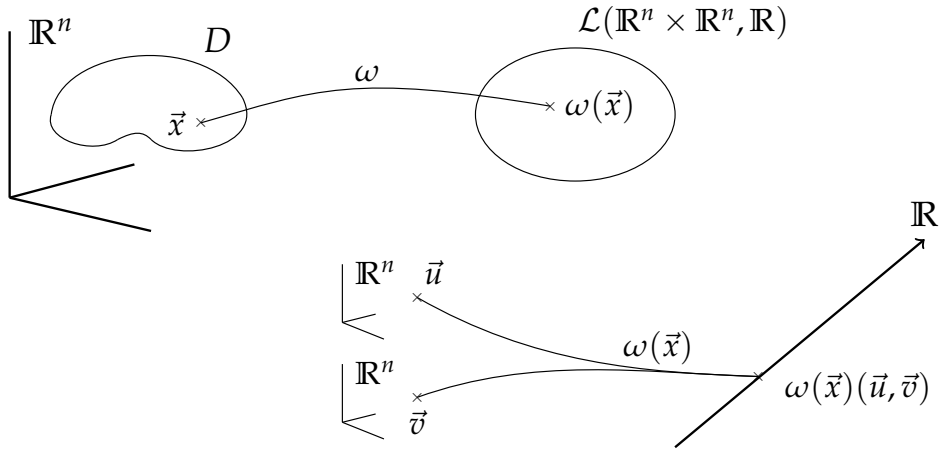


FIGURE 10.19 – La 2-forme différentielle ω.

10.2.7 Différentielle extérieure d'une forme différentielle ; 2-forme exacte

Les développements suivants sont purement formels.
Nous utiliserons le **produit extérieur** , noté $\wedge$, qui est antisymétrique et distribue l'addition. Nous aurons donc en particulier :

$$\forall i, j = 1, \cdots, n : dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i,$$

d'où

$$\forall i = 1, \cdots, n : dx_i \wedge dx_i = 0.$$

Comme nous nous contentons de présenter un formalisme commode et unificateur, nous n'avons pas vraiment besoin de comprendre ce qu'est $dx_i \wedge dx_j$ (voir 10.8.11).

Voyons comment calculer formellement la différentielle extérieure $d\omega$ d'une 1-forme ω sur $D \subseteq \mathbb{R}^n$. En pratique, on remplace $F_i dx_i$ par $dF_i \wedge dx_i$ et on développe en appliquant les propriétés sus-mentionnées du produit extérieur. Cela donne

(i) si $n = 2$,

$$\begin{aligned} d\omega &= d(F_1 dx_1 + F_2 dx_2) \\ &= dF_1 \wedge dx_1 + dF_2 \wedge dx_2 \\ &= \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial F_1}{\partial x_2} dx_2\right) \wedge dx_1 + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} dx_2\right) \wedge dx_2 \\ &= \frac{\partial F_1}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_1 + \frac{\partial F_1}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_1 + \frac{\partial F_2}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_2 + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_2 \\ &= \left(\frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}\right) dx_1 \wedge dx_2, \end{aligned}$$

(ii) si $n = 3$,

$$d(F_1 dx_1 + F_2 dx_2 + F_3 dx_3) = dF_1 \wedge dx_1 + dF_2 \wedge dx_2 + dF_3 \wedge dx_3$$

$$\begin{aligned} &= \ldots \\ &= \left(\frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}\right) dx_1 \wedge dx_2 + \left(\frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3}\right) dx_2 \wedge dx_3 + \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1}\right) dx_3 \wedge dx_1. \end{aligned}$$

Dans tous les cas, si ω est une 1-forme différentielle, alors $d\omega$ est une **2-forme** (différentielle)(ou **forme différentielle de degré 2**) , c'est-à-dire une expression du type

$$\sum_{i,j} G_{ij}\, dx_i \wedge dx_j$$

où les G_{ij} sont des fonctions scalaires.
$\Diamond$ En fait, les 2-formes ne sont pas toutes des différentielles extérieures de 1-formes (celles qui le sont sont dites **exactes**).
$\Diamond$

Le lecteur attentif aura reconnu dans les *composantes* de $d\omega$ celles du *rotationnel* $\mathrm{rot}\vec{F}$ du champ de vecteurs $\vec{F}$ associé à ω. Mais, alors que nous n'avons défini le rotationnel qu'en dimensions 2 et 3, nous avons le moyen de calculer la différentielle extérieure $d\omega$ d'une 1-forme en dimension n quelconque.

10.2.8 Forme fermée

♢ Une forme différentielle ω est dite **fermée** ssi sa différentielle extérieure $d\omega$ est nulle.

Pour les 1-formes 2D, cela revient à exiger que

$$\frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} = 0.$$

Pour les 1-formes 3D, cela revient à exiger que

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} - \frac{\partial F_j}{\partial x_i} = 0 \quad \forall i, j \in \{1, 2, 3\}.$$

Dans les deux cas, cela revient bien à demander que le champ de vecteurs $\vec{F}$ correspondant soit irrotationnel (c'est-à-dire $\mathrm{rot}\vec{F} = 0$).

Nous en concluons que si ω est une 1-forme de classe C^1, alors une condition nécessaire (souvent suffisante) pour que ω soit *exacte* est que ω soit *fermée*. Ceci découle de l'égalité des dérivées secondes mixtes et traduit en termes de formes la proposition :

$$\vec{F} \textit{ dérive d'un potentiel} \implies \vec{F} \textit{ est irrotationnel}.$$

10.2.9 2-forme différentielle sur une surface paramétrée.

Si $S \equiv \begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases}$, alors la forme $dx \wedge dy$ "traduite dans la langue des u et des v" devient

$$\left(\frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv\right) \wedge \left(\frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv\right) = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right) du \wedge dv = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} du \wedge dv.$$

Cette expression est la 2-forme différentielle sur D correspondant à la 2-forme $\omega = dx \wedge dy$ sur $S^+ = \vec{g}(D^+)$: les mathématiciens parlent de la **transformée** $g^*\omega$ de ω.

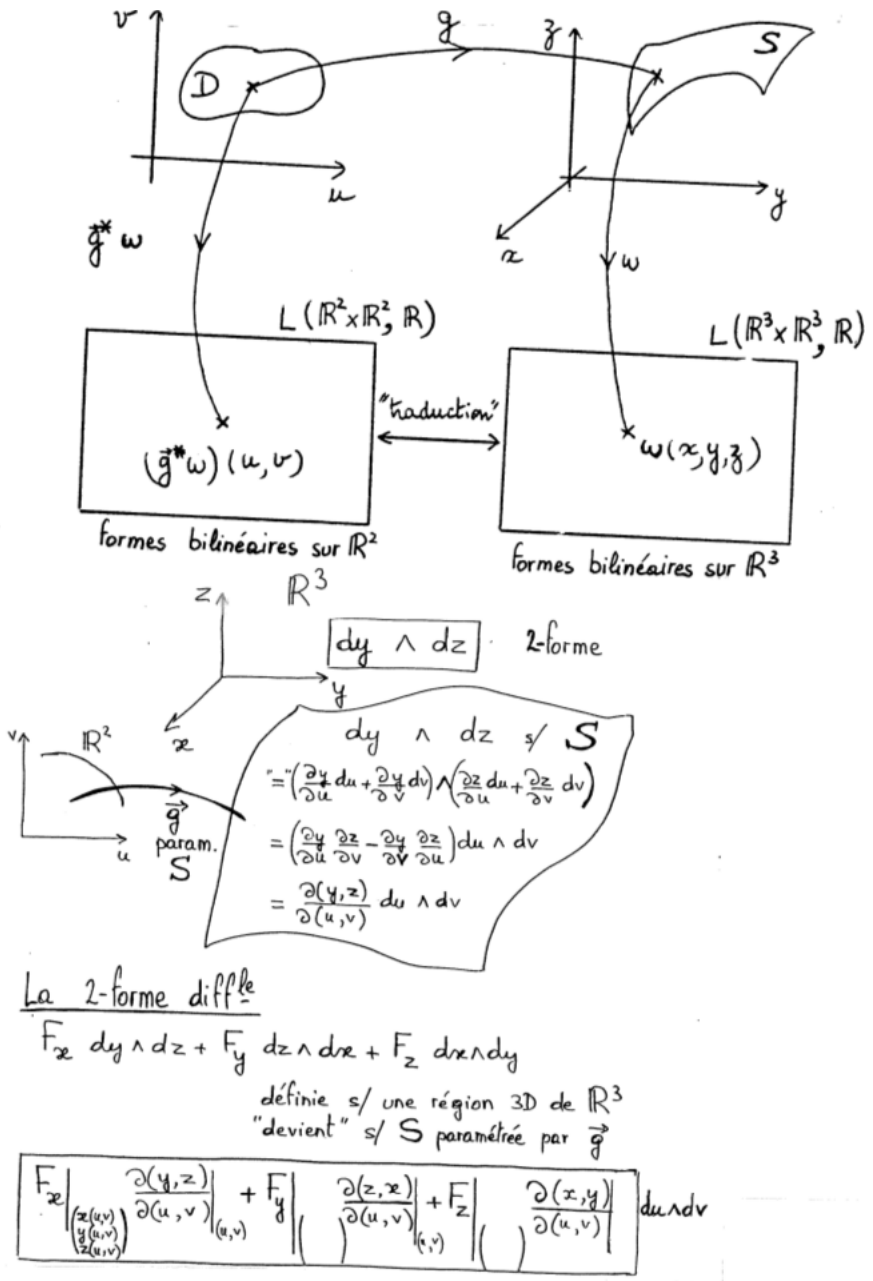


FIGURE 10.20 – Résumé de la 2-forme différentielle sur une surface paramétrée.

10.2.10 Intégrale d'une 2-forme différentielle sur une surface

On définit d'une part :

$$\begin{aligned}\iint_{S^+} f\ dx \wedge dy &:= \iint_{D^+} f|_{(x(u,v),y(u,v),z(u,v))} \left.\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|_{(u,v)} du \wedge dv \\ &:= \iint_{D} f|_{(x(u,v),y(u,v),z(u,v))} \left.\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|_{(u,v)} du\ dv,\end{aligned}$$

et d'autre part :

$$\begin{aligned}&\iint_{S^+} (F_x dy \wedge dz + F_y dz \wedge dx + F_z dx \wedge dy) \\ &:= \iint_{S^+} F_x dy \wedge dz + \iint_{S^+} F_y dz \wedge dx + \iint_{S^+} F_z dx \wedge dy\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}&\iint_{S^+} (F_x dy \wedge dz + F_y dz \wedge dx + F_z dx \wedge dy) \\ &= \iint_{D} \left(F_x \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} + F_y \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} + F_z \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right) du\ dv, \\ &= \iint_{S^+} \vec{F} = \iint_{S} \left\langle \vec{F}, \vec{1}_n \right\rangle d\,\sigma\end{aligned}$$

Les intégrales de surface des 2-formes différentielles nous fournissent donc un moyen commode de retrouver, par un calcul formel, les formules servant à calculer les flux des champs de vecteurs.

10.3 Coordonnées curvilignes

10.3.1 Différentielle d'un changement de coordonnées.

Travaillons, pour fixer les idées, dans $\mathbb{R}^3$.
Soit le changement de variables (=changement de coordonnées) difféomorphique

$$\vec{g} : (u, v, w) \mapsto \vec{g}(u, v, w) = \begin{pmatrix} x(u, v, w) \\ y(u, v, w) \\ z(u, v, w) \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire que $\vec{g}$ est une bijection entre deux ouverts telle que $\vec{g}$ et $\vec{g}^{-1} \in C^1$.
$(u, v, w) = \vec{g}^{-1}(x, y, z)$ sont appelées les **coordonnées curvilignes** de (x, y, z).

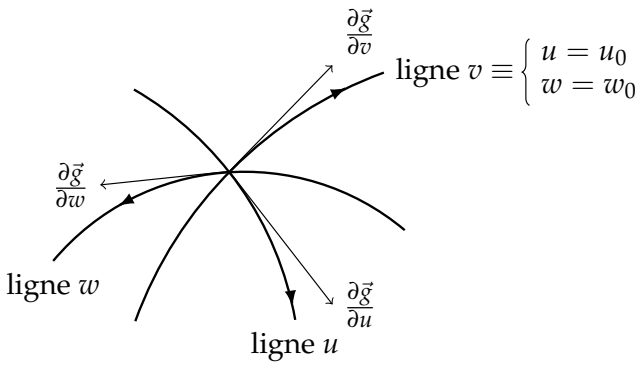


FIGURE 10.21 – Lignes de coordonnées u, v et w et vecteurs vitesse correspondants.

On peut écrire la différentielle de $\vec{g}$ en $(\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w})$:

$$\begin{aligned} d\vec{g}|_{(\tilde{u},\tilde{v},\tilde{w})} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : (\Delta u, \Delta v, \Delta w) \quad &\mapsto \left. \begin{pmatrix} \vec{\nabla} x \\ \vec{\nabla} y \\ \vec{\nabla} z \end{pmatrix} \right|_{(\tilde{u},\tilde{v},\tilde{w})} \begin{pmatrix} \Delta u \\ \Delta v \\ \Delta w \end{pmatrix} \\ &= \left. \begin{pmatrix} \frac{\partial \vec{g}}{\partial u} & \frac{\partial \vec{g}}{\partial v} & \frac{\partial \vec{g}}{\partial w} \end{pmatrix} \right|_{(\tilde{u},\tilde{v},\tilde{w})} \begin{pmatrix} \Delta u \\ \Delta v \\ \Delta w \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d\vec{g}|_{(\tilde{u},\tilde{v},\tilde{w})} &= \left. \frac{\partial \vec{g}}{\partial u} \right|_{(\tilde{u},\tilde{v},\tilde{w})} du + \left. \frac{\partial \vec{g}}{\partial v} \right|_{(\tilde{u},\tilde{v},\tilde{w})} dv + \left. \frac{\partial \vec{g}}{\partial w} \right|_{(\tilde{u},\tilde{v},\tilde{w})} dw \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv + \frac{\partial x}{\partial w} dw \\ \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv + \frac{\partial y}{\partial w} dw \\ \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv + \frac{\partial z}{\partial w} dw \end{pmatrix} \end{aligned}$$

où toutes les dérivées sont calculées en $(\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w})$.

Rappelons qu'une transformation linéaire est de rang maximal ssi elle est représentée par une matrice (carrée) dont les lignes (ou, ce qui est équivalent, les colonnes) forment des vecteurs linéairement indépendants. Donc :

$d\vec{g}|_{(\tilde{u},\tilde{v},\tilde{w})}$ est de rang maximal
ssi au point $\vec{g}|_{(\tilde{u},\tilde{v},\tilde{w})}$, les trois vecteurs $\vec{\nabla}x, \vec{\nabla}y, \vec{\nabla}z$ sont linéairement indépendants,
ssi en $(\tilde{u},\tilde{v},\tilde{w})$, les trois vecteurs $\dfrac{\partial\vec{g}}{\partial u}, \dfrac{\partial\vec{g}}{\partial v}, \dfrac{\partial\vec{g}}{\partial w}$ sont linéairement indépendants .

Illustrations : changements de variables dans $\mathbb{R}^2$

— Changement de coordonnées linéaires

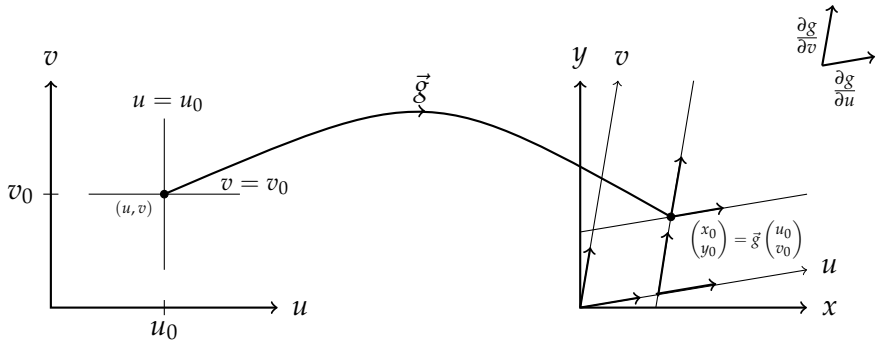


FIGURE 10.22 – Changement de coordonnées linéaires.

$$\vec{g} : \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

$$d\vec{g} : \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \end{pmatrix} v$$

$$\begin{aligned} d\vec{g}|_{(u_0,v_0)} &= \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{pmatrix} du + \begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \end{pmatrix} dv \\ &= \left.\frac{\partial\vec{g}}{\partial u}\right|_{(u_0,v_0)} du + \left.\frac{\partial\vec{g}}{\partial v}\right|_{(u_0,v_0)} dv \end{aligned}$$

Ici $\dfrac{\partial\vec{g}}{\partial u}$ et $\dfrac{\partial\vec{g}}{\partial v}$ sont des vecteurs constants. En effet, puisque $\vec{g}$ est une application linéaire, elle est égale à sa différentielle en tout point (u_0, v_0) : $d\vec{g}|_{(u_0,v_0)} = \vec{g} : (u, v) \mapsto \vec{g}(u, v)$.

Interrogeons-nous à présent sur le caractère orthogonal (ou non) de ces nouvelles coordonnées. Ces coordonnées sont dites **orthogonales** ssi

$$\frac{\partial\vec{g}}{\partial u} \perp \frac{\partial\vec{g}}{\partial v}.$$

Rappelons que les vecteurs vitesses ci-dessus sont chacun tangents à leur ligne de coordonnées, comme le montre la figure 10.21. Par ailleurs, nous établirons dans cette section un lien entre les vecteurs vitesses et les vecteurs vitesse de la plus grande variation ($\vec{\nabla}u$ par exemple). Il serait dès lors intéressant de les visualiser lors d'un passage à des coordonnées **non-orthogonales**, ce qui est fait sur la figure d'après ($\vec{\nabla}u$ est orthogonal à tout ensemble de niveau u =cste, mais nous le savions déjà).

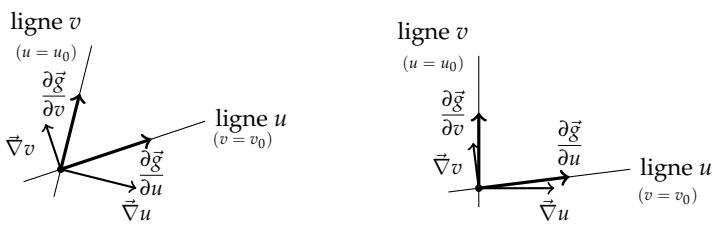


FIGURE 10.23 – Ligne de coordonnées u (resp. v), vecteur vitesse par rapport à u(resp. v) et vecteur vitesse de la plus grande variation de u(resp. v) ; pour des coordonnées non-orthogonales (mais presque, pour celles de droite).

Ces coordonnées curvilignes sont donc orthogonales ssi $\dfrac{\partial \vec{g}}{\partial u} \perp \dfrac{\partial \vec{g}}{\partial v}$ et donc ssi

$$\vec{\nabla} u \parallel \frac{\partial \vec{g}}{\partial u} \qquad \text{et} \qquad \vec{\nabla} v \parallel \frac{\partial \vec{g}}{\partial v}.$$

Ce résultat, flagrant sur la figure 10.23 peut être justifié en établissant les matrices $\mathcal{J}_{\vec{g}}$ et $\mathcal{J}_{\vec{g}^{-1}}$ et en vérifiant, comme effectué par après pour le passage en 3D, que

$$\mathcal{J}_{\vec{g}^{-1} \circ \vec{g}} = \mathcal{J}_{\vec{g}^{-1}} \cdot \mathcal{J}_{\vec{g}} = \mathcal{I}.$$

— <u>Coordonnées polaires</u>

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & \cos\theta \\ r & \sin\theta \end{pmatrix}$$

où (r, θ) sont les coordonnées polaires de (x, y).

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{g}(u, v)$$

où (u, v) sont les coordonnées curvilignes de (x, y).
On appelle **lignes de coordonnées** les images par $\vec{g}$ des droites $u = c^{te}$ et $v = c^{te}$.

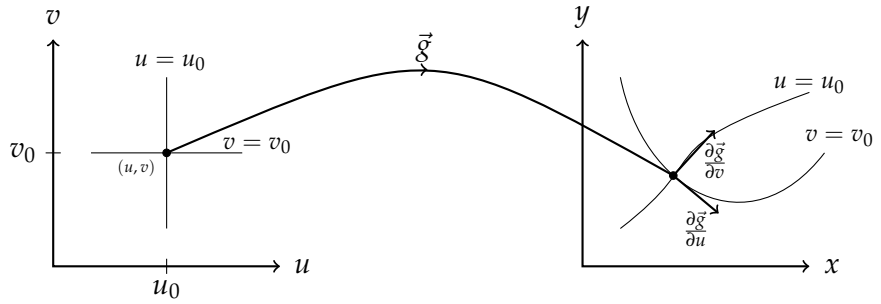


FIGURE 10.24 – Application de $\vec{g}$ aux droites $u = c^{\text{te}}$ et $v = c^{\text{te}}$.

Les coordonnées polaires sont des coordonnées curvilignes **orthogonales**, car $\forall (u_0, v_0)$, les vecteurs tangents aux lignes de coordonnées $\dfrac{\partial \vec{g}}{\partial u}$ et $\dfrac{\partial \vec{g}}{\partial v}$ localisés au point $\vec{g}(u_0, v_0)$ sont orthogonaux.

Les coefficients de Lamé sont les longueurs de ces vecteurs vitesse par rapport aux coordonnées : $h_u := \left\| \dfrac{\partial \vec{g}}{\partial u} \right\|$ et $h_v := \left\| \dfrac{\partial \vec{g}}{\partial v} \right\|$.

Si on définit en chaque point $\vec{g}(u_0, v_0)$ les deux vecteurs orthogonaux normés :

$$\vec{e}_u := \frac{\dfrac{\partial \vec{g}}{\partial u}}{h_u} \quad \text{et} \quad \vec{e}_v := \frac{\dfrac{\partial \vec{g}}{\partial v}}{h_v}, \quad \text{on peut écrire} \quad \frac{\partial \vec{g}}{\partial u} = h_u \vec{e}_u \quad \text{et} \quad \frac{\partial \vec{g}}{\partial v} = h_v \vec{e}_v \,.$$

— "Cas général" en 2D

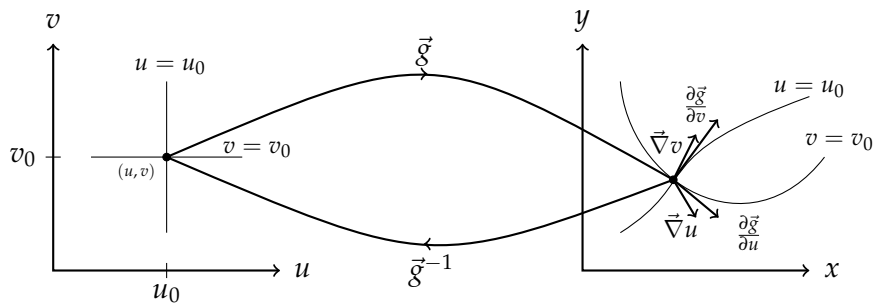


FIGURE 10.25 – Changement de coordonnées de (u, v) vers (x, y) et changement de coordonnées de (x, y) vers (u, v).

Changement de coordonnées de (u, v) vers (x, y) :

$$\vec{g} : (u, v) \overset{\vec{g}}{\mapsto} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{g}(u, v) = \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1(u, v) \\ g_2(u, v) \end{pmatrix}$$

Changement de coordonnées de (x, y) vers (u, v)

$$\vec{g}^{-1} : (x, y) \overset{\vec{g}^{-1}}{\mapsto} \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix}$$

Et en 3D :

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \underset{\vec{g}^{-1}}{\overset{\vec{g}}{\rightleftarrows}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{J}_{\vec{g}^{-1}} = \text{mat} \left(\frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)} \right) = \begin{pmatrix} \vec{\nabla} u \\ \vec{\nabla} v \\ \vec{\nabla} w \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{J}_{\vec{g}} = \text{mat} \left(\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \vec{g}}{\partial u} & \dfrac{\partial \vec{g}}{\partial v} & \dfrac{\partial \vec{g}}{\partial w} \end{pmatrix}$$

Comme $\vec{g}^{-1} \circ \vec{g}$ est l'application identité dans l'espace (u, v, w), on a

$$\mathcal{J}(\vec{g}^{-1} \circ \vec{g}) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathcal{J}_{\vec{g}^{-1}} . \mathcal{J}_{\vec{g}} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire

$$\left\langle \vec{\nabla} u, \frac{\partial \vec{g}}{\partial u} \right\rangle = 1 \qquad \left\langle \vec{\nabla} v, \frac{\partial \vec{g}}{\partial v} \right\rangle = 1 \qquad \left\langle \vec{\nabla} w, \frac{\partial \vec{g}}{\partial w} \right\rangle = 1 \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial \vec{g}}{\partial v} \perp \vec{\nabla} u \perp \frac{\partial \vec{g}}{\partial w} \quad \text{etc...}$$

Et donc si les coordonnées curvilignes sont orthogonales alors

$$\frac{\partial \vec{g}}{\partial u} =: h_u \vec{e}_u \Leftarrow \vec{\nabla} u = \frac{1}{h_u} \vec{e}_u$$

où h_u est le coefficient de Lamé (qui est strictement positif) et $\vec{e}_u$ est normé.

10.3.2 Lignes et surfaces de coordonnées.

Définition 10.15 Les **lignes de coordonnées** sont les images par $\vec{g}$ des droites parallèles aux axes et l'espace des (u, v, w). La **ligne** u passant par le point $\vec{g}(u_0, v_0, w_0)$ est caractérisée par les "équations curvilignes" :

$$\begin{cases} v = v_0 \\ w = w_0 \end{cases}$$

■

La seule variable curviligne non fixée sur la ligne u est donc u.
Le vecteur $\left.\frac{\partial \vec{g}}{\partial u}\right|_{(u_0,v_0,w_0)}$ est tangent à la ligne u au point $\vec{g}(u_0, v_0, w_0)$ et indique le sens induit par une variation croissante de la variable u. La ligne u est en fait naturellement orientée dans le sens des u croissants. Les **vecteurs tangents unités** aux lignes coordonnées au point $\vec{g}(u_0, v_0, w_0)$ sont respectivement

$$\vec{e}_u := \frac{\partial \vec{g}}{\partial u} / \| \frac{\partial \vec{g}}{\partial u} \| \quad , \quad \vec{e}_v := \frac{\partial \vec{g}}{\partial v} / \| \frac{\partial \vec{g}}{\partial v} \| \quad , \quad \vec{e}_w = \frac{\partial \vec{g}}{\partial w} / \| \frac{\partial \vec{g}}{\partial w} \|.$$

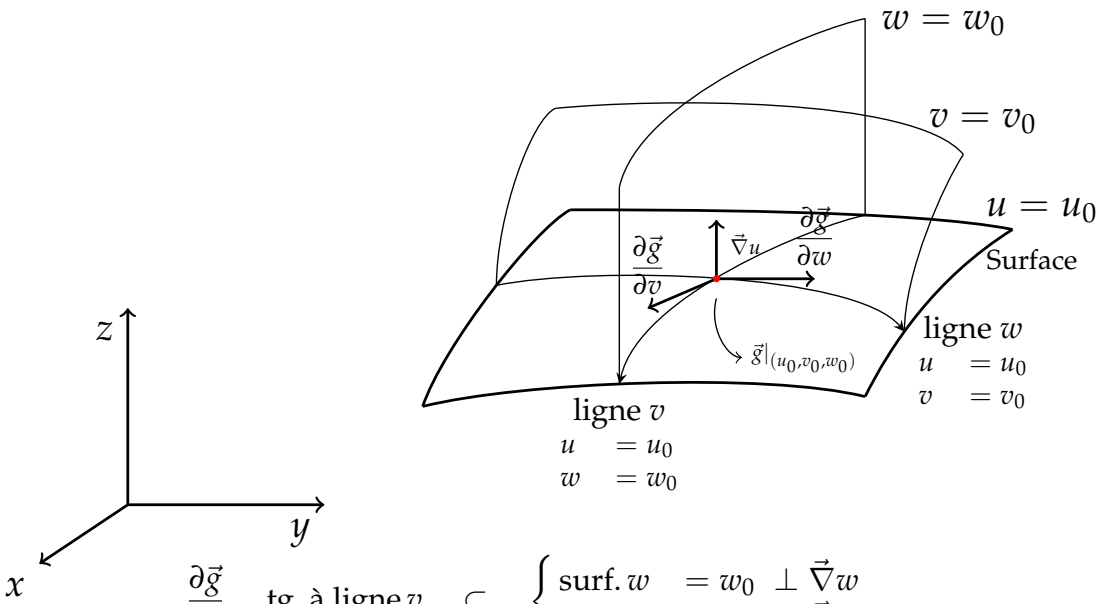
Toute ligne de coordonnée est donc l'intersection d'exactement deux surfaces de coordonnées, les **surfaces de coordonnées** étant les images par $\vec{g}$ des plans parallèles aux plans coordonnés dans l'espace (u, v, w). La surface uv passant par le point $\vec{g}(u_0, v_0, w_0)$ est caractérisée par l'équation en coordonnées curvilignes :

$$w = w_0.$$

Si on exprime (u, v, w) en fonction de (x, y, z), ce qu'on peut faire puisque $\vec{g}$ est une bijection, de sorte que

$$(u, v, w) = \vec{g}^{-1}(x, y, z),$$

alors le vecteur $\vec{\nabla} w|_{(u_0,v_0,w_0)}$ est perpendiculaire à la surface d'équation $w = w_0$ au point $\vec{g}(u_0, v_0, w_0)$. Ceci est mis en évidence sur la figure 10.26 où $\vec{\nabla} u \perp$ la surface (ou plutôt, pour généraliser, l'ensemble de niveau) $u = u_0$, tandis que les vecteurs vitesses sont parallèles à leur ligne respective.



$$\frac{\partial \vec{g}}{\partial v} \quad \text{tg. à ligne } v \quad \subset \quad \begin{cases} \text{surf. } w & = w_0 \ \perp \vec{\nabla} w \\ \text{surf. } u & = u_0 \ \perp \vec{\nabla} u \end{cases}$$

$$\frac{\partial \vec{g}}{\partial w} \quad \text{tg. à ligne } w \quad \subset \quad \begin{cases} \text{surf. } v & = v_0 \ \perp \vec{\nabla} v \\ \text{surf. } u & = u_0 \ \perp \vec{\nabla} u \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \quad \left.\underbrace{\frac{\partial \vec{g}}{\partial u} \perp \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial \vec{g}}{\partial v} \\ \\ \frac{\partial \vec{g}}{\partial w} \end{array} \right\}}_{\text{coord. curv.} \perp} \perp \vec{\nabla} u \right\} \overset{\text{3D}}{\Longrightarrow} \frac{\partial \vec{g}}{\partial u} \parallel \vec{\nabla} u$$

FIGURE 10.26 – Orientation de certains vecteurs vitesses et du vecteur vitesse de la plus grande variation de u calculés au point (u_0, v_0, w_0).

On remarque alors que le cas de coordonnées curvilignes orthogonales (vecteurs vitesses orthogonaux et formant une base) impliquent immédiatement géométriquement le parallélisme entre $\vec{\nabla} u$ et $\partial \vec{g} / \partial u$, tous deux calculés en (u_0, v_0, w_0). Ceci est approfondi dans la section suivante.

10.3.3 Coordonnées curvilignes orthogonales.

Les **coordonnées curvilignes** (u, v, w) sont dites **orthogonales** ssi $\left\{ \frac{\partial \vec{g}}{\partial u}, \frac{\partial \vec{g}}{\partial v}, \frac{\partial \vec{g}}{\partial w} \right\}$ forme une base orthogonale en tout point $(\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w})$.

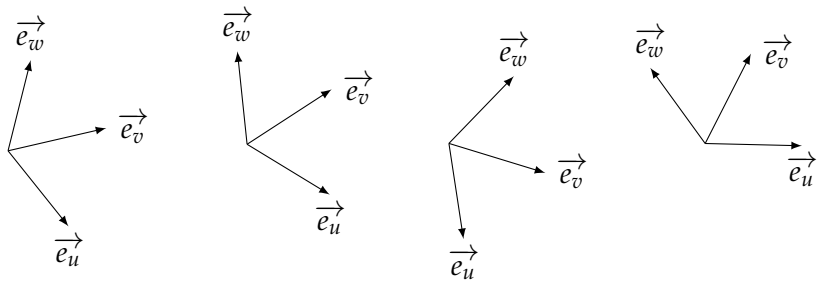


FIGURE 10.27 – Diverses orientations de la base $(\vec{e}_u, \vec{e}_v, \vec{e}_w)$.

La matrice de la différentielle $d\vec{g}|_{(\tilde{u},\tilde{v},\tilde{w})}$ est la matrice jacobienne si on travaille dans les bases canoniques $(\vec{1}_u, \vec{1}_v, \vec{1}_w)$ et $(\vec{1}_x, \vec{1}_y, \vec{1}_z)$, mais devient, si on travaille relativement aux bases $(\vec{1}_u, \vec{1}_v, \vec{1}_w)$ et $(\vec{e}_u, \vec{e}_v, \vec{e}_w)$, la matrice suivante :

$$\left.\begin{pmatrix} \left\|\dfrac{\partial \vec{g}}{\partial u}\right\| & 0 & 0 \\ 0 & \left\|\dfrac{\partial \vec{g}}{\partial v}\right\| & 0 \\ 0 & 0 & \left\|\dfrac{\partial \vec{g}}{\partial w}\right\| \end{pmatrix}\right|_{(\tilde{u},\tilde{v},\tilde{w})}.$$

De l'invariance de la valeur absolue du déterminant de la matrice d'une application linéaire sous changement de bases <u>orthonormées</u>, on déduit qu'en chaque point $(\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w})$:

$$\begin{aligned} \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| &= \left\|\frac{\partial \vec{g}}{\partial u}\right\| \cdot \left\|\frac{\partial \vec{g}}{\partial v}\right\| \cdot \left\|\frac{\partial \vec{g}}{\partial w}\right\| \\ &= \left\|\left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}\right)\right\| \cdot \left\|\left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}\right)\right\| \cdot \left\|\left(\frac{\partial x}{\partial w}, \frac{\partial y}{\partial w}, \frac{\partial z}{\partial w}\right)\right\|. \end{aligned}$$

R Classiquement, on appelle **coefficients de Lamé** les scalaires suivants :

$$h_u := \left\|\frac{\partial \vec{g}}{\partial u}\right\|, \quad h_v := \left\|\frac{\partial \vec{g}}{\partial v}\right\|, \quad h_w := \left\|\frac{\partial \vec{g}}{\partial w}\right\|,$$

de sorte que

$$\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| = h_u h_v h_w.$$

Si les coordonnées curvilignes sont orthogonales, alors non seulement

$$\frac{\partial \vec{g}}{\partial u} = h_u \vec{e}_u \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial \vec{g}}{\partial v} = h_v \vec{e}_v$$

où $\dfrac{\partial \vec{g}}{\partial u}$ est le vecteur vitesse sur la ligne u et h_u est la norme de la vitesse, mais aussi

$$\vec{\nabla} u = \frac{1}{h_u}\vec{e}_u \qquad \text{et} \qquad \vec{\nabla} v = \frac{1}{h_v}\vec{e}_v$$

où $\vec{\nabla} u$ est le vecteur vitesse de la plus grande variation de u et $\dfrac{1}{h_u}$ est la vitesse de variation de u dans la direction perpendiculaire aux hypersurfaces où u est constant.

♢ Gabriel LAME (1795-1870) fit ses études à Paris (Ecole Polytechnique et Ecole des Mines), puis passa 12 ans à Saint Pétersbourg comme enseignant et ingénieur. De retour à Paris, il fut successivement titulaire de la chaire de physique à l'Ecole Polytechnique, puis examinateur, puis professeur à l'Université de Paris. Devenu sourd, il pris sa retraite en 1862.
Alors qu'il étudiait l'EDP de la chaleur, constatant que les coordonnées cartésiennes étaient inappropriées pour traiter les problèmes auxquels il était confronté, il fut le premier à utiliser systématiquement l'outil des "coordonnées curvilignes".

10.3.4 Les coordonnées polaires sont orthogonales.

La fonction de passage aux coordonnées polaires est la réciproque de

$$\vec{g} : \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi[\to \mathbb{R}^2 : (r, \theta) \mapsto \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix}.$$

On calcule facilement :

$$d\vec{g}\,|_{(r_0,\theta_0)} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (r, \theta) \mapsto \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}\Bigg|_{(r_0,\theta_0)} \begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire

$$d\vec{g}\,|_{(r_0,\theta_0)} = \begin{pmatrix} \cos\theta_0 \\ \sin\theta_0 \end{pmatrix} dr + \begin{pmatrix} -r_0\sin\theta_0 \\ r_0\cos\theta_0 \end{pmatrix} d\theta.$$

Notons que

$$\left\| \frac{\partial \vec{g}}{\partial r} \right\| = 1\ ,\ \left\| \frac{\partial \vec{g}}{\partial \theta} \right\| = r,$$

d'où

$$\frac{\partial \vec{g}}{\partial r} = \vec{e}_r\ ,\ \frac{\partial \vec{g}}{\partial \theta} = r\vec{e}_\theta,$$

c'est-à-dire que

$$d\vec{g} = dr\,\vec{e}_r + r\,d\theta\,\vec{e}_\theta.$$

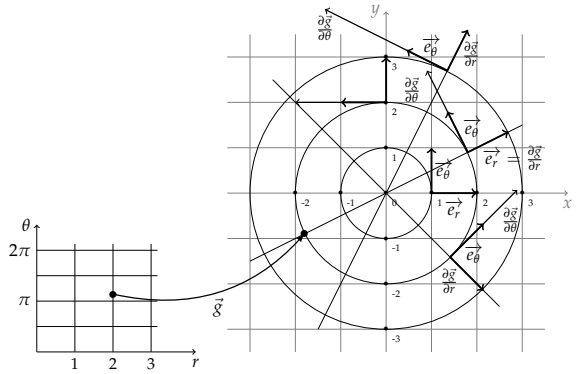


FIGURE 10.28 – Coordonnées polaires.

10.3.5 Les coordonnées cylindriques sont orthogonales.

La fonction de passage aux coordonnées cylindriques est la réciproque de

$$\vec{g} : \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi[\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 : (\rho, \theta, z) \to \begin{pmatrix} \rho\cos\theta \\ \rho\sin\theta \\ z \end{pmatrix}$$

De sorte que

$$d\vec{g}\,|_{(\rho_0,\theta_0,z_0)} : \mathbb{R}^3 \to \ R^3 : (\rho, \theta, z) \to \begin{pmatrix} \cos\theta_0 & -\rho_0\sin\theta_0 & 0 \\ \sin\theta_0 & \rho_0\cos\theta_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho \\ \theta \\ z \end{pmatrix}$$

ou, sous forme abrégée

$$d\vec{g} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}}_{(norme\,1)} d\rho + \underbrace{\begin{pmatrix} -\rho\sin\theta \\ \rho\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix}}_{(norme\,\rho)} d\theta + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{(norme\,1)} dz,$$

de sorte que

$$h_\rho = 1, \quad h_\theta = \rho, \quad h_z = 1$$

et

$$\frac{\partial\vec{g}}{\partial\rho} = \vec{e_\rho}, \quad \frac{\partial\vec{g}}{\partial\theta} = \rho\vec{e_\theta}, \quad \frac{\partial\vec{g}}{\partial z} = \vec{e_z}.$$

On écrit encore

$$d\vec{g} = \vec{e_\rho}d\rho + \rho\vec{e_\theta}\,d\theta + \vec{e_z}\,dz.$$

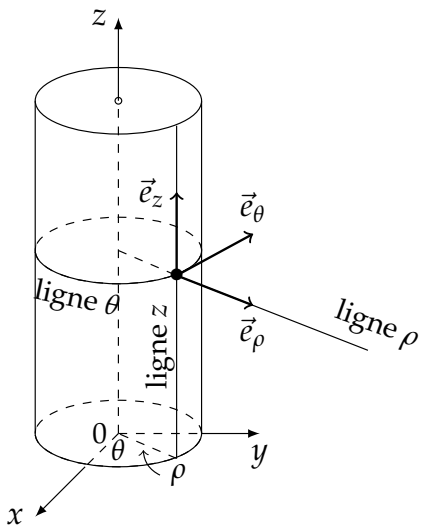


FIGURE 10.29 – Coordonnées cylindriques.

10.3.6 Les coordonnées sphériques sont orthogonales.

Le passage aux coordonnées sphériques est donné par $\vec{g}^{-1}$, où

$$\vec{g} : \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi[\times[0, \pi] \to \mathbb{R}^3 : (r, \varphi, \theta) \to \begin{pmatrix} r\cos\varphi\sin\theta \\ r\sin\varphi\sin\theta \\ r\cos\theta \end{pmatrix},$$

de sorte que

$$d\vec{g} = \begin{pmatrix} \cos\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} dr + \begin{pmatrix} -r\sin\varphi\sin\theta \\ r\cos\varphi\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} d\varphi + \begin{pmatrix} r\cos\varphi\cos\theta \\ r\sin\varphi\cos\theta \\ -r\sin\theta \end{pmatrix} d\theta,$$

$$h_r = 1, \quad h_\varphi = r\sin\theta, \quad h_\theta = r,$$

$$\frac{d\vec{g}}{\partial r} = \vec{e}_r, \quad \frac{d\vec{g}}{\partial \varphi} = r\sin\theta\vec{e}_\varphi, \quad \frac{d\vec{g}}{\partial \theta} = r\vec{e}_\theta.$$

On écrit encore

$$d\vec{g} = \vec{e}_r\, dr + r\sin\theta\vec{e}_\varphi\, d\varphi + r\vec{e}_\theta\, d\theta.$$

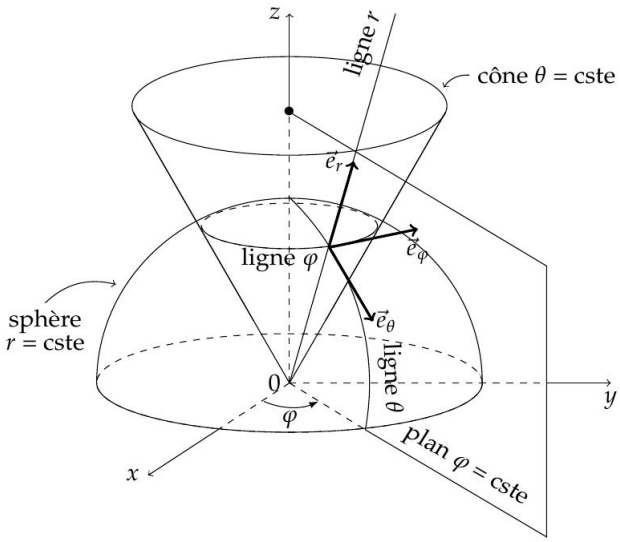


FIGURE 10.30 – Coordonnées sphériques.

10.3.7 Le champ de bases des gradients.

Travaillons dans un domaine où $\vec{g}$ admet une fonction réciproque $\vec{g}^{-1}$, de sorte que

$$\vec{g}^{-1}(x,y,z) = (u,v,w).$$

Dès lors, la matrice jacobienne de g^{-1} est

$$\mathcal{J}_{\vec{g}^{-1}} = \text{mat}\left(\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}\right) = \begin{pmatrix} \vec{\nabla}u \\ \vec{\nabla}v \\ \vec{\nabla}w \end{pmatrix},$$

de sorte qu'en tout point (x_0, y_0, z_0), les trois vecteurs $\vec{\nabla}u, \vec{\nabla}v, \vec{\nabla}w$ forment une base. Puisque le produit des matrices jacobiennes de $\vec{g}$ et de sa réciproque $\vec{g}^{-1}$ est la matrice unité (pourquoi ?), on a :

$$\left\langle \vec{\nabla}u, \frac{\partial\vec{g}}{\partial u}\right\rangle = 1, \quad \left\langle \vec{\nabla}u, \frac{\partial\vec{g}}{\partial v}\right\rangle = 0, \quad \left\langle \vec{\nabla}u, \frac{\partial\vec{g}}{\partial w}\right\rangle = 0$$

$$\left\langle \vec{\nabla}v, \frac{\partial\vec{g}}{\partial u}\right\rangle = 0, \quad \left\langle \vec{\nabla}v, \frac{\partial\vec{g}}{\partial v}\right\rangle = 1, \quad \left\langle \vec{\nabla}v, \frac{\partial\vec{g}}{\partial w}\right\rangle = 0$$

$$\left\langle \vec{\nabla}w, \frac{\partial\vec{g}}{\partial u}\right\rangle = 0, \quad \left\langle \vec{\nabla}w, \frac{\partial\vec{g}}{\partial v}\right\rangle = 0, \quad \left\langle \vec{\nabla}w, \frac{\partial\vec{g}}{\partial w}\right\rangle = 1$$

On dit que $(\vec{\nabla}u, \vec{\nabla}v, \vec{\nabla}w)$ et $\left(\frac{\partial\vec{g}}{\partial u}, \frac{\partial\vec{g}}{\partial v}, \frac{\partial\vec{g}}{\partial w}\right)$ forment des **systèmes de vecteurs réciproques**.

On peut prouver que si les coordonnées curvilignes u, v, w sont orthogonales, alors

$$\vec{\nabla}u \parallel \frac{\partial\vec{g}}{\partial u} \quad , \quad \vec{\nabla}v \parallel \frac{\partial\vec{g}}{\partial v} \quad , \quad \vec{\nabla}w \parallel \frac{\partial\vec{g}}{\partial w},$$

de sorte que

$$\vec{\nabla}u = \frac{1}{h_u}\vec{e_u} \quad , \quad \vec{\nabla}v = \frac{1}{h_v}\vec{e_v} \quad , \quad \vec{\nabla}w = \frac{1}{h_w}\vec{e_w}.$$

Nous nous placerons toujours dans ce cas-là.

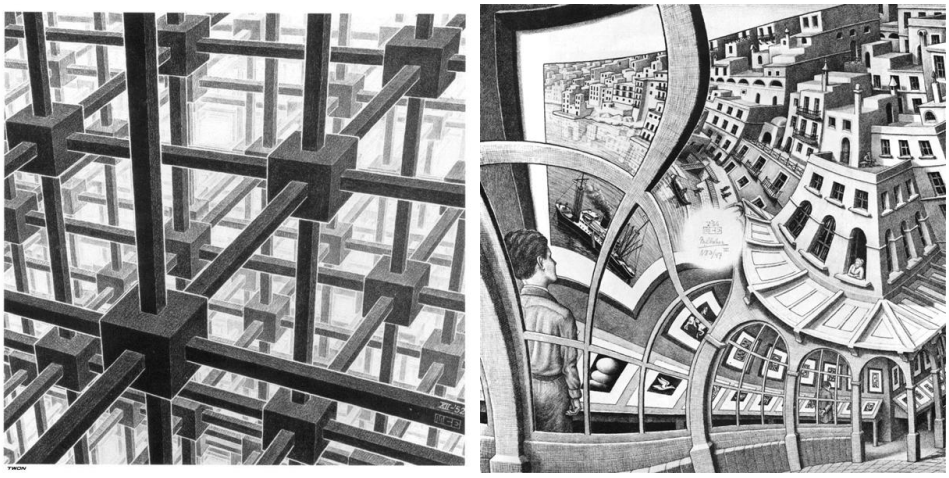


FIGURE 10.31 – Lithographies de M. C. Escher représentant des coordonnées cartésiennes (gauche) et curvilignes (droite).

10.4 Champs de vecteurs et div, grad, rot.

10.4.1 Définition de champs de vecteurs

Définition 10.16 Soit

$$\vec{F} : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n : (x_1, ..., x_n) \mapsto \begin{pmatrix} F_1(x_1, ..., x_n) \\ \vdots \\ F_n(x_1, ..., x_n) \end{pmatrix}$$

Le **champ de vecteurs** associé à $\vec{F}$ est l'ensemble des vecteurs localisés $\{(\vec{x}; \vec{x} + \vec{F}(\vec{x})); x \in D\}$.
On identifie généralement *fonction* et *champ de vecteurs* et on écrit simplement "le champ $\vec{F}$" ou "le champ $\vec{F}(x)$". ■

On dit donc que le champ de vecteurs est **continu** (respectivement **différentiable, de classe** C^k,...) ssi la fonction $\vec{F}$ est continue (respectivement différentiable, de classe C^k,...).

Si $\vec{F}$ est de classe C^1, le **graphe** de $\vec{F}$ est donc une variété de dimension n dans $\mathbb{R}^{2n}$. Dès le cas $n = 2$, notre intuition est plongée (ou noyée ?) dans la dimension 4. On préfère bien sûr visualiser $\vec{F}$ en tant que "champ de vecteurs", qui associe à chaque point $\vec{x} \in D$, le vecteur localisé d'origine $\vec{x}$ et d'extrémité $\vec{x} + \vec{F}(\vec{x})$.

Dans $\mathbb{R}^3$ par exemple, nous noterons

$$\vec{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} F_1(x, y, z) \\ F_2(x, y, z) \\ F_3(x, y, z) \end{pmatrix} = F_1(x, y, z)\vec{1}_x + F_2(x, y, z)\vec{1}_y + F_3(x, y, z)\vec{1}_z,$$

F_1, F_2, F_3 étant les **composantes** du champ de vecteurs $\vec{F}$. Ici, nous énumérons clairement les coordonnées dans l'ordre x, y, z. Pour nous affranchir de cette numérotation, nous noterons parfois les composantes de $\vec{F}$ respectivement F_x, F_y, F_z .
Il est bien sûr impossible de représenter tous ces vecteurs localisés, mais on peut le faire pour une sélection de points $\vec{x} \in D$. Tout l'art consiste alors à choisir un maillage de D suffisamment lâche pour qu'on y voie quelque chose et suffisamment fin pour qu'on ait une bonne idée du comportement de $\vec{F}$. En toute rigueur, cette dernière phrase n'a évidemment aucun sens puisqu'une fonction $\vec{F}$ n'est connue que si on connaît $\vec{F}(\vec{x})$ pour tout $\vec{x} \in D$. Néanmoins, si $\vec{F}$ est suffisamment régulière, nous pouvons faire confiance à notre interpolation visuelle.

■ **Exemple 10.11 Esquisses de champs de vecteurs**

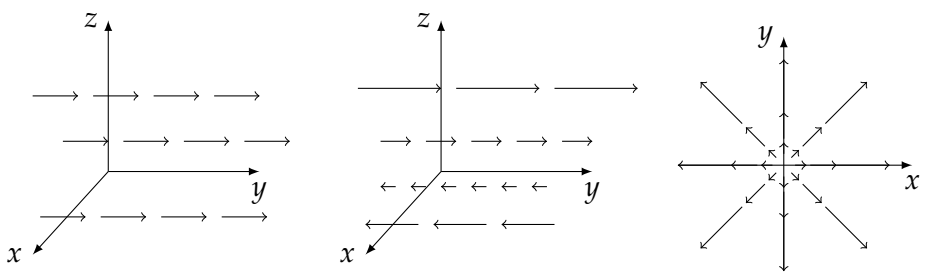


FIGURE 10.32 – $\vec{F}(x, y, z) = \vec{1}_y$, $\vec{F}(x, y, z) = z\vec{1}_y$, $\vec{F}(x, y) = x\vec{1}_x + y\vec{1}_y$.

sont respectivement le champ de vecteurs constant $\vec{1}_y$, le champ de vecteurs $z\vec{1}_y$ (de direction constante) et le champ de vecteurs radial (ou central) $x\vec{1}_x + y\vec{1}_y$.

Ces trois champs de vecteurs sont **linéaires** : ils correspondent à des applications linéaires (leurs composantes sont toutes des formes linéaires).

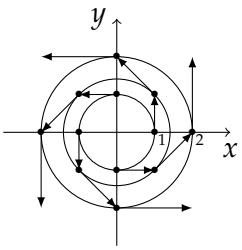


FIGURE 10.33 – $\vec{F}(x,y) = -y\vec{1}_x + x\vec{1}_y$.

C'est encore le cas du champ de vecteurs $\vec{F}(x,y) = -y\vec{1}_x + x\vec{1}_y$. Pour l'esquisser, on peut s'aider en recherchant les vecteurs de même longueur. Ici comme dans le cas précédent, $||\vec{F}(x,y))|| = \sqrt{x^2+y^2}$, c'est-à-dire que les origines des vecteurs de même longueur forment un cercle centré à l'origine.

Certains identifieront ce champ de vecteurs comme le champ $\dfrac{\partial \vec{g}}{\partial \theta}$ associé à l'usage des coordonnées polaires définies par $(x,y) = \vec{g}(r,\theta)$.

La notion de champ de vecteurs est particulièrement utile en physique. Réciproquement, pour mieux comprendre les théorèmes mathématiques qui concernent les champs de vecteurs, il est utile de leur associer une intuition physique. Nous ferons fréquemment allusion dans la suite aux champs de forces, aux champs de vitesses et aux champs de gradients. ■

■ **Exemple 10.12** Champs de forces.
D'après la **loi de la gravitation** de Newton, la force gravitationnelle $\vec{F}(x,y,z)$ exercée par un point de masse m (dont la position est choisie comme origine du système d'axes orthonormés de l'espace euclidien dans lequel on travaille, noté $\mathbb{R}^3$) sur un point de masse unité placé en $(x,y,z) \neq (0,0,0)$ est donnée par :

$$\vec{F}(x,y,z) = -\frac{Gm}{r^2}\vec{1}_r = -\frac{Gm}{r^3}\vec{r}$$

où

$$\vec{r} = x\vec{1}_x + y\vec{1}_y + z\vec{1}_z \quad \text{et} \quad r = \|\vec{r}\|\,.$$

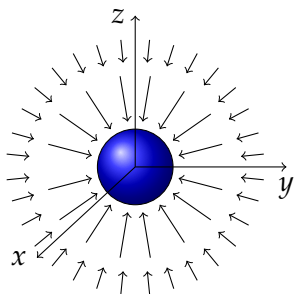


FIGURE 10.34 – Champ de force gravitationnel $\vec{F}(x,y,z)$.

Le champ gravitationnel terrestre est un champ de forces central et attractif, de norme inversément proportionnelle au carré de la distance au centre de la terre.

D'après la **loi de Coulomb**, la force électrique $\vec{E}(x,y,z)$ exercée par une charge q, placée à l'origine, sur une charge positive unité, placée en $(x,y,z) \neq (0,0,0)$, est donnée par

$$\vec{E}(x,y,z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\vec{1}_r = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3}\vec{r},$$

où ϵ_0 est la permittivité du vide, la distance est mesurée en mètres, la charge en coulombs et la force en newtons.

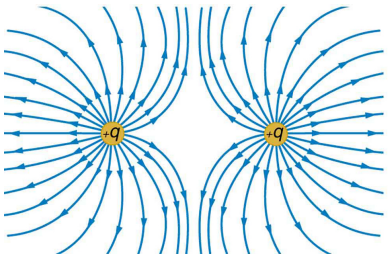


FIGURE 10.35 – Champ électrique induit par deux mêmes charges positives.

Les deux champs de forces $\vec{F}$ et $\vec{E}$ ci-dessus sont des champs de forces radiaux (ou centraux). Par contre, le champ électrique induit par deux charges positives égales n'est plus radial. Un tel champ est évoqué ci-contre par quelques-unes de ses lignes de forces.

Les **lignes de forces** sont des courbes orientées telles qu'en chacun de leurs points, la tangente orientée est de direction et de sens indiqué par le vecteur du champ de forces en ce point.

En 2D, les lignes de forces de $F_x\vec{1}_x + F_y\vec{1}_y$ sont caractérisées par l'EDO

$$\frac{dy}{dx} = \frac{F_y}{F_x},$$

ou par l'ED

$$\frac{dx}{F_x} = \frac{dy}{F_y},$$

où les variables x et y apparaissent de manière plus symétrique. Cette écriture inclut la convention suivante : si $F_x = 0$, l'ED doit se lire $dx = 0$, tandis que si $F_y = 0$, elle se lit $dy = 0$.

En 3D, on écrira le système différentiel $\dfrac{dx}{F_x} = \dfrac{dy}{F_y} = \dfrac{dz}{F_z}$.

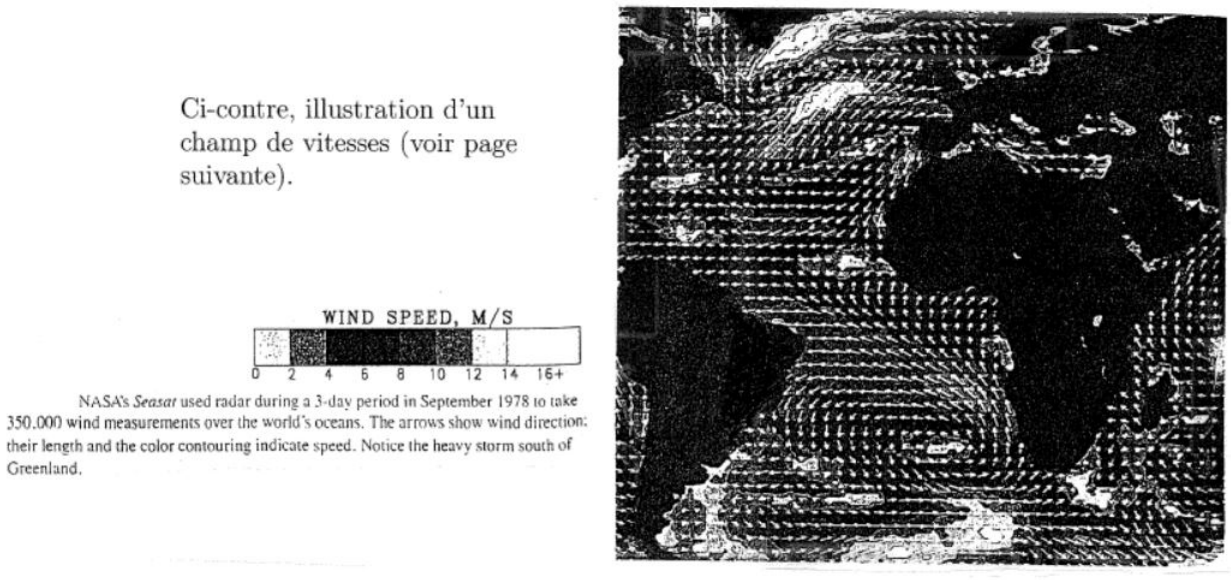


FIGURE 10.36 – Champ de vitesses du vent datant du mois de septembre 1978.

■

■ **Exemple 10.13** : **champs de vitesses**
Ils permettent de représenter le mouvement d'un fluide. A tout point (x, y, z) du domaine D où se meut le fluide, on associe le vecteur $\vec{v}(x, y, z, t)$ qui exprime la vitesse du fluide au point (x, y, z) et à l'instant t. Si on fixe t ou si l'écoulement est **stationnaire** (c'est-à-dire si $\vec{v}$ est indépendant de t), on obtient un champ de vecteurs

$$\vec{v} : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : (x, y, z) \to \vec{v}(x, y, z).$$

N.B. : *même lorsque nous restons immobiles, l'écoulement du sang dans vos veines n'est* **pas stationnaire** *(pulsations).*

De nombreux écoulements sont approchés par des écoulements stationnaires. Voici respectivement :

a) l'écoulement de l'air autour d'une aile d'avion : $||\vec{v}_a|| > ||\vec{v}_b||$,

b) l'écoulement laminaire du sang dans une artère : il est plus rapide au centre de l'artère,

c) l'écoulement de l'eau dans un évier,

d) un autre écoulement tourbillonnaire avec une de ses lignes intégrales.

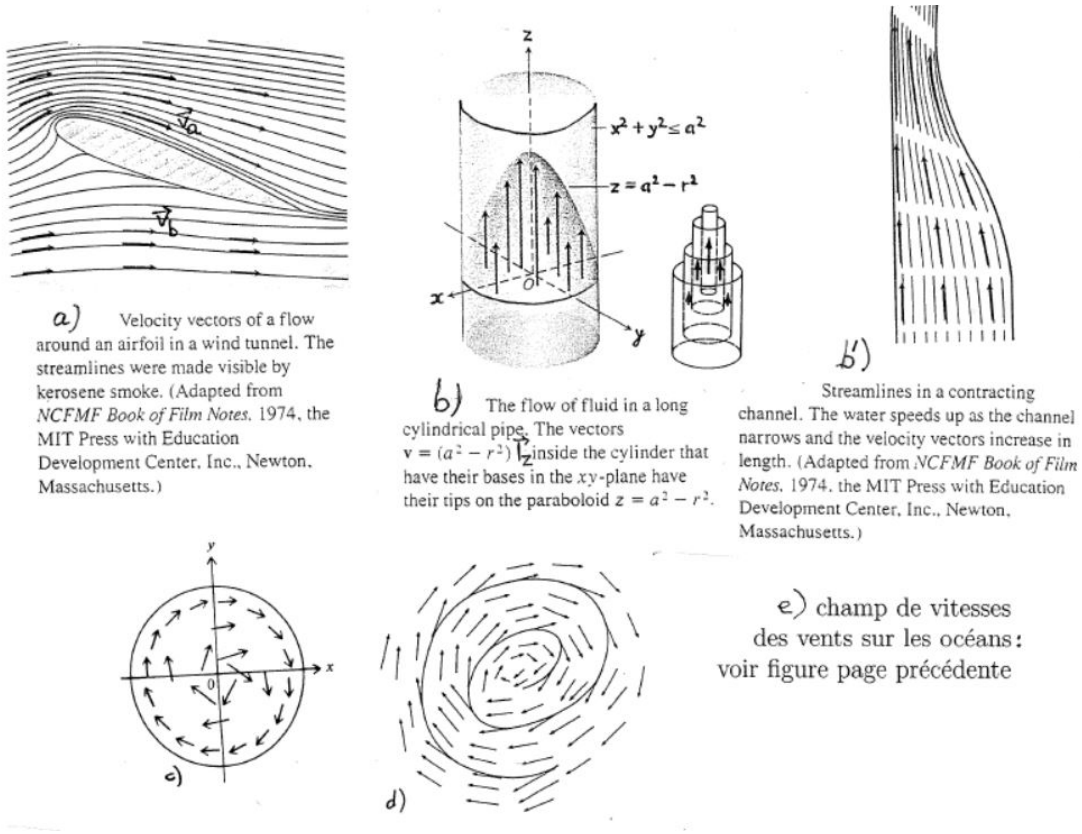


FIGURE 10.37

■

10.4.2 L'opérateur "nabla" (ou "del")

Définition 10.17 L'opérateur vectoriel

$$\vec{\nabla} := \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

envoie toute fonction de classe C^1 sur le triple de fonctions du même type que la fonction initiale ou "primitive", constitué par les dérivées de cette fonction par rapport à chacune des trois variables. ■

Cette notation fournit également un moyen mnémotechnique précieux pour retenir les définitions et propriétés des opérateurs grad, div, rot.

Nous comprenons maintenant pourquoi nous symbolisions grad f par $\vec{\nabla} f$.

Nous définirons aussi

Définition 10.18

$$\mathrm{div}\vec{F} = \left\langle \vec{\nabla}, \vec{F} \right\rangle = \left\langle \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) , (F_1, F_2, F_3) \right\rangle .$$

■

On écrit également $\vec{\nabla} \cdot \vec{F}$ dans le cas où le produit scalaire est noté par un point ("*dot product*"

en anglais).
Nous verrons aussi que rot $\vec{F}$ peut se noter (ou se définir !) par $\vec{\nabla} \times \vec{F}$.

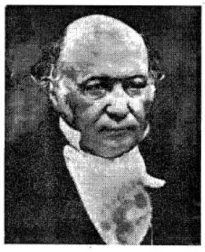
Le symbole ∇ a été introduit par Hamilton en 1843 pour désigner l'opérateur

$$i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z}$$

faisant intervenir les fameux quaternions i, j et k .

♢ **Tourisme historique**

Un pont près de Dublin porte une plaque commémorative rappelant que lors de sa découverte des quaternions, Hamilton, exultant, y a gravé la clé de leur multiplication : $ij = k$, $jk = i$, $ki = j$.


Hamilton (1805-1865)

Sachant que les trois vecteurs de base de $\mathbb{R}^3$ sont encore notés **i, j, k** dans les livres anglo-saxons, nous retrouvons la signification que nous donnons actuellement à ∇ (encore noté ∇ dans les livres où les vecteurs sont écrits en gras plutôt que surmontés d'une flèche.
Hamilton, dont la vaste culture incluait bon nombre de langues orientales anciennes, a baptisé cet opérateur "nabla" , mot désignant en hébreu biblique une harpe triangulaire (un des deux principaux instruments à cordes mentionnés dans la Bible). Certains mathématiciens proposèrent d'appeler ce DELTA renversé ATLED, mais cette dénomination a fait long feu. Félicitons-nous qu'ils n'aient pas choisi DE $\Gamma \perp \forall$, assez difficile à prononcer ! En fait, ∇ se prononce souvent "del".

10.4.3 Différentielle d'un champ de vecteurs.

C'est une notion déjà connue puisqu'un champ de vecteurs dans $\mathbb{R}^n$ n'est qu'une fonction de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}^n$ (voir 8.6.4). Par exemple, si

$$\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : (x, y, z) \to \left.\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix}\right|_{(x,y,z)}$$

est de classe C^1, alors la différentielle de $\vec{F}$ en (x_0, y_0, z_0) est l'application linéaire

$$d\vec{F}(x_0, y_0, z_0) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : (x, y, z) \to \left.\begin{pmatrix} \vec{\nabla} F_1 \\ \vec{\nabla} F_2 \\ \vec{\nabla} F_3 \end{pmatrix}\right|_{(x_0,y_0,z_0)} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Dans la base canonique, sa matrice est la matrice jacobienne de $\vec{F}$, c'est-à-dire :

$$\mathcal{J}_{\vec{F}} = \text{mat}\frac{\partial(F_1, F_2, F_3)}{\partial(x, y, z)}.$$

Nous avons vu que la différentielle $d\vec{F}(x_0, y_0, z_0)$ est l'application linéaire associée à la meilleure approximation d'ordre 1 de la fonction $\vec{F}$ au voisinage du point (x_0, y_0, z_0). Ceci la définit de

manière *intrinsèque*, c'est-à-dire sans recours à un repère orthonormé privilégié.

Deux notions liées à la différentielle d'un champ de vecteurs s'avèrent particulièrement utiles : il s'agit de la *divergence* et du *rotationnel*. La divergence, le rotationnel et le gradient sont des opérateurs différentiels du 1er ordre omniprésents en physique : le gradient s'identifie simplement à la différentielle d'un champ scalaire.

10.4.4 Divergence d'un champ de vecteurs

Définition 10.19 Soit $\vec{F} : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ différentiable.

$$\begin{aligned} \operatorname{div}\vec{F} &:= \operatorname{trace}\left(\operatorname{mat}\frac{\partial(F_1,F_2,F_3)}{\partial(x,y,z)}\right) \\ &= \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \\ &= \left\langle \vec{\nabla}, \vec{F} \right\rangle. \end{aligned}$$

■

$\operatorname{div}\vec{F}$ est donc la fonction scalaire :

$$\operatorname{div}\vec{F} : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : (x,y,z) \mapsto \operatorname{div}\vec{F}|_{(x,y,z)}.$$

Ceci se généralise immédiatement en toute dimension dans $\mathbb{R}^n$,

$$\operatorname{div}\vec{F} = \operatorname{trace}\operatorname{mat}\left(\frac{\partial(F_1,\ldots,F_n)}{\partial(x_1,\ldots x_n)}\right) = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F_i}{\partial x_i}.$$

■ **Exemple 10.14** Voici une illustration d'un champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^2$ et des courbes de niveau de sa divergence. On peut déjà y voir que les points où les flèches se rejoignent correspondent à des zones à faible divergence, tandis que les zones d'où elles émanent en abondance correspondent à des zones à haute divergence.

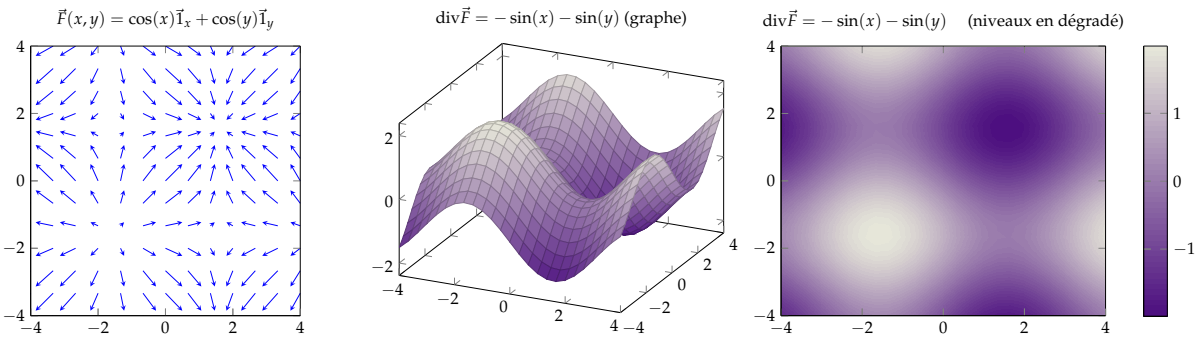


FIGURE 10.38 – Champ vectoriel, et deux vues de sa divergence.

■

10.4.5 Interprétation de la divergence d'un champ (de vitesses).

Première approche

Ecoulement d'un fluide : petit ballon infinitésimal carré

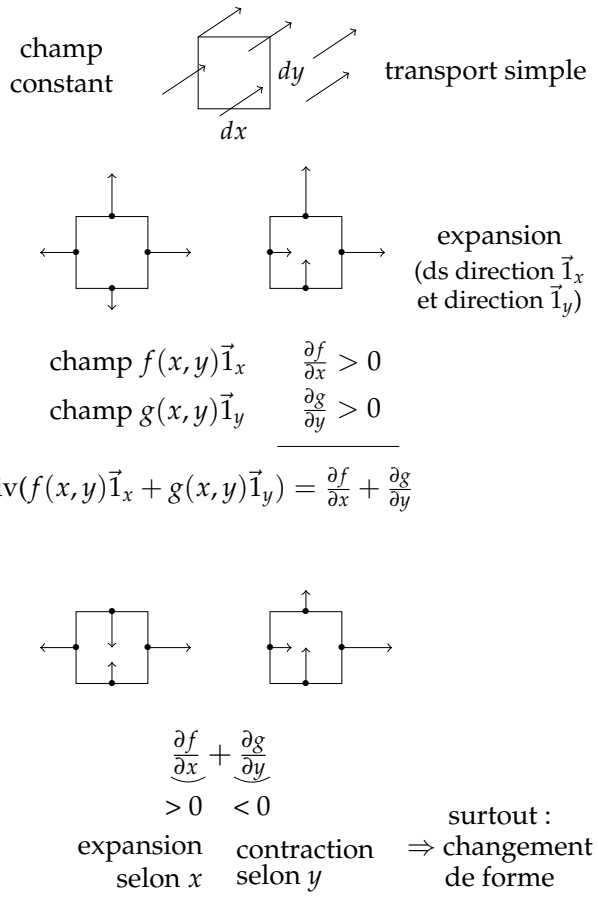


FIGURE 10.39

2ème approche

Intuition de la divergence d'un champ de vitesses : écoulement stationnaire d'un fluide

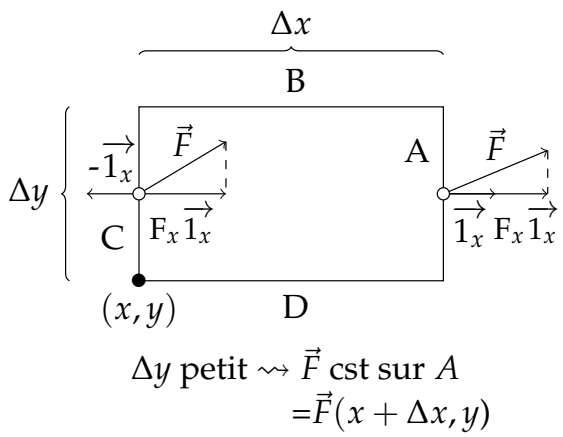


FIGURE 10.40

Flux sortant par $A \approx \left\langle \vec{F}|_{(x+\Delta x,y)}, \vec{1}_x \right\rangle \Delta y = F_x(x+\Delta x, y)\Delta y$

Flux sortant par $C \approx \left\langle \vec{F}|_{(x,y)}, -\vec{1}_x \right\rangle \Delta y = -F_x(x,y)\Delta y$

Flux sortant par A et C (les côtés $\perp$ $\vec{1}_x$)

$$\approx \frac{F_x(x+\Delta x, y) - F_x(x,y)}{\Delta x}\Delta x \Delta y \approx \left.\frac{\partial F_x}{\partial x}\right|_{(x,y)} \Delta x \Delta y$$

Flux **sortant** par B et D (les côtés $\perp$ $\vec{1}_y$)$\approx \left.\frac{\partial F_y}{\partial y}\right|_{(x,y)} \Delta x \Delta y$

Flux total **sortant** du rectangle $\approx \left.\left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y}\right)\right|_{(x,y)} \Delta x \Delta y$

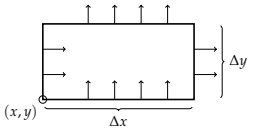


FIGURE 10.41 – Dans ce cas-ci, le flux sortant du rectangle est nul.

"Densité de flux sortant" = "Flux sortant / unité d'aire (en 2D) " $\approx \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} =: \text{div } \vec{F}$.

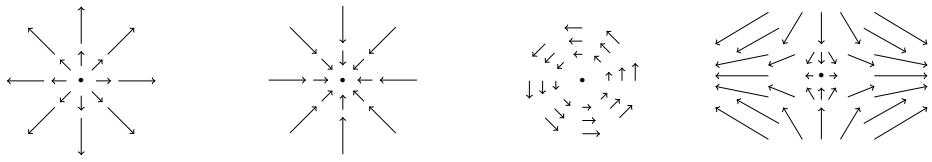
$$\begin{array}{rll} \text{div } \vec{F}|_{(x,y)} & > 0 & \text{ssi : } (x,y) \text{ est une } \textbf{source} \\ & < 0 & \text{ssi : } (x,y) \text{ est un } \textbf{puits} \\ \text{div } \vec{F}|_{(x,y)} = 0 \, \forall (x,y) \Leftrightarrow \text{div } \vec{F} \equiv 0 & \Leftrightarrow: \vec{F} & \textbf{est incompressible} \text{ (= } \textbf{solénoïdal} \text{)} \end{array}$$

Si $\vec{v}$ est le champ de vitesses d'un fluide (3D), alors physiquement, div$\vec{v}(x,y,z)$ représente l'accroissement du flux de masse par unité de volume au point (x,y,z).

Le point (x,y,z) est une **source** si div $\vec{v}(x,y,z) > 0$, ce qui signifie qu'il y a un flux positif s'échappant du point (x,y,z).

Le point (x,y,z) est un **puits** si div $\vec{v}(x,y,z) < 0$, ce qui signifie qu'il y a un flux positif vers le point (x,y,z).

Un **fluide** est dit **incompressible** si son champ de vitesses est de divergence nulle : aucun point n'est un puits, ni une source. Un **champ de forces** est dit **solénoïdal** si sa divergence est nulle. Exemples : Les deux champs de forces *gravitationnel* et *électrique* décrits en 10.1.3 sont solénoïdaux (ou à divergence nulle). Une des équations de MAXWELL affirme que la *divergence de tout champ magnétique est nulle.*



$\vec{v} = x\vec{1}_x + y\vec{1}_y = \vec{r}$
tout point est une source
div $\vec{v} = 2$

$\vec{v} = -\vec{r}/2$
tout point est un puits
div $\vec{v} = -1$

$\vec{v} = \frac{1}{3}(-y\vec{1}_x + x\vec{1}_y)$
incompressible
div $\vec{v} = 0$

$\vec{v} = x\vec{1}_x - \frac{y}{2}\vec{1}_y$
div $\vec{v} = \frac{1}{2}$

FIGURE 10.42 – Différents champs vectoriels.

♢ Questions.
• Peut-on retrouver un champ de vecteurs à partir de sa divergence ?
• Toute fonction scalaire est-elle la divergence d'un champ de vecteurs ?

10.4.6 Rotationnel d'un champ de vecteurs

Définition 10.20 Dans $\mathbb{R}^3$, $\operatorname{rot}\vec{F} := \vec{\nabla} \times \vec{F} := \begin{vmatrix} \vec{1}_x & \vec{1}_y & \vec{1}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}$

$$= \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right)\vec{1}_x + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\right)\vec{1}_y + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\vec{1}_z.$$

Dans $\mathbb{R}^2$, $\quad \operatorname{rot}\vec{F} \quad := \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} \\ F_1 & F_2 \end{vmatrix} \quad = \quad \dfrac{\partial F_2}{\partial x} - \dfrac{\partial F_1}{\partial y}.$ ■

R On retrouve le rotationnel dans $\mathbb{R}^2$ comme cas particulier du rotationnel dans $\mathbb{R}^3$ en plongeant le plan Oxy dans l'espace $Oxyz$. On trouve alors $\operatorname{rot}\vec{F}\,\vec{1}_z = \operatorname{rot}\vec{F}$, où dans le premier membre $\vec{F}$ est vu dans $\mathbb{R}^2$, alors que dans le second membre il est plongé dans $\mathbb{R}^3$. Cette vision est commode, car elle permet de donner un sens à $\vec{\nabla} \times \vec{F}$ (notation abusive en dimension 2, mais bien utile pour éviter les répétitions).

Attention : en 3D seulement ! Ce n'est qu'en 3D que le rotationnel d'un champ de vecteurs est encore un champ de vecteurs. Comme indiqué ci-dessus, on s'en sort en 2D en se plongeant dans un espace 3D ou en se contentant d'un champ scalaire (pour le rotationnel d'un champ de vecteurs).

♢ En nD, le rotationnel a $\binom{n}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$ composantes, donc en particulier le rotationnel d'un champ de vecteurs 4D a 6 composantes.
Pour les plus curieux, en voici une définition (où $\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ est noté ∂_i) :

$$\operatorname{rot}\vec{F} = \Big((-1)^{i+j}(\partial_j F_i - \partial_i F_j)\Big)_{1\le i<j\le n} \quad \text{et } \operatorname{rot}\vec{F}|_{\vec{x}} \in \mathbb{R}^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

Le rotationnel d'un champ de vecteurs est donc, en dimension 3, un autre champ de vecteurs, alors qu'en dimension 2, c'est un champ scalaire (vu parfois comme un champ de vecteurs de direction constante $\vec{1}_z$ dans $\mathbb{R}^3$.)

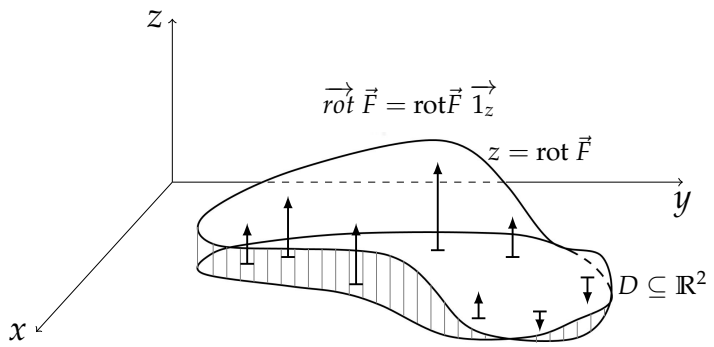


FIGURE 10.43 – Lien entre le graphe de rot$\vec{F}$ sur D et le lieu des extrémités des vecteurs rot $\vec{F}$ sur D.

■ **Exemple 10.15**

- Si $\vec{F}: \quad]-2\pi, 2\pi[^2 \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos y \\ \cos x \end{pmatrix}$, alors

  rot$\vec{F}: \quad]-2\pi, 2\pi[^2 \to \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto -\sin x + \sin y.$

- Raccourcissons les vecteurs, en posant : $\vec{F}(x,y) = 0.2(\cos y \vec{1}_x + \cos x \vec{1}_y)$.
  Voici successivement des évocations du champ de vecteurs $\vec{F}$, de quelques courbes de niveau de rot$\vec{F}$ (avec un dégradé indiquant le sens de progression des niveaux, les niveaux les plus bas étant les plus sombres) et du graphe de rot$\vec{F}$. Le fait que les courbes de niveau de rot$\vec{F}$ et de $\|\vec{F}\|$ coïncident est ... une coïncidence.

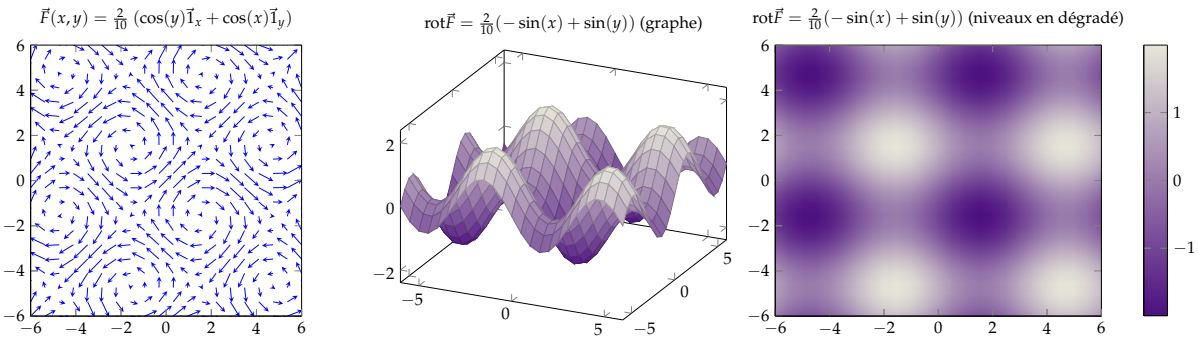


FIGURE 10.44 – Champ vectoriel, et deux vues de son rotationnel.

■

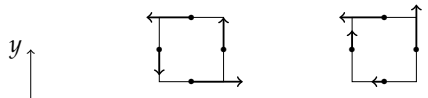
Notation anglo-saxonne pour rot $\vec{F}$: **curl F** ou curl $\vec{F}$.

♢ **Heaviside**
Cette notation fut introduite par **Oliver Heaviside** (1850-1925), ingénieur électricien anglais, très novateur, qui contribua de manière significative au développement et à l'application de la théorie de l'électromagnétisme. Le physicien néerlandais **Hendrik Lorentz** (1853-1928) lui préférait la notation rot, qui nous est restée. Lorentz reçut le prix Nobel en 1902 pour sa théorie électronique de la matière, qui complète la théorie macroscopique de Maxwell. Les "transformations de Lorentz" sont fondamentales en relativité restreinte.

♢ Questions .

- Peut-on retrouver un champ de vecteurs (ou sa différentielle ?) à partir de son rotationnel ?
- Tout champ de vecteurs dans $\mathbb{R}^3$ est-il le rotationnel d'un champ de vecteurs de $\mathbb{R}^3$?
- Toute fonction scalaire dans $\mathbb{R}^2$ est-elle le rotationnel d'un champ de vecteurs de $\mathbb{R}^2$?

10.4.7 Interprétation du rotationnel d'un champ.



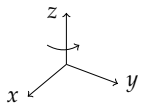
champ $g(x,y)\vec{1}_y$ $\quad \frac{\partial g}{\partial x} > 0$ rotation +

champ $f(x,y)\vec{1}_x$ $\quad \frac{\partial f}{\partial y} < 0$ rotation +

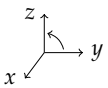
tendance à ↺ (on ne tient pas compte du transport simple) $\quad \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} > 0$

$$\overrightarrow{rot}\,(f\vec{1}_x + g\vec{1}_y) = (\tfrac{\partial g}{\partial x} - \tfrac{\partial f}{\partial y})\vec{1}_z$$

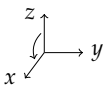
tendance à



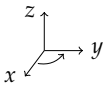
$$\overrightarrow{rot}\,(f\vec{1}_x + g\vec{1}_y + h\vec{1}_z) = \begin{vmatrix} \vec{1}_x & \vec{1}_y & \vec{1}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f & g & h \end{vmatrix}$$



$$= (\tfrac{\partial h}{\partial y} - \tfrac{\partial g}{\partial z})\vec{1}_x$$



$$+ (\tfrac{\partial f}{\partial z} - \tfrac{\partial h}{\partial x})\vec{1}_y$$



$$+ (\tfrac{\partial g}{\partial x} - \tfrac{\partial f}{\partial y})\vec{1}_z$$

FIGURE 10.45

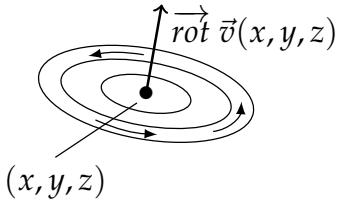


FIGURE 10.46 – Rotationnel d'un champ solénoidal.

Si $\vec{v}$ est le champ de vitesses d'un fluide, alors rot $\vec{v}|_{(x,y,z)}$ mesure la tendance du fluide à tourner autour d'un axe.
La **direction** de $\vec{\nabla} \times \vec{v}$ passant par (x,y,z)donne la direction de l'axe et le sens de rotation (cf. en accord avec l'orientation du trièdre $oxyz$).
La **longueur** de $\vec{\nabla} \times \vec{v}$ mesure la rapidité du mouvement des particules autour de l'axe de rotation.
Cette interprétation du rotationnel sera confirmée par le **théorème de Stokes** (en 3D) ou de Green (en 2D) en fin de chapitre.

Définition 10.21 $\vec{F}$ est **irrotationnel** ssi rot $\vec{F} = \vec{0}$ (ou en 2D : rot$\vec{F} = 0$). ■

Pourquoi dit-on "rotationnel" ou comment trouver la formule de Green "évidente" ?
Travaillons en 2D
Soit le champ de vecteurs : $\vec{F}(x,y) = F_x(x,y)\vec{1}_x + F_y(x,y)\vec{1}_y$

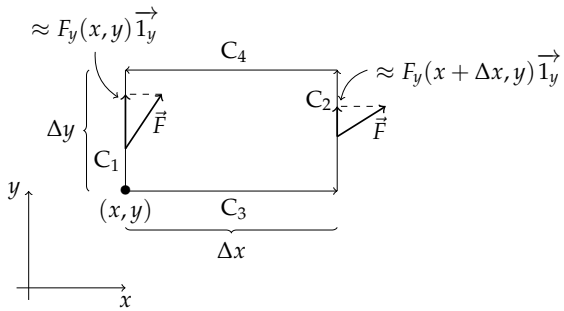


FIGURE 10.47 – Circulation de $\vec{F}$ le long des côtés verticaux C_1 et C_2.

Travail ou circulation de $\vec{F}$ le long de $C_2 \approx \underbrace{F_y(x+\Delta x,y)}_{<\vec{F},\vec{1}_y>} \cdot \Delta y$

Travail ou circulation de $\vec{F}$ le long de $C_1 \approx \underbrace{-F_y(x,y)}_{<\vec{F},-\vec{1}_y>} \cdot \Delta y$

Contribution de C_1 et C_2 à la circulation de $\vec{F}$ autour du rectangle

$$\approx \frac{F_y(x+\Delta x,y) - F_y(x,y)}{\Delta x}\Delta x \Delta y \approx \frac{\partial F_y}{\partial x}(x,y)\Delta x \Delta y$$

Contribution de C_3 et C_4 à la circulation de $\vec{F}$ autour du rectangle $\approx -\dfrac{\partial F_x}{\partial y}\Delta x \Delta y$

Circulation de $\vec{F}$ autour du rectangle $C_1C_3C_2C_4 \approx \left(\dfrac{\partial F_y}{\partial x} - \dfrac{\partial F_x}{\partial y}\right)\Delta x \Delta y$

"Circulation le long du bord /unité d'aire" = $\dfrac{\partial F_y}{\partial x} - \dfrac{\partial F_x}{\partial y} = \text{ rot } \vec{F}$

10.4.8 Linéarité de div, grad, rot, ...

Proposition 10.15 Supposons $f, \vec{F}$ et $\vec{G}$ de classe C^1 sur $D \subseteq \mathbb{R}^3$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
Remarquons d'abord que l'opérateur de dérivation $\vec{\nabla}$ étant linéaire,
les opérateurs div, grad, rot et Δ **sont linéaires**, c'est-à-dire que

(a) $\operatorname{div}(\lambda\vec{F} + \mu\vec{G}) = \lambda \operatorname{div} \vec{F} + \mu \operatorname{div} \vec{G}$,

(b) $\operatorname{grad}(\lambda f + \mu g) = \lambda \operatorname{grad} f + \mu \operatorname{grad} g$,

(c) $\vec{\operatorname{rot}}(\lambda\vec{F} + \mu\vec{G}) = \lambda\vec{\operatorname{rot}}\vec{F} + \mu\vec{\operatorname{rot}}\vec{G}$

(d) $\Delta(\lambda f + \mu g) = \lambda\Delta f + \mu\Delta g$.

10.4.9 Nullités remarquables et laplacien.

Supposons f et $\vec{F}$ de classe C^2.
Dans $\mathbb{R}^3$, un calcul direct s'appuyant sur le fait que les dérivées secondes d'une fonction de classe C^2 sont indépendantes de l'ordre de dérivation, (voir aussi 10.2.9) établit les trois identités remarquables suivantes :

Proposition 10.16 **Le rotationnel d'un champ de vecteurs est à divergence nulle (solénoïdal) :**

$$\left\langle \vec{\nabla}, (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \right\rangle = 0 \quad (i.e.\ \operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{F}) = 0)$$

Le gradient d'une fonction est **irrotationnel :**

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} f = \vec{0} \quad (i.e.\ \operatorname{rot}\overrightarrow{\operatorname{grad}} f = \vec{0})$$

Par contre, **le gradient** n'est **pas toujours incompressible :**

$$\left\langle \vec{\nabla}, \vec{\nabla} f \right\rangle = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} =: \Delta f \quad = \operatorname{div}\overrightarrow{\operatorname{grad}} f$$

Cette dernière identité se généralise dans $\mathbb{R}^n$:

$$\left\langle \vec{\nabla}, \vec{\nabla} f \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} =: \Delta f$$

10.4.10 Autres identités avec div, grad, rot

Supposons $f, \vec{F}$ et $\vec{G}$ de classe C^2 sur $D \subseteq \mathbb{R}^3$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Les identités suivantes résultent directement des définitions : il suffit de développer les expressions et appliquer les règles de dérivation de fonctions de plusieurs variables (vues en 8.7).
Leurs démonstrations sont laissées comme exercices.

(i) $\operatorname{div}(f\vec{F}) = \left\langle \overrightarrow{\operatorname{grad}} f, \vec{F} \right\rangle + f \operatorname{div}\vec{F}$,

(ii) $\operatorname{div}(\vec{F} \times \vec{G}) = \left\langle \operatorname{rot}\vec{F}, \vec{G} \right\rangle - \left\langle \vec{F}, \operatorname{rot}\vec{G} \right\rangle$,

(iii) $\operatorname{rot}(f\vec{F}) = (\overrightarrow{\operatorname{grad}} f) \times \vec{F} + f(\operatorname{rot}\vec{F})$,

(iv) $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{F} = \overrightarrow{\operatorname{grad}}(\operatorname{div})\vec{F} - \operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{grad}}\vec{F})$,
où $\operatorname{div}\overrightarrow{\operatorname{grad}}\vec{F} = \Delta F_x \vec{1}_x + \Delta F_y \vec{1}_x + \Delta F_z \vec{1}_z$.

Ou encore, en utilisant la notation $\vec{\nabla}$:

(i) $\left\langle \vec{\nabla}, f\vec{F} \right\rangle = \left\langle \vec{\nabla} f, \vec{F} \right\rangle + f \left\langle \vec{\nabla}, \vec{F} \right\rangle$,

(ii) $\left\langle \vec{\nabla}, \vec{F} \times \vec{G} \right\rangle = \left\langle \vec{\nabla} \times \vec{F}, \vec{G} \right\rangle - \left\langle \vec{F}, \vec{\nabla} \times \vec{G} \right\rangle$,

(iii) $\vec{\nabla} \times f\vec{F} = \vec{\nabla} f \times \vec{F} + f\, \vec{\nabla} \times \vec{F}$,

(iv) $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = \vec{\nabla} \left\langle \vec{\nabla}, \vec{F} \right\rangle - \Delta \vec{F}$.

Noter qu'il résulte de (ii) que
le produit vectoriel de deux champs de vecteurs irrotationnels est solénoïdal (à divergence nulle).

Fort heureusement, la notation $\vec{\nabla}$ permet de dériver formellement ces identités des règles de calcul pour les produits scalaire et vectoriel dans $\mathbb{R}^3$. Mais cette manipulation commode n'est **pas** une démonstration.

♢ Exercice. Prouver que si

$$\operatorname{div}\vec{E} = 0 \quad , \quad \operatorname{div}\vec{H} = 0,$$

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad , \quad \vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t},$$

alors

$$\Delta \vec{E} = \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad \text{et} \quad \Delta \vec{H} = \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}.$$

Indication : Calculer de deux manières différentes $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E})$, pour obtenir $-\dfrac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$ d'une part et $-\Delta \vec{E}$ d'autre part. Idem pour $\vec{H}$. Développons les calculs :

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) &= -\vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \text{ (cf. hypothèses)} \\
&= -\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla} \times \vec{H}) \text{ (permuter dérivations spatiales et temporelles)} \\
&= -\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \text{ (cf. hypothèses)} \\
\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) &= \vec{\nabla} \left\langle \vec{\nabla}, \vec{E} \right\rangle - \nabla^2 E \\
&= -\Delta E \text{ (cf. hypothèses)}
\end{aligned}$$

L'EDP $\Delta f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial t^2}$ est appelée **l'équation des ONDES**.

L'opérateur $\dfrac{\partial^2}{\partial t^2} - \left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2} \right)$ est tellement fondamental en physique qu'on lui a donné un nom : le d'ALEMBERTIEN, et une notation : $\Box$.

L'EDP des ondes s'écrit alors simplement :

$$\Box f = 0.$$

10.4.11 Fonctions harmoniques

Définition 10.22 Les **fonctions harmoniques** sont les solutions de l'**EDP de Laplace :**

$$\Delta f = 0.$$

■

Elles jouent un rôle important tant en physique qu'en analyse mathématique.
En électrostatique, la loi de GAUSS assure que tout champ électrostatique $\vec{E}$ satisfait à l'équation

$$< \vec{\nabla}, \vec{E} >= 4\pi\rho \quad ,$$

où ρ est la densité de charge.
Comme d'autre part, $\vec{E}$ dérive d'un potentiel ϕ (attention : $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$ dès qu'on fait de la physique !), tout potentiel électrostatique satisfait donc à l'équation de POISSON :

$$\Delta\phi = -4\pi\rho.$$

En tout point où il n'y a pas de charge électrique (c'est le cas quand on cherche le potentiel dans la région située entre différents corps chargés), l'équation de Poisson se réduit à celle de LAPLACE. L'étude de ces EDP est postposée aux cours "EDP" et "Compléments de Mathématiques". Signalons dès à présent le cas particulier des fonctions harmoniques **radiales**, c'est-à-dire ne dépendant que de la distance à l'origine ...
Notons comme d'habitude dans $\mathbb{R}^n$: $\quad r := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$.
La proposition suivante généralise ce que nous avions déjà calculé pour $n = 2$ à la section 8.7.9.

Proposition 10.17 *Si* $f(\vec{x}) = \tilde{f}(r)$ *, alors* $\quad \Delta f = \tilde{f}'' + \dfrac{n-1}{r}\tilde{f}'$.

Démonstration : Excellent exercice ! (voir TP).

Corollaire 10.18
Les fonctions radiales suivantes sont harmoniques sur $\mathbb{R}_0^n$: $\vec{x} \mapsto \begin{cases} r & \text{si } n = 1, \\ \ln r & \text{si } n = 2, \\ 1/r^{n-2} & \text{si } n \geq 3. \end{cases}$

♢ Gradient et laplacien d'un champ de vecteurs
Puisque les dérivations de fonctions vectorielles se font composante par composante, on peut étendre les opérateurs $\vec{\nabla}$ et Δ aux fonctions vectorielles : il suffit d'appliquer $\vec{\nabla}$ et Δ séparément à chaque composante de la fonction $\vec{F} \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.
Si $m = 3$, cela donne

$$\vec{\nabla}\vec{F} := \left\langle \left(\vec{1}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{1}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{1}_z \frac{\partial}{\partial z} \right), \vec{F} \right\rangle = \begin{pmatrix} \vec{\nabla}F_1 \\ \vec{\nabla}F_2 \\ \vec{\nabla}F_3 \end{pmatrix}.$$

Le gradient d'une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^3$ se visualise donc comme un triple de vecteurs en chaque point de son domaine, donnant la direction et la mesure du plus grand taux d'accroissement de chacune des trois composantes de $\vec{F}$. Dans le cas où $\vec{F}$ est un champ de vecteurs au sens classique,

c'est-à-dire $n = m$, $\vec{\nabla}\vec{F}$ est alors un **champ de n-uples de vecteurs**. Ce sera un champ de bases ordonnées si $\vec{F}$ est de rang maximal (pourquoi ?) : nous avons déjà rencontré un tel champ dans l'étude des coordonnées curvilignes : $\vec{\nabla}\vec{g}^{-1}$ est un champ de bases (orthogonales dans le cas où les coordonnées curvilignes sont orthogonales).

$$\Delta\vec{F} := \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\right)\vec{F} = \begin{pmatrix} \Delta F_1 \\ \vdots \\ \Delta F_n \end{pmatrix} = \Delta F_1\,\vec{e}_1 + \cdots + \Delta F_n \vec{e}_n.$$

Le laplacien d'un champ de vecteurs de classe $C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ est donc un champ de vecteurs de classe $C^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. $\Diamond$

10.4.12 Champs de gradients ou champs conservatifs.

Soit $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction scalaire différentiable. Nous imaginerons par exemple que $f(\vec{x})$ mesure la température au point $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$. Pour visualiser la répartition des températures, on peut représenter quelques ensembles de niveau de f dans D (ce seront généralement des hypersurfaces). On peut aussi planter en chaque point $\vec{x}$ le vecteur gradient $\vec{\nabla} f(\vec{x})$. Nous savons que ce vecteur est orthogonal à l'ensemble de niveau $f^{-1}(f(\vec{x}))$ de f passant par $\vec{x}$, qu'il pointe dans la direction de plus grand accroissement de f en $\vec{x}$ et que sa longueur indique la vitesse d'accroissement de f en $\vec{x}$ dans cette direction.

Nous voyons donc le champ de vecteurs gradients de f

$$\vec{\nabla} f : \vec{x} \mapsto \vec{\nabla} f(\vec{x})$$

comme étant constitué de vecteurs orthogonaux aux hypersurfaces isothermes, vecteurs d'autant plus longs que les hypersurfaces isothermes sont plus rapprochées (pour un même accroissement ΔT de température, par exemple, 1°C).

Définition 10.23 Un champ de vecteurs $\vec{F}$ est dit **conservatif** (ou **dérivant d'un potentiel**) ssi il existe une fonction f (dite **fonction potentielle** de $\vec{F}$) telle que

$$\vec{F} = \vec{\nabla} f.$$

Noter que la fonction potentielle est, dans le meilleur des cas, définie à une constante additive près puisque, pour tout réel c, $\quad \vec{\nabla}(f + c) = \vec{\nabla} f$.

■ Exemple 10.16
Les champs gravitationnel et électrique de la section 10.1.4 dérivent d'un potentiel, car

$$\vec{\nabla}\frac{1}{r} = \frac{-1}{r^2}\vec{1}_r$$

Attention : en physique et en mécanique, le potentiel V du champ $\vec{F}$ est généralement défini de telle façon que $\vec{F} = -\vec{\nabla} V$. ■

R **Terminologie :** L'usage de l'adjectif *conservatif* s'explique par le fait que le principe newtonien de conservation de l'énergie est vérifié lorsque le champ de forces est conservatif.

10.4.13 Recherche d'un potentiel

• <u>En dimension 1</u> : Etant donné $F : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, il s'agit de trouver une primitive f de F sur D, car $\nabla f = f'$.

• <u>En dimension 2</u> : A titre d'exemple, cherchons f telle que

$$\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} y^3 \\ 3xy^2 \end{pmatrix} = \vec{\nabla} f(x,y) = \left. \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} \right|_{(x,y)}$$

sur un domaine D normal par rapport à x et à y

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x,y)} = y^3,$$

d'où

$$f(x,y) = x\, y^3 + g(y)$$

car D est normal par rapport à x.
Donc

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3x\, y^2 + \frac{dg}{dy}(y) = 3x\, y^2,$$

d'où

$$\frac{dg}{dy}(y) = 0,$$

d'où

$$f(x,y) = xy^3 + C \quad \text{où } C \text{ est une constante,}$$

car D est normal par rapport à y.
• <u>En dimension 3</u> : A titre d'exemple, cherchons f telle que

$$\vec{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2xy + z^2 \\ x^2 \\ 2xz + \pi\cos(\pi z) \end{pmatrix} = \vec{\nabla} f(x,y,z) = \left. \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} \right|_{(x,y,z)}$$

sur un domaine D normal par rapport à y et à z.

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x,y,z)} = 2xy + z^2,$$

d'où

$$f(x,y,z) = x^2y + xz^2 + g(y,z)$$

car D est normal par rapport à x,

$$\Longrightarrow \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + \frac{\partial g}{\partial y} = x^2$$

$$\Longrightarrow \qquad f(x,y,z) = x^2y + xz^2 + h(z),$$

car D est normal par rapport à y,

$$\Longrightarrow \qquad \left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{(x,y,z)} = 2xz + \frac{dh}{dz}(z) = 2xz + \pi\cos(\pi z),$$

$$\Longrightarrow \qquad f(x,y,z) = x^2y + xz^2 + \sin(\pi z) + C \qquad (C = \text{constante})$$

car D est normal par rapport à z.

Cette méthode aboutit-elle toujours ? Non !

- car elle se ramène à la recherche de n primitives, ce qui, même si $\vec{F} \in C^1$, n'est pas nécessairement réalisable en termes de fonctions élémentaires.
- mais surtout parce que les n équations peuvent être contradictoires dès que $n \geq 2$.

Il est donc utile de disposer de conditions nécessaires ou suffisantes - ou mieux : d'une condition nécessaire **et** suffisante -, pour qu'un champ soit conservatif (dérive d'un potentiel), ...à condition bien sûr qu'elles soient *maniables*.

10.4.14 Condition nécessaire de conservatisme

Soit $\vec{F}$ un champ de vecteurs de classe C^1.
Rappelons que $\vec{F}$ est **conservatif** ssi il existe une fonction potentielle f telle que :

$$\vec{F} = \vec{\nabla} f.$$

Comme $\vec{F} \in C^1$, on a $f \in C^2$, ce qui implique, par la deuxième nullité remarquable 10.1.14, que

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} f = \vec{0}.$$

Autrement dit

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{0}.$$

L'irrotationalité est donc une condition <u>nécessaire</u> pour que $\vec{F}$ soit conservatif.

Proposition 10.19 Tout champ de vecteurs de classe C^1 conservatif est irrotationnel.

Ceci s'explicite comme suit :

- Si $\vec{F} : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dérive d'un potentiel et est de classe C^1, alors

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x} \text{ sur } D.$$

- Si $\vec{F} : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dérive d'un potentiel et est de classe C^1, alors

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F_3}{\partial y} = \dfrac{\partial F_2}{\partial z} \\ \dfrac{\partial F_1}{\partial z} = \dfrac{\partial F_3}{\partial x} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial x} = \dfrac{\partial F_1}{\partial y} \end{cases} \quad \text{sur } D.$$

Nous verrons plus tard que cette condition nécessaire n'est pas suffisante, mais qu'elle <u>devient suffisante</u> sur les domaines D <u>simplement connexes</u>, c'est-à-dire dans lesquels tout chemin fermé peut être continûment contracté en un point du domaine sans en sortir.

10.4.15 Invariance sous isométrie

Que deviennent les opérateurs div, grad, rot et le laplacien lorsqu'on effectue un changement de variables ? C'est un problème généralement difficile, auquel est consacrée la section suivante (10.2). Remarquons dès à présent que dans le cas des changements de variables isométriques, les formules définissant ces opérateurs restent inchangées (sauf pour le rotationnel dans le cas des antidéplacements, où on obtient alors l'opposé).
C'est évidemment sympathique de pouvoir reprendre les mêmes formules (comparer à 10.2...), mais c'est surtout indispensable pour que les champs considérés aient une signification physique ou géométrique.

Illustrons ceci par des exemples.

■ **Exemple 10.17** Si T est un champ de températures C^1 d'une région D de l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$, alors $\vec{\nabla} T$ est un champ de vecteurs défini sur $D \subseteq \mathbb{R}^3$. Si on change le repère orthonormé utilisé pour repérer les points de cette région, alors T ne sera plus vu comme une fonction de (x, y, z), mais, disons, de (u, v, w), où

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{matrice} \\ \text{orthogonale} \\ 3 \times 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \vec{g}(u, v, w)$$

et $\vec{\nabla} T$ s'exprimera en fonction de (u, v, w) et relativement à un repère $(\vec{1}_u, \vec{1}_v, \vec{1}_w)$.
Pour que la définition

$$\vec{\nabla} T := \frac{\partial T}{\partial x}\vec{1}_x + \frac{\partial T}{\partial y}\vec{1}_y + \frac{\partial T}{\partial z}\vec{1}_z$$

ait un sens, il convient qu'on obtienne le même champ si on travaille dans l'autre repère ; c'est-à-dire que si $\tilde{T}$ exprime le même champ (de températures) dans le repère(u, v, w) :

$$\tilde{T}(u, v, w) := T(\vec{g}(u, v, w)),$$

alors

$$\frac{\partial T}{\partial x}\vec{1}_x + \frac{\partial T}{\partial y}\vec{1}_y + \frac{\partial T}{\partial z}\vec{1}_z = \frac{\partial \tilde{T}}{\partial u}\vec{1}_u + \frac{\partial \tilde{T}}{\partial v}\vec{1}_v + \frac{\partial \tilde{T}}{\partial w}\vec{1}_w$$

si le 1er membre est calculé en $(x, y, z) = \vec{g}(u, v, w)$.
Si tel n'avait pas été le cas, la notion de gradient n'aurait pas eu de sens physique ! ■

■ **Exemple 10.18** De même, si $\vec{F}$ est un champ de vecteurs sur la même région D (qui a une structure euclidienne qui existe indépendamment du choix d'un repère orthonormé), il importe que div $\vec{f}$ soit indépendant du repère utilisé pour le définir, et donc que

$$\left(\frac{\partial \vec{F}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{F}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{F}_z}{\partial z}\right)\Bigg|_{(x,y,z)=\vec{g}(u,v,w)} = \left(\frac{\partial \vec{F}_u}{\partial u} + \frac{\partial \vec{F}_v}{\partial v} + \frac{\partial \vec{F}_w}{\partial w}\right)\Bigg|_{((u,v,w)}$$

De même pour rot $\vec{F}$, avec la nuance suivante : le rotationnel change de sens si on change l'orientation du repère : on dit que le rotationnel est un **pseudo-vecteur**.
Si on interprète le rotationnel en termes de rotation autour de son axe (voir section 10.9.6) , alors le champ de rotations rot $\vec{F}$ est invariant sous l'effet des changements de repères orthonormés.
■

Conclusion : div, grad et Δ sont bien des notions "géométriques", "physiques", en ce sens qu'elles sont indépendantes du repère orthonormé dans lequel on travaille.
Le rotationnel est indépendant du choix des repères orthonormés de <u>même</u> orientation. Le pseudo-vecteur rotationnel vu comme champ de rotations (en 2D ou 3D) est également indépendant de l'orientation du repère.

10.4.16 Grad en coordonnées curvilignes orthogonales

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, de classe C^1.
Nous savons déjà que le champ de vecteurs $\vec{\nabla} f$ est conservé par changement de repère orthonormé dans $\mathbb{R}^n$ (isométrie), puisque sa direction en (x, y, z) est celle du plus grand accroissement de f et que sa norme mesure cet accroissement. Il s'agit donc bien d'une notion intrinsèque dans $\mathbb{R}^n$ (plus précisément dans l'espace euclidien nD de domf) en ce sens qu'elle est indépendante du repère orthonormé choisi.
N.B. : Un changement d'unité dans l'espace des images ($\mathbb{R}$) induira éventuellement un changement homothétique du champ de vecteurs, tout comme le fera une similitude de rapport $\neq \pm 1$ dans $\mathbb{R}^n$.
Il en va tout autrement si l'on passe aux coordonnées curvilignes, car alors *le repère varie* généralement d'un point à l'autre dans $\mathbb{R}^n$!
Considérons, pour fixer les idées, le cas $n = 3$. Soit :

$$\vec{g} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : (u, v, w) \mapsto \vec{g}(u, v, w),$$

le passage des coordonnées curvilignes (u, v, w) aux coordonnées cartésiennes (x, y, z) étant donné par les équations scalaires

$$\begin{cases} x = g_1(u, v, w) \\ y = g_2(u, v, w) \\ z = g_3(u, v, w). \end{cases}$$

$\triangleright$ <u>Hypothèse</u> :
Nous supposerons toujours les coordonnées curvilignes **orthogonales**, sans quoi les calculs seraient nettement plus compliqués. La matrice jacobienne de $\vec{g}$ dans la base orthonormée (variable) $(\vec{e}_u, \vec{e}_v, \vec{e}_w)$ est donc

$$\begin{pmatrix} h_u & 0 & 0 \\ 0 & h_v & 0 \\ 0 & 0 & h_w \end{pmatrix}$$

$$\text{où} \quad \frac{\partial \vec{g}}{\partial u} = h_u \vec{e}_u \quad , \quad \frac{\partial \vec{g}}{\partial v} = h_v \vec{e}_v \quad , \quad \frac{\partial \vec{g}}{\partial w} = h_w \vec{e}_w.$$

$\triangleright$ Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction scalaire de classe C^1.
Les composantes du gradient

$$\vec{\nabla} f \Big|_{(x_0, y_0, z_0)} = \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(x_0, y_0, z_0)} \vec{1}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(x_0, y_0, z_0)} \vec{1}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\Big|_{(x_0, y_0, z_0)} \vec{1}_z$$

sont aussi les composantes de la matrice jacobienne de f (<u>i.e.</u> la matrice de sa différentielle) relativement à la base canonique $\vec{1}_x, \vec{1}_y, \vec{1}_z$. Fixons le point (x_0, y_0, z_0). Exprimer le gradient au point (x_0, y_0, z_0) en coordonnées curvilignes revient à calculer les composantes de $\vec{\nabla} f \Big|_{(x_0, y_0, z_0)}$

dans le trièdre de base $(\vec{e}_u, \vec{e}_v, \vec{e}_w)$ en (x_0, y_0, z_0), c'est-à-dire à trouver des coefficients c_u, c_v, c_w tels que

$$\vec{\nabla} f = c_u \vec{e}_u + c_v \vec{e}_v + c_w \vec{e}_w,$$

c'est-à-dire la matrice jacobienne de f en (x_0, y_0, z_0) relativement à la base $(\vec{e}_u, \vec{e}_v, \vec{e}_w)|_{\vec{g}(u_0,v_0,w_0)}$.

▷ Considérons "l'expression de f en coordonnées curvilignes", c'est-à-dire la fonction composée

$$\tilde{f} = f \circ \vec{g} \ : \ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \ : \ (u, v, w) \to f(\vec{g}(u, v, w)).$$

Sa différentielle est la composée des différentielles de f et de $\vec{g}$, on a donc successivement :

$$\begin{aligned}
d\tilde{f} &= \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u} du + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial v} dv + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial w} dw \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u} & \frac{\partial \tilde{f}}{\partial v} & \frac{\partial \tilde{f}}{\partial w} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du \\ dv \\ dw \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{mat} \, \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du \\ dv \\ dw \end{pmatrix} \\
&\uparrow \text{ si la base utilisée dans } \mathbb{R}^3_{x,y,z} \text{ est } \left(\vec{1}_x, \vec{1}_y, \vec{1}_z\right), \\
&= (c_u \, c_v \, c_w) \begin{pmatrix} h_u & 0 & 0 \\ 0 & h_v & 0 \\ 0 & 0 & h_w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du \\ dv \\ dw \end{pmatrix} \\
&= c_u h_u du + c_v h_v dv + c_w h_w dw \\
&\uparrow \text{ si la base utilisée dans } \mathbb{R}^3_{x,y,z} \text{ est } (\vec{e}_u, \vec{e}_v, \vec{e}_w).
\end{aligned}$$

On conclut que

$$c_u = \frac{1}{h_u} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u}, \quad c_v = \frac{1}{h_v} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial v}, \quad c_w = \frac{1}{h_w} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial w},$$

d'où

$$\vec{\nabla} f = \frac{1}{h_u} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u} \vec{e}_u + \frac{1}{h_v} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial v} \vec{e}_v + \frac{1}{h_w} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial w} \vec{e}_w.$$

Proposition 10.20

L'opérateur différentiel **gradient** peut donc s'écrire non seulement

$$\vec{\nabla} = \vec{1}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{1}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{1}_z \frac{\partial}{\partial z},$$

mais aussi (avec un léger abus)

$$\vec{grad} = \vec{e}_u \frac{1}{h_u} \frac{\partial}{\partial u} + \vec{e}_v \frac{1}{h_v} \frac{\partial}{\partial v} + \vec{e}_w \frac{1}{h_w} \frac{\partial}{\partial w}$$

R Nous avons écrit $\vec{grad}$ pour éviter qu'il ne soit utilisé pour calculer une divergence, comme on le verra en comparant les expressions du gradient et de la divergence en coordonnées polaires. Il est plus prudent de se contenter d'écrire

$$\vec{\nabla} f = \frac{1}{h_u} \frac{\partial f}{\partial u} \vec{e}_u + \frac{1}{h_v} \frac{\partial f}{\partial v} \vec{e}_v + \frac{1}{h_w} \frac{\partial f}{\partial w} \vec{e}_w$$

Cas particulier 2D avec coordonnées **orthogonales** (r, θ)

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} f|_{(x_0,y_0)} &= \frac{\partial f}{\partial x}\vec{1}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{1}_y \\ &= \frac{\partial f}{\partial \vec{e}_r}\vec{e}_r + \frac{\partial f}{\partial \vec{e}_\theta}\vec{e}_\theta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \vec{e}_r} &= df_{|(x_0,y_0)}(\vec{e}_r) = df_{|(x_0,y_0)}\left(\frac{\frac{\partial \vec{g}}{\partial r}}{h_r}\right) \text{ où } h_r := \left\|\frac{\partial \vec{g}}{\partial r}\right\| \text{ coefficient de Lamé} \\ &= \frac{1}{h_r} df|_{(x_0,y_0)}\left(\frac{\partial x}{\partial r}\vec{1}_x + \frac{\partial y}{\partial r}\vec{1}_y\right) \\ &= \frac{1}{h_r}\left(\frac{\partial f}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}\right)\end{aligned}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{e}_r} = \frac{1}{h_r}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial r} \qquad \frac{\partial f}{\partial \vec{e}_\theta} = \frac{1}{h_\theta}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta}$$

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} f|_{(x_0,y_0)} &= \frac{\partial f}{\partial x}\vec{1}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{1}_y \\ &= \frac{1}{h_r}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{h_\theta}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta}\vec{e}_\theta \\ &= \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta}\vec{e}_\theta\end{aligned}$$

$\uparrow$ **si** (r, θ) sont les coordonnées polaires

$$\boxed{\vec{\nabla} f = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}\,\vec{e}_r + \frac{1}{r}\,\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta}\,\vec{e}_\theta}$$

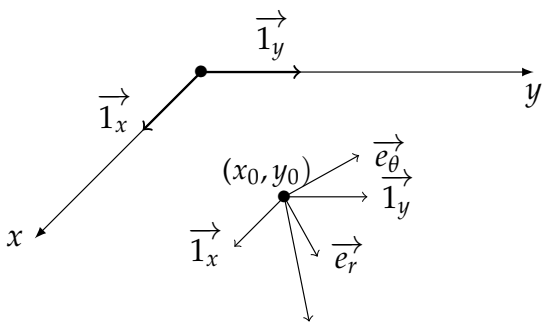


FIGURE 10.48 – Bases en coordonnées cartésiennes et polaires.

10.4.17 Div en coordonnées curvilignes orthogonales.

Remarques préliminaires

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}\vec{F} &= \mathrm{div}(F_x\vec{1}_x) + \mathrm{div}(F_y\vec{1}_y) + \mathrm{div}(F_z\vec{1}_z) \\
&= \mathrm{div}(\mathcal{F}_u\vec{e}_u) + \mathrm{div}(\mathcal{F}_v\vec{e}_v) + \mathrm{div}(\mathcal{F}_w\vec{e}_w) \\
\text{N.B.} \quad & \mathrm{div}(f\vec{G}) = \left\langle \overrightarrow{\mathrm{grad}} f, \vec{G} \right\rangle + f\mathrm{div}\vec{G} \\
i.e. \quad & \left\langle \vec{\nabla}, f\vec{G} \right\rangle = \left\langle \vec{\nabla} f, \vec{G} \right\rangle + f \left\langle \vec{\nabla}, \vec{G} \right\rangle \\
\text{Donc :} \quad & \mathrm{div}(F_x\vec{1}_x) = \left\langle \overrightarrow{\mathrm{grad}} F_x, \vec{1}_x \right\rangle + F_x \underbrace{\mathrm{div}\vec{1}_x}_{=0} = \frac{\partial F_x}{\partial x} \\
\text{Mais} \quad & \mathrm{div}(\mathcal{F}_u\vec{e}_u) = \left\langle \overrightarrow{\mathrm{grad}} \mathcal{F}_u, \vec{e}_u \right\rangle + \mathcal{F}_u \underbrace{\mathrm{div}\,\vec{e}_u}_{=?} \\
& = \frac{1}{h_u}\frac{\partial \mathcal{F}_u}{\partial u} + \mathcal{F}_u \underset{\neq 0 \text{ en général}}{(\mathrm{div}\,\vec{e}_u)}
\end{aligned}$$

Donc la **notation** $\left\langle \vec{\nabla}, \vec{F} \right\rangle$ est excellente en coordonnées cartésiennes, mais à proscrire en **coordonnées curvilignes** .

Morale :
Parlons de l'opérateur "$\overrightarrow{\mathrm{grad}}$ en coordonnées curvilignes, " mais ne le notons pas $\vec{\nabla}$

car en coordonnées curvilignes, div $\vec{F} \neq \left\langle \vec{e}_u \frac{1}{h_u}\ \frac{\partial}{\partial u} + \vec{e}_v \frac{1}{h_v}\ \frac{\partial}{\partial v} + \vec{e}_w \frac{1}{h_w}\ \frac{\partial}{\partial w}\ , \vec{F} \right\rangle$.

Avant d'attaquer le calcul général de la divergence en coordonnées curvilignes orthogonales, forgeons-nous d'abord une intuition en **coordonnées polaires**, d'où nous déduirons
$\mathrm{div}\,\vec{e}_r = \frac{1}{r}$ (en 2D), ce qui illustre bien le fait que
$\mathrm{div}(\mathcal{F}_r\vec{e}_r + \mathcal{F}_\theta\vec{e}_\theta) \neq \frac{\partial \mathcal{F}_r}{\partial r} + \frac{\partial \mathcal{F}_\theta}{\partial \theta}$
$\mathrm{div}(\mathcal{F}_r\vec{e}_r + \mathcal{F}_\theta\vec{e}_\theta) \neq \frac{1}{h_r}\ \frac{\partial \mathcal{F}_r}{\partial r} + \frac{1}{h_\theta}\ \frac{\partial \mathcal{F}_\theta}{\partial \theta}$.

Cas particulièrement intéressants

Cas particulier 2D : **div en coordonnés polaires**

$F_x\vec{1}_x + F_y\vec{1}_y = \mathcal{F}_r\vec{e}_r + \mathcal{F}_\theta\vec{e}_\theta$

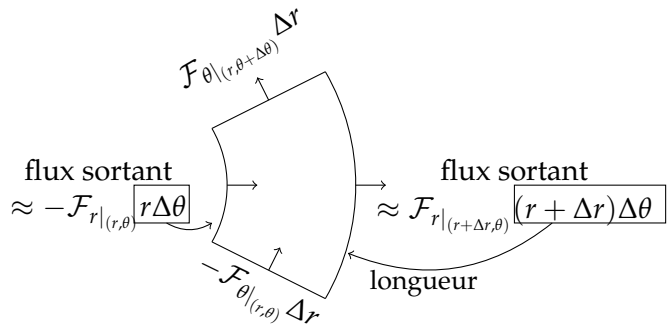


FIGURE 10.49 – Divergence en coordonnées polaires.

Flux sortant des parois en arc de cercle ($\perp \vec{e}_r$)

$$\approx \Delta\theta \cdot \Delta r \cdot \frac{\mathcal{F}_r|_{(r+\Delta r,\theta)} \cdot (r+\Delta r) - \mathcal{F}_r|_{(r,\theta)} r}{\Delta r}$$

$$\approx \underbrace{\Delta\theta \cdot \Delta r \cdot r}_{aire} \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r}(\mathcal{F}_r \cdot r)$$

Flux sortant des parois rectilignes ($\perp \vec{e}_\theta$)

$$\approx \underbrace{\Delta r \cdot \Delta\theta \cdot r}_{aire} \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial\theta}(\mathcal{F}_\theta)$$

Comme $\boxed{\text{divergence = flux sortant / aire (en 2D)}}$, avec un peu d'optimisme,

on en déduit que $\boxed{\text{div en coordonnés polaires} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(\mathcal{F}_r \cdot r) + \frac{\partial}{\partial\theta}\mathcal{F}_\theta\right).}$

Cas particulier 3D : **div en coordonnés cylindriques**

On déduit de ce qui précède que

$$\operatorname{div}(\mathcal{F}_\rho\vec{e}_\rho + \mathcal{F}_\theta\vec{e}_\theta + \mathcal{F}_z\vec{e}_z) = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(\mathcal{F}_r \cdot r) + \frac{\partial}{\partial\theta}\mathcal{F}_\theta\right) + \frac{\partial}{\partial z}\mathcal{F}_z$$

Div $\vec{1}_r$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{x_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}} = \frac{n-1}{\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}} \text{ c'est-à-dire } \boxed{\operatorname{div}\vec{1}_r = \frac{n-1}{r}}$$

Divergence des **champs radiaux**

Si $\vec{F}(\vec{x}) := f(r)\vec{1}_r$ où f ne dépend que de r, alors

$$\begin{aligned} \operatorname{div}\vec{F} = \operatorname{div}(f\vec{1}_r) &= \left\langle \operatorname{grad} f, \vec{1}_r \right\rangle + f \operatorname{div}\vec{1}_r \\ &= \left\langle \frac{df}{dr}\vec{1}_r\,,\ \vec{1}_r \right\rangle + f\ \frac{n-1}{r}. \end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\operatorname{div}(f\vec{1}_r) = f' + \frac{n-1}{r}f}$$

Calcul de la divergence en coordonnées curvilignes

Nous avons mentionné en 10.2.8 que

$$\vec{\nabla} u = \frac{1}{h_u}\vec{e}_u, \quad \vec{\nabla} v = \frac{1}{h_v}\vec{e}_v, \quad \vec{\nabla} w = \frac{1}{h_w}\vec{e}_w.$$

Si le trièdre $(\vec{e}_u, \vec{e}_v, \vec{e}_w)$ a même orientation que $(\vec{1}_x, \vec{1}_y, \vec{1}_z)$ alors

$$\vec{e}_u = \vec{e}_v \times \vec{e}_w, \quad \vec{e}_v = \vec{e}_w \times \vec{e}_u, \quad \vec{e}_w = \vec{e}_u \times \vec{e}_v,$$

Il en résulte que

$$\vec{e}_u = h_v h_w(\vec{\nabla} v \times \vec{\nabla} w), \quad \vec{e}_v = h_w h_u(\vec{\nabla} w \times \vec{\nabla} u), \quad \vec{e}_w = h_u h_v(\vec{\nabla} u \times \vec{\nabla} v). \tag{10.1}$$

Nous calculons la divergence de $\vec{F}$ en décomposant $\vec{F}$ dans la base $(\vec{e}_u, \vec{e}_v, \vec{e}_w)$ et en utilisant la linéarité de l'opérateur div.

$$\left\langle \vec{\nabla}, \vec{F} \right\rangle = \left\langle \vec{\nabla}, \mathcal{F}_u \vec{e}_u \right\rangle + \left\langle \vec{\nabla}, \mathcal{F}_v \vec{e}_v \right\rangle + \left\langle \vec{\nabla}, \mathcal{F}_w \vec{e}_w \right\rangle.$$

En utilisant (10.1), le premier terme devient

$$\begin{aligned}
\left\langle \vec{\nabla}, \mathcal{F}_u \vec{e}_u \right\rangle &= \left\langle \vec{\nabla}, \mathcal{F}_u h_v h_w(\vec{\nabla} v \times \vec{\nabla} w) \right\rangle \\
&= \left\langle \vec{\nabla}(\mathcal{F}_u h_v h_w), \vec{\nabla} v \times \vec{\nabla} w \right\rangle + \mathcal{F}_u h_v h_w \left\langle \vec{\nabla}, \vec{\nabla} v \times \vec{\nabla} w \right\rangle \\
&= \left\langle \vec{\nabla} \mathcal{F}_u h_v h_w, \frac{\vec{e}_u}{h_v h_w} \right\rangle + \mathcal{F}_u h_v h_w \left\langle \vec{\nabla} w, \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} v \right\rangle \\
&= \left\langle \frac{\vec{e}_u}{h_u}\partial_u(\mathcal{F}_u h_v h_w), \frac{\vec{e}_u}{h_v h_w} \right\rangle + \left\langle \frac{\vec{e}_v}{h_v}\partial_v(F_u h_v h_w), \frac{\vec{e}_u}{h_v h_w} \right\rangle + \left\langle \frac{\vec{e}_w}{h_w}\partial_w(\mathcal{F}_u h_v h_w), \frac{\vec{e}_u}{h_v h_w} \right\rangle \\
&= \frac{1}{h_u h_v h_w}\partial_u(\mathcal{F}_u h_v h_w).
\end{aligned}$$

On calcule de même les deux autres termes et on obtient ainsi

$$\boxed{\left\langle \vec{\nabla}, \vec{F} \right\rangle = \frac{1}{h_u h_v h_w}\left(\frac{\partial}{\partial u}\mathcal{F}_u h_v h_w + \frac{\partial}{\partial v}\mathcal{F}_v h_w h_u + \frac{\partial}{\partial w}\mathcal{F}_w h_u h_v\right)}.$$

Si les trièdres $(\vec{e}_u, \vec{e}_v, \vec{e}_w)$ et $(\vec{1}_x, \vec{1}_y, \vec{1}_z)$ sont d'orientations opposées, il suffit de considérer $(\vec{e}_v, \vec{e}_u, \vec{e}_w)$ plutôt que $(\vec{e}_u, \vec{e}_v, \vec{e}_w)$. L'expression de la divergence reste inchangée.

10.4.18 Rot en coordonnées curvilignes orthogonales.

Cas particulier 2D : le rotationnel en coordonnés polaires

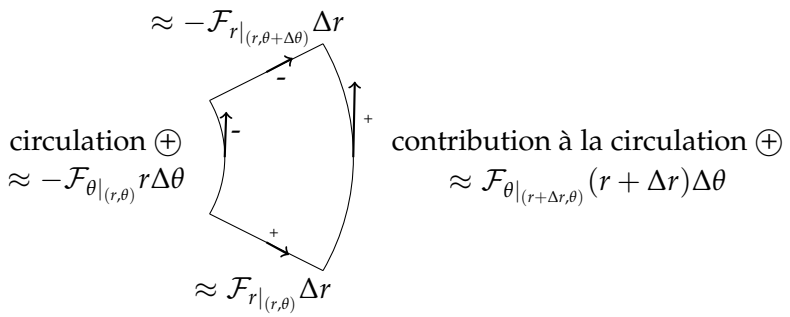


FIGURE 10.50 – Rotationnel en coordonnées polaires

Circulation le long des côtés circulaires $(r = c^{te})$

$$\begin{aligned} &\approx \Delta\theta.\Delta r.\frac{\mathcal{F}_\theta|_{(r+\Delta r,\theta)}(r+\Delta r) - \mathcal{F}_\theta|_{(r,\theta)} r}{\Delta r} \\ &\approx \Delta\theta.\Delta r.r\frac{\partial}{\partial r}(\mathcal{F}_\theta.r) \end{aligned}$$

Circulation le long des côtés rectilignes $(\theta = c_{te})$

$$\approx \Delta\theta.\Delta r.r.\frac{1}{r}\frac{\mathcal{F}_r|_{(r,\theta)} - \mathcal{F}_r|_{(r,\theta+\Delta\theta)}}{\Delta\theta}$$

Il en résulte la circulation par unité d'aire contournée

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(\mathcal{F}_\theta.r) - \frac{\partial}{\partial\theta}\mathcal{F}_r\right) \\ &= \text{rot en coord. polaire} \end{aligned}$$

Cas général : Calcul du rotationnel en coordonnées curvilignes orthogonales

Attention. Nous supposons, dans les calculs qui suivent, que $(\vec{e}_u, \vec{e}_v, \vec{e}_w)$ et $(\vec{1}_x, \vec{1}_y, \vec{1}_z)$ ont même orientation. Si on permute par exemple $\vec{e}_u$ et $\vec{e}_v$, alors il faudra introduire un coefficient -1 dans la formule encadrée, puisque les deux premières colonnes seront, de ce fait, permutées.

Calculons d'abord le rotationnel d'un champ de vecteurs partout tangent aux lignes u (où v et w sont constants), c'est-à-dire du type $\mathcal{F}_u\vec{e}_u$ où $\mathcal{F}_u \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \times \mathcal{F}_u\vec{e}_u &= \vec{\nabla} \times (\mathcal{F}_u h_u \vec{\nabla} u) \\
&= \vec{\nabla}(\mathcal{F}_u h_u) \times \vec{\nabla} u + \mathcal{F}_u h_u \underbrace{\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} u}_{=\vec{0}} \\
&= \left(\frac{\vec{e}_u}{h_u}\frac{\partial}{\partial u}(\mathcal{F}_u h_u) + \frac{\vec{e}_w}{h_w}\frac{\partial}{\partial w}(\mathcal{F}_u h_u) + \frac{\vec{e}_v}{h_v}\frac{\partial}{\partial v}(\mathcal{F}_u h_u) \right) \times \frac{\vec{e}_u}{h_u} \\
&= \frac{\vec{e}_v}{h_u h_v}\frac{\partial}{\partial w}(\mathcal{F}_u h_u) - \frac{\vec{e}_w}{h_u h_v}\frac{\partial}{\partial v}(\mathcal{F}_u h_u).
\end{aligned}$$

▷ On en déduit $\vec{\nabla} \times \mathcal{F}_v\vec{e}_v$ et $\vec{\nabla} \times \mathcal{F}_w\vec{e}_w$ par permutation cyclique des lettres u, v, w, puis $\vec{\nabla} \times \vec{F}$ en général par linéarité de l'opérateur rot :

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \times \vec{F} &= \frac{\vec{e}_u}{h_v h_w}\left(\frac{\partial}{\partial v}(\mathcal{F}_w h_w) - \frac{\partial}{\partial w}(\mathcal{F}_v h_v) \right) + \frac{\vec{e}_v}{h_w h_u}\left(\frac{\partial}{\partial w}(\mathcal{F}_u h_u) - \frac{\partial}{\partial u}(\mathcal{F}_w h_w) \right) \\
&\quad + \frac{\vec{e}_w}{h_u h_v}\left(\frac{\partial}{\partial u}(\mathcal{F}_v h_v) - \frac{\partial}{\partial v}(\mathcal{F}_u h_u) \right)
\end{aligned}$$

ou, plus schématiquement :

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{F} = \frac{1}{h_u h_v h_w}\begin{vmatrix} h_u\vec{e}_u & h_v\vec{e}_v & h_w\vec{e}_w \\ \partial_u & \partial_v & \partial_w \\ \mathcal{F}_u h_u & \mathcal{F}_v h_v & \mathcal{F}_w h_w \end{vmatrix}}$$

10.4.19 Laplacien en coordonnées curvilignes orthogonales.

Comme $\Delta = \text{div grad}$, il suffit d'appliquer successivement ce qui a été vu en 10.4.16 et en 10.4.9 pour obtenir

$$\boxed{\Delta = \frac{1}{h_u h_v h_w}\left(\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{h_v h_w}{h_u}\frac{\partial}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{h_w h_u}{h_v}\frac{\partial}{\partial v} \right) + \frac{\partial}{\partial_w}\left(\frac{h_u h_v}{h_w}\frac{\partial}{\partial w} \right) \right)}$$

ou encore

$$\Delta f = h_u h_v h_w \left(\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{h_u}{h_v h_w}\frac{\partial f}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{h_v}{h_u h_w}\frac{\partial f}{\partial v} \right) + \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{h_w}{h_u h_v}\frac{\partial f}{\partial w} \right) \right)$$

10.4.20 Grad, rot, div, laplacien en coord. cylindriques.

Il résulte directement des sections précédentes que :

Proposition 10.21

$$\text{grad } = \vec{e}_\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \vec{e}_\theta \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \theta} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\text{rot } \vec{F} = \begin{vmatrix} \frac{1}{\rho}\vec{e}_\rho & \vec{e}_\theta & \frac{1}{\rho}\vec{e}_z \\ \partial_\rho & \partial_\theta & \partial_z \\ \mathcal{F}_\rho & \mathcal{F}_\theta \rho & \mathcal{F}_z \end{vmatrix}$$

$$\text{div } \vec{F} = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial(\mathcal{F}_\rho \rho)}{\partial \rho} + \frac{\partial \mathcal{F}_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial(\mathcal{F}_z \rho)}{\partial z}\right)$$

$$\Delta = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

D'où **en coordonnées polaires** : $\Delta = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$

10.4.21 Grad, rot, div, laplacien en coord. sphériques.

Soient $r \in \mathbb{R}^+$ la distance à l'origine, $\varphi \in [0, 2\pi[$ la longitude et $\theta \in [0, \pi]$ la colatitude. Il résulte directement des sections précédentes que :

Proposition 10.22

$$\text{grad } = \vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}$$

$$\text{rot } \vec{F} = \begin{vmatrix} \frac{\vec{e}_r}{r^2 \sin\theta} & \frac{\vec{e}_\theta}{r\sin\theta} & \frac{\vec{e}_\varphi}{r} \\ \partial_r & \partial_\theta & \partial_\varphi \\ \mathcal{F}_r & \mathcal{F}_\theta r & \mathcal{F}_\varphi r \sin\theta \end{vmatrix}$$

$$\text{div } \vec{F} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(\mathcal{F}_r r^2)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\mathcal{F}_\theta \sin\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial \mathcal{F}_\varphi}{\partial \varphi}$$

$$\Delta = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

10.4.22 Fonctions et champs radiaux

Fonctions potentielles et harmoniques radiales
Un calcul direct effectué au chapitre 8 (section 8.6) nous a montré que si $f(x_1, \cdots, x_n) = \tilde{f}(r)$ est une "fonction radiale", c'est-à-dire ne dépend que de la distance de $(x_1, \cdots, x_n)$ à l'origine, alors

$$\boxed{\vec{\nabla} f = \frac{d\tilde{f}}{dr}\vec{1}_r}$$

Calculons à présent le laplacien d'une telle fonction f.

$$\begin{aligned}
\Delta f &= \left\langle \vec{\nabla}, \vec{\nabla} f \right\rangle = \left\langle \vec{\nabla}, \frac{d\tilde{f}}{dr}\vec{1}_r \right\rangle \\
&= \left\langle \vec{\nabla}\frac{d\tilde{f}}{dr}, \vec{1}_r \right\rangle + \frac{d\tilde{f}}{dr}\left\langle \vec{\nabla}, \vec{1}_r \right\rangle \\
&= \left\langle \frac{d^2\tilde{f}}{dr^2}\vec{1}_r\,,\, \vec{1}_r \right\rangle + \frac{d\tilde{f}}{dr} \quad \frac{n-1}{r},
\end{aligned}$$

et on retrouve le Lemme précédent :

$$\Delta f = \tilde{f}'' + \frac{n-1}{r}\tilde{f}'$$

Des exemples particulièrement importants sont les fonctions potentielles liées aux champs gravitationnels et électrostatiques occasionnés par la présence d'une masse ou d'une charge ponctuelle.
Attention : en physique, V est un **potentiel** de $\vec{F}$ ssi $\vec{F} = -\vec{\nabla} V$, alors qu'en mathématiques, nous parlons non de potentiel, mais de **fonction potentielle**, qui sera l'opposé d'un potentiel).
En 3D, le *champ gravitationnel* dû à une masse unité située à l'origine est $\vec{F} = -G\frac{1}{r^2}\vec{1}_r$ et dérive du *potentiel gravitationnel* $V = \frac{G}{r}$.
Ce potentiel est une fonction harmonique (vue en tant que fonction de $\vec{x}$), c'est-à-dire que

$$\Delta V = 0.$$

Si nous posons $v(r) := V(\vec{x})$, nous voyons que v est solution de l'ED $v'' + \frac{2}{r}v' = 0$.
En 2D, le potentiel serait $V = G \ln r$.

Attention . Les champs dérivant d'un potentiel ne sont pas nécessairement radiaux et leurs potentiels non plus !

Les potentiels gravitationnels et électrostatiques (dus à **une** masse ou une charge) sont des prototypes de fonctions harmoniques radiales. En effet, ils sont du type

$$\frac{c^{te}}{r^{n-2}} \quad (\text{ ou } c^{te} \ln r \text{ pour } n = 2),$$

alors que les fonctions harmoniques radiales

$$f(\vec{x}) = \tilde{f}(r)$$

sont exactement les solutions de l'ED du second ordre

$$\tilde{f}'' + \frac{n-1}{r}\tilde{f}' = 0, \tag{10.2}$$

(où r est la variable indépendante), c'est-à-dire les fonctions

$$\frac{a}{r^{n-2}} + b \qquad (\text{ ou } a\ \ln r + b \text{ pour } n = 2),$$

où a et b sont des constantes arbitraires.

L'équation (10.2) a été établie au chapitre 8 mais peut aussi être facilement déduite de la section "divergence en coordonnées curvilignes" 10.4.17, ou plus spéficiquement de son paragraphe "divergence des champs radiaux". La divergence d'un **champ radial** $\vec{F}(\vec{x}) = \tilde{f}(r)\vec{1}_r$ est

$$\text{div } (\tilde{f}(r)\vec{1}_r) = \tilde{f}'(r) + \frac{n-1}{r}\tilde{f}(r)$$

Remarquons enfin que le rotationnel d'un champ continu radial $\vec{F}(\vec{x}) = \tilde{f}(r)\vec{1}_r$ est nul. En effet, $\mathcal{F}$ est une primitive de f, alors $\vec{\nabla}\mathcal{F}(r) = \mathcal{F}'(r)\vec{1}_r = f(r)\vec{1}_r = \vec{F}$ et $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\mathcal{F} = \vec{0}$ (rot grad est toujours nul).

10.5 Le théorème du gradient

Le Théorème Fondamental du Calcul Différentiel et Intégral, valable pour des intégrales de Riemann sur un segment inclus dans $\mathbb{R}$, peut être généralisé aux intégrales curvilignes. Cette généralisation, qui pourrait être appelée "*théorème fondamental des intégrales curvilignes*", sera appelée *Théorème du gradient*. Il s'inscrit dans la lignée des trois théorèmes fondamentaux de ce chapitre : le théorème du gradient, celui du rotationnel et celui de la divergence.

10.5.1 Théorème fondamental dans $\mathbb{R}$: rappel

Si $f \in C^1([a,b])$, alors

$$\int_a^b f' = f(b) - f(a).$$

10.5.2 Théorème du gradient

Théorème 10.23 Si $f \in C^1(D, \mathbb{R})$ où D est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et si Γ^+ est une courbe orientée paramétrée par $\vec{\gamma} \in C^1([\alpha,\beta], \mathbb{R}^n)$ telle que $\Gamma \subset$ int D, alors

$$\int_{\Gamma^+} \left\langle \vec{\nabla} f, \vec{ds} \right\rangle = f(\vec{b}) - f(\vec{a}),$$

où $\vec{a} = \vec{\gamma}(\alpha)$ et $\vec{b} = \vec{\gamma}(\beta)$.

Autrement dit : $\displaystyle\int_{\Gamma^+} df = f(\vec{b}) - f(\vec{a})$.

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma \left\langle \vec{\nabla} f, \vec{ds} \right\rangle &:= \int_\alpha^\beta \left\langle \vec{\nabla} f|_{\vec{\gamma}(t)}, \vec{\gamma}'(t) \right\rangle dt \\
&= \int_\alpha^\beta \left(\left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_{\vec{\gamma}(t)} \cdot \gamma_1'(t) + \cdots + \left.\frac{\partial f}{\partial x_n}\right|_{\vec{\gamma}(t)} . \gamma_n'(t) \right) dt \\
&= \int_\alpha^\beta (f \circ \vec{\gamma})'|_t \, dt \\
&\overset{T.F.}{=} \left[(f \circ \vec{\gamma}) \right]_\alpha^\beta = f(\vec{b}) - f(\vec{a}).
\end{aligned}$$

■

Le théorème du gradient peut se réécrire :

Théorème 10.24 Si le champ $\vec{F}$ dérive d'une fonction potentielle f, alors

$$\int_{\Gamma^+} \left\langle \vec{F}, \vec{ds} \right\rangle = [f]_{\text{début de } \Gamma^+}^{\text{fin de } \Gamma^+}$$

Corollaire 10.25 Si le champ $\vec{F}$ dérive d'un potentiel, alors $\displaystyle\int_{\Gamma^+} \left\langle \vec{F}, \vec{ds} \right\rangle$ *ne dépend que des points de départ et d'arrivée de* Γ^+ *et non du chemin suivi.*

10.5.3 Intégrales curvilignes indépendantes du chemin

Soit $\vec{F}$ un champ de forces sur l'ouvert D.
Soit Γ^+ une courbe orientée paramétrisée par $\vec{\gamma} \in C^1_{\text{morc}}([\alpha, \beta], \mathbb{R}^n)$.
Nous appellerons
$\vec{a} = \vec{\gamma}(\alpha)$ le <u>début</u> de Γ^+ (ou point initial) ; $\vec{b} = \vec{\gamma}(\beta)$ la <u>fin</u> de Γ^+ (ou point final).
Γ^+ est une courbe fermée ssi $\vec{\gamma}(\alpha) = \vec{\gamma}(\beta)$.
La courbe Γ est <u>simple</u> ssi $\vec{\gamma}(t_1) \neq \vec{\gamma}(t_2)$ <u>pour tout</u> couple $(t_1, t_2) \neq (\alpha, \beta)$ où $t_1 \neq t_2$

Définition 10.24 Les intégrales curvilignes de $\vec{F}$ sont dites **indépendantes du chemin suivi dans** D ssi pour tout couple de points $\vec{a}$ et $\vec{b}$ dans D, il existe une constante $k \in \mathbb{R}$ telle que pour tout chemin orienté (ou courbe orientée) Γ^+ inclus dans D, ayant $\vec{a}$ pour point de départ et $\vec{b}$ pour point d'arrivée,

$$\int_{\Gamma^+} \left\langle \vec{F}, \vec{ds} \right\rangle = k.$$

■

Nous appelons **cycle simple** toute courbe orientée de Jordan, c'est-à-dire toute courbe fermée simple.

Proposition 10.26 — CNS des circulations cycliques nulles.
Toute intégrale curviligne de $\vec{F}$ est indépendante du chemin suivi dans D ssi pour tout cycle simple C^+ :

$$\oint_{C^+} \langle \vec{F}, \vec{ds} \rangle = 0.$$

On peut indifféremment écrire $\int_{C^+} \left\langle \vec{F}, \vec{ds} \right\rangle = 0$ ou $\oint_{C^+} \langle \vec{F}, \vec{ds} \rangle = 0$, la dernière écriture rappelant que la courbe C est fermée (ce qui est donc préférable).

Démonstration.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Soit C^+ un cycle orienté. Soient $\vec{a}$ et $\vec{b}$ deux points quelconques sur C. Par additivité relativement au chemin d'intégration, on a

$$\oint_{C^+} \left\langle \vec{F}, \vec{ds} \right\rangle = \int_{\Gamma_1^+} \left\langle \vec{F}, \vec{ds} \right\rangle + \int_{\Gamma_2^-} \left\langle \vec{F}, \vec{ds} \right\rangle = \int_{\Gamma_1^+} \left\langle \vec{F}, \vec{ds} \right\rangle - \int_{\Gamma_2^+} \left\langle \vec{F}, \vec{ds} \right\rangle.$$

Or par hypothèse

$$\int_{\Gamma_1^+} \left\langle \vec{F}, \vec{ds} \right\rangle = \int_{\Gamma_2^+} \left\langle \vec{F}, \vec{ds} \right\rangle,$$

d'où la conclusion.

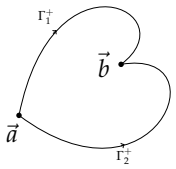


FIGURE 10.51 – Cycle orienté décomposé en deux courbes orientées Γ_1^+ et Γ_2^+.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Soient $\vec{a}$ et $\vec{b}$ deux points quelconques dans D. Soient Γ_1^+ et Γ_2^+ deux chemins quelconques allant de $\vec{a}$ vers $\vec{b}$. Alors $C^+ := \Gamma_1^+ + \Gamma_2^-$ est un cycle, d'où

$$\oint_{C^+} \left\langle \vec{F}, \vec{ds} \right\rangle = 0,$$

mais

$$\oint_{C^+} \left\langle \vec{F}, \vec{ds} \right\rangle = \int_{\Gamma_1^+} \left\langle \vec{F}, \vec{ds} \right\rangle + \int_{\Gamma_2^-} \left\langle \vec{F}, \vec{ds} \right\rangle = \int_{\Gamma_1^+} \left\langle \vec{F}, \vec{ds} \right\rangle - \int_{\Gamma_2^+} \left\langle \vec{F}, \vec{ds} \right\rangle.$$

Donc

$$\int_{\Gamma_1^+} \left\langle \vec{F}, \vec{ds} \right\rangle = \int_{\Gamma_2^+} \left\langle \vec{F}, \vec{ds} \right\rangle.$$

■

10.5.4 CNS pour qu'un champ soit conservatif

Rappelons qu'un champ de vecteurs est conservatif ssi il dérive d'un potentiel, ssi il est un champ de gradients.

Proposition 10.27 Soit $\vec{F} : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe C^0, où D est un ouvert connexe par arcs. $\vec{F}$ dérive d'un potentiel dans $D \iff$ toute intégrale curviligne de $\vec{F}$ est indépendante du chemin suivi dans D.

Démonstration.
▷ Le corollaire du théorème du gradient indique que la condition est bien nécessaire.
▷ Démontrons maintenant qu'elle est aussi suffisante.

Supposons que toute intégrale curviligne de $\vec{F}$ soit indépendante du chemin suivi et soit $\vec{a} \in D$. On va prouver que la fonction $\tilde{f}$ définie comme suit est bien une fonction potentielle pour $\vec{F}$:

$$\forall\, \vec{x} \in D : \quad \tilde{f}(\vec{x}) := \int_{\Gamma(\vec{a},\vec{x})} \left\langle \vec{F}, \vec{ds} \right\rangle,$$

où $\Gamma(\vec{a}, \vec{x})$ désigne un chemin orienté allant de $\vec{a}$ à $\vec{x}$. Grâce aux hypothèses faites sur $\vec{F}$ et sur D, $\tilde{f}$ est bien définie (pourquoi ?). Il nous reste à prouver que

$$\vec{\nabla} \tilde{f} = \vec{F},$$

c'est-à-dire que pour tout $i = 1, \ldots, n$:

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i} = F_i.$$

Comme D est ouvert, il existe une boule fermée $\overline{B}$ centrée en $\vec{x}$ et de rayon $r > 0$ entièrement incluse dans D. Soit ϵ un nombre (pouvant être négatif !) tel que $|\epsilon| < r$, de sorte que le segment orienté allant de $\vec{x}$ à $\vec{x} + \varepsilon \vec{e}_i$, est inclus dans $\overline{B}$. Notons-le $[\vec{x}, \vec{x} + \varepsilon \vec{e}_i]$ et paramétrons-le par

$$\vec{\gamma} : [0, \varepsilon] \to \mathbb{R}^n : t \to \vec{x} + t\vec{e}_i.$$

$$\begin{aligned}
\tilde{f}(\vec{x}+\varepsilon\vec{e}_i)-\tilde{f}(\vec{x}) &= \int_{\Gamma(\vec{a},\vec{x})+[\vec{x},\vec{x}+\varepsilon\vec{e}_i]} \left\langle \vec{F},\vec{ds}\right\rangle - \int_{\Gamma(\vec{a},\vec{x})} \left\langle \vec{F},\vec{ds}\right\rangle \\
&= \int_{[\vec{x},\vec{x}+\varepsilon\vec{e}_i]} \left\langle \vec{F},\vec{ds}\right\rangle \\
&= \int_0^{\varepsilon} \left\langle \vec{F}(\vec{x}+t\vec{e}_i),\vec{\gamma}'(t)\right\rangle dt \\
&= \int_0^{\varepsilon} \left\langle \vec{F}(\vec{x}+t\vec{e}_i),\vec{e}_i\right\rangle dt \\
&= \int_0^{\varepsilon} F_i(\vec{x}+t\vec{e}_i)dt \\
&= \varepsilon F_i(\vec{x}+\theta_\varepsilon\vec{e}_i)
\end{aligned}$$

pour un certain réel θ_ε entre 0 et ε offert par le théorème de la moyenne pour les intégrales.

Finalement, on peut écrire

$$\frac{\partial\tilde{f}}{\partial x_i}(\vec{x}) = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \neq}} \frac{\tilde{f}(\vec{x}+\varepsilon\vec{e}_i)-\tilde{f}(\vec{x})}{\varepsilon} = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \neq}} F_i(\vec{x}+\theta_\varepsilon\vec{e}_i) = F_i(\vec{x})$$

car F_i est continue et $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\theta_\varepsilon = 0$ (pourquoi ?). ■

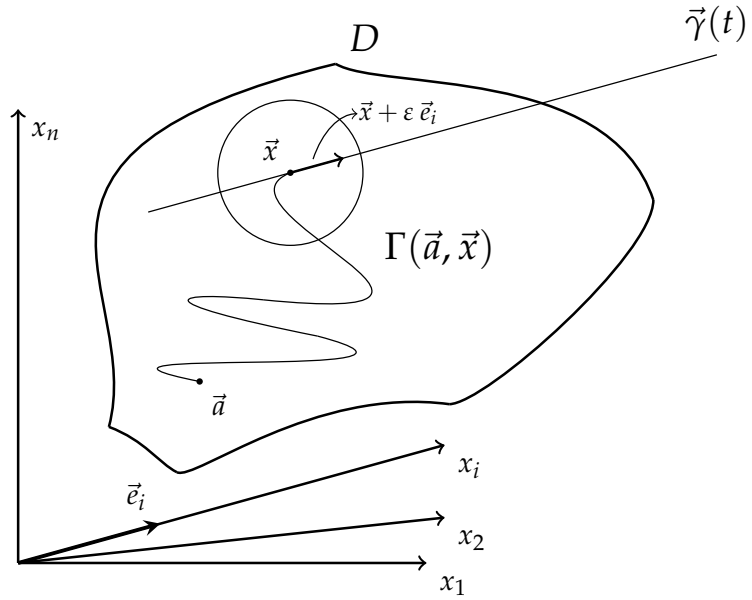


FIGURE 10.52 – Chemin quelconque liant $\vec{a}$ à $\vec{x}$, et boule fermée centrée en $\vec{x}$ pour approcher la dérivée de $\tilde{f}$.

10.5.5 Conservatisme en termes de travail, de circulation

La CNS précédente est tellement importante que nous la ré-énonçons dans trois cadres différents : celui des champs de forces, celui des champs de vitesses et enfin celui des 1-formes différentielles.

— Si $\vec{F}$ est un champ de forces, alors $\int_{\Gamma^+}\langle\vec{F},\vec{ds}\rangle$ est le travail fourni le long de Γ^+. La proposition précédente devient :

Proposition 10.28 Le champ de forces $\vec{F}$ dérive d'un potentiel dans D ssi le travail fourni par la force $\vec{F}$ le long d'un chemin est indépendant du chemin suivi pour aller du point initial au point final.

Et le théorème du gradient nous informe que ce travail est égal à la différence de potentiel entre ces deux points.

— Si $\vec{v}$ est le champ de vitesses de l'écoulement d'un fluide dans l'ouvert D et si Γ^+ est un chemin orienté, alors $\int_{\Gamma^+} \langle \vec{v}, \vec{ds} \rangle$ est la **circulation** de $\vec{v}$ le long de Γ^+. La proposition précédente devient :

Proposition 10.29 Le champ de vitesses $\vec{v}$ dérive d'un potentiel (est conservatif) ssi la circulation de $\vec{v}$ sur tout cycle est nulle.

Notons que le champ de vitesses est alors irrotationnel puisque le rotationnel d'un gradient est toujours nul.

— Enfin, en termes de formes différentielles, la proposition précédente devient :

Proposition 10.30 La 1-forme différentielle ω est exacte ssi $\oint_C \omega = 0$ pour tout cycle C.

Notons que ω est alors fermée, c'est-à-dire que $d\omega = 0$, puisque la différentielle extérieure d'une forme différentielle exacte est toujours nulle.

10.5.6 Travail d'une force d'après Newton.

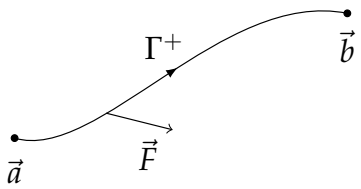


FIGURE 10.53 – Force $\vec{F}$ le long d'une courbe orientée Γ^+.

La **seconde loi du mouvement de Newton** affirme que : $\vec{F} = m\,\vec{x}''$.
Le travail effectué lors d'un déplacement $\vec{x}(t)$ de $\vec{a} = \vec{x}(\alpha)$ jusqu'à $\vec{b} = \vec{x}(\beta)$ est donc

$$\int_{\Gamma^+} \langle \vec{F}, \vec{ds} \rangle = m \int_{\Gamma^+} \langle \vec{x}'', \vec{ds} \rangle = m \int_\alpha^\beta \langle \vec{x}''(t), \vec{x}'(t) \rangle dt$$

$$= \frac{m}{2} \int_\alpha^\beta \frac{d}{dt} \langle \vec{x}'(t), \vec{x}'(t) \rangle dt = \frac{m}{2} \int_\alpha^\beta \frac{d}{dt} \|\vec{x}'(t)\|^2 dt$$

$$= \frac{m}{2} \|\vec{x}'(\beta)\|^2 - \frac{m}{2} \|\vec{x}'(\alpha)\|^2,$$

c'est-à-dire la différence entre les énergies cinétiques à l'arrivée et au départ. Noter que ces énergies dépendent des vitesses finale et initiale et que leur différence dépend *a priori* des vitesses finale et initiale, donc pas de la paramétrisation et du chemin suivi.

10.5.7 Force conservatrice et conservation d'énergie

Si le champ de forces $\vec{F}$ est conservatif (i.e. dérive d'un potentiel) sur D, alors il existe une fonction **énergie potentielle** $V : D \to \mathbb{R}$, telle que

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} V.$$

Donc

$$\int_{\Gamma^+} \left\langle \vec{F}, \vec{ds} \right\rangle = -\int_{\Gamma^+} \left\langle \vec{\nabla} V, \vec{ds} \right\rangle = -\int_\alpha^\beta \left\langle \vec{\nabla} V(\vec{x}(t)), \vec{x}\,'(t) \right\rangle dt$$
$$= -\int_\alpha^\beta \frac{d}{dt} V(\vec{x}(t)) dt = V(\vec{x}(\alpha)) - V(\vec{x}(\beta)) = [V]_{\text{arrivée}}^{\text{départ}}.$$

En utilisant la seconde loi de Newton en (10.5.6), on obtient

$$\frac{m}{2}\|\vec{x}\,'(\beta)\|^2 + V(\vec{x}(\beta)) = \frac{m}{2}\|\vec{x}\,'(\alpha)\|^2 + V(\vec{x}(\alpha)).$$

D'où la **loi de conservation de l'énergie de la mécanique newtonienne :**

Dans un champ de forces conservatif, la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle est constante.

Ceci explique l'usage de l'adjectif *conservatif* pour désigner un champ *dérivant d'un potentiel.*

10.5.8 Interprétation intuitive du gradient ...

... à partir du théorème du gradient

♢ Jeu ! Faisons semblant de n'avoir aucune intuition de ce qu'est le gradient d'une fonction scalaire (est-ce si difficile ?). Forts de cette ignorance, mais armés de l'énoncé du théorème du gradient, ainsi que du théorème de la moyenne du calcul intégral et de la notion de continuité, jouons à nous forger une intuition de $\vec{\nabla} f$ (où f est une fonction de classe $C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.
D'abord, remarquons que si nous connaissons le scalaire $\langle \vec{\nabla} f|_{\vec{x}_0}, \vec{1}_s \rangle$ pour tout vecteur unité $\vec{1}_s$ dans $\mathbb{R}^n$, alors nous connaissons le vecteur $\vec{\nabla} f|_{\vec{x}_0}$.

Soit $[\vec{a}, \vec{b}]$ le segment de longueur 2ϵ centré en $\vec{x}_0$ et de direction $\vec{1}_s$. Donc $[\vec{a}, \vec{b}]$ est paramétré par $\vec{\gamma} : [-\epsilon, \epsilon] \to \mathbb{R}^n : t \mapsto \vec{\gamma}(t) = \vec{x}_0 + t\vec{1}_s$ et $\vec{\gamma}(-\epsilon) = \vec{a}, \vec{\gamma}(\epsilon) = \vec{b}$

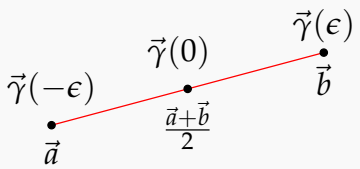


FIGURE 10.54 – Segment $[\vec{a}, \vec{b}]$ centré en $\vec{x}_0$.

Le théorème du gradient affirme que

$$\int_{[\vec{a},\vec{b}]} \left\langle \vec{F}, \vec{ds} \right\rangle = f(\vec{b}) - f(\vec{a}) \tag{10.3}$$

Appliquons le théorème de la moyenne à cette intégrale curviligne :

$$\int_{[\vec{a},\vec{b}]} \left\langle \vec{F}, \vec{ds} \right\rangle = \int_{[\vec{a},\vec{b}]} \left\langle \vec{F}, \vec{ds} \right\rangle ds = 2\epsilon \left\langle \vec{\nabla} f|_{\vec{x}(\epsilon)}, \vec{1}_s \right\rangle \tag{10.4}$$

pour (au moins) un $\vec{x}(\epsilon) \in [\vec{a}, \vec{b}]$. En égalant les derniers membres de (10.3) et (10.4) et en passant à la limite sur $\epsilon \to 0$, on trouve

$$\begin{aligned}
\left\langle \vec{\nabla} f|_{\vec{x}_0}, \vec{1}_s \right\rangle &= \lim_{\substack{\epsilon \to 0 \\ \neq}} \frac{f(\vec{x}_0 + \epsilon\vec{1}_s) - f(\vec{x}_0 - \epsilon\vec{1}_s)}{2\epsilon} \\
&= \lim_{\substack{\epsilon \to 0 \\ \neq}} \frac{f(\vec{x}_0 + \epsilon\vec{1}_s) - f(\vec{x}_0)}{2\epsilon} + \lim_{\substack{\epsilon \to 0 \\ \neq}} \frac{f(\vec{x}_0) - f(\vec{x}_0 - \epsilon\vec{1}_s)}{2\epsilon} \\
&= \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial \vec{1}_s}\bigg|_{\vec{x}_0} - \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial(-\vec{1}_s)}\bigg|_{\vec{x}_0} \\
&= \frac{\partial f}{\partial \vec{1}_s}\bigg|_{\vec{x}_0}.
\end{aligned}$$

On retouve ce qu'on avait vu au chapitre 8 !

10.6 Théorème de Green 2D

10.6.1 Théorème de Green : présentation générale

Le théorème fondamental (T.F.) du CDI pour intégrales simples dans $\mathbb{R}$ peut s'écrire :

$$\int_a^b df = [f]_a^b$$

le couple (a, b) formant le bord orienté du domaine d'intégration (orienté) $[a, b]^+$.
Le théorème de Green est une sorte de théorème fondamental pour intégrales doubles dans $\mathbb{R}^2$. On peut l'écrire :

$$\iint_{D^+} d\omega = \int_{\partial D^+} \omega,$$

où

— ω est une 1-forme différentielle de classe C^1 (cf. champ de vecteurs $\vec{F}$ de classe C^1),

— $d\omega$ est sa différentielle extérieure (cf. rot $\vec{F}$),

— D est un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$ dont la frontière ∂D peut être orientée comme expliqué ci-dessous,

— $\vec{e}_n$ est le vecteur normal normé extérieur à D, ($\diamondsuit$ c'est-à-dire que $\vec{e}_n$ est orthogonal à la tangente à ∂D en $\vec{x}$ et qu'il existe $\delta > 0$ tel que $\forall t \in]0, \delta[$: $\{ \ \vec{x} + t\vec{e}_n \notin$ adh $D\vec{x} - t\vec{e}_n \in$ adh D.

— ∂D^+ désigne le bord de D orienté positivement, c'est-à-dire de telle manière que le couple $(\vec{e}_n, \vec{1}_T)$ soit l'image du couple $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ par un déplacement.

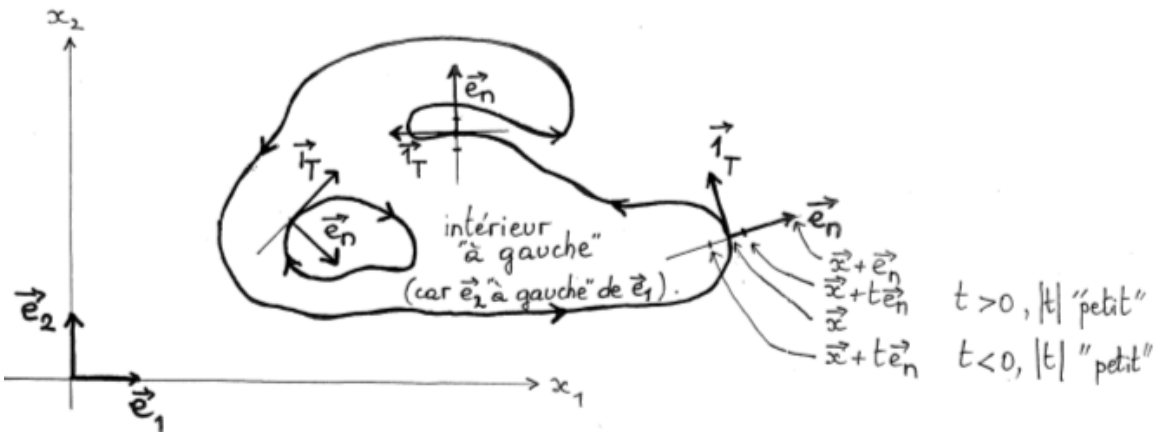


FIGURE 10.55 – Orientation de la frontière ∂D de D.

Intuitivement, si l'axe $0x_2^+$ est l'image du demi-axe $0x_1^+$ par une rotation d'1/4 de tour vers "la gauche", alors on parcourt le bord ∂D de D "en laissant l'intérieur à gauche".

$\diamondsuit$ L'hypothèse " ∂D *est une variété de* dimension 1" assure l'existence de la normale extérieure, de même que l'hypothèse : "*D est disséquable en un nombre fini de domaines normaux*".

10.6.2 Théorème de Green : la formule

Voyons maintenant comment interpréter la mystérieuse formule :

$$\iint_{D^+} d\omega = \int_{\partial D^+} \omega.$$

Soit $\omega(x,y) = P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$. Alors

$$\begin{aligned} d\omega &= \left(\frac{\partial P}{\partial x}dx + \frac{\partial P}{\partial y}dy\right) \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}dx + \frac{\partial Q}{\partial y}dy\right) \wedge dy \\ &= \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx \wedge dy. \end{aligned}$$

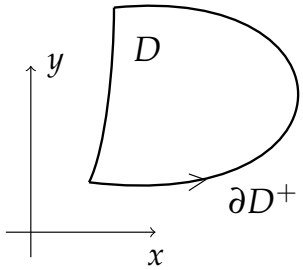


FIGURE 10.56 – Domaine D et le bord orienté associé ∂D^+.

On décrypte donc

$$\iint_{D^+} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx \wedge dy = \int_{\partial D^+} (P\,dx + Q\,dy),$$

c'est-à-dire, si l'on convient que

$$\iint_{D^+} f(x,y) dx \wedge dy = \iint_D f(x,y) dx\,dy,$$

$$\boxed{\int_{\partial D^+} (P\,dx + Q\,dy) = \iint_D \left(\partial_x Q - \partial_y P\right) dx\,dy}$$

10.6.3 Démonstration pour les domaines normaux

Soit D un domaine normal. Il suffit de prouver séparément que :

$$\int_{\partial D^+} P dx = \iint_D -\frac{\partial P}{\partial y} dx\,dy \quad \text{et} \quad \int_{\partial D^+} Q dy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dx\,dy.$$

Nous nous contenterons de prouver la première égalité, la preuve de la deuxième étant laissée comme exercice.
Nous supposons que toutes les fonctions apparaissant dans les formules sont continues, c'est-à-dire que $P, Q \in C^1(D, \mathbb{R})$.

Comme nous devons calculer une intégrale curviligne relativement à x, nous avons intérêt à exprimer D comme normal relativement à y, c'est-à-dire :

$$D \equiv \begin{cases} a \leq x \leq b \\ u(x) \leq y \leq v(x) \end{cases}$$

où $u, v \in C^0([a,b])$ et $u \leq v$.

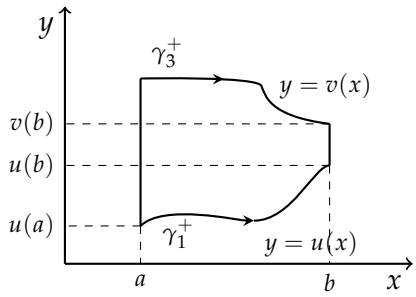


FIGURE 10.57 – Courbes $y = u(x)$ et $y = v(x)$ respectivement paramétrées par γ_1^+ et γ_3^+.

Nous pouvons disséquer ∂D^+ en $\gamma_1^+ + \gamma_2^+ + \gamma_3^+ + \gamma_4^+$ et paramétriser les γ_i^+ comme suit :
$\gamma_1^+ : [a,b] \to \mathbb{R}^2 : x \to (x, u(x))$
$\gamma_2^+ : [0,1] \to \mathbb{R}^2 : t \to (b, u(b) + t(v(b) - u(b)))$
$\gamma_3^- : [a,b] \to \mathbb{R}^2 : x \to (x, v(x))$
$\gamma_4^+ : [0,1] \to \mathbb{R}^2 : t \to (a, v(a) + t(u(a) - v(a)))$.

On a donc

$$\int_{\gamma_2^+} P dx = 0 \quad \text{et} \int_{\gamma_4^+} P dx = 0 \quad (\text{ pourquoi ?})$$

$$\int_{\gamma_1^+} P dx = \int_a^b P(x, u(x)) dx \quad \text{et} \int_{\gamma_3^+} P dx = -\int_a^b P(x, v(x)) dx.$$

D'où en additionnant

$$\int_{\partial D^+} P dx = -\int_a^b P(x, v(x)) - P(x, u(x)) dx = -\int_a^b [P(x,y)]_{y=u(x)}^{y=v(x)} dx$$

Or

$$[P(x,y)]_{y=u(x)}^{y=v(x)} = \int_{u(x)}^{v(x)} \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\, dy \quad (\text{pourquoi ?})$$

Donc

$$\begin{aligned} \int_{\partial D^+} P dx &= -\int_a^b \int_{u(x)}^{v(x)} \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) dy\, dx \\ &= -\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) dx\, dy \qquad \text{par Fubini .} \end{aligned}$$

10.6.4 ... et pour une réunion finie de domaines normaux.

On suppose toujours $Q, P \in C^1(D, \mathbb{R})$. Un domaine D est **disséquable** en un nombre fini n de domaines normaux ssi il existe des domaines normaux $D_1, ..., D_n$ tels que

$$D = D_1 \cup \ldots \cup D_n \quad \text{et} \quad D_i \cap D_j \subseteq \partial D_i \cap \partial D_j \quad \forall i \neq j.$$

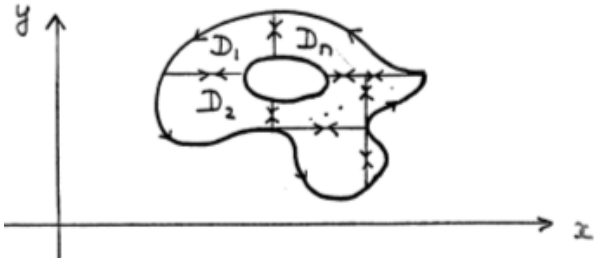


FIGURE 10.58 – Dissection d'un domaine en sous-domaines normaux.

Notons que :

$$\partial D_1^+ + \ldots + \partial D_n^+ = \partial D^+,$$

puisque "les frontières intérieures à D" sont parcourues deux fois et en des sens opposés : par exemple, une partie de ∂D_1^+ est annulée (en tant que courbe orientée) par une partie de ∂D_2^+. Si on ne veut pas sommer des chemins orientés, on peut remarquer que les intégrales correspondantes s'annulent, de sorte que

$$\int_{\partial D_1^+} (P\,dx + Q\,dy) + \ldots + \int_{\partial D_n^+} (P\,dx + Q\,dy) = \int_{\partial D^+} (P\,dx + Q\,dy)$$

d'où, par l'additivité relativement au domaine d'intégration,

Théorème 10.31

$$\int_{\partial D^+} (P\,dx + Q\,dy) = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\,dy.$$

10.6.5 Théorème de Green : version rotationnel

Si $\vec{F}$ est le champ de vecteurs $P\vec{1}_x + Q\vec{1}_y$,
alors

$$\int_{\partial D^+} (P\,dx + Q\,dy) = \int_{\partial D^+} \left\langle \vec{F}, \vec{ds} \right\rangle = \int_{\partial D} \left\langle \vec{F}, \vec{1}_{T^+} \right\rangle ds$$

et

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \text{rot}\vec{F}$$

de sorte que le Théorème de Green devient

Théorème 10.32

$$\int_{\partial D^+} \left\langle \vec{F}, \vec{ds} \right\rangle = \iint_D \text{rot}\vec{F}.$$

C'est le **cas particulier 2D du théorème du rotationnel** (Stokes).

10.6.6 Théorème de Green : version divergence.

Rappelons que si $\vec{\gamma}(t) = (x(t), y(t))$, alors

$$\vec{1}_{T^+} = (x'(t), y'(t))/\|(x'(t), y'(t))\|$$
$$\vec{1}_{n^+} = (y'(t), -x'(t))/\|(x'(t), y'(t))\|,$$

de sorte que

$$\int_{\partial D} \left\langle \vec{F}, \vec{e}_n \right\rangle ds = \int_a^b \left(P|_{(x(t),y(t))}\, y'(t) - Q|_{(x(t),y(t))}\, x'(t) \right) dt$$
$$= \int_{\partial D^+} P\, dy - Q\, dx.$$

Or, par le théorème de Green, on a

$$\oint_{\partial D^+} (Pdy - Qdx) = \iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dx\, dy,$$

d'où

Théorème 10.33

$$\oint_{\partial D} \left\langle \vec{F}, \vec{e}_n \right\rangle ds = \iint_D \operatorname{div} \vec{F}\, dx\, dy.$$

C'est le **cas particulier 2D du Théorème de la divergence** (Ostrogradski).

10.6.7 CS de conservatisme dans un domaine simplement connexe

Rappelons qu'une forme différentielle ω est **exacte** sur D ssi il existe $f : D \to \mathbb{R}$ telle que $\omega = df$. En termes de champ de vecteurs, on dit que $\vec{F}$ est **conservatif** (ou dérive d'un potentiel) ssi il existe $f : D \to \mathbb{R}$ telle que $\vec{\nabla} f = \vec{F}$.

Si $D \subseteq \mathbb{R}^2$, nous avons vu que dans ce cas

$$\frac{\partial F_2}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial F_1}{\partial y}(x, y) \quad \forall (x, y) \in D.$$

Nous allons voir que c'est aussi une condition suffisante de conservatisme si D est "sans trou". D est dit **simplement connexe** ssi tout chemin fermé inclus dans D peut être continûment contracté en un seul point sans jamais sortir de D.

Simple connexité et autres propriétés : quelques exemples

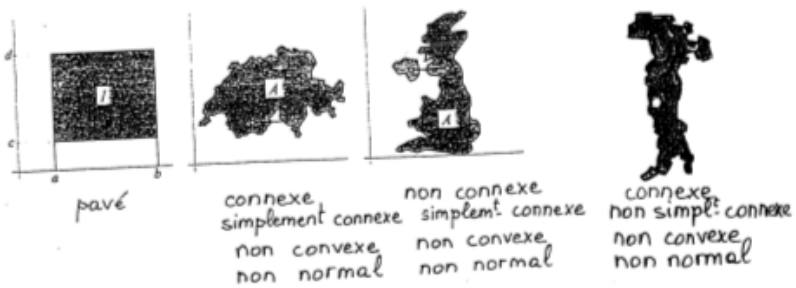


FIGURE 10.59 – Exemples de domaines.

JORDAN a montré que si Γ est un chemin simple fermé dans $\mathbb{R}^2$, alors Γ est la frontière de deux régions ouvertes, l'une *bornée* et appelée **intérieur** (au sens de Jordan) de Γ, et l'autre *non bornée*. Nous noterons inΓ au sens de Jordan, pour éviter toute confusion avec l'intérieur au sens topologique, noté intΓ (et *vide* !).

Si D est simplement connexe, alors pour tout chemin simple fermé (ou de Jordan) Γ,

$$C \subseteq D \Longrightarrow \text{ in } C \subseteq D,$$

donc, par le théorème de Green,

$$\int_{C^+} F_1 dx + F_2 dy = \iint_{\text{in } C} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx\, dy. \tag{10.5}$$

Si la fonction $\dfrac{\partial F_2}{\partial x} - \dfrac{\partial F_1}{\partial y}$ est nulle sur D, alors elle l'est en particulier sur in C, donc l'intégrale double est nulle. Par (10.5) l'intégrale curviligne le long de C est nulle, or c'est la circulation de $\vec{F}$ le long de C. Ceci étant vrai pour tout cycle C dans D, on en déduit que la circulation de $\vec{F}$ est indépendante du chemin dans D (10.5.3), puisque $\vec{F}$ est conservatif dans D (10.5.4). Tout ceci nous permet de conclure en énonçant le théorème.

Théorème 10.34 Si D est un ouvert simplement connexe, alors $\dfrac{\partial F_2}{\partial x} = \dfrac{\partial F_1}{\partial y}$ sur D est une CNS pour que $F_1\, dx + F_2\, dy$ soit exacte (c'est-à-dire pour que (F_1, F_2) soit conservatif).

10.6.8 Ce champ est-il conservatif ou non ?

La réponse peut dépendre du domaine sur lequel on travaille !

■ Exemple 10.19
Soit

$$F_x(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2} \quad \text{et} \quad F_y(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} \quad \text{sur } \mathbb{R}^2_{(0,0)}$$

Il est facile de vérifier que : rot $\vec{F} = 0$

(i) $\dfrac{\partial F_x}{\partial y} = \dfrac{\partial F_y}{\partial x}$ sur $\mathbb{R}^2_{(0,0)}$, d'où

(ii) $\displaystyle\int_{\partial A^+} (F_x dx + F_y dy) = 0 \quad$ où $A \equiv a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2$

et pourtant

(iii) $\displaystyle\int_{C^+} F_x dx + F_y dy = 2\pi \neq 0 \quad$ où $C \equiv x^2 + y^2 = c^2$

(noter que $\displaystyle\int_{2C^+} \left\langle \vec{F}, \vec{ds} \right\rangle = 4\pi$, $\displaystyle\int_{-3C^+} \left\langle \vec{F}, \vec{ds} \right\rangle = -6\pi$, etc.).

(iii) prouve que $\vec{F}$ n'est **pas conservatif sur** $\mathbb{R}^2_{(0,0)}, \ldots$ et pourtant :

$$\vec{\nabla} \arctan \frac{y}{x} = \vec{F} \quad \text{sur } \mathbb{R}_0 \times \mathbb{R}.$$

Donc $\vec{F}$ est **conservatif sur** $\mathbb{R}_0 \times \mathbb{R}$, puisque $\arctan \dfrac{y}{x}$ en est une fonction potentielle. Mais $\arctan \dfrac{y}{x}$ n'est pas défini sur l'axe $x = 0$. Peut-on prolonger cette fonction en une fonction continue sur un domaine plus grand ? Non, comme le suggère la figure ci-dessous.

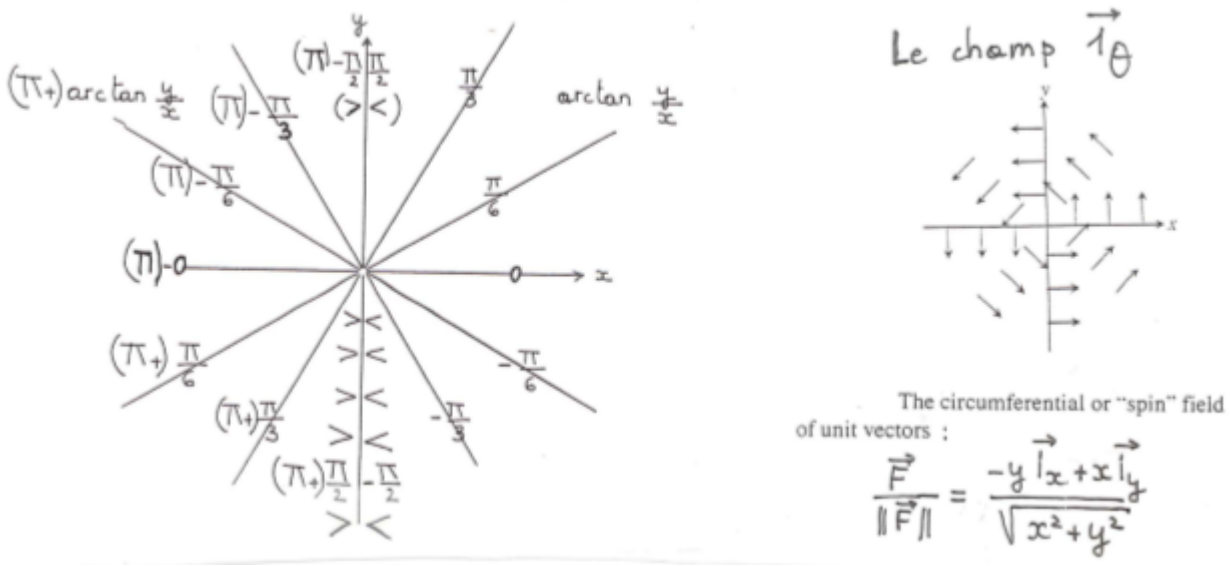


FIGURE 10.60 – Graphe de f, une fonction potentielle de $\vec{F}$ (gauche) et champ $\vec{F}$ normé (droite).

On peut définir une autre fonction potentielle de $\vec{F}$, à savoir :

$$f(x,y) := \begin{cases} \arctan \frac{y}{x} & \text{si } x > 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } x = 0 \text{ et } y > 0 \\ \pi + \arctan \frac{y}{x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Cette fonction f est une fonction potentielle pour $\vec{F}$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus (\{0\} \times \mathbb{R}^-) =: D$.
On ne peut faire mieux. En effet, si on pouvait définir une fonction potentielle de $\vec{F}$ sur un domaine G strictement plus grand que D, alors G contiendrait un cercle Γ dont l'intérieur inΓ contiendrait $(0,0)$, et Green nous contredirait. ∎

10.6.9 Application au calcul d'aire dans $\mathbb{R}^2$

La formule de Green peut être utile pour calculer dans $\mathbb{R}^2$ l'aire d'une région D délimitée par des courbes, particulièrement lorsque celles-ci sont données par des équations paramétriques. En effet, si D est une région disséquable en un nombre fini de domaines normaux, alors, puisque l'aire de D est l'intégrale de la fonction constante 1 sur D, le théorème de Green implique que

$$\begin{aligned}\mu_2(D) := \iint_D 1 dx\, dy &= \frac{1}{2}\int_{\partial D^+}(x\, dy - y\, dx)\\ &= \int_{\partial D^+} x\, dy = -\int_{\partial D^+} y\, dx,\end{aligned}$$

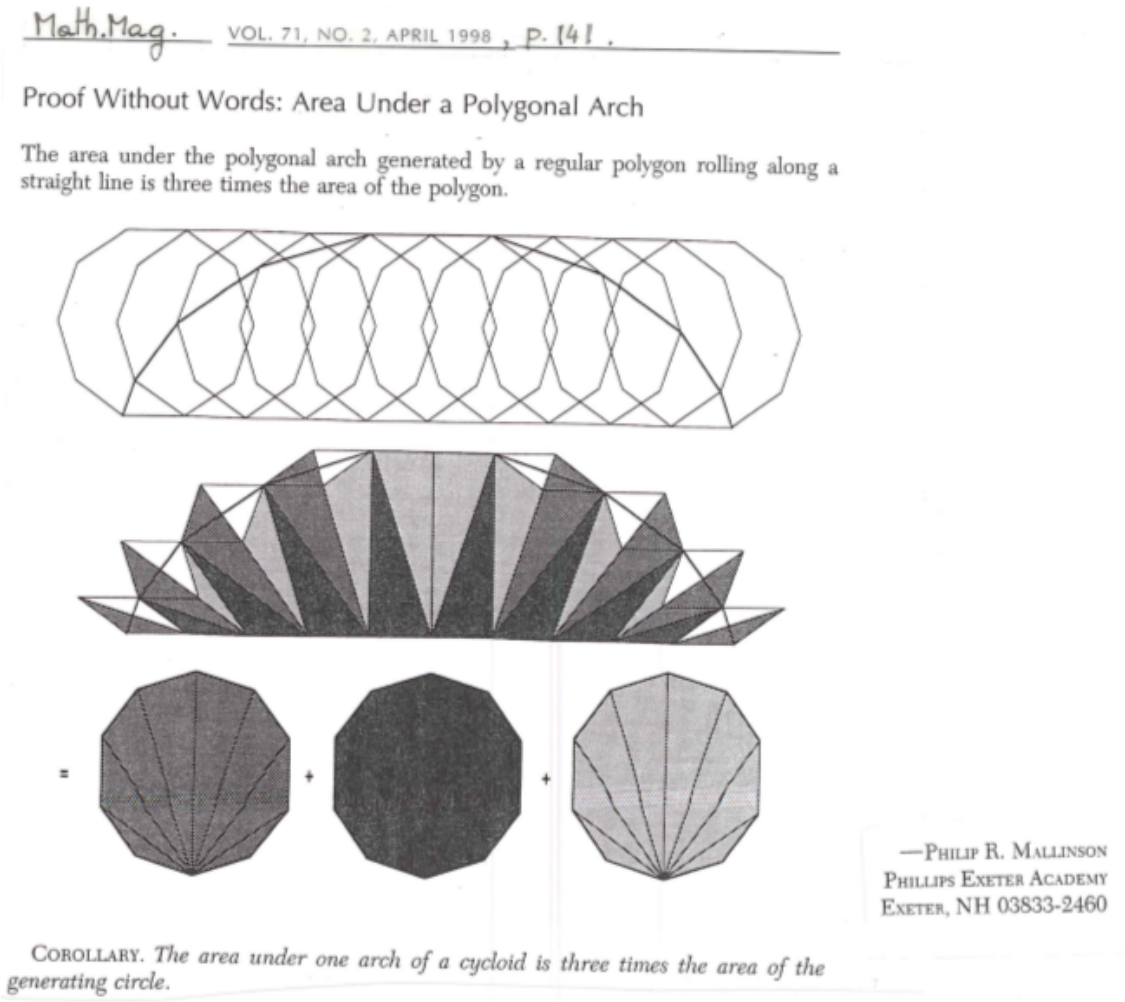
Ce qui permet de mesurer cette aire en calculant l'une (au choix) des trois intégrales curvilignes ci-dessus.

Exercice :

Calculer l'aire délimitée par une arche de cycloïde et par sa droite de support.

Réponse : $3\pi R^2$ si R est le rayon du cercle qu'on fait rouler sur la droite de support pour définir la cycloïde.

◊ **Dessert** : Une preuve sans paroles pour un monde où les roues seraient décagonales ..., ou n-gonales. Puis, en passant à la limite ...



Math. Mag. VOL. 71, NO. 2, APRIL 1998, p. 141.

Proof Without Words: Area Under a Polygonal Arch

The area under the polygonal arch generated by a regular polygon rolling along a straight line is three times the area of the polygon.

—Philip R. Mallinson
Phillips Exeter Academy
Exeter, NH 03833-2460

Corollary. *The area under one arch of a cycloid is three times the area of the generating circle.*

FIGURE 10.61 – Raisonnement par images pour des n-gones.

10.7 Théorème de Stokes (rotationnel)

10.7.1 La formule magique

Voilà encore un théorème de la famille du Théorème Fondamental du CDI, tout comme le théorème du gradient (T.F. des intégrales curvilignes) (10.5) et le Théorème de Green (T.F. dans le plan) (10.6).
Le théorème de Stokes peut lui aussi s'écrire

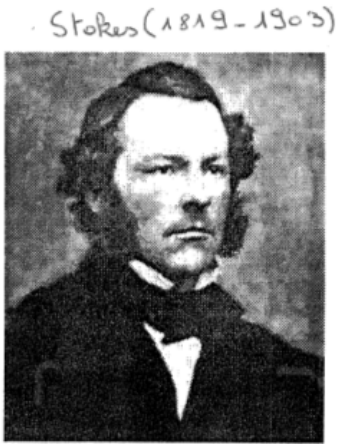


FIGURE 10.62 – George Gabriel Stokes.

Théorème 10.35

$$\iint_{S^+} d\omega = \oint_{\partial S^+} \omega$$

où

— S^+ est une surface orientée dans $\mathbb{R}^n$ (limitons-nous à $n = 3$),

— ∂S^+ est le bord de S muni de l'orientation induite par celle de S^+ ,

— ω est une 1-forme différentielle définie sur un domaine contenant S.

Ecrivons

$$\omega = F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz,$$

et différentions formellement :

$$\begin{aligned}
d\omega &= \left(\frac{\partial F_1}{\partial x}dx + \frac{\partial F_1}{\partial y}dy + \frac{\partial F_1}{\partial z}dz\right) \wedge dx \\
&+ \left(\frac{\partial F_2}{\partial x}dx + \frac{\partial F_2}{\partial y}dy + \frac{\partial F_2}{\partial z}dz\right) \wedge dy \\
&+ \left(\frac{\partial F_3}{\partial x}dx + \frac{\partial F_3}{\partial y}dy + \frac{\partial F_3}{\partial z}dz\right) \wedge dz \\
&= \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dx \wedge dy + \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\right) dz \wedge dx \\
&=: G_1\, dy \wedge dz + G_2\, dz \wedge dx + G_3\, dx \wedge dy
\end{aligned}$$

où $\vec{G} = (G_1, G_2, G_3) = \operatorname{rot} \vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{F}$.

On retrouve ainsi la forme classique du théorème de Stokes :

Théorème 10.36

$$\iint_{S^+} \left\langle \vec{\nabla} \times \vec{F}, \vec{d\sigma} \right\rangle = \oint_{\partial S^+} \left\langle \vec{F}, \vec{ds} \right\rangle.$$

Plan de démonstration du théorème de Stokes

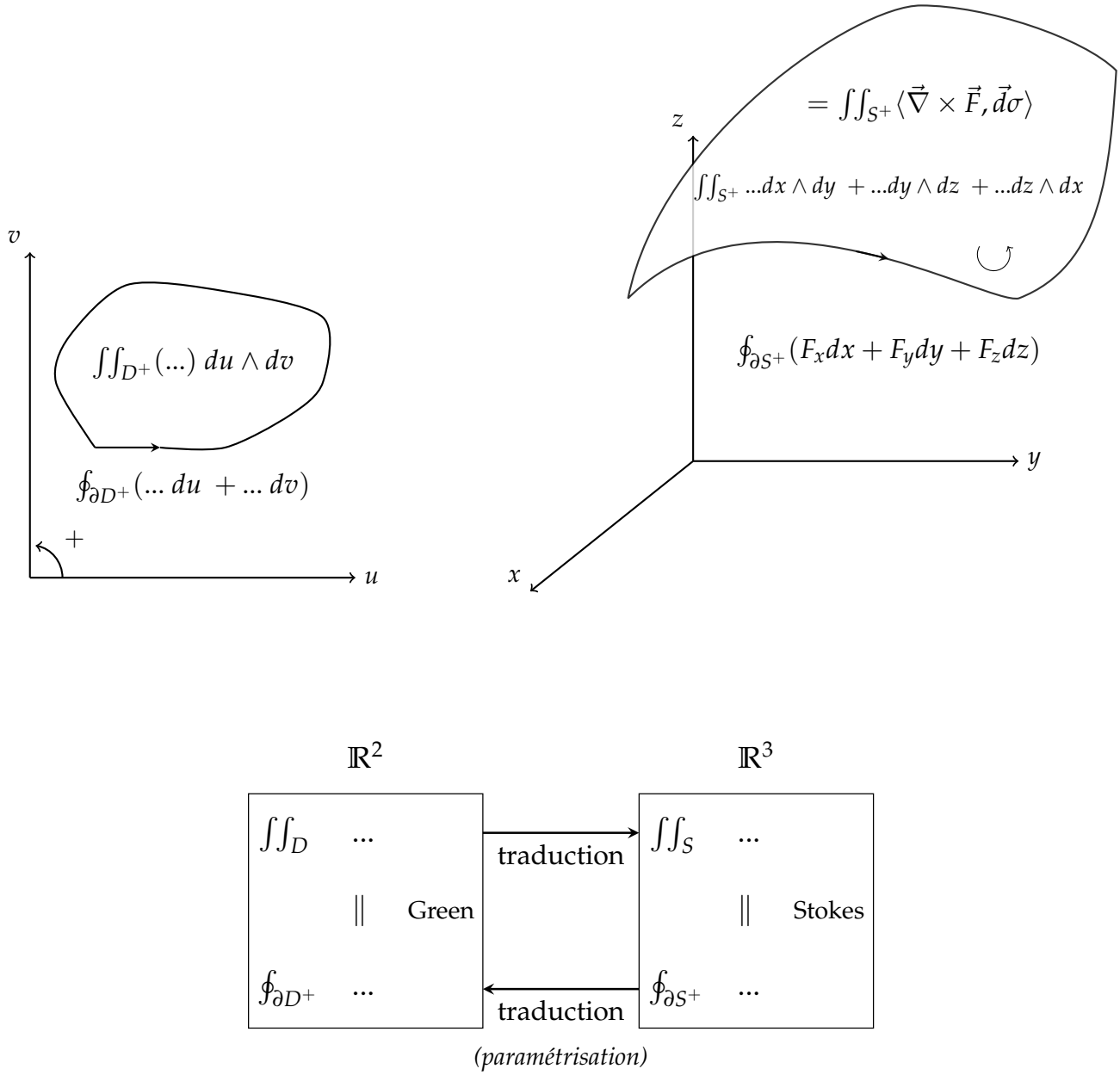


FIGURE 10.63 – Plan de démonstration du théorème de Stokes.

10.7.2 Preuve sur une portion de surface paramétrée

Traitons le cas d'une portion de surface paramétrée.
Le théorème de Stokes est une généralisation et un corollaire du théorème de Green.

Soit $S = \vec{g}(D)$ comme d'habitude et soit S^+ munie de l'orientation induite par la paramétrisation $\vec{g}$ (c'est-à-dire $\vec{1}_n = \left(\frac{\partial \vec{g}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{g}}{\partial v}\right) / \left\|\frac{\partial \vec{g}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{g}}{\partial v}\right\|$) . Nous allons nous servir de cette paramétrisation $\vec{g}$ pour tout transporter dans le plan ouv et y appliquer le théorème de Green.

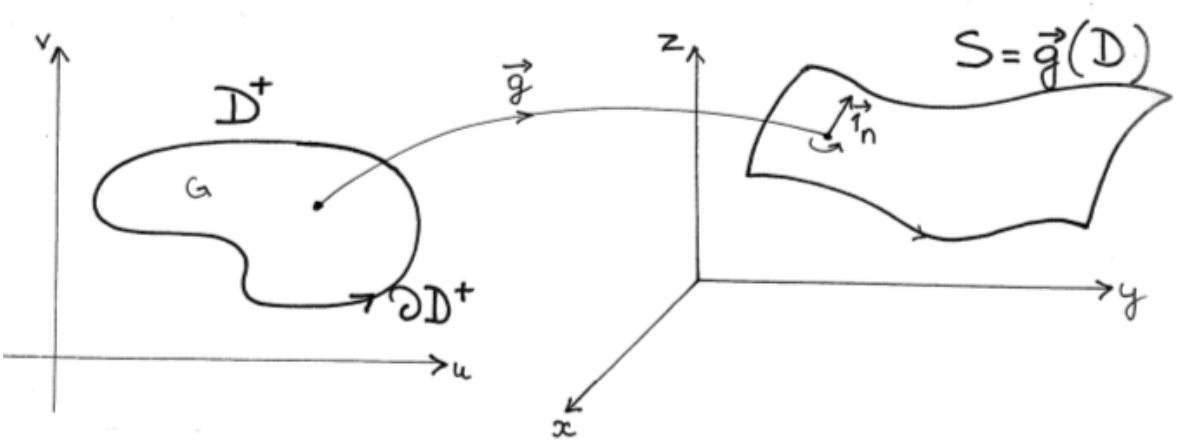


FIGURE 10.64 – Application de $\vec{g}$ au domaine D.

Le formalisme des 2-formes différentielles fera merveille.

Nous admettrons que :

— Le **bord** ∂S de S est l'image par $\vec{g}$ du bord (ou de la frontière) ∂D de D. La notation ∂S^+ désigne le bord orienté muni de l'orientation induite par l'orientation positive ∂D^+ de D^+ par l'intermédiaire de $\vec{g}$. Par exemple, si ∂D^+ de D^+ est paramétré par $\vec{\gamma} : t \to \vec{\gamma}(t)$, alors ∂S^+ est paramétré par $\vec{g} \circ \vec{\gamma} : t \to \vec{g}((\vec{\gamma}(t)))$.

— On peut prouver que l'orientation ∂S^+ est bien celle induite par S^+.

— La notion de bord ∂S de S est intrinsèque (i.e. indépendante de la paramétrisation).

$$\int_{\partial S^+} \left\langle \vec{F}\,,\, \vec{ds} \right\rangle = \int_{\partial S^+} (F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz)$$
$$= \int_{\partial D^+} \left[F_1 \left(\frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv \right) + F_2 \left(\frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv \right) + F_3 \left(\frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv \right) \right]$$

où les F_i sont calculés en $(x(u,v), y(u,v), z(u,v))$, nous ne le répéterons pas !

$$= \int_{\partial D^+} \left[\left(F_1 \frac{\partial x}{\partial u} + F_2 \frac{\partial y}{\partial u} + F_3 \frac{\partial z}{\partial u} \right) du + \left(F_1 \frac{\partial x}{\partial v} + F_2 \frac{\partial y}{\partial v} + F_3 \frac{\partial z}{\partial v} \right) dv \right]$$

$$= \int_{\partial D^+} \left[\left\langle \vec{F}, \frac{\partial(x,y,z)}{\partial u} \right\rangle du + \left\langle \vec{F}, \frac{\partial(x,y,z)}{\partial v} \right\rangle dv \right]$$

$$\overset{\text{Green}}{=} \iint_{D^+} \left(\frac{\partial}{\partial u} \left\langle \vec{F}, \frac{\partial(x,y,z)}{\partial v} \right\rangle - \frac{\partial}{\partial v} \left\langle \vec{F}, \frac{\partial(x,y,z)}{\partial u} \right\rangle \right) du \wedge dv$$

$$= \iint_{D^+} \left(\left\langle \frac{\partial \vec{F}}{\partial u}, \frac{\partial(x,y,z)}{\partial v} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial \vec{F}}{\partial v}, \frac{\partial(x,y,z)}{\partial u} \right\rangle \right) du \wedge dv$$

$$= \iint_{D^+} \left[\left(\frac{\partial F_1}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial F_1}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial F_1}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u} \right) \frac{\partial x}{\partial v} + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial F_2}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial F_2}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u} \right) \frac{\partial y}{\partial v} \right.$$
$$+ \left(\frac{\partial F_3}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial F_3}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial F_3}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u} \right) \frac{\partial z}{\partial v} - \left(\frac{\partial F_1}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial F_1}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial F_1}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v} \right) \frac{\partial x}{\partial u}$$
$$\left. - \left(\frac{\partial F_2}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial F_2}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial F_2}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v} \right) \frac{\partial y}{\partial u} - \left(\frac{\partial F_3}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial F_3}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial F_3}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v} \right) \frac{\partial z}{\partial u} \right] du \wedge dv$$

$$= \iint_{D^+} \left[\left(\tfrac{\partial F_3}{\partial y} - \tfrac{\partial F_2}{\partial z} \right) \tfrac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} + \left(\tfrac{\partial F_1}{\partial z} - \tfrac{\partial F_3}{\partial x} \right) \tfrac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} + \left(\tfrac{\partial F_2}{\partial x} - \tfrac{\partial F_1}{\partial y} \right) \tfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right] du \wedge dv$$

$$= \iint_{D^+} \left[\begin{vmatrix} \partial_y & \partial_z \\ F_2 & F_3 \end{vmatrix} \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} + \begin{vmatrix} \partial_z & \partial_x \\ F_3 & F_1 \end{vmatrix} \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} + \begin{vmatrix} \partial_x & \partial_y \\ F_1 & F_2 \end{vmatrix} \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right] du\, dv$$

$$= \iint_{S^+} \left\langle \vec{\nabla} \times \vec{F}, \vec{d\sigma} \right\rangle .$$

10.7.3 Preuve sur une surface orientable

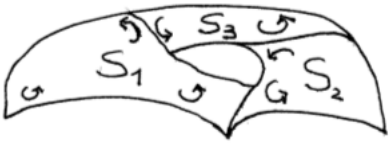


FIGURE 10.65 – Dissection d'une surface orientée en trois sous-surfaces également orientées.

Soit S^+ une surface orientée (donc orientable !). On peut montrer qu'alors S^+ peut être disséquée en un nombre fini de portions de surfaces S_i^+ admettant chacune une paramétrisation $\vec{g}_i$ satisfaisant aux conditions 10.8.2 , dont l'orientation concorde avec l'orientation induite par celle de S^+.

Donc $\iint_{S_i^+} \left\langle \vec{\nabla} \times \vec{F}, \vec{d\sigma} \right\rangle = \int_{\partial S_i^+} \left\langle \vec{F}, \vec{ds} \right\rangle \qquad \forall i,$

d'où par additivité relativement aux domaines d'intégration

$$\iint_{\sum_i S_i^+} \left\langle \vec{\nabla} \times \vec{F}, \vec{d\sigma} \right\rangle = \int_{\sum_i \partial S_i^+} \left\langle \vec{F}, \vec{ds} \right\rangle .$$

Vu les hypothèses faites sur les S_i^+, on a, d'une part

$$\sum_i S_i^+ = S^+,$$

et d'autre part

$$\sum_i \partial S_i^+ = \partial S^+$$

puisque toute portion de surface intervenant dans ∂S_i^+ mais pas dans ∂S^+ intervient dans un et un seul autre ∂S_j^+ , où elle est

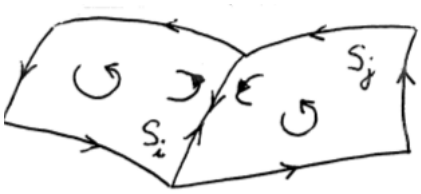


FIGURE 10.66 – Portion partagée par deux surfaces orientées voisines.

parcourue en sens inverse. Le théorème de Stokes en résulte :

Théorème 10.37

$$\iint_{S^+} \left\langle \vec{\nabla} \times \vec{F}, \vec{d\sigma} \right\rangle = \oint_{\partial S^+} \left\langle \vec{F}, \vec{ds} \right\rangle$$

Par contre, ce théorème n'est **pas valable** pour les surfaces **non orientables**, car de telles surfaces ne peuvent pas être disséquées en un nombre fini de portions de manière telle que tout "bord interne" soit parcouru exactement deux fois et dans des sens contraires.
EXEMPLE : Le ruban de Möbius.

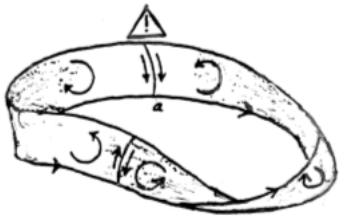


FIGURE 10.67 – Exemple de surface non orientable : le ruban de Möbius.

10.7.4 Le théorème de Stokes : une merveille !

Soit $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^3$ un domaine dans lequel est défini un champ de vecteurs différentiable $\vec{F}$.
Soit C une courbe simple fermée incluse dans $\mathcal{U}$, soit S une surface lisse s'appuyant sur C et incluse dans $\mathcal{U}$.

FIGURE 10.68 – Surface S s'appuyant sur une courbe C.

Orientons C arbitrairement (et notons C^+ le cycle orienté obtenu), munissons S de l'orientation induite par celle de C^+ (cf. sens de rotation autour de chaque point de S) et des vecteurs normaux normés correspondant dans le repère choisi (dextrogyre ou levogyre ?).
Notons S^+ la surface S munie de ce champ de vecteurs normaux normés : le flux d'un champ de vecteurs à travers $S^+ = (S, \vec{1}_n)$ est dès lors bien défini.
Le théorème de Stokes s'écrit :

$$\oint_{C^+} < \vec{F}, \vec{ds} >= \iint_{S^+} < \vec{\nabla} \times \vec{F}, \vec{d\sigma} > .$$

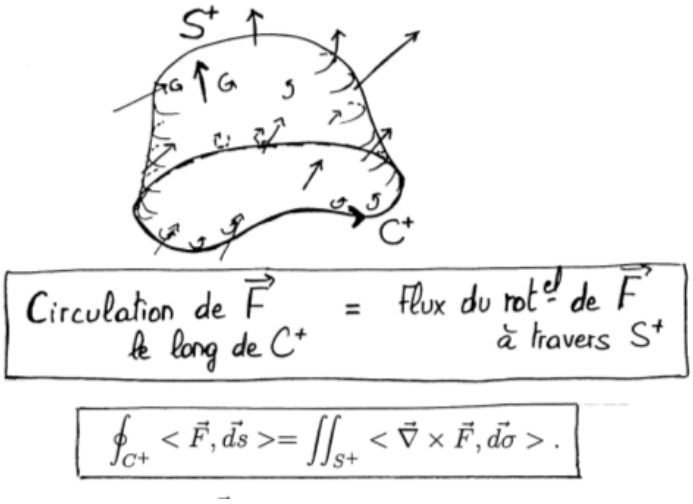


FIGURE 10.69 – Théorème de Stokes.

Il affirme que *la circulation de $\vec{F}$ le long du cycle C^+ égale le flux du rotationnel de $\vec{F}$ à travers $(S, \vec{1}_n)$.*
C'est merveilleux , car

— ceci est vrai **quelle que soit la surface** S s'appuyant sur C,

— le premier membre est **indépendant des valeurs de** $\vec{F}$ en dehors de C,

— le second membre ne tient compte de $\vec{F}$ **que par l'intermédiaire de ses dérivées**. En particulier, on aurait le même résultat en considérant $\vec{F} + \vec{K}$ où $\vec{K}$ est un champ de vecteurs constant. On devine que ceci n'est possible que parce que dans le premier membre , on intègre $\vec{F}$ sur un cycle.

10.7.5 Flux d'un rotationnel sur une surface fermée

Le qualificatif "fermé" n'est pas à prendre au sens de la topologie générale : nous entendons par surface fermée une surface dont le bord est vide ("sans bord" serait un abus commode). Stokes nous indique que si S^+ est une surface **orientée** simple et fermée alors

$$\iint_{S^+} \left\langle \vec{\nabla} \times \vec{F}, \vec{d\sigma} \right\rangle = 0$$

quel que soit $\vec{F} \in C^1$ dans un voisinage de S.

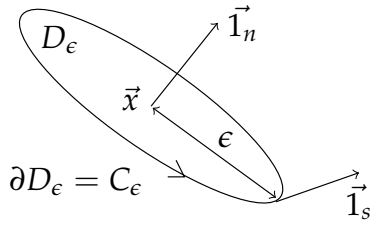


FIGURE 10.70 – Disque D_ε.

10.7.6 Interprétation du rotationnel

- Soit $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$
- Soit D_ε un disque centré en $\vec{x}$ de rayon ε
- Soit $C_\varepsilon := \partial D_\varepsilon$
- Orientons C_ε dans un sens, noté C_ε^+. Ceci induit automatiquement une orientation ("*champ continu de rotations*") de D_ε.
- Considérons un trièdre orthonormé, disons *dextrogyre*. Ceci permet de traduire l'orientation de D_ε sous forme de "*champ de vecteurs normaux normés*". Ce champ continu est d'ailleurs constant (puisque D_ε est une surface plane).

Par le théorème de Stokes :

$$\iint_{S_\varepsilon} \left\langle \underbrace{\vec{\nabla} \times \vec{F}}_{\substack{\text{dépend} \\ \text{du repère}}}, \vec{1}_n \right\rangle d\sigma = \oint_{C\vec{x},\varepsilon} \left\langle \vec{F}, \underbrace{\vec{1}_s}_{\substack{\text{dépend} \\ \text{du repère}}} \right\rangle ds.$$

Par le théorème de la moyenne, il existe donc $\vec{x}_\varepsilon \in D_\varepsilon$:

$$\left\langle \vec{\nabla} \times \vec{F}, \vec{1}_n \right\rangle \Big|_{\vec{x}_\varepsilon} = \frac{\oint_{C_\varepsilon^+} \vec{F}}{\mu_2(D_\varepsilon)}$$

Par continuité de $\vec{\nabla} \times \vec{F}$, on a donc

$$\left\langle \vec{\nabla} \times \vec{F}, \vec{1}_n \right\rangle \Big|_{\vec{x}} = \lim_{\varepsilon \to 0} \left\langle \vec{\nabla} \times \vec{F}, \vec{1}_n \right\rangle \Big|_{\vec{x}_\varepsilon} = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ >}} \frac{\oint_{C_\varepsilon^+} \left\langle \vec{F}, \vec{ds} \right\rangle}{\mu_2(D_\varepsilon)}.$$

$$\boxed{\left\langle \vec{\nabla} \times \vec{F}, \vec{1}_n \right\rangle \Big|_{\vec{x}} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\text{circul. } \vec{F}}{\text{aire}}}$$

$\left\langle \left(\vec{\nabla} \times \vec{F}\right)\Big|_{\vec{x}}, \vec{1}_n \right\rangle$ = "densité de circul. de $\vec{F}$ autour de $\vec{1}_n$ planté en $\vec{x}$. par unité d'aire"

FIGURE 10.71 – Interprétation du rotationnel.

La **projection du rotationnel** de $\vec{F}$ en $\vec{x}$ dans la direction $\vec{1}_n$ mesure donc une sorte de "**densité de la circulation de $\vec{F}$ autour de $\vec{x}$** lorsqu'on tourne dans le sens positif autour de l'axe orienté porté par $\vec{1}_n$, relativement à l'aire encerclée".
Autrement dit, la composante de $\vec{\nabla} \times \vec{F}$ selon $\vec{1_n}$ mesure la tendance qu'a le champ $\vec{F}$ à induire une rotation dans le sens positif autour de $\vec{1}_n$.

La **direction** du vecteur $\vec{\nabla} \times \vec{F}$ est donc celle du vecteur $\vec{1}_n$ autour duquel cette influence "tourbillonante" ou " rotationnelle" est maximale.
Le sens "positif" dépend de l'orientation du trièdre dans lequel on travaille, c'est-à-dire du fait qu'il est ou non dextrogyre.
La **norme** de $\vec{\nabla} \times \vec{F}$ est précisément la mesure de cette tendance à tourner dans le sens positif autour de ce $\vec{1}_n$ optimum. Ceci nous fournit une *caractérisation presque intrinsèque* du rotationnel, c'est-à-dire que le vecteur $\vec{\nabla} \times \vec{F}$ reste inchangé si nous remplaçons notre repère "canonique" par un autre repère orthonormé de **même** orientation.
En fait, la notion véritablement intrinsèque au champ de vecteurs $\vec{F}$ est celle d'"*axe rotationnel, mesure rotationnelle positive et sens de rotation*", ce qui se traduit par "*une direction, une norme et un sens de rotation*". Ce n'est qu'après avoir précisé la qualité dextrogyre ou lévogyre du repère qu'on traduit ces données par un "*vecteur*". C'est pourquoi on qualifie parfois le rotationnel rot $\vec{F}$ de **"pseudo-vecteur"**.

10.7.7 Rotationnel du champ de vitesses d'un solide tournant autour d'un axe fixe

$\diamondsuit$ Supposons qu'un solide tourne à une vitesse angulaire constante autour de l'axe oz, de sorte que le vecteur vitesse angulaire est

$$\vec{\omega} = \omega \vec{1}_z$$

et le vecteur vitesse du point (x, y, z) est

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times (x, y, z) = \begin{vmatrix} \vec{1}_x & \vec{1}_y & \vec{1}_z \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & z \end{vmatrix} = -y\omega\vec{1}_x + x\omega\vec{1}_y.$$

Donc

$$\vec{\nabla} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{1}_x & \vec{1}_y & \vec{1}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ -y\omega & x\omega & 0 \end{vmatrix} = 2\omega\vec{1}_z = 2\vec{\omega}.$$

Ainsi le rotationnel du champ de vitesses de ce solide est le même en tout point de champ, de direction donnée par l'axe de rotation et de norme égale au double de la vitesse angulaire.

Noter que si cette rotation est composée avec un mouvement de translation (de vitesse constante lui aussi), l'affirmation précédente reste valable.

10.7.8 CS pour qu'un champ soit conservatif

Soit $\vec{F}$ un champ de vecteurs de classe C^1 dans un domaine $\mathcal{U}$ **simplement connexe** dans $\mathbb{R}^3$, c'est-à-dire que tout chemin simple fermé Γ_0 peut être tranformé continûment en un point Γ_1 tout en restant dans $\mathcal{U}$.

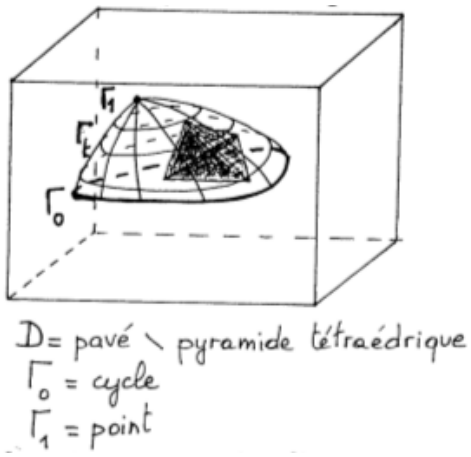


FIGURE 10.72 – Domaine D simplement connexe.

L'exigence que $\mathcal{U}$ est simplement connexe implique que pour tout chemin simple fermé C inclus dans $\mathcal{U}$, il existe une surface S dont C est le bord et qui soit entièrement incluse dans $\mathcal{U}$: il suffit de considérer la réunion de toutes les courbes Γ_t intermédiaires entre Γ_0 et Γ_1 $(0 \leq t \leq 1)$.

$\diamondsuit$ En fait, on peut considérer la famille des paramétrisations

$$\vec{\gamma}_t : s \to \vec{\gamma}_t(s)$$

des Γ_t $(0 \leq t \leq 1)$, où la fonction

$$(t, s) \to \vec{\gamma}_t(s)$$

est de classe C^1 et paramétrise S.

On en déduit facilement la proposition suivante du Théorème de Stokes

Proposition 10.38 *$\vec{F}$ est* **conservatif** *sur $\mathcal{U}$* ssi $\vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{0}$

Démonstration. Exercice. (Notons que nous avons déduit le résultat analogue en dimension 2 du théorème de green en (10.6.7). Rappelons que "$\vec{F}$ est conservatif " se dit aussi "la 1-forme $F_1dx + F_2dy + F_3dz$ est exacte ", ou encore "$\vec{F}$ est un champ de gradients " , ou "$\vec{F}$ dérive d'un potentiel ",

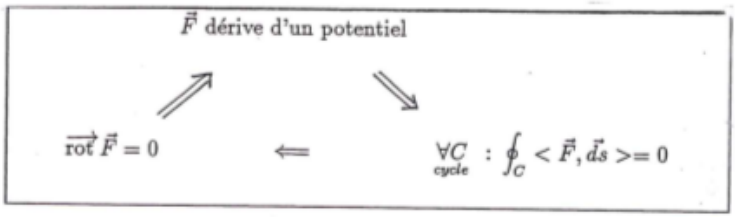


FIGURE 10.73 – Equivalence pour un champ conservatif.

Ceci est valable en 2D et en 3D
Conclusion. Les trois affirmations sont équivalentes, on peut remplacer toutes les implications $\Rightarrow$ par des $\Leftrightarrow$. ■

10.8 Théorème d'Ostrogradski (divergence)

10.8.1 Théorème de Gauss-Ostrogradski

— En bref : (c'est la version 3D du Théorème Fondamental)

Théorème 10.39

$$\iiint_D d\omega = \oiint_{\partial D^+} \omega$$

Hypothèses :

(i) $D \subseteq \mathbb{R}^3$ est un ouvert borné dont le bord ∂D est une surface lisse (variété de dimension 2). La notation ∂D^+ correspond au choix de vecteurs normaux "extérieurs" normés $\vec{e_n}$,

(ii) $\omega = F_1 dy \wedge dz + F_2 dz \wedge dx + F_3 dx \wedge dy$ est une 2-forme différentielle de classe C^1 sur $D \cup \partial D$, de sorte que

$$d\omega = \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}\right) dx \wedge dy \wedge dz.$$

— In extenso :

Théorème 10.40

$$\iiint_D \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz = \oiint_{\partial D^+} F_1 dy \wedge dz + F_2 dz \wedge dx + F_3 dx \wedge dy.$$

— En termes de champ de vecteurs :

$$\boxed{\iiint_D \mathrm{div}\vec{F} = \oiint_{\partial D^+} < \vec{F}, \vec{d\sigma} >}$$

$$\text{ou} \iiint_D \left\langle \vec{\nabla}, \vec{F} \right\rangle = \oiint_{\partial D^+} \left\langle \vec{F}, \vec{d\sigma} \right\rangle$$

$$\text{ou} \boxed{\iiint_D \left\langle \vec{\nabla}, \vec{F} \right\rangle = \oiint_{\partial D} \left\langle \vec{F}, \vec{e_n} \right\rangle d\sigma}$$

Traduite en termes de champ, l'hypothèse sur ω devient : $\vec{F}$ est un champ de vecteurs de classe C^1 sur adh D.

— En toutes lettres, grâce à la définition de la valeur moyenne de $\left\langle \vec{\nabla}, \vec{F} \right\rangle$ sur D :

Le flux de $\vec{F}$ **sortant** *de ∂D divisé par le volume de D vaut la valeur moyenne sur D de la divergence de $\vec{F}$.*

10.8.2 Interprétation de $\mathrm{div}\vec{F}$

... à partir du Théorème de la div :

▷ $\vec{F} \in C^1$ (en 3D)

$$\boxed{\iiint_D \mathrm{div}\,\vec{F} = \oiint_{\partial D} \langle \vec{F}, \vec{e}_n \rangle \, d\sigma}$$

$$\boxed{\left(\text{val. moy. de } \mathrm{div}\,\vec{F} \text{ sur } D\right) \cdot \left(\text{volume de } D\right)} = \boxed{\text{flux de } \vec{F} \text{ sortant de } D}$$

$$\boxed{\text{moyenne de } \mathrm{div}\,\vec{F} \text{ sur } D = \frac{\text{flux de } \vec{F} \text{ sortant de } D}{\text{volume de } D}}$$

▷ $\vec{x}_0$ & $D = B(\vec{x}_0, \varepsilon) =: B_\varepsilon$ (boule) $\quad \partial D = S(\vec{x}_0, \varepsilon) =: S_\varepsilon$ (sphère)

Si $\vec{F} \in C^1$ ($\Leftrightarrow \mathrm{div}\,\vec{F} \in C^0$), par le th. de la moyenne,

il existe $\vec{x}_\varepsilon \in B_\varepsilon$: $\mathrm{div}\,\vec{F}\big|_{\vec{x}_\varepsilon}$ = moyenne de $\mathrm{div}\,\vec{F}_s / B_\varepsilon$

donc:

$$\underbrace{\lim_{\varepsilon \to 0} \left(\mathrm{div}\,\vec{F}\big|_{\vec{x}_\varepsilon} \right)}_{=} = \boxed{\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\text{flux de } \vec{F} \text{ sortant de } B_\varepsilon}{\text{volume de } B_\varepsilon}}$$

$$\boxed{\mathrm{div}\,\vec{F}\big|_{\vec{x}_0}} = \text{"densité de flux sortant d'une petite région}$$

FIGURE 10.74

Proposition 10.41

$$\begin{aligned} \mathrm{div}\vec{F}\Big|_{\vec{x}_0} &= \lim_{\epsilon \to 0} \left(\oiint_{\partial B(\vec{x}_0, \varepsilon)} \left\langle \vec{F}, d\vec{\sigma} \right\rangle \Big/ \iiint_{B(\vec{x}_0, \varepsilon)} 1 \right) \\ &= \tfrac{3}{4\pi} \lim_{\epsilon \to 0} \left(\oiint_{\partial B(\vec{x}_0, \varepsilon)} \left\langle \vec{F}, d\vec{\sigma} \right\rangle / \varepsilon^3 \right) \end{aligned}$$

C'est pourquoi on parle de densité de "**flux sortant par unité de volume** ". Ceci permet une définition intrinsèque de la divergence d'un champ de vecteurs, c'est-à-dire indépendante du repère orthonormé choisi comme base canonique de l'espace euclidien normé 3D dans lequel nous travaillons.

10.8.3 Démonstration si D est normale

Rappel :

— La région D est **normale** ssi elle est normale par rapport à x, à y et à z.

— La région D est **normale par rapport à** z ssi

$$D \equiv \begin{cases} Z_1(x,y) \leq z \leq Z_2(x,y) \\ (x,y) \in D_3 \end{cases}$$

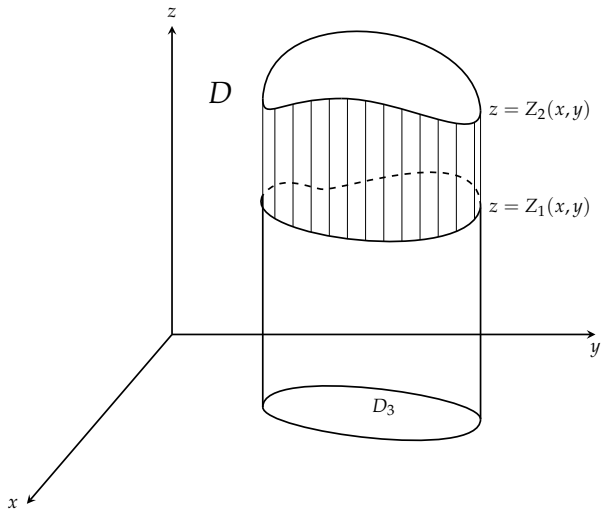


FIGURE 10.75 – Région D et sa projection D_3 sur le plan Oxy.

■ **Exemple 10.20** Les cubes et les ovoïdes sont des surfaces bordant des régions normales. ■

Démonstration.
Nous devons prouver que

$$\iiint_D \frac{\partial F_1}{\partial x} + \iiint_D \frac{\partial F_2}{\partial y} + \iiint_D \frac{\partial F_3}{\partial z} = \oiint_{\partial D} \left\langle \vec{F}, \vec{e}_n \right\rangle d\sigma$$

$$= \oiint_{\partial D} \left\langle F_1 \vec{1}_x, \vec{e}_n \right\rangle d\sigma + \oiint_{\partial D} \left\langle F_2 \vec{1}_y, \vec{e}_n \right\rangle d\sigma + \oiint_{\partial D} \left\langle F_3 \vec{1}_z, \vec{e}_n \right\rangle d\sigma.$$

Si nous prouvons successivement que c'est vrai dans les 3 cas particuliers $\vec{F} = F_1 \vec{1}_x$, $\vec{F} = F_2 \vec{1}_y$ et $\vec{F} = F_3 \vec{1}_z$, nous en déduirons immédiatement le résultat général par l'additivité des intégrations de différents intégrandes sur un même domaine.
Envisageons le cas $\vec{F} = F_3 \vec{1}_z$ et utilisons la normalité de D relativement à z. Disséquons le bord ∂D en 3 surfaces S_1, S_2 et S_3, à savoir respectivement le graphe de Z_1, le graphe de Z_2 et la surface cylindrique latérale à génératrice parallèle à $\vec{1}_z$ (il se peut que $S_3 = \phi$).

Clairement
$\left\langle F_3 \vec{1}_z, \vec{e}_n \right\rangle = 0$ sur S_3

Pour calculer $\vec{e}_n$ au point $(x, y, Z_i(x, y))$ de S_i, il suffit de normer (et éventuellement de réorienter) le vecteur :

$$\left(1, 0, \frac{\partial Z_i}{\partial x}\right) \times \left(0, 1, \frac{\partial Z_i}{\partial y}\right) = -\frac{\partial Z_i}{\partial x}\vec{1}_x - \frac{\partial Z_i}{\partial y}\vec{1}_y + \vec{1}_z$$

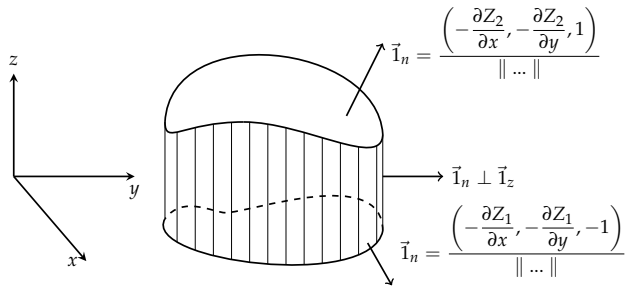


FIGURE 10.76 – Dissection de ∂D en trois surfaces accompagnées de leur vecteurs normaux.

Sur S_2 nous avons

$$\left\langle F_3\vec{1}_z, \vec{e}_n \right\rangle d\sigma = \left\langle F_3\vec{1}_z\,, \vec{1}_z \right\rangle dx\,dy,$$

et sur S_1 :

$$\left\langle F_3\vec{1}_z, \vec{e}_n \right\rangle d\sigma = \left\langle F_3\vec{1}_z\,, -\vec{1}_z \right\rangle dx\,dy.$$

Donc

$$\begin{aligned}
\oiint_{\partial D} \left\langle F_3\vec{1}_z, \vec{e}_n \right\rangle d\sigma \quad &= \quad \iint_{D_3} F_3(x, y, Z_2(x, y))\,dx\,dy - \iint_{D_3} F_3(x, y, Z_1(x, y))\,dx\,dy \\
&\overset{\text{linéarité de l'int.}}{=} \iint_{D_3} \Big[F_3(x, y, z)\Big]_{z=Z_1(x,y)}^{z=Z_2(x,y)} dx\,dy \\
&\overset{\text{Fubini}}{=} \iint_{D_3} \left(\int_{Z_1(x,y)}^{Z_2(x,y)} \frac{\partial F_3}{\partial z}(x, y, z)dz\right) dx\,dy \\
&\overset{\text{TFCDI}}{=} \iiint_D \frac{\partial F_3}{\partial z} dx\,dy\,dz.
\end{aligned}$$

■

10.8.4 ... et lorsque D est disséquable en un nombre fini de domaines normaux.

Il suffit de remarquer que sur les portions de surface "frontières intérieures" les normales extérieures aux deux sous-régions adjacentes mitoyennes sont opposées. Les flux au travers des frontières intérieures s'annulent donc, c'est-à-dire que, si les sous régions $D_1, \cdots, D_k$ dissèquent D,

$$\sum_{i=1}^{k} \oiint_{\partial D_i^+} \left\langle \vec{F}, d\vec{\sigma} \right\rangle = \oiint_{\partial D^+} \left\langle \vec{F}, d\vec{\sigma} \right\rangle.$$

Comme d'autre part

$$\sum_{i=1}^{k} \iiint_{D_i} \left\langle \vec{\nabla}, \vec{F} \right\rangle = \iiint_D \left\langle \vec{\nabla}, \vec{F} \right\rangle,$$

on déduit du fait que $\forall i = 1, \cdots, k : \iiint_{D_i} \left\langle \vec{\nabla}, \vec{F} \right\rangle = \oiint_{\partial D_i} \left\langle \vec{F}, \vec{d\sigma} \right\rangle$ que

$$\iiint_D \left\langle \vec{\nabla}, \vec{F} \right\rangle = \oiint_{\partial D} \left\langle \vec{F}, \vec{d\sigma} \right\rangle .$$

10.8.5 Application électrostatique

◇ Par les **lois de Maxwell**

$$\mathrm{div}\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho$$

où ρ est la densité de charges et $\vec{E}$ le champ électrique. Soit D une région normale et q la charge totale dans D.

$$\frac{1}{\varepsilon_0}q = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_D \rho = \iiint_D \mathrm{div}\vec{E} = \oiint_{\partial D^+} \left\langle \vec{E}, \vec{d\sigma} \right\rangle = \oiint_{\partial D} \left\langle \vec{E}, \vec{e}_n \right\rangle d\sigma.$$

On retrouve donc la **loi de Gauss**.

10.8.6 Equation de conservation

◇ Considérons une grandeur physique occupant un domaine ouvert $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^3$. Soit

$\rho(\vec{x}, t)$ sa densité en $\vec{x} \in \mathcal{U}$ au temps t,

$\vec{F}(\vec{x}, t)$ le vecteur flux associé en $\vec{x} \in \mathcal{U}$ au temps t.

L'équation de conservation (sous **forme intégrale**) est

$$\boxed{\forall \underset{\text{ad}-\text{hoc}}{D} \subseteq \mathcal{U} : \frac{d}{dt}\iiint_D \rho(\vec{x}, t) d\vec{x} = -\oiint_{\partial D^+} \left\langle \vec{F}, \vec{d\sigma} \right\rangle}$$

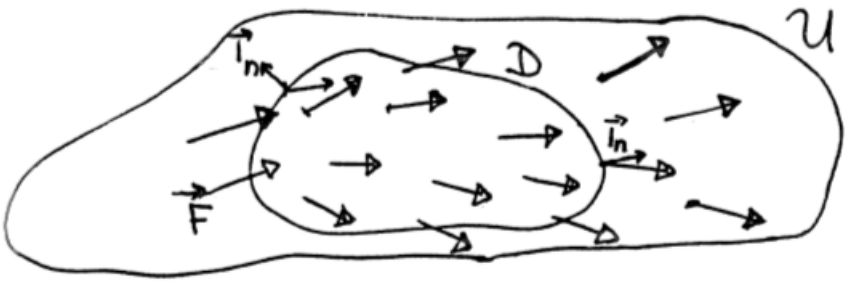


FIGURE 10.77 – Flux de $\vec{F}$ à travers D.

"la variation de la quantité totale dans D vaut le flux total **entrant** *dans D".*

En admettant qu'on puisse dériver sous le signe $\iiint_D$ et en appliquant le théorème de la divergence, on obtient :

$$\iiint_D \left(\frac{\partial}{\partial t}\rho(\vec{x}, t) + \mathrm{div}\vec{F}(\vec{x}, t) \right) d\vec{x} = 0.$$

Ceci étant vrai pour toute région D, nous en déduisons, grâce au Lemme 9.7.5, qu'il en résulte que

$$\boxed{\forall(\vec{x},t) \in \mathcal{U} : \frac{\partial}{\partial t}\rho(\vec{x},t) + \mathrm{div}\vec{F}(\vec{x},t) = 0}$$

qui est la **forme ponctuelle de l'équation de conservation.** ♢

10.8.7 Théorème de la divergence en toutes dimensions

On peut énoncer et démontrer ce théorème dans $\mathbb{R}^n$:

Théorème 10.42

$$\int_D d\omega = \oint_{\partial D^+} \omega$$

où

(i) $D \subseteq \mathbb{R}^n$ est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, dont le bord ∂D est une variété de dimension $n-1$ sur laquelle est définie un champ continu de vecteurs normaux normés extérieurs noté $\vec{e_n}$ (voir 10.1.6),

(ii) ω est une $(n-1)$-forme différentielle de classe C^1 sur $D \cup \partial D$, de sorte que $d\omega$ est une n-forme différentielle (la différentielle extérieure de ω).
Nous ne développerons pas ceci lorsque $n > 3$.

Remarquons néanmoins que :

— si $n = 2$, le théorème de la divergence n'est autre que le théorème de Green sous sa forme "normale" à savoir

$$\oint_{\partial D} \left\langle \vec{F}, \vec{e}_n \right\rangle ds = \iint_D \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} \right) dx\, dy,$$

— si $n = 1$, le théorème de la divergence n'est autre que le théorème fondamental du CDI :

$$[F]_a^b = \int_a^b F'.$$

Nous rassemblerons toutes ces versions sous une même écriture :

$$\oint_{\partial D} \left\langle \vec{F}, \vec{e}_n \right\rangle ds = \iint_D \mathrm{div}\vec{F} = \iint_D \left\langle \vec{\nabla}, \vec{F} \right\rangle.$$

♢ **Mikhail OSTROGRADSKI (1801-1862)**

FIGURE 10.78

étudia la physique et les mathématiques à l'Université de Kharkov. Il réussit les examens en 1820, mais le ministre des *affaires religieuses et de l'éducation (!)* exigea qu'il représente tous ses examens sous prétexte qu'il n'avait pas assisté à tous les cours de philosophie et de théologie. Ostrogradski refusa et n'obtint jamais son diplôme. D'autre part, le professeur de mathématiques d'Ostrogradski fut suspendu de son poste pour des raisons religieuses.
Ostrodgradski étudia à Paris, suivant des cours de Laplace, Fourier, Legendre, Binet et Cauchy et subit leur influence.
En 1828, il présenta à Saint Pétersbourg trois articles importants à l'Académie des Sciences,

où il fut élu dans la section des mathématiques appliquées. On lui doit des contributions importantes aux EDP, à la théorie de l'élasticité et à l'algèbre. Il rêvait de fournir une théorie unifiée de l'hydrodynamique, la théorie de l'élasticité, de la chaleur et de l'électricité, ce qu'il ne fit pas, mais il fit faire des progrès considérables dans bien des domaines. Il rédigea également d'excellentes et nombreuses notes de cours. Il établit les conditions qui permirent à l'Ecole de Tchebychev de se développer à Saint Petersbourg et peut être considéré comme le fondateur de l'école russe de mécanique théorique.

10.9 Théorème du laplacien

C'est le théorème de la divergence appliqué à un champ de gradients.

Théorème 10.43 Soit $\vec{F} = \vec{\nabla} u$ où $u : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est de classe C^2.
Alors le théorème de la divergence devient

$$\oint_{\partial D} \left\langle \vec{\nabla} u, \vec{e}_n \right\rangle ds = \iint_D \nabla^2 u,$$

où nous adoptons une notation semblable à celle pour $n = 2$.

Comme $\overrightarrow{\text{div}\,\text{grad}}\, u = \left\langle \vec{\nabla}, \vec{\nabla} u \right\rangle = \nabla^2 u =: \Delta u$ est le **laplacien** de la fonction u :

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}$$

et que

$$\left\langle \vec{\nabla} u, \vec{1}_n \right\rangle = \frac{\partial u}{\partial \vec{e}_n} =: \frac{\partial u}{\partial n}$$

est la dérivée de u selon le vecteur normal normé extérieur, nous pouvons écrire :

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{en 2D :} & \displaystyle\oint_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial n} ds = \iint_D \Delta u. \\ \text{en 3D :} & \displaystyle\oiint_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = \iiint_D \Delta u. \end{array}}$$

10.9.1 Interprétation du laplacien

$$\boxed{\Delta u|_{\vec{x}_0} = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\displaystyle\oint_{\partial B(\vec{x}_0, \varepsilon)} \frac{\partial u}{\partial n} ds}{\displaystyle\iint_{B(\vec{x}_0, \varepsilon)} 1}}$$

Le laplacien de u en $\vec{x}_0$ mesure donc la limite pour ϵ tendant vers 0 du quotient de l'intégrale sur une sphère S_ϵ de rayon ϵ centrée en $\vec{x}_0$ de la vitesse d'accroissement de u vers l'extérieur de S_ϵ (divisée) par la mesure de la boule bordée pour S_ϵ. En gros : le laplacien mesure le flux de grad u sortant d'une petite boule centrée en $\vec{x}_0$ par unité de mesure de la boule (volume en 3D, aire en 2D).
Nous y reviendrons au chapitre 25, consacré à l'EDP $\Delta u = f$.

10.9.2 Première formule de Green

C'est la formule qu'on obtient en appliquant le théorème de la divergence à $\vec{F} = v\vec{\nabla}u$.
On obtient :

$$\begin{array}{ll} \left\langle v\vec{\nabla}u, \vec{e}_n \right\rangle & = v\left\langle \vec{\nabla}u, \vec{e}_n \right\rangle = v\dfrac{\partial u}{\partial n} \\ \left\langle \vec{\nabla}, v\vec{\nabla}u \right\rangle & = \left\langle \vec{\nabla}v, \vec{\nabla}u \right\rangle + v\Delta u \end{array},$$

d'où

Proposition 10.44 $\displaystyle\oint_{\partial D} v\frac{\partial u}{\partial n}ds = \iint_D \left\langle \vec{\nabla}v, \vec{\nabla}u \right\rangle + \iint_D v\Delta u.$

Notons qu'en dimension 1, cette expression peut s'écrire :

$$[v(x)u'(x)]_a^b = \int_a^b v'(x)\cdot u'(x)dx + \int_a^b v(x)\ u''(x)dx.$$

10.9.3 Deuxième formule de Green

Celle-ci s'obtient facilement

— soit à partir de la première formule de Green, en y permutant les rôles de u et de v et en soustrayant de la formule originale,

— soit en appliquant le théorème de la divergence au champ de vecteurs

$$\vec{F} = u\vec{\nabla}v - v\vec{\nabla}u.$$

Dans les deux cas, il est évident que la formule obtenue sera **symétrique** en u et v.

$$\boxed{\oint_{\partial D}\left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right)ds = \iint_D (u\Delta v - v\Delta u).}$$

Cette formule s'avèrera particulièrement utile en dimensions 1,2 et 3.
Notons qu'en dimension 1, elle se réduit à :

$$[uv' - u'v]_a^b = \int_a^b (uv'' - u''v).$$

10.9.4 La formule de Green pour l'énergie

Ce n'est que le cas particulier $v = u$ de la première formule de Green. Autrement dit, c'est l'application du théorème de la divergence au champ de vecteurs $\vec{F} = u\vec{\nabla}u$.

$$\boxed{\oint_{\partial D} u\frac{\partial u}{\partial n}ds = \iint_D \|\vec{\nabla}u\|^2 + \iint_D u\Delta u.}$$

Physiquement, le terme $\displaystyle\iint_D \|\vec{\nabla}u\|^2$ représente souvent une **énergie** sur D.

10.9.5 Petite histoire d'une grande œuvre

♢ La volonté de fonder une démonstration rigoureuse du théorème de Stokes sur des bases solides est à l'origine de la naissance de Nicolas Bourbaki, brillant mathématicien polycéphale, essentiellement français, se régénérant régulièrement et volant extrêmement haut. Il en a résulté plus de 7000 pages très denses de théorèmes et démonstrations particulièrement abstraites et d'une lecture ardue, internationalement reconnues. Le but premier de fournir le manuel ultime d'enseignement de l'Analyse pour les écoles supérieures, lui, a été complètement loupé.
Voici une explication de cette note sybilline.

Henri CARTAN et André WEIL enseignent tous deux en cette année 1934 à l'université de Strasbourg. Le traité de mathématiques de GOURSAT, vieux de cinquante ans, commence à dater, après le profond bouleversement des mathématiques survenu au tournant du siècle. D'un commun accord, ils décident d'écrire un bon traité d'analyse à l'usage des étudiants. Aussi réunissent-ils une dizaine de mathématiciens français, presque tous normaliens, qui se rencontrent régulièrement dans un restaurant parisien pour élaborer ce projet. Il se rendent bientôt compte qu'il faut étendre leurs ambitions à l'algèbre et la géométrie, et décident de la création d'un groupe, lors d'un congrès qui se déroule à Besse-en-Chandesse en juillet 1935. Nicolas BOURBAKI est né !

Lors de cette réunion, les participants décident d'écrire un traité d'environ deux mille pages, axé sur les structures fondamentales pour l'étude de l'analyse, c'est-à-dire la théorie des ensembles, l'algèbre, la topologie, les espaces vectoriels topologiques et l'intégration. Soucieux de procéder à un travail collectif, tous les textes sont soumis à la critique du groupe et, pour éviter qu'un des membres ne se mette en avant, on décide d'écrire de manière anonyme sous le pseudonyme de Nicolas BOURBAKI. La composition du groupe n'est pas figée et aucun membre ne doit être âgé de plus de cinquante ans. Les principaux participants d'alors sont, outre CARTAN et WEIL, Jean DELSARTE, Claude CHEVALLEY et Jean DIEUDONNÉ.

Dans le traité qu'il rédige, BOURBAKI refonde totalement les mathématiques et fait plus une œuvre de mathématicien qu'une œuvre pédagogique, dans la mesure où ses réflexions amènent de nouveaux résultats en mathématiques, mais qu'en revanche ce traité est peu utilisable pour l'étudiant de licence. ||| euphémisme !

Annexe A

Orientation dans $\mathbb{R}^n$

A.1 Orientation dans $\mathbb{R}^n$

A.1.1 Orientation positive d'une région nD dans $\mathbb{R}^n$

Orientation positive d'une région 2D dans $\mathbb{R}^2$

Le couple de vecteurs $(\vec{a}, \vec{b})$ indépendants dans $\mathbb{R}^2$ est dit **orienté positivement** si la rotation envoyant $\vec{a}$ sur $\vec{b}$ dont l'angle est compris entre 0 et π *tourne dans le même sens* que celle d'angle $\frac{\pi}{2}$ qui envoie $\vec{1}_x$ sur $\vec{1}_y$.
Autrement dit, $(\vec{a}, \vec{b})$ est orienté positivement ssi la transformation linéaire appliquant $(\vec{1}_x, \vec{1}_y)$ sur $(\vec{a}, \vec{b})$ a, dans $\mathbb{R}^2$, une matrice de déterminant strictement positif, c'est-à-dire

$$\begin{vmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{vmatrix} > 0 \quad .$$

$(\vec{a}, \vec{b})$ est **orienté négativement** si ce déterminant est strictement négatif.

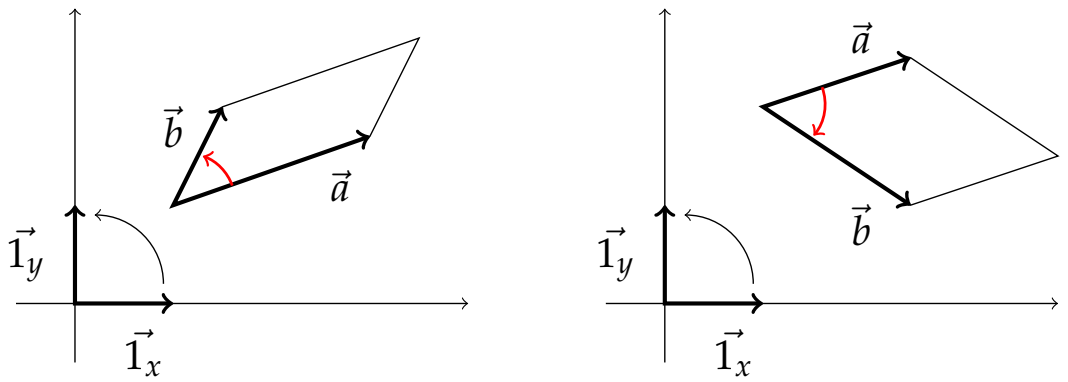


FIGURE A.1 – Orientations positive (droite) et négative (gauche) de $(\vec{a}, \vec{b})$.

Le **pavé orienté** $P(\vec{a}, \vec{b})$ sous-tendu par les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ (donnés dans cet ordre) est orienté **positivement** (respectivement négativement) ssi $(\vec{a}, \vec{b})$ l'est.

Plus généralement, si D est un ouvert borné dont la frontière ∂D est un chemin simple fermé rectifiable dans $\mathbb{R}^2$, **l'orientation positive de** D consiste à se donner, *en tout point de* D, *le sens de rotation* correspondant à la rotation appliquant $\vec{1}_x$ sur $\vec{1}_y$. Cela revient aussi à se donner un

sens de parcours pour ∂D (voir 10.6.1). On oriente de même des ouverts multiplement connexes disséquables en un nombre fini de morceaux tels que D ci-dessus.

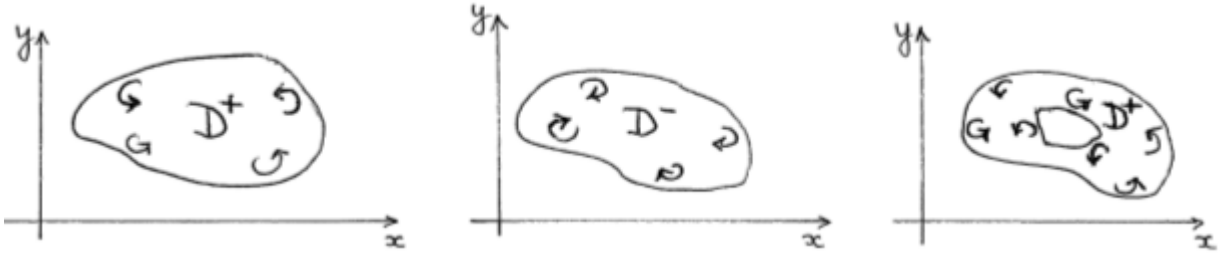


FIGURE A.2 – Orientations positive ou négative d'un ouvert borné D.

Dans un plan euclidien, les domaines tels qu'en 10.6.1 peuvent toujours être orientés, mais attention : la notion d'orientation positive n'a de sens que relativement à un repère, alors que la notion "*même orientation*" ou "*orientation opposée*" a un sens absolu.

L'aire algébrique d'un domaine D orienté est l'aire $\mu_2(D)$ de ce domaine s'il est orienté positivement, est l'opposé $-\mu_2(D)$ de l'aire de D si D est orienté négativement.

En particulier :

— **L'aire algébrique** du pavé (ou parallélogramme) orienté $P(\vec{a}, \vec{b})$ est $\begin{vmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{vmatrix}$. Elle est donc positive si P est orienté positivement, négative sinon.

— **L'aire algébrique** d'un domaine orienté D est $\mu_2(D)$ si D est orienté positivement et $-\mu_2(D)$ sinon.

— $\int_a^b f$ mesure l'aire algébrique de la région représentée ci-dessous, orientée de manière telle que le segment $[a, b] \times \{0\}$ soit parcouru dans le sens des x allant de a vers b.

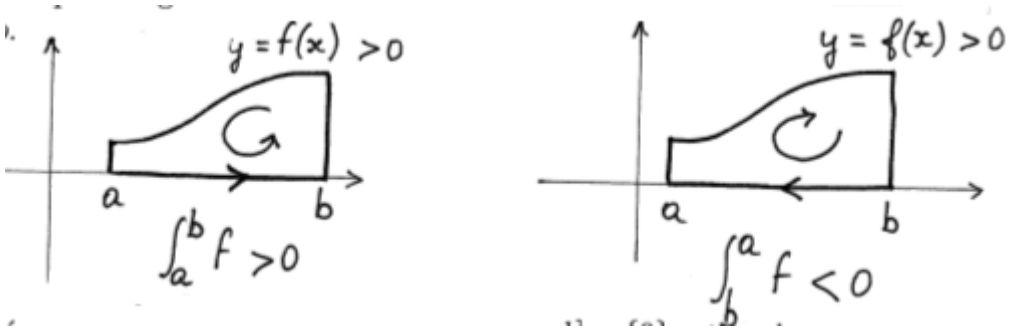


FIGURE A.3 – Aire algébrique d'un domaine selon son orientation.

Par contre, l'écriture $\int_{[a,b]} f$ indique que le segment $[a, b] \times \{0\}$ est toujours parcouru dans le sens des x croissants.

Orientation positive d'un triple de vecteurs dans $\mathbb{R}^3$

Il y a 2 types de repères orthonormés dans un espace euclidien de dimension 3 muni d'une unité de longueur, suivant l'orientation choisie. Si nous plongeons une main droite et une main gauche dans un tel espace, les repères dextrogyres $Oxyz$ sont tels qu'on peut indiquer respectivement les demi-axes des x positifs, des y positifs et des z positifs, par le pouce, l'index et le majeur d'une main droite, comme indiqué ci-contre ; les repères lévogyres sont les autres. Aucun déplacement de $\mathbb{R}^3$ ne permet d'envoyer un repère dextrogyre sur un repère lévogyre. Etant donné un repère orthonormé - ou, ce qui revient au même, un triple $(\vec{1}_x, \vec{1}_y, \vec{1}_z)$- on peut définir une orientation positive ou négative pour tout triple de vecteurs linéairement indépendants, comme indiqué ci-dessous.

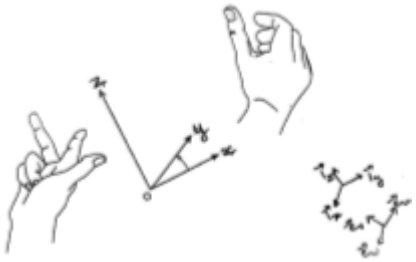


FIGURE A.4 – Repère orthonormé dextrogyre.

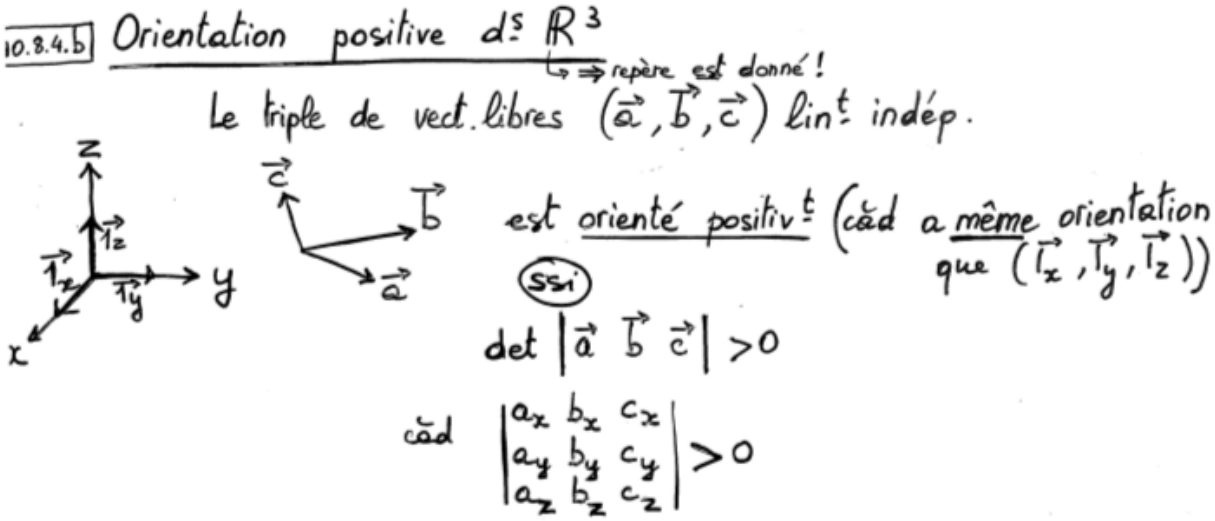


FIGURE A.5 – Condition mathématique pour qu'un triple de vecteurs linéairement indépendants ait une orientation positive.

♢ Pour les puristes, notons que dans un espace euclidien, on ne peut pas savoir ce qu'est un repère orthonormé tant qu'on ne s'est pas donné de longueur unité ; et que d'autre part, on ne sait pas ce qu'est un repère dextrogyre tant qu'on ne s'est pas donné une orientation (a priori, il y a 2 types de repères orthonormés orientés, équivalents par isométrie, mais inéquivalents par déplacements). La notion de main droite n'est pas incluse dans la notion d'espace euclidien . . .(Cette remarque est bien sûr réservée aux puristes !)

A.1.2 Orientation d'une surface S dans $\mathbb{R}^3$

Travaillons dans $\mathbb{R}^3$, dont la base canonique $(\vec{1}_x, \vec{1}_y, \vec{1}_z)$ forme un **trièdre dextrogyre**. a) Cas où S est une surface : S admet une paramétrisation régulière par $\vec{g}$, c'est-à-dire que $\vec{g} \in C^1$, est bijective de adh$D$ sur adh$S$, que $\vec{g}^{-1}$: adh$S \to$ adh$D$ est continue et que $d\vec{g}(u,v)$ est de rang maximal en tout point (u,v) de D.

Nous avons vu l'orientation de S induite par $\vec{g}$. Ceci implique que les vecteurs $\left.\dfrac{\partial \vec{g}}{\partial u}\right|_{(u,v)}$ et $\left.\dfrac{\partial \vec{g}}{\partial v}\right|_{(u,v)}$ sont linéairement indépendants (en particulier, ils sont non nuls). Ces vecteurs engendrent donc le plan tangent à $S = \vec{g}(D)$ au point $\vec{g}(u,v)$, et le produit vectoriel normé

$$\left.\frac{\dfrac{\partial \vec{g}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \vec{g}}{\partial v}}{\left\|\dfrac{\partial \vec{g}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \vec{g}}{\partial v}\right\|}\right|_{(u,v)}$$

définit un **vecteur unité normal** à S en $\vec{g}(u,v)$ (que nous noterons $\vec{N}$) tel que $\left(\dfrac{\partial \vec{g}}{\partial u}, \dfrac{\partial \vec{g}}{\partial v}, \vec{N}\right)$ forme un trièdre de même orientation que $(\vec{1}_x, \vec{1}_y, \vec{1}_z)$, i.e. dextrogyre puisque nous avons supposé l'espace coordonné par un trièdre dextrogyre (lévogyre dans le cas contraire).

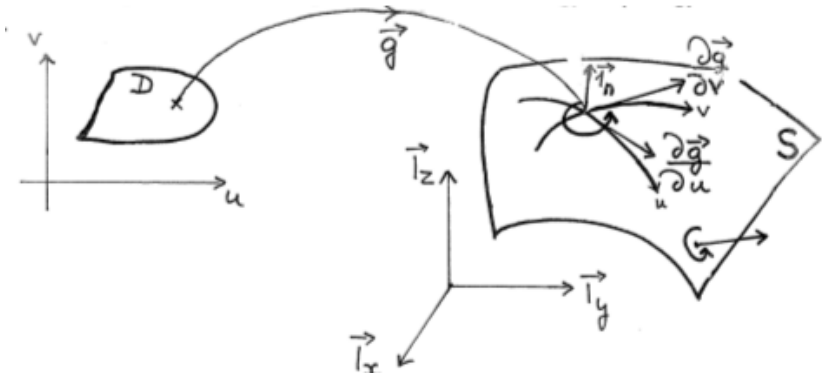


FIGURE A.6 – Trièdre $\left(\dfrac{\partial \vec{g}}{\partial u}, \dfrac{\partial \vec{g}}{\partial v}, \vec{N}\right)$ associé à $S = \vec{g}(D)$.

S est ainsi muni d'un champ de vecteurs normaux normés.
Ce champ

$$S \to \mathbb{R}^3 : (x,y,z) \mapsto \left.\vec{1}_n\right|_{(x,y,z)}$$

est continu, car l'application

$$D \to \mathbb{R}^3 : (u,v) \mapsto \left.\vec{1}_n\right|_{\vec{g}(u,v)}$$

est continue et $\vec{g}^{-1} : S \to D$ est continue.
La donnée de ce champ revient à se donner, en chaque point (x,y,z), un sens de rotation sur S (ou plus précisement dans le plan tangent π à S en (x,y,z)), à savoir la rotation d'angle $< \pi$ appliquant $\dfrac{\partial \vec{g}}{\partial u}$ sur $\dfrac{\partial \vec{g}}{\partial v}$.

Ces orientations locales de S dépendent bien sûr de la paramétrisation particulière. L'orientation ainsi définie est dite **induite par** la paramétrisaiton $\vec{g}$. Si nous notons S^+ la surface S

munie de cette orientation, alors S munie du champ de vecteurs normaux opposés est notée S^- ou $(S, -\vec{N})$. L'orientation de S^+ est parfois dite "positive" sans que ce qualificatif n'ait un sens absolu, car S est plongée dans $\mathbb{R}^3$.

A.1.3 Orientabilité d'une surface

Il existe dans $\mathbb{R}^3$ des surfaces **non orientables** , c'est-à-dire sur lesquelles on ne peut pas définir un champ continu de vecteurs normés normaux. De telles surfaces forcément n'admettent pas non plus de paramétrisation régulière. Intuitivement, ce sont des surfaces qui n'ont qu'un seul côté : si elles avaient 2 côtés, on pourrait en choisir un, y planter en tout point un vecteur normal normé, ce qui nous fournirait une orientation.
Les exemples les plus célèbres de surfaces non orientables sont :

— le **ruban de Möbius,** dont le bord forme une seule courbe simple fermée et

— la **bouteille de Klein,** dont le bord est vide : c'est une surface "fermée" ou "sans bord" .

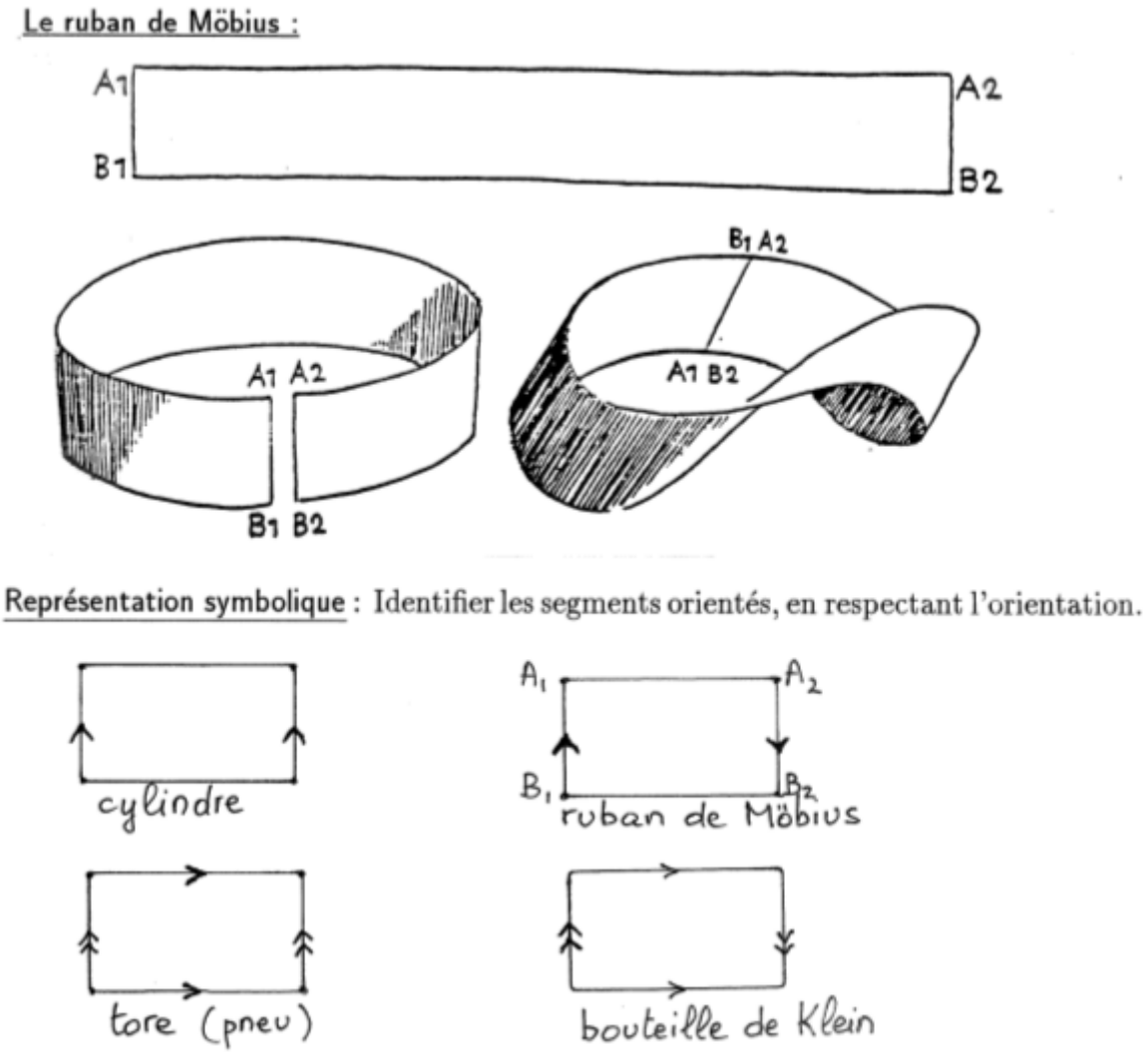


FIGURE A.7 – Exemples de surfaces non orientables.

b) Cas des surfaces lisses (voir sous-section suivante)

A.1.4 Surfaces lisses d'une surface dans $\mathbb{R}^3$

Nous avons vu que la paramétrisation classique de la sphère n'est pas régulière. Cet inconvénient peut être contourné en considérant des surfaces qui admettent au voisinage de chacun de leurs points une paramétrisation régulière. Plus prosaïquement, nous nous contenterons pour les problèmes que nous avons à traiter de travailler sur des morceaux de sphère, quitte à sommer le cas échéant les résultats obtenus.

Définition A.1
Une surface lisse S dans $\mathbb{R}^3$ est un sous-ensemble S non vide de $\mathbb{R}^3$ muni de **cartes** $(D_i, \vec{g}_i)_{i\in I}$ de manière telle que $\forall \vec{x} \in S$, il existe une boule ouverte $\vec{B}_x$ contenant $\vec{x}$ telle que $S \cap \vec{B}_x$ est une portion de surface paramétrée régulièrement par une restriction d'une de ces cartes (c'est-à-dire qu'il existe $j \in I$ telle que $\vec{g}_j : D_j \to \mathbb{R}^3$ est une paramétrisation régulière de $S \cap B_{\vec{x}}$) et que les changements de cartes sont différentiables. ■

Annexe B

Différentes mesures dans $\mathbb{R}^n$

B.1 m-mesure d'une m-variété dans $\mathbb{R}^n$.

B.1.1 Aire d'une portion de surface dans $\mathbb{R}^n$.

Une surface peut être plongée dans $\mathbb{R}^n$ $(n > 3)$, mais ne pas être plongeable dans $\mathbb{R}^3$, tout comme il existe des courbes gauches, c'est-à-dire des courbes non planes (c'est-à-dire non plongeables dans $\mathbb{R}^2$). Soit

$$\vec{g} : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^n : (u, v) \to \vec{g}(u, v) \text{ de classe } C^1.$$

Un raisonnement semblable à celui de la section 10.7.7 nous conduit à définir l'aire de $\vec{g}(D)$ par

$$\mu_2(\vec{g}(D)) := \int_D \mathrm{dil}_{\vec{g}}.$$

B.1.2 m-mesure d'une m-image dans $\mathbb{R}^n$.

La terminologie standard est celle de m-**variété** dans $\mathbb{R}^n$. Plus précisément,
soit

$$\vec{g} : D \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n : u \to \vec{g}(u) \text{ de classe } C^1.$$

Supposons $m < n$, int $D \neq \phi$, D compact et $\mu_m(\text{fr } D) = 0$.
Si $\vec{g} : \text{int } D \to \vec{g}(\text{int } D)$ est une bijection dont la réciproque est continue et que $d\vec{g}(\vec{u})$ est de rang maximal m pour tout $\vec{u} \in \text{int } D$, alors $\vec{g}(D)$ est une m-variété dans $\mathbb{R}^n$ $(n \geq m)$, c'est-à-dire un être "lisse de dimension m".
Un raisonnement semblable aux précédents nous porte à définir la m-mesure de $\vec{g}(D)$ par c'est-à-dire

Proposition B.1

$$\begin{aligned} \mu_m(\vec{g}(D)) &:= \int_D \mathrm{dil}_{\vec{g}} \\ &= \int \ldots \int_D \sqrt{\det {}^t(\text{mat } \frac{\partial(g_1, \ldots, g_n)}{\partial(u_1, \ldots, u_m)})(\text{mat } \frac{\partial(g_1, \ldots, g_n)}{\partial(u_1, \ldots, u_m)})}\, du_1 \ldots du_n. \end{aligned}$$

Nous retrouvons

— l'aire d'une portion de surface si $m = 2$

— la longueur d'un arc de courbe si $m = 1$.

B.2 Indépendance vis-à-vis de la paramétrisation.

La m-mesure de $\vec{g}(D)$ n'a de sens géométrique que si elle dépend bien sûr de l'ensemble de points $G := \vec{g}(D) \subseteq \mathbb{R}^n$, mais non de la paramétrisation choisie, c'est-à-dire de la fonction paramétrisante $\vec{g} : D \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$. On peut effectivement démontrer que si $\tilde{\vec{g}} : \tilde{D} \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ est une autre paramétrisation de G (équivalente à la précédente au sens défini plus bas), alors

$$\int_D \mathrm{dil}_{\vec{g}} = \int_{\tilde{D}} \mathrm{dil}_{\tilde{\vec{g}}}.$$

Définition B.1 On dit que

$$\begin{aligned} \vec{g} &: D \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n \\ \text{et } \tilde{\vec{g}} &: \tilde{D} \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

sont deux paramétrisations **équivalentes** de G ssi $G = \vec{g}(D) = \tilde{\vec{g}}(\tilde{D})$ et qu'il existe un difféomorphisme $\vec{\varphi} : D \to \tilde{D}$ (c'est-à-dire que $\vec{\varphi}$ est bijective et $\vec{\varphi}$ et $\vec{\varphi}^{-1}$ sont de classe C^1) tel que

$$\vec{g} = \tilde{\vec{g}} \circ \vec{\varphi}.$$

■

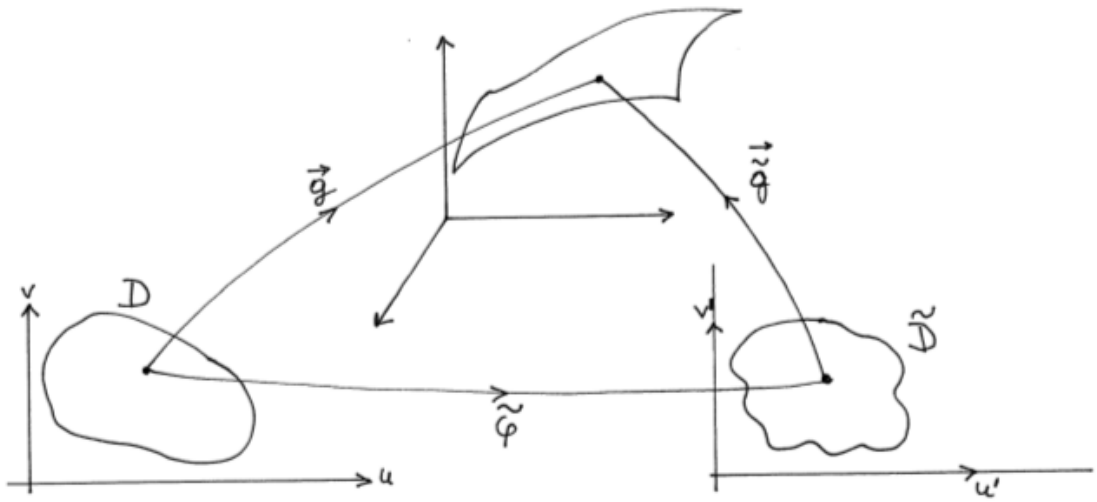


FIGURE B.1 – Deux paramétrisations équivalentes de G.

B.2.1 m-mesure d'une hypersurface dans $\mathbb{R}^{m+1}$.

Nous nous limiterons ici au cas d'une portion S d'hypersurface dont la projection parallèlement à l'un des axes de coordonnées est bijective sur un ouvert borné D à frontière m-négligeable dans $\mathbb{R}^m$. Une telle portion d'hypersurface peut être vue comme le graphe d'une fonction

$$\vec{f} : D \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}.$$

Supposons $\vec{f} \in C^1$, ce qui revient à supposer l'hypersurface lisse (plus précisément, c'est une m-variété dans $\mathbb{R}^{m+1}$). Mais cette portion d'hypersurface peut également être vue comme

l'image de la fonction

$$\vec{g} : D \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{m+1} : \vec{x} \to \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \\ f(\vec{x}) \end{pmatrix}$$

Cette vision nous ramène au cas précédent.

La matrice jacobienne de la fonction $\vec{g}$ paramétrisant S est

$$\text{mat}\,\frac{\partial(\vec{g})}{\partial(\vec{x})} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_1} & \dots & \dots & \dfrac{\partial f}{\partial x_m} \end{pmatrix}.$$

Le calcul du déterminant du produit de cette matrice avec sa transposée peut se faire en utilisant un raisonnement par induction et est suffisamment complexe pour que nous nous en dispensions (exercice d'algèbre). On obtient :

$$\begin{aligned} \text{dil}_{\vec{g}} &= \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_m}\right)^2} \\ &= \sqrt{1 + \|\vec{\nabla} f\|^2}. \end{aligned}$$

Grâce à la définition de la sous-section précédente, nous en déduisons que le graphe G de la fonction

$$f : D \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$$

a pour m-mesure (dans $\mathbb{R}^{m+1}$) :

$$\boxed{\mu_n(S) = \int_D \sqrt{1 + \|\vec{\nabla} f\|^2}.}$$

Notons que dans les cas particuliers

— $m = 1$, nous retrouvons la célèbre formule $\displaystyle\int_a^b \sqrt{1 + y'^2}$,

— $m = 2$, nous retrouvons la célèbre formule $\displaystyle\iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}$,

et que la formule encadrée ci-dessus est l'extrapolation la plus évidente de ces deux dernières formules.

B.3 Mesure d'une hypersphère.

▷ Le graphe de la fonction

$$f : B(\vec{o}, r) \subseteq \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R} : \vec{x} \to \sqrt{r^2 - \|\vec{x}\|^2}$$

est l'**hémisphère "supérieur"** H de la sphère $S_{n-1}(\vec{o}, r)$ de $\mathbb{R}^n$ ayant pour équation

$$x_1^2 + \ldots + x_{n-1}^2 + z^2 = r^2.$$

Comme

$$\sqrt{1 + \|\vec{\nabla} f\|^2}\Big|_{\vec{x}} = \frac{r}{\sqrt{r^2 - \|\vec{x}\|^2}},$$

$$\mu_{n-1}(H) = \int_{B(\vec{o},r)\subset\mathbb{R}^{n-1}} \frac{r}{\sqrt{r^2 - \|\vec{x}\|^2}}\, dx_1 \ldots dx_{n-1}.$$

Du fait que l'"équateur" a une $n-1$-mesure nulle, on en déduira

$$\mu_{n-1}(S(\vec{o}, 1)) = 2\mu_{n-1}(H).$$

▷ Effectuons le changement de variables

$$\vec{x} := r\vec{u}$$

associé à l'homothétie

$$\vec{h} : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^{n-1} : \vec{u} \to r\vec{u}$$

qui envoie

$$B(\vec{0}, 1) \text{ sur } B(\vec{0}, r)$$

et dont le jacobien est

$$\frac{\partial(r\vec{u})}{\partial(\vec{u})} = r^{n-1}.$$

On obtient ainsi

$$\begin{aligned}\int_{B_{n-1}(\vec{0},r)} \frac{r}{\sqrt{r^2 - \|\vec{x}\|^2}} dx_1 \ldots dx_{n-1} &= \int_{B_{n-1}(\vec{0},1)} \frac{r \cdot r^{n-1}}{\sqrt{r^2 - r^2\|\vec{u}\|^2}} du_1 \ldots du_{n-1}, \\ &= r^{n-1} \int_{B_{n-1}(\vec{0},1)} \frac{1}{\sqrt{1 - \|\vec{u}\|^2}} du_1 \ldots du_{n-1}.\end{aligned}$$

On conclut que

$$\boxed{\mu_{n-1}(S(\vec{o}, r)) = r^{n-1}\mu_{n-1}(S_{n-1}(\vec{0}, 1))}.$$

▷ Appliquons à présent le théorème de Fubini en tronçonnant le domaine d'intégration $B_{n-1}(\vec{0}, 1)$ en tranches perpendiculaires à l'axe ou_{n-1}. La section de niveau u_{n-1} est un disque de rayon $\rho := \sqrt{1 - u_{n-1}^2}$. Fubini nous assure que

$$\begin{aligned}\mu_{n-1}(S_{n-1}(\vec{0}, 1)) &= 2\int_{-1}^{1} du_{n-1} \int_{B_{n-2}(\vec{0},\rho)} \frac{du_1 \ldots du_{n-2}}{\sqrt{\rho^2 - u_1^2 - \ldots - u_{n-1-1}^2}} \\ &= \int_{-1}^{1} \frac{\mu_{n-2}(S(\vec{0}, \rho))}{\rho}\, du_{n-1} \\ &= \int_{-1}^{1} \rho^{n-3}\mu_{n-2}(S(\vec{0}, 1))\, du_{n-1} \\ &= \mu_{n-2}(S_{n-2}(\vec{0}, 1)) \int_{-1}^{1} \left(\sqrt{1 - u_{n-1}^2}\right)^{n-3} du_{n-1}.\end{aligned}$$

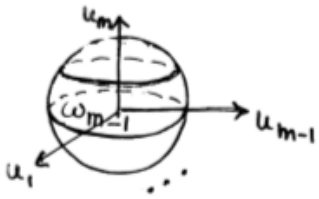


FIGURE B.2 – Dissection de la sphère en tranches perpendiculaires à ou_{n-1}.

Allégeons l'écriture en posant

$$\omega_m := \mu_m(S_m(\vec{0},1)),$$

c'est-à-dire en notant ω_m la m-mesure de la sphère unité dans $\mathbb{R}^{m+1}$. Ceci nous permet d'écrire, en utilisant la parité de l'intégrande :

$$\omega_m = 2\omega_{m-1}\int_0^1 (\sqrt{1-u_m^2})^{m-2}\,du_m.$$

En effectuant le changement de variables $u_m =: \cos\theta$ où $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$, puis en intégrant par parties, on obtient successivement

$$\begin{aligned}\omega_m &= \omega_{m-1} 2\int_0^{\pi/2} \sin^{m-1}\theta\,d\theta,\\ \omega_m &= \omega_{m-2}\,\frac{2\pi}{m-1}\end{aligned}$$

pour $m \geq 4$. Par récurrence et à partir de $\omega_1 = 2\pi$ et $\omega_2 = 4\pi$, on trouve ω_m pour tout $m \geq 1$. A savoir :

$$\mu_m(S(\vec{0},r)) = r^m\,\omega_m = r^m\,\frac{2\pi}{m-1}\cdot\frac{2\pi}{m-3}\cdot\ldots\cdot \begin{cases}\omega_1 = 2\pi & \text{si } m \text{ est impair}\\ \omega_2 = 4\pi & \text{si } m \text{ est pair .}\end{cases}$$

$$\mu_{n-1}(S(\vec{0},r)) = \begin{cases} r^{n-1}\dfrac{\pi^{\frac{n}{2}}}{(\frac{n}{2}-1)!} & \text{si } n \text{ est pair}\\[2ex] r^{n-1}\dfrac{2^{\frac{n+1}{2}}\pi^{\frac{n-1}{2}}}{(n-2)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 1} & \text{si } n \text{ est impair .}\end{cases}$$

B.4 La mesure d'une sphère de rayon r dérive de celle d'une boule de rayon r

Rappelons que dans $\mathbb{R}^n$:

$$\mu_n(B(\vec{0},r)) = r^n U_n \quad \text{où } U_n = \mu_n(B(\vec{0},1)),$$

$$\mu_{n-1}(S(\vec{0},r)) = r^{n-1}\omega_{n-1} \quad \text{où } \omega_{n-1} = \mu_{n-1}(S(\vec{0},1)).$$

U_n et ω_n ayant été calculés respectivement au chapitre 9 et ci-dessus, on vérifie immédiatement que $\omega_{n-1} = nU_n$, d'où la jolie formule

$$\frac{d}{dr}\mu_n(B(\vec{0}, r)) = \mu_{n-1}(S(\vec{0}, r)).$$

Nous comprendrons pourquoi au chapitre 13 (13.2.9).

Les différents types d'intégrales.

Espace ambiant		$\int_{\Gamma}$ 1D Intégrale curviligne	$\iint_{S}$ 2D Intégrale de surface	$\iiint_{D}$ 3D Intégrale sur un domaine $3D$
$\mathbb{R}^n$	O.	$\int_{\Gamma^+}\omega = \int_{\Gamma^+}\sum_{i=1}^{n} F_i(\bar{x})dx_i = \int_{\Gamma^+}\bar{F} = \int_{\Gamma} < \bar{F}, \bar{1}_t > ds$	$\iint_{S^+}\omega = \iint_{S^+}\sum_{ij} F_{ij}dx_i \wedge dx_j$	$\iiint_{D^+}\omega = \iiint_{D^+}\sum_{ijk} F_{ijk}dx_i \wedge dx_j \wedge dx_k$
	N.O.	$\int_{\Gamma} f ds = \int_{[\alpha,\beta]} f(\bar{\gamma}(t))\lVert\bar{\gamma}'(t)\rVert dt$	$\iint_{S} f d\sigma = \iint_{D} f(\bar{g}(u,v))\sqrt{\det{}^t(\frac{\partial(g_1,\ldots,g_n)}{\partial(u,v)})(\frac{\partial(g_1,\ldots,g_n)}{\partial(u,v)})}dudv$	pas vu
$\mathbb{R}^3$	O.	$\int_{\Gamma^+}\omega = \int_{\Gamma^+} F_1dx + F_2dy + F_3dz$ $= \int_{\Gamma} < \bar{F}, \bar{1}_t > ds$ - travail/circulation de $\bar{F}$ le long de Γ^+ C.P. $\int_{\Gamma^+} F_1dx = \int_{\alpha}^{\beta} F_1\frac{dx}{dt}dt$	$\iint_{S^+}\omega = \iint_{S^+} F_1dy \wedge dz + F_2dz \wedge dx + F_3dx \wedge dy$ $= \iint_{S^+} < \bar{F}, \bar{1}_n > d\sigma$ - flux de $\bar{F}$ au travers de S^+ C.P. $\int_{S^+} F_1dy \wedge dz = \iint_{D} F_1(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}dudv$	$\iiint_{D^+}\omega = \iiint_{D} f dx \wedge dy \wedge dz$ $= \iiint_{D} f dxdydz$
	N.O.	$\int_{\Gamma} f ds = \int_{[\alpha,\beta]} f(\ldots)\lVert\frac{d(x,y,z)}{dt}\rVert dt$ - mesure la quantité totale sur Γ si $f(x,y,z)$ est la densité au point (x,y,z) - mesure la longueur de Γ si $f \equiv 1$	$\iint_{S} f d\sigma = \iint_{D} f(\ldots)\lVert\frac{\partial(x,y,z)}{\partial u} \times \frac{\partial(x,y,z)}{\partial v}\rVert dudv$ $= \iint_{D} f(x(u,v),\ldots,\ldots)\sqrt{(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)})^2 + (\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)})^2 + (\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)})^2}dudv$ - mesure la quantité totale sur S si $f(x,y,z)$ est la densité au point (x,y,z) - mesure l'aire de S si $f \equiv 1$	$\iiint_{D} f = \iiint_{D} f(x,y,z)dxdydz$
$\mathbb{R}^2$	O.	$\int_{\Gamma^+}\omega = \int_{\Gamma^+} F_1dx + F_2dy$ $= \int_{\Gamma} < \bar{F}, \bar{1}_t > ds$ - mesure le travail/la circulation de $\bar{F}$ le long de Γ^+ C.P. $\int_{\Gamma^+} F_1dx = \int_{\alpha}^{\beta} F_1\frac{dx}{dt}dt$	$\iint_{D^+} f du \wedge dv = \iint_{D} f dudv$	
	N.O.	$\int_{\Gamma} f ds = \int_{[\alpha,\beta]} f(x(t),y(t))\lVert\frac{d(x,y)}{dt}\rVert dt$ $= \int_{[\alpha,\beta]} f(x(t),y(t))\sqrt{(\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2}dt$ - mesure la quantité totale sur Γ si $f(x,y)$ est la densité au point (x,y) - mesure la longueur de Γ si $f \equiv 1$	$\iint_{D} f = \iint_{D} f(u,v)dudv$ - mesure la quantité totale sur D si $f(u,v)$ est la densité au point (u,v) - mesure l'aire de D si $f \equiv 1$ - mesure le volume sous le graphe de f ($f \equiv 1$)	
$\mathbb{R}$	O.	$\int_{I^+} f = \int_{a}^{b} f(x)dx$ si $I = [a,b]$ où $a < b$		
	N.O.	$\int_{I} f = \int_{[a,b]} f(x)dx$ si $I = [a,b]$ - mesure la quantité totale de f sur I si $f(x)$ est la densité au point (x) - mesure la longueur de I si $f \equiv 1$ - mesure l'aire sous le graphe de f ($f \equiv 1$)		

O. : orientée N.O. : non orientée

Théorèmes fondamentaux du calcul différentiel et intégral vectoriel.

Espace ambiant	$\vert_a$ évaluation / $[\ ]_a^b$ différence	Théorème fondamental	$\int_\Gamma$ / $\oint_\Gamma$ int. curviligne	Théorème fondamental	$\iint_S$ / $\oiint_S$ int. surf	Théorème fondamental	$\iiint_D$ int. sur 1 domaine
$\mathbb{R}^n$	$[\omega]_{\gamma(\alpha)}^{\gamma(\beta)}$	$\xleftrightarrow{\text{Stokes}}$	$\int_\Gamma d\omega$ $\quad \oint_{\partial D} \omega$	$\xleftrightarrow{\text{Stokes}}$	$\iint_S d\omega$ $\quad \oiint_{\partial D} \omega$	$\xleftrightarrow{\text{Stokes}}$	$\iiint_D d\omega$
$\mathbb{R}^3$			$\oint_{\partial S} < \bar{F}, \bar{1}_t > ds$	$\xleftrightarrow{\text{Stokes}}$	$\iint_S < \bar{\nabla} \times \bar{F}, \bar{1}_n > d\sigma$	div., Gauss, Ostr. $\xleftrightarrow{}$	$\iiint_D < \bar{\nabla}, \bar{F} >$
					$\oiint_{\partial D} < \bar{F}, \bar{1}_n > d\sigma$	Green I $\xleftrightarrow{}$	$\iiint_D < \bar{\nabla} v, \bar{\nabla} u > + \iiint_D v \Delta u$
					$\oiint_{\partial D} v \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma$	Green II $\xleftrightarrow{}$	$\iiint_D (u \Delta v - v \Delta u)$
	$[f]_{\gamma(\alpha)}^{\gamma(\beta)}$	Th. Grad. $\xleftrightarrow{}$	$\int_\Gamma < \bar{\nabla} f, \bar{1}_t > ds$		$\oiint_{\partial D} (u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n}) d\sigma$		
$\mathbb{R}^2$			$\oint_{\partial D} < \bar{F}, \bar{1}_t > ds$	Green $\xleftrightarrow{}$	$\iint_D \bar{\nabla} \times \bar{F} = \iint_D (\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}) = \iint_D < \bar{\nabla} \times \bar{F}, \bar{1}_z >$		
			$\oint_{\partial D} < \bar{F}, \bar{1}_n > ds$	div. $\xleftrightarrow{}$	$\iint_D < \bar{\nabla}, \bar{F} > = \iint_D (\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y})$		
			$\oint_{\partial D} v \frac{\partial u}{\partial n} ds$	Green I $\xleftrightarrow{}$	$\iint_D < \bar{\nabla} v, \bar{\nabla} u > + \iint_D v \Delta u$		
			$\oint_{\partial D} (u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n}) ds$	Green II $\xleftrightarrow{}$	$\iint_D (u \Delta v - v \Delta u)$		
	$[f]_{\gamma(\alpha)}^{\gamma(\beta)}$	Th. Gradient $\xleftrightarrow{}$	$\int_\Gamma < \bar{\nabla} f, \bar{1}_t > ds$				
$\mathbb{R}$	$[f]_a^b$	T.F.C.D.I. $\xleftrightarrow{}$	$\int_a^b df = \int_a^b f' = \int_a^b \text{div} f$				
	$[vu']_a^b$	Green I $\xleftrightarrow{}$	$\int_a^b u'v' + \int_a^b vu''$				
	$[vu' - uv']_a^b$	Green II $\xleftrightarrow{}$	$\int_a^b vu'' - uv''$				

<u>Corollaires de Green I</u>

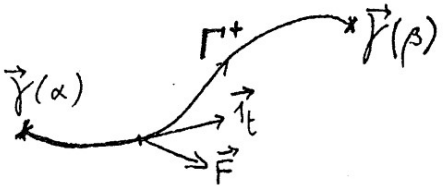
"Green solo" : $v = 1$

"Green énergique" : $v = u$

En trois clins d'oeil

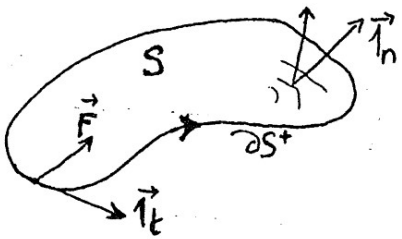
<u>Théorème du GRADIENT</u>

diff. de potentiel $\overset{\text{T.F. curv.}}{=}$ travail du gradient



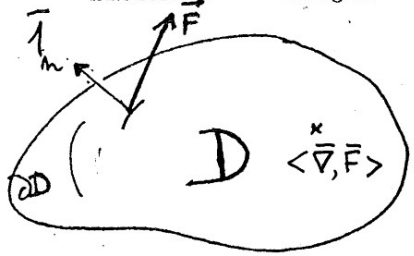
<u>Théorème du ROTATIONNEL</u>

circulation $\overset{\text{Stokes}}{=}$ flux du rotationnel



<u>Théorème de la DIVERGENCE</u>

flux sortant $\overset{\text{div.}}{=}$ divergence totale



Vector Operator Formulas in Cartesian, Cylindrical, and Spherical Coordinates

Formulas for Grad, Div, Curl, and the Laplacian

colatitude!

	Cartesian (x, y, z)	**Cylindrical** (r, θ, z)	**Spherical** (ρ, ϕ, θ)
	$\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, and $\mathbf{k}$ are unit vectors in the directions of increasing x, y, and z. F_x, F_y, and F_z are the scalar components of $\mathbf{F}(x, y, z)$ in these directions.	$\mathbf{u}_r$, $\mathbf{u}_\theta$, and $\mathbf{k}$ are unit vectors in the directions of increasing r, θ, and z. F_r, F_θ, and F_z are the scalar components of $\mathbf{F}(r, \theta, z)$ in these directions.	$\mathbf{u}_\rho$, $\mathbf{u}_\phi$, and $\mathbf{u}_\theta$ are unit vectors in the directions of increasing ρ, ϕ, and θ. F_ρ, F_ϕ, and F_θ are the scalar components of $\mathbf{F}(\rho, \phi, \theta)$ in these directions.
Gradient	$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}$	$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\mathbf{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\mathbf{u}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}$	$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial \rho}\mathbf{u}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \phi}\mathbf{u}_\phi + \frac{1}{\rho \sin\phi}\frac{\partial f}{\partial \theta}\mathbf{u}_\theta$
Divergence	$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$	$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rF_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial F_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$	$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho^2 F_\rho) + \frac{1}{\rho \sin\phi}\frac{\partial}{\partial \phi}(F_\phi \sin\phi) + \frac{1}{\rho \sin\phi}\frac{\partial F_\theta}{\partial \theta}$
Curl	$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$	$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \frac{1}{r}\mathbf{u}_r & \mathbf{u}_\theta & \frac{1}{r}\mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_r & rF_\theta & F_z \end{vmatrix}$	$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \frac{\mathbf{u}_\rho}{\rho^2 \sin\phi} & \frac{\mathbf{u}_\phi}{\rho \sin\phi} & \frac{\mathbf{u}_\theta}{\rho} \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial \theta} \\ F_\rho & \rho F_\phi & \rho \sin\phi F_\theta \end{vmatrix}$
Laplacian	$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$	$\nabla^2 f = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$	$\nabla^2 f = \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho^2\frac{\partial f}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2 \sin\phi}\frac{\partial}{\partial \phi}\left(\sin\phi\frac{\partial f}{\partial \phi}\right) + \frac{1}{\rho^2 \sin^2\phi}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}$

Vector Triple Products

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \cdot \mathbf{A} = (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B}$$

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C}$$

Vector Identities for the Cartesian Form of the Operator ∇

In the identities listed here, $f(x, y, z)$ and $g(x, y, z)$ are differentiable scalar functions and $\mathbf{u}(x, y, z)$ and $\mathbf{v}(x, y, z)$ are differentiable vector functions.

$$\nabla \cdot f\mathbf{v} = f\nabla \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla f = f\nabla \cdot \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)f$$

$$\nabla \times f\mathbf{v} = f\nabla \times \mathbf{v} + \nabla f \times \mathbf{v}$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) = 0$$

$$\nabla \times (\nabla f) = \mathbf{0}$$

$$\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$$

$$\nabla(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{v}) + \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{u})$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot (\nabla \times \mathbf{u}) - \mathbf{u} \cdot (\nabla \times \mathbf{v})$$

$$\nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{v} + \mathbf{u}(\nabla \cdot \mathbf{v}) - \mathbf{v}(\nabla \cdot \mathbf{u})$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{v}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) - (\nabla \cdot \nabla)\mathbf{v} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) - \nabla^2\mathbf{v}$$

$$(\nabla \times \mathbf{v}) \times \mathbf{v} = (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} - \frac{1}{2}\nabla(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})$$

10.2. Coordonnées curvilignes orthogonales : formulaire

1. **Notations**

$$\vec{x} = \vec{g}(u_1, u_2, u_3) \quad , \quad (u_1, u_2, u_3) \in D \subseteq \mathbb{R}^3 \quad , \quad \partial_i = \frac{\partial}{\partial u_i},$$

$$h_i := ||\partial_i \vec{g}|| \quad , \quad h := h_1 h_2 h_3 \quad , \quad \partial_i \vec{g} =: h_i \vec{e}_i \quad , \quad \vec{e}_i \neq \vec{1}_{x_i} \text{ !!!}$$

$$f : D \to \mathbb{R} : (u_1, u_2, u_3) \mapsto f(u_1, u_2, u_3)$$

$$\vec{F} : D \to \mathbb{R}^3 : (u_1, u_2, u_3) \mapsto \vec{F}(u_1, u_2, u_3) \quad , \quad \vec{F} = \sum_{i=1}^{3} \mathcal{F}_i \, \vec{e}_i = \sum_{i=1}^{3} F_i \vec{1}_{x_i}$$

2. Le système de coordonnées curvilignes (u_1, u_2, u_3) est dit **orthogonal** ssi

$$< \frac{\partial \vec{g}}{\partial u_i}, \frac{\partial \vec{g}}{\partial u_j} >= \quad 0 \text{ pour tout } i \neq j, \text{ ce qu'on } \underline{\text{suppose par la suite.}}$$

3. $d\vec{x} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \vec{g}}{\partial u_i} du_i = \sum_{i=1}^{3} h_i \vec{e}_i du_i$

   Les lignes de champ du champ de vecteurs $\vec{F}$ sont les courbes intégrales du système différentiel :

$$\frac{h_1 du_1}{\mathcal{F}_1} = \frac{h_2 du_2}{\mathcal{F}_2} = \frac{h_3 du_3}{\mathcal{F}_3} \text{ (voir chapitre 20)}$$

4. $dV = dx_1 dx_2 dx_3 = \left| \frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(u_1, u_2, u_3)} \right| du_1 du_2 du_3 = h_1 h_2 h_3 \, du_1 du_2 du_3$

$$\overrightarrow{\text{grad}} f = \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{h_i} (\partial_i f) \vec{e}_i$$

$$\text{div} \vec{F} = \frac{1}{h} \sum_{i=1}^{3} \partial_i \left(\frac{h}{h_i} \mathcal{F}_i \right)$$

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{F} = \frac{1}{h} \begin{vmatrix} h_1 \vec{e}_1 & h_2 \vec{e}_2 & h_3 \vec{e}_3 \\ \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 \\ h_1 \mathcal{F}_1 & h_2 \mathcal{F}_2 & h_3 \mathcal{F}_3 \end{vmatrix}$$

$$\Delta f = \text{div} \left(\overrightarrow{\text{grad}} f \right) = \frac{1}{h} \sum_i \partial_i \left(\frac{h}{h_i^2} \partial_i f \right)$$

L'essentiel du chapitre 10 en 3 pages.

$\boxed{10.1.7}$ **L'opérateur "nabla"** (ds $\mathbb{R}^3$)

$$\vec{\nabla} : f \longmapsto \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

fct scalaire $\longmapsto$ triple de fcts scalaires (chp vectoriel ds dom.)

Opérateur nabla :

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

$$= \text{"} \frac{\partial}{\partial x} \cdot \vec{1}_x + \frac{\partial}{\partial y} \cdot \vec{1}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{1}_z \text{"}$$

$\boxed{10.1.9}$

$$\operatorname{div} \vec{F} := \langle \vec{\nabla}, \vec{F} \rangle = \left\langle \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right), (F_1, F_2, F_3) \right\rangle$$

en 3D

$$= \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

$\boxed{10.1.11}$

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{F} := \vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{1}_x & \vec{1}_y & \vec{1}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}$$

en 3D

$$= \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right) \vec{1}_x + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\right) \vec{1}_y + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) \vec{1}_z$$

Les intégrales

- **de Riemann** : dom d'$\int^{\text{tion}}$ nD d^{s} $\mathbb{R}^n$

$$\int_{[a,b]} f|_x \, dx \quad , \quad \iint_D f|_{(x,y)} \, dx\,dy \, , \quad \iiint_D f|_{(x,y,z)} \, dx\,dy\,dz$$

- **curvilignes** dom d'$\int^{\text{tion}}$ 1D d^{s} $\mathbb{R}^{n\geq 2}$

$$\int_\Gamma f \, ds = \int_{[\alpha,\beta]} f|_{\vec{\gamma}(t)} \, \|\vec{\gamma}'(t)\| \, dt$$

$$\int_{\Gamma^+} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int_{\Gamma^+} \underbrace{\langle \vec{F}, \vec{ds} \rangle}_{\substack{\text{comp. tgle} \\ \text{(trav., circul.)}}} = \int_{[\alpha,\beta]} \langle \vec{F}|_{\vec{\gamma}(t)} , \vec{\gamma}'(t) \rangle \, dt$$

- **de surface** dom d'$\int^{\text{tion}}$ 2D d^{s} $\mathbb{R}^{n\geq 2}$

$$\iint_S f \, d\sigma = \iint_D f|_{\vec{g}(u,v)} \, \left\| \frac{\partial \vec{g}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{g}}{\partial v} \right\| du\,dv$$

$$\iint_{S^+} P\,dy\wedge dz + Q\,dz\wedge dx + R\,dx\wedge dy = \iint_{\substack{S^+ \\ (S,\vec{\Gamma}_n)}} \underbrace{\langle \vec{F} , \vec{d\sigma} \rangle}_{\substack{\text{comp. normale} \\ \text{bien orientée} \\ \text{(flux)}}} = \iint_D \langle \vec{F}|_{\vec{g}(u,v)} , \frac{\partial \vec{g}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{g}}{\partial v} \rangle \, du\,dv$$

Les théorèmes fondamentaux.

$\mathcal{D}$: $\mathbb{R}$: $$[f]_a^b = \int_a^b df$$

$\mathcal{D}$: $\mathbb{R}^n$: $$[f]_{\vec{a}}^{\vec{b}} = \int_{\Gamma_{\vec{a}\to\vec{b}}} df = \int_{\Gamma_{a\to b}} \langle \vec{\nabla} f, \vec{ds} \rangle$$

"th. du grad."

s/ son bord s/ chemin

---

s/ son bord s/ surface

Stokes

$\mathcal{D}$: $\mathbb{R}^2$: $$\boxed{\oint_{\partial D^+} \langle \vec{F}, \vec{ds} \rangle \underset{\substack{\text{Green}\\(\text{rot})}}{=} \iint_D \text{rot}\, \vec{F}}$$ th. de Green (rot en 2D)

$$\oint_{\partial D^+} P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)$$

$$\oint_{\partial D^+} \langle \vec{F}, \vec{e_n} \rangle ds \underset{\substack{\text{Green}\\(\text{div})}}{=} \iint_D \text{div}\, \vec{F}$$ th. de la div (en 2D)

$\mathcal{D}$: $\mathbb{R}^3$: $$\boxed{\oint_{\partial S^+} \langle \vec{F}, \vec{ds} \rangle = \iint_{S^+} \langle \overrightarrow{\text{rot}\, \vec{F}}, \vec{d\sigma} \rangle}$$ th. du $\overrightarrow{\text{rot}}$ (en 3D)

$\mathcal{D}$: $\mathbb{R}^3$. s/ son bord s/ dom. 3D

$$\boxed{\oiint_{\partial D} \langle \vec{F}, \vec{e_n} \rangle d\sigma = \iiint_D \text{div}\, \vec{F}}$$ th. de la div (en 3D)

En toute généralité et (apparente) simplicité :

$$\int_{\partial D} \omega = \int_D d\omega$$ Stokes !

Annexe C

Typographie des syllabi

En raison de la faible différence entre un *théorème*, une *proposition*, un *corollaire* et un *lemme*, la numérotation de ceux-ci est liée. Voici leurs délimiteurs respectifs :

Théorème C.1 — Titre.
Mon théorème.

Proposition C.2 — Titre.
Ma proposition.

Corollaire C.3 — Titre.
Mon corollaire.

Lemme C.4 — Titre.
Mon lemme.

La *définition* et les *exemples* ont eux une numérotation indépendante :

Définition C.1 — Titre.
Ma définition. ■

■ **Exemple C.1** Mon exemple. ■

Reste le *diamant* qui n'a pas de numérotation particulière (un supplément de mathématiques/d'histoire qui n'est pas matière d'examen).

◇ **Titre**
Mon diamant.

ULB

UNIVERSITÉ LIBRE DE BRUXELLES

IMPRIMÉ PAR LES PRESSES UNIVERSITAIRES DE BRUXELLES
DISTRIBUÉ PAR LE CERCLE POLYTECHNIQUE