§1. Аэродинамическая задача Ньютона о поверхности наименьшего сопротивления

В 1867 году вышла книга всем известного гениального математика и физика Исаака Ньютона - “Математические начала натуральной философии”, в которой он сформулировал ряд некоторых классических задач и интереснейших предположений, а также основные законы механики и законы движения планет. В общем и целом, даже на сегодняшний день, никем не ещё было написано более значимого научного труда. Во втором томе этого произведения, под названием «О движении тел», Исаак Ньютон и сформулировал свою аэродинамическую задачу. Аэродинамическая задача состоит в том, чтобы отыскать форму поверхности, которая бы испытывала наименьшее сопротивление при движении в определённой неподвижной среде. Тем не менее это очень важный вопрос: какая форма самая обтекаемая? Этот вопрос имеет огромную важность в науке, технике, и при конструировании, например, самолётов и ракет.

Однако если мы будем наблюдать за окружающим нас миром, то очень быстро поймём, что ответ не очевиден. Как вся движущаяся техника имеет разную форму, так и в природе встречаются совершенно разные объекты. Выходит, что ответ на этот вопрос необходимо искать аналитически. Рассмотрим строгую формулировку аэродинамической задачи, которую дал сам Ньютон в своей книге.

Аэродинамическая задача. *Среди всех поверхностей, в основании которых находится круг заданного радиуса и которые имеют заданную высоту, найти ту, которая испытывает наименьшее сопротивление при поступательном движении в однородной неподвижной среде.*

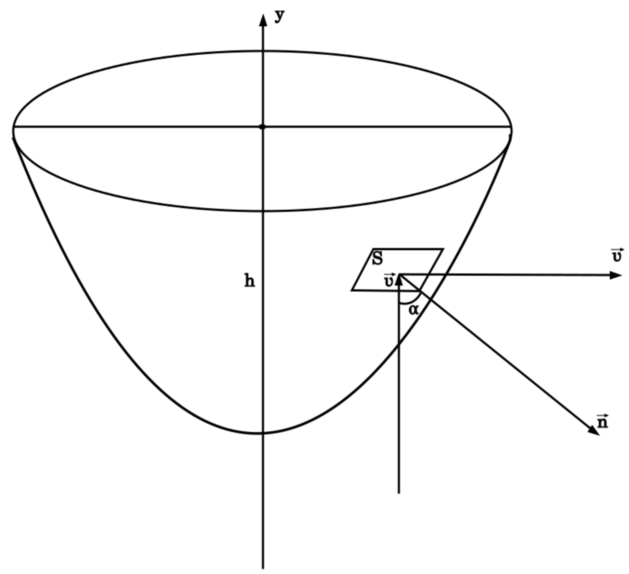
Замечания/Допущения:

1) Поскольку маленькая поверхность будет иметь малое сопротивление, то надо строго обозначить среди поверхностей какого размера необходимо искать самую обтекаемую. Будем считать, что основание поверхности — это круг радиуса R, а высота поверхности равна h.
2) Движение считать поступательным: тело движется в одном направлении и не вращается.
3) Среда, в которой движется тело однородна (одинакова в любой точке пространства) и неподвижна.
4) Среда разряжена (молекулы находятся на расстояниях много больших их размеров), молекулы не сталкиваются.
5) При ударе молекулы о поверхность угол падения равен углу отражения

Рассмотрим поверхность, которая удовлетворяет условию задачи. Разделим поверхность на участки малых площадей и рассчитаем силу сопротивления каждого такого участка.

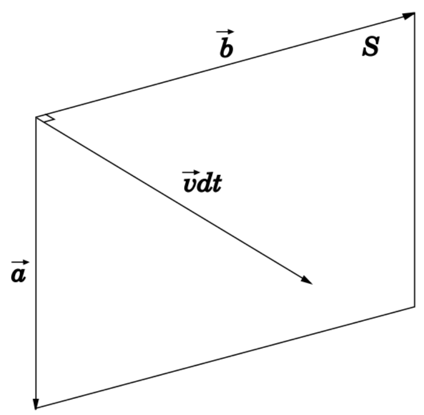
Утверждение. Сила сопротивления участка поверхности прямо пропорциональна произведению его площади на куб косинуса угла между вектором нормали, проведённым к этому участку, и вертикальной осью.

Док-во:



Запишем второй закон Ньютона для одной частицы: $F_y = \frac{dp_y}{dt}(1)$, тогда изменение импульса частицы dp_y равно: $dp_y = 2m\upsilon(1-\cos 2\alpha)(2)$, а значит:

$$F_y = \frac{dp_y}{dt} = \frac{2m\upsilon(1-\cos 2\alpha)}{dt}(3)$$



Количество всех частиц, которые ударятся об участок за время *dt* можно найти, учитывая тот факт, что все они находятся на расстоянии, которое могут преодолеть за время dt, то есть в некотором объёме *dV*. Пусть вектора ***a, b*** подобраны таким образом, что их векторное произведение равно площади участка, тогда имеют место формулы (4), (5), (6).

$$\vec{\upsilon}\, dt[\vec{a}, \vec{b}] = dV(4) \qquad dV = S\upsilon\, dt\, \rho \cos\alpha(5)$$

$$N = S\upsilon\, dt\, \rho \cos\alpha(6)$$

следовательно результирующая сила:

$$F = 2m\upsilon^2 \rho\, Scos^3 \alpha(7)$$

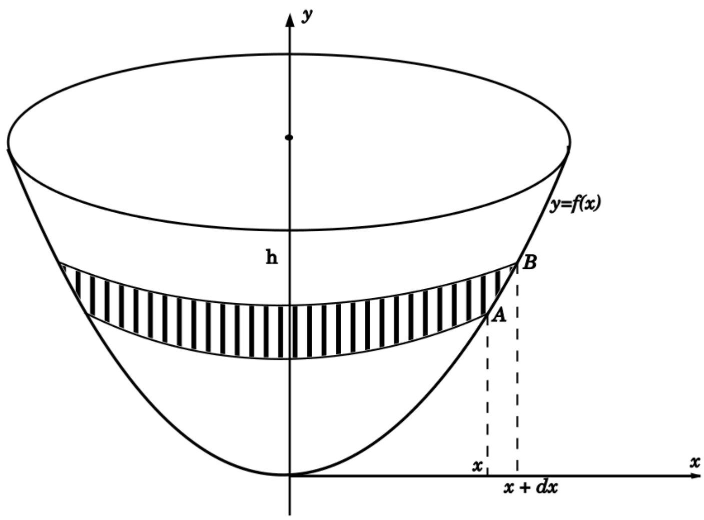
Таким образом утверждение доказано.

Из полученной формулы также следует и то, что *сила сопротивления пропорциональна массе частиц на квадрат скорости*, т. е. суммарной кинетической энергии тех частиц, что ударились об стенку.

Далее проецируем рассматриваемый участок поверхности на плоскость параллельную основанию и проходящую через крайнюю точку поверхности, тем самым выражение для силы приобретает вид: $F = 2m\upsilon^2 \rho S' \cos^2\alpha(8)$

Решая эту задачу, Ньютон сделал также одно важное допущение — он был убеждён, что искомая поверхность обязательно должна быть выпуклой, более того должна быть ещё и фигурой вращения. Из-за чего его решение сводится к тому, чтобы найти такую выпуклую на [0, R] функцию, которая бы при повороте вокруг вертикальной оси задавала бы искомую поверхность.

Рассмотрим решение Ньютона:



Поскольку отрезок AB маленький, прямая AB близка к касательной к графику функции в точке A. Разбив теперь график функции *f* на маленькие отрезки и сложив силы сопротивления колец по всем отрезкам переходим к интегралу:

$$F=4\pi\rho\upsilon^2\int_0^R x\cos^2\alpha(x)dx\,(9) \qquad \cos^2\alpha=\frac{1}{1+tg^2\alpha}=\frac{1}{1+(f'(x))^2}\,(10) \quad \text{т. е.}$$

$$F=4\pi\rho\upsilon^2\int_0^R\frac{x}{1+(f'(x))^2}\,(11)$$

Тем самым среди всех неубывающих на [0, R] функций необходимо найти ту, для которой интеграл (11) наименьший при условии, что высота искомой поверхности h, т. е. :

$$\begin{cases}\displaystyle\int_0^R\frac{x}{1+(f'(x))^2}dx\to min\\ \displaystyle\int_0^R f'(x)dx=h\end{cases}(12)$$

Задача поставленная системой (12) входит в класс задач с ограничениями, когда необходимо найти минимум (максимум) некоторой величины (целевой функции) при заданных ограничениях. Такие задачи решаются при помощи метода множителей Лагранжа.

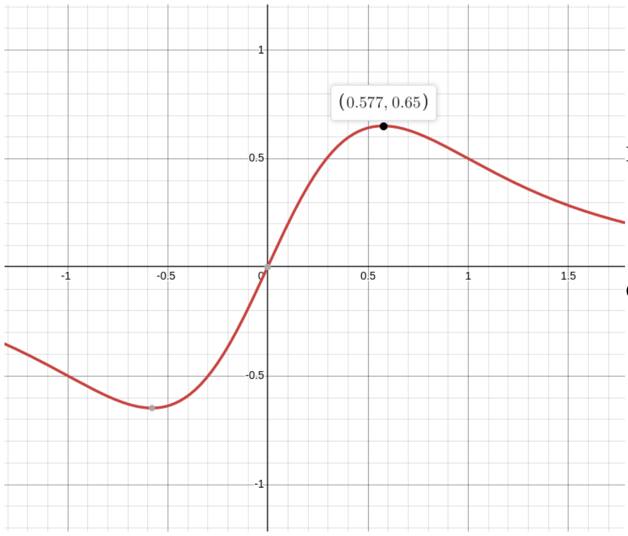
Рассмотрим сумму целевой функции с проведением ограничения на некоторый параметр *p (*Обозначим *f'(x) = u) :* $\displaystyle\int_0^R\left(\frac{x}{1+(u)^2}+pu\right)dx\,(13)$

Число p ещё предстоит найти. Известно только, что $p \geqslant 0$, иначе минимального у интеграла (13) просто не будет. Далее введём обозначение:

$$L(u)=\frac{x}{1+u^2}+pu, x\in[0,R] (14) \qquad \frac{dL(u)}{du}=\frac{-2xu}{(1+u^2)^2}+p (15)$$

, пусть $L'(u) = 0$, тогда

Рассмотрим $g(u)=\frac{2u}{(1+u^2)^2} (16)$, далее пусть $g'(u) = 0$, т. е.:



Максимум функции $g(u)$ в точке $\frac{1}{\sqrt{3}}\approx 0{,}577$, тогда $g(u)\approx 0{,}65$. Если минимум функции L достигается в точке $u\neq 0$, то выполнены условия:

$L'(u)=0, L(u)\leqslant L(0)$, что тоже самое, что и:

$$\frac{p}{2}=\frac{2u}{(1+u^2)^2}, \quad \frac{1}{1+u^2}+\frac{p}{x}\leqslant 1 \; (17)$$

, т. е.

$$\frac{1}{1+u^2}+\frac{2u^2}{(1+u^2)^2}\leqslant 1 \Rightarrow u\geqslant 1 \; (18)$$

$$x=\frac{p}{2}(u^3+2u+\frac{1}{u}), \; u\geqslant 1 \; (19)$$

Таким образом величина x теоретически может быть найдена из уравнения (19) . Функция в правой части уравнения возрастающая по переменной u, а значит её минимум находится в точке $u = 1$ и равен $2p$. Следовательно решение уравнения единственно при любом $x\in[2p,+\infty)$, а это означает, что уравнение устанавливает взаимно однозначное соответствие между точками $x\in[2p,+\infty)$ и $u\in[1,+\infty)$. Для каждого $x > 2p$ минимум функции $L(u)$ достигается при u > 1, для каждого $x\in[0,2p)$ минимум достигается в $u = 0$, а при $x = 2p$ минимум достигается в двух точках: $u = 0$ и $u = 1$. В итоге мы получили следующее описание функции $u(x)$: при $x\leqslant 2p$ функция $u(x) = 0$, а при $x > 2p$ значение $u(x)$ ищется из уравнения (15): оно является корнем большим единицы. Отсюда можно получить описание функции $f(x)$: на отрезке $[0, 2p]$ функция f равна нулю, а на отрезке $[2p, R]$ её производная является корнем уравнения (15), большим единицы.

Далее выразим координаты (x, f(x)) точек кривой. Первая координата x задаётся явно уравнением (19). Для определения $f(x)$ используем правило вычисления производной сложной функции:

$$f'(x)=f'(u)u'(x) \Rightarrow f(u)=ux'(u) \; (20) \qquad \frac{dx(u)}{du}=\frac{p}{2}(3u^2+2-\frac{1}{u^2}) \; (21)$$

, тогда

$$f'(u)=ux'(u)=\frac{p}{2}(3u^3+2u-\frac{1}{u}) \; (22) \qquad f(u)=\int\frac{p}{2}(3u^3+2u-\frac{1}{u})du (23)$$

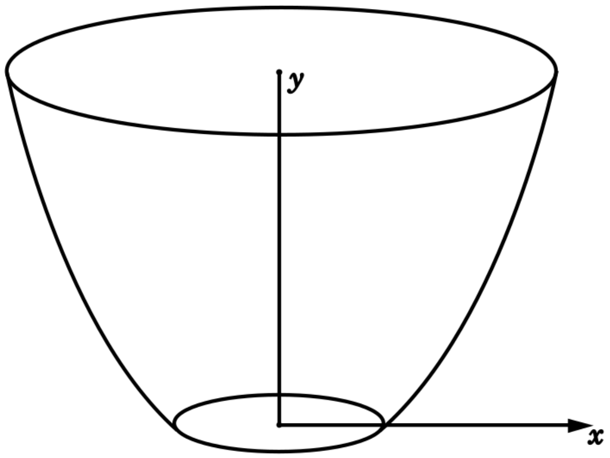
$$f(u)=\frac{p}{2}(\frac{3u^4}{4}+u^2-\ln(u)+C) \; (24)$$

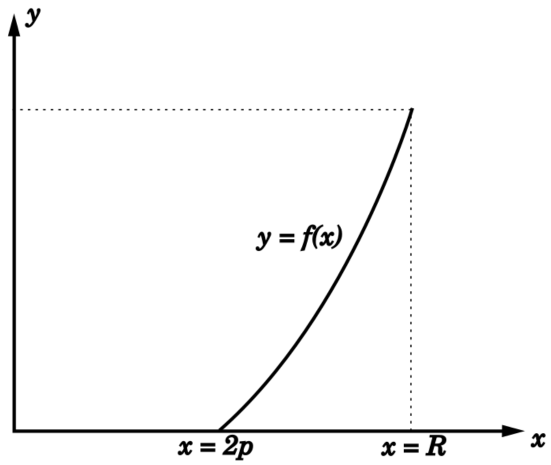
, где C - константа интегрирования.

Используем тот факт, что при $u = 1$ функция имеет излом, тогда подставив это значение в формулу (24) получим $C=-\frac{7}{4}$, тогда $y = f(x)$:

$$\begin{cases} x=\frac{p}{2}\left(u^3+2u+\frac{1}{u}\right) \\ y=\frac{p}{2}\left(\frac{3u^4}{4}+u^2-\ln(u)-\frac{7}{4}\right) \end{cases} \quad (25)$$

Таким образом функция, которую получил Ньютон, задаёт поверхность следующей формы:





§2. Теорема Минковского о выпуклых многогранниках

Это одна из красивейших теорем о многогранниках, которая наряду с теоремами Коши и Эйлера является основополагающей в теории многогранников. Её доказательство в 1897 году представил Герман Минковский с помощью метода множителей Лагранжа, а позже в 1937 году другим методом эту теорему доказал российский математик Александров.

Определение. *Выпуклый многогранник* — это пространственное тело, являющееся пересечением конечного числа полупространств.

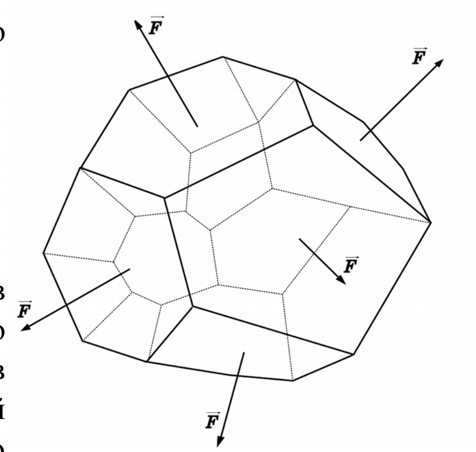
Пусть в пространстве существует конечное число плоскостей $\{H_1, H_2, \dots H_n\}$, таких что каждая из них разбивает пространства на два полупространства (обычно обозначают H_i^+ и H_i^+), тогда выпуклым многогранником называется $\cap_i H_i^+$. Многогранник также называют конечным если он содержится в каком либо шаре. Из определения многогранника следует, что это пространственное тело необязательно конечно, так как определению, в частности, удовлетворяет и такая форма как, например, трёхгранный угол.

Определение. Рассмотрим грань F_i многогранника G и проведём к этой грани вектор $\vec{F}_i$, перпендикулярный грани, направленный от многогранника во внешнюю часть пространства, и модуль которого численно равен площади этой грани («модуль равен площади» означает, что при выбранной единице измерения численное значение вектора равно площади соответствующей грани). Тогда множество всех таких векторов нормали называется *ежом* данного многогранника.

Теорема 1. Для выпуклого конечного многогранника выполняются следующие условия:

1) векторы его ежа не лежат в одной плоскости.

2) сумма всех векторов ежа есть нулевой вектор.



Доказательство.

1) (от обратного) пусть все векторы ежа лежат в одной плоскости, тогда все грани полученного многогранника будут перпендикулярны плоскости, в которой лежат векторы ежа, а следовательно такой многогранник не может быть помещён в какой-либо шар, а значит не может быть конечным.

2) Возьмём внутри многогранника точку O и разделим многогранник на пирамиды таким образом, что каждая пирамида своим основанием будет иметь грань многогранника, а вершиной точку O. Обозначим за h_i высоту i-той пирамиды, тогда объём многогранника будет равен:

$$V(G)=\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{n} s_i h_i \quad (1)$$

Аналогично точке O, возьмём внутри многогранника точку O’ и по такому же правилу разделим многогранник на пирамиды, только уже с вершиной в точке O’. Вектором $\vec{a}$ обозначим вектор $\vec{OO'}$, а через α_i угол между вектором $\vec{a}$ и вектором $\vec{F}_i$, тогда объём многогранника равен:

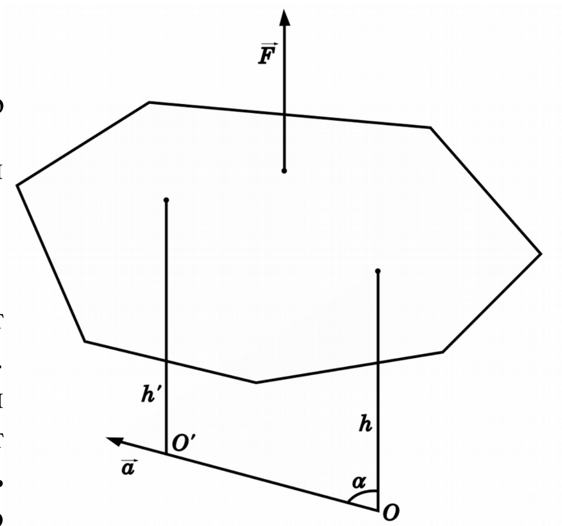
$$V(G)=\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{n} s_i h'_i \quad (2)$$

Рассмотри утроенную разность объёмов:

$$s_i\vec{h'}_i - s_i\vec{h}_i \ = \ |\vec{F}_i|(h'_i - h_i) \ = |\vec{F}_i|\vec{OO}'\cos\alpha_i = \vec{F}_i\vec{a} \quad (3)$$

Из уравнения (3) следует:

$\sum_{i=0}^{n}(\vec{F}_i\vec{a}) \ = \ (\sum_{i=0}^{n}\vec{F}_i)\vec{a} \ = \ 0 \quad (4)$, где вектор $\vec{a}$ - это вектор соединяющий любые две точки внутри многогранника.



Таким образом теорема доказана.

Второй пункт теоремы также имеет любопытную физическую интерпретацию. Предположим, что многогранник — это некоторая жёсткая физическая оболочка, внутри которой заперт газ, тогда сила давления газа на *i*-тую стенку есть вектор нормали опущенный на эту стенку и по модулю равный площади этой стенки. Из физики нам известно что суммарное давление должно быть равно нулю, иначе существовала бы сила способная привести такое тело в движение, однако ничего подобного не происходит. Теперь перейдём к самой теореме Минковского:

Теорема 2 (Г. Минковский). Пусть $\{\vec{F}_i\}$ множество векторов в пространстве, отложенных от одной точки, такое, что:

1) все векторы множества не лежат в одной плоскости

2) $\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i \ = \ 0$

Тогда существует конечный выпуклый многогранник *G*, ёж которого есть множество векторов $\{\vec{F}_k\}$. Более того многогранник *G* определён однозначно с точностью до параллельного переноса.

Замечания:

1) Вообще говоря теорема Минковского о выпуклых многогранниках верна для пространства любой размерности, просто в этом случае модуль вектора будет равен объёму фигуры в гиперграни, которую он задаёт (например: в двумерном пространстве вектор будет равен длине отрезка, т. е. стороне многоугольника, а в четырёхмерном - объёму трёхмерной грани четырёхмерного многогранника).

2) В n-мерном пространстве сохраняется и то, что все векторы ежа многогранника обязательно не должны все вместе лежать в пространстве размерности *n-1*.

Так как доказательство теоремы Минковского для трёхмерного пространства не элементарно, то я приведу доказательство в двумерном пространстве.

Доказательство.

Пусть $\{\vec{F}_k\}$ - множество векторов на плоскости, отложенных от одной точки, таких, что все они не лежат на одной прямой и их сумма есть нулевой вектор. Тогда необходимо доказать, что существует многоугольник, для которого множество векторов $\{\vec{F}_k\}$ является ежом.

Не уменьшая общности можно предполагать, что векторы уже занумерованы в порядке обхода искомого многоугольника по часовой стрелке так, что между векторами $\vec{F}_i$ и $\vec{F}_{i+1}$ нет никакого другого вектора из множества $\{\vec{F}_k\}$. Теперь отложим от конца вектора $\vec{F}_1$ вектор, равный вектору $\vec{F}_2$, а от конца вектора $\vec{F}_2$ вектор равный вектору $\vec{F}_3$ и так далее. Пусть точки $A_1, A_2, \ldots A_k$ расставлены таким образом, что A_1 является концом вектора $\vec{F}_1$, а A_2 концом вектора, отложенного от $\vec{F}_1$, и равного $\vec{F}_2$. Таким образом: $\vec{OA}_2=\vec{F}_1+\vec{F}_1$, $\vec{OA}_i=\vec{F}_1+\vec{F}_2+\ldots+\vec{F}_i$, $\vec{OA}_k=\sum_{i=1}^{k}\vec{F}_i=0$. Тогда ломанная $OA_1A_2\ldots A_k$ замыкается в многоугольник, который при повороте на угол равный $\frac{\pi}{2}$ при наложении равен искомому многоугольнику, т. к. модуль каждого вектора из множества $\{\vec{F}_k\}$ равен стороне которую он задаёт. Осталось доказать, что полученный многоугольник выпуклый. Согласно определению выпуклого многоугольника все его точки необходимо должны лежать по одну сторону от любой прямой проведённой через любые две соседние вершины. Тогда достаточно будет доказать, что все векторы множества $\{\vec{F}_k\}$ лежат по одну сторону от любой прямой, такой что на ней будет лежать некоторый вектор из этого множества.

От обратного, проведём прямую через вектор $\vec{F}_{i-1}$, такую, что вектор $\vec{F}_{i-1}$ является для неё направляющим. Тогда пускай все векторы из множества $\{\vec{F}_k\}$, кроме одного $\vec{F}_i$, лежат по одну сторону от заданной прямой. Так как векторы пронумерованы по часовой стрелке, то угол на который необходимо повернуть по часовой стрелке вектор $\vec{F}_{i-1}$ до совпадения по направлению с вектором $\vec{F}_i$, меньше π. Однако, т. к. вектор $\vec{F}_i$ лежит по другую сторону от прямой, проходящей через $\vec{F}_{i-1}$, то этот угол будет больше π и тогда вектор $\vec{F}_i$ должен иметь другой номер, чего не может быть. Это условие выполняется для любого вектора из множества $\{\vec{F}_k\}$, а значит искомый многоугольник выпуклый.

Основным приложением теоремы Минковского в теории многогранников является центральная симметрия.

Определение. Геометрическим движением фигуры *G* называется такое отображение этой фигуры в пространстве, при котором вектор $\vec{A_1A_2}$, принадлежащий фигуре *G*, переходит в равный ему вектор $\overrightarrow{A'_1 A'_2}$, принадлежащий фигуре *G'*. Говорят, что фигура *G'* получена геометрическим движением фигуры *G*. ($\tau: G \rightarrow G'$)

Определение. Пусть точка *O* — некоторая точка пространства, тогда центральной симметрией называется такое геометрическое движение, при котором отрезок A_1A_1', где A_1 — точка фигуры *G*, а A_1' — точка фигуры *G',* делится точкой *O* пополам.

Теорема 3. Если ёж многогранника G центрально симметричен, то и многогранник G центрально симметричен.

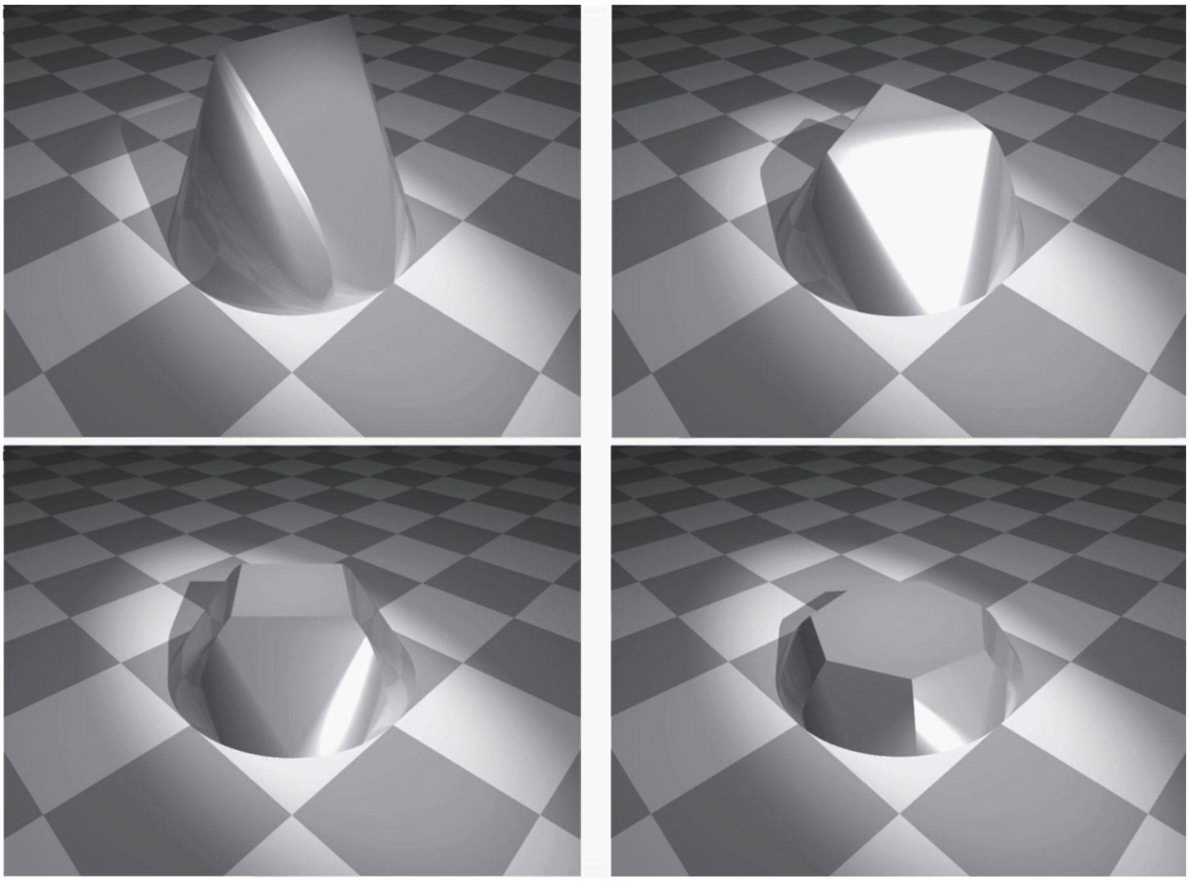
Доказательство. Пусть τ_o центральная симметрия относительно точки *O,* $\{\vec{F}_k\}$ - ёж многогранника *G*, $\{\vec{F}_k'\}$ - ёж многогранника *G'*, такой что $\tau_O(\{\vec{F}_k\}) \rightarrow \{\vec{F}_k'\}$. Так как ежи центрально симметричны, то сами многогранники *G* и *G',* по теореме Минковского, равны с точностью до параллельного переноса. Пусть O_1 точка симметрии ежа $\{\vec{F}_k\}$, тогда O_1': $\tau_o(O_1) \rightarrow O_1'$, т. е. O_1' точка симметрии ежа $\{\vec{F}_k'\}$, тогда $\tau_O \circ \tau_{O_1'}(\{\vec{F}_k\}) = \{\vec{P}_k\}$ это ёж, полученный из ежа $\{\vec{F}_k\}$ параллельным переносом. Ежи $\{\vec{F}_k\}$ и $\{\vec{P}_k\}$ задают равные многогранники, в то время как ёж $\{\vec{F}_k'\}$ задаёт многогранник, симметричный *G* относительно точки *O*.

$$\tau_O \circ \tau_{O_1}(\{\vec{F}_k\}) = \tau_{O_1'}(\{\vec{F}_k'\}) \;\Rightarrow\; \tau_O \circ \tau_{O_1}(G) = \tau_{O_1'}(G') \quad (5)$$

Таким образом ёж центрально симметричный исходному ёжу, задаёт многогранник центрально симметричный исходному.

§3. Приложение теоремы Минковского к задаче Ньютона о поверхности наименьшего сопротивления. Поверхности малых и нулевых сопротивлений.

В первом параграфе этой работы я упомянул о том, что Ньютон считал, что поверхность наименьшего сопротивления необходимо должна быть выпуклой поверхностью вращения. Хотя эти выводы были у него исключительно интуитивными. Не было, да и не могло быть, каких-либо строгих доказательств подтверждающих этот факт. В 1993 году два математика — Джузеппе Буттацо и Бернард Каволь с помощью методов компьютерного моделирования построили поверхность, которая была более обтекаемой в сравнении с поверхностью Ньютона. Это получилось, потому что они отказались от условия осевой симметрии. Оказалось, что оптимальная искомая поверхность необязательно должна быть фигурой вращения.



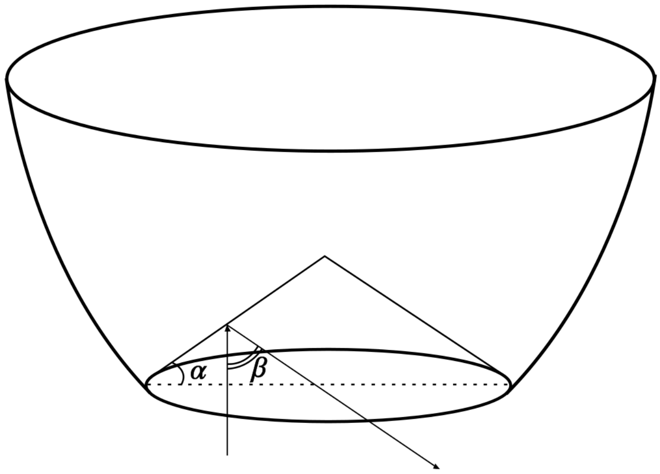
Поверхность полученная в результате этого, при определённой высоте, превращалась в поверхность Ньютона. Однако как же можно придти к такому результату? Профессор механико-математического факультета Владимир Юрьевич Протасов предполагает, что к такому результату можно придти с помощью теоремы Минковского о выпуклых многогранниках. Этот способ как раз позволяет отказаться от условия симметрии, но не от условия выпуклости.

Рассмотрим искомую поверхность как выпуклый многогранник с ежом $\{\vec{n}_k\}$, тогда аэродинамическая задача может быть поставлена формулой:

$$F=2m\rho\upsilon^2\sum_{i=1}^{k}|\vec{n}_i|\cos^3\alpha_i \to min \ (1)$$

Однако в таком виде к задаче затруднительно поставить ограничения и этот вопрос до сих пор остаётся открытым вопросом математики.

В таком случае, только ли отказ от симметрии теоретически способен снизить сопротивление? Оказалось, что и отказ от выпуклости позволяет рассмотреть поверхности с меньшим сопротивлением. Рассмотрим поверхность Ньютона с углублением в форме конуса в её плоской части:



Если угол при основании равен α, то конечное сопротивление всей поверхности умножиться на $\cos^2\alpha < 1$, а то есть уменьшиться. Также очевидно и то, что при увеличении угла сопротивление будет уменьшаться, однако при ограничении высоты поверхности угол нельзя делать слишком большим. В таком случае можно сделать не одно, а несколько подобных углублений, тем самым увеличивая их количество можно сколь угодно близко приближать значение угла α, к $\frac{\pi}{2}$. Однако необходимо учитывать и тот факт, что некоторые частицы могут ударятся о стенки несколько раз начиная с определённого значения α. Нетрудно заметить что предельным углом будет $\alpha=30^\circ$. Таким образом можно уменьшить сопротивление поверхности Ньютона на 25%.

Выводы

В этой обзорной работе мы рассмотрели аэродинамическую задачу Ньютона о поверхности наименьшего сопротивления, сформулированную Ньютоном, а также его решение этой задачи. На данный момент очевидно, что поверхность, построенная Ньютоном, не является оптимальной и поэтому вопрос остаётся открытым вопросом математики. Также мы подробно рассмотрели теорему Минковского о выпуклых многогранниках и гипотезу о том, что с помощью этой теоремы можно построить более оптимальные поверхности, если рассматривать их как выпуклые многогранники. Таким образом решение этой задачи новыми методами должно принести свои плоды в науке.

Источники литературы

1. А. Плахов, В. Протасов, «Аэродинамическая задача Ньютона и человек-невидимка», Квант, 2022, №1.

2. Н. Долбилин, «Теорема Минковского о многогранниках», Квант, 2006, №4.

3. Гильберт Д., Кон-Фоссен С., «Наглядная геометрия», Изд.: «Наука», 3-е изд., 1981г. - 344 с.