Отчёт по практическим заданиям

Прикладная математика. Лекция №3.

Задача 1. Найти решение системы линейных уравнений с помощью методов Жордана, Гаусса:

$$1)\ A = \begin{pmatrix} 5.64 & -4.52 & 4.57 \\ -2.17 & 1.36 & -5.53 \\ 8.77 & -2.78 & 5.44 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 8.32 \\ 7.21 \\ 7.56 \end{pmatrix};$$

$$2)\ A = \begin{pmatrix} 2.34 & -1.84 & 0.32 & 0.11 \\ -1.19 & 0.43 & -0.52 & 3.37 \\ 0.33 & 0.61 & 7.75 & -2.18 \\ -1.53 & 0.81 & 0.94 & -4.82 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2.22 \\ -5.26 \\ 0.15 \\ -3.74 \end{pmatrix};$$

Решение. (/practical-task/systems-of-linear-equals/task-1.m) Суть решения СЛАУ методом Гаусса сводится к приведению матрицы системы к правотреугольному виду (прямой ход решения), в т. ч. к виду:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Тогда определение корней СЛАУ (обратный ход) происходит по формуле:

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}}(b_i - \sum_{k=i}^{n} a_{ik}x_k)$$

Метод Жордана отличается от метода Гаусса в том, что матрица приводится к диогональному виду. Надо отметить что это возможно только если матрица системы не вырождена. После приведения матрицы к диагональному виду алгоритм нахождения корней тривиален.

Таким образом вектор решений первой системы $\vec{X} = (-2.5333, -2.2592, 1.7173)$, а второй $\vec{X} = (-0.8723, -0.2924, 6.4317, 6.8038)$.

Задача 2. Решить систему линейный уравнений используя метод Холецкого-Краута:

$$A = \begin{pmatrix} 3.12 & 1.44 & 0.72 & -0.34 \\ 1.44 & 2.67 & 0.35 & -0.78 \\ 0.72 & 0.35 & 7.15 & 0.25 \\ -0.34 & -0.78 & 0.25 & 6.08 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3.05 \\ 2.75 \\ 0.86 \\ 2.53 \end{pmatrix}$$

Решение. (/practical-task/systems-of-linear-equals/task-2.m) Сначала решим систему общим методом Краута (частным случаем которого является схема Холецкого). Для этого необходимо представить матрицу системы в виде произведения двух треугольных матриц, т. е. в виде $A = LC$, тогда система примет вид:

$$AX = B \implies \begin{cases} LY = B \\ CX = Y \end{cases} \quad (1)$$

Таким образом задача сводится к решению двух систем с треугольными матрицами, где для поиска решения нужно повторить обратный ход из метода Жордана-Гаусса дважды.

$$\begin{cases} y_i = b_i - \sum\limits_{k=1}^{i-1} b_k l_{ik} \\ x_i = \dfrac{1}{c_{ii}}(y_i - \sum\limits_{k=i}^{n} c_{ik} x_k) \end{cases}$$

Схема Холецкого как частный случай метода Краута предполагает разложение матрицы системы в виде $A = LL^T$, далее ход решения аналогичен. Надо также уточнить, что схема холецкого работает только для симметричных матриц ($A = A^T$).

Вектор решений системы $\vec{X} = (-0.0061628, 0.561, 0.65072, 0.84371)$, что полностью сходится с ответом.

Задача 3. Решить систему линейных уравнений методом прогонки.

$$A = \begin{pmatrix} 3.15 & 2.12 & 0 & 0 & 0 \\ 0.23 & 4.72 & 1.62 & 0 & 0 \\ 0 & 1.91 & 8.31 & 2.19 & 0 \\ 0 & 0 & 0.79 & 3.21 & 1.94 \\ 0 & 0 & 0 & 0.29 & 5.16 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2.31 \\ 3.88 \\ 5.06 \\ 4.19 \\ 3.67 \end{pmatrix}$$

Решение. (/practical-task/systems-of-linear-equals/task-3.m) Данный метода устойчив только для систем с трёхдиагональными матрицами. В сущности он представляет собой нахождение коэфицентов в уравнении

$$x_i = \alpha_i x_{i+1} + \beta_i$$

Это ураанении в свою очередь связывает корни системы между собой, тем самым задавая рекурентую последовательность корней.

Вектора решений данной системы

$$\vec{X} = (0.2152, 0.2376, 0.6634, 0.7366, 0.8514)$$