Universidade Federal de Santa Catarina

Inteligência Artificial II

Engenharia de Computação

Conjuntos Nebulosos

Prof. Anderson Luiz Fernandes Perez
Email: anderson.perez@ufsc.br

Universidade Federal de Santa Catarina

Sumário

- Introdução
- Fuzzificação
- Função de Pertinência
- Operações sobre Conjuntos Nebulosos
- Propriedades dos Conjuntos Nebulosos
- Defuzzificação
- Regras Fuzzy
- Sistemas de Inferência Fuzzy

Introdução

- Definindo conjuntos
  - Explicitamente
    - $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$
  - Implicitamente
    - $A = \{X \in Z \mid |X| \leq 2\}$
  - Por função
    - A, XA : $U \rightarrow \{0, 1\}$

Introdução

- Nos conjuntos nebulosos a condição de um elemento pertencer ou não ao conjunto ocorre de maneira gradual.
- As fronteiras entre conjuntos nebulosos não são nitidamente definidas.
- Um elemento pode pertencer a um conjunto de acordo com um grau que pode variar de 0 a 1.

Introdução

- A função de inclusão em um conjunto nebuloso é:
  - $\mu(.) \in [0, 1]$
  - Significa que um elemento pode ser parcialmente membro do conjunto.
  - É possível um elemento pertencer a mais de um conjunto.

Introdução

- A representação de um conjunto Fuzzy A qualquer se dá pelo conjunto de pares $(x, \mu_A(x))$.
- Onde:
  - $A = \{(x, \mu_A(x)) \mid x \in U\}$
  - x é a variável do universo em estudo
  - μ_A é uma função cuja imagem pertence ao intervalo [0, 1]
  - “1” representa o conceito de pertinência total
  - “0” representa a não pertinência

Fuzzificação

- Fuzzificação

A fuzzificação pode ser definida como o processo de agregar incerteza realista a conjuntos clássicos.

Fuzzificação

- Exemplo:
  - A temperatura de 30ºC pode ser transformada em uma temperatura “no entorno de” 30ºC.

- A fuzzificação é feita para incorporar percepções a elementos ordinários (crisp), e é realizada por meio de funções de pertinência que modelam dados sob análise.

Função de Pertinência

- Cada conjunto Fuzzy A é definido em termos de compatibilidade com um conjunto universo A através de uma função de pertinência.
- Uma função de pertinência é uma função numérica que atribui graus de pertinência para valores discretos de uma variável.
- A função de pertinência associa a cada elemento *x* um número A(x), no intervalo fechado [0, 1] que caracteriza o grau de pertinência de *x* em A.
- Qualquer função que mapeie o domínio U no intervalo [0, 1] pode ser utilizada como função de pertinência.

Função de Pertinência

- Tipos de funções de inclusão
  - Modal
  - Singular
  - Clássica
  - Linear
  - Sigmoidal
  - Triangular
  - Trapezoidal

Funções mais usadas

Função de Pertinência

Universidade Federal de Santa Catarina

- Exemplo
  - Seja o conjunto Fuzzy discreto A = {(1, 0.3), (2, 0.4), (3, 0.7), (4, 0.8)}
  - Fazer o gráfico do conjunto A no SciLab.

Função de Pertinência

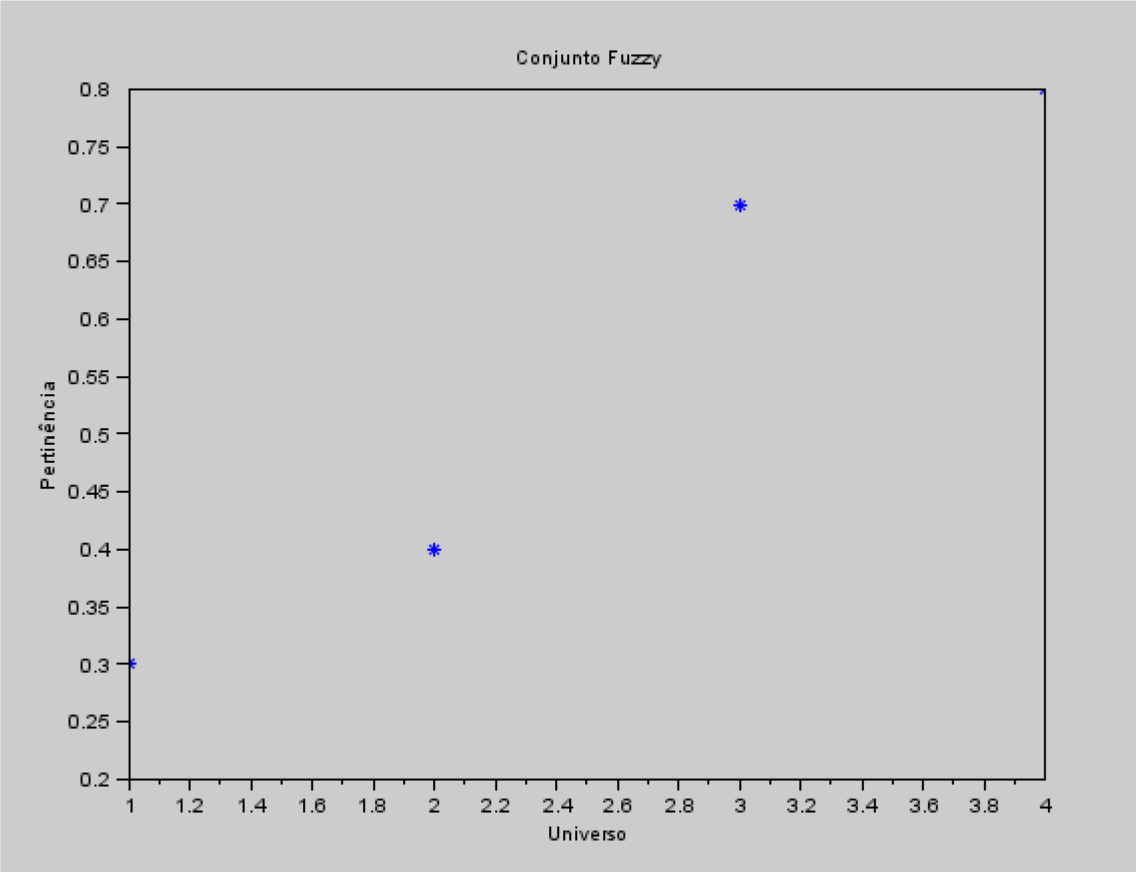
- Exemplo
  - Script no SciLab

```
// Primeiro Exemplo

x = [1 2 3 4];
mi = [0.3 0.4 0.7 0.8];
figure(1)
plot(x, mi, 'b*')
title("Conjunto Fuzzy")
xlabel("Universo")
ylabel("Pertinência")
```

Função de Pertinência

- Exemplo
  - Resultado



Função de Pertinência

- Exemplo: função de pertinência triangular

$$\text{trimf}(x,[a,b,c]) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \le a \text{ or } x \ge c \\ \frac{x-b}{b-a} & \text{if } x > a \text{ and } x < b \\ 1 & \text{if } x = b \\ \frac{c-x}{c-b} & \text{if } x > b \text{ and } x < c \end{cases}$$

Função de Pertinência

- Exemplo: função de pertinência triangular

$$
\textbf{\textit{trimf(x, [1, 4, 9])}} \quad
\begin{cases}
0; & x < 1 \\
(x - 1)/(4 - 1); & 1 \leq x < 4 \\
(9 - x)/(9 - 4); & 4 \leq x < 9 \\
0; & 9 \leq x
\end{cases}
$$

Função de Pertinência

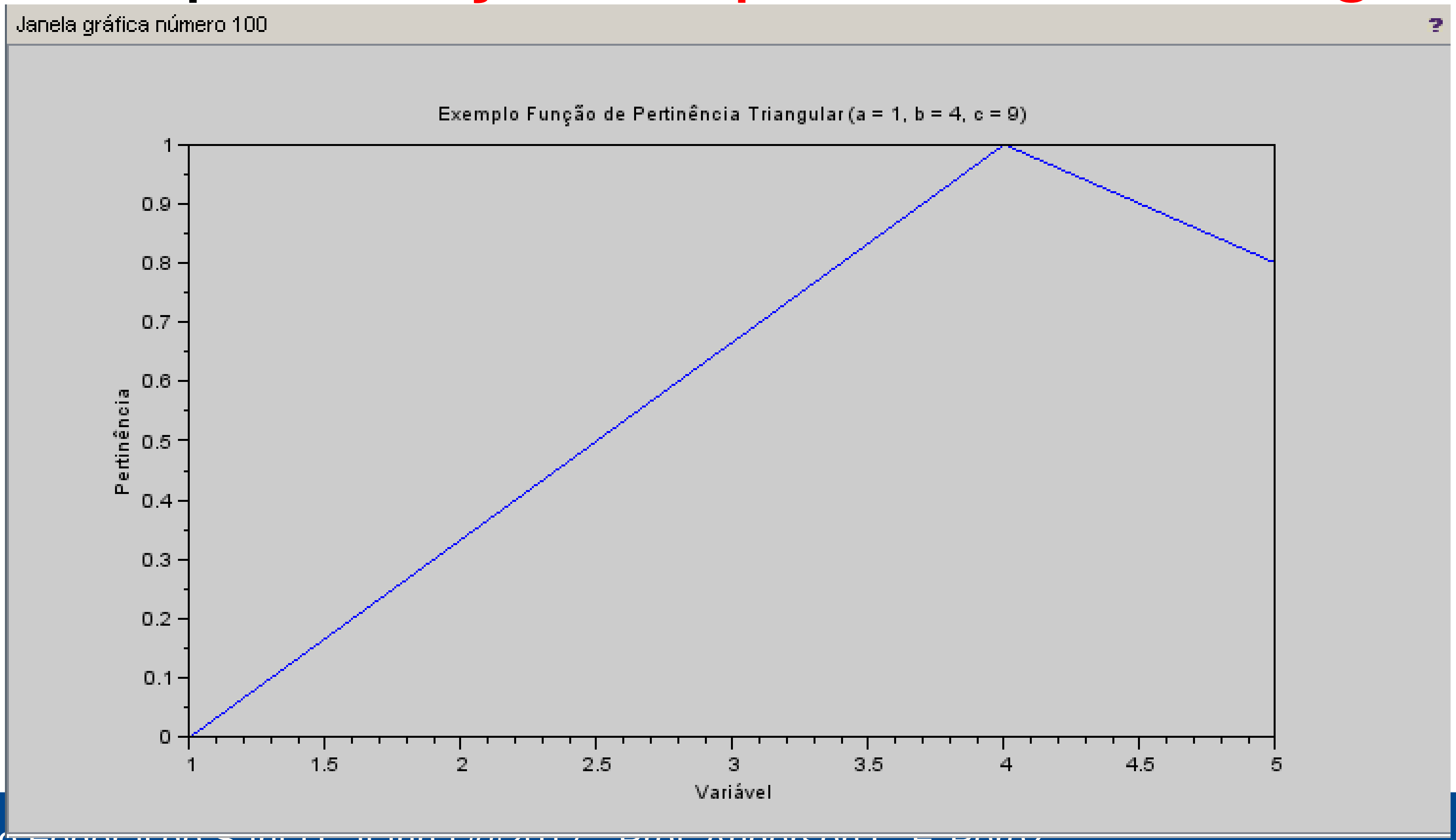
- Exemplo: função de pertinência triangular
  - Script SciLab

```
// a = 1, b = 4, c = 9

x = [1 2 3 4 5];
y = trimf(x, [1 4 9]);
figure(1);
plot(x, y);
title("Exemplo Função de Pertinência Triangular (a = 1, b = 4, c = 9)");
xlabel("Variável") ;
ylabel("Pertinência")
```

Função de Pertinência

- Exemplo: função de pertinência triangular



Função de Pertinência

- Exemplo: função de pertinência trapezoidal

$$\mathrm{trapmf}(x,[a,b,c,d]) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \le a \text{ or } x \ge d \\ \frac{x-b}{b-a} & \text{if } x > a \text{ and } x < b \\ 1 & \text{if } b \le x \le c \\ \frac{d-x}{d-c} & \text{if } x > c \text{ and } x < d \end{cases}$$

Função de Pertinência

- Exemplo: função de pertinência trapezoidal

$$
\textbf{\textit{trapmf(x, [2, 3, 7, 9])}} \rightarrow \begin{cases} 0; & x < 2 \\ (x - 2)/(3 - 2); & 2 \leq x < 3 \\ 1; & 3 \leq x \leq 7 \\ (9 - x)/(9 - 7); & 7 < x < 9 \\ 0; & x \geq 9 \end{cases}
$$

Função de Pertinência

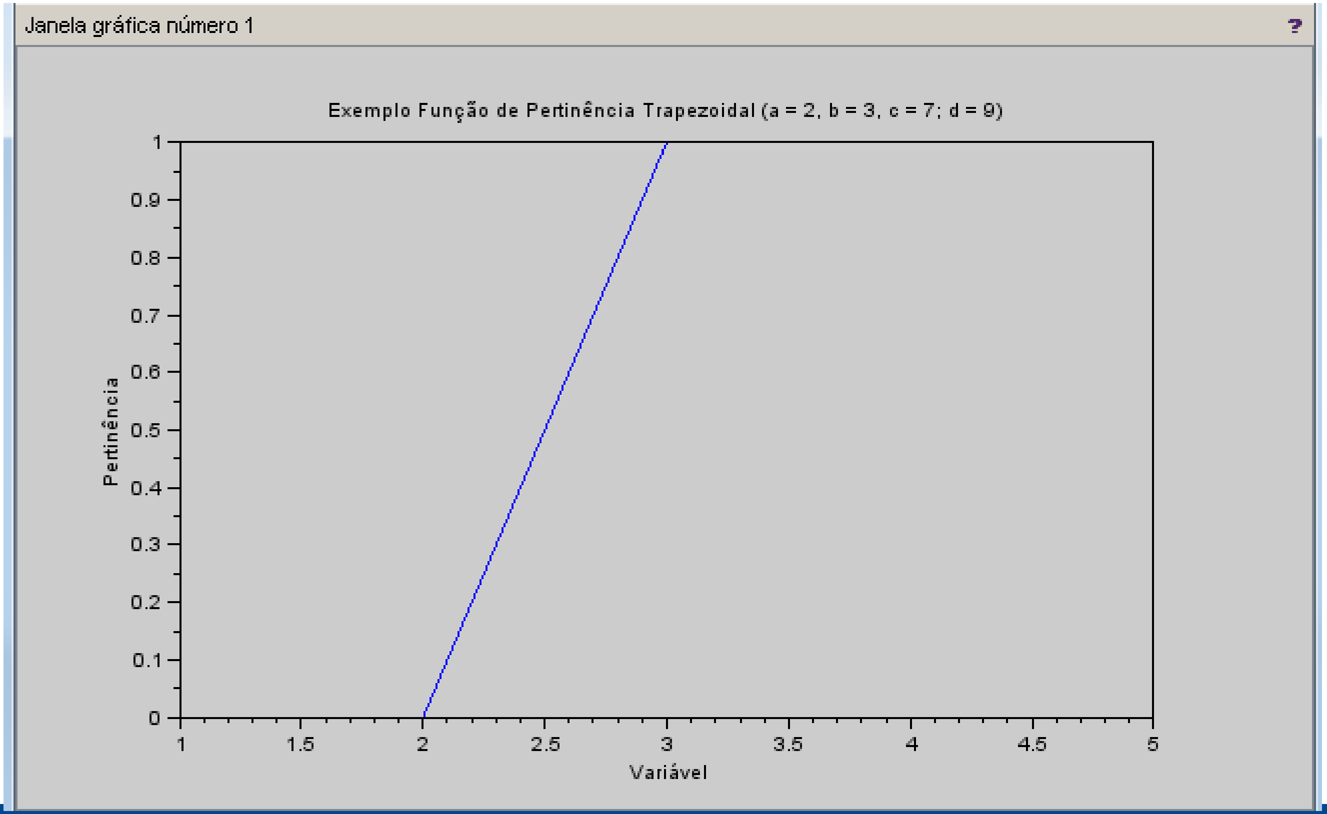
- Exemplo: função de pertinência trapezoidal
  - Script no SciLab

```
// a = 2, b = 3, c = 7; d = 9

x = [1 2 3 4 5];
y = trapmf(x, [2 3 7 9]);
figure(1);
plot(x, y);
title("Exemplo Função de Pertinência Trapezoidal (a = 2, b = 3, c = 7; d = 9)");
xlabel("Variável");
ylabel("Pertinência")
```

Função de Pertinência

- Exemplo: função de pertinência trapezoidal



Operações sobre Conjuntos Nebulosos

- Igualdade
  - Sejam A e B dois conjuntos fuzzy em um mesmo universo, a igualdade é:
    - $\mu_A(x, y) = \mu_B(x, y)$

Operações sobre Conjuntos Nebulosos

- Intersecção
  - Sejam A e B dois conjuntos fuzzy em um mesmo universo, a interseção de a e b é:
    - $A \cap B \equiv a \min b$
    - O grau de pertinência de um elemento x em relação a $A \cap B$ é dado por $\mu_{A \cap B}(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x))$

Operações sobre Conjuntos Nebulosos

- União
  - Sejam A e B dois conjuntos fuzzy em um mesmo universo, a união de a e b é:
    - A U B ≡ a max b
    - O grau de pertinência de um elemento x em relação a A U B é dado por $\mu_{A \cup B}(x) = \max(\mu_A(x), \mu_B(x))$

Operações sobre Conjuntos Nebulosos

- Complemento
  - O complemento do conjunto A ($\bar{A}$):
    - $\bar{A} = 1 - \alpha$
    - O grau de pertinência de um elemento x em relação ao conjunto $\bar{A}$ é dado por $\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)$

Operações sobre Conjuntos Nebulosos

- Subconjunto (igualdade)
  - X é um subconjunto do conjunto fuzzy Y ($X \subseteq Y$), se sua função de pertinência for menor ou igual a função de pertinência de Y para todos os elementos do universo comum.
  - $\mu_x(x) \leq \mu_y(x)$

Propriedades dos Conjuntos Fuzzy

- Dado um universo de discurso E, e três conjuntos fuzzy $A \subset E$, $B \subset E$ e $C \subset E$. As seguinte propriedades são válidas:
  - Comutativa
    - $A \cap B = B \cap A$
    - $A \cup B = B \cup A$
  - Associativa
    - $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
    - $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
  - Idempotência
    - $A \cap A = A$
    - $A \cup A = A$
  - Distributividade em relação à intersecção
    - $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Propriedades dos Conjuntos Fuzzy

- Distributividade em relação à união
  - $A \cap (B \cup C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- Conjunto fuzzy e o seu complemento (*)
  - $A \cap A' \neq \phi$
  - $A \cup A' \neq E$
- Conjunto fuzzy e o conjunto nulo
  - $A \cap \phi = \phi$
  - $A \cup \phi = A$
- Conjunto fuzzy e o conjunto universal
  - $A \cap E = A$
  - $A \cup E = E$
- Involução
  - $(A')' = A$
- Terema de Morgan
  - $(A \cap B)' = A' \cup B'$
  - $(A \cup B)' = A' \cap B'$

Defuzzificação

- Processo de transformar um conjunto fuzzy em um elemento do universo do discurso (em geral, um número real).
- Métodos para defuzzificação:
  - Centróide – utiliza a soma (ou integral) dos valores de pertinência multiplicados pelos valores das variáveis, dividindo esse valor final pela área total do conjunto fuzzy a ser defuzzificado.
  - Bissetor – utiliza a soma (ou integral) dos valores de pertinência desde zero a um valor especificado.
  - Média dos máximos – utiliza a média dos valores máximos de pertinência do conjunto a ser defuzzificado.
  - Menor dos máximos – utiliza o menor valor de pertinência dentre os valores máximos de pertinência do conjunto fuzzy a ser defuzzificado.
  - Maior dos máximos – usa o maior valor de pertinência dentre os valores máximos de pertinência do conjunto fuzzy a ser defuzzificado.

Regras Fuzzy

- Lógica Clássica
  - Proposição
    - Sentença que pode assumir somente dois valores verdade: VERDADEIRO (V ou 1) ou FALSO (F ou 0).
    - O conjunto V = {0, 1} é denominado conjunto-verdade da proposição.

Regras Fuzzy

- Lógica Clássica
  - Negação
    - O valor verdade da negação de uma proposição *p* é dado por 1 – *p*.

Regras Fuzzy

- Lógica Clássica
  - Conjunção
    - O valor verdade da conjunção de duas proposições *p* e *q* é dado por *min(p, q)*.

Universidade Federal de Santa Catarina

Regras Fuzzy

- Lógica Clássica
  - Disjunção
    - O valor verdade da disjunção de duas proposições *p* e *q* é dado por *max(p, q)*.

Regras Fuzzy

- Lógica Clássica
  - Implicação
    - O valor verdade da implicação de duas proposições *p* e *q* *(p -> q)* é dado por *min(1; 1 + q - p)*.

Regras Fuzzy

- Lógica Clássica
  - Tabela Verdade

P	Q	1 – *p*	p ^ q min(p, q)	p v q max(p, q)	Se p Então q min(1, 1 + q – p)
1	0	0	0	1	0
1	1	0	1	1	1
0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	1

Regras Fuzzy

- Toda regra tem um **antecedente** e um **consequente**.
- Exemplo lógica clássica:
  - Se o céu está azul (antecedente)
  - Então não vai chover (consequente)
- Exemplo **lógica Fuzzy**
  - Se o céu está um pouco nublado (antecedente)
  - Então pode chover pouco (consequente)

Regras Fuzzy

- Operações de Composição (1/3)
  - A partir de duas proposições *p* e *q* unidas por conectivos lógicos, é possível definir algumas operações:
  - Conjunção:
    - p = (x é A)
    - q = (y é B)
    - p ^ q = $min(\mu_A(x); \mu_B(y))$, <u>onde</u> A e B são conjuntos fuzzy.

Regras Fuzzy

- Operações de Composição (2/3)
  - A partir de duas proposições *p* e *q* unidas por conectivos lógicos, é possível definir algumas operações:
  - Disjunção:
    - p = (x é A)
    - q = (y é B)
    - p v q = $max(\mu_A(x); \mu_B(y))$, <u>onde</u> A e B são conjuntos fuzzy.

Regras Fuzzy

- Operações de Composição (3/3)
  - A partir de duas proposições *p* e *q* unidas por conectivos lógicos, é possível definir algumas operações:
  - Implicação:
    - p = (x é A)
    - q = (y é B)
    - $p \rightarrow q = min(1, 1 - \mu_A(x) + \mu_B(y))$, <u>onde</u> A e B são conjuntos fuzzy.

Regras Fuzzy

- Uma base de regras fuzzy é um conjunto de várias regras fuzzy.
- Exemplo:

Variáveis de entrada	Escolaridade e experiência
Domínio das variáveis de entrada	Escolaridade de 0 a 15 anos
	Experiência de 0 a 25 anos
Variável de saída	Salário
Domínio da variável de saída	De 0 a 1.000 unidades monetárias

Regras Fuzzy

- Exemplo (continuação):
  - Uma regra para este exemplo pode ser:

SE a escolaridade é pouca e a experiência pouca (antecedente) → (**ENTÃO**) o salário é baixo (consequente)

Regras Fuzzy

- Base de Regras
  - Considerando o exemplo citado anteriormente é possível ter elaborar a seguinte base de regras:
  - **Regra 1** – **SE** a escolaridade é média e a experiência é pouca, **ENTÃO** o salário é muito baixo;
  - **Regra 2** – **SE** a escolaridade é média e a experiência é media, **ENTÃO** o salário é pouco baixo;
  - **Regra 3** – **SE** a escolaridade é média e a experiência é grande, **ENTÃO** o salário é médio;
  - **Regra 4** – **SE** a escolaridade é alta e a experiência é pouca, **ENTÃO** o salário é pouco baixo;
  - **Regra 5** – **SE** a escolaridade é alta e a experiência é média, **ENTÃO** o salário é médio;
  - **Regra 6** – **SE** a escolaridade é alta e a experiência é alta, **ENTÃO** o salário é alto.

Sistemas de Inferência Fuzzy

- São sistemas baseados em regras do tipo SE ... ENTÃO.
- Passos de um sistema de inferência Fuzzy:
  - Fuzzificação das entradas e definição das saídas;
  - Elaboração das regras fuzzy;
  - Cálculo dos antecedentes (conectivos, podem ser AND ou OR);
  - Cálculo das implicações de cada uma das regras cujos operadores podem ser, por exemplo, <u>mínimo</u> ou <u>produto</u>;
  - Agregação dos consequentes cujos operadores podem ser, por exemplo, <u>máximo</u> ou <u>soma limitada</u>;
  - Defuzzificação da saída usando, por exemplo, o <u>centróide</u> ou a <u>média dos máximos</u>.

Sistemas de Inferência Fuzzy

- Sejam um conjunto de regras fuzzy e um vetor de entradas definido no conjunto dos números reais, pode-se definir a inferência fuzzy como:
  - O processo pela qual se obtêm as saídas do sistemas, pela avaliação dos níveis de compatibilidade das entradas e com os antecedentes das regras, ativando consequentes.

Sistemas de Inferência Fuzzy

- Modelos de Inferência Fuzzy
  - Mamdani
    - <u>Regra típica</u>:
      - **se** x é A e y é B (onde A e B são conjuntos fuzzy)
      - **então** z é C (onde C é conjunto fuzzy).
    - O processo de fuzzificação visa obter um resultado não-fuzzy na saída do sistema de inferência.
    - A defuzzificação pode ser realizada pelo método do centróide, média dos máximos ou outros.

Sistemas de Inferência Fuzzy

- Modelos de Inferência Fuzzy
  - Takagi-Sugeno
    - Regra típica:
      - **se** x é A e y é B
      - **então** z = *f(x, y)* (onde A e B são conjuntos fuzzy e *f* é uma função real de x e y).