Unidade 01 (Parte 2) Fundamentos de Grafos

Prof. Ricardo Moraes
ricardo.moraes@ufsc.br

Conceitos Básicos

O que é um grafo?

- Estrutura de Dados utilizada para modelar uma grande variedade de problemas do mundo real.
- Formalmente um grafo é dado por G (V, A), onde:
  - **V** - conjunto não-vazio: **vértices ou nodos**;
  - **A** - conjunto de pares ordenados de elementos distintos de V: **arestas**
    - a=(v,w), onde v e w Є V

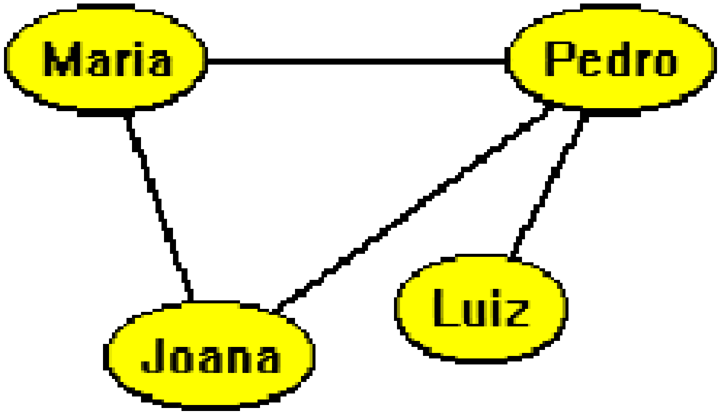
O que é um grafo?

- G1
- V = {Maria, Pedro, Joana, Luiz}
- A = {(Maria,Pedro),

  (Joana, Maria),

  (Pedro, Luiz),

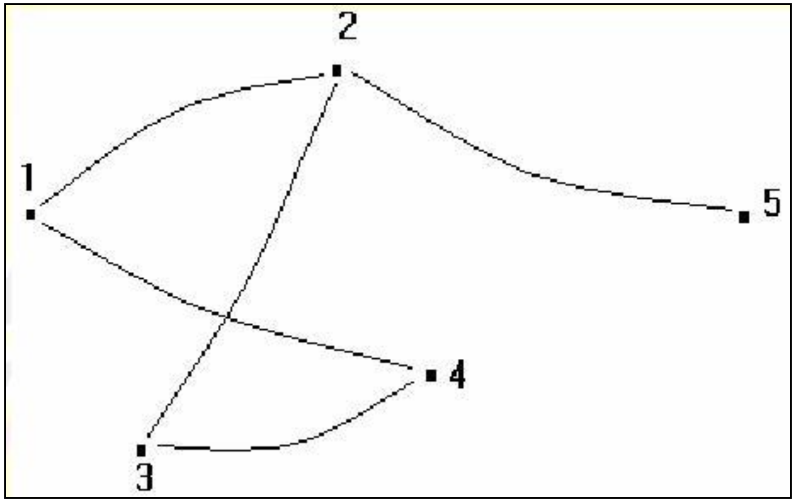
  (Joana, Pedro)}



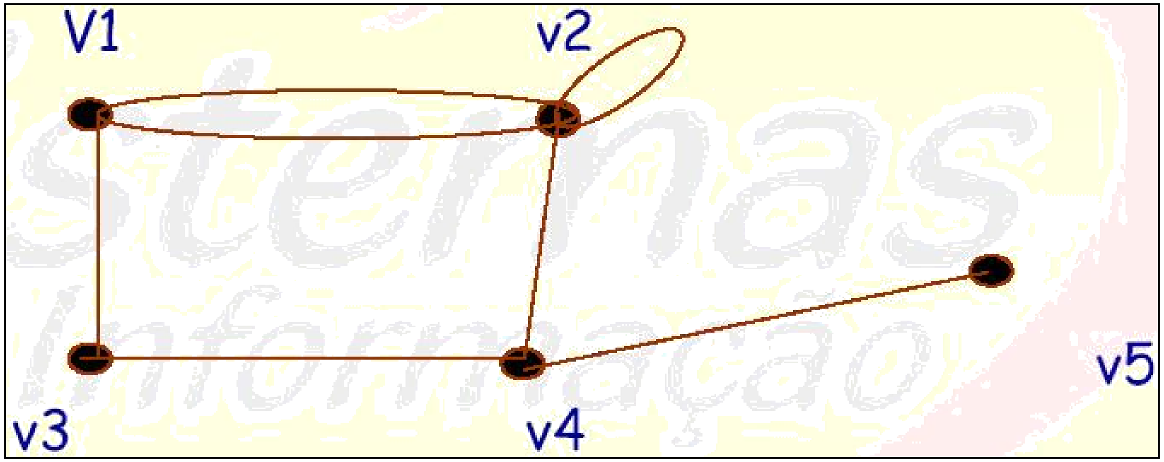
G1

Exercício 01

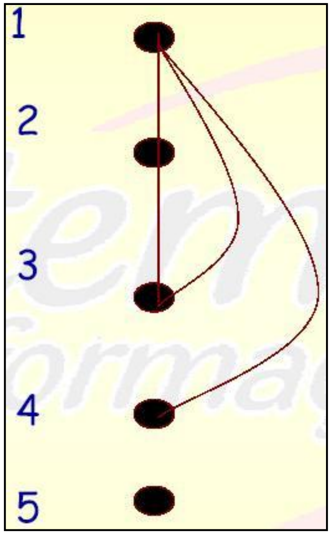
a)



b)



c)



Exercício 02

- Cinco turistas se encontram em um bar de Araranguá e começam a conversar, cada um falando de cada vez, com um só companheiro da mesa. O conhecimento de línguas dos turistas é mostrado na tabela a seguir.
- **Construa um grafo** que represente todas as possibilidades de cada turista dirigir a palavra a outro, sendo compreendido.

Turista	Inglês	Francês	Português	Alemão	Espanhol
1	X	X	X		X
2	X	X		X	
3		X	X	X	
4			X	X	X
5		X		X	X

Revisão

- O que é um Grafo?
- O que é uma Aresta?
- O que é um Vértice?
- Para que serve um Grafo?

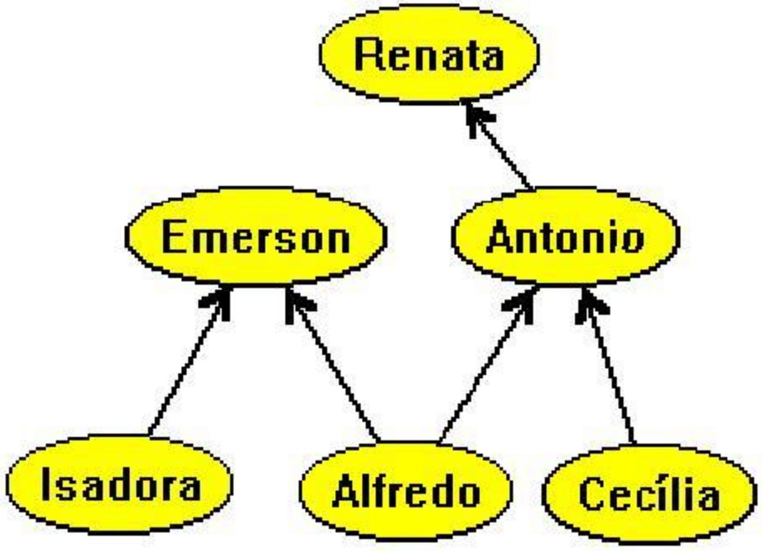
Dígrafo (Grafo Orientado)

- Considere, agora, o grafo definido por:
  - V = {p | p é uma pessoa da família Castro}
  - A = { (v,w) | < v é pai/mãe de w > }

Dígrafo (Grafo Orientado) - Exemplo

- V = { Emerson, Isadora, Renata, Antonio, Rosane, Cecília, Alfredo }
- A = {(Isadora, Emerson), (Antonio, Renata), (Alfredo, Emerson), (Cecília, Antonio), (Alfredo, Antonio)}

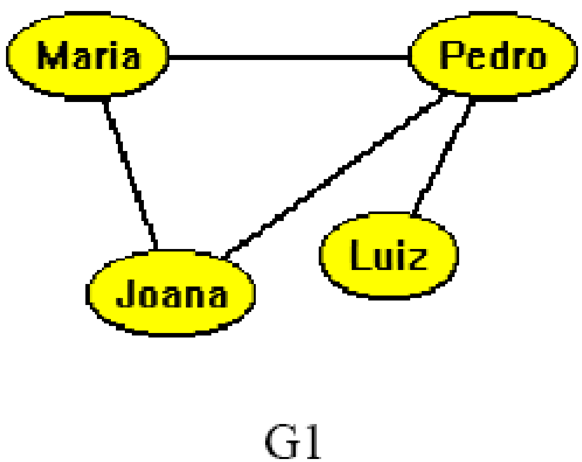
- A relação definida por A não é simétrica pois se <v é pai/mãe de w>, não é o caso de <w é pai/mãe de v>.

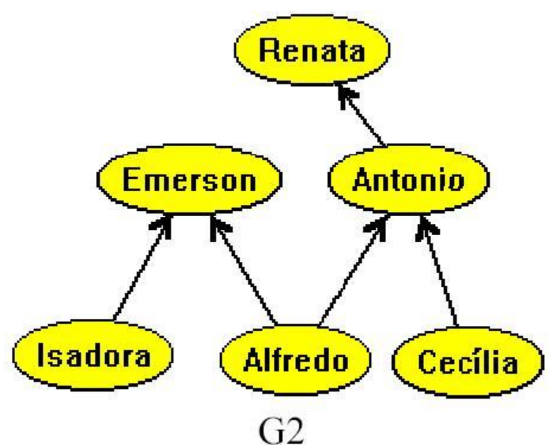


G2

Ordem

- A ordem de um grafo G é dada pela cardinalidade do conjunto de vértices, ou seja, pelo **número de vértices** de G.

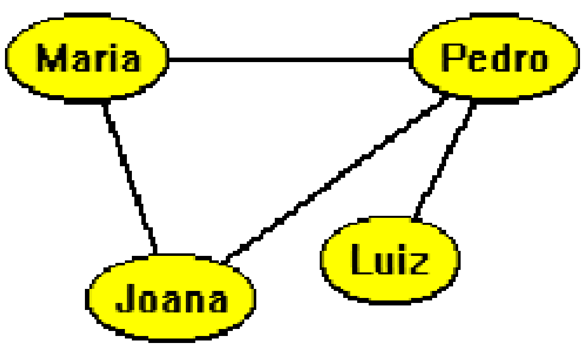




- Ordem(G1)=4 ordem(G2)=6

Adjacência

- Em um **grafo simples** (a exemplo de G1) dois vértices v e w são adjacentes (ou vizinhos) se há uma aresta e=(v,w) em G.
- Esta aresta é dita ser incidente a ambos, v e w.
- É o caso dos vértices Maria e Pedro:



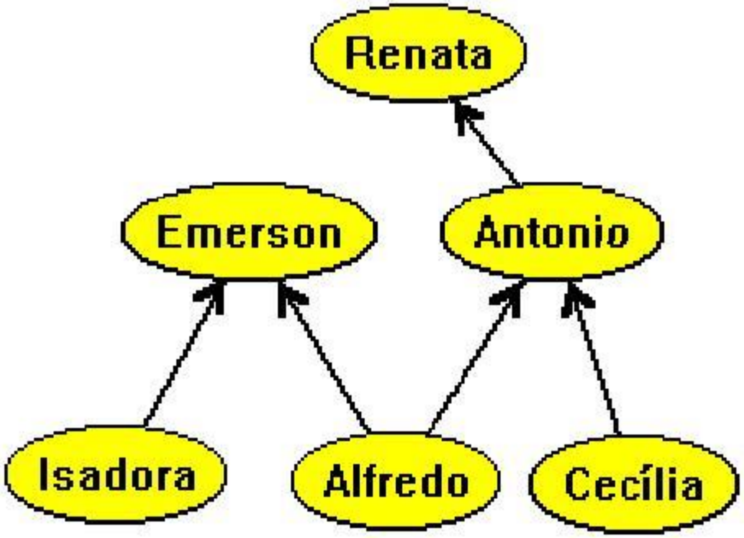
G1

Adjacência

- No caso do grafo ser dirigido, a adjacência (vizinhança) é especializada em:
  - Sucessor: um vértice w é sucessor de v se há um arco que parte de v e chega em w.
  - Antecessor: um vértice v é antecessor de w se há um arco que parte de v e chega em w.

Adjacência

- Emerson e Antonio são sucessores de Alfredo.
- Alfredo e Cecília são antecessores de Antonio.

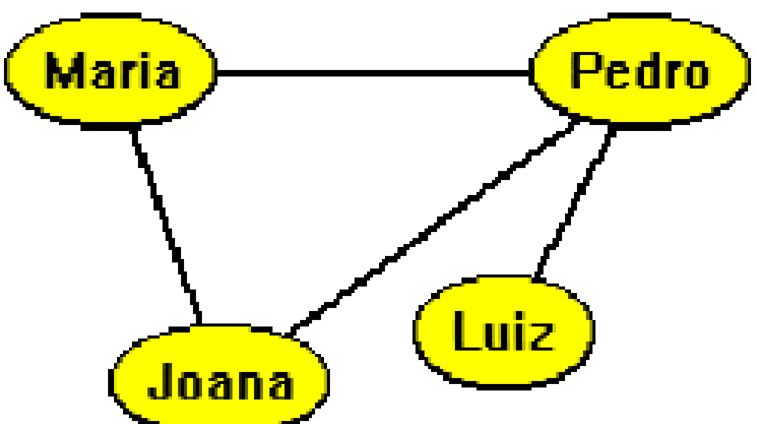


G2

Grau

- O grau de um vértice é dado pelo número de arestas que lhe são incidentes. Por exemplo:

- Grau(Pedro)=3
- Grau(Maria)=2



G1

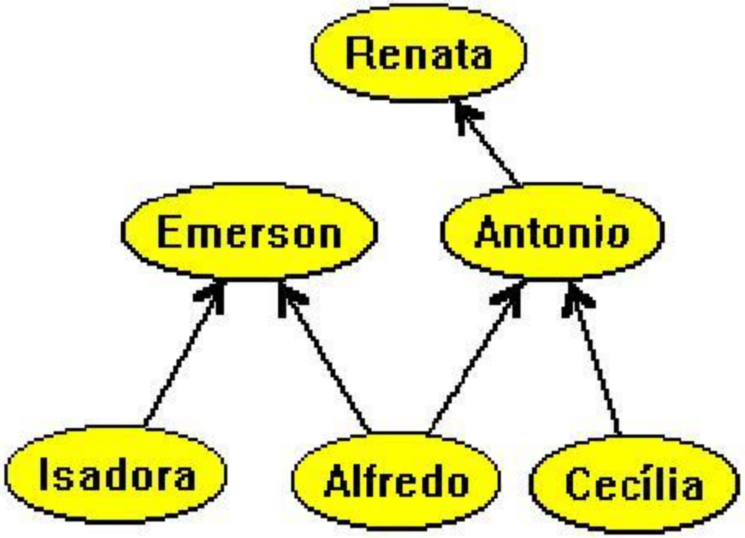
Grau – Grafo Orientado

- **Grau de emissão**: o grau de emissão de um vértice v corresponde ao número de arcos que partem de v.

- **Grau de recepção**: o grau de recepção de um vértice v corresponde ao número de arcos que chegam a v.

Grau – Grafo Orientado

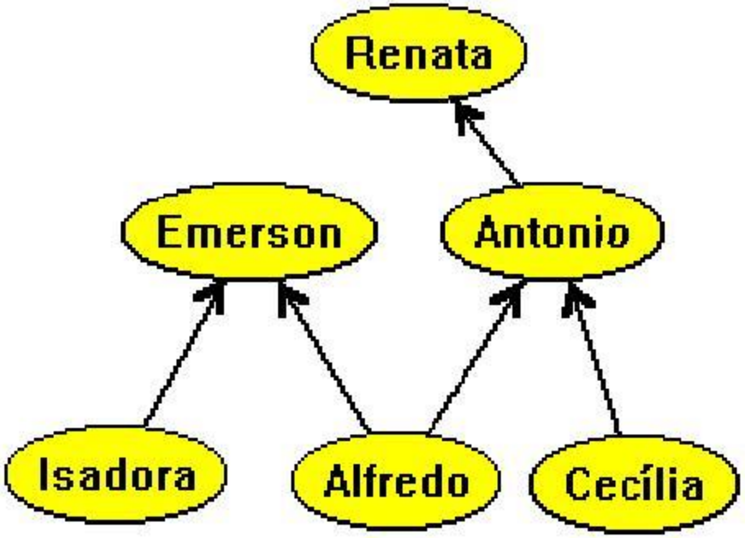
- GrauDeEmissão(Antonio) = 1
- GrauDeEmissao(Alfredo) = 2
- GrauDeEmissao(Renata) = 0



G2

Grau – Grafo Orientado

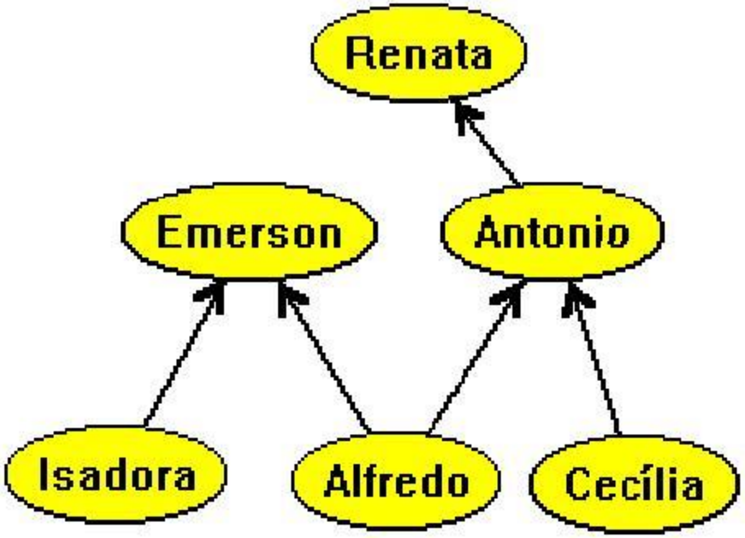
- GrauDeRecepção(Antonio) = 2
- GrauDeRecepção(Alfredo) = 0
- GrauDeRecepção(Renata) = 1



G2

Fonte

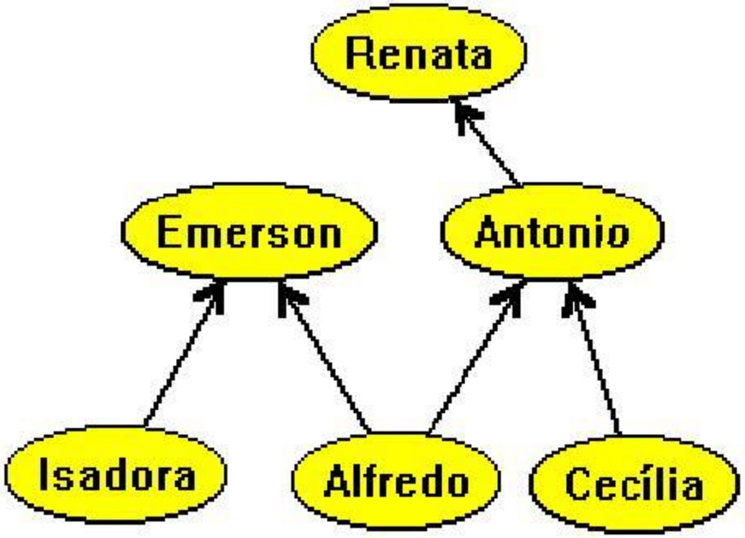
- Um vértice v é uma fonte se GrauDeRecepção(v) = 0.
- É o caso dos vértices Isadora, Alfredo e Cecília.



G2

Sumidouro

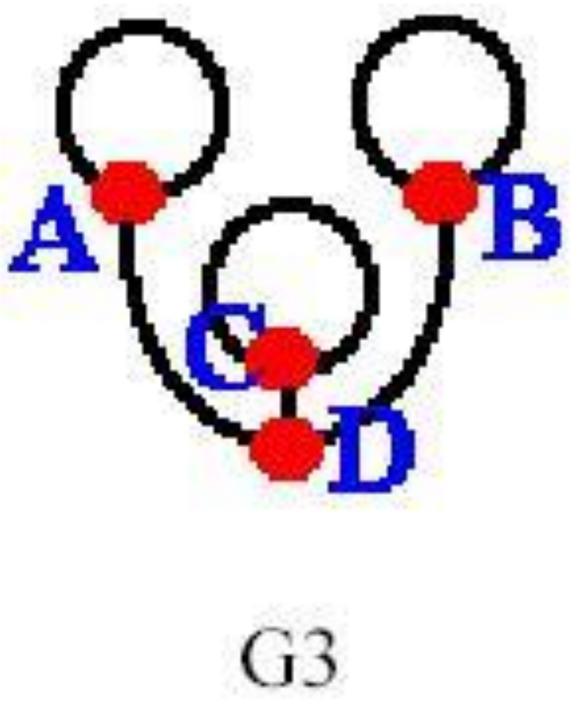
- Um vértice v é um sumidouro se GrauDeEmissão(v) = 0.
- É o caso dos vértices Renata e Emerson.



G2

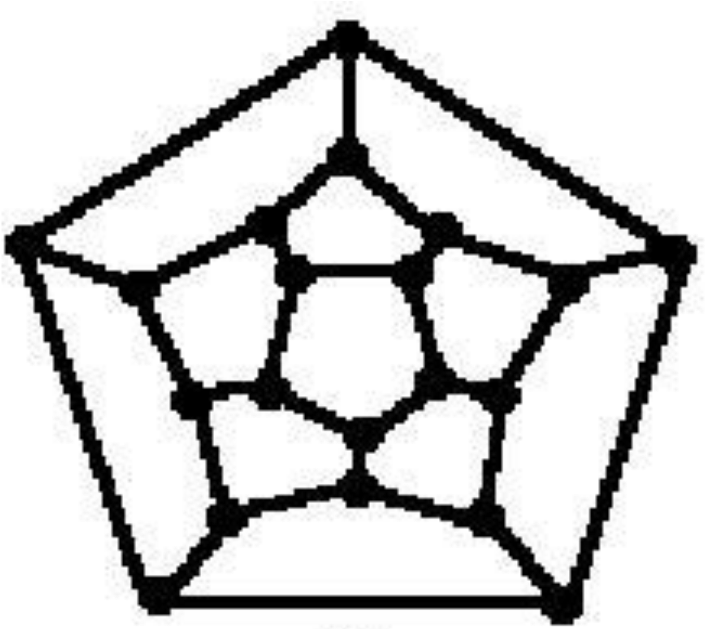
Laço

- Um laço é uma aresta ou arco do tipo e=(v,v), ou seja, que relaciona um vértice a ele próprio.
- No exemplo há três ocorrências de laços para um grafo não orientado.



Grafo Regular

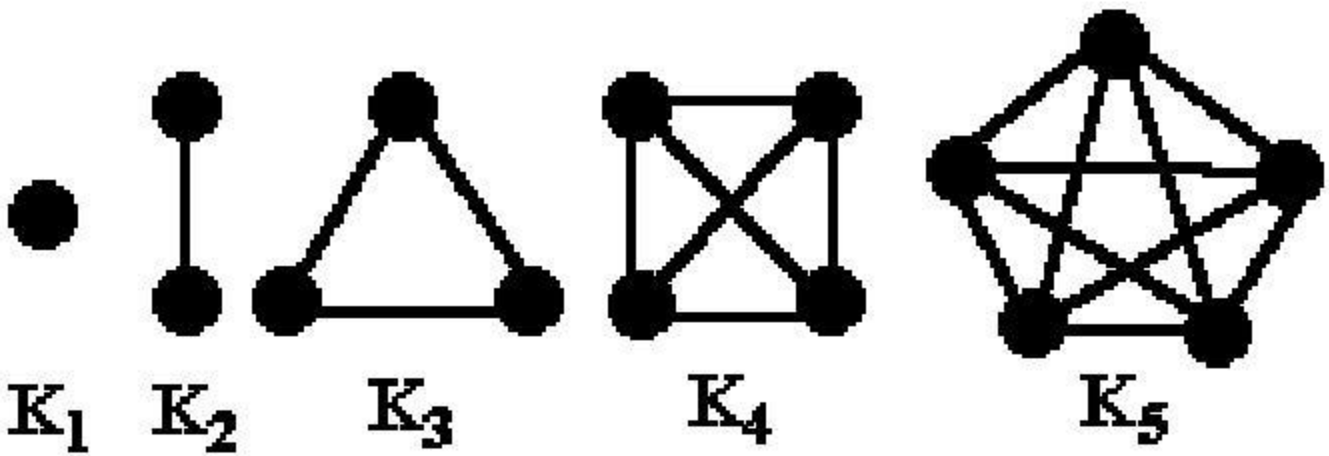
- Um grafo é dito ser regular quando todos os seus vértices tem o mesmo grau.
- O G3, é dito ser um grafo regular-3 pois todos os seus vértices tem grau 3.



G4

Grafo Completo

- Um grafo é dito ser completo quando há uma aresta entre cada par de seus vértices.
- Estes grafos são designados por Kn, onde n é a ordem do grafo.



G4.1

Grafo Bipartido

- Um grafo é dito ser bipartido quando seu conjunto de vértices V puder ser particionado em dois subconjuntos V1 e V2, tais que toda aresta de G une um vértice de V1 a outro de V2.
- Exemplo:
  - Sejam os conjuntos
    - H={h | h é um homem} e
    - M={m | h é um mulher}

Grafo Bipartido

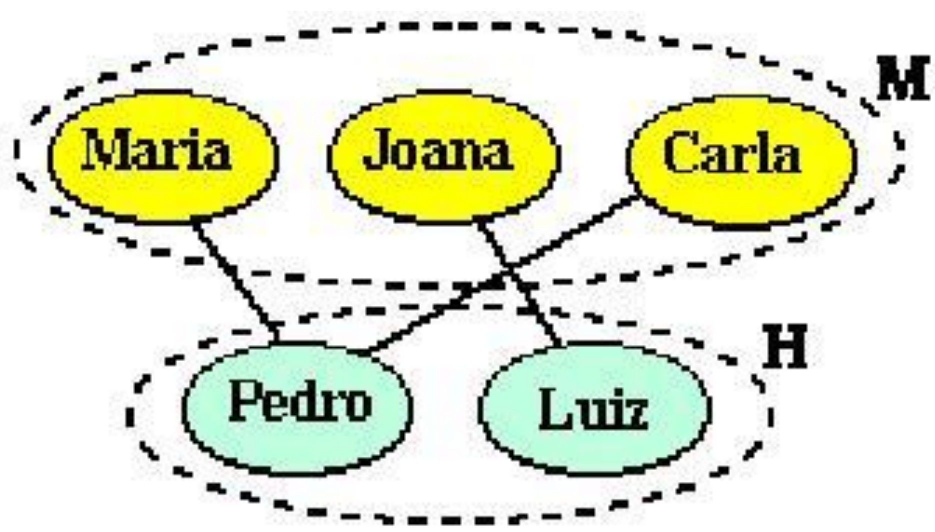
- Grafo G(V,A) onde:

V = H U M

A = {(v,w) | (v ∈ H e w ∈ M)

ou (v ∈ M e w ∈ H) e

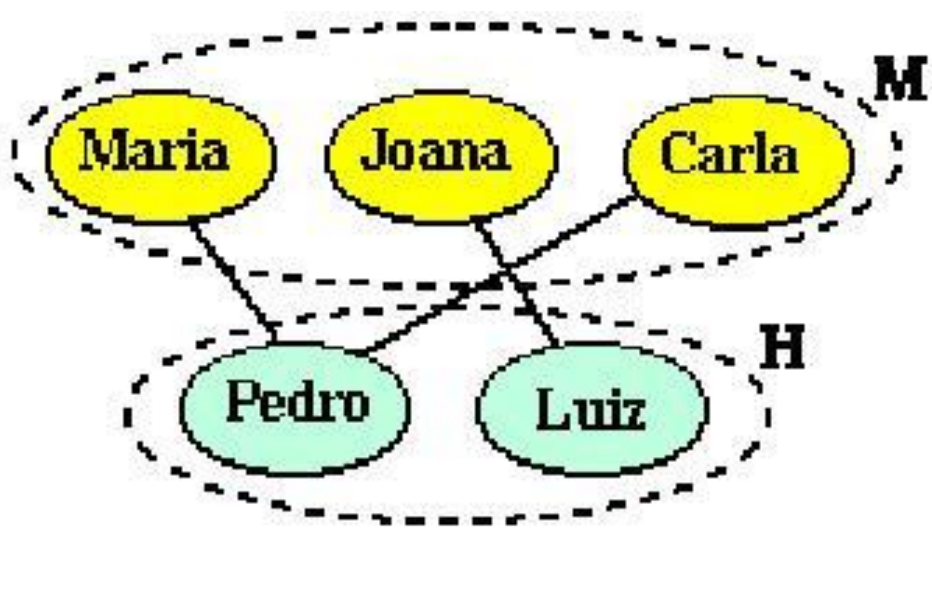
<v foi namorado de w>}



G5

Grafo Rotulado

- Um grafo G(V,A) é dito ser rotulado em vértices (ou arestas) quando a cada vértice (ou aresta) estiver associado um rótulo.



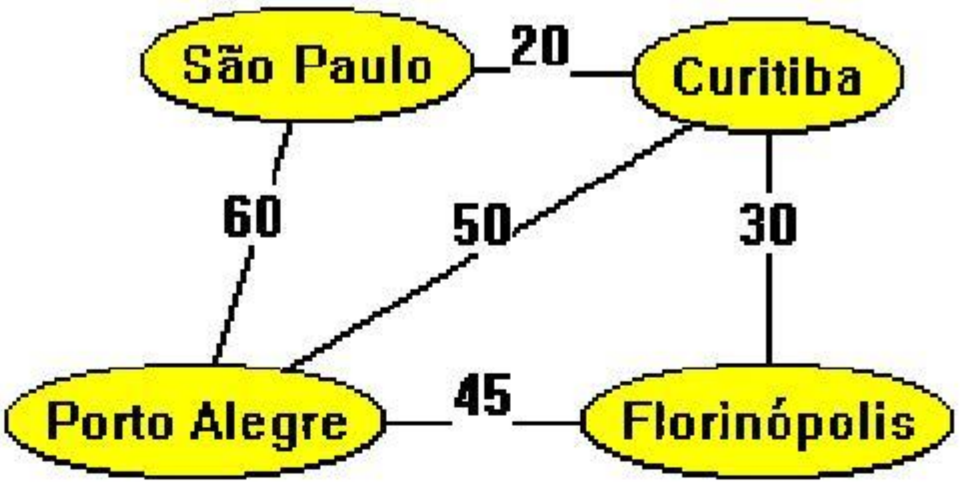
G5

Grafo Valorado

- Um grafo G(V,A) é dito ser valorado quando existe uma ou mais funções relacionando V e/ou A com um conjunto de números.

Grafo Valorado

- V = {v | v é uma cidade com aeroporto}
- A = {(v,w,t) | <há linha aérea ligando v a w, sendo t o tempo esperado de voo>}

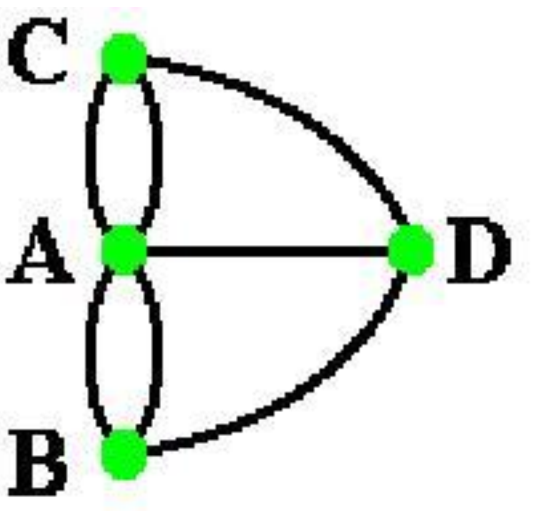


G7

Multigrafo

- Um grafo G(V,A) é dito ser um multigrafo quando existem múltiplas arestas entre pares de vértices de G.

- G8 = há duas arestas entre os vértices A e C e entre os vértices A e B, caracterizando-o como um multigrafo.

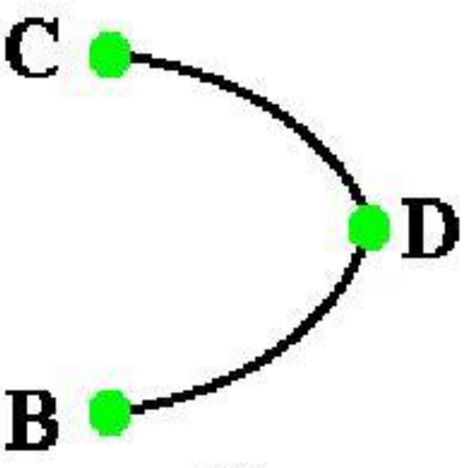


G8

Subgrafo

- Um grafo Gs(Vs, Es) é dito ser subgrafo de um grafo G(V,E) quando Vs$\subset$V e As $\subset$ A.

- O G9 é subrafo de G8.



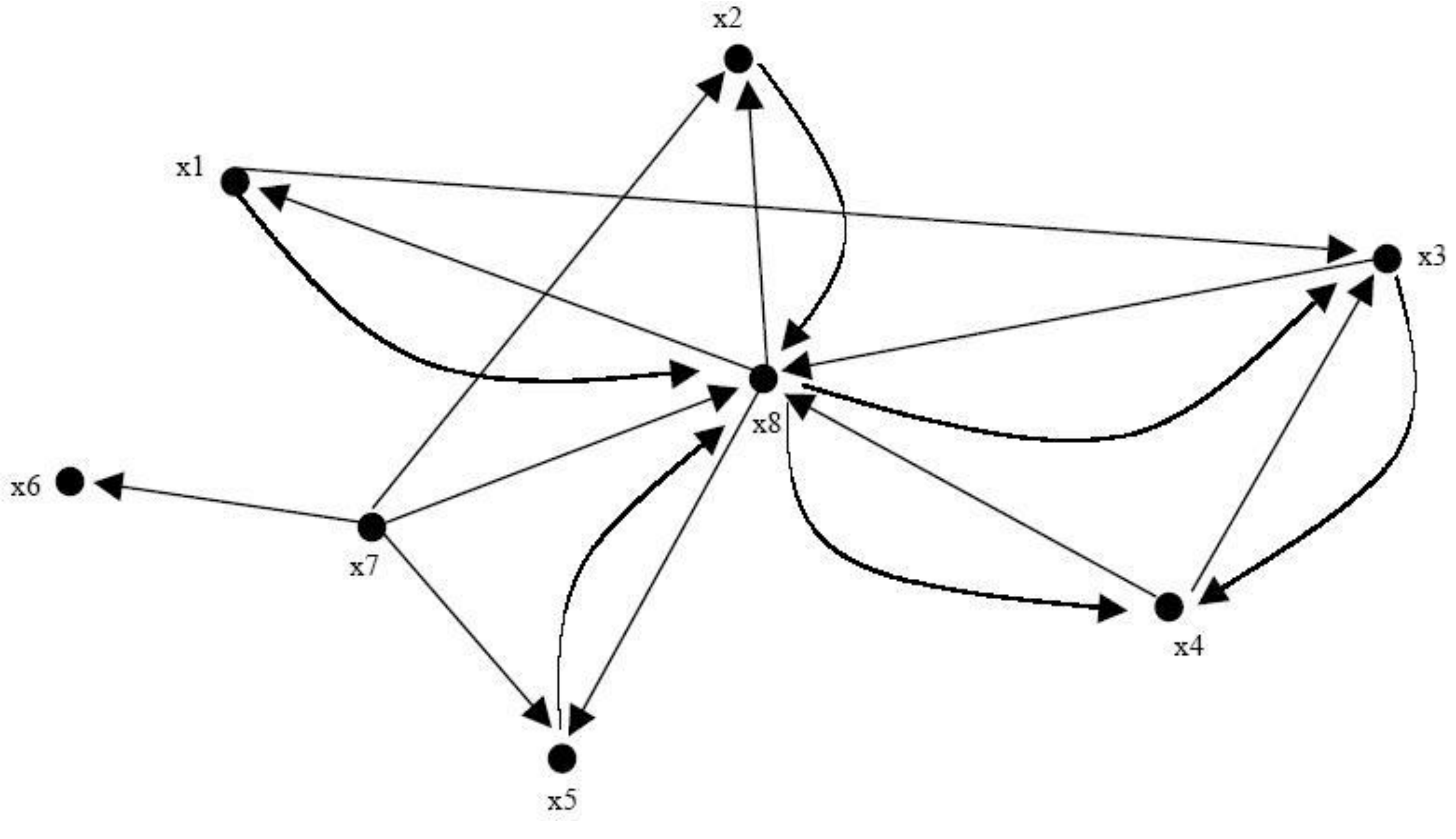
G9

Exercício 03

- O grafo a seguir representa as respostas colhidas em uma turma de crianças de escola na faixa de 7 anos, face à pergunta: “Quais são os colegas de quem você mais gosta?”

- Expresse, usando a notação conveniente, os seguintes fenômenos observáveis no grafo:
  - a) posições de liderança;
  - b) amizades recíprocas;
  - c) criança com problemas de relacionamento;
  - d) criança arredia.

Exercício 03 (cont)



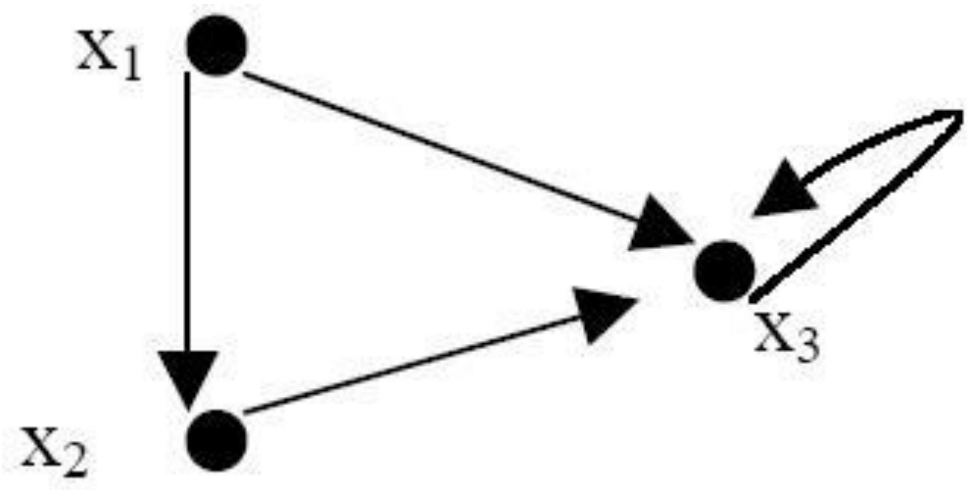
Matrizes

- É a representação numérica de um grafo.
- Para fins de cálculo, associa-se ao grafo 3 tipos de matrizes, as quais são mais habitualmente usadas:
  - Matriz de Adjacência
  - Matriz Latina
  - Matriz de Incidência

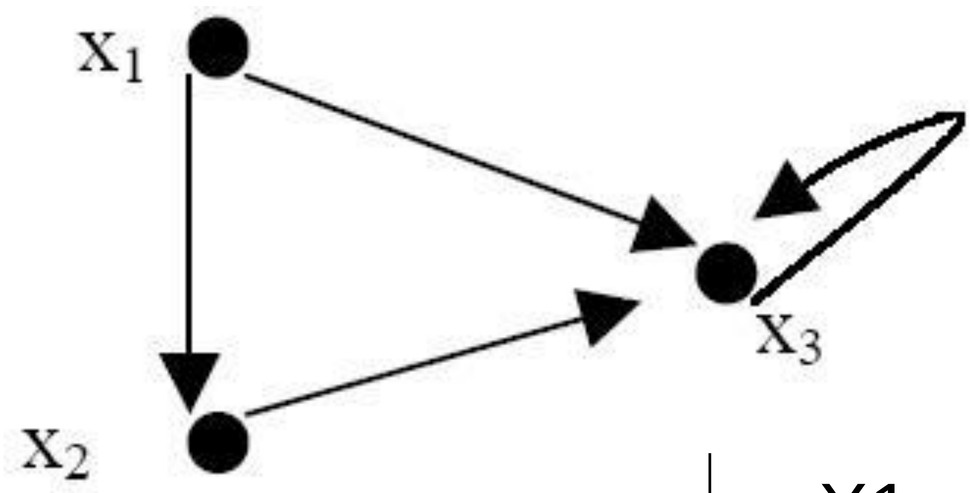
Matriz de Adjacência

- Ou Matriz Quadrada (n X n)
- É a matriz mais comumente usada

$$a_{ij} = 1 \Leftrightarrow \exists\ (x_i, x_j)$$
$$a_{ij} = 0 \Leftrightarrow \nexists\ (x_i, x_j)$$



Matriz de Adjacência

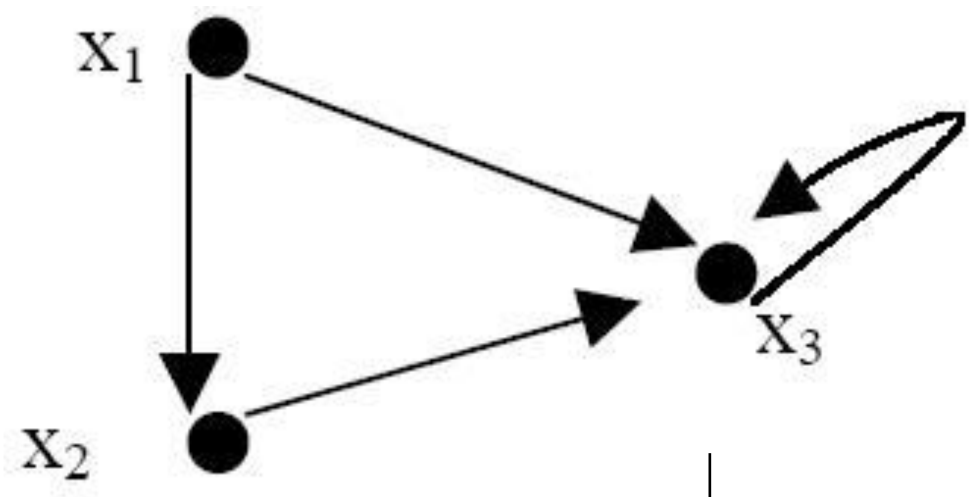


	X1	X2	X3
X1	0	1	1
X2	0	0	1
X3	0	0	1

Matriz Latina

- É uma matriz figurativa onde os elementos são conjuntos de vértices;
- Utilizada em problemas de enumeração de caminhos.

Matriz Latina



		x1x2	x1x3
			x2x3
			x3x3

Matriz Latina

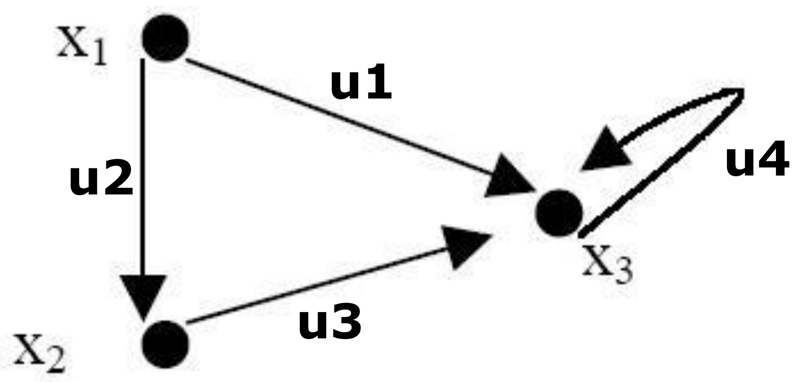
- O trabalho computacional com matrizes latinas exige o uso de **cadeias de caracteres**, portanto, a linguagem a ser utilizada deve fornecer facilidades neste tratamento.
- Por outro lado, ao contrário das matrizes de adjacência onde vértices sem arco eram representados por zero, em matrizes latinas são representadas por um caractere nulo.

Matriz de Incidência

- Matriz n X m, onde
  - n é o número de vértices do grafos (linhas).
  - m é o número de arestas do grafo (colunas).
- Definida por:

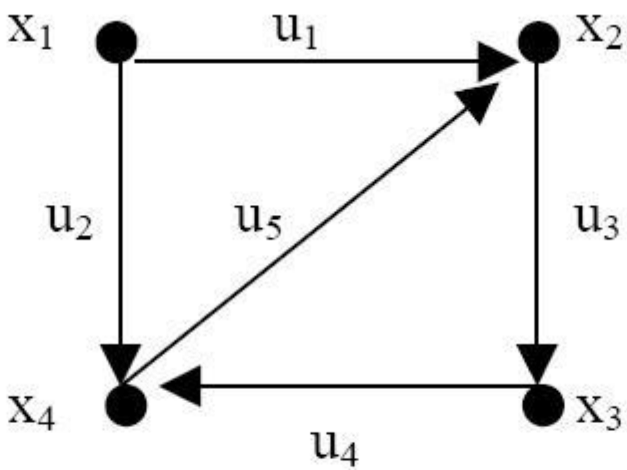
$$b_{ij} = +1 \Leftrightarrow \exists\ (x_i, x_j) = u_j,\ x_i \neq x_k$$
$$b_{ij} = -1 \Leftrightarrow \exists\ (x_k, x_i) = u_j,\ x_k \neq x_i$$
$$b_{ij} = 0 \text{ em todos outros casos}$$

Matriz de Incidência

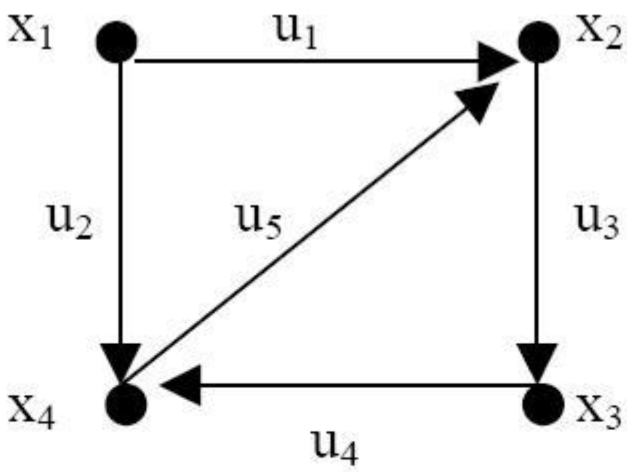


	u1	u2	u3	u4
x1	+1	+1	0	0
x2	0	-1	+1	0
x3	-1	0	-1	0

Matriz de Incidência – Contruir!!



Matriz de Incidência



	u1	u2	u3	u4	u5
x1	+1	+1	0	0	0
x2	-1	0	+1	0	-1
x3	0	0	-1	+1	0
x4	0	-1	0	-1	+1

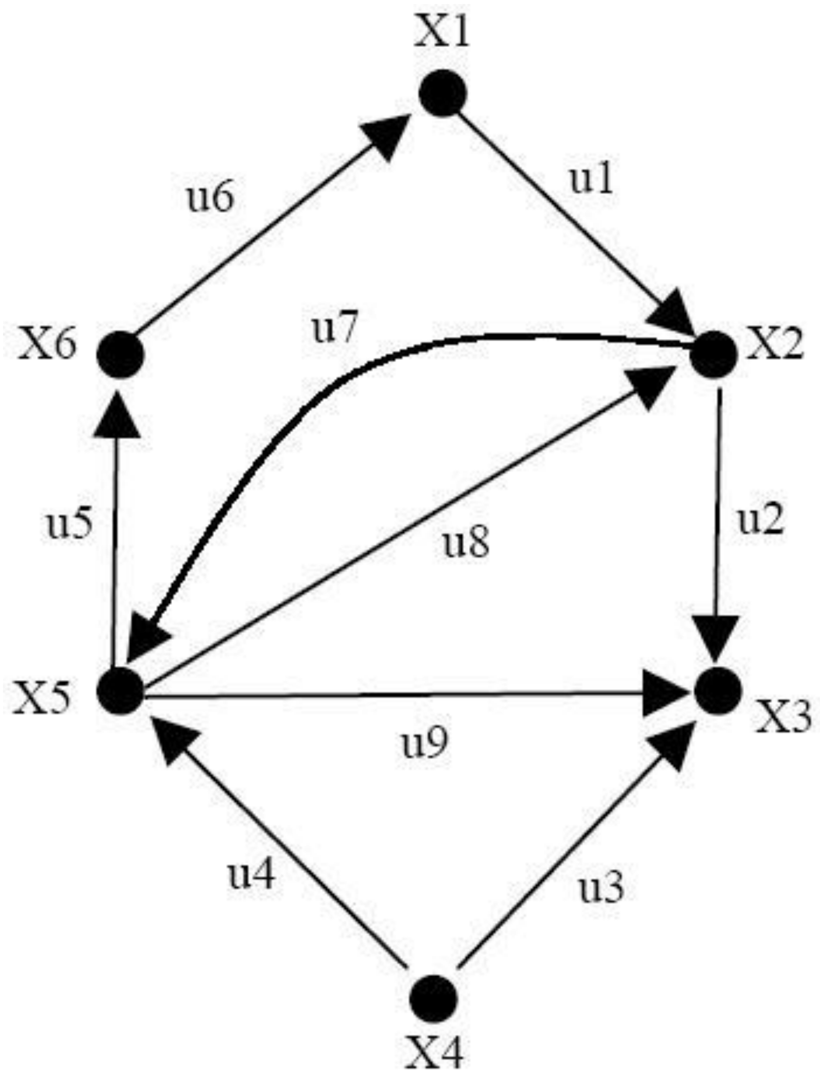
Matriz de Incidência

- A relação definida na matriz de incidência apenas especifica se determinado vértice é extremidade inicial ou final de um arco uj.

- Por utilizar mais espaço de memória (dada a maior quantidade de elementos a representar), a matriz de incidência é menos utilizada, no entanto, muito útil quando o problema a ser resolvido possui poucos vértices e arcos a considerar.

Exercício 04

- Dado o grafo, construa:
  a) matriz de adjacência
  b) matriz latina
  c) matriz de incidência



Exercício 05

- Dada a matriz de adjacência abaixo, construa o grafo que ela representa.

$$
\begin{array}{c|ccccc|}
 & a & b & c & d & e \\
\hline
a & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
b & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
c & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
d & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
e & 1 & 0 & 1 & 0 & 0
\end{array}
$$