Unidade 04
Caminhos

Prof. Ricardo Moraes

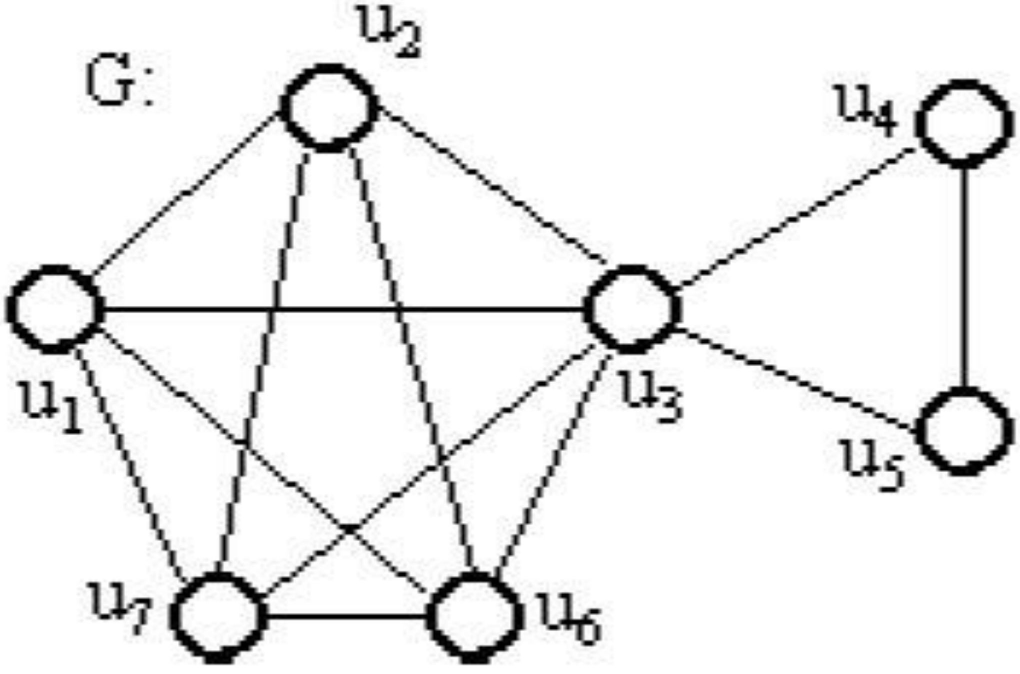
Universidade Federal de Santa Catarina

O que trata?

- Problemas Eulerianos;
- Caminhos Hamiltonianos;
- Menor Caminho entre dois vértices.

Grafos Eulerianos

- Um grafo G é dito ser euleriano se há um ciclo em G que contenha todas as suas arestas.
- Este ciclo é dito ser um ciclo euleriano.

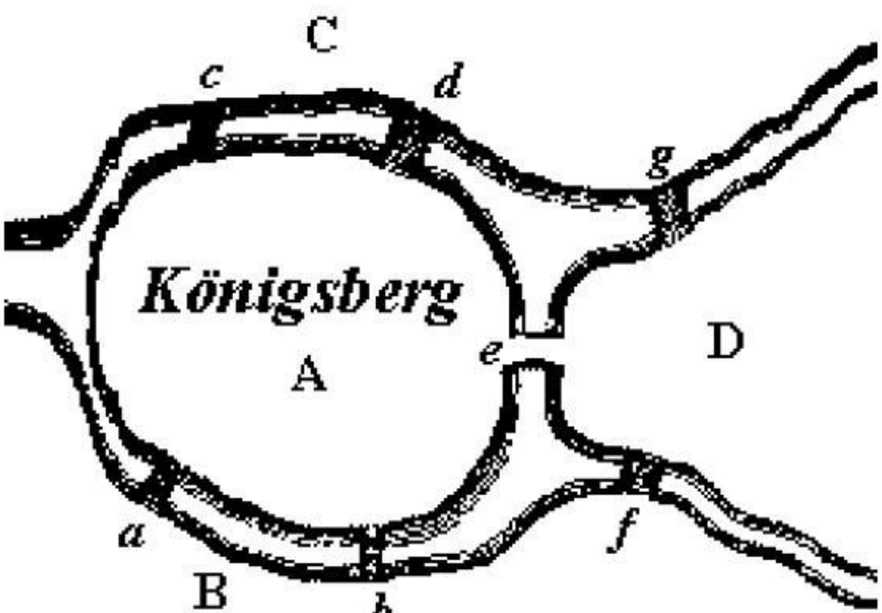


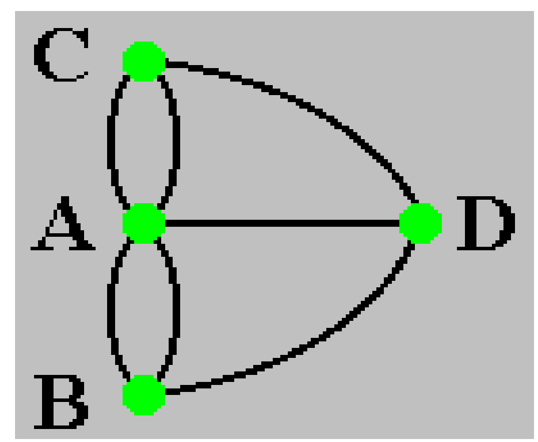
Grafos Eulerianos
Teorema

- Existe um caminho euleriano em um grafo conexo se, e somente se, não houver nenhum ou existirem exatamente dois vértices de grau ímpar.
  - Nenhum vértice de grau ímpar: o caminho pode começar em qualquer vértice e terminará neste mesmo vértice;
  - Dois vértices de grau ímpar: o caminho deve começar em um vértice ímpar e terminar no outro.

Grafos Eulerianos
Problema 1: Pontes de Königsberg

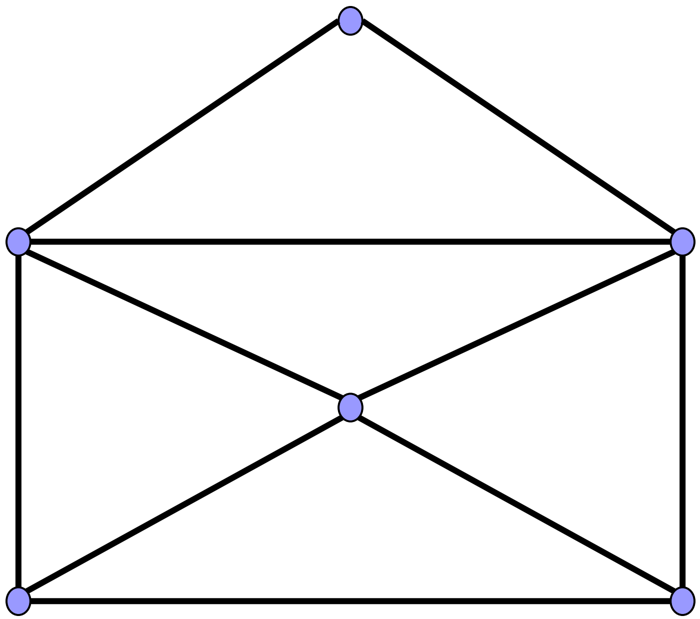
- Conjunto de sete pontes na Cidade de Königsberg; conectavam duas ilhas (A e D) entre si e as ilhas com as margens (B e C).
- Pergunta: é possível cruzar as sete pontes numa caminhada contínua sem passar duas vezes por qualquer uma delas?





Grafos Eulerianos
Problema 2: Desenho da casa

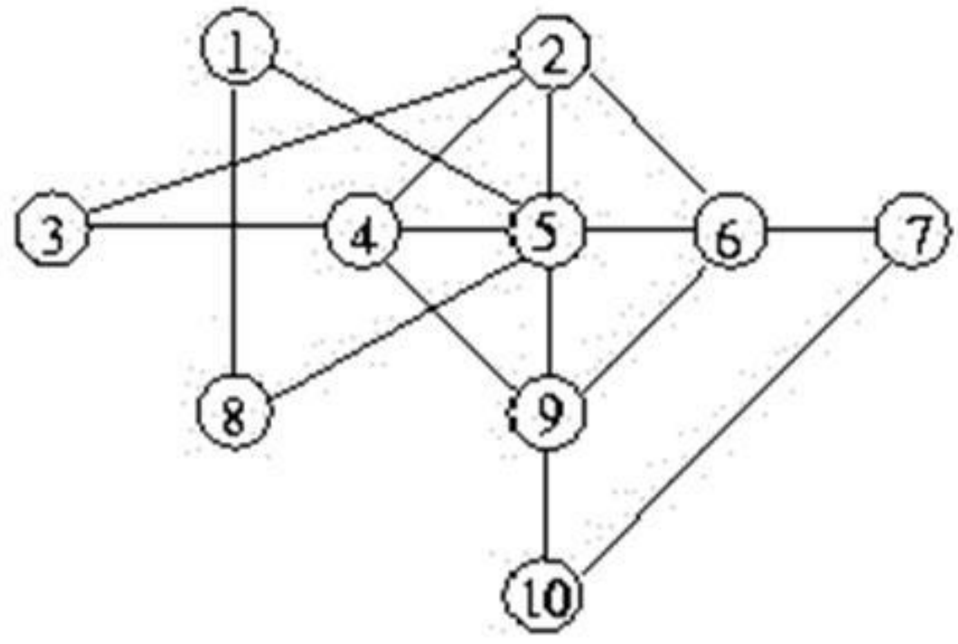
- É possível por a ponta do lápis numa das bolinhas e com movimentos contínuos (sem levantar e sem retroceder o lápis) traçar as linhas que formam o desenho da casa, traçando cada linha uma única vez?



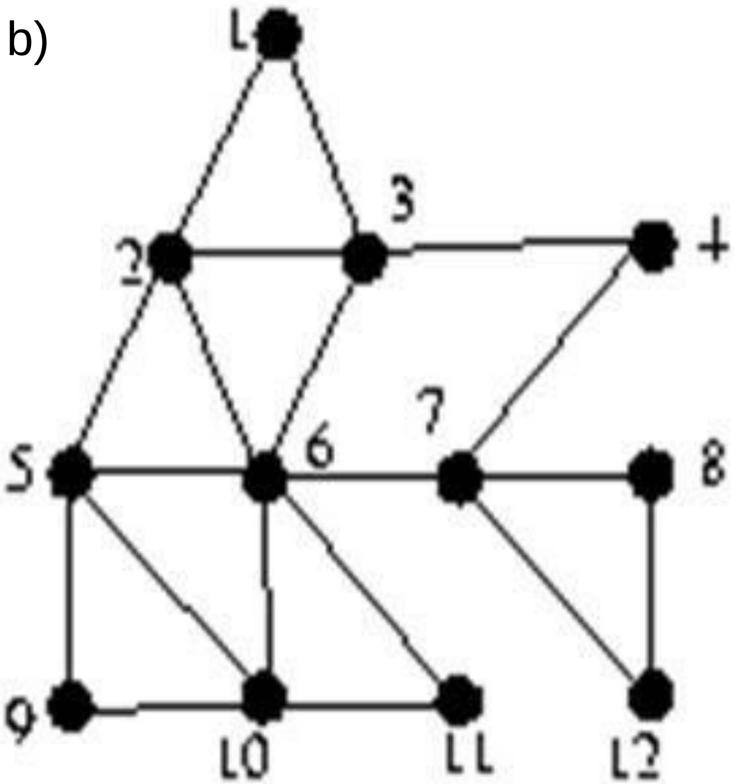
Exercício 14

- Determine se existe ou não um caminho de Euler. Caso exista, informe uma rota possível.

a)

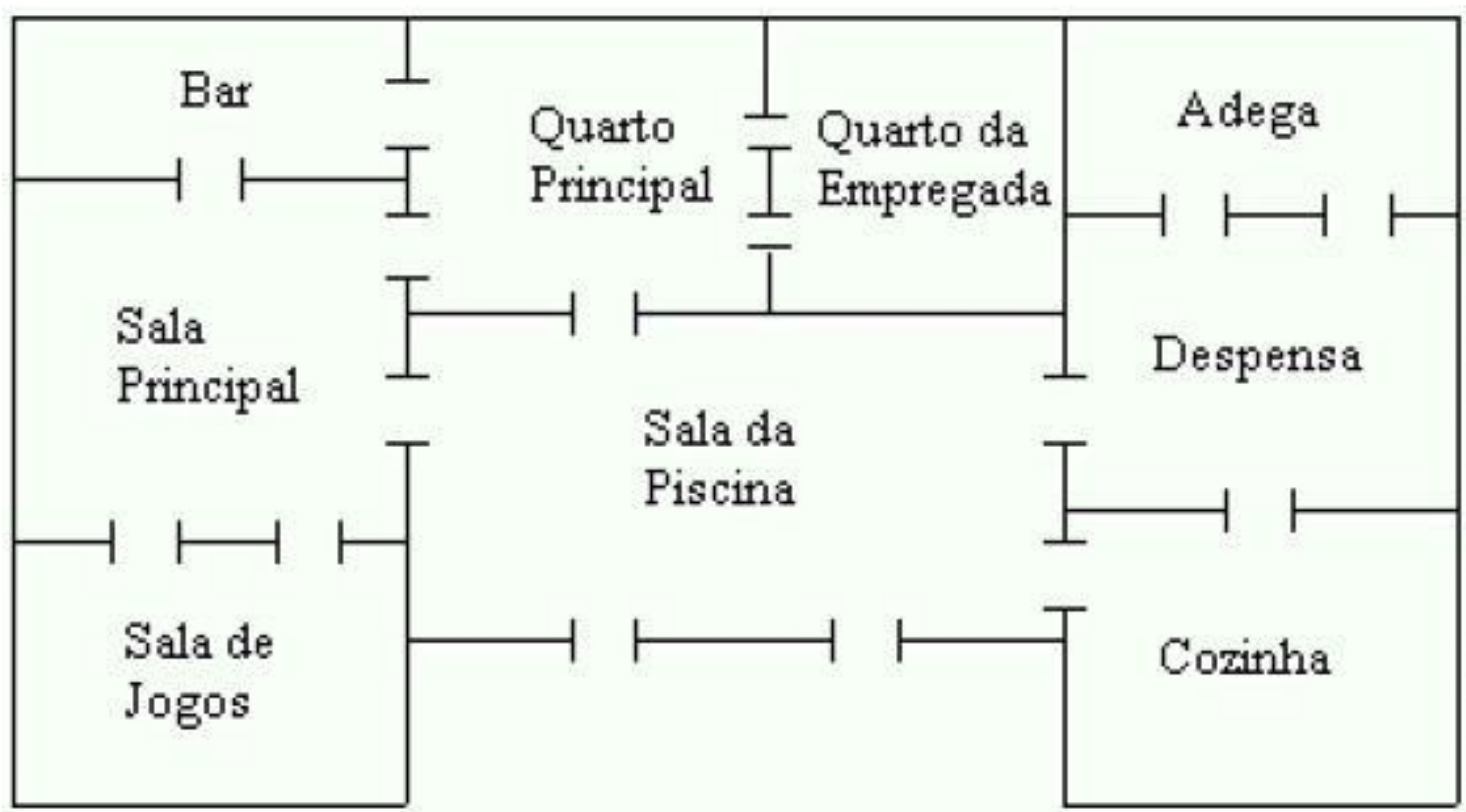


b)



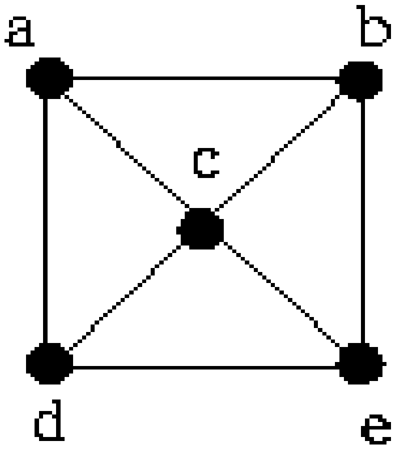
Grafos Hamiltonianos

- É possível entrar na casa, passar por todas as portas somente uma vez e sair da casa?

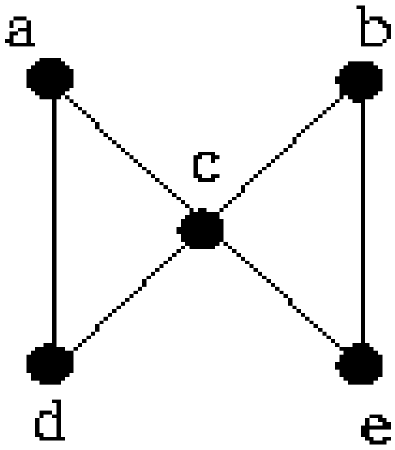


Grafos Hamiltonianos

- Um grafo *G*(*V*,*A*) é dito ser hamiltoniano se existe um ciclo que passa exatamente uma vez em cada um dos vértices de G



hamiltoniano



não hamiltoniano

Grafos Hamiltonianos

- Não existe uma caracterização para identificar grafos hamiltonianos como existe para os eulerianos;
- A busca de tal caracterização é um dos maiores problemas ainda não solucionados da teoria dos grafos;
- Muito pouco é conhecido dos grafos hamiltonianos;
- A maioria dos teoremas existentes são da forma: “Se G possui arestas suficientes, então G é hamiltoniano”;

Grafos Hamiltonianos – Método Exato

- Este método envolve a geração de todos os caminhos simples por multiplicação sucessiva de matriz. Envolve os seguintes passos:
- P1. Construa inicialmente a matriz de adjacência A do grafo.
- P2. Construa a matriz B(n x n) da seguinte forma:

$$b_{ij} = \begin{cases} v_j, & \text{se existe a aresta } (v_i, v_j) \\ 0, & \text{Caso contrário} \end{cases}$$

- P3. Faça P1 $\leftarrow$ A;

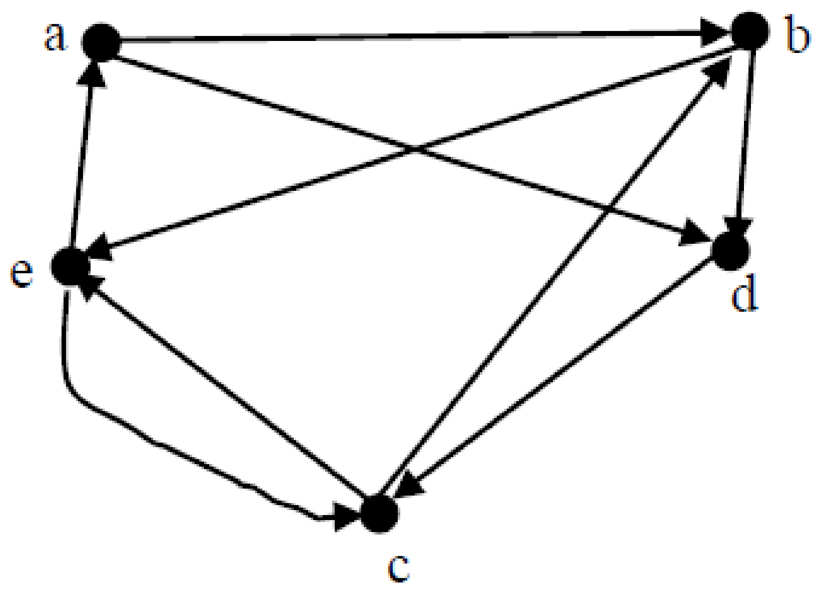
Grafos Hamiltonianos – Método Exato

- P4. Para i=1,2,..., n-1 faça
  - $P_{i+1} \leftarrow B \times P_i$

- OBS:
- Os elementos da matriz P são cadeias de caracteres (vértices) e não números. A operação multiplicação significa a concatenação do caracteres e a soma representa a divisão de duas ou mais cadeias de caracteres.
- Cada elemento da matriz Pi representa um caminho hamiltoniano de comprimento i + 1 entre os vértices s e t.
- Para todo P_{i+1} a diagonal é zero, assim como todo caminho de s até t contendo s.

Grafos Hamiltonianos – Exemplo

- Determinar os caminhos hamiltonianos do grafo abaixo através do método algébrico:



- A solução está no Moodle

Problema do Menor Caminho
Relembrando Conceitos:

- CADEIA
  - Cadeia é qualquer seqüência de arestas onde o vértice final de uma aresta é o vértice inicial da próxima;
  - Sendo o tamanho de uma cadeia dado pelo número de arestas percorridos.

- CAMINHO
  - Um caminho é uma cadeia na qual todos os arcos possuem a mesma orientação.

Problema do Menor Caminho
Relembrando Conceitos

- Podemos deduzir que em grafos conexos não orientados e ponderados, sempre existe um caminho entre quaisquer dois vértices x e y.
- De fato, pode haver vários desses caminhos.
- A pergunta é como encontrar um caminho com o menor peso? Como os pesos geralmente representam distâncias, este problema ficou conhecido como problema do "caminho mínimo".

Problema do Caminho de Custo Mínimo

- O problema de encontrar o caminho de custo mínimo entre dois vértices de um grafo é o mais importante relacionado com a busca de caminhos em grafos em vista de sua aplicação à várias situações da realidade.
- Assim sendo, é importante termos soluções computacionais viáveis para resolver problemas desse tipo.

Problema do Caminho de Custo Mínimo

- Há um grande número de situações possível quando da obtenção deste caminho, a exemplo de: existência ou não de ciclos; determinação do caminho ou apenas do custo mínimo; etc.

- Dada esta diversidade de situações, há um número razoável de algoritmos que foram propostos ao longo do tempo, dentre os quais os algoritmos de **Dijkstra** e de **Floyd** se destacam.

- O problema do menor caminho consiste em determinar um menor caminho entre um vértice de origem $s \in V$ e todos os vértices *v* de *V*.

Algoritmo de Floyd

Considere que a matriz de custo foi iniciada de tal modo que $d_{ii} = 0$ para todo $i = 1, 2, \ldots n$ e que $d_{ij} = \propto$, quando não existe a aresta (x_i, x_j). $d_{ij} = C(x_i, x_j)$ se $\exists\ (x_i, x_j)$.

P1. Faça $K \leftarrow 0$;

P2. Faça $k \leftarrow k+1$;

P3. Para todo $i \neq k$ tal que $dik \neq \propto$ e todo $j \neq k$ tal que $dkj \neq \propto$

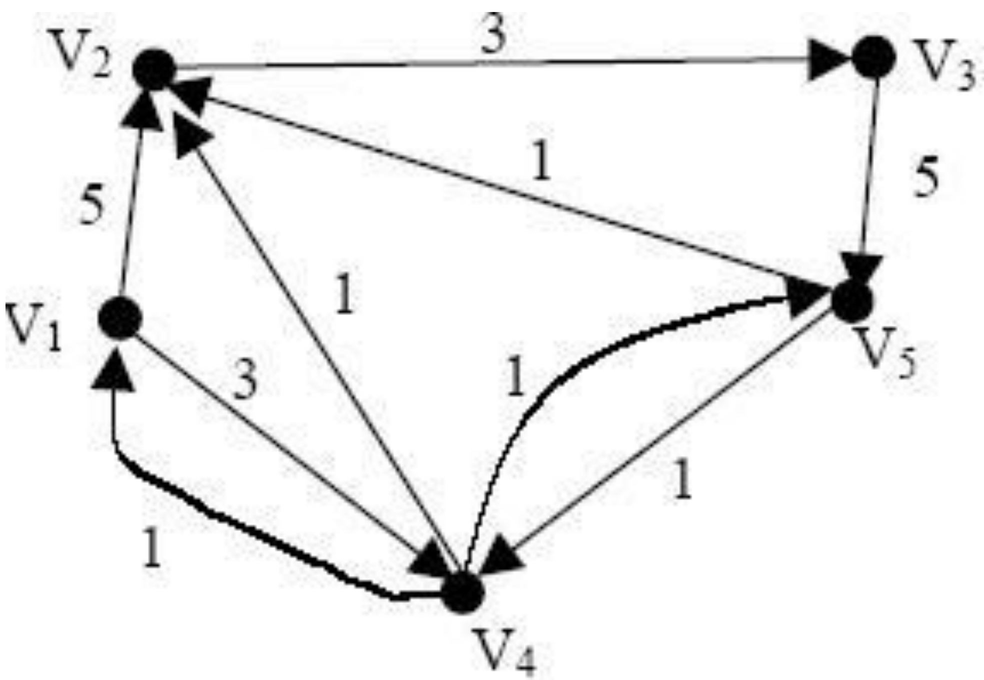
Faça $$d_{ij}^{k} = \min[d_{ij}^{k-1}, (d_{ik}^{k-1} + d_{kj}^{k-1})]$$

P4. Teste de finalização

a) Se algum $d_{ii} >= 0$, e $k = n$, a solução foi achada, e $[d_{ij}]$ fornece os comprimentos de todos os menores caminhos. Pare.

b) Se todo $d_{ii} >= 0$ mas $k < n$, então retorne a P2.

Algoritmo de Floyd - Exemplo



D0 = D1 =

0	5	∞	3	∞
∞	0	3	∞	∞
∞	∞	0	∞	5
1	1	∞	0	1
∞	1	∞	1	0

$$d_{ij}^{k} = \min[d_{ij}^{k-1}, (d_{ik}^{k-1} + d_{kj}^{k-1})]$$

Exemplo:

k = 2 i = 1 j = 2

$$d_{12}^{2} = \min\left[d_{12}^{1}, \left(d_{12}^{1} + d_{22}^{1}\right)\right]$$

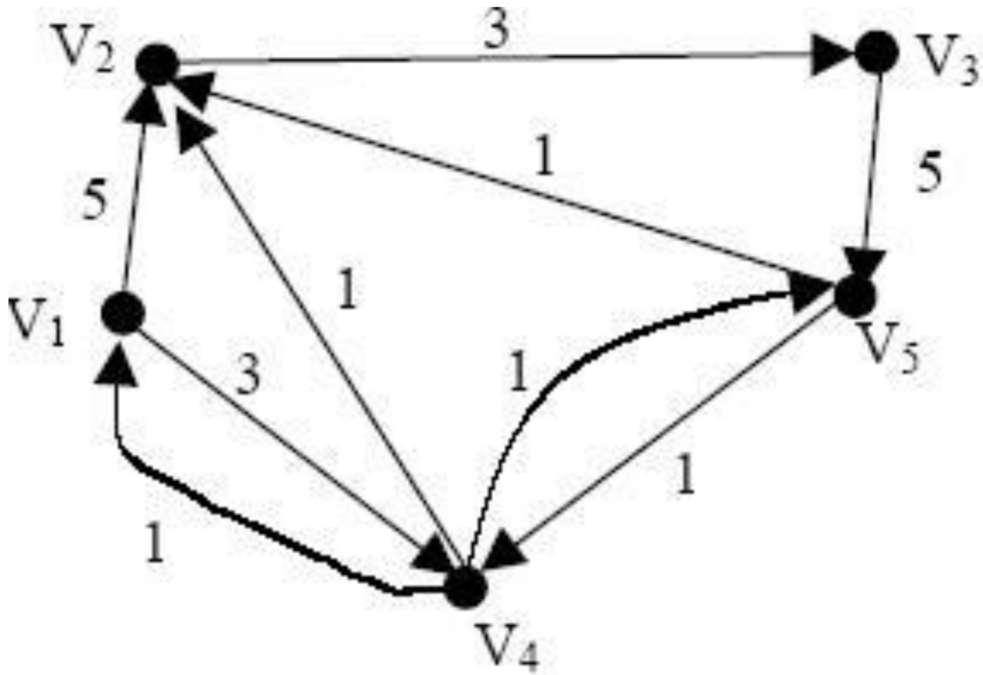
$$d_{12}^{2} = \min\left[5, \left(5+0\right)\right] = (5,5) = 5$$

novo valor

D2=

0	5	8	3	∞
∞	0	3	∞	∞
∞	∞	0	∞	5
1	1	4	0	1
∞	1	4	1	0

Algoritmo de Floyd - Exemplo



D0 = D1 =

0	5	∞	3	∞
∞	0	3	∞	∞
∞	∞	0	∞	5
1	1	∞	0	1
∞	1	∞	1	0

$$d_{ij}^{k} = \min[d_{ij}^{k-1}, (d_{ik}^{k-1} + d_{kj}^{k-1})]$$

D2=

0	5	8	3	∞
∞	0	3	∞	∞
∞	∞	0	∞	5
1	1	4	0	1
∞	1	4	1	0

Exemplo:

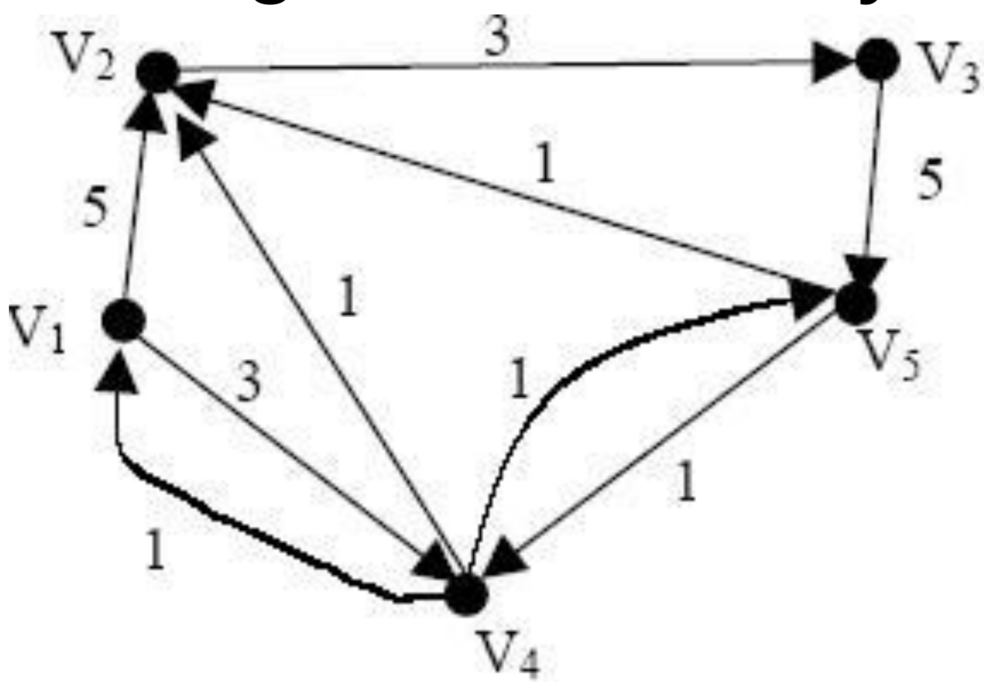
k = 2 i = 1 j = 3

novo valor

$$d_{13}^{2} = \min\left[d_{13}^{1}, \left(d_{12}^{1} + d_{23}^{1}\right)\right]$$

$$d_{13}^{2} = \min\left[\infty, (5+3)\right] = (\infty, 8) = 8$$

Algoritmo de Floyd - Exemplo



D0 = D1 =

0	5	∞	3	∞
∞	0	3	∞	∞
∞	∞	0	∞	5
1	1	∞	0	1
∞	1	∞	1	0

$$d_{ij}^{k} = \min[d_{ij}^{k-1}, (d_{ik}^{k-1} + d_{kj}^{k-1})]$$

D2=

0	5	8	3	∞
∞	0	3	∞	∞
∞	∞	0	∞	5
1	1	4	0	1
∞	1	4	1	0

Exemplo:

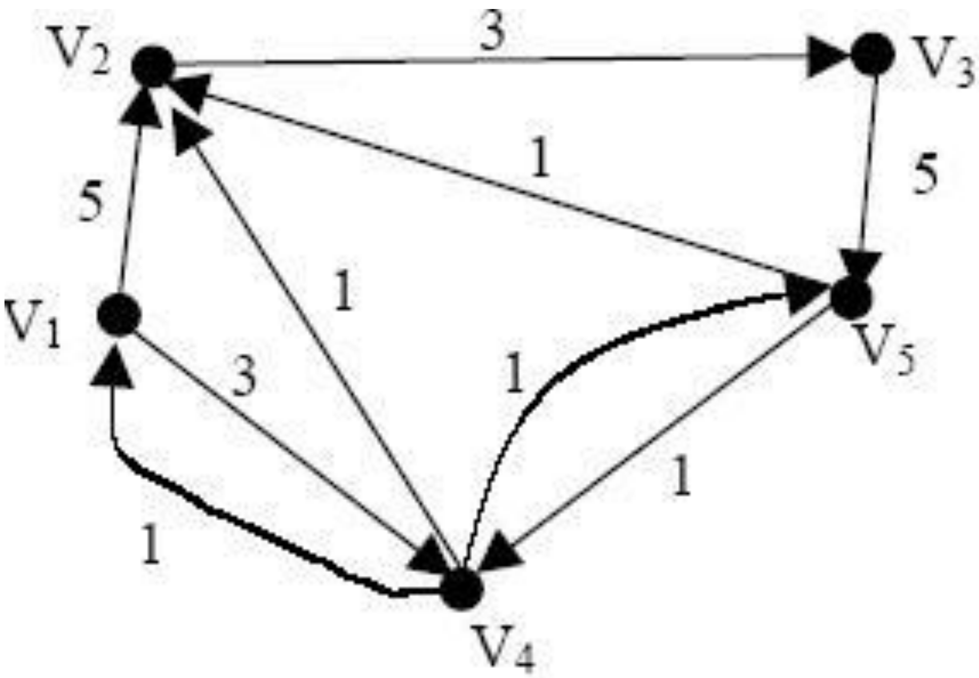
k = 2 i = 1 j = 4

novo valor

$$d_{14}^{2} = \min\left[d_{14}^{1}, \left(d_{12}^{1} + d_{24}^{1}\right)\right]$$

$$d_{14}^{2} = \min\left[3, \left(5 + \infty\right)\right] = (3, \infty) = 3$$

Algoritmo de Floyd - Exemplo



D0 = D1 =

0	5	∞	3	∞
∞	0	3	∞	∞
∞	∞	0	∞	5
1	1	∞	0	1
∞	1	∞	1	0

$$d_{ij}^{k} = \min[d_{ij}^{k-1}, (d_{ik}^{k-1} + d_{kj}^{k-1})]$$

Exemplo 2:

k = 2 i = 4 j = 3

$$d_{43}^{2} = \min\left[d_{43}^{1}, \left(d_{42}^{1} + d_{23}^{1}\right)\right]$$

$$d_{43}^{2} = \min\left[\infty, (1+3)\right] = (\infty, 4) = 4$$

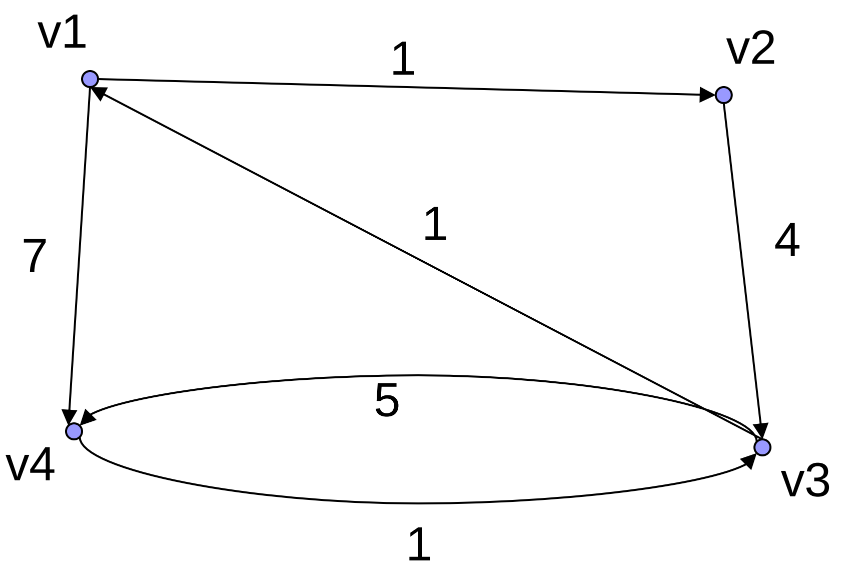
novo valor

D2=

0	5	8	3	∞
∞	0	3	∞	∞
∞	∞	0	∞	5
1	1	4	0	1
∞	1	4	1	0

Exercício 15

- Aplicar o algoritmo de Floyd para o grafo abaixo, encontrando o menor caminho entre todos os pontos.



Matriz de Roteamento

- Em diversas situações deseja-se saber qual o menor caminho de um vértice a outro.
- Uma maneira de se conhecer esse caminho é através da matriz de roteamento.
- Baseia-se nos moldes do algoritmo de Floyd.

Matriz de Roteamento

Entrada: Matriz de Custos D

Saída: A → Matriz com os comprimentos dos menores caminhos

R → Fornece o vértice k que é o primeiro a ser visitado no menor caminho de vi até vj.

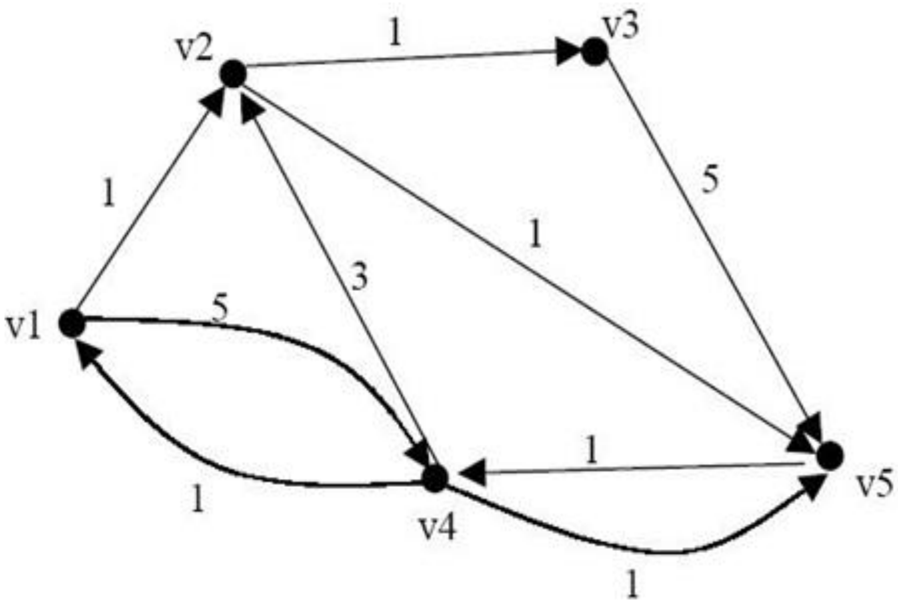
Início

Para i =1 até n Faça
    Para j = 1 até n Faça
        A[i,j] ← D[i,j];
        R[i,j] ← 0;
Para i = 1 até n Faça
    A[i,i] ← 0;
Para k = 1 até n Faça
    Para i = 1 até n Faça
        Para j = 1 até n Faça
            Se A[i,k] + A[k,j] < A[i,j] então {aplica-se a função
}
                A[i,j] ← A[i,k]+A[k,j];
                R[i,j] ← k;

Fim

$$d_{ij}^{k} = MIN\left[d_{ij}^{k-1}, \left(d_{ij}^{k-1} + d_{kj}^{k-1}\right)\right]$$

Matriz de roteamento - Exemplo



A partir da matriz de custo D, aplicando o algoritmo de Floyd Modificado, pode-se obter a matriz A, com os comprimentos dos menores caminhos e a matriz de roteamento R.

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \infty & 5 & \infty \\ \infty & 0 & 1 & \infty & 1 \\ \infty & \infty & 0 & \infty & 5 \\ 1 & 3 & \infty & 0 & 1 \\ \infty & \infty & \infty & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 7 & 8 & 0 & 6 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} v1 & v2 & v2 & v5 & v2 \\ v5 & v2 & v3 & v5 & v5 \\ v5 & v5 & v3 & v5 & v5 \\ v1 & v1 & v2 & v4 & v5 \\ v4 & v4 & v4 & v4 & v5 \end{bmatrix}$$

Agora, por exemplo, para determinar a rota de v2 a v1, toma-se R[2,1] = v5, R[5,1]= v4, R[4,1] = v1.

Logo, a rota de v2 a v1 é **v2** - **v5** - **v4** - **v1.**

Exercício

- Apresente as seguintes rotas (baseado no exemplo anterior):
  - a) de v5 até v3;
  - b) de v4 até v2;
  - c) de v1 até v4;
  - d) de v3 até v2;
  - E) de v2 até v1.

Exercício 16