DEC7536 Projeto e Análise de Algoritmos
Primeira Lista de Exercícios

1. (Cris-IME-USP) Usando a definição de notação O, prove que

a. $n^2 + 10n + 20 = O(n^2)$, b. $\lceil n/3 \rceil = O(n)$

c. $\log_2 n = O(\log_{10} n)$, d. $\log_{10} n = O(\log_2 n)$, e. $n = O(2^n)$

f. $n/1000$ não é $O(1)$, g. $n^2/2$ não é $O(n)$, h. 3^n não é $O(2^n)$

2. (Cris-IME-USP) Prove ou dê contra-exemplo para as afirmações abaixo:

a. $\log \sqrt{n} = O(n^2)$

b. Se $f(n) = O(g(n))$ e $g(n) = O(h(n))$ então $f(n) = O(h(n))$

c. Se $f(n) = O(g(n))$ e $g(n) = \Theta(h(n))$ então $f(n) = \Theta(h(n))$

d. Suponha que $\log(g(n)) > 0$ e que $f(n) > 1$ para todo n suficientemente grande. Neste caso, se $f(n) = O(g(n))$ então $\log(f(n)) = O(\log(g(n))$.

e. Se $f(n) = O(g(n))$ então $2^{f(n)} = O(2^{g(n)})$.

3. (DPV) Mostre que, se c é um número real positivo, então $g(n) = 1 + c + c^2 + \ldots + c^n$ é:

a. $\Theta(1)$ se $c < 1$.

b. $\Theta(n)$ se $c = 1$.

c. $\Theta(c^n)$ se $c > 1$.

4. (DPV) Mostre que $\log(n!) = \Theta(n \log n)$. (Dica: Para mostrar uma cota superior, compare $n!$ com n^n. Para mostrar uma cota inferior, compare com $(n/2)^{n/2}$.)

5. (DPV) Suponha que você esteja escolhendo entre os seguintes algoritmos:

- Algoritmo A resolve problemas dividindo-os em cinco subproblemas de metade do tamanho, solucionando cada subproblema recursivamente e, então, combinando as soluções em tempo linear.
- Algoritmo B resolve problemas de tamanho n resolvendo recursivamente dois subproblemas de tamanho $n - 1$ e, então, combinando as soluções em tempo constante.

- Algoritmo C soluciona problemas de tamanho n dividindo-os em nove subproblemas de tamanho $n/3$, resolvendo recursivamente cada subproblema e, então, combinando as respostas em tempo $O(n^2)$.

Qual o tempo de execução de cada um desses algoritmos (em notação O) e qual você escolheria?

6. (DPV) Resolva as seguintes relações de recorrência e dê uma cota O para cada uma delas.

(a) $T(n) = 2T(n/3) + O(1)$

(b) $T(n) = 5T(n/4) + O(n)$

(c) $T(n) = 7T(n/7) + O(n)$

(d) $T(n) = 9T(n/3) + O(n^2)$

(e) $T(n) = 8T(n/2) + O(n^3)$

(f) $T(n) = 49T(n/25) + O(n^{3/2} \log n)$

(g) $T(n) = T(n-1) + 2$

(h) $T(n) = T(n-1) + n^c$, onde $c \geq 1$ é uma constante

(i) $T(n) = T(n-1) + c^n$, onde $c > 1$ é uma constante

(j) $T(n) = 2T(n-1) + 1$

(k) $T(n) = T(\sqrt{n}) + 1$

7. (DPV) Quantas linhas, em função de n (e na notação Θ), o seguinte programa imprime? Escreva e resolva uma recorrência. Você pode considerar que n é uma potência de 2.

$f(n)$
se $n > 1$
    então imprime_linha("ainda rodando")
    $f(n/2)$
    $f(n/2)$

8. (DPV) É dado um vetor de n elementos e você nota que alguns dos elementos são duplicados, ou seja, eles aparecem mais de uma vez no vetor. Mostre como remover todos os duplicados do vetor em tempo $O(n \log n)$.