Projeto e Análise de Algoritmos
Trabalho 3

Lucas Fernandes Gauer

Julho de 2019

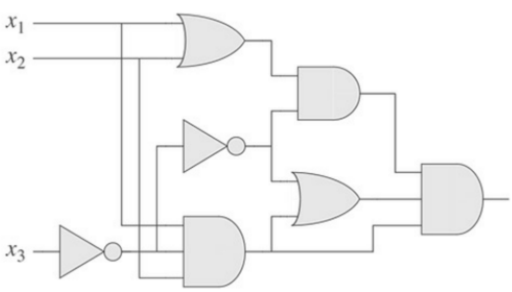
1 CIRCUIT-SAT (Questão 1)

1.1 Definição

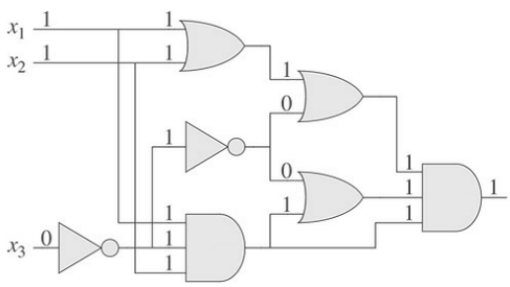
Um CIRCUIT-SAT, de maneira reduzida, é um circuito que combina portas lógicas e é satisfazível. Isso implica em uma ampla magnitude de problemas de diversas complexidades. Todavia é importante salientar que este caso aceita circuitos com diversos sinais de entrada mas apenas uma saída.

1.2 Exemplo

Como demonstrado no livro *Algoritmos: Teoria e Prática*, o circuito da Figura 1 é um CIRCUIT-SAT. Este circuito é composto apenas pelas portas *AND, OR* e *NOT*. Coerente com o apresentado anteriormente, existe apenas uma saída para o circuito. Uma solução para o circuito é dada por $x_1 = 1$, $x_2 = 1$ e $x_3 = 0$.



(a) Circuito Demonstrado



(b) Circuito com sinais resultantes na saída 1

Figura 1: Registros para $C = 100nF$ e $R = 1k\Omega$

2 SAT (Questão 2)

2.1 Definição

SAT se difere do item anterior pois não é um circuito e sim uma fórmula booleana. Um exemplo em termos de linguagem SAT apresenta n variáveis booleanas, m conectivos booleanos e parênteses auxiliares. É um requerimento de SAT que esta fórmula seja satisfazível. Em outras palavras, é um raciocínio matemático lógico (booleano) solucionável. Por se tratar de uma fórmula, existirá uma única saída booleana uma vez definidas todas as variáveis de entrada.

2.2 Exemplo

A fórmula a seguir exemplifica um SAT:

$$\phi = ((x_1 \rightarrow x_2) \vee \neg((\neg x_1 \leftrightarrow x_3) \vee x_4)) \wedge \neg x_2$$

Esta pode ser verificada utilizando $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$ e $x_4 = 1$.

$$\phi = ((0 \rightarrow 0) \vee \neg((\neg 0 \leftrightarrow 1) \vee 1)) \wedge \neg 0$$

$$\phi = ((0 \rightarrow 0) \vee \neg((1 \leftrightarrow 1) \vee 1)) \wedge 1$$

$$\phi = (1 \vee \neg(1 \vee 1)) \wedge 1$$

$$\phi = (1 \vee \neg 1) \wedge 1$$

$$\phi = (1 \vee 0) \wedge 1$$

$$\phi = 1 \wedge 1$$

$$\phi = 1$$

Logo, fica visível como o resultado é composto por apenas uma saída.

3 Redução de CIRCUIT-SAT a SAT (Questão 3 e 4)

Existe uma forte relação entre CIRCUIT-SAT e SAT. Para realizar a redução do primeiro para o segundo é preciso ter conhecimento das entradas, dos sinais internos e das portas utilizadas no circuito. Sendo m sinais de entrada e n sinais internos, é possível dizer que existirão $m + n$ fios ou variáveis(x_i).

Uma vez definida a nomenclatura para cada sinal, observa-se cada porta lógica individualmente para criar cláusulas, ou seja, frações do resultado final da redução. Por esta lógica, o número de portas lógicas equivale ao número de cláusulas. Cada cláusulas será:

$$x_{out} \leftrightarrow \text{operação lógica entre variáveis}$$

onde x_{out} é o sinal de saída. A operação lógica pode variar tanto na quantidade de variáveis de entrada quanto na operação em si. Por exemplo, uma porta AND de três entradas seria $x_4 \leftrightarrow (x_1 \wedge x_2 \wedge x_3)$

Tendo todas as cláusulas definidas, o próximo passo é a unificação. Esta se dará da seguinte maneira:

$$\phi = x_{out} \wedge C_1 \wedge C_2 \wedge ... \wedge C_n$$

onde C_i equivale a cada uma das cláusulas.

Como mostrado nesta seção, o número de operações para a redução é conhecido e bem definido estando diretamente relacionado ao número de fios e ao número de portas lógicas no circuito. Além disso, optar pela redução na forma apresentada é muito mais eficiente do que utilizar métodos de tentativa e erro desgastantes.

4 Relação entre solução de CIRCUIT-SAT e SAT (Questão 5)

Após transcrever, pela redução, um problema CIRCUIT-SAT para SAT fica definida uma equivalência matemática. Ou seja, SAT é uma representação matemática do circuito. Se a redução foi realizada com perfeição, todo solução para um deve servir para o outro. Caso contrário a equivalência estaria sendo colocada em questionamento e desbancaria a técnica da redução. Em outras palavras, cada sinal e suas implicações nas portas lógicas são registrados na redução. Se entradas semelhantes gerassem sinais de saída diferentes haveria algum erro na transcrição.

5 Observações

Este trabalho foi fortemente baseado no Capítulo 34 do livro *Algoritmos: Teoria e Prática* devidamente referenciado abaixo.

Referências

[1] Thomas H. Cormen, Charles E. Leiserson, Ronald L. Rivest, Cliffor Stein. *Algoritmos: Teoria e Prática*. 3ª edição, 2009.