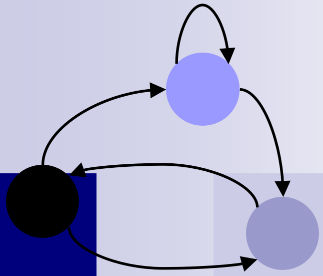


Unidade 02
Conexidade

Prof. Ricardo Moraes

Universidade Federal de Santa Catarina

O que é Conexidade?

- Um grafo é dito conexo se for possível visitar qualquer vértice, partindo de um outro e passando por arestas.
- Esta visita sucessiva é denominada caminho.

Problemas típicos ao Assunto

- Determinação de localização de pontos de emergência (ou seja, pontos ótimos para distribuição, tais como em armazéns, transportadoras, estabelecimentos comerciais, público, etc);
- Problemas de engenharia de tráfego;

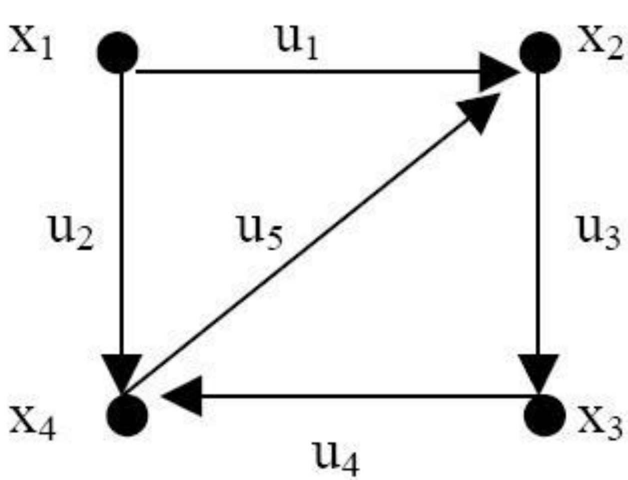
Mais Alguns Conceitos

- Antes de iniciar a Conexidade alguns conceitos:

- Fecho Transitivo: indica o inter-relacionamento direto ou indireto dos vértices.
  - Fecho Transitivo Direto (ftd) $\Gamma^{+}(xi)$
    - O fecho transitivo direto de um vértice v é o conjunto de todos os vértices que podem ser atingidos por algum caminho iniciando em v.
  - Fecho Transitivo Inverso (fti) $\Gamma^{-}(xi)$
    - O fecho transitivo inverso de um vértice v é o conjunto de todos os vértices a partir dos quais se pode atingir v por algum caminho.

Fechos Transitivos

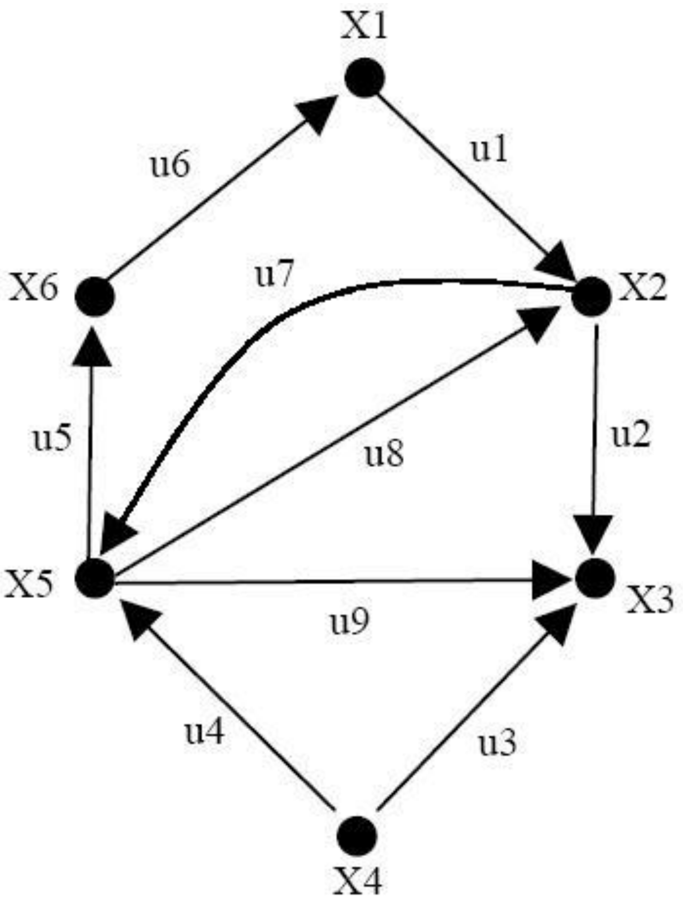
- $\Gamma^{+}(x1) = \{x1, x2, x3, x4\}$ $\Gamma^{-}(x1) = \{ x1 \}$
- $\Gamma^{+}(x2) = \{x2, x3, x4\}$ $\Gamma^{-}(x2) = \{x1, x2, x3, x4\}$
- $\Gamma^{+}(x3) = \{x2, x3, x4\}$ $\Gamma^{-}(x3) = \{x1, x2, x3, x4\}$
- $\Gamma^{+}(x4) = \{x2, x3, x4\}$ $\Gamma^{-}(x4) = \{x1, x2, x3, x4\}$



	x1	x2	x3	x4
x1		1		1
x2			1	
x3				1
x4		1		

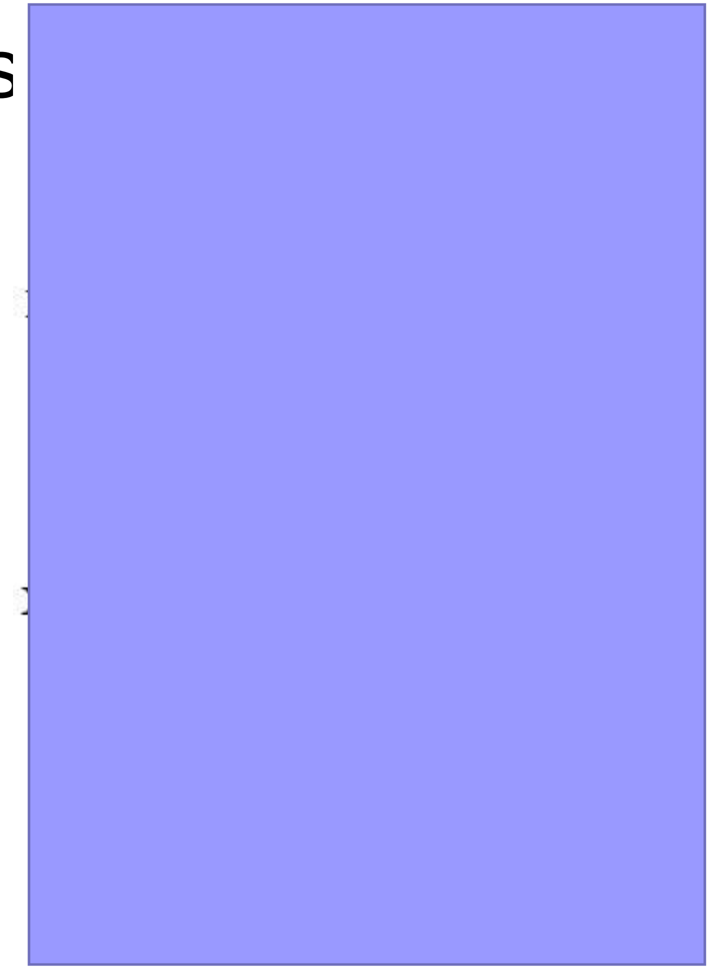
Exercício 07

- Ache os fechos transitivos do grafo ao lado.



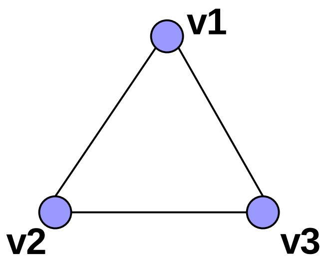
Exercício 07

- Ache os fechos transitivos do grafo ao lado.

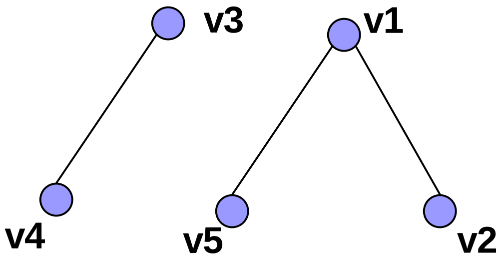


Tipos de Conexidade

- **a) Grafo Conexo** - Um grafo G(V,A) é dito ser conexo se há pelo menos uma cadeia ligando cada par de vértices deste grafo G.



- **b) Grafo Não Conexo (Desconexo)** - Um grafo G(V,A) é dito ser desconexo se há pelo menos um par de vértices que não está ligado por nenhuma cadeia.
  - Sendo que, um grafo não conexo consiste de dois ou mais subgrafos conexos.



Tipos de Conexidade

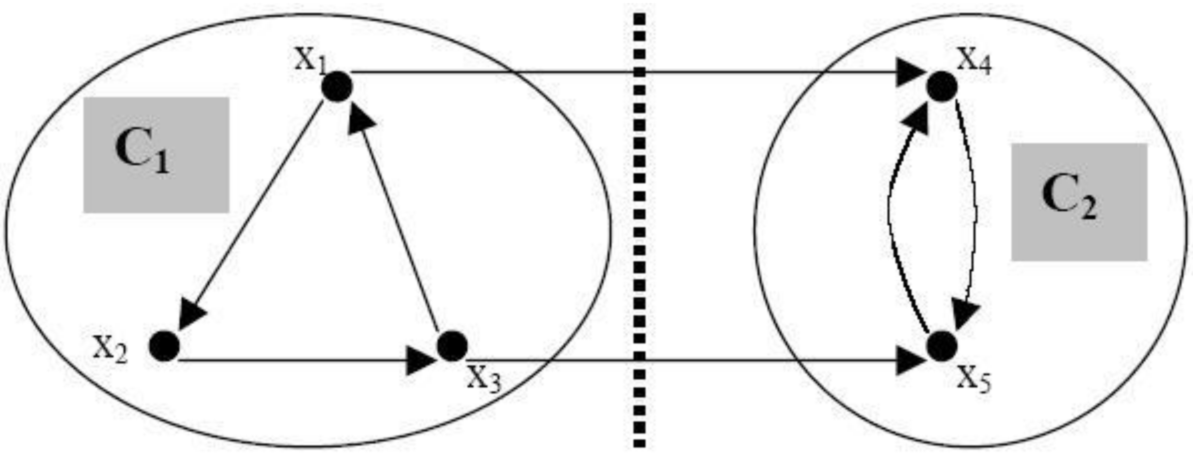
- **c) Grafo Fortemente Conexo (f-conexo)** - No caso de grafos orientados, um grafo é dito ser fortemente conexo (f-conexo) se todo par de vértices está ligado por pelo menos um caminho em cada sentido, ou seja, se cada par de vértices participa de um circuito.
  - Isto significa que cada vértice pode ser alcançável partindo-se de qualquer outro vértice do grafo.

- Como conseqüência, em um grafo f-conexo G(X,E), tem-se sempre:

$$\Gamma^{+}(x_i) = \Gamma^{-}(x_i) = X, \forall x_i \in X$$

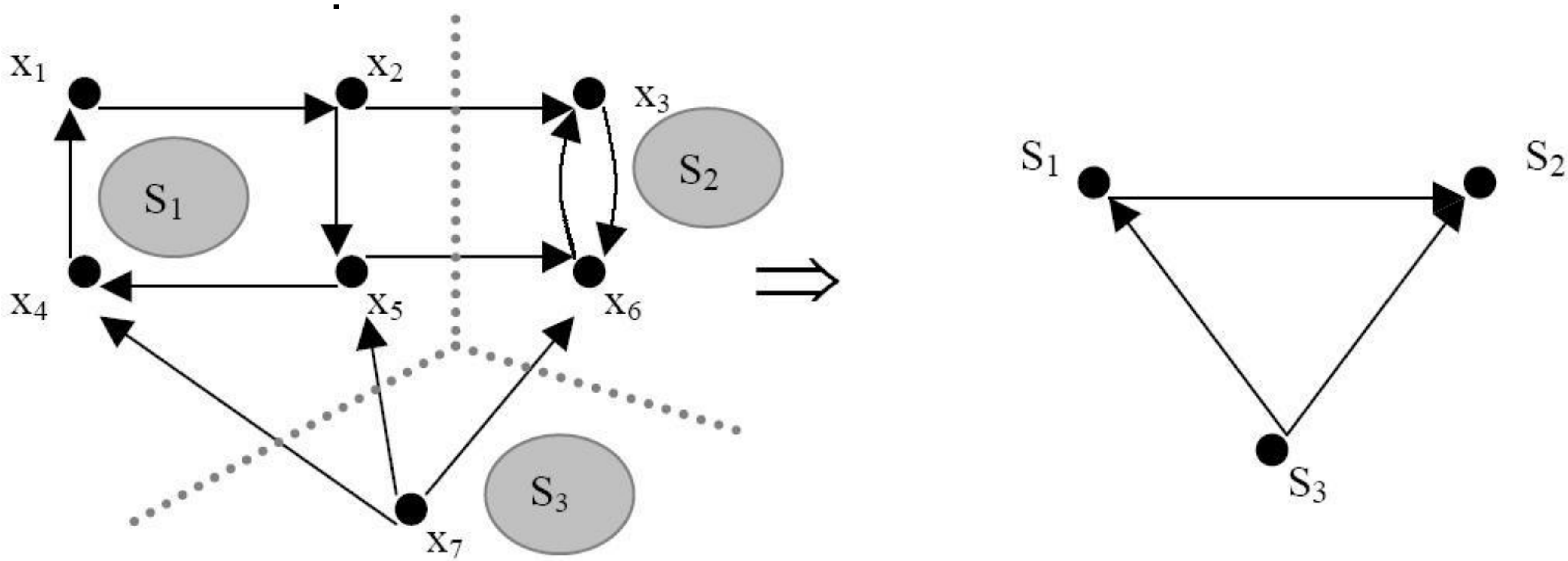
Tipos de Conexidade

- **d) Componente Fortemente Conexa** - Um grafo G(V,A) que não é fortemente conexo é formado por pelo menos dois subgrafos fortemente conexos.



Grafo Reduzido

- Dado um Grafo G.
- Gr=(S,W) é um grafo reduzido de G segundo uma partição de S, após uma ordenação



Grafo Reduzido

- A partição a ser feita depende da relação de equivalência considerada;
  - ao se reduzir a escala de um mapa, por exemplo, pode ser conveniente a agregação de uma cidade maior e suas satélites, a fim de não prejudicar a clareza (partição por proximidade geográfica).

- A partição mais comumente estudada com auxílio da técnica da redução é a baseada nas componentes f-conexas e por isso, quando falamos em grafo reduzido, estaremos nos referindo a ela.

Grafo Reduzido

- **Importante:**
  - A substituição dos arcos entre duas componentes f-conexas por um único é sempre possível visto que todos eles deve ter, OBRIGATORIAMENTE, o mesmo sentido, ou então haveria um caminho de ida e volta, portanto, teríamos apenas uma componente e não duas.

Algoritmo para decomposição de um grafo em componentes f-conexas

- Há diversos recursos disponíveis para se saber se um grafo é ou não f-conexo e para decompô-lo em componentes f-conexas, caso ele não seja f-conexo.

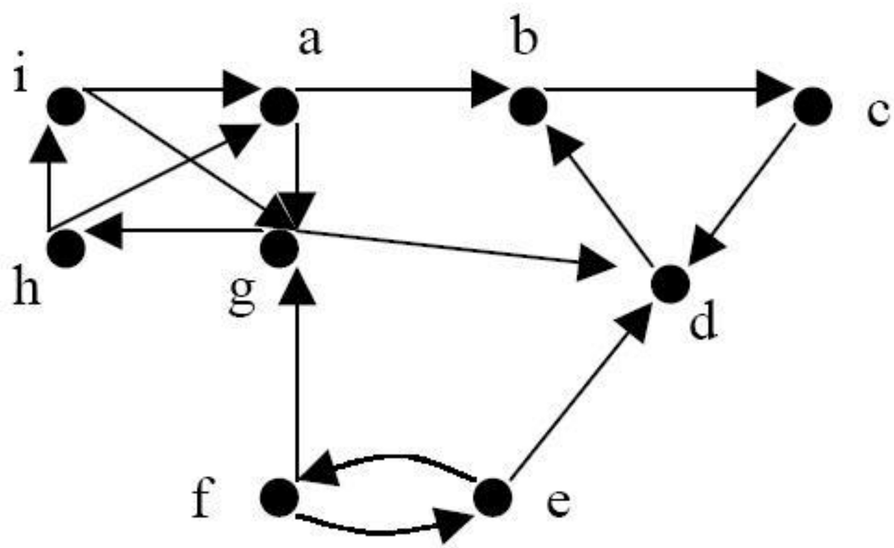
- Veremos: **Algoritmo de Malgrange**
  - Baseado na determinação de fechos transitivos. Onde a interseção de fechos transitivos (direto ou inverso), detecta a presença de uma componente f-conexa.

Algoritmo de Malgrange

- De forma generalizado os passos são:
  - **[1]** determinar os fechos transitivos de um vértice xi e efetuar a sua interseção;
  - **[2]** eliminar da matriz de adjacência as linhas e colunas correspondentes aos vértices obtidos na interseção no passo 1;
  - **[3]** o processo recomeça com a escolha de outro vértice xj até que a matriz tenha se esgotado.

Algoritmo de Malgrange

- Buscaremos as componentes f-conexas do seguinte grafo:



	a	b	c	d	e	f	g	h	i
a		1					1		
b			1						
c				1					
d		1							
e				1		1			
f					1		1		
g				1				1	
h	1								1
i	1						1		

Algoritmo de Malgrange

Observações

- Se a matriz se esgotar na primeira iteração, o grafo será f-conexo;

- vértice escolhido sempre será eliminado na matriz de adjacência, haja visto que o mesmo participa de ambos fechos transitivos e, portanto, participará da interseção;

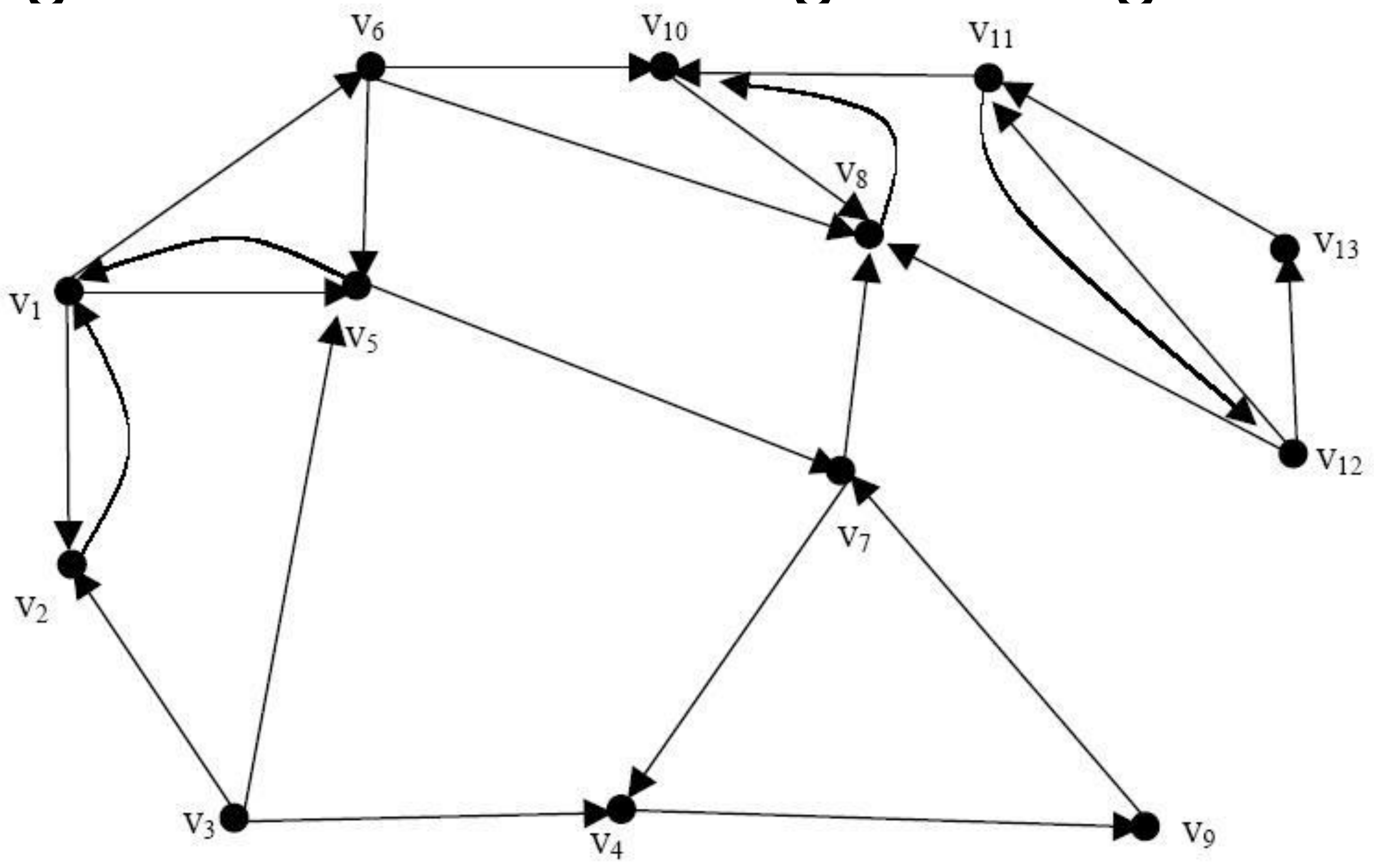
Algoritmo de Malgrange
Observações

- quando se tratar de uma matriz de adjacência muito grande, o tempo de computação será muito grande.

- As contribuições obtidas do algoritmo são:
  - identificação do tipo de conexidade do grafo (conexo, porém com três componentes f-conexas);
  - grafo reduzido do grafo original, formado pelas 3 componentes identificadas acima.

Exercício 08

- Encontre as componentes fortemente conexa e o grafo reduzido do seguinte dígrafo



Exercício 09

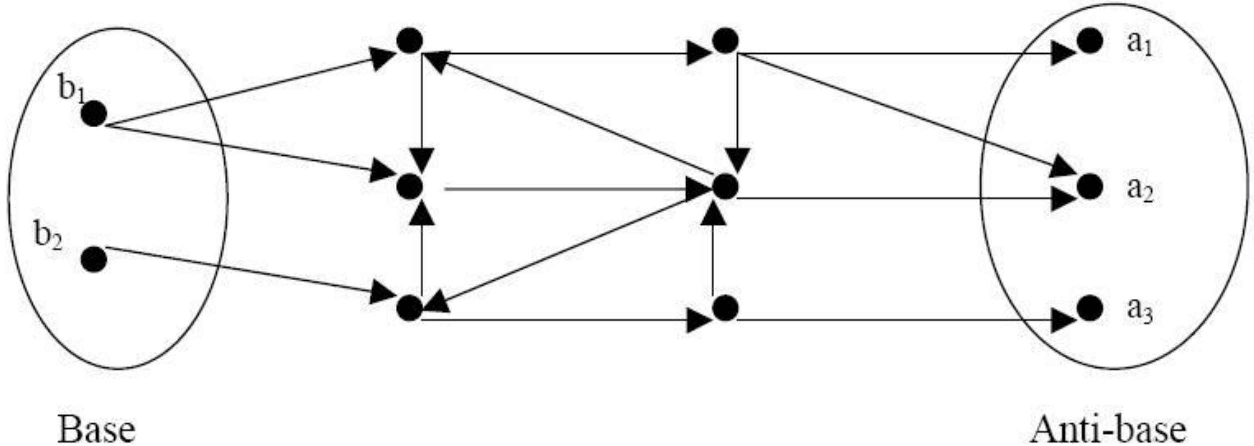
- Determine o tipo de conexidade dos seguintes grafos:

a) X = { cidades do Estado de Santa Catarina};
A = {(xi, xj) | < xi fala por DDD com xj >}

b) X = { livros de uma biblioteca};
A = {(xi, xj) | < xi é do mesmo autor que xj >}

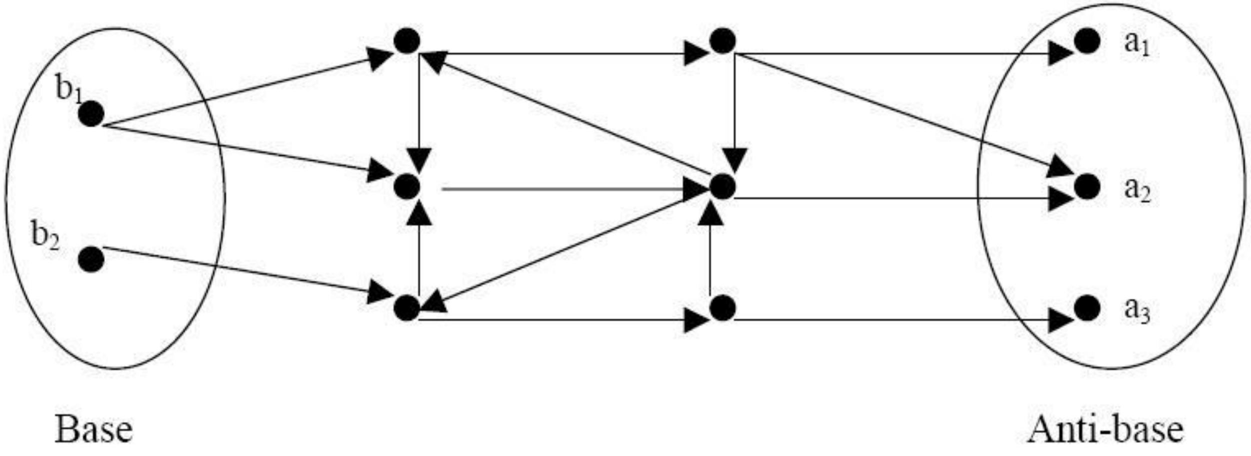
Bases e Antibases

- Uma base B é um subconjunto de vértices que não podem ser alcançados a partir de outros vértices.
- Uma anti-base A é um subconjunto de vértices o qual não se pode atingir algum vértice em A através de um caminho.



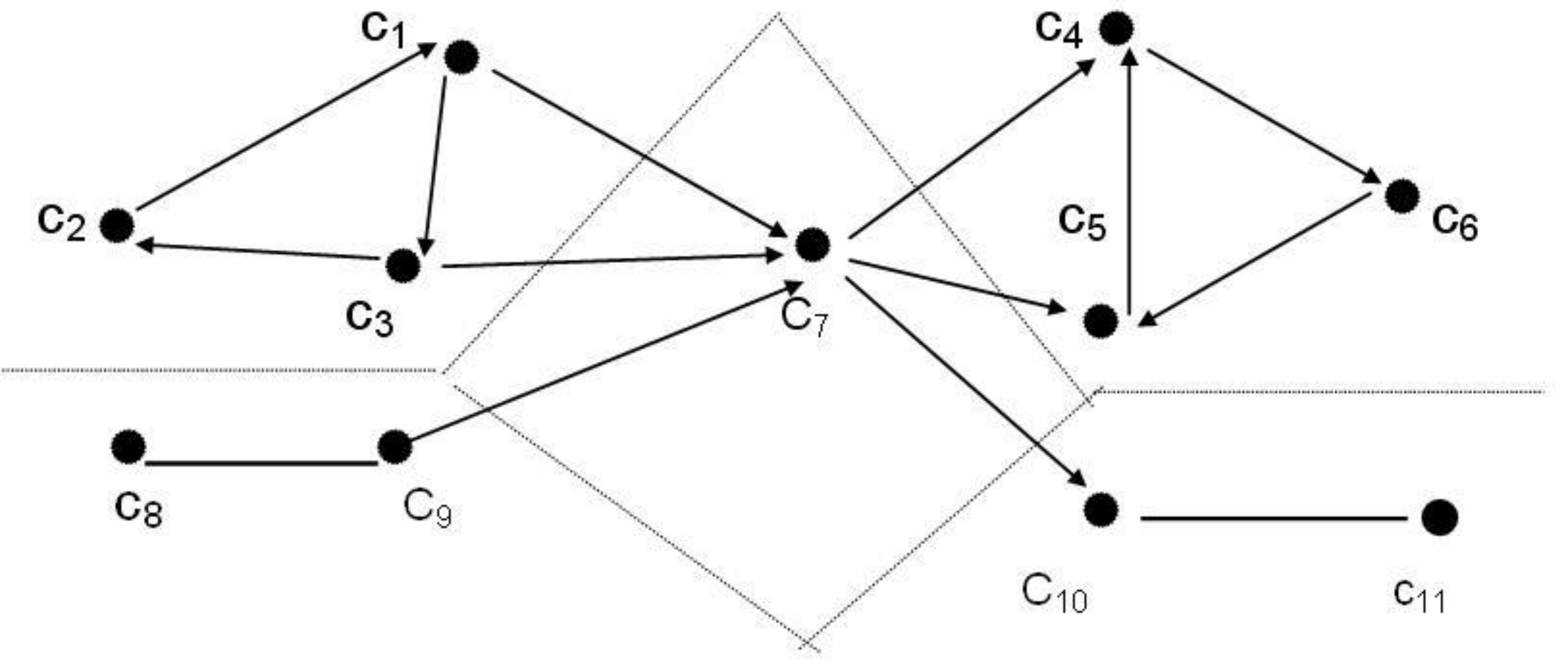
Bases e Antibases

- Uma base B é um subconjunto de vértices de um grafo reduzido, o qual não possui antecessores.
- Uma anti-base A é um subconjunto de vértices de um grafo reduzido, o qual não possui sucessores.

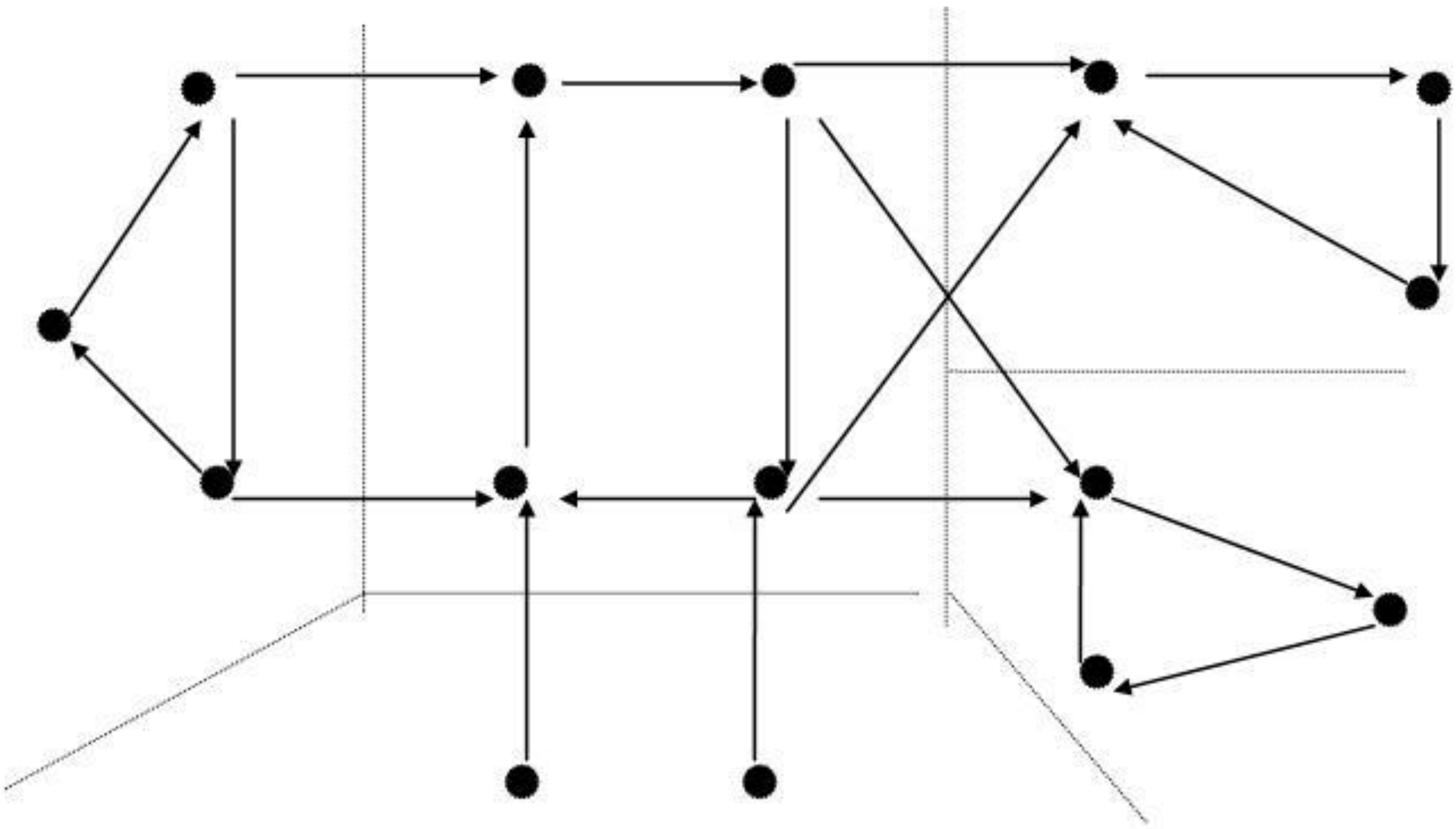


Exercício 10a

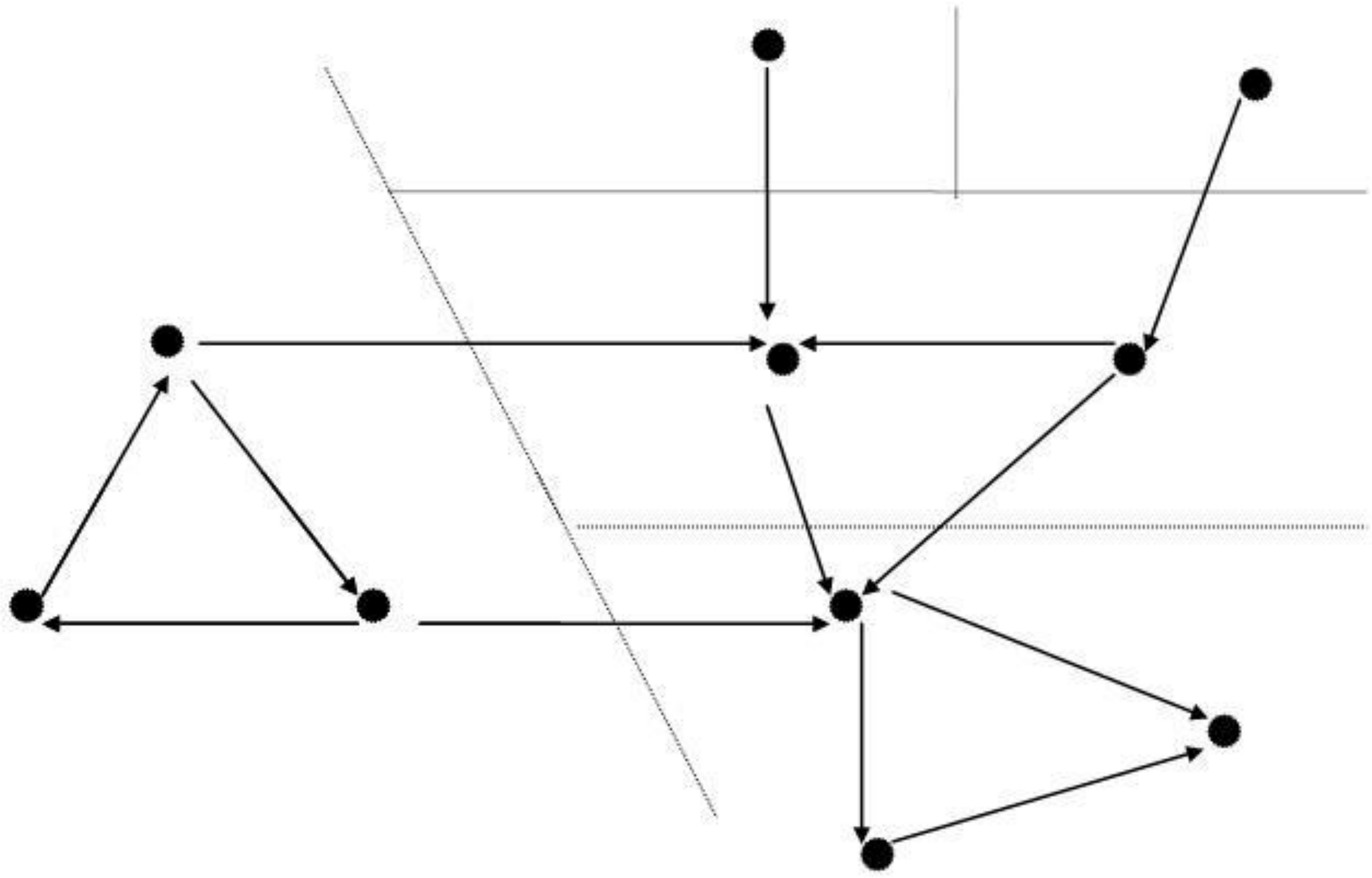
- Já identificado as componentes f-conexos, crie o grafo reduzido e apresente as bases e anti-bases dos mesmos:



Exercício 10b



Exercício 10c



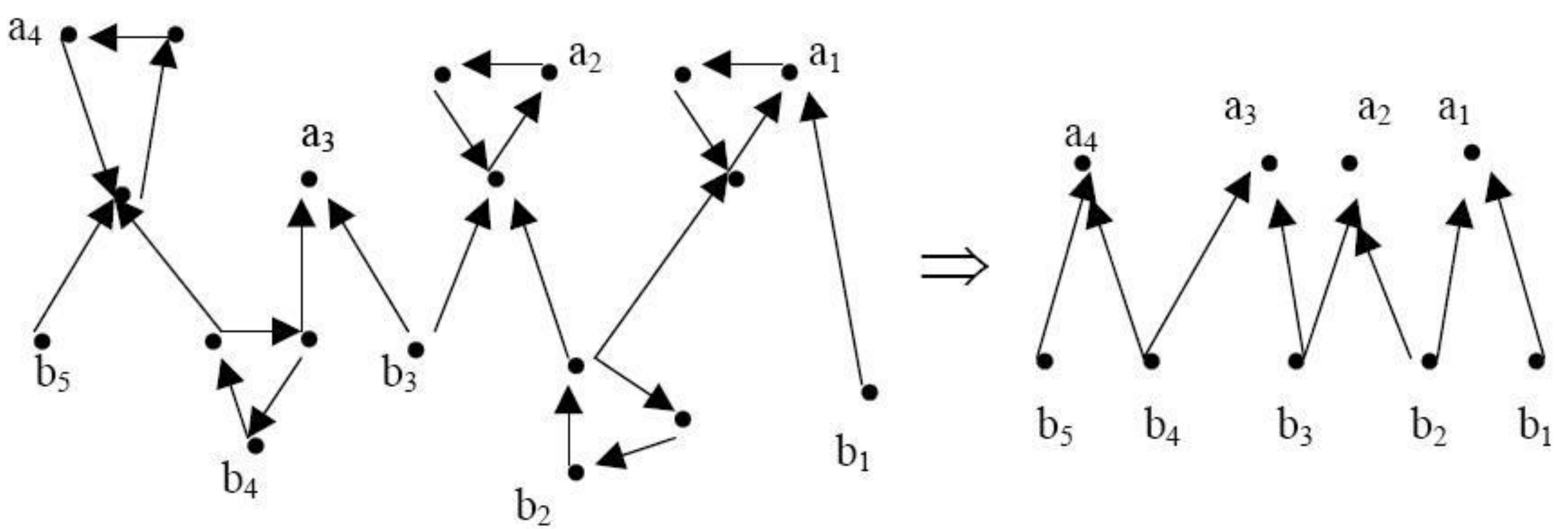
Exercício 11

- Se você é aluno de um curso sobre teoria dos grafos e entrega, como resposta de um exercício resolvido no qual a matriz abaixo é apresentada como sendo a de um grafo reduzido, sua resposta está certa ou errada?

S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6
	1				
		1			
1			1	1	
	1				1
			1		
				1	

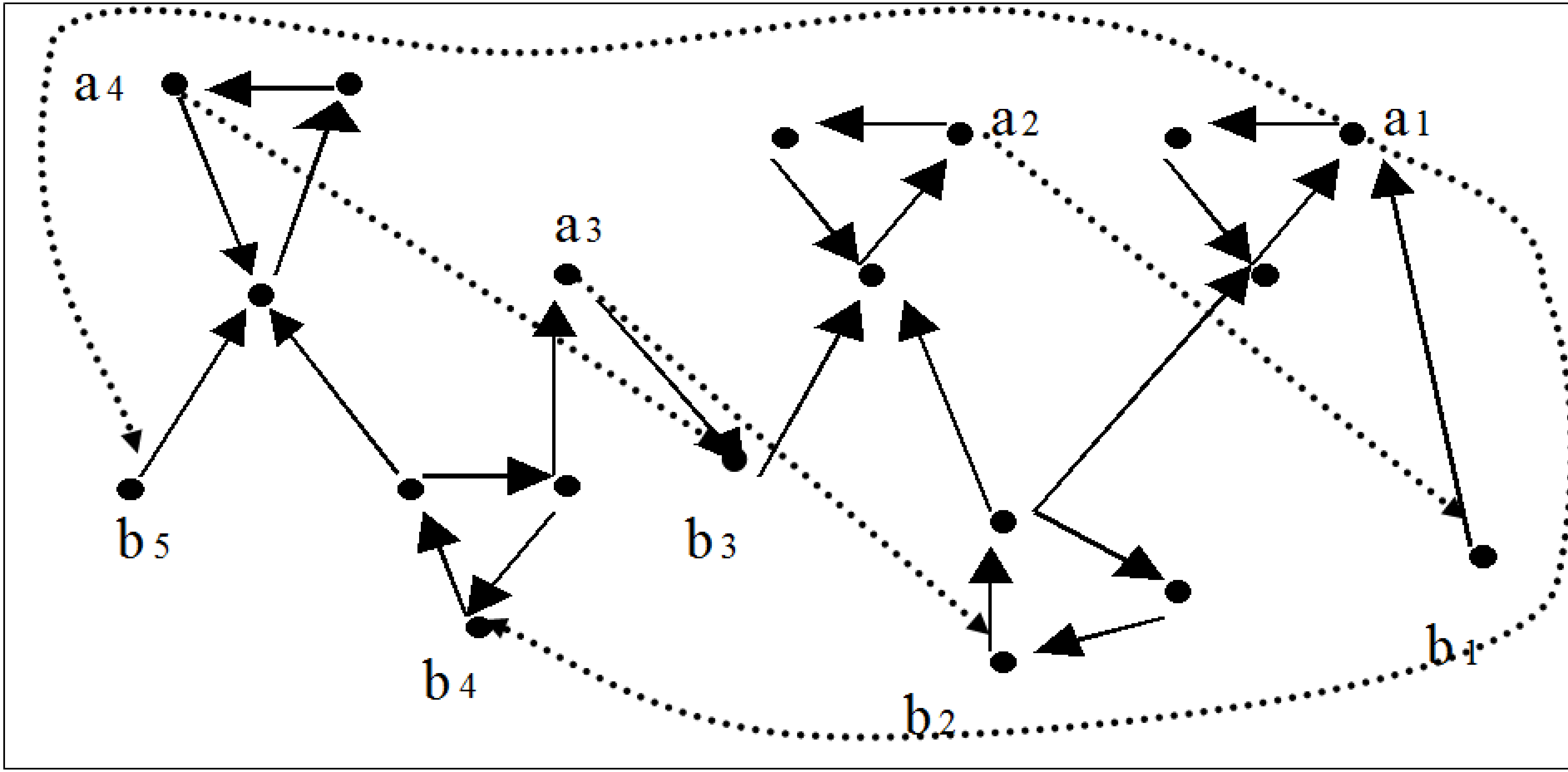
Transformar grafo em f-conexo

- Identificando o número de arestas a ser adicionadas no grafo (t):
  - $t = \max(a(G), b(G))$
    - onde a(G) e b(G) são respectivamente, os cardinais das anti-bases e bases de G.
  - $t = \max(4, 5) = 5$ (são necessárias 5 arestas)



Exercício 12

- Transforme o grafo reduzido dos exercícios 10 (a,b,c) em grafos f-conexos, identificando o número mínimo de arestas necessárias.


a4
a2
a1
a3
b5
b3
b4
b2
b1