Análise de Algoritmos

CLRS 4.2 e KT 5.5

Essas transparências foram adaptadas das transparências do Prof. Paulo Feofiloff e do Prof. José Coelho de Pina.

Multiplicação de matrizes

Problema: Dadas duas matrizes $X[1\,..\,n, 1\,..\,n]$ e $Y[1\,..\,n, 1\,..\,n]$ calcular o produto $X \cdot Y$.

Os algoritmo tradicional de multiplicação de matrizes consome tempo $\Theta(n^3)$.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} r &= ae + bg \\ s &= af + bh \\ t &= ce + dg \\ u &= cf + dh \end{aligned} \tag{1}$$

Solução custa R$ 8,04

Divisão e conquista

$$\underbrace{\begin{array}{|c|c|}\hline A & B \\ \hline C & D \\ \hline\end{array}}_{X} \; \mathrm{x} \; \underbrace{\begin{array}{|c|c|}\hline E & F \\ \hline G & H \\ \hline\end{array}}_{Y} = \begin{array}{|c|c|}\hline R & S \\ \hline T & U \\ \hline\end{array}$$

$$\begin{aligned} R &= AE + BG \\ S &= AF + BH \\ T &= CE + DG \\ U &= CF + DH \end{aligned} \tag{2}$$

Algoritmo de Multi-Mat

Algoritmo recebe inteiros $X[1\,..\,n]$ e $Y[1\,..\,n]$ e devolve $X \cdot Y$.

MULTI-M (X, Y, n)
1 **se** $n = 1$ **devolva** $X \cdot Y$
2 $(A, B, C, D) \leftarrow$ PARTICIONE(X, n)
3 $(E, F, G, H) \leftarrow$ PARTICIONE(Y, n)
4 $R \leftarrow$ MULTI-M$(A, E, n/2)$ $+$ MULTI-M$(B, G, n/2)$
5 $S \leftarrow$ MULTI-M$(A, F, n/2)$ $+$ MULTI-M$(B, H, n/2)$
6 $T \leftarrow$ MULTI-M$(C, E, n/2)$ $+$ MULTI-M$(D, G, n/2)$
7 $U \leftarrow$ MULTI-M$(C, F, n/2)$ $+$ MULTI-M$(D, H, n/2)$
8 $P \leftarrow$ CONSTRÓI-MAT(R, S, T, U)
9 **devolva** P

$T(n) =$ consumo de tempo do algoritmo para multiplicar duas matrizes de n linhas e n colunas.

Consumo de tempo

linha		todas as execuções da linha
1	$=$	$\Theta(1)$
2	$=$	$\Theta(n^2)$
3	$=$	$\Theta(n^2)$
4	$=$	$T(n/2) + T(n/2)$
5	$=$	$T(n/2) + T(n/2)$
6	$=$	$T(n/2) + T(n/2)$
7	$=$	$T(n/2) + T(n/2)$
8	$=$	$\Theta(n^2)$
9	$=$	$\Theta(n^2)$
total	$=$	$8\,T(n/2) + \Theta(n^2)$

Consumo de tempo

As dicas no nosso estudo de recorrências sugere que a solução da recorrência

$$T(n) \;=\; 8\,T(n/2) + \Theta(n^2)$$

está na mesma classe Θ que a solução de

$$\begin{aligned} T'(1) &= 1 \\ T'(n) &= 8T'(n/2) + n^2 \quad \text{para } n = 2, 2^2, 2^3, \ldots \end{aligned}$$

n	1	2	4	8	16	32	64	128	256
$T'(n)$	1	12	112	960	7936	64512	520192	4177920	33488896

Solução assintótica da recorrência

Considere a recorrência

$$
\begin{aligned}
R(1) &= 1 \\
R(n) &= 8\,R(\lceil \tfrac{n}{2} \rceil) + n^2 \quad \text{para } n = 2, 3, 4, \ldots
\end{aligned}
$$

Verifique por indução que $R(n) \le 20(n-1)^3 - 2n^2$ para $n = 2, 3, 4 \ldots$.

n	1	2	3	4	5	6	7	8
$R(n)$	1	12	105	112	865	876	945	960
$20\,(n-1)^3 - 2n^2$	-2	12	142	508	1230	2428	4222	6732

Conclusões

$R(n)$ é $\Theta(n^3)$.

Conclusão anterior$+$Exercício $\Rightarrow$
$T(n)$ é $\Theta(n^3)$.

O consumo de tempo do algoritmo MULTI-M é
$\Theta(n^3)$.

Strassen: $X \cdot Y$ por apenas R$ 7,18

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix}$$

Strassen: $X \cdot Y$ por apenas R$ 7,18

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
p_1 &= a(f-h) = af - ah \\
p_2 &= (a+b)h = ah + bh \\
p_3 &= (c+d)e = ce + de \\
p_4 &= d(g-e) = dg - de \\
p_5 &= (a+d)(e+h) = ae + ah + de + dh \\
p_6 &= (b-d)(g+h) = bg + bh - dg - dh \\
p_7 &= (a-c)(e+f) = ae + af - ce - cf
\end{aligned}$$

(4)

Strassen: $X \cdot Y$ por apenas R$ 7,18

$$p_1 = a(f-h) = af - ah$$
$$p_2 = (a+b)h = ah + bh$$
$$p_3 = (c+d)e = ce + de$$
$$p_4 = d(g-e) = dg - de$$
$$p_5 = (a+d)(e+h) = ae + ah + de + dh$$
$$p_6 = (b-d)(g+h) = bg + bh - dg - dh$$
$$p_7 = (a-c)(e+f) = ae + af - ce - cfd$$

$$r = p_5 + p_4 - p_2 + p_6 = ae + bg$$
$$s = p_1 + p_2 = af + bh$$
$$t = p_3 + p_4 = ce + dg$$
$$u = p_5 + p_1 - p_3 - p_7 = cf + dh$$

Algoritmo de Strassen

STRASSEN (X, Y, n)

se $n = 1$ **devolva** $X \cdot Y$
$(A, B, C, D) \leftarrow$ PARTICIONE(X, n)
$(E, F, G, H) \leftarrow$ PARTICIONE(Y, n)
$P_1 \leftarrow$ STRASSEN$(A, F - H, n/2)$
$P_2 \leftarrow$ STRASSEN$(A + B, H, n/2)$
$P_3 \leftarrow$ STRASSEN$(C + D, E, n/2)$
$P_4 \leftarrow$ STRASSEN$(D, G - E, n/2)$
$P_5 \leftarrow$ STRASSEN$(A + D, E + H, n/2)$
$P_6 \leftarrow$ STRASSEN$(B - D, G + H, n/2)$
$P_7 \leftarrow$ STRASSEN$(A - C, E + F, n/2)$
$R \leftarrow P_5 + P_4 - P_2 + P_6$
$S \leftarrow P_1 + P_2$
$T \leftarrow P_3 + P_4$
$U \leftarrow P_5 + P_1 - P_3 - P_7$
devolva $P \leftarrow$ CONSTRÓI-MAT(R, S, T, U)

Consumo de tempo

linha		todas as execuções da linha
1	$=$	$\Theta(1)$
2-3	$=$	$\Theta(n^2)$
4-10	$=$	$7, T(n/2) + \Theta(n^2)$
11-14	$=$	$\Theta(n^2)$
15	$=$	$\Theta(n^2)$
total	$=$	$7\,T(n/2) + \Theta(n^2)$

Consumo de tempo

As dicas no nosso estudo de recorrências sugeri que a solução da recorrência

$$T(n) \quad = \quad 7\,T(n/2) + \Theta(n^2)$$

está na mesma classe Θ que a solução de

$$\begin{aligned} T'(1) &= 1 \\ T'(n) &= 7T'(n/2) + n^2 \quad \text{para } n = 2, 2^2, 2^3, \ldots \end{aligned}$$

n	1	2	4	8	16	32	64	128	256
$T'(n)$	1	11	93	715	5261	37851	269053	1899755	13363821

Solução assintótica da recorrência

Considere a recorrência

$$\begin{aligned} R(1) &= 1 \\ R(n) &= 7\,R(\lceil \tfrac{n}{2} \rceil) + n^2 \quad \text{para } n = 2, 3, 4, \ldots \end{aligned}$$

Verifique por indução que $R(n) \leq 19(n-1)^{\lg 7} - 2n^2$ para $n = 2, 3, 4 \ldots$.

$2{,}80 < \lg 7 < 2{,}81$

n	1	2	3	4	5	6	7	8
$R(n)$	1	11	86	93	627	638	700	715
$19\,(n-1)^{\lg 7} - 2n^2$	-1	11	115	327	881	1657	2790	4337

Conclusões

$R(n)$ é $\Theta(n^{\lg 7})$.

$T(n)$ é $\Theta(n^{\lg 7})$.

O consumo de tempo do algoritmo STRASSEN é $\Theta(n^{\lg 7})$ ($2{,}80 < \lg 7 < 2{,}81$).

Mais conclusões

Consumo de tempo de algoritmos para multiplicação de matrizes:

Ensino fundamental	$\Theta(n^3)$
Strassen	$\Theta(n^{2.81})$
...	...
Coppersmith e Winograd	$\Theta(n^{2.38})$
Stothers (2010)	$\mathrm{O}(n^{2.3736})$
Williams (2011)	$\mathrm{O}(n^{2.3727})$