Projeto e Análise de Algoritmo
Trabalho 3

Nicolas Beraldo

Julho 2019

1 Problema Circuito-SAT

Um circuito satisfazível (Circuito-SAT) é um circuito combinacional booleano, composto apenas por portas logicas AND, OR e NOT, onde pelo menos umas das diferentes combinações de entradas resulte em uma saída verdadeira (valor booleano igual a 1).

Qualquer circuito combinacional pode ser usado de exemplo, mas para demonstrar um Circuito-SAT é necessário que o circuito tenha saída verdadeira para pelo menos uma das combinações das entradas. O exemplo que será mostrado foi retirado do livro de referência usado para realizar este trabalho.

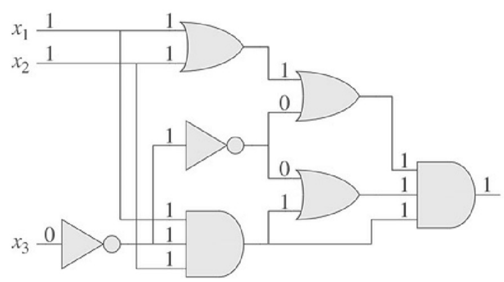

Figura 1: Circuito Combinacional 1

Na figura 1 vemos a montagem de um circuito usando apenas portas AND, OR e NOT, um dos requisitos para ser um Circuito-SAT. Neste circuito ao fazer as entradas $X_1 = 1$, $X_2 = 1$ e $X_3 = 0$ a saída é verdadeira (bool = 1). Como dito antes, é necessário que a saída seja 1, na figura 2 temos a base do exemplo anterior com apenas uma alteração, essa simples alteração faz com que o circuito não seja mais um Circuito-SAT.

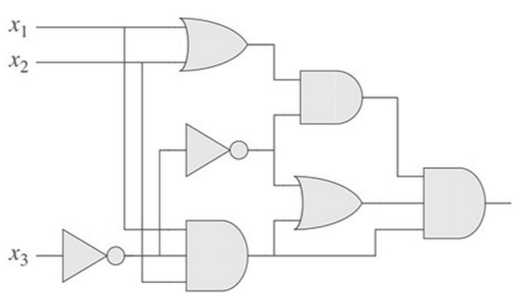

Figura 2: Circuito Combinacional 2

2 Problema SAT

Este problema é muito similar ao problema de Circuito-SAT, a diferença está no detalhe de que um Circuito-SAT é necessariamente um circuito combinatório enquanto uma fórmula satisfazível (SAT) é necessariamente uma fórmula booleana que, igual a Circuito-SAT, só é satisfazível se um conjunto de entradas der uma saída verdadeira.

Qualquer fórmula booleana pode ser usada para exemplificar este problema, mas apenas se existir pelo menos uma combinação de entradas que der uma saída verdadeira a fórmula booleana é satisfazível. O exemplo a seguir foi retirado do livro de referência:

$$\phi = ((X_1 \Rightarrow X_2) \vee \neg((\neg X_1 \Leftrightarrow X_3) \vee X_4)) \wedge \neg X_2$$

Ao usar a combinação $X_1 = 0$, $X_2 = 0$, $X_3 = 1$ e $X_4 = 1$ como entrada temos:

$$\phi = ((0 \Rightarrow 0) \vee \neg((\neg 0 \Leftrightarrow 1) \vee 1)) \wedge \neg 0$$
$$\phi = (1 \vee \neg(1 \vee 1) \wedge 1)$$
$$\phi = (1 \vee 0) \vee 1$$
$$\phi = 1$$

Assim provamos que a fórmula ϕ é satisfazível.

3 Redução Circuito-SAT para SAT

Há duas formas de realizar a redução, inconvenientemente o método mais conhecido por todos, relacionar a saída com as entradas e as portas logicas usadas, é muito custoso para casos de circuitos grandes já que a fórmula cresce exponencialmente para a quantidade de fios, isso o faz não ter tempo polinomial.

Para fazer uma redução rápida e eficiente é feita uma fórmula booleana do circuito que considera todos os fios dele. São criadas x_i variáveis, onde i depende da quantidade todas de fios, a partir daqui basta fazer uma fórmula, nomeada de clausula, que relaciona a porta com os fios que entram ou saem da porta.

Uma função para fazer a redução teria que seguir os seguintes passos:

- Nomear todos os fios do circuito a ser reduzido
- Para cada porta logica realizar a cláusula
- Relacionar a última porta logica com todas as cláusulas, se for uma AND todas as cláusulas são relacionadas por $\wedge$ entre elas e com o fio de saída

4 Tempo da função

O tempo da função descrita na seção 3 é polinomial, isso se deve ao fato de que a nomeação dos fios é linear pois depende exclusivamente da quantidade de fios, enquanto a determinação das cláusulas é a parte polinomial da função, ela depende exclusivamente da quantidade de portas logicas e da quantidade de fios ligadas à elas.

5 A semelhança entre as soluções Circuito-SAT e SAT

Como foi usado um circuito-SAT para determinar a fórmula SAT então a solução de um consegue funcionar no outra, a diferença que há entre as soluções é o tempo tomado para solucionar o problema ou para achar um cerificado para o problema.

Referências

[1] CORMEN, Thomas H. et al. Algoritmos - Teoria e Práticas 3rd Ed. Cambridge: Elsevier, 2012