Resolução de Sistemas Lineares.
Métodos Diretos: Decomposição LU.

Introdução

A base do método chamado Fatoração ou Decomposição LU, está apoiada na simplicidade de resolução de sistemas triangulares.

Seja o sistema linear **Ax = b**

O processo de fatoração para resolução deste sistema consiste em decompor a matriz **A** dos coeficientes em um produto de dois ou mais fatores e, em seguida, resolver uma sequência de sistemas lineares que nos conduzirá a solução do sistema linear original.

Suponhamos que seja possível fatorar a matriz **A** dos coeficientes num produto de uma matriz triangular inferior com diagonal unitária **L** e uma matriz triangular superior **U**, isto é:

$$A = LU$$

Nestas condições, o sistema **Ax = b** pode ser reescrito na forma **LUx = b**, o que permite o desmembramento em dois sistemas triangulares

$$Ly = b \quad \text{e} \quad Ux = y$$

Resolvendo o primeiro sistema, calculamos **y** que, usado no segundo sistema, fornecerá o vetor procurado **x**.

Dessa maneira, conhecidas **L** e **U**, o sistema será resolvido com $\mathbf{2n^2}$ operações (dois sistemas operações do método da triangulares), o que representa um ganho substancial comparado com as $\mathbf{(2n^3)/3}$ eliminação de Gauss.

Cálculo dos Fatores L e U

Os fatores **L** e **U** podem ser obtidos através de fórmulas para os elementos $\mathbf{l_{ij}}$ e $\mathbf{u_{ij}}$, ou então, podem ser construídos usando a ideia básica do método da Eliminação de Gauss.

Veremos a seguir como obter **L** e **U** através do processo de Gauss.

Dada uma matriz quadrada **A** de ordem **n**, seja $\mathbf{A_k}$ a matriz constituída das primeiras **k** linhas e colunas de **A**.
Suponha que $\mathbf{det(A_k) \neq 0}$ para $\mathbf{k = 1, 2, ..., (n - 1)}$.
Então, existe uma única matriz triangular inferior $\mathbf{L = (m_{ij})}$, com $\mathbf{m_{ii} = 1, 1 \leq i \leq n}$, e uma única matriz triangular superior $\mathbf{U = (u_{ij})}$ tais que **LU = A**.
Ainda mais, $\mathbf{det(A) = u_{11}\, u_{22} \ldots u_{nn}}$

Quando o procedimento de eliminação de Gauss é aplicado em uma matriz [a], os elementos das matrizes [L] e [U] já são calculados automaticamente.

A matriz triangular superior [U] é a matriz de coeficientes [a] obtida ao final do procedimento.

A matriz triangular inferior [L] não é escrita explicitamente durante o procedimento, mas os elementos que a formam são na realidade calculados ao longo do caminho:

- Os elementos diagonais de [L] são todos iguais a 1.
- Os elementos abaixo da diagonal são os multiplicadores m_{ij} que multiplicam a equação pivô quando ela é usada para eliminar os elementos abaixo do coeficiente pivô

No caso de um sistema com quatro equações, a matriz de coeficientes [a] é (4 × 4), e a decomposição tem a forma:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 & 0 \\ m_{31} & m_{32} & 1 & 0 \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & a'_{24} \\ 0 & 0 & a''_{33} & a''_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a'''_{44} \end{bmatrix}$$

Exemplo 1: Resolver o sistema linear a seguir usando a fatoração LU:

$$\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=2 \\ 2x_1+3x_2-2x_3=3 \\ x_1-2x_2+x_3=0 \end{cases}$$

Solução

O primeiro passo será calcular os m_{ij} e u_{ij}, usando o processo de Gauss sem estratégia de pivoteamento.

1ª etapa:

Pivô = a_{11} = 1	E 1 ← E 1 E 2 ← E 2 − 2 E 1 E 3 ← E 3 − E 1

2ª etapa:

Pivô = a_{22} = –1	E 1 ← E 1 E 2 ← E 2 E 3← E 3 − 4E 2

Os fatores L e U são:

$$L=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad U=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Para resolvermos o sistema **Ax = (2, 3, 0)^T** , resolvemos **Ly = b**.

y = (2, –1, 2)^T e, com estes valores, calculamos **x** através de **Ux = y**

A solução do sistema é **x = (1, 1, 1)^T**

Exercício 1: Resolver o sistema linear a seguir usando a fatoração LU:

$$\begin{cases} 3x_1+2x_2+4x_3=1 \\ x_1+x_2+2x_3=2 \\ 4x_1+3x_2+2x_3=3 \end{cases}$$

A solução do sistema é **x = (–3, 5, 0)^T**

Exercício 2: Resolver o sistema linear a seguir usando a fatoração LU:

$$\begin{cases} x_1+x_2+2x_3=4 \\ 2x_1-x_2-x_3=0 \\ x_1-x_2-x_3=-1 \end{cases}$$

A solução do sistema é **x = (1, 1, 1)^T**