UNIDADE 3
Resolução de Sistemas Lineares. Métodos Diretos: Eliminação Gaussiana.

Introdução

Sistemas de equações lineares aparecem em problemas que contêm muitas variáveis dependentes.

Tais problemas ocorrem não apenas na engenharia e na ciência, mas também em virtualmente todas as demais disciplinas (negócios, estatística, economia, etc.).

Um sistema linear com **m** equações e **n** incógnitas é escrito usualmente na forma:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + \dots + a_{1n}\, x_n = b_1}\\
&\mathbf{a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 + \dots + a_{2n}\, x_n = b_2}\\
&\quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad \vdots\\
&\mathbf{a_{m1}\, x_1 + a_{m2}\, x_2 + \dots + a_{mn}\, x_n = b_m}
\end{aligned}$$

onde

$\mathbf{a_{ij}}$: coeficientes $\quad 1 \le i \le \mathbf{m}$, $1 \le j \le \mathbf{n}$

$\mathbf{x_j}$: incógnitas $\quad j = 1, 2, \dots, \mathbf{n}$

$\mathbf{b_i}$: constantes $\quad i = 1, 2, \dots, \mathbf{m}$

A resolução de um sistema linear consiste em calcular os valores de $\mathbf{x_j}$, $\mathbf{j = 1, 2, \dots, n}$, caso eles existam, que satisfaçam as **m** equações simultaneamente.

Usando notação matricial, o sistema linear pode ser representado por **AX = B**, onde **M** é chamada matriz completa ou matriz aumentada do sistema.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ **A** é a matriz dos coeficientes

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$ **X** é o vetor das incógnitas

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$$ **B** é o vetor constante (termos independentes)

$$M=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

M é chamada matriz completa ou matriz aumentada do sistema

Classificação quanto ao número de soluções

Um sistema linear pode ser classificado quanto ao número de soluções em:

- **Compatível**
  - **determinado** – o sistema linear tem **solução única**
  - **indeterminado** – o sistema linear admite **infinitas soluções**
- **Incompatível** – o sistema linear **não admite solução**

Quando todos os termos independentes forem nulos, isto é, se $\mathbf{b_i = 0}$, $\mathbf{i = 0, 1, ..., m}$, o sistema é dito **homogêneo**.

Todo sistema homogêneo é compatível, pois admitirá pelo menos a solução trivial ($\mathbf{x_j = 0, j = 0, 1, 2, ..., n}$).

Métodos numéricos para resolver sistemas de equações lineares algébricas

Dois tipos de métodos numéricos, **diretos** e **iterativos**, são usados para resolver sistemas de equações lineares algébricas.

Nos métodos **diretos**, a solução é obtida com a realização de operações algébricas nas equações.

Nos métodos **iterativos**, uma solução inicial aproximada é assumida e então utilizada em um processo iterativo para que soluções mais precisas sejam obtidas sucessivamente.

Métodos Diretos (Algoritmos Diretos)

Um método é dito **direto** quando a solução exata **x** do sistema linear é obtida realizando-se um número finito de operações aritméticas. Os exemplos são:

- a Regra de Cramer
- o Método da Eliminação de Gauss (ou triangulação)
- o Método de Jordan

Regra de Cramer

Seja um sistema linear com número de equações igual ao número de incógnitas (um sistema **n x n**), sendo **D** o determinante da matriz **A**, e D_{x1}, D_{x2}, D_{x3}, ..., D_{xn} os determinantes das matrizes obtidas trocando em **M**, respectivamente, a coluna dos coeficientes de $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ pela coluna dos termos independentes.

O sistema **S** será compatível e terá solução única se, e somente se, $\mathbf{D \neq 0}$.

A única maneira de **D** ser nulo ocorre se uma ou mais colunas ou linhas de **A** forem idênticas ou se uma ou mais colunas (ou linhas) de **A** forem linearmente dependentes de outras colunas (ou linhas).

Em caso de $\mathbf{D \neq 0}$ a única solução de **S** é dada por:

$$x_1=\frac{D_{x1}}{D}\quad,\quad x_2=\frac{D_{x2}}{D}\quad,\quad x_3=\frac{D_{x3}}{D}\quad.\ \ldots\ ,\quad x_n=\frac{D_{xn}}{D}$$

A aplicação da Regra de Cramer exige o cálculo de **n + 1** determinantes (**det A** e **det A_i, 1 ≤ i ≤ n**).

Para **n = 20** o número total de operações efetuadas será **21 * 20! * 19** multiplicações mais um número semelhante de adições.

Assim, um computador que efetue cerca de 100 milhões de multiplicações por segundo levaria **3×10^5** anos para efetuar as operações necessárias.

Com isso, a regra de Cramer é inviável em função do tempo de computação para sistemas muito grandes.

Determinante da matriz

Determinante é um valor numérico associado a uma matriz quadrada que é calculado a partir dos elementos da matriz e que define varias propriedades daquela matriz.

Para matriz **2x2** o determinante é calculado como:

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} \quad \text{ou} \quad |A|=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc$$

Para matriz 3x3 o determinante é calculado como:

$$|A|=\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}=aei+bfg+cdh-ceg-bdi-afh$$

Para facilitar o calculo de determinante de uma matriz **3x3** podem ser utilizadas duas regras equivalentes:

1. Regra de Sarrus

Inicialmente, as duas primeiras colunas são repetidas à direita da matriz A.

Em seguida, os elementos da diagonal principal são multiplicados. Esse processo deve ser feito também com as diagonais que estão à direita da diagonal principal para que seja possível **somar** os produtos dessas três diagonais.

O mesmo processo deve ser realizado com a diagonal secundária e as demais diagonais à sua direita. Entretanto, é necessário **subtrair** os produtos encontrados.

$$|A|=\left|\begin{array}{ccc:cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right|=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{33}-a_{12}a_{21}a_{33}$$

2. Regra de triangulo

Com sinal mais (**+**) temos que usar o produto dos elementos da diagonal principal e os produtos dos elementos das diagonais paralelas com seu vértice oposto.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$ que corresponde a $a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}$

Com sinal mais (**-**) temos que usar o produto dos elementos da diagonal secundaria e os produtos dos elementos das diagonais paralelas com seu vértice oposto.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$ que corresponde a $-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{33}-a_{12}a_{21}a_{33}$

O resultado final é o mesmo:

$$|A|=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{33}-a_{12}a_{21}a_{33}$$

Exemplo 1: Resolva o sistema abaixo pela Regra de Cramer:

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=1 \\ 2x_1-x_2+x_3=0 \\ x_1+2x_2-x_3=0 \end{cases}$$

Solução

Temos que calcular determinantes D, D_{x1}, D_{x2} , D_{x3} e depois usar formulas:

$$x_1=\frac{D_{x1}}{D} \quad , \quad x_2=\frac{D_{x2}}{D} \quad , \quad x_3=\frac{D_{x3}}{D}$$

Veja planilha

Resposta $x=\begin{pmatrix} -\frac{1}{7} \\ \frac{3}{7} \\ \frac{5}{7} \end{pmatrix}$ ou x = (-0,143, 0,429, 0,429)^T

Exercício 1: Resolva o sistema abaixo pela Regra de Cramer:

$$\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3=0 \\ x_1+2x_2+x_3=3 \\ 3x_1-x_2-x_3=-2 \end{cases}$$

Resposta $x=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ou x = (0, 1, 1)^T

Exercício 2: Resolva o sistema abaixo pela Regra de Cramer:

$$\begin{cases} 0{,}3\,x_1+0{,}52\,x_2+x_3=-0{,}01 \\ 0{,}5x_1+x_2+1{,}9x_3=0{,}67 \\ 0{,}1\,x_1+0{,}3\,x_2+0{,}5\,x_3=-0{,}44 \end{cases}$$

Resposta x = (-14,9, -29,5, 19,8)^T

Método da Eliminação de Gauss

O **método da eliminação de Gauss** consiste em transformar o sistema linear original num outro sistema linear equivalente com matriz dos coeficientes triangular superior, pois estes são de resolução imediata.

Dizemos que dois sistemas lineares são equivalentes quando possuem a mesma solução.

O determinante de sistemas lineares equivalentes são iguais.

Com **(n − 1)** passos o sistema linear **AX = B** é transformado num sistema triangular equivalente:**UX = C**, o qual se resolve facilmente por substituições.

Vamos calcular a solução de **AX = B** em três etapas:

1ª etapa: Matriz Completa

Consiste em escrever a matriz completa ou aumentada do sistema linear original.

2ª etapa: Triangulação

Consiste em transformar a matriz **A** numa matriz triangular superior, mediante uma sequência de operações elementares nas linhas da matriz.

3ª etapa: Retro-substituição

Consiste no cálculo dos componentes $\mathbf{x_1}$, $\mathbf{x_2}$, ..., $\mathbf{x_n}$, solução de **AX = B**, a partir da solução do último componente ($\mathbf{x_n}$), e então substituirmos regressivamente nas equações anteriores.

Teorema: Seja **AX = B** um sistema linear. Aplicando sobre as equações deste sistema uma sequência de operações elementares escolhidas entre:

1) Trocar a ordem de duas equações do sistema;
2) Multiplicar uma equação do sistema por uma constante não nula;
3) Adicionar um múltiplo de uma equação a uma outra equação;

obtemos um novo sistema **UX = C** e os sistemas **AX = B** e **UX = C** são equivalentes.

Resolução de Sistemas Triangulares

Seja o sistema linear **AX = B**, onde **A**: matriz **n x n**, triangular superior, com elementos da diagonal diferentes de zero.

Escrevendo as equações deste sistema, temos:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+\ldots+a_{1n}x_n=b_1 \\ \qquad a_{22}x_2+a_{13}x_3+\ldots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \qquad\qquad a_{33}x_3+\ldots+a_{3n}x_n=b_3 \\ \qquad\qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \quad \vdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad a_{nn}x_n=b_n \end{cases}$$

Da última equação deste sistema temos:

$$x_n=\frac{b_n}{a_{nn}}$$

$\mathbf{x}_{n-1}$ pode então ser obtido da penúltima equação:

$$x_{n-1}=\frac{b_{n-1}-a_{n-1,n}x_n}{a_{n-1,n-1}}$$

e assim sucessivamente obtém-se $\mathbf{x}_{n-2}$**, ...,** $\mathbf{x}_2$, e finalmente $\mathbf{x}_1$:

$$x_1=\frac{b_1-a_{12}x_2-a_{13}x_3-\ldots a_{1n}x_n}{a_{11}}$$

Procedimento de eliminação de Gauss (eliminação progressiva)

O procedimento de eliminação de Gauss é ilustrado inicialmente para um sistema de quatro equações com quatro incógnitas.

O ponto de partida é o conjunto de equações:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+a_{14}x_4=b_1 & (a) \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3+a_{24}x_4=b_2 & (b) \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3+a_{34}x_4=b_3 & (c) \\ a_{41}x_1+a_{42}x_2+a_{43}x_3+a_{44}x_4=b_4 & (d) \end{cases} \qquad (1)$$

No método de eliminação de Gauss, o sistema de equações é manipulado até resultar em um sistema equivalente na forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+a_{14}x_4=b_1 & (a) \\ \quad a_{22}x_2+a_{23}x_3+a_{24}x_4=b_2 & (b) \\ \quad\quad a_{33}x_3+a_{34}x_4=b_3 & (c) \\ \quad\quad\quad a_{44}x_4=b_4 & (d) \end{cases} \qquad (2)$$

A conversão desse sistema de equações é feita em passos.

Passo 1

No primeiro passo, a primeira equação não é alterada e os termos que incluem a variável $\mathbf{x_1}$ nas demais equações são eliminados.

Isso é feito uma equação por vez usando a primeira equação, que é chamada de **equação pivô**.

O coeficiente $\mathbf{a_{11}}$ é chamado de **coeficiente pivô**, ou de **elemento pivô**.

Para eliminar o termo $\mathbf{a_{21}\ x_1}$ na **Eq. (1b)**, a equação pivô, **Eq. (1a)**, é multiplicada por $\mathbf{m_{21} = a_{21}/a_{11}}$ e então subtraída da **Eq. (1b)**:

$$\begin{array}{rl} & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = b_2 \\ - & m_{21}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4) = m_{21}b_1 \\ \hline & 0 + \underbrace{(a_{22} - m_{21}a_{12})}_{a'_{22}}x_2 + \underbrace{(a_{23} - m_{21}a_{13})}_{a'_{23}}x_3 + \underbrace{(a_{24} - m_{21}a_{14})}_{a'_{24}}x_4 = \underbrace{b_2 - m_{21}b_1}_{b'_2} \end{array}$$

Deve-se enfatizar aqui que a equação pivô, **Eq. (1a)**, não é alterada.

A forma matricial das equações após essa operação é mostrada na **Fig. 1**.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & a'_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b'_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}$$

Figura 1 – Forma matricial do sistema após a eliminação de $\mathbf{a_{21}}$

Em seguida, elimina-se o termo **a_{31} x_1** da **Eq. (1c)**.

A equação pivô, **Eq. (1a)**, é multiplicada por **m_{31} = a_{31} /a_{11}** e então subtraída da **Eq.(1c)**:

$$
\begin{array}{rl}
 & a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = b_3 \\
- & m_{31}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4) = m_{31}b_1 \\
\hline
\end{array}
$$

$$0 + \underbrace{(a_{32} - m_{31}a_{12})}_{a'_{32}}x_2 + \underbrace{(a_{33} - m_{31}a_{13})}_{a'_{33}}x_3 + \underbrace{(a_{34} - m_{31}a_{14})}_{a'_{34}}x_4 = \underbrace{b_3 - m_{31}b_1}_{b'_3}$$

A forma matricial das equações após essa operação é mostrada na **Fig. 2**.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & a'_{24} \\ 0 & a'_{32} & a'_{33} & a'_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b'_2 \\ b'_3 \\ b_4 \end{bmatrix}$$

Figura 2 – Forma matricial do sistema após a eliminação de **a_{31}**

Em seguida, elimina-se o termo **a_{41} x_1** da **Eq. (1d)**.

A equação pivô, **Eq. (1a)**, é multiplicada por **m_{41} = a_{41} /a_{11}** e então subtraída da **Eq. (1d)**:

$$
\begin{array}{rl}
 & a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = b_4 \\
- & m_{41}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4) = m_{41}b_1 \\
\hline
\end{array}
$$

$$0 + \underbrace{(a_{42} - m_{41}a_{12})}_{a'_{42}}x_2 + \underbrace{(a_{43} - m_{41}a_{13})}_{a'_{43}}x_3 + \underbrace{(a_{44} - m_{41}a_{14})}_{a'_{44}}x_4 = \underbrace{b_4 - m_{41}b_1}_{b'_4}$$

Este é o final do **Passo 1**. O sistema de equações tem agora a seguinte forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = b_1 & (a) \\ 0 + a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + a'_{24}x_4 = b'_2 & (b) \\ 0 + a'_{32}x_2 + a'_{33}x_3 + a'_{34}x_4 = b'_3 & (c) \\ 0 + a'_{42}x_2 + a'_{43}x_3 + a'_{44}x_4 = b'_4 & (d) \end{cases} \qquad (3)$$

A forma matricial das equações após essa operação é mostrada na **Fig. 3.**

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & a'_{24} \\ 0 & a'_{32} & a'_{33} & a'_{34} \\ 0 & a'_{42} & a'_{43} & a'_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b'_2 \\ b'_3 \\ b'_4 \end{bmatrix}$$

Figura 3 – Forma matricial do sistema após a eliminação de **a** $_{41}$

Note que o resultado da operação de eliminação é a redução dos campos da primeira coluna, exceto $\mathbf{a_{11}}$ (o elemento pivô), a zero.

Passo 2

Neste passo, as **Eqs. (3a)** e **(3b)** não são alteradas, e os termos que incluem a variável $\mathbf{x_2}$ nas **Eqs. (3c)** e **(3d)** são eliminados.

Neste passo, a **Eq. (3b)** é a equação pivô, e o coeficiente $\mathbf{a'_{22}}$ é o coeficiente pivô.

Para eliminar o termo $\mathbf{a'_{32}x_2}$ na **Eq. (3c)**, a equação pivô, **Eq. (3b)**, é multiplicada por $\mathbf{m_{32} = a'_{32} / a'_{22}}$ e então subtraída da **Eq. (3c)**

$$\begin{array}{rl} & a'_{32}x_2 + a'_{33}x_3 + a'_{34}x_4 = b'_3 \\ - & m_{32}(a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + a'_{24}x_4) = m_{32}b'_2 \\ \hline & 0 + \underbrace{(a'_{33} - m_{32}a'_{23})}_{a''_{33}}x_3 + \underbrace{(a'_{34} - m_{32}a'_{24})}_{a''_{34}}x_4 = \underbrace{b'_3 - m_{32}b'_2}_{b''_3} \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & a'_{24} \\ 0 & 0 & a''_{33} & a''_{34} \\ 0 & a'_{42} & a'_{43} & a'_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b'_2 \\ b''_3 \\ b'_4 \end{bmatrix}$$

a) Procedimento **b)** Forma matricial

Figura 4 – Eliminação de **a'** $_{32}$

Em seguida, elimina-se o termo **a'_{42} x_2** .

A equação pivô, **Eq. (3b)**, é multiplicada por **m_{42} = a'_{42} /a'_{22}** e então subtraída da **Eq. (3d)**

$$
\begin{array}{rl}
 & a'_{42}x_2 + a'_{43}x_3 + a'_{44}x_4 = b'_4 \\
- & m_{42}(a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + a'_{24}x_4) = m_{42}b'_2 \\
\hline
 & 0 + \underbrace{(a'_{43} - m_{42}a'_{23})}_{a''_{43}}x_3 + \underbrace{(a'_{44} - m_{42}a'_{24})}_{a''_{44}}x_4 = \underbrace{b'_4 - m_{42}b'_2}_{b''_4}
\end{array}
\qquad
\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & a'_{24} \\ 0 & 0 & a''_{33} & a''_{34} \\ 0 & 0 & a''_{43} & a''_{44} \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} b_1 \\ b'_2 \\ b''_3 \\ b''_4 \end{bmatrix}
$$

a) Procedimento **b)** Forma matricial

Figura 5 – Eliminação de **a'_{42}**

Este é o final do **Passo 2**. O sistema de equações tem agora a seguinte forma:

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = b_1 & (a) \\
0 + a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + a'_{24}x_4 = b'_2 & (b) \\
0 + \ 0 \ + a''_{33}x_3 + a''_{34}x_4 = b''_3 & (c) \\
0 + \ 0 \ + a''_{43}x_3 + a''_{44}x_4 = b''_4 & (d)
\end{cases}
\tag{4}
$$

Passo 3

Neste passo, as **Eqs. (4a)**, **(4b)** e **(4c)** não são alteradas, e o termo que inclui a variável **x_3** nas **Eq (4d)** é eliminado.

Agora, a **Eq. (4c)** é a equação pivô, e o coeficiente **a''_{33}** é o coeficiente pivô. Para eliminar o termo **$a''_{43}x_3$** da **Eq. (4d)**, a equação pivô é multiplicada por **m_{43} = a''_{43} /a''_{33}** e então subtraída da **Eq. (4d)**:

$$
\begin{array}{rl}
 & a''_{43}x_3 + a''_{44}x_4 = b''_4 \\
- & m_{43}(a''_{33}x_3 + a''_{34}x_4) = m_{43}b''_3 \\
\hline
 & \underbrace{(a''_{44} - m_{43}a''_{34})}_{a'''_{44}}x_4 = \underbrace{b''_4 - m_{43}b''_3}_{b'''_4}
\end{array}
\qquad
\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & a'_{24} \\ 0 & 0 & a''_{33} & a''_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a'''_{44} \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} b_1 \\ b'_2 \\ b''_3 \\ b'''_4 \end{bmatrix}
$$

a) Procedimento **b)** Forma matricial

Figura 6 – Eliminação de **a'_{43}**

Este é o final do **Passo 3**. O sistema de equações está agora na forma triangular superior:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+a_{14}x_4=b_1 & (a) \\ 0+a'_{22}x_2+a'_{23}x_3+a'_{24}x_4=b'_2 & (b) \\ 0+\ 0\ +a''_{33}x_3+a''_{34}x_4=b''_3 & (c) \\ 0+\ 0\ +\ \ 0\ \ +\ \ a'''_{44}x_4=b'''_4 & (d) \end{cases} \qquad (5)$$

Uma vez transformada para a forma triangular superior, as equações podem ser facilmente resolvidas com o uso da substituição regressiva.

Os três passos do processo de eliminação de Gauss são ilustrados conjuntamente na **Fig. 7**.

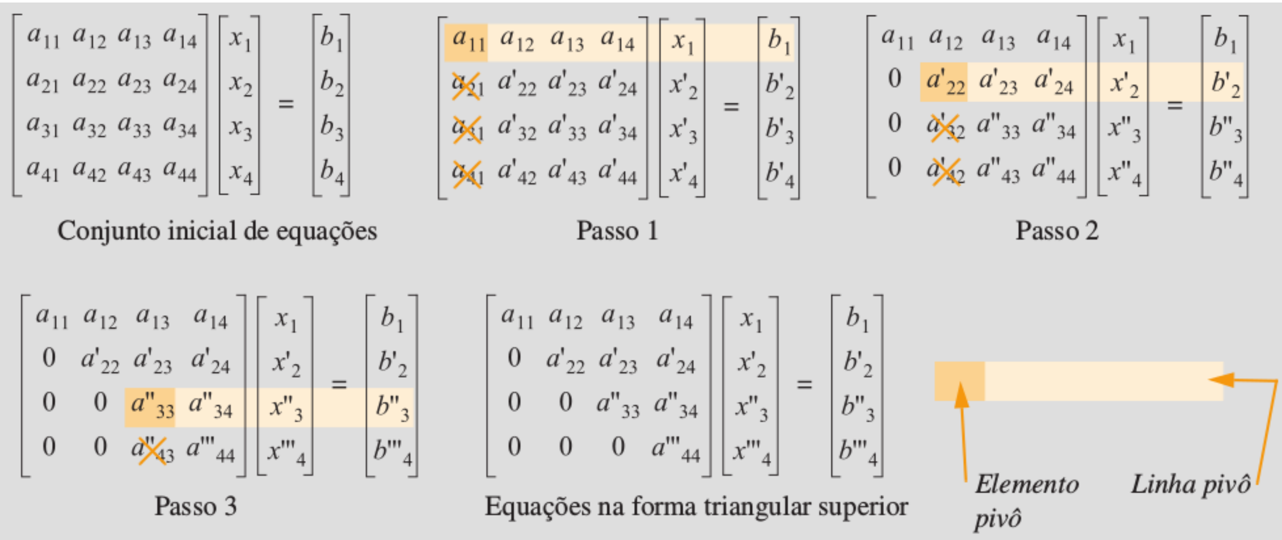

Figura 7 – Procedimento de eliminação de Gauss.

Estratégias de Pivoteamento

O algoritmo para o método de eliminação de Gauss requer o cálculo dos multiplicadores:

$$m_{ik}=-\frac{a_{ik}}{a_{kk}} \qquad i = k+1,\ \ldots.\ n \text{ e } k=1,2,3,\ \ldots\ ,\ n-1$$

a cada etapa **k** do processo. Sendo o coeficiente $\mathbf{a_{kk}}$ chamado de **pivô**.

O que acontece se o pivô for nulo? E se o pivô estiver próximo de zero?

Estes dois casos merecem atenção especial pois é impossível trabalhar com um pivô nulo.

E trabalhar com um pivô próximo de zero pode resultar em resultados totalmente imprecisos. Isto porque em qualquer calculadora ou computador os cálculos são efetuados com precisão finita, e pivôs próximos de zero são origem a multiplicadores bem maiores que a unidade que, por sua vez, origina uma ampliação dos erros de arredondamento.

Para se contornar estes problemas deve-se adotar uma estratégia de pivoteamento, ou seja, adotar um processo de escolha da linha e/ou coluna pivotal.

Esta estratégia consiste em:

1) no inicio da etapa **k** da fase de escalonamento, escolher para pivô o elemento de maior módulo entre os coeficientes: $\mathbf{a_{ik}}$, $\mathbf{i = k , k + 1, ..., n}$

2) trocar as linhas **k** e **i** se for necessário

Classificação do Sistema Triangular

Seja **U** um sistema triangular superior escalonado de **m** equações e **n** incógnitas, teremos as seguintes possibilidades:

1) m = n → sistema **compatível** e **determinado**;

2) m < n → sistema **compatível** e **indeterminado**.

Se durante o escalonamento surgir equações do tipo:

$$\mathbf{0\ x_1 + 0\ x_2 + ... + 0\ x_n = b_m}$$

, então:

1) Se $\mathbf{b_m = 0}$, então eliminaremos a equação e continuamos o escalonamento;

2) Se $\mathbf{b_m \neq 0}$, então conclui-se que o sistema é **incompatível**.

Exemplo 2: Resolver o sistema abaixo pelo método de Gauss.

$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=3 \\ 2x_1+x_2-x_3=0 \\ 3x_1-x_2-x_3=-2 \end{cases}$$

Solução

1ª etapa: Matriz completa:

$$M=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & : & 3 \\ 2 & 1 & -1 & : & 0 \\ 3 & -1 & -1 & : & -2 \end{bmatrix}$$

2ª etapa: Triangulação:

Iremos se referir as equações como: E_1 (primeira equação), E_2 (segunda equação) e assim por diante.

- **passo 1:**

  $\mathbf{E_2 \leftarrow E_2 - 2\ E_1}$

  $\mathbf{E_3 \leftarrow E_3 - 3\ E_1}$

- **passo 2:**

  $\mathbf{E_3 = E_3 - 7/3\ E_2}$

3ª etapa: Retro substituição:

Da terceira linha temos:

$$\mathbf{3\ x_3 = 3 \Rightarrow x_3 = 1}$$

Substituindo $\mathbf{x_3}$ na segunda linha temos:

$$-3\,x_2 - 3(1) = -6 \Rightarrow x_2 = 1$$

Substituindo x_3 e x_2 na primeira linha temos:

$$1\,x_1 + 2(1) + 1(1) = 3 \Rightarrow x_1 = 0$$

Resposta: $\mathbf{x = (0, 1, 1)^T}$

Exercício 3: Resolver o sistema abaixo pelo método de Gauss.

$$\begin{cases} 0{,}25\,x_1 + 0{,}5\,x_2 + x_3 = 0{,}25 \\ 0{,}09\,x_1 + 0{,}3\,x_2 + x_3 = 0{,}49 \\ 0{,}01\,x_1 + 0{,}1\,x_2 + x_3 = 0{,}81 \end{cases}$$

Resposta: $\mathbf{x = (1, -2, 1)^T}$

Exercício 4: Resolver o sistema abaixo pelo método de Gauss.

$$\begin{cases} 4\,x_1 - 2\,x_2 - 3\,x_3 + 6\,x_4 = 12 \\ -6\,x_1 + 7\,x_2 + 6{,}5\,x_3 - 6\,x_4 = -6{,}5 \\ x_1 + 7{,}5\,x_2 + 6{,}25\,x_3 + 5{,}5\,x_4 = 16 \\ -12\,x_1 + 22\,x_2 + 15{,}5\,x_3 - x_4 = 17 \end{cases}$$

Resposta: $\mathbf{x = (2; 4; -3; 0{,}5)^T}$