Introdução

Cálculo Numérico em Computadores

prof. Olga Yevseyeva
yevseyeva.olga@ufsc.br

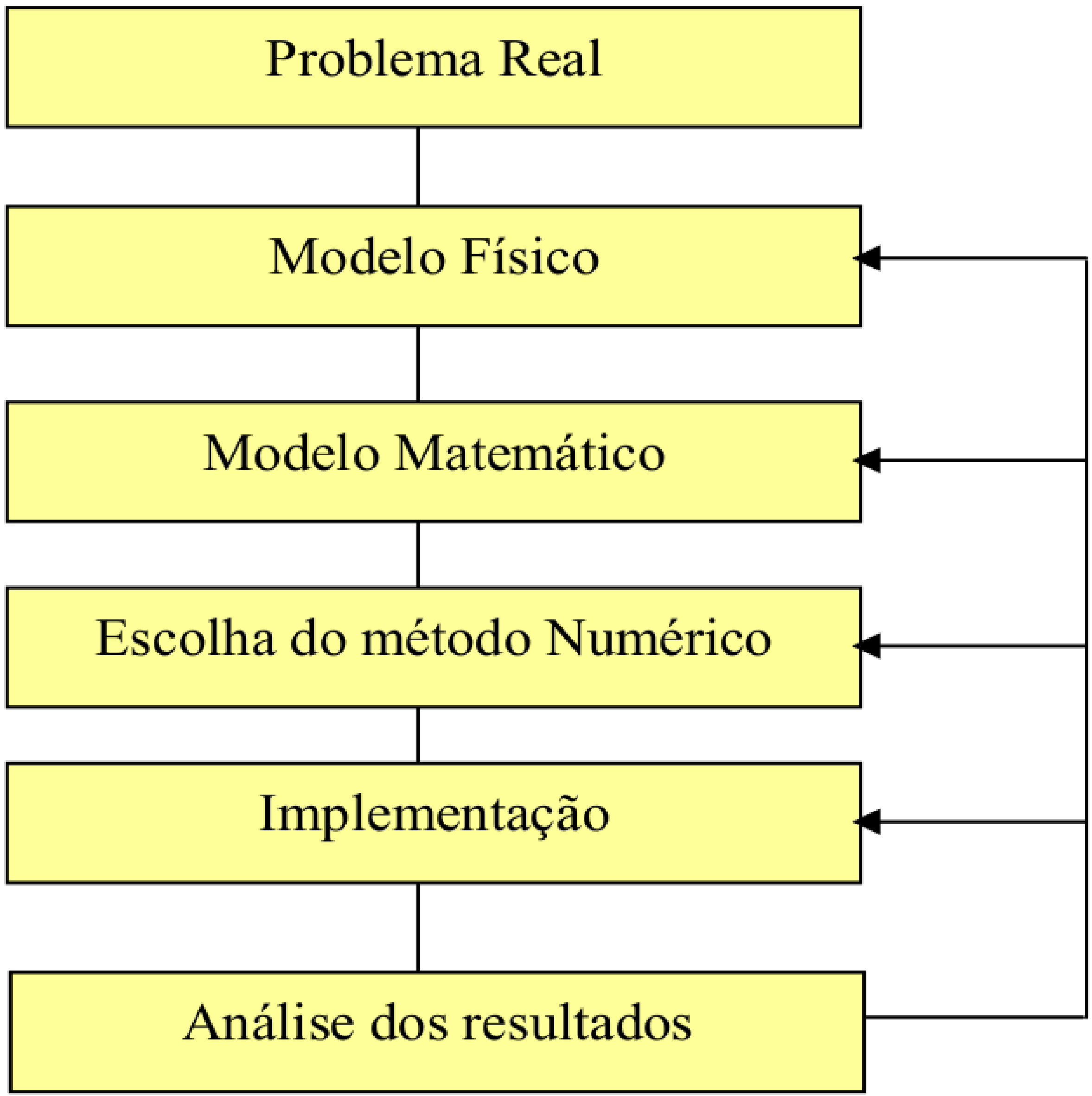
Plano de ensino

- Objetivos
- Ementa
- Metodologia, Técnicas de Ensino
- Recursos Didáticos
- Avaliação
- Cronograma
- Bibliografia

Métodos Numéricos

- Têm um papel importante de carácter transversal na formação em cursos de Engenharia
- Também são muito utilizados em problemas nas áreas de
  - Economia
  - Medicina
  - Física
  - Química, entre outras.
- Os Métodos Numéricos procuram desenvolver processos de cálculo (algoritmos), utilizando uma sequência finita de operações aritméticas básicas, para resolver certos problemas matemáticos.
- Estes algoritmos envolvem, em geral, um grande número de cálculos aritméticos.

Resolução de problema



Cálculo Numérico

- **O que é Cálculo Numérico?**
- O Cálculo Numérico corresponde a um conjunto de ferramentas ou métodos usados para se obter a solução de problemas matemáticos de forma aproximada.
- Esses métodos se aplicam principalmente a problemas que não apresentam uma solução exata, portanto precisam ser resolvidos numericamente.

Cálculo Numérico

- **Por que produzir resultados numéricos?**

- Um problema de Matemática pode ser resolvido analiticamente, mas esse método pode se tornar impraticável com o aumento do tamanho do problema.
- Exemplo: solução de sistemas de equações lineares (cálculo de estruturas, redes elétricas etc.).

Cálculo Numérico

- **Por que produzir resultados numéricos?**

- A existência de problemas para os quais não existem métodos matemáticos para solução (não podem ser resolvidos analiticamente).
- Exemplos:

a) $\int e^{x^2} dx$ não tem primitiva em forma simples;

b) equações diferenciais parciais não lineares podem ser resolvidas analiticamente só em casos particulares.

Cálculo Numérico

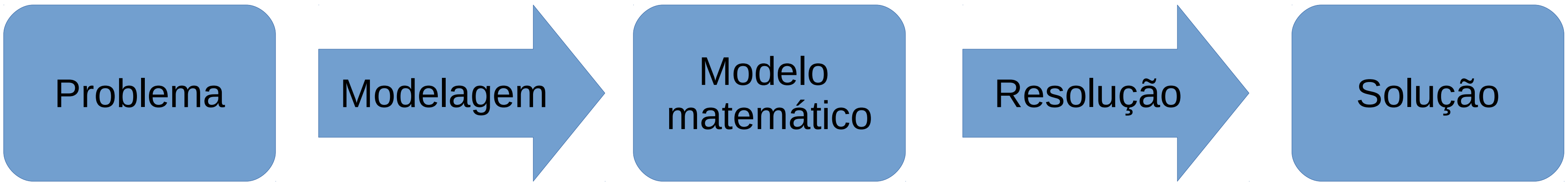
- Os métodos numéricos buscam soluções aproximadas para as formulações matemáticas.
- Nos problemas reais, os dados são medidas e, como tais, não são exatos.
  Uma medida física não é um número, é um intervalo, pela própria imprecisão das medidas.
- Daí, trabalha-se sempre com a figura do erro, inerente à própria medição.
- Os métodos aproximados buscam uma aproximação do que seria o valor exato.
- Dessa forma é inerente aos métodos se trabalhar com a figura da aproximação, do erro, do desvio.

Cálculo Numérico

- Função do cálculo Numérico na Engenharia:

  Buscar solucionar problemas técnicos através de métodos numéricos

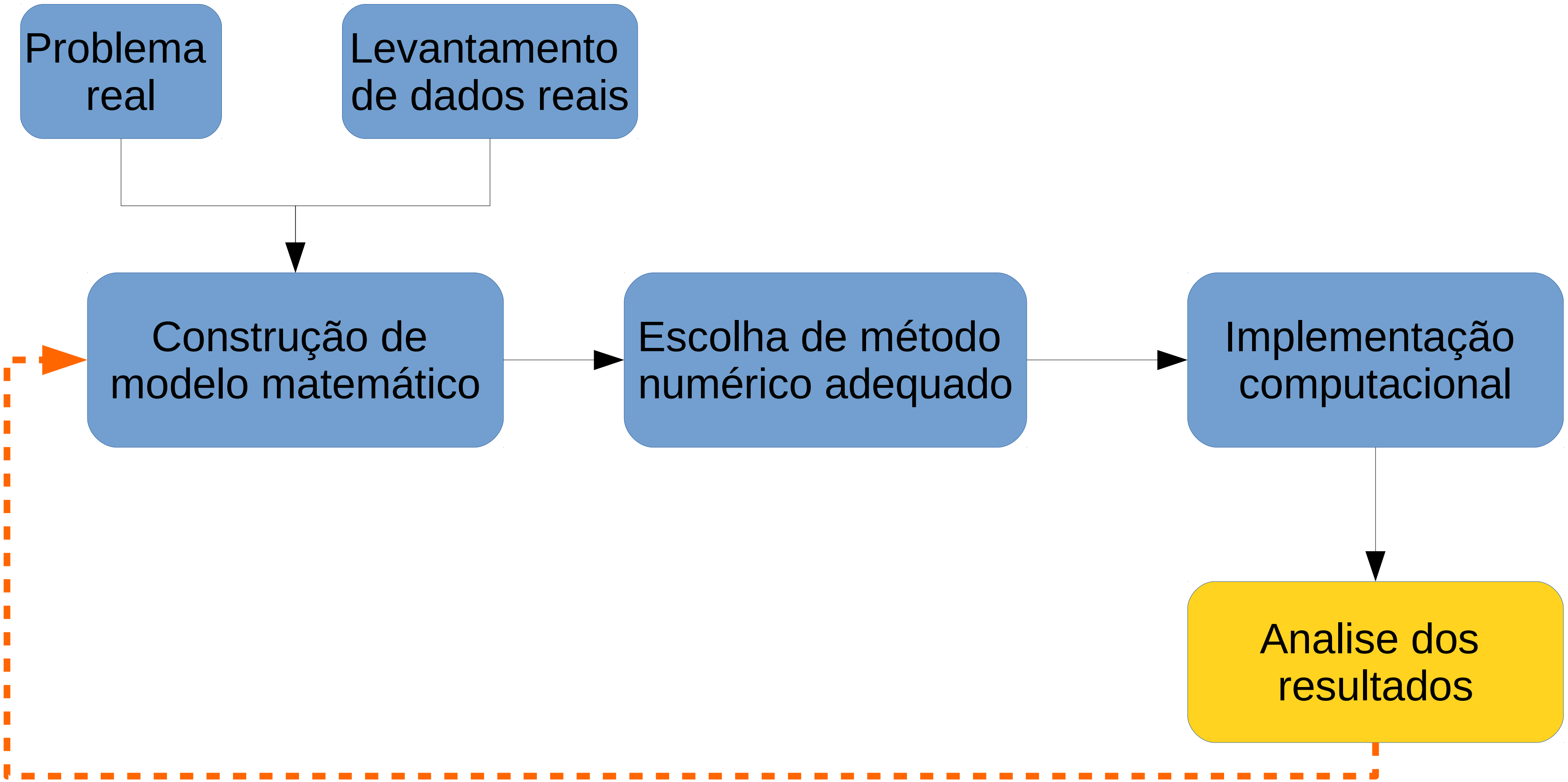
Cálculo Numérico



- Modelagem – fase de obtenção de um modelo matemático que descreve o comportamento do problema que se quer estudar.
- Resolução – fase de obtenção da solução do modelo matemático através da aplicação de métodos numéricos
- Observação: Ambas as fases acima estão passiveis de erros.

Cálculo Numérico

- De forma mais detalhada temos:



Cálculo Numérico

- Pode acontecer (e isso não é raro) que os resultados finais estejam distantes do que se esperaria obter, ainda que todas as fases de resolução tenham sido realizadas corretamente.
- Os resultados obtidos dependem também:
  - da precisão dos dados de entrada
  - da forma como esses dados são representados no computador
  - das operações numéricas efetuadas

Cálculo Numérico

- Aplicações de cálculo numérico na engenharia
  - Determinação de raízes de equações
  - Interpolação de valores tabelados
  - Integração numérica, entre outros.

Conceito de Erro

- A noção de **erro** está presente em todos os campos do Cálculo Numérico.
- De um lado, os dados, em si, nem sempre são exatos e, de outro lado, as operações sobre valores não exatos propagam esses erros a seus resultados.
- Finalmente, os próprios métodos numéricos, frequentemente métodos aproximados, buscam a minimização dos erros, procurando resultados o mais próximo possível do que seriam valores exatos.

Conceito de Erro

- **Erro** é a diferença entre o **valor exato** e o **valor apresentado**.

Conceito de Erro

- Os erros podem ocorrer quando utilizamos o computador para realizar os cálculos devido a forma de representação de números reais
- Os erros podem ocorre durante as fases de modelagem e resolução
- Também existem erros de arredondamento e erros de truncamento.

Conceito de Erro

- **Erros na Fase de Modelagem**
- Ao se tentar representar um fenômeno do mundo físico por meio de um método matemático, raramente se tem uma descrição correta deste fenômeno.
- Normalmente, são necessárias várias simplificações do mundo físico para que se tenha um modelo.

Conceito de Erro

- **Exemplo:**

  Estudo do movimento de um corpo sujeito a uma aceleração constante.
- Tem-se a seguinte equação:

$$d = d_o + v_o * t + 1/2 * \alpha * t^2$$

onde:

- **d** : distância percorrida
- d_o : distância inicial
- v_o : velocidade inicial
- **t** : tempo
- **α**: aceleração

Conceito de Erro

- Determinar a altura de um edifício com uma bolinha de metal e um cronômetro: **3s**

$d = 0 + 0 * 3 + 1/2 * 9.8 * 3^2 = \mathbf{44.1m}$

- **Este resultado é confiável?**

1. Fatores não considerados:
   - resistência do ar
   - velocidade do vento, etc.
2. Precisão dos dados de entrada:
   - Se o tempo fosse 3,5s → **d = 60.025m**
   - Variação de **16,7%** no cronômetro → **36%** na altura.

Conceito de Erro

- **Erros na Fase de Resolução**
- Para a resolução de modelos matemáticos muitas vezes torna-se necessária a utilização de instrumentos de cálculo que necessitam, para o seu funcionamento, que sejam feitas certas aproximações.
- Tais aproximações podem gerar erros, tais como:
  - conversão de bases
  - erros de arredondamento
  - erros de truncamento

Erros Absolutos e Relativos

- **Erro absoluto** (**EA**) é a diferença entre o valor exato de um número **N** e o seu valor aproximado **N'**:
- $N = N' + EA_N$
  - $N > N' \rightarrow EA_N > 0$
  - $N < N' \rightarrow EA_N < 0$
- **Erro absoluto: $EA_N = N - N'$**
- Por exemplo, sabendo-se que $\pi \in (3.14, 3.15)$ tomaremos para π um valor dentro deste intervalo e teremos, então, $|EA_\pi| = |\pi - \pi'| < 0.01$

Conceito de Erro

- **Erro Relativo** é definido como o erro absoluto dividido pelo valor aproximado:

$$ER_N = \frac{EA_N}{N'} = \frac{N - N'}{N'}$$

Conceito de Erro

- É claro que **EA_N** só poderá ser determinado se **N** for exatamente conhecido;
- Como isso é raro, em cálculos numéricos costuma-se trabalhar com uma limitação máxima para o erro, ao invés do próprio (indicando-se, então, **$| E | < \varepsilon$**, onde **ε** é o limite).
- Por exemplo, se **$\alpha = 3876.373$** e só desejamos a parte inteira **α'**, o erro absoluto será:
- **$\Delta \alpha = | \alpha - \alpha' | = 0.373$**

Conceito de Erro

- Se fizermos o mesmo com o número **$\beta = 1.373$**, teremos:
- **$\Delta\, \beta = | \beta - \beta' | = 0.373$**
- O efeito de aproximação de **β** é diferente do que de **α**, mas o erro absoluto é o mesmo nos dois casos.
- O erro relativo, entretanto, pode traduzir perfeitamente este fato, pois:
- **$\delta_{\alpha} = 0,373 / 3876 \approx 0,000096 < 10^{-4}$**
- **$\delta_{\beta} = 0,373 / 1 \approx 0,373 < 10^{0}$**

Conceito de Erro

- **Erro de Arredondamento**
- Ao se aplicar um método numérico, os erros devidos aos valores iniciais, intermediários e finais conduzem a um erro global (diferença entre o exato e o obtido) também chamado de arredondamento.

Conceito de Erro

- **Erros iniciais** são os cometidos no arredondamento dos dados iniciais.
- Os **erros intermediários** são decorrentes dos erros cometidos durante a aplicação do método numérico.
- Os **erros finais** decorrentes da apresentação final do resultado.

Conceito de Erro

- Os tipos de arredondamentos mais conhecidos são:
  - Arredondamento para baixo ou por falta;
  - Arredondamento para cima ou por excesso;
  - Arredondamento para o numero de maquina mais próximo.

Conceito de Erro

- **Critério de Arredondamento:** no cálculo manual, ao registrar um valor aproximado, costuma-se usar a seguinte regra:

1. somar meia unidade após a última casa decimal a conservar;

2. desprezar as demais casas.

- Assim, com 2 números significativos tem-se:

$$\sqrt{2}=1{,}414\simeq 1{,}41\left(1{,}414...+0{,}005=1{,}419...\rightarrow 1{,}41\right)$$

$$\sqrt[3]{2}=1{,}259\simeq 1{,}26\left(1{,}259...+0{,}005=1{,}264...\rightarrow 1{,}26\right)$$

Conceito de Erro

- O uso deste critério limita o erro a meia unidade da última casa conservada:

$$E=\sqrt{2}-1{,}41=1{,}41421\ldots-1{,}41=0{,}00421<0{,}005$$

- Os valores aproximados obtidos podem ser inferiores (valor aproximado por falta) ou superiores (valor aproximado por excesso) aos exatos:
  - 1.41 é o valor aproximado, por falta, de $\sqrt{2}$
  - 1.26 é o valor aproximado por excesso de $\sqrt[3]{2}$

Conceito de Erro

- Para concluir este item de erro de arredondamento, deve-se ressaltar a importância de se saber o número de dígitos significativos do sistema de representação da máquina que está sendo utilizada para que se tenha a noção da precisão do resultado obtido.
- Além da precisão decimal, o cálculo do chamado **Épsilon** da máquina nos dá uma ideia da exatidão da máquina.
- O **ε** da máquina é o menor número de ponto flutuante, tal que: $\mathbf{1 + \varepsilon > 1}$
- Alguns métodos para cálculo de **ε** não dão seu valor exato, mas isto nem sempre é necessário, pois o que importa é a sua ordem de grandeza.

Conceito de Erro

- **Erro de Truncamento**
- São erros provenientes da utilização de processos que deveriam ser infinitos ou muito grandes para a determinação de um valor e que, por razões práticas, são truncados.
- Estes processos infinitos são muito utilizados na avaliação de funções matemáticas, tais como, exponenciação, logaritmos, funções trigonométricas e várias outras que uma máquina pode ter.

Conceito de Erro

- Exemplo: Uma máquina poderia calcular a função **seno(x)** utilizando as seguintes técnicas:

$$seno(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

- Fazendo truncamento:

$$seno(x) \simeq x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots (-1)^n \frac{x^n}{n!}$$

Conceito de Erro

- Exemplo: Uma máquina poderia calcular a função **exponencial(x)** utilizando as seguintes técnicas:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

- Fazendo truncamento:

$$e^x \simeq 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots \frac{x^n}{n!}$$

Conceito de Erro

- A solução é a de interromper os cálculos quando uma determinada precisão é atingida.

Pergunta:

- **Qual linguagem de programação dominam?**

Conceito de Erro

- O programa em C, calcula uma aproximação do **ε** da máquina:

```c
#include <stdio.h>

int main()
{
   float Eps=1.0;

   while (Eps + 1 > 1)
     Eps = Eps / 2.0;

   printf("A maquina acha que %1.25f vale zero!\n", Eps);

   return 0;
}
```