UNIDADE 4
APROXIMAÇÃO DE FUNÇÕES

Interpolação

Introdução

A interpolação é uma das técnicas bem antigas e básicas do cálculo numérico.

Muitas funções são conhecidas apenas em um conjunto finito e discreto de pontos de um intervalo **[a, b]**, como, por exemplo, a tabela abaixo que relaciona calor específico da água e temperatura:

x_i	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
Temperatura (°C)	20	25	30	35	40	45	50	55
Calor específico[1]	0,99907	0,99852	0,99826	0,99818	0,99828	0,99849	0,99878	0,99919

Tabela 1 - Calor específico da água.

A partir desses dados suponhamos que se queira calcular:

a) o calor específico da água a 32,5°C
b) a temperatura para a qual o calor específico é 0,99837

A interpolação tem o objetivo de nos ajudar na resolução deste tipo de problema, ou em casos em que possuímos um conjunto de valores obtidos através de alguns experimentos.

Interpolar uma função **f(x)** consiste em aproximar essa função por uma outra função **g(x)**, escolhida entre uma classe de funções definida *a priori* e que satisfaça algumas propriedades.

A função **g(x)** é então usada em substituição à função **f(x)**.

A necessidade de se efetuar esta substituição surge em várias situações, como por exemplo:

a) quando são conhecidos somente os valores numéricos da função para um conjunto de pontos (não dispondo de sua forma analítica) e é necessário calcular o valor da função em um ponto não tabelado (como é o caso do exemplo anterior).
b) quando a função em estudo tem uma expressão tal que operações como a diferenciação e a integração são difíceis (ou mesmo impossíveis) de serem realizadas. Neste caso, podemos procurar uma outra função que seja uma aproximação da função dada e cujo manuseio seja bem mais simples.

As funções que substituem as funções dadas podem ser de tipos variados, tais como:

- polinomiais,
- trigonométricas,
- exponenciais e logarítmicas.

Nós iremos considerar apenas o estudo das funções polinomiais.

---

1 O **calor específico** é a quantidade de calor que deve ser fornecida para que 1g de substância tenha a sua temperatura elevada em 1°C

Conceito de Interpolação

Seja a função **$y = f(x)$**, dada pela Tabela 1. Deseja-se determinar **$f(x)$**, sendo:

a) $x \in (x_0, x_7)$ e $x \neq x_i$, $i = 0, 1, 2, ..., 7$
b) $x \notin (x_0, x_7)$

Para resolver **(a)** tem-se que fazer uma **interpolação**. E, sendo assim, determina-se o polinômio interpolador, que é uma aproximação da função tabelada.

Por outro lado, para resolver **(b)**, deve-se realizar uma **extrapolação**.

Consideremos **(n + 1)** pontos distintos: **$x_0, x_1, x_2, ..., x_n$**, chamados nós da interpolação, e os valores de **$f(x)$** nesses pontos: **$f(x_0), f(x_1), f(x_2), ..., f(x_n)$**.

A forma de interpolação de **$f(x)$** que veremos a seguir consiste em se obter uma determinada função **$g(x)$** tal que:

$$
\begin{aligned}
g(x_0) &= f(x_0)\\
g(x_1) &= f(x_1)\\
g(x_2) &= f(x_2)\\
&\dots\\
g(x_n) &= f(x_n)
\end{aligned}
$$

Graficamente temos:

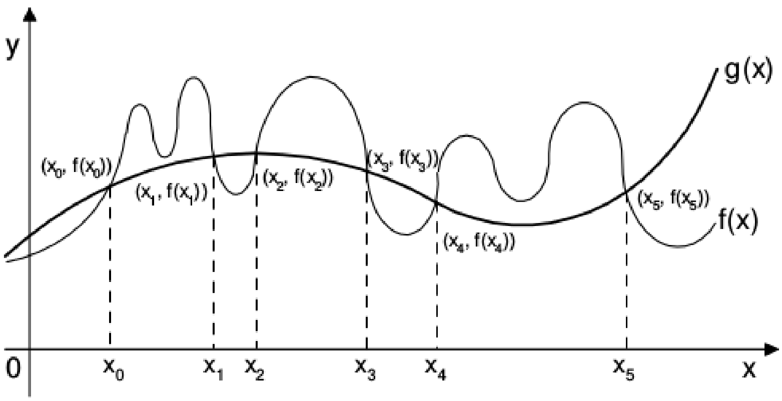

Figura 1 – Interpretação geométrica para **n = 5**

Interpolação Linear

Obtenção da Fórmula

Dados dois pontos distintos de uma função **$y = f(x)$: (x_0, y_0)** e **(x_1, y_1)**, deseja-se calcular o valor de **y** para um determinado valor de **x** entre **x_0** e **x_1**, usando a interpolação polinomial.

O polinômio interpolador é uma unidade menor que o número de pontos conhecidos.

Assim sendo, o polinômio interpolador nesse caso terá **grau 1**, isto é,

$$P_1(x) = a_1x + a_0$$

Para determiná-lo, os coeficientes $\mathbf{a_0}$ e $\mathbf{a_1}$ devem ser calculados de forma que tenha:

$$\mathbf{P1(x_0) = f(x_0) = y_0}$$
$$\mathbf{P1(x_1) = f(x_1) = y_1}$$

ou seja, basta resolver o sistema linear abaixo:

$\begin{cases} a_1 x_0 + a_0 = y_0 \\ a_1 x_1 + a_0 = y_1 \end{cases}$ onde $\mathbf{a_1}$ e $\mathbf{a_0}$ são as incógnitas e

$A = \begin{bmatrix} x_0 & 1 \\ x_1 & 1 \end{bmatrix}$ é a matriz dos coeficientes.

O determinante da matriz **A** é diferente de zero, sempre que $\mathbf{x_0 \neq x_1}$, logo para pontos distintos o sistema tem solução única.

O polinômio interpolador $\mathbf{P_1(x) = a_1x + a_0}$ tem como imagem geométrica uma reta, portanto estaremos aproximando a função **f(x)** por uma reta que passa pelos dois pontos conhecidos $\mathbf{(x_0, y_0)}$ e $\mathbf{(x_1, y_1)}$.

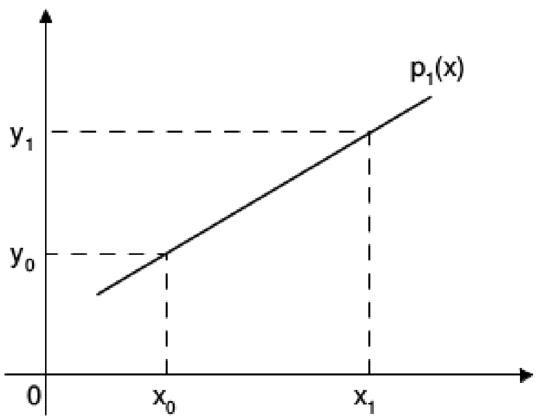

Figura 2 – pontos $\mathbf{(x_0, y_0)}$ e $\mathbf{(x_1, y_1)}$, e a reta que passa por eles.

Exemplo 1: Seja a função **y = f(x)** definida pelos pontos **(0,00; 1,35)** e **(1,00; 2,94)**. Determinar aproximadamente o valor de **f(0,73)**.

Solução

$\mathbf{P_1(x) = a_1x + a_0}$ é o polinômio interpolador de 1° grau que passa pelos pontos dados. Então teremos:

a) Pontos utilizados:

- **(0,00; 1,35)**
- **(1,00; 2,94)**

b) Cálculo dos coeficientes:

$P_1(0) = a_1 * 0 + a_0 = 1,35$ → $a_0 = 1,35$

$P_1(1) = a_1 * 1 + a_0 = 2,94$ → $a_1 = 1,59$

c) Polinômio interpolador (equação da reta que passa pelos pontos dados):

$P_1(x) = a_1x + a_0 = 1,59*x + 1,35$

d) Resposta:

$P_1 (0,73) = 1,59 * 0,73 + 1,35 = 2,51$

O resultado obtido acima está afetado por dois tipos de erros:

a) **Erro de arredondamento (E_A) –** é cometido durante a execução das operações e no caso de um resultado ser arredondado.
b) **Erro de truncamento (E_T)** – é cometido quando a fórmula de interpolação a ser utilizada é escolhida, pois a aproximação de uma função conhecida apenas através de dois pontos dados é feita por um polinômio de 1 ° grau.

Exercícios

Exercício 1: Dada a função **$f(x) = 10x^4+2x+1$** com os valores de **f(0,1)** e **f(0,2)** determinar **P1 (0,15)** e o erro absoluto cometido.

Resposta:

Polinômio interpolador: $P_1(x) = 2,15x + 0,986$

$P_1 (0,15) = 1,3085$

$| E_A | = 0,0034375$

Exercício 2: Calcular o calor específico aproximado da água a 32,5 °C, usando os valores da Tabela 1.

Usar as temperaturas 30°C e 35°C.

Resposta:

Polinômio interpolador: $P_1(x) = -\,0,000016\,x + 0,99874$

$P_1 (32,5) = 0,99822$

Interpolação Quadrática

Obtenção da Fórmula

Se conhecermos três pontos distintos de uma função, então o polinômio interpolador será:

$$P_2(x) = a_2x^2+ a_1x + a_0$$

O polinômio **$P_2(x)$** é conhecido como função quadrática cuja imagem geométrica é uma parábola, portanto, estaremos aproximando a função **f(x)** por uma parábola que passa pelos três pontos conhecidos **(x_0, y_0)**, **(x_1, y_1)** e **(x_2, y_2)**.

Para determinarmos os valores de **a_2**, **a_1** e **a_0** é necessário resolver o sistema:

$$\begin{cases} a_2 x_0{}^2 + a_1 x_0 + a_0 = y_0 \\ a_2 x_1{}^2 + a_1 x_1 + a_0 = y_1 \\ a_2 x_2{}^2 + a_1 x_2 + a_0 = y_2 \end{cases}$$

onde **a_2**, **a_1** e **a_0** são as incógnitas e os pontos **(x_0, y_0)**, **(x_1, y_1)** e **(x_2, y_2)** são conhecidos.

A matriz dos coeficientes é:

$$A = \begin{bmatrix} {x_0}^2 & x_0 & 1 \\ {x_1}^2 & x_1 & 1 \\ {x_2}^2 & x_2 & 1 \end{bmatrix}$$

Como os pontos são distintos, então o sistema terá solução única.

Exemplo 2: Utilizando os valores da função seno, dados pela tabela abaixo, determinar a função quadrática que se aproxima de

$f(x) = \frac{2\,sen^2\,x}{x+1}$ trabalhando com quatro casas decimais.

Verificar a precisão do método no ponto **x = 0,5236**

x	sen(x)	f(x)
0	0	0,000
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	0,328
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0,560

Solução

$P_2(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ é o polinômio interpolador de 2° grau que passa pelos pontos dados. Então teremos:

a) Pontos utilizados:

- **(0; 0,000)**
- **(π/6; 0,328)**
- **(π/4; 0,560)**

b) Cálculo dos coeficientes:

$P_2(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$

c) Polinômio interpolador (equação da parábola que passa pelos pontos dados):

$P_1(x) = P_2(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0{,}331\,x^2 + 0{,}453\,x + 0{,}000$

Exercícios

Exercício 3: Determinar o valor de **f(0,2)** e o erro absoluto ocasionado usando interpolação quadrática, e valores tabelados da função $\mathbf{f(x) = x^2-2x+1}$

Utilizar duas casas decimais.

x	f(x)
0,5	0,25
0,3	0,49
0,1	0,81

Resposta:

Polinômio interpolador: $\mathbf{P_2(x) = 1x^2-2x+1}$

$\mathbf{P_2(0,2) = 0,64}$

$\mathbf{| E_A | = 0,0}$

Observações: Podemos observar que nesse caso o polinômio interpolador é igual a função dada.

Isto ocorre porque a função dada é polinomial de 2° grau e, a partir de três pontos da função, consegue-se determiná-la sem erro.

Contudo, poderá existir o erro de arredondamento.

Exercício 4: Usando três pontos da Tabela 1, determinar o calor específico aproximado da água a **31°C**. Achar os coeficientes com a precisão de 6 dígitos decimais.

Pontos utilizados: **(20; 0,99907)**, **(30; 0,99826)** e **(40; 0,99828)**

Resposta:

Polinômio interpolador:

$\mathbf{P_2(x) = 0,000004\, x^2 - 0,000289\, x + 1,003180}$

$\mathbf{P_2(31) = 0,998225}$