Resolução de Equações Polinomiais

Embora qualquer um dos métodos estudados anteriormente possam ser usados para encontrar zeros de um polinômio de qualquer grau, o fato de os polinômios aparecerem com tanta frequência em aplicações faz com que seja dedicada uma atenção especial.

Normalmente, um polinômio de **grau n** é escrito na forma:

$$P_n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

para $a_n \neq 0$

Sabemos da álgebra elementar como obter os zeros de um polinômio do segundo grau **$P_2(x)$**, ou seja, **n = 2**.

Existem fórmulas fechadas, semelhantes à fórmula para polinômios de grau 2, mas bem mais complicadas, para zeros de polinômios de grau 3 e 4.

Agora, para **n ≥ 5**, em geral, não existem fórmulas explícitas e somos forçados a usar métodos iterativos para encontrar os zeros dos polinômios.

Muitos dos teoremas da álgebra são úteis na localização e classificação dos tipos de zeros de um polinômio.

O estudo será dividido em localização de raízes e determinação das raízes reais.

Localização de Raízes

Vejamos alguns teoremas que serão úteis para efetuar a localização de raízes.

Teorema Fundamental da Álgebra: Se **$P_n(x)$** é um polinômio de grau **n ≥ 1**, ou seja,

$$P_n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

para **a_0**, **a_1**, **a_2**, ... , **a_n** reais ou complexos, com **$a_n \neq 0$**, então **$P_n(x)$** tem pelo menos um zero, ou seja, existe um número complexo **ξ** (*csi*) tal que **$P_n(\xi) = 0$**.

Para determinarmos o número de zeros reais de um polinômio com coeficientes reais, podemos fazer uso da **regra de sinal de Descartes.**

Regra de sinal de Descartes.

Dado um polinômio com coeficientes reais, o número de zeros reais positivos, **p**, desse polinômio não excede o número **v** de variações de sinal dos coeficientes.

Temos ainda que **v – p** é um número **inteiro**, **par** e **não negativo**.

Exemplo 1: Determinar o número de raízes reais positivas para seguinte polinômio:

$$P_5(x) = +3x^5 - 2x^4 - x^3 + 2x + 1$$

Solução

$+3x^5$	$-2x^4$	$-x^3$	$+2x$	$+1$
+	-	-	+	+
1		1		

Número de variações de sinal dos coeficientes **v = 1 + 1 = 2**

Lembrando que **v – p** é um número **inteiro**, **par** e **não negativo** temos duas possibilidades a considerar:

$$v=2 \Rightarrow p: \left\{ \begin{matrix} se\, v-p=0,\, p=2 \\ se\, v-p=2,\, p=0 \end{matrix} \right\}$$

Portanto temos duas possibilidades para a quantidade de raízes reais positivas **p = 2** ou **p = 0**

Para determinar o número de raízes reais negativas, **n** , tomamos **P_n (–x)** e usamos a mesma regra para raízes positivas:

Exemplo 2: Determinar o número de raízes reais negativas para seguinte polinômio:

$$P_5(x)=+3x^5-2x^4-x^3+2x+1$$

$$P_5(-x)=-3x^5-2x^4+x^3-2x+1$$

Solução

$-3x^5$	$-2x^4$	$+x^3$	$-2x$	$+1$
-	**-**	**+**	**-**	**+**
	1	**1**	**1**	

Número de variações de sinal dos coeficientes **v = 1 + 1 + 1 = 3**

Lembrando que **v – n** é um número **inteiro**, **par** e **não negativo** temos duas possibilidades a considerar:

$$v=3 \Rightarrow n: \left\{ \begin{matrix} se\, v-n=0, n=3 \\ se\, v-n=2, n=1 \end{matrix} \right\}$$

Portanto temos duas possibilidades para a quantidade de raízes reais negativas **n = 3** ou **n = 1**

Exemplo 3: Determinar o número de raízes reais positivas e negativas para seguinte polinômio:

$$P_7(x)=+7x^7+1$$

Solução

Raízes positivas:

$+7x^3$	$+1$
+	**+**

Número de variações de sinal dos coeficientes **v = 0**

Raízes negativas:

$P_7(-x) = -7x^7 + 1$

$-7x^3$	$+1$
-	**+**

1

Número de variações de sinal dos coeficientes **v = 1**

Lembrando que **v – n** é um número **inteiro**, **par** e **não negativo** temos:

$v = 1 \Rightarrow n : \{v - n = 0, n = 1\}$

Temos ainda **P_7 (0) = 1 ≠ 0**

Podemos concluir então que **P_n (x) = 0**

- não tem raiz real positiva
- o zero não é raiz
- tem apenas uma raiz real negativa, ou seja tem raízes complexas

Determinação das Raízes Reais

Estudaremos um processo para se calcular o valor numérico de um polinômio, isto porque em qualquer dos métodos este cálculo deve ser feito uma ou mais vezes por iteração.

Por exemplo, o **Método de Newton**, que veremos a seguir, a cada iteração deve-se fazer uma avaliação do polinômio e uma de sua derivada.

Método para Calcular o Valor Numérico de um Polinômio

Para exemplificar o método, estudaremos o processo analisando um polinômio de grau 4:

$$P_4(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

Este polinômio pode ser escrito na forma:

$$P_4(x) = (((a_4x + a_3)x + a_2)x + a_1)x + a_0$$

conhecida como forma dos parênteses encaixados.

Temos então, no caso de $\mathbf{n = 4}$, que

$$P_4(x) = (((\underbrace{\underbrace{\underbrace{a_4}_{b_4}x + a_3}_{b_3})x + a_2}_{b_2})x + a_1)x + a_0$$

...

Para se calcular o valor numérico de $\mathbf{P_4(x)}$ em $\mathbf{x = c}$, basta fazer sucessivamente:

$$b_4 = a_4$$
$$b_3 = a_3 + b_4c$$
$$b_2 = a_2 + b_3c$$
$$b_1 = a_1 + b_2c$$
$$b_0 = a_0 + b_1c$$

Ou seja $\mathbf{P_4(c) = b_0}$

Portanto, para $\mathbf{P_n(x)}$ de grau $\mathbf{n}$ qualquer, calculamos $\mathbf{P_n(c)}$ calculando as constantes $\mathbf{b_j}$, $\mathbf{j = n , n - 1, ..., 1, 0}$ sucessivamente, sendo:

$$b_n = a_n$$
$$b_j = a_j + b_{j+1}c \qquad j = n , n - 1, n-2,..., 1, 0$$

e $\mathbf{b_0}$ será o valor de $\mathbf{P_n(x)}$ para $\mathbf{x = c}$.

Podemos calcular o valor de $\mathbf{P'_n(x)}$ em $\mathbf{x = c}$ usando os coeficientes $\mathbf{b_j}$ obtidos anteriormente.

Tomando como exemplo o polinômio de grau 4, temos:

$$P_4(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \quad =>$$
$$P'_4(x) = 4\, a_4x^3 + 3a_3x^2 + 2a_2x + a_1$$

Usando os valores de $\mathbf{a_j}$ do cálculo anterior e dado que já conhecemos $\mathbf{b_0}$, $\mathbf{b_1}$, $\mathbf{b_2}$, $\mathbf{b_3}$ e $\mathbf{b_4}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{P'_4(x)} &= \mathbf{4\, a_4x^3 + 3\, a_3x^2 + 2\, a_2x + a_1} \\ &= \mathbf{4\, b_4c^3 + 3\,(b_3 - b_4c)\, c^2 + 2\,(b_2 - b_3c)\, c + (b_1 - b_2c)} \\ &= \mathbf{4\, b_4c^3 - b_4\, c^3 + 3\, b_3\, c^2 - b_3c^2 + 2\, b_2c - b_2c + b_1} \end{aligned}$$

Assim,

$$\mathbf{P'_4(x) = b_4c^3 + b_3c^2 + b_2c + b_1}$$

Aplicando o mesmo esquema anterior, teremos:

$\mathbf{c_4 = b_4}$

$\mathbf{c_3 = b_3 + c_4c}$

$\mathbf{c_2 = b_2 + c_3c}$

$\mathbf{c_1 = b_1 + c_2c}$

Calculamos então os coeficientes $\mathbf{c_j}$, $\mathbf{j = n\ ,\ n - 1, ..., 1}$ da seguinte forma:

$\mathbf{c_n = c_n}$

$\mathbf{c_j = b_j + c_{j+1}c} \qquad \mathbf{j = n\ ,\ n - 1, n\text{-}2, ..., 1, 0}$

Teremos então $\mathbf{P'_n(c) = c_1}$

Método de Newton para Zeros de Polinômios

Seja

$$\mathbf{P_n(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0}$$

uma aproximação inicial para a raiz procurada.

Conforme vimos, o Método de Newton consiste em desenvolver aproximações sucessivas para ξ a partir da iteração:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{P(x_i)}{P'(x_i)} \qquad \text{para } i = 0, 1, 2, \ldots$$

Exemplo 4:

Dada a equação polinomial $\mathbf{P_5(x) = x^5 - 3{,}7\ x^4 + 7{,}4\ x^3 - 10{,}8\ x^2 + 10{,}8\ x - 6{,}8 = 0}$, temos que calcular a raiz.

Considera tolerância $\boldsymbol{\varepsilon \leq 0{,}02}$

Solução

Existe uma raiz no intervalo **(1, 2)**

Vamos partir de $\mathbf{x_0 = 1{,}5}$

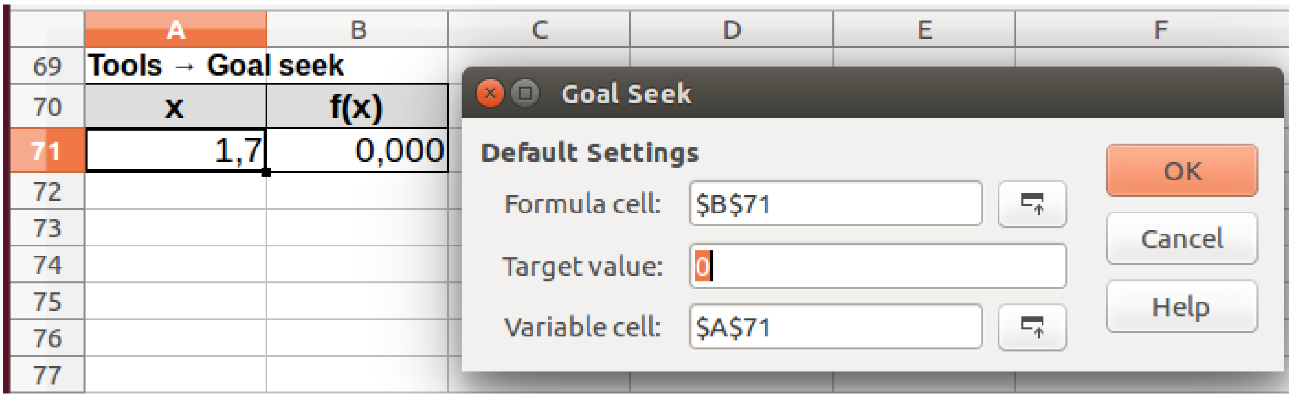
$\mathbf{P'(x) = 5x^4 - 14{,}8x^3 + 22{,}2x^2 - 21{,}6x + 10{,}8}$

Veja as contas na planilha.

A raiz procurada é: **1,70019**

Ferramenta Goal Seek

Em português “Atingir meta”



EXERCÍCIOS

Exercício 1:

Determinar o número de raízes reais positivas e negativas para seguinte polinômio:

$$\mathbf{P_5(x) = +3\ x^5 - 2\ x^3 + 4\ x^2 - x - 1}$$

p = 3 ou p = 1

n = 2 ou n = 0

Exercício 2:

Calcular a raiz positiva do polinômio

$$\mathbf{P_3\ (x) = 2\ x^3 - 2\ x^2 + 3x - 1}$$

com **erro <= 10** $^{-4}$, pelo método de Newton para polinômios.

x = 0,39661