

Unidade 2: Zeros de funções

Métodos Numéricos para encontrar raízes (zeros) de funções

- Equações precisam ser resolvidas em todas as áreas da ciência e da engenharia
- Um dos problemas que ocorrem mais frequentemente em trabalhos científicos é calcular as raízes de equações da forma:

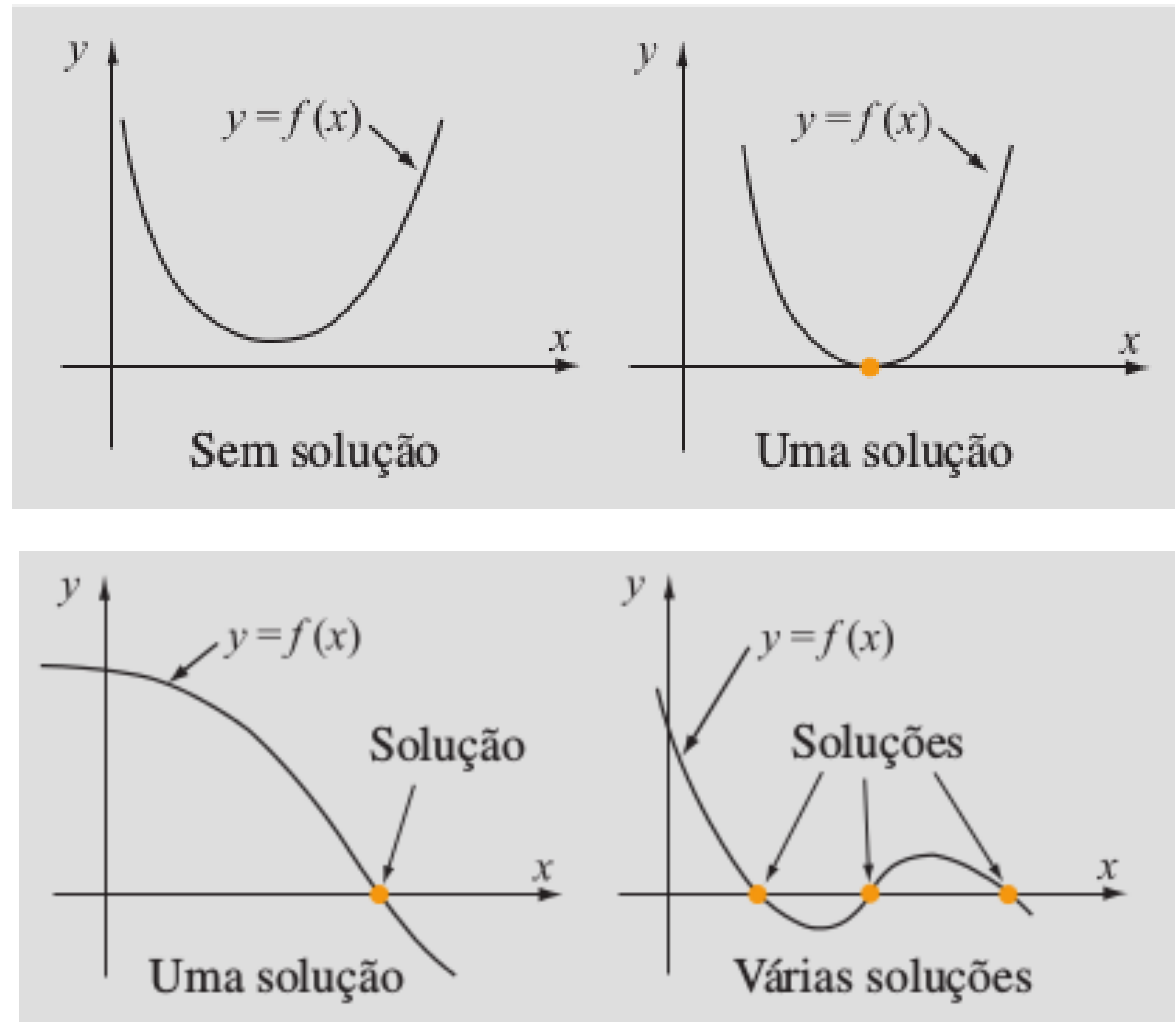
$$f(x) = 0$$

onde **f(x)** pode ser um polinômio em x ou uma outra função

- A solução dessa equação (também chamada de raiz) é um valor numérico de x que satisfaz à equação

Métodos Numéricos para encontrar raízes (zeros) de funções

- Graficamente a solução é o ponto onde a função $f(x)$ cruza ou toca o eixo x
- Uma equação pode
 - não ter solução
 - ter uma raiz
 - ter várias raízes



Métodos Numéricos para encontrar raízes (zeros) de funções

- Quando a equação é simples, o valor de x pode ser determinado analiticamente
- Esse é o caso quando se escreve x explicitamente após a aplicação de operações matemáticas, ou quando uma fórmula conhecida (como a fórmula usada na resolução de equações quadráticas) pode ser usada para determinar o valor exato de x
- Os valores que anulam $f(x)$ podem ser reais ou complexas
- Estaremos interessados somente nos raízes reais de $f(x)$

Métodos Numéricos para encontrar raízes (zeros) de funções

- Em muitas situações é impossível determinar analiticamente a raiz de uma equação
- Através de **técnicas numéricas**, é possível obter uma solução aproximada, em alguns casos tão próxima da solução exata, quanto se deseje

Abordagens usadas na solução numérica de equações

- O processo de solução numérica de uma equação é diferente do procedimento usado na obtenção de uma solução analítica.
- Uma solução analítica é obtida com a dedução de uma expressão que leva a um valor numérico exato.
- Uma solução numérica é obtida em um processo que começa com a determinação de uma solução aproximada e é seguido de um procedimento numérico no qual se determina uma solução mais precisa.

Abordagens usadas na solução numérica de equações

- A idéia central destes métodos numéricos é partir de uma aproximação inicial para a raiz (um intervalo onde imaginamos a raiz estar contida) e em seguida refinar essa aproximação através de um processo iterativo.

Abordagens usadas na solução numérica de equações

- Por isso, os métodos são realizados em duas etapas:
 - 1.** Localização ou isolamento das raízes, que consiste em obter um intervalo que contém a raiz
 - 2.** Refinamento, que consiste em melhorar as aproximações iniciais (obtidas no passo 1) sucessivamente até obter uma aproximação para a raiz dentro de uma precisão desejada.

Abordagens usadas na solução numérica de equações

- A solução numérica inicial de uma equação na forma

$$f(x) = 0$$

pode ser estimada com o traçado de um gráfico $f(x)$ versus x e com a verificação do ponto onde o gráfico cruza o eixo x

- **Teorema:**

Seja $f(x)$ uma função contínua num intervalo $[a,b]$.

Se $f(a)*f(b) < 0$ então existe pelo menos um ponto $x = \xi$ (csi) entre a e b que é zero de $f(x)$

Pois $++ \rightarrow +$, $-- \rightarrow +$, $+- \rightarrow -$

- Se $f'(x)$ existir e preservar sinal em (a, b) , então este intervalo contém um único zero de $f(x)$

Abordagens usadas na solução numérica de equações

- Também é possível escrever e executar um programa de computador que procure um domínio que contenha uma solução
- Tal programa busca uma solução com a avaliação de $f(x)$ em diferentes valores de x
- Ele começa em um valor de x e então muda esse valor em pequenos incrementos
- Uma mudança no sinal de $f(x)$ indica a existência de uma raiz dentro do último incremento.

Abordagens usadas na solução numérica de equações

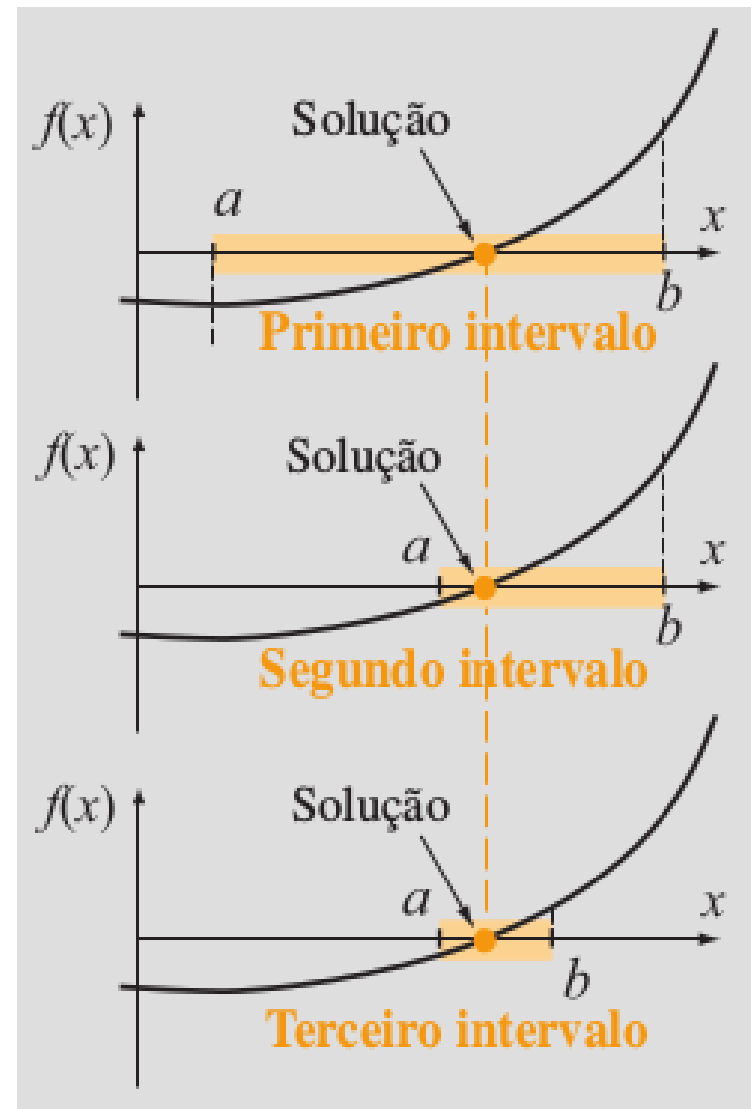
- Em muitos casos, quando a equação que se resolve está relacionada a alguma aplicação na ciência ou na engenharia, a faixa de valores de x que inclui a solução pode ser estimada e usada no traçado do gráfico inicial de $f(x)$, ou na busca numérica de um domínio pequeno que contenha uma solução.
- Quando uma equação tem mais de uma raiz, a solução numérica indica uma raiz de cada vez.

Abordagens usadas na solução numérica de equações

- Os métodos numéricos usados para resolver equações podem ser divididos em dois grupos:
 - métodos de confinamento
 - métodos abertos

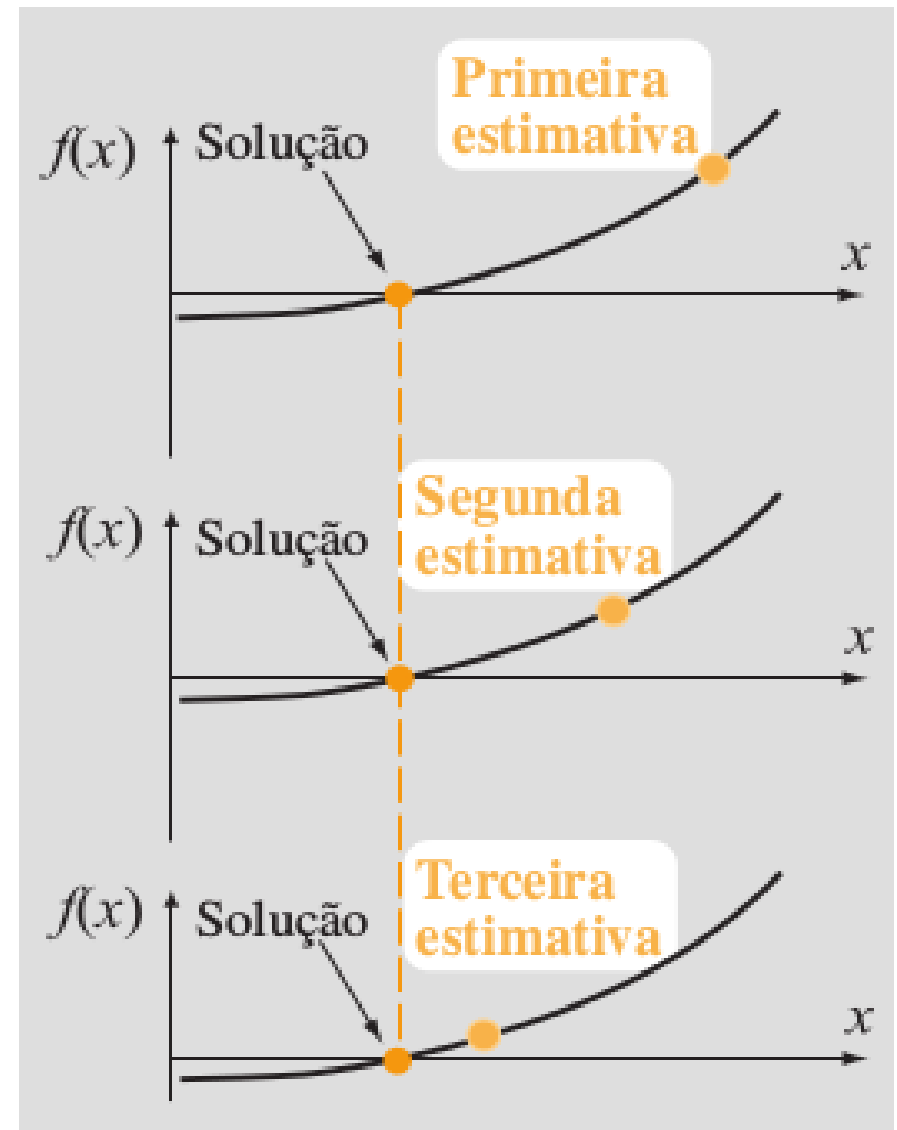
Abordagens usadas na solução numérica de equações

- Nos **métodos de confinamento**, identifica-se um intervalo que inclui a solução.
- Por definição, os pontos finais do intervalo são os limites superior e inferior da solução.
- Então, usando um esquema numérico, o tamanho do intervalo é reduzido sucessivamente até que a distância entre os pontos finais seja menor que a precisão desejada para a solução.



Abordagens usadas na solução numérica de equações

- Nos **métodos abertos**, assume-se uma estimativa inicial para a solução (um ponto).
- O valor dessa tentativa inicial para a solução deve ser próximo à solução real.
- Então, usando um esquema numérico, valores melhores (mais precisos) são calculados para a solução.



Abordagens usadas na solução numérica de equações

- Métodos de confinamento sempre convergem para uma solução.
- Métodos abertos são usualmente mais eficientes, mas às vezes podem não levar à solução.
- Já que métodos numéricos não são exatos, é necessário estimar os erros envolvidos.

Estimação de erros em soluções numéricas

- Como soluções numéricas não são exatas, algum critério deve ser aplicado para determinar se uma solução estimada é suficientemente precisa.
- Várias medidas podem ser usadas para estimar a precisão de uma solução aproximada.
- A escolha de uma dessas medidas depende da aplicação em questão e fica a cargo de quem resolve a equação.
- Seja \mathbf{x}_{TS} a solução verdadeira (exata) tal que $\mathbf{f}(\mathbf{x}_{TS}) = \mathbf{0}$, e seja \mathbf{x}_{NS} uma solução numérica aproximada tal que $\mathbf{f}(\mathbf{x}_{NS}) = \boldsymbol{\varepsilon}$, onde $\boldsymbol{\varepsilon}$ (épsilon) é um número pequeno.
- Quatro medidas podem ser consideradas para se estimar o erro.

Estimação de erros em soluções numéricas

Erro real

- O erro real é a diferença entre a solução exata, x_{TS} , e a solução numérica, x_{NS} :

$$\text{ErroReal} = x_{TS} - x_{NS}$$

- Infelizmente, o erro real não pode ser calculado porque geralmente a solução exata não é conhecida.

Estimação de erros em soluções numéricas

Tolerância em $f(x)$

- Em vez de considerar o erro na solução, é possível considerar o desvio de $f(x_{NS})$ em relação a zero
(o valor de $f(x)$ no ponto x_{TS} é obviamente zero)
- A tolerância em $f(x)$ é definida como o valor absoluto da diferença entre $f(x_{TS})$ e $f(x_{NS})$:

$$\textit{TolerânciaEm}_f = |f(x_{TS}) - f(x_{NS})| = |0 - \varepsilon| = |\varepsilon|$$

- A tolerância em $f(x)$ é o valor absoluto da função em x_{NS}

Estimação de erros em soluções numéricas

Tolerância na solução

- A tolerância é a máxima quantidade na qual a solução exata pode desviar de uma solução numérica aproximada.
- A tolerância é útil na estimativa do erro quando métodos de confinamento são usados na determinação da solução numérica.
- Nesse caso, se é sabido que a solução está contida no domínio **[a, b]**, pode-se assumir que a solução numérica seja o ponto central desse intervalo:

$$x_{ns} = \frac{a+b}{2}$$

mais ou menos uma tolerância que é igual à metade da distância entre **a** e **b**:

$$\text{Tolerância} = \left| \frac{b-a}{2} \right|$$

Estimação de erros em soluções numéricas

Erro relativo

- Se \mathbf{x}_{NS} é uma solução numérica estimada, então o erro relativo real é dado por:

$$ErroRelativoReal = \left| \frac{x_{TS} - x_{NS}}{x_{TS}} \right|$$

- Esse erro relativo real não pode ser calculado, já que a solução \mathbf{x}_{TS} não é conhecida.
- No entanto, é possível calcular o erro relativo estimado quando se tem duas estimativas numéricas para a solução.

Estimação de erros em soluções numéricas

Erro relativo

- No entanto, é possível calcular o erro relativo estimado quando se tem duas estimativas numéricas para a solução.
- Esse é o caso quando soluções numéricas são calculadas iterativamente, onde em cada em cada nova iteração se obtém uma solução mais precisa.
- Se é $\mathbf{x}_{ns}^{(n)}$ a solução numérica estimada na última iteração e $\mathbf{x}_{ns}^{(n-1)}$ a solução estimada na penúltima iteração, então o erro relativo estimado pode ser definido por:

$$ErroRelativoEstimado = \left| \frac{\mathbf{x}_{NS}^{(n)} - \mathbf{x}_{NS}^{(n-1)}}{\mathbf{x}_{NS}^{(n-1)}} \right|$$

Estimação de erros em soluções numéricas

Erro relativo

- Quando as soluções numéricas estimadas se aproximam da solução exata, seja pequena em comparação com o prevê-se que a diferença

$$\mathbf{x}_{ns}^{(n)} - \mathbf{x}_{ns}^{(n-1)}$$

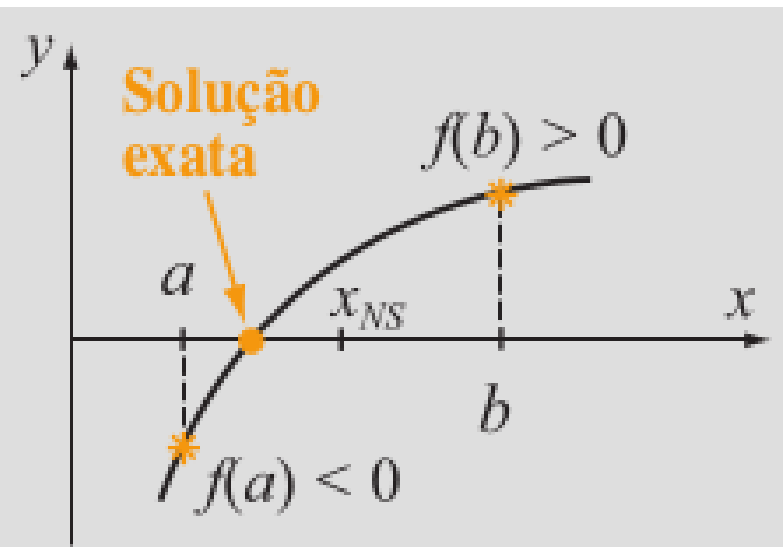
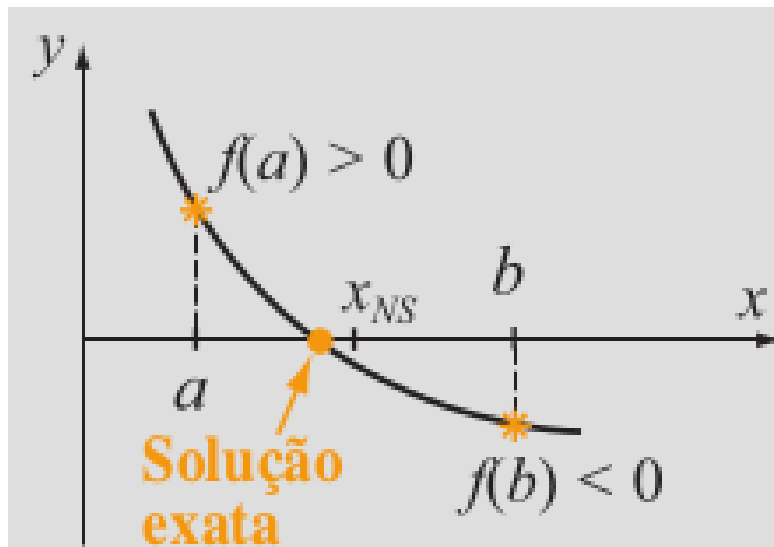
seja pequena em comparação com o valor de $\mathbf{x}_{ns}^{(n)}$ e o erro relativo estimado se torna aproximadamente igual ao valor de erro real relativo.

MÉTODO DA BISSEÇÃO

- O método da bisseção é um método de confinamento usado para se obter a solução de uma equação na forma $f(x) = 0$ quando se sabe que, dentro de um dado intervalo $[a, b]$, $f(x)$ é contínua e a equação possui uma solução.
- Quando esse é o caso, $f(x)$ tem sinais opostos nos pontos finais do intervalo.

MÉTODO DA BISSEÇÃO

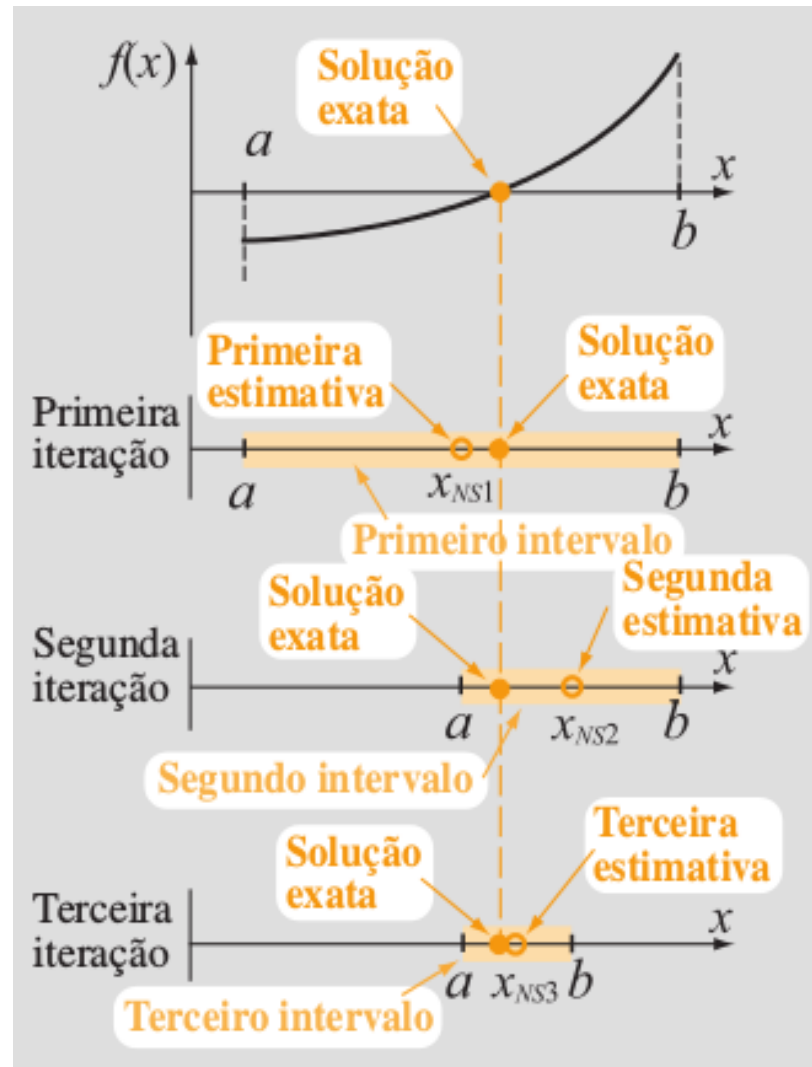
- Se $f(x)$ é contínua e tem uma solução entre os pontos $x = a$ e $x = b$, então ou $f(a) > 0$ e $f(b) < 0$ ou $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$
- Em outras palavras, se há uma solução entre $x = a$ e $x = b$, então $f(a) f(b) < 0$
- Solução de $f(x) = 0$ entre $x = a$ e $x = b$



MÉTODO DA BISSEÇÃO

- O processo de solução começa com a determinação dos pontos **a** e **b** que definem um intervalo onde existe uma solução.
- Tal intervalo é encontrado ou com o traçado de um gráfico de **f(x)** ou com o exame da função buscando uma mudança de sinal.
- O ponto central do intervalo, x_{NS1} , é então tomado como sendo a **primeira estimativa da solução numérica**.
- A solução exata está contida ou na seção **entre a e x_{NS1}** ou na seção **entre os pontos x_{NS1} e b**
- Se a solução numérica não for suficientemente precisa, define-se um novo intervalo que contenha a solução exata, e seu ponto central é escolhido como a nova (segunda) estimativa da solução numérica.
- O processo continua até que a solução numérica seja suficientemente precisa de acordo com o critério selecionado.

MÉTODO DA BISSEÇÃO



Algoritmo para o método da bisseção

1. Escolha o primeiro intervalo encontrando os pontos **a** e **b** entre os quais existe uma solução. Isso significa que **f(a)** e **f(b)** têm sinais diferentes, de forma que **f(a)f(b) < 0**

Os pontos podem ser determinados a partir de um gráfico de **f(x)** *versus* **x**.

2. Calcule a primeira estimativa da solução numérica **x_{NS1}** usando:

$$x_{NS1} = \frac{(a+b)}{2}$$

Algoritmo para o método da bisseção

3. Determine se a solução exata está entre **a** e x_{NS1} , ou entre x_{NS1} e **b**

Isso é feito com a verificação do sinal do produto $f(a) \cdot f(x_{NS1})$:

- Se $f(a) \cdot f(x_{NS1}) < 0$, a solução exata está entre **a** e x_{NS1}
- Se $f(a) \cdot f(x_{NS1}) > 0$, a solução exata está entre x_{NS1} e **b**

Algoritmo para o método da bisseção

4. Selecione o subintervalo que contém a solução exata (**a** até x_{NS1} , ou x_{NS1} até **b**) como o novo intervalo **[a, b]** e volte para o **passo 2**.

Os passos **2** a **4** são repetidos até que a tolerância especificada seja satisfeita ou um determinado limite de erro seja atingido.

Quando o processo da bisseção deve ser interrompido?

- Idealmente, o processo da bisseção deve ser interrompido com a obtenção da solução exata.
- Isso significa que o valor de x_{NS} deve ser tal que $f(x_{NS}) = 0$
- Na realidade, entretanto, a solução exata em geral não pode ser obtida computacionalmente.
- A escolha do critério de interrupção pode depender do problema a ser resolvido.

Quando o processo da bisseção deve ser interrompido?

- Na prática, portanto, o processo deve ser interrompido quando o erro estimado for menor que algum valor predeterminado.
- Nos nossos exemplos como **critério de parada para método de bisseção** vamos usar o valor da tolerância:

$$\text{Tolerância} = \left| \frac{b-a}{2} \right|$$

Notas adicionais a respeito do método da bisseção

- O método sempre converge para uma resposta, desde que uma raiz esteja contida no intervalo inicial **[a, b]**
- O método pode falhar quando a função é tangente ao eixo **x**, não o cruzando em **$f(x) = 0$**
- A convergência do método é lenta em comparação com outros métodos

Notas adicionais a respeito do método da bisseção

$$k > \frac{\log(b_0 - a_0) - \log(\epsilon)}{\log(2)}$$

- Se **k** satisfaz essa relação, ao final da iteração **k** teremos o intervalo **[a, b]** que contém a raiz com a precisão ϵ desejada.
- Por exemplo, se desejamos encontrar o zero da função que está no intervalo **[2, 3]** com a precisão **10⁻²** o número mínimo de iterações é definido da seguinte forma:

$$k > \frac{\log(3-2) - \log(10^{-2})}{\log(2)} = \frac{\log(1) + 2 * \log(10)}{\log(2)} = \frac{2}{0,3010} \simeq 6,64 \Rightarrow k = 7$$

MÉTODO DA BISSEÇÃO

- **Exemplo 1:**

Calcular a raiz positiva da equação

$$f(x) = x^2 - 3, \text{ com } \varepsilon \leq 0,01$$

- **Exemplo 2:**

Calcular a raiz da equação

$$f(x) = x^3 - 10, \text{ com } \varepsilon \leq 0,05$$

MÉTODO DA FALSA POSIÇÃO

- O **método da falsa posição** (também chamado de método *regula falsi* ou de interpolação linear) é um método de confinamento usado para se obter a solução de uma equação na forma $f(x) = 0$ quando se sabe que, dentro de um dado intervalo $[a, b]$, $f(x)$ é contínua e a equação possui uma solução.

MÉTODO DA FALSA POSIÇÃO

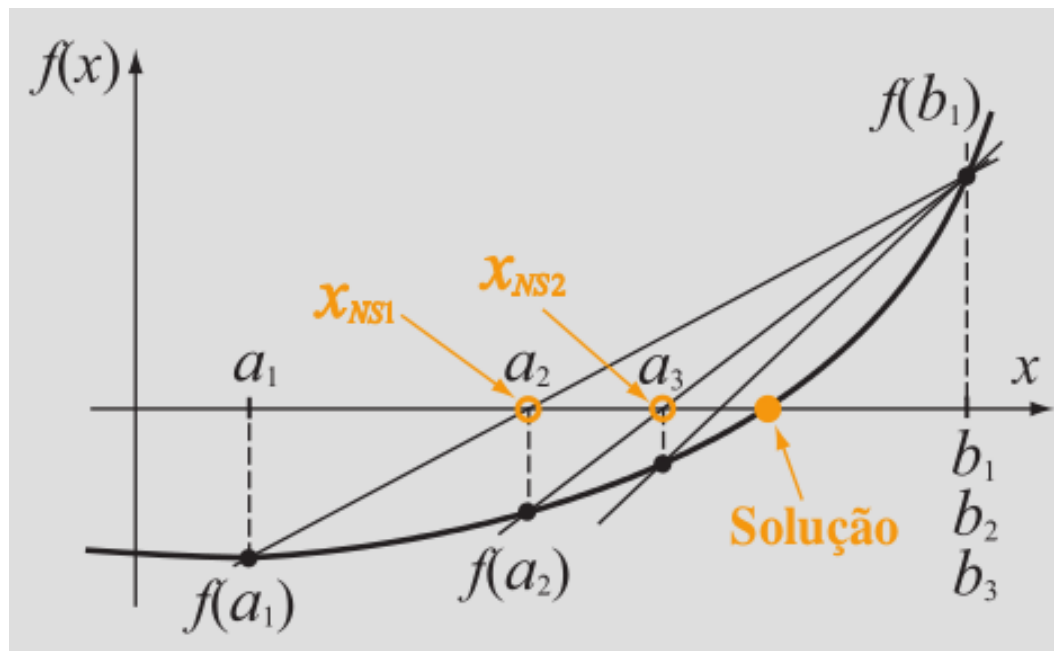
- A solução tem início com a obtenção de um intervalo $[a_1, b_1]$ que confine a solução.
- Os valores da função nos pontos finais são $f(a_1)$ e $f(b_1)$
- Os pontos finais são então conectados por uma linha reta, e a primeira estimativa da solução numérica, x_{Ns1} , é o ponto onde a linha reta cruza o eixo x .
- Isso contrasta com o método da bisseção, onde o ponto central do intervalo foi escolhido como solução.

MÉTODO DA FALSA POSIÇÃO

- Para a segunda iteração, define-se um novo intervalo $[a_2, b_2]$.
- Esse novo intervalo corresponde à subseção do primeiro intervalo que contém a solução.
- Ele é
 - $[a_1, x_{NS1}]$, a_1 atribuído a a_2 e x_{NS1} a b_2 ou
 - $[x_{NS1}, b_1]$, x_{NS1} atribuído a a_2 e b_1 a b_2
- Os pontos finais do segundo intervalo são em seguida conectados por uma linha reta, e o ponto onde essa nova reta cruza o eixo x se torna a segunda solução estimada, x_{NS2}

MÉTODO DA FALSA POSIÇÃO

- Para a terceira iteração, um novo subintervalo $[a_3, b_3]$ é selecionado, e as iterações continuam da mesma forma até que a solução numérica seja considerada suficientemente precisa.



MÉTODO DA FALSA POSIÇÃO

- Para um dado intervalo $[a, b]$, a equação da linha reta que conecta os pontos $(b, f(b))$ e $(a, f(a))$ é dada por:

$$y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} * (x - b) + f(b)$$

- O ponto x_{NS} onde a reta cruza o eixo x é determinado pela substituição de $y = 0$ na equação e a solução dessa equação para x :

$$x_{NS} = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}$$

Algoritmo para o método da falsa posição

1. Escolha o primeiro intervalo encontrando os pontos **a** e **b** entre os quais existe uma solução

Isso significa que **f(a)** e **f(b)** têm sinais diferentes, de forma que **f(a)*f(b) < 0**

Os pontos podem ser determinados a partir de um gráfico de **f(x)** *versus* **x**

2. Calcule a primeira estimativa da solução numérica **x_{NS1}** usando

$$x_{NS} = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}$$

Algoritmo para o método da falsa posição

3. Determine se a solução exata está entre **a** e x_{NS1} , ou entre x_{NS1} e **b**.

Isso é feito com a verificação do sinal do produto $f(a) * f(x_{NS1})$:

- Se $f(a) * f(x_{NS1}) < 0$, a solução exata está entre **a** e x_{NS1}
- Se $f(a) * f(x_{NS1}) > 0$, a solução exata está entre x_{NS1} e **b**

4. Selecione o subintervalo que contém a solução (**a** até x_{NS1} , ou x_{NS1} até **b**) como o novo intervalo [**a**, **b**] e volte para o passo **2**

Critério de parada:

$|x_n - x_{n-1}| \leq \text{erro}$, ou

$|f(x_n)| \leq \text{erro}$

Os passos 2 a 4 são repetidos até que uma tolerância especificada ou um determinado limite de erro sejam atingidos.

MÉTODO DA FALSA POSIÇÃO

- Quando as interações devem ser interrompidas?

As iterações são interrompidas quando o erro estimado for menor que algum valor predeterminado ou um número máximo de passos for executado.

Notas adicionais a respeito do método da falsa posição

- O método sempre converge para uma resposta, desde que uma raiz esteja contida no intervalo inicial $[a, b]$.
- O erro no Método da Falsa Posição diminui mais rapidamente por causa do esquema mais eficiente para localização da raiz.
- Geralmente é superior ao da bissecção, porém há casos em que não é o método mais eficiente.

Notas adicionais a respeito do método da falsa posição

- Frequentemente a função no intervalo $[a, b]$ é côncava para cima ou para baixo. Nesse caso, um dos pontos finais do intervalo permanece o mesmo em todas as iterações, enquanto o outro avança em direção à raiz.
- Em outras palavras, a solução numérica avança em direção à raiz apenas de um lado.
- Isso pode levar à convergência insatisfatória, particularmente para funções com curvatura significativa.
- Várias modificações têm sido introduzidas no método para fazer com que o subintervalo nas iterações sucessivas se aproxime da raiz de ambos os lados.

MÉTODO DA FALSA POSIÇÃO

- **Exemplo 3:**

Calcular a raiz positiva da equação

$$f(x) = x^3 - 9x + 3, \text{ com } \varepsilon \leq 0,001$$

- **Exemplo 4:**

Calcular a raiz positiva da equação

$$f(x) = x^4 - 26x^2 + 24x + 21, \text{ com } \varepsilon \leq 0,01$$