

Hessian matrisi çok değişkenli fonksiyonların davranışlarını anlamada kullanılır. Bunu fonksiyonun yerel minimum, yerel maksimum ve noktasal ekstremum noktalarını belirlemede yardımcı olarak yapar.

Bir fonksiyonun Hessian matrisinin hesaplanması için fonksiyonun en az 2 kez sürekli ve türetilenebilir olmalıdır çünkü Hessian matrisi hesaplanırken her değişken için 2 kısmi türev alınır.

Hessian matrisi çoğu zaman simetrikdir ancak mutlak değer fonksiyonları, ve sonsuz fonksiyonlar gibileri bu simetriyi bozabilir.

Hessian matrisi çok değişkenli fonksiyonlarda değişkenlerin 2. kısmi ve karışık türevlerinin bir matrise yerleştirildiği ve 1. kısmi, 2. kısmi ve karışık türevleri ile belli işlemler yaparak fonksiyonun belirli noktalarındaki eğriliklerini, aynı zamanda da yerel maksimum, minimum, noktasal ekstremum gibi bilgileri elde edebildiğimiz matristir. Ayrıca doğrusal olmayan denklem çözümlerinde, ve optimizasyon problemlerinde de kullanılır.

$$f(x,y) = x^4 - 4x^2 + y^4 - 4y^2 \quad x^2 + y^2$$

$$y + x = 0$$

$$2x - y - 4 = 0$$

$$\frac{df}{dx} = 4x^3 - 8x$$

$$4x^3 - 8x = 4x(x^2 - 2) = 0$$

$$\Rightarrow x = 0, x = \pm \sqrt{2}$$

$$2x = 0$$

$$2y = 0$$

$$\frac{df}{dy} = 4y^3 - 8y$$

$$4y^3 - 8y = 4y(y^2 - 2) = 0$$

$$\Rightarrow y = 0, y = \pm \sqrt{2}$$

$$\frac{d^2f}{dx^2} = 12x^2 - 8$$

$$\frac{d^2f}{dx dy} = 0$$

$$\frac{d^2f}{dy^2} = 12y^2 - 8$$

$$\frac{d^2f}{dy dx} = 0$$

$$H = \begin{bmatrix} 12x^2 - 8 & 0 \\ 0 & 12y^2 - 8 \end{bmatrix}$$



$$\det \begin{bmatrix} 12x^2-8 & 0 \\ 0 & 12y^2-8 \end{bmatrix} = (12x^2-8) \cdot (12y^2-8) - 0$$

Auseren

bu determinant, 1. kısmi türevlerden elde ettiğimiz kritik noktalar ile denersek

$$\det H(0,0) = 64$$

$$64 > 0$$

$$f_{xx}(0,0) = -8$$

$$-8 < 0$$

$(0,0)$   $f(x,y)$  fonksiyonu için yerel maksimum

$$\det H(0, +\sqrt{2}) = -128$$

$$f_{xx}(0, +\sqrt{2}) = -8$$

$f(0, \sqrt{2})$  yerel noktası

$$\det H(0, -\sqrt{2}) = -128$$

$$\det H(0, -\sqrt{2}) = -8$$

$f(0, -\sqrt{2})$  yerel noktası

$$\det H(\sqrt{2}, 0) = -128 > f(\sqrt{2}, 0) \text{ yerel noktası}$$

$$\det H(-\sqrt{2}, 0) = -128 > f(-\sqrt{2}, 0) \text{ yerel noktası}$$

$$\det H(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = 256$$

$$f_{xx}(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = 16$$

$f(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$  yerel min noktası

$$\det H(+\sqrt{2}, \sqrt{2}) = 256$$

$$f_{xx}(+\sqrt{2}, \sqrt{2}) = 16$$

$f(\sqrt{2}, \sqrt{2})$  yerel min noktası

$$\det H(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = 256$$

$$f_{xx}(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = 16$$

$f(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$  yerel min noktası

$$\det H(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = 256$$

$$f_{xx}(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = 16$$

$f(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$  yerel min noktası