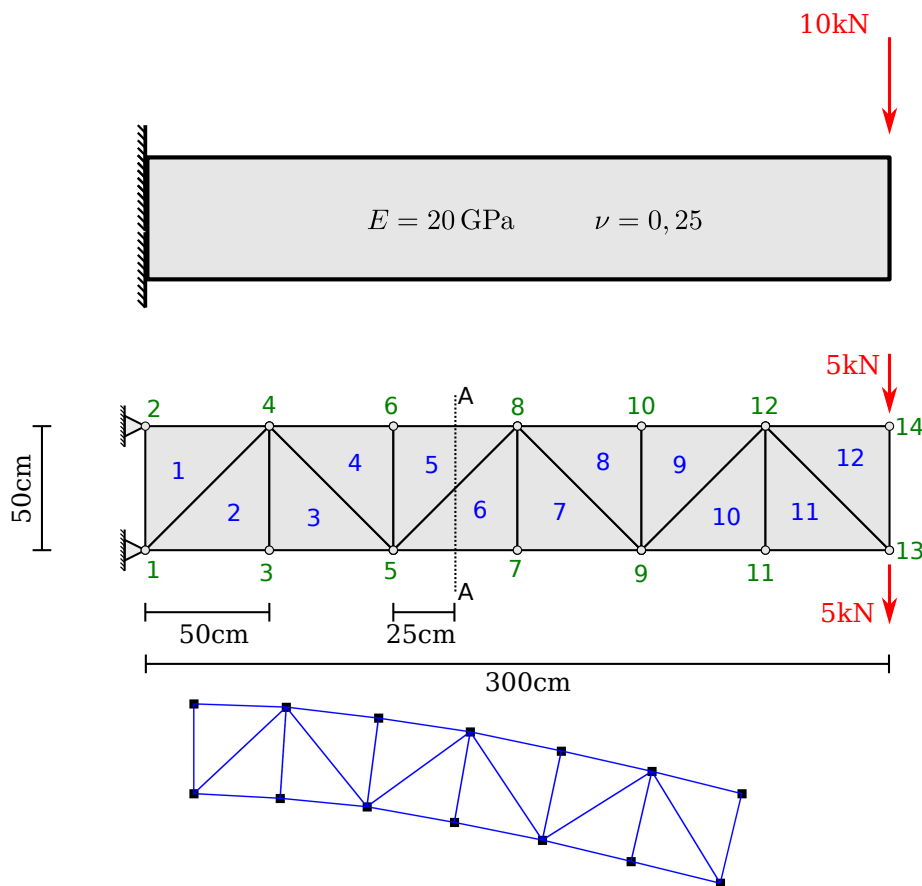


Pauta Prueba 1

Problema 1



$u =$	0	$\times 10^{-5}$
	0	
	0	
	0	
	-0,894	
	-1,3	
	0,792	
	-0,889	
	-1,68	
	-3,65	
	1,56	
	-3,96	
	-2,27	
	-8,01	
	2,17	
	-7,78	
	-2,71	
	-12,9	
	2,59	
	-13,1	
	-2,96	
	-18,9	
	2,86	
	-18,8	
	-3,06	
	-25	
	2,94	
	-25	

La figura de arriba muestra una viga en voladizo (sin peso) de espesor 50 cm, largo 300 cm y alto 50 cm, y propiedades indicadas. Esta se somete a una carga puntual de 10 kN en su extremo libre. También se muestra su discretización usando elementos finitos CST y su deformada calculada con un programa de elementos finitos hecho en python.

- (a) (1.0 pt.) Escriba la tabla de nodos, mapa de grados de libertad nodales, tabla de conectividad (elementos) y mapa de grados de libertad elementales (colocación) para este problema. Además, escriba el vector  $\mathbf{f}$ , lado derecho de la ecuación  $\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f}$ .

*Solución:*

Coordenadas nodales

Nodos	$x$	$y$
1	0.0	0.0
2	0.0	0.5
3	0.5	0.0
4	0.5	0.5
5	1.0	0.0
6	1.0	0.5
7	1.5	0.0
8	1.5	0.5
9	2.0	0.0
10	2.0	0.5
11	2.5	0.0
12	2.5	0.5
13	3.0	0.0
14	3.0	0.5

Conectividad

Elemento	Nodo 1	Nodo 2	Nodo 3
1	1	4	2
2	1	3	4
3	3	5	4
4	5	6	4
5	5	8	6
6	5	7	8
7	7	9	8
8	9	10	8
9	9	12	10
10	9	11	12
11	11	13	12
12	12	13	14

Mapa de GDL nodales

Nodos	$x$	$y$
1	1	2
2	3	4
3	5	6
4	7	8
5	9	10
6	11	12
7	13	14
8	15	16
9	17	18
10	19	20
11	21	22
12	23	24
13	25	26
14	27	28

Conectividad

Elemento	GDLS					
1	1	2	7	8	3	4
2	1	2	5	6	7	8
3	5	6	9	10	7	8
4	9	10	11	12	7	8
5	9	10	15	16	11	12
6	9	10	13	14	15	16
7	13	14	17	18	15	16
8	17	18	19	20	15	16
9	17	18	23	24	19	20
10	17	18	21	22	23	24
11	21	22	25	26	23	24
12	23	24	25	26	27	28

\*Alternativamente, se pueden dar las fórmulas para estas dos últimas tablas.

- (b) **(0.5 pt.)** ¿Porqué es bueno separar la carga de la manera mostrada?

**Solución:** Porque vamos a comparar con teoría de Bernoulli-Euler, que asume que las cargas se aplican directamente sobre el eje neutro. Al aplicar la carga de esa manera, estamos simulando una simetría en torno al eje neutro.

- (c) **(0.5 pt.)** El vector solución  $\mathbf{u}$  (arriba a la derecha) no muestra la simetría esperada de este problema (en torno al eje neutro). ¿Porqué?

**Solución:** Debido a que la malla es asimétrica respecto al eje neutro.

- (d) **(1.0 pt.)** Compare la solución aproximada con la solución por teoría Bernoulli-Euler. Comente.

**Solución:** Por BE la solución para el desplazamiento en la punta es:

$$\delta = \frac{FL^3}{3EI} = 0,000864$$

mientras que el modelo FEM indica:

$$\delta = 0,000250097393775$$

Se muestra una solución mucho más rígida que la de BE. Esto es debido a que el CST asume un campo de deformaciones lineal dentro de cada elemento. En vigas, el campo de deformaciones axiales varía linealmente con la distancia al eje neutro, supuesto que no se cumple en el modelo FEM.

- (e) **(3.0 pt.)** Calcule la distribución de tensiones de corte en la sección A-A predicha por el elemento CST, indique los valores de la tensión. ¿Cómo se compara (cualitativamente) a la distribución teórica obtenida por teoría de vigas  $\tau = VQ/Ib$ ? (*Hint*: no es necesario hacer el producto  $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E}_{mat}\mathbf{B}\mathbf{u}$  completo. Muchas operaciones se pueden ‘ahorrar’.) ¿Se satisface el equilibrio?

**Solución:** Notar que

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} \quad \gamma_{xy} = \left[ \frac{\partial N_1}{\partial y} \quad \frac{\partial N_1}{\partial x} \quad \frac{\partial N_2}{\partial y} \quad \frac{\partial N_2}{\partial x} \quad \frac{\partial N_3}{\partial y} \quad \frac{\partial N_3}{\partial x} \right] \mathbf{u}^e$$

Es decir, se usa solo la última fila de la matriz  $\mathbf{B}$ .

$$\tau_{xy} = G \left[ x_{32} \quad y_{23} \quad x_{13} \quad y_{31} \quad x_{21} \quad y_{12} \right] \mathbf{u}^e.$$

Estas tensiones son constantes dentro de cada elemento. Calculamos esto para los elementos 5 y 6 que son los cortados por la sección.

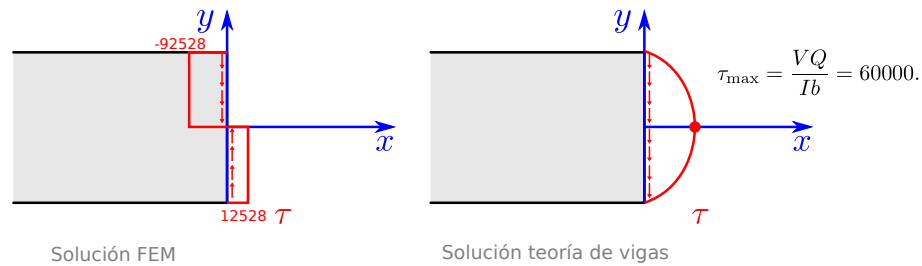
Para el elemento 5

$$\tau_{xy}^5 = \frac{20 \times 10^9}{2 \cdot (1 + 0,25)} \left[ 0,0 \quad -2,0 \quad -2,0 \quad 2,0 \quad 2,0 \quad 0,0 \right] \begin{bmatrix} -1,68 \\ -3,65 \\ -2,27 \\ -8,01 \\ 2,17 \\ -7,78 \end{bmatrix} \times 10^{-5} = -92528.$$

Para el elemento 6

$$\tau_{xy}^6 = \frac{20 \times 10^9}{2 \cdot (1 + 0,25)} \begin{bmatrix} -2,0 & -2,0 & 0,0 & 2,0 & 2,0 & 0,0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2,27 \\ -8,01 \\ -2,71 \\ -1,29 \\ 2,17 \\ -7,78 \end{bmatrix} \times 10^{-5} = 12528.$$

Esta distribución es constante dentro de cada elemento, se ve así:



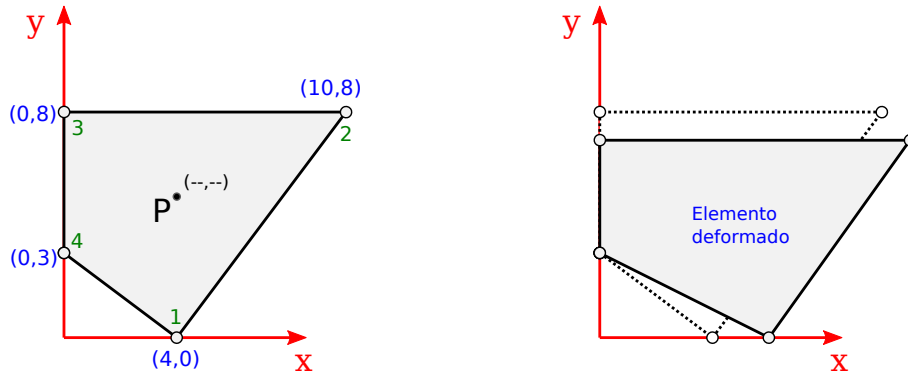
Notar la solución discontinua de FEM mientras que la teoría de vigas predice una distribución parabólica del esfuerzo de corte. (Nota, el dibujo de la derecha es corte negativo).

La resultante de corte de elementos finitos se obtiene integrando en la sección transversal.

$$V = \int_A \tau_{xy} dA = \tau_{xy}^5 \cdot \frac{bH}{2} + \tau_{xy}^6 \frac{bH}{2} = -10000. \quad (\text{Nota: en esto } A \text{ es la sección transversal, no un triángulo})$$

Se satisface el equilibrio! La resultante de corte en la sección es la que debería ser para equilibrar la fuerza externa.

## Problema 2



El elemento cuadrilátero bilineal (Quad4) de figura es parte de una malla de elementos finitos más grande y tiene las coordenadas mostradas.

- (a) (1.0 pt.) El punto P se encuentra en coordenadas naturales  $\xi_P = \eta_P = 0,5$ . Calcule el valor de las funciones de interpolación  $N_i(\xi_P, \eta_P)$ , con  $i = \{1, 2, 3, 4\}$ , y sus derivadas  $\frac{\partial N_i}{\partial \xi}$  y  $\frac{\partial N_i}{\partial \eta}$  en ese punto.

**Solución:** Las funciones de interpolación y sus derivadas se muestran a continuación:

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{(1-\xi)(1-\eta)}{4} & N_2 &= \frac{(1+\xi)(1-\eta)}{4} & N_3 &= \frac{(1+\xi)(1+\eta)}{4} & N_4 &= \frac{(1-\xi)(1+\eta)}{4} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \xi} &= -\frac{1-\eta}{4} & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} &= \frac{1-\eta}{4} & \frac{\partial N_3}{\partial \xi} &= \frac{1+\eta}{4} & \frac{\partial N_4}{\partial \xi} &= -\frac{1+\eta}{4} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} &= -\frac{1-\xi}{4} & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} &= -\frac{1+\xi}{4} & \frac{\partial N_3}{\partial \eta} &= \frac{1+\xi}{4} & \frac{\partial N_4}{\partial \eta} &= \frac{1-\xi}{4} \end{aligned}$$

Se evalúan en  $\xi_P = \eta_P = 0,5$  entregando:

$$\begin{aligned} N_1 &= 0,0625 & N_2 &= 0,1875 & N_3 &= 0,5625 & N_4 &= 0,1875 \\ \frac{\partial N_1}{\partial \xi} &= -0,125 & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} &= 0,125 & \frac{\partial N_3}{\partial \xi} &= 0,375 & \frac{\partial N_4}{\partial \xi} &= -0,375 \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} &= -0,125 & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} &= -0,375 & \frac{\partial N_3}{\partial \eta} &= 0,375 & \frac{\partial N_4}{\partial \eta} &= 0,125 \end{aligned}$$

- (b) (1.0 pt.) Calcule las coordenadas globales del punto P.

**Solución:** Usar la expresión de interpolación de geometría:

$$x = \sum_{i=1}^4 N_i x_i$$

$$\text{e } y = \sum_{i=1}^4 N_i y_i$$

$$x_P = \begin{bmatrix} 0,0625 & 0,1875 & 0,5625 & 0,1875 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 10 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad y_P = \begin{bmatrix} 0,0625 & 0,1875 & 0,5625 & 0,1875 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \\ 8 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$x_P = 2,125$$

$$y_P = 6,5625$$

- (c) (1.0 pt.) Al deformarse la malla, los puntos se mueven conforme a la siguiente tabla:

Nodo	$u_x$	$u_y$
1	2	0
2	1	-1
3	0	-1
4	0	0

Calcule el desplazamiento del punto P.

**Solución:** Usamos la misma expresión que antes, esta vez interpolando los desplazamientos (concepto iso-paramétrico)

$$u_x = \sum_{i=1}^4 N_i u_{xi} \quad \text{e} \quad u_y = \sum_{i=1}^4 N_i u_{yi}$$

$$u_{xP} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,0625 & 0,1875 & 0,5625 & 0,1875 \end{bmatrix} \quad u_{yP} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,0625 & 0,1875 & 0,5625 & 0,1875 \end{bmatrix}$$

$$u_{xP} = 0,3125 \quad u_{yP} = -0,75$$

(d) (1.0 pt.) Calcule la matriz Jacobiana  $\mathbf{J}$  en dicho punto y su determinante  $J = \det \mathbf{J}$ .

**Solución:** Usar

$$\mathbf{J} = \mathbf{P}\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & \frac{\partial N_3}{\partial \xi} & \frac{\partial N_4}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & \frac{\partial N_3}{\partial \eta} & \frac{\partial N_4}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -0,125 & 0,125 & 0,375 & -0,375 \\ -0,125 & -0,375 & 0,375 & 0,125 \end{bmatrix}}_{\mathbf{P}} \underbrace{\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 10 & 8 \\ 0 & 8 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{X}}$$

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0,75 & 2,875 \\ -4,25 & 0,375 \end{bmatrix} \quad \det \mathbf{J} = 12,5$$

(e) (1.0 pt.) Calcule las derivadas de las funciones de interpolación con respecto a las coordenadas globales  $\frac{\partial N_i}{\partial x}$  y  $\frac{\partial N_i}{\partial y}$ , con  $i = \{1, 2, 3, 4\}$ .

**Solución:** Usar:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_k}{\partial x} \\ \frac{\partial N_k}{\partial y} \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_k}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_k}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad k = \{1, 2, 3, 4\}$$

Notar que la expresión de arriba se puede extender a:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial y} \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0,025 & 0,09 & -0,075 & -0,04 \\ -0,05 & 0,02 & 0,15 & -0,12 \end{bmatrix}$$

(f) (1.0 pt.) Calcule el tensor de deformaciones  $\epsilon$  en el punto P.

**Solución:** Usar  $\epsilon = \mathbf{B}\mathbf{u}$ , donde:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial x} \end{bmatrix}$$

Los valores de las derivadas se obtienen de lo encontrado en (e).

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0,025 & 0,0 & 0,09 & 0,0 & -0,075 & 0,0 & -0,04 & 0,0 \\ 0,0 & -0,05 & 0,0 & 0,02 & 0,0 & 0,15 & 0,0 & -0,12 \\ -0,05 & 0,025 & 0,02 & 0,09 & 0,15 & -0,075 & -0,12 & -0,04 \end{bmatrix}$$

Ahora,  $\mathbf{u}^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$  con lo que:

$$\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{B}\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0,14 \\ -0,17 \\ -0,095 \end{bmatrix}$$

(g) (1.0 pt.) El tensor de Green-Lagrange,  $\mathbf{E}$ , para *grandes deformaciones* en notación indicial es:

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_a}{\partial x_i} \frac{\partial u_a}{\partial x_j} \right)$$

Calcúlelo y compare las componentes de  $\mathbf{E}$  con las de  $\boldsymbol{\epsilon}$ . ¿La deformación impuesta por los desplazamientos indicados califica como pequeña?

**Solución:** Notar que:

$$\begin{array}{lll} u_x = \sum_{i=1}^4 N_i u_{xi} & \text{y} & u_y = \sum_{i=1}^4 N_i u_{yi} \\ \frac{\partial u_x}{\partial x} = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial x} u_{xi} & \text{y} & \frac{\partial u_y}{\partial x} = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial x} u_{yi} \\ \frac{\partial u_x}{\partial y} = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial y} u_{xi} & \text{y} & \frac{\partial u_y}{\partial y} = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial y} u_{yi} \end{array}$$

Todas las derivadas ya las tenemos de (e).

$$\begin{array}{ll} \frac{\partial u_x}{\partial x} = 0,14 & \frac{\partial u_x}{\partial y} = -0,08 \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} = -0,015 & \frac{\partial u_y}{\partial y} = -0,17 \end{array}$$

Usando notación matricial (no de Voigt como más arriba), notar que:

$$\mathbf{E} = \boldsymbol{\epsilon} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x}^2 + \frac{\partial u_y}{\partial x}^2 & \frac{\partial u_x}{\partial x} \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \frac{\partial u_y}{\partial y} \\ \frac{\partial u_x}{\partial y} \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \frac{\partial u_y}{\partial x} & \frac{\partial u_x}{\partial y}^2 + \frac{\partial u_y}{\partial y}^2 \end{bmatrix}$$

Con esto:

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0,1499125 & -0,051825 \\ -0,051825 & -0,15235 \end{bmatrix}$$

Esto implica un aumento de entre 6.6 % y 11.5 % de las componentes de los tensores. Para muchas aplicaciones esto puede resultar ser un error inaceptable.