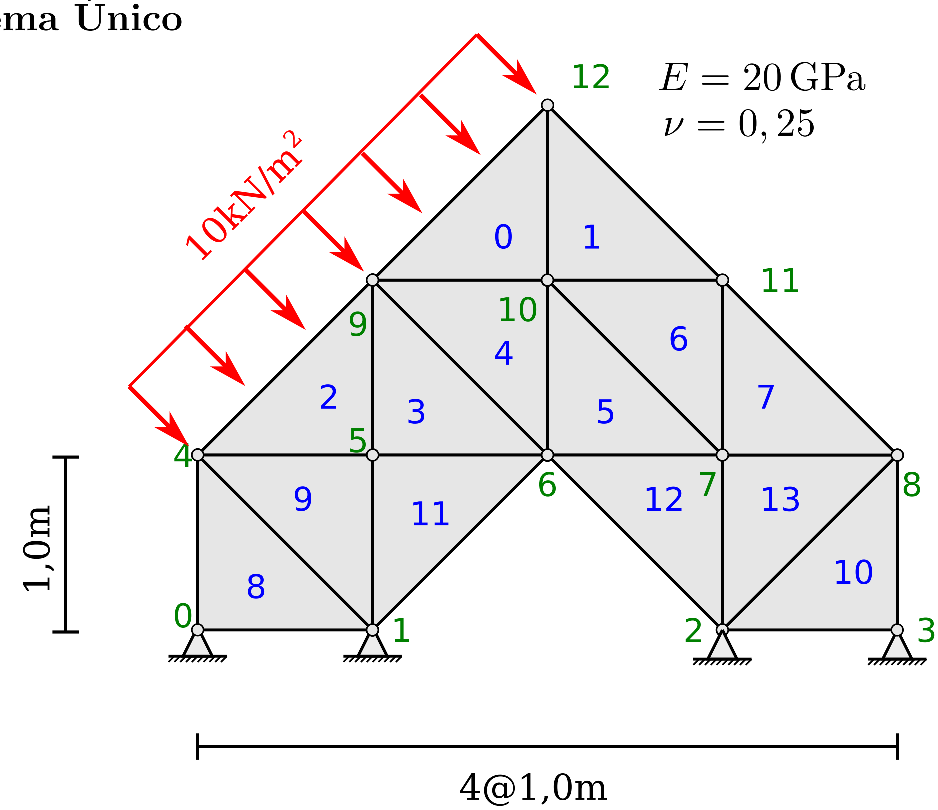
Prueba 1 - Pauta

Problema Único



La figura de arriba muestra una malla de elementos finitos compuesta de elementos tipo CST, que representa una parte de una estructura que puede considerarse *infinitamente larga* en dirección fuera del plano.
Esta estructura está sometida a una carga distribuída perpendicular a su superficie de acción, según se muestra en la figura.

1. **(0.5 pt.)** Escriba la tabla de nodos, mapa de grados de libertad nodales, tabla de conectividad (elementos) y mapa de grados de libertad elementales (colocación) para este problema.

R:

Tabla de nodos:

Nodo	$X(m)$	$Y(M)$
0	0.00	0.00
1	1.00	0.00
2	3.00	0.00
3	4.00	0.00
4	0.00	1.00
5	1.00	1.00
6	2.00	1.00
7	3.00	1.00
8	4.00	1.00
9	1.00	2.00
10	2.00	2.00
11	3.00	2.00
12	2.00	3.00

GDL nodales:

Nodo	u_x	u_y
0	0	1
1	2	3
2	4	5
3	6	7
4	8	9
5	10	11
6	12	13
7	14	15
8	16	17
9	18	19
10	20	21
11	22	23
12	24	25

Conectividad:

Elemento	n_i	n_j	n_k
0	9	10	12
1	10	11	12
2	4	5	9
3	5	6	9
4	6	10	9
5	6	7	10
6	7	11	10
7	7	8	11
8	0	1	4
9	1	5	4
10	2	3	8
11	1	6	5
12	2	7	6
13	2	8	7

GDL Elemento	elementales: u_x^0	u_y^0	u_x^1	u_y^1	u_x^2	u_y^2
0	18	19	20	21	24	25
1	20	21	22	23	24	25
2	8	9	10	11	18	19
3	10	11	12	13	18	19
4	12	13	20	21	18	19
5	12	13	14	15	20	21
6	14	15	22	23	20	21
7	14	15	16	17	22	23
8	0	1	2	3	8	9
9	2	3	10	11	8	9
10	4	5	6	7	16	17
11	2	3	12	13	10	11
12	4	5	14	15	12	13
13	4	5	16	17	14	15

2. **(1.0 pt.)** Calcule la matriz de rigidez elemental, $\boldsymbol{k}^e$, para el elemento 2. Muestre su desarrollo y supuestos.

   R: Queremos calcular

$$\boldsymbol{k}^e = A\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{E}_{mat}\boldsymbol{B}$$

   Para este elemento $A = 0{,}5\,(m^2)$.

$$\boldsymbol{B} = \frac{1}{2A}\begin{bmatrix} y_{23} & 0 & y_{31} & 0 & y_{12} & 0 \\ 0 & x_{32} & 0 & x_{13} & 0 & x_{21} \\ x_{32} & y_{23} & x_{13} & y_{31} & x_{21} & y_{12} \end{bmatrix} = \frac{1}{2\cdot 0{,}5}\begin{bmatrix} -1. & 0. & 1. & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 0. & -1. & 0. & 1. \\ 0. & -1. & -1. & 1. & 1. & 0. \end{bmatrix}$$

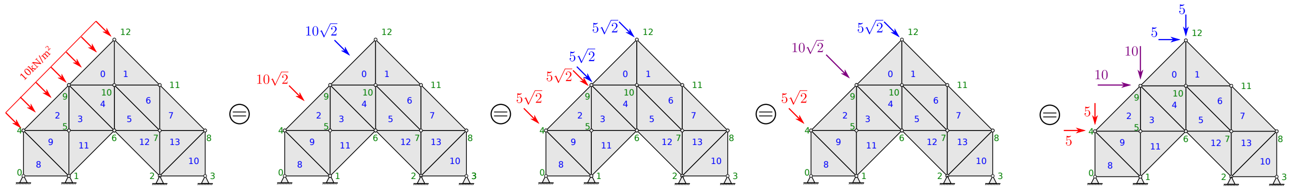
   Como el objeto modelado se puede considerar infinitamente largo, usamos formulación de deformaciones planas cuya matriz constitutiva es:

$$\boldsymbol{E}_{mat} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2{,}4\times10^{10} & 8{,}0\times10^{09} & 0 \\ 8{,}0\times10^{09} & 2{,}4\times10^{10} & 0 \\ 0 & 0 & 8{,}0\times10^{09} \end{bmatrix}\ \text{(Pa)}$$

   Con todo esto:

$$\boldsymbol{k}^{e=2} = \begin{bmatrix} 1{,}2\times10^{10} & 0 & -1{,}2\times10^{10} & 4{,}0\times10^{09} & 0 & -4{,}0\times10^{09} \\ 0 & 4{,}0\times10^{09} & 4{,}0\times10^{09} & -4{,}0\times10^{09} & -4{,}0\times10^{09} & 0 \\ -1{,}2\times10^{10} & 4{,}0\times10^{09} & 1{,}6\times10^{10} & -8{,}0\times10^{09} & -4{,}0\times10^{09} & 4{,}0\times10^{09} \\ 4{,}0\times10^{09} & -4{,}0\times10^{09} & -8{,}0\times10^{09} & 1{,}6\times10^{10} & 4{,}0\times10^{09} & -1{,}2\times10^{10} \\ 0 & -4{,}0\times10^{09} & -4{,}0\times10^{09} & 4{,}0\times10^{09} & 4{,}0\times10^{09} & 0 \\ -4{,}0\times10^{09} & 0 & 4{,}0\times10^{09} & -1{,}2\times10^{10} & 0 & 1{,}2\times10^{10} \end{bmatrix}\ \text{(N)}$$

3. **(1.0 pt.)** Calcule el vector de cargas nodales $\boldsymbol{f}$, que corresponde al lado derecho de la ecuación $\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$. Muestre su desarrollo y supuestos.



Por lo tanto:

$$\boldsymbol{f} = \begin{bmatrix} 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 5. & -5. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 10. & . & 0. & 0. & 0. & 0. & 5. & -5. \end{bmatrix} \times 10^3$$

4. **(2.5 pt.)** La deformada del problema junto con el vector solución $\boldsymbol{u}$ se muestran en la página siguiente. Usando esa información, calcule:

   (a) **(1.0 / 2.5)** Todas las componentes del tensor de deformaciones ($\boldsymbol{\epsilon}$) del elemento 10.
   R: El tensor (vector en notacion de Voight) de deformaciones se calcula mediante:

$$\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}^e$$

   En este caso:

$$\boldsymbol{u}^{e=10} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 8{,}2e-07 \\ -4{,}3e-07 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{B} = \underbrace{\frac{1}{2\cdot 0{,}5}\begin{bmatrix} -1. & 0. & 1. & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 0. & -1. & 0. & 1. \\ 0. & -1. & -1. & 1. & 1. & 0. \end{bmatrix}}_{\text{Igual a elemento 2}} \quad \boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}^e = \begin{bmatrix} 0 \\ -4{,}3e-07 \\ 8{,}2e-07 \end{bmatrix} \ (.)$$

   (b) **(0.5 / 2.5)** Todas las componentes del tensor de tensiones ($\boldsymbol{\sigma}$) del elemento 10.
   R: Calculamos $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{E}_{mat}\boldsymbol{\epsilon}$. Reutilizamos el $\boldsymbol{E}_{mat}$ calculado mas arriba:

$$\sigma = \begin{bmatrix} 2{,}4\times10^{10} & 8{,}0\times10^{09} & 0 \\ 8{,}0\times10^{09} & 2{,}4\times10^{10} & 0 \\ 0 & 0 & 8{,}0\times10^{09} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -4{,}3e-07 \\ 8{,}2e-07 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3435{,}7 \\ -10307{,}2 \\ 6574{,}5 \end{bmatrix} \ (\text{Pa})$$

   (c) **(1.0 / 2.5)** La tensión promedio $p = (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)/3$ del elemento 10.
   R: Primero necesitamos σ_z

$$\sigma_z = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \cdot (\epsilon_x + \epsilon_y) = -13743. \ (\text{Pa})$$

   Luego

$$p = -\frac{1}{3}(-3435{,}7 - 10307{,}2 - 13743) = 9162 \ (\text{Pa})$$

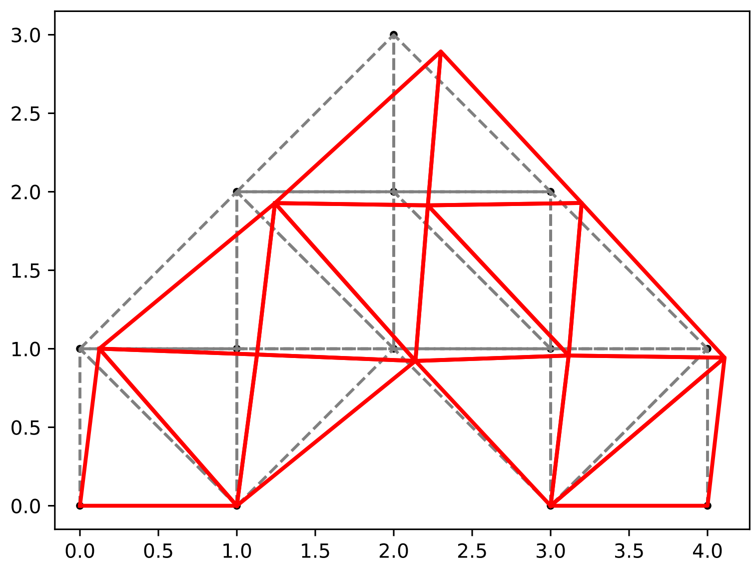
5. **(1.0 pt.)** Conteste las siguientes preguntas:

   (a) **(0.25 / 1.0)** ¿Porqué el elemento CST se llama así?
   R: CST significa Constant Strain Triangle. Este elemento asume funciones de interpolacion de desplazamiento lineales, lo que resulta en que el campo de deformaciones (derivadas de el campo de desplazamientos) sea constante en su interior.

   (b) **(0.25 / 1.0)** ¿En qué consiste el concepto de *objetividad* en elementos finitos?
   R: Que las propiedades del elemento no dependen de la orientación del sistema coordenado escogido. El elemento se puede rotar manteniendo sus propiedades.

(c) **(0.25 / 1.0)** ¿Qué significa que un método numérico sea *convergente* y *consistente*?
R: Convergencia: al reducir la discretización, la solución converge establemente. Consitencia: al reducir la discretización la solución converge a la solución del problema matemático que el método trata de aproximar.

(d) **(0.25 / 1.0)** ¿Qué significa que un elemento finito sea *iso-paramétrico*? ¿Qué ventaja tiene esto?
R: Un elemento finito es *iso-paramétrico* cuando se utilizan las mismas funciones de interpolación para interpolar geometría y solución. Esto resulta en un elemento finito convergente y consistente.



$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} 0. \\ 0. \\ 0. \\ 0. \\ 0. \\ 0. \\ 0. \\ 0. \\ 9{,}3 \\ 0{,}1 \\ 9{,}7 \\ -2{,}8 \\ 10{,}5 \\ -5{,}9 \\ 8{,}7 \\ -3{,}3 \\ 8{,}2 \\ -4{,}3 \\ 18{,}4 \\ -5{,}5 \\ 16{,}4 \\ -6{,}5 \\ 15. \\ -5{,}4 \\ 22{,}7 \\ -8{,}1 \end{bmatrix} \times 10^{-7} \qquad (m)$$