Aufgabe 3: Abbiegen

Teilnahme-Id: 52586

Bearbeiter dieser Aufgabe:
Michal Boron

April 2020

Inhaltsverzeichnis

1 Lösungsidee

Gegeben seien eine zweidimensionale Ebene, eine Menge V von Punkten auf dieser Ebene, eine Menge E von Straßen zwischen den Punkten, ein Startpunkt s und ein Zielpunkt z.

Jeder *Punkt* $p(x, y)$ besitzt zwei ganzzahlige Koordinaten x und y, die die Lage des Punktes auf der Ebene bestimmen. Eine *Straße* $b(v_1, v_2)$ besteht aus einem Paar von zwei Punkten v_1 und v_2 aus der Menge V. Als eine *Länge* $l(b)$ (auch *Entfernung*) einer Straße $b(v, w)$ bezeichnet man den euklidischen Abstand zwischen zwei Punkten v und w.

Unter einer *Abbiegung* versteht man eine Situation, in der drei Punkte g, h und i aus der Menge V zwei verschiedene Straßen $b(g,h)$ und $c(g,i)$ aus der Menge E bilden. Eine solche Abbiegung bezeichnen wir als *eine Abbiegung von b zu c* oder als *eine Abbiegung von c zu b*. Darüber hinaus besitzt eine Abbiegung einen Wert, der dem Zustand entspricht, ob die Punkte g, h, i kollinear sind (0 für kollinear, 1 für nicht kollinear).

Mit Hilfe der obengenannten Mengen V und E lässt sich ein gewichteter, ungerichteter Graph $G(V,E)$ mit gewichteten Kanten bilden. Jede Kante k ist stets mit zwei Knoten – p, q – verbunden. Als das Gewicht einer Kante (p,q) gilt die Länge $l(b)$ der Straße $b(p,q)$. Kennzeichnen wir noch jeweils einen Start– und Zielknoten, die s und z entsprechen, so erhalten wir einen Graphen, in dem

Beobachtung 1 *die Länge des Pfades im Graphen G vom Startknoten zum Zielknoten gleich der Summe aller Längen der Straßen auf dem Pfad ist.*

Dank dieser Beobachtung können wir feststellen, dass wir den kürzesten Pfad vom Startknoten zum Zielknoten finden können, wenn wir den Dijkstra-Algorithmus laufen lassen. Dieser Wert – die kürzeste gesamte Länge vom Startknoten zum Zielknoten – wird dementsprechend zu einem Maßstab, einem Prototypen, der uns später in unseren weiteren Betrachtungen helfen wird. Die Länge der kürzesten Strecke nennen wir ω.

Wir fügen noch zwei Begriffe hinzu. Wir betrachten eine Straße $b(p,q)$. Die anderen Straßen, die auch mit den Punkten p und q verbunden sind, nennen wir *die benachbarten Straßen* der Straße b.
Die Punkte, die die benachbarten Straßen zusammen mit p bilden, nennen wir dementsprechend *die benachbarten Punkte* des Punkts p (siehe Abb. 1).

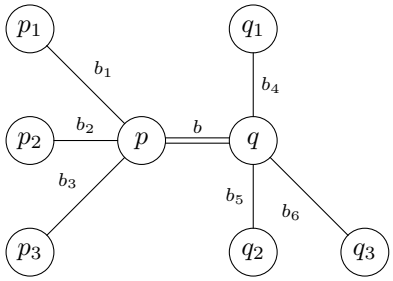


Abbildung 1: Benachbarte Straßen: alle Straßen $b_1, b_2, ..., b_6$ nennen wir *die benachbarten Straßen* der Straße b. Benachbarte Punkte: als *die benachbarten Punkte* des Punkts p gelten p_1, p_2, p_3, q. *Die benachbarten Punkte* von q sind: q_1, q_2, q_3, p.

Beobachtung 2 *Außerdem findet man immer in den Beispielen so einen Pfad zum Ziel, der stets von einer Straße $a(p(p_x,p_y),q(q_x,q_y))$ zu einer andern Straße $b(q(q_x,q_y),r(r_x,r_y))$ führt, wobei stets $p_x \leq r_x$.*

Die letzte Bemerkung ist sehr wichtig und gilt demzufolge als eine führende Beobachtung in meinen weiteren Betrachtungen.

1.1 Graph G'

Nun legen wir eine neue Menge fest: C. Wir nehmen jeweils eine Straße aus der Menge E, bestimmen ihre benachbarten Straßen und fügen diejenigen in C ein, die die Bedingung in der Beobachtung 2 erfüllen. Jede Abbiegung besteht *de facto* aus drei Punkten. Einer der Punkte ist gemeinsam für beide Straßen, aus denen eine Abbiegung entstanden ist. Jetzt vergleichen wir die x–Koordinaten der zwei übrigen Punkte. Angenommen haben wir eine Abbiegung von einer Straße $a(p,q)$ zu einer anderen Straße $b(q,r)$. Wenn die x–Koordinate des Punkts p nicht kleiner ist als die x–Koordinate des Punkts r, dann fügen wir eine Abbiegung von b zu a mit einem entsprechenden Wert ein. Wenn aber die x–Koordinate des Punkts p nicht größer ist als die x–Koordinate des Punkts r, dann fügen wir eine Abbiegung von a zu b mit einem entsprechenden Wert ein. Einfacher formuliert, nehmen wir keine Straßen, die nach „hinten“ leiten. (s. Abb. 2 und Abb. 3)

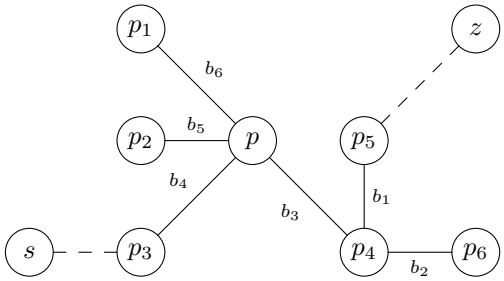


Abbildung 2: Graph G: Von der Straße b_3 kann man nicht zu den Straßen: b_4, b_5, b_6 abbiegen, aber zu den Straßen b_1 und b_2 ist es erlaubt. s und z dienen hier nur für die Orientierung, in welche Richtung die Traversierung verläuft.

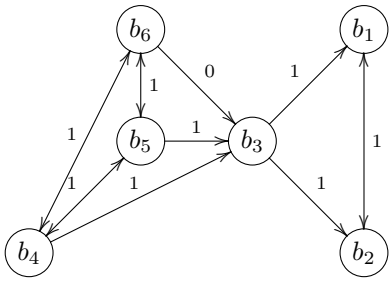


Abbildung 3: Graph G', der anhand der Abb. 2 entstanden ist, mit Abbiegungen als Kanten und Straßen als Knoten.

Nun bilden wir einen gewichteten, gerichteten Graphen $G'(E, C)$, in dem die Straßen als Knoten und die Abbiegungen als Kanten verwendet werden. Die Kanten sind gerichtet aus einem wichtigen Grund: um die Endlosschleifen zu vermeiden. Die Gewichte an den Kanten entsprechen dem Zustand, ob wir in jeweiliger Situation von einer Straße $a(p, q)$ zu einer Straße $b(q, r)$ abbiegen müssen oder nicht. Dieser boolsche Wert wird dadurch bestimmt, dass wir prüfen, ob alle Punkte p, q, r kollinear sind, das heißt, auf einer Geraden liegen.

Definieren wir dazu zwei neue Punkte, die wir *Pivotpunkte* nennen. Die Lage der Punkte ist beliebig und über meine Platzierung der beiden Punkte lesen Sie weiter im Abschnitt „Umsetzung".
Den *Pivotpunkt des Startpunkts* verbinde ich mit dem Startpunkt durch eine Straße. Das gleiche gilt für den Zielpunkt: ich verbinde ihn mit dem *Pivotpunkt des Zielpunkts*. Die beiden Straßen füge ich in den Graphen G' ein und verbinde sie durch Kanten stets mit Gewicht 0 (diese Straßen sind ja kein Teil der ursprünglichen Aufgabe) mit jeder Straße, die aus dem Startpunkt oder zum Zielpunkt führt. Die Straßen, die vom Pivotpunkt zum Startpunkt oder vom Zielpunkt zum Pivotpunkt führen, nennen wir *Pivotstraßen*.
Die Erstellung der Pivotstraßen erleichert die Aufgabe insofern, dass wir jedes Mal die Start– und Zielknoten in G' nicht zusätzlich bestimmen.
Nun können wir auf eine wichtige Bemerkung kommen.

Beobachtung 3 *Die Länge des Pfades in G' vom Startknoten (Start-Pivotstraße) zum Zielknoten (Ziel-Pivotstraße) entspricht der Anzahl der Abbiegungen auf dem Pfad von s zu z.*

Daraus kann man auch eine andere Schlussfolgerung ziehen:

Beobachtung 4 *Die Länge des kürzesten Pfades in G' vom Startknoten (Start-Pivotstraße) zum Zielknoten (Ziel-Pivotstraße) entspricht der minimalen Anzahl der Abbiegungen auf dem Pfades von s zu z.*

1.2 Yen–Algorithmus

Direkt aus der Beobachtung 4 ergibt sich die Lösung der Aufgabe. Nach der Aufgabenstellung müssen wir den besten Weg in G finden, bei dem wir am wenigsten abbiegen und dessen Länge sich in Rahmen einer maximalen prozentualen Verlängerung von ω befindet. Diese maximale Länge nennen wir ψ. Das

Prozent, das eingegeben wird, nennen wir ξ.
Um dem Problem zu begegnen, bediene ich mich des Yen-Algorithmus, der die k–kürzesten Pfade findet. Seine Beschreibung und ein vollständiger Pseudocode sind im englischsprachigen Wikipedia-Artikel[1] (s. unten, Seite 25) zu finden. Genau dieses Pseudocodes bediente ich mich bei der Implentierung der Aufgabe. Ich lasse den Algorithmus auf dem Graph G' laufen, weil, wie wir schon feststellten, die Länge eines Pfades vom Startknoten zum Zielknoten in G' der Anzahl der Abbiegungen des entprechenden Pfades in G gleich ist.

Ich veränderte und erweiterte aber die Implementierung im Pseudocode an einigen Stellen. Vor allem baute ich dieses im Psudocode dargestellte Programm zu einer Funktion um, die einen nächsten kürzesten Pfad generiert. Sie hilft mir, indem ich keine feste Zahl k angeben muss. Ich generiere stets einen neuen Pfad nach Bedarf (mehr dazu im folgeden Abschnitt).
Ganz am Anfang lasse ich den Dijkstra–Algorithmus auf dem Graphen G' laufen, um den Pfad mit der niedrigsten Anzahl an Abbiegungen zu finden (vergl. Pseudocode auf Seite 25, Z. 3). Ich speichere gleichzeitig auch den *spurNode* (vergl. Z. 13) dieses Pfades, heißt, den Startknoten in G'. Der *spurNode* ist ein Knoten aus einem vorherigen Pfad (Z. 13), zu dem wir die Kanten im Graphen G' entfernen (Z. 18–22). Diesen besten Pfad füge ich nicht zur Liste A, wie das im Psudocode steht, sondern zu B. Liste A enthält alle fertigen k–kürzesten Pfade und Liste B enthält die Kandidatenpfade. Die letzte wird nach jeder neuen Generierung eines Pfades sortiert, sodass das erste Element stets einem nächsten kürzesten Pfad entpricht (vergl. Z. 51).
Danach beginnt meine Funktion, die einen nächsten kürzesten Pfad generiert. Ich nehme den ersten Pfad aus der Kandidatenliste B. In dieser Betrachtung bezeichne ich ihn als *den aktuellen Pfad*.
Kurz danach füge ich dieses Pfad in die Liste A ein (vergl. Z. 53). Ich entferne natürlich auch den aktuellen Pfad in B.
Ich rufe den *spurNode* dieses Pfades ab (vergl. Z. 13). Ich bilde einen *rootPath* vom Startknoten zum *spurNode*, wie im Psudocode (vergl. Z. 16). Danach iteriere ich durch alle Pfade in A und vergleiche, ob der Anfang jeweiliges Pfades mit *rootPath* übereinstimmt. Wenn ja, dann entferne ich im Graphen G' die nächste Kante nach dem Teilpfad, der mit *rootPath* übereinstimmt (wie im Pseudocode, vergl. Z. 18–22). Kurz danach entferne ich im Graphen G' alle Knoten und Kanten, die im aktuellen Pfad auftreten, wie im Pseudocode (vergl. Z. 24–25).
Im Pseudocode, in der Zeile 28, wird es nicht genauer bestimmt, wie man den *spurPath* bzw. den *totalPath* bestimmt. Ich tue das auf folgender Weise. Bei jeder Iteration (Z. 8) wird ein nächster *spurNode* bestimmt (Z. 13). Die Reihenfolge, in der dies bestimmt wird, ist vom Anfang des vorherigen Pfades zum vorletzen Knoten in diesem Pfad (Z. 8). Aus diesem Grund entschied ich mich in meiner Implementierung dafür, dass ich beginne, neue Verbindungen (nach dem Entfernen) im Graphen G' zur Bestimmung den nächsten kürzesten Pfades (Z. 28) vom Zielknoten zu finden.
Nachdem entsprechende Kanten und Knoten entfernt worden sind (Z. 18–25), iteriere ich durch den aktuellen Pfad vom vorletzten Knoten (dem Knoten vor dem Zielknoten) zum *spurNode*. Jeden iterierten Knoten nenne ich hier n_i.
Am Anfang stelle ich den Knoten n_i in den Graphen zurück. Da der Graph G' gerichtet ist, nehmne ich alle Kanten die aus n_i führen (nach vorne zeigen) und prüfe, ob ein Gewicht an einer Kante zwischen n_i und dem anderen Knoten kleiner ist als das jetzige zwischen einem anderen Knoten. Es kann auch wohl sein, dass die vorherige Kante vom vorherigen Pfad entfernt wurde und dann ist der Knoten n_i noch nicht erreicht. In beiden Fällen wird an dieser Stelle die beste neue Kante gewählt. Ich nenne einen solchen Vorgang eine *Aktualisierung*. Wenn ein Knoten, der aus n_i führt, aktualisiert wurde, dann forme ich einen neuen *spurPath* (vergl. Z. 28).
Wenn ich einen neuen Pfad fand, aktualisiere ich die Gewichte für die Knoten, die zu dem Knoten n_i führen. Diese Aktualisierung hilft uns schon bei der nächsten Generierung eines Pfades. Diese zwei Aktualisierungsvorgänge ersetzen einen wiederholten Lauf des Dijkstra–Algorithmus (vergl. Z. 28) und erlauben ein bisschen Zeit zu sparen (s. Laufzeit).
Gleich danach folgt noch eine Iteration vom aktuellen Pfad. Dies erfolgt bis zum Knoten n_i. Hier werden die Gewichte an den Kanten im aktuellen Pfad bis zum n_i zusammenaddiert. Dieser Wert wird gleich danach mit der Länge des neuen *spurPath* zusammenaddiert und wird zur Länge des neuen *totalPath*.
Danach formen wir aus dem *rootPath* und dem *spurPath* den *totalPath*, wie im Pseudocode (vergl. Z. 31). Danach wird überprüft, ob ein solcher neu entstande Pfad sich schon in der Kandidatenliste befindet. Wenn nicht, dann wird er eingefügt (vergl. 33–34). Am Ende erfolgt die Zurückstellung der Kante zwischen n_i und dem nächsten Knoten im aktuellen Pfad in den Graphen G'.

[1] https://en.wikipedia.org/wiki/Yen%27s_algorithm#Pseudocode (Zugang 15.03.2020)

Anhand des Yen–Algorithmus generieren wir die k–kürzesten Pfade $P_1, P_2, ..., P_k$ in G' von der Start–Pivotstraße zur Ziel–Pivotstraße. Die Länge eines solchen Pfades ist die Summe seiner Kantengewichte (also der Nullen und Einsen). Zu jedem $P_i, i = 1...k$, in G' betrachten wir den zugehörigen Weg W_i im Graphen G, der aus allen Straßen besteht, die die Knoten des Pfades P_i bilden. Dem Weg W_i in G ordnen wir seine (euklidische) Länge γ, d.h. die Summe der Längen aller Straßen von W_i, zu.
Dabei wird noch ein anderer, wichtiger Aspekt beachtet. Da die Knoten im Graphen G' Straßen sind, bedeutet, dass es sein kann, dass ein Punkt auf der Ebene mehr als dreimal besucht wird. Eine Straße besitzt zwei Punkte. Im Dijkstra–Algorithmus wird nicht beachtet, ob ein Punkt, sondern ob ein Knoten bereits besucht wurde. Das bedeutet, dass es Traversierungen geben kann, in denen ein Punkt dreimal besucht wurde (s. Abb. 4). Aus diesem Grund werden alle solchen Pfade an dieser Stelle aus unserer Betrachtung ausgeschlossen. Im Programm werden sie einfach übersprungen.
Wir vergleichen γ mit ψ. Wenn γ größer ist als ψ, dann müssen wir einen neuen Pfad generieren und erneut vergleichen. Wenn aber γ nicht größer ist als ψ, fanden wir den besten Pfad, da diese Pfade, die ich generiere, die besten k–kürzesten Pfade sind, heißt, Pfade mit der niedrigsten Anzahl von Abbiegungen. Der beste Pfad ist dementsprechend unser Ergebnis.

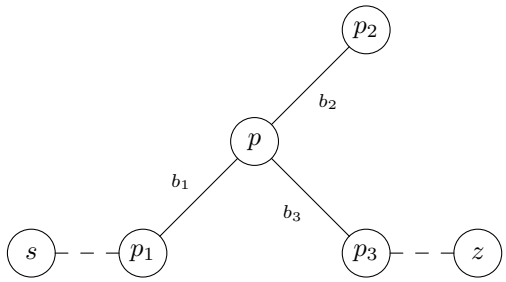


Abbildung 4: p_2 und p_3 besitzen dieselben x–Koordinaten. Im Graphen G' existieren folgende Abbiegungen: von b_1 zu b_2 (mit Wert 0) und von b_1 zu b_3 (mit Wert 1), aber auch von b_2 zu b_3 und andersherum (jeweils mit Wert 1). Das bedeutet, dass es eine Traversierung geben kann, die von b_1 zu b_2 und danach von b_2 zu b_3 verläuft. Dementsprechend werden alle Straßen b_1, b_2 und b_3 besucht. Aus dem Grund wird auch der Punkt p dreimal besucht.

Über die Idee, Korrektheit und Laufzeit des Yen–Algorithmus kann man mehr in den zitierten Artikeln lesen: Yen 1970 [1], Yen 1971 [2].

1.3 Laufzeit

Die Laufzeit können wir grundsätzlich in drei Phasen aufteilen: Bildung des Graphen G, Bildung des Graphen G' und Generierung der Pfade.

s – Anzahl der Straßen
p – Anzahl der Punkte
k – Anzahl der generierten Pfade

Graph G:

- für das Einlesen der Eingabe: $O(s)$. In der Datei gibt es s Straßen, die eingelesen werden müssen.
- Vorbereitung der Mengen V und E: $O(p + s)$. Jedem Punkt und jeder Straße werden Indizes zugeordnet: $O(p + s)$. Jedem Punkt werden seine Nachbarn zugeordnet: $O(s)$.
- Bildung des Graphen G: $O(s)$. Alle Kanten (Straßen) werden eingefügt.
- Dijkstra auf dem Graphen G – ω wird bestimmt: $O(p^2)$ (worst-case).

$O(s)+O(p+s)+O(s)+O(p^2) = O(p^2+3s+p) \in O(p^2+p+s) \in O(p^2+p)$, s wird weggelassen, denn $s < p$.

Graph G':

- für das Einlesen der Eingabe: $O(s)$. In der Datei gibt es s Straßen, die eingelesen werden müssen.
- Vorbereitung der Mengen V und E: $O(p+s)$. Jedem Punkt und jeder Straße werden Indizes zugeordnet: $O(p+s)$. Jedem Punkt werden seine Nachbarn zugeordnet: $O(s)$. Die Pivotpunkte werden in $O(1)$ erstellt.
- Vorbereitung der Menge C: $O(s)$. Die Menge mit allen Straßen wird iteriert ($O(s)$) und bei jeder Straße werden noch die Mengen von den benachbarten Punkten jedes Punkts dieser Straße iteriert. Jede Straße hat in der Regel nicht mehr als 10 Abbiegungen (nach den BWINF–Beispielen). Am Ende bekommen wir eine Liste mit Mengen, in denen sich die benachbarten Straßen befinden, also die Mengen mit Abbiegungen: $O(10*s)$.
- Bildung des Graphen G': $O(s)$. Alle Kanten (Abbiegungen) werden eingefügt.

$O(s)+O(p+s)+O(s)+O(s)=O(4s+p)\in O(p+s)$
In der folgenden Abschätzung berufe ich mich auf konkreten Zeilen im Pseudocode aus Wikipedia. (s. Seite 25)

Yen-Algorithmus:

- Dijkstra zur Bestimmung des kürzesten Pfades: $O(s^2)$ (worst-case), Zeile 3.

Bei jeder Generierung eines Pfades wird ein Pfad aus der Kandidatenmenge genommen. Den nenne ich hier *der betrachtete Pfad*. Ab dem nächsten Punkt beginnt die Schleife, die k mal iteriert wird.
l entspricht der Anzahl der Kanten des betrachteten Pfades in G'.

- Entfernen der Kanten: $O(k*l)$. Hier wird Liste A mit allen bisherigen Ergebnissen iteriert. Diese Liste ist der Länge k. In jeder Iteration erfolgt noch eine Iteration von $rootPath$, der maximal solang sein kann, wie fast der ganze Pfad (außer dem Zielknoten): $O(l)$, Zeilen 18–22.
- Entfernen der Kanten und Knoten, die im betrachteten Pfad auftreten: $O(l)$, Zeilen 24f.
- Dijkstra auf dem Graphen G' mit entfernten Kanten und Knoten: $O(s^2)$, Zeile 28.
- Aktualisierung der Gewichte und Zurückstellung der Kanten und Knoten: $O(l^2)$ (worst-case)
  Der betrachtete Pfad wird iteriert: $O(l)$. Jeder iterierte Knoten nenne ich n_i.
  - Aktualisierung der Kanten, die aus n_i führen: $O(l)$. Hier werden einfach die Knoten, die aus n_i führen, iteriert. Diese Anzahl beträgt nicht mehr als 10, wie schon beschrieben. Danach folgt noch eine Bildung des neuen $spurPath$: $O(l)$, Zeilen 28–39..
  - Aktualisierung der Kanten, die zu n_i führen: $O(10*l)$. Ein Knoten hat auch in der Regel nicht mehr als 10 Knoten, die zu ihm führen.
    Hier wird durch die Knoten, die zu n_i führen iteriert und wenn ein Knoten aktualisiert wird, wird durch seine Knoten, die zu ihm führen, iteriert usw. Maximal kann man l solche Wiederholungen durchführen bis man den $spurNode$ erreicht.
  - Bestimmung der Länge des $spurNode$: $O(l)$. Der betrachtete Pfad wird iteriert bis zum n_i und jedes Mal wird das Gewicht an der Kante zusammenaddiert: $O(l)$.

$O(s^2)+k(O(k*l)+O(l)+O(s^2)+O(l^2))=O(k(k*l+l^2+s^2+l)+s^2)\in O(k^2l+kl^2+ks^2)$
Nun addieren wir alles zusammen.

$$O(p^2+p)+O(p+s)+O(k^2l+kl^2+ks^2)=O(k^2l+kl^2+ks^2+p^2+2p+s)$$
$$O(k^2l+kl^2+ks^2+p^2+2p+s)\in O(k(kl+s^2+l^2)+p^2)$$

1.4 Erweiterungen

1.4.1 Start und Ziel an verschiedenen Stellen

In allen verfügbaren Beispielen, die auf der BWINF-Webseite vorhanden sind, entspricht die x–Koordinate des Zielpunkts stets der letzen x–Koordinate der gegebenen Matrix. Der Startpunkt liegt auch stets im Punkt (0,0). In meinem Programm ist es auch erlaubt, Startpunkte und Zielpunkte mit an anderen Stellen zu setzen. Dazu sehen Sie das Beispiel 3.6.

1.4.2 Nichtganzzahlige Koordinaten

In den auf der Website von BWINF vorhandenen Beispielen sind alle Koordinaten nur ganzzahlig und positiv. In meinem Programm können sowohl ganzzahlige und rationale Koordinaten verwendet werden. Dazu sehen Sie das Beispiel 3.7.

1.4.3 Kreuzungen von Straßen

In keinem BWINF–Beispiel kreuzt sich eine Straße mit einer anderen. Unter einer Kreuzung verstehe ich einen Zustand, in dem zwei Straßen $a(o, p)$ und $b(q, r)$ im Graphen G existieren und die Strecke op einen Schnittpunkt mit der Strecke qr hat, der gleichzeitig keiner der Punkte o, p, q oder r ist. In meinem Programm sind solche Kreuzungen erlaubt. Dazu sehen Sie das Beispiel 3.8.

1.4.4 Genauigkeit

Als eine folgende Erweiterung der Aufgabenstellung biete ich dem Benutzer meines Programms an, die Genauigkeit einer Suche zu wählen. Es gibt zwei Varianten: eine *approximierte Suche* und eine *genaue Suche*. Bei der genauen Variante wird im Yen–Algorithmus bei der Generierung eines Pfades γ mit ψ verglichen und daraus wird entschieden, ob wir einen weiteren Pfad generieren müssen.
In der approximierten Variante wird γ zu einem Prozent δ umgewandelt, in dem 100% ω entspricht. Danach wird δ auf Einer gerundet. Nun wird im Yen–Algorithmus bei der Generierung eines neuen Pfades ξ mit δ verglichen, ob $\delta > \xi$. Wenn ja, müssen wir einen nächsten Pfad generieren. Wenn nicht, dann fanden wir den besten approximierten Pfad. Dazu sehen Sie das Beispiel 3.9. Das ist ein gutes Beispiel dafür, dass wir dadurch Zeit sparen können und das Ergebnis sogar besser ist.
Außerdem funktioniert auch das Ergebnis des in der Aufgabenstellung gelösten Beispiels nur unter der Voraussetzung, dass wir γ runden.

Literatur

[1] Yen, Jin Y. *An Algorithm for Finding Shortest Routes From All Source Nodes to a Given Destination in General Networks*. Quarterly of Applied Mathematics 27, 526-530, 1970. `https://doi.org/10.1090/qam/253822`.

[2] Yen, Jin Y. *Finding the K Shortest Loopless Paths in a Network*. Management Science, USA, 1971. `https://doi.org/10.1287/mnsc.17.11.712`.

2 Umsetzung

Das Programm ist in die drei wichtigsten Klassen unterteilt: `Graph`, `Dijkstra`, `Yen`.

2.1 Klasse `Graph`

Die Klasse `Graph` behandelt den Bau von beiden Graphen: G und G', die in der Implementierung durch eine Variable `type` (`type 1` ist G und `type 2` G') unterschieden werden.
Wir deklarieren einen Graphen, stellen den Typ ein und lesen aus der Textdatei die Punkte und Straßen ein. Einen Punkt speichere ich auf folgender Weise: `pair<double, double>`. Da ich erlaube, die Koordinaten von Punkten rational zu sein, entschied ich mich aus dem Grund für Double, obwohl in der Aufgabenstellung sind die Koordinaten nur ganzzahlig. Eine Straße wird ganz einfach als `pair< pair<double,double>, pair<double,double> >` gespeichert. Diese vielleicht nicht ganz komfortable Schreibweise dient nur für das Einlesen der Daten aus der Textdatei und für die Unwandlung und Bearbeitung der Daten.

Jedem Punkt und jeder Straße ordne ich einen internen Index zu. Alle Punkte und Straßen füge ich in entsprechende `map` ein. Ich erstelle immer zwei Map-Container jeder Art: einen Map-Container mit Indizes als Schlüssel und einen anderen mit dem entsprecheden Datentypen als Schlüssel. Die Elemente der Map-Container werden stets mit der eingebauten Funktion `find()` gefunden, die in der Zeit von $O(\log n)$ läuft. Diese Zeit wird in der Laufzeit des Algorithmus vernachlässigt.
Wie schon beschrieben, beim Bau des Graphen Typ 1 suche ich bei jedem Punkt `p` nach allen Straßen, die mit diesem Punkt verbunden sind. Gleichzeitig messe ich die Entfernung `dist` zwischen den beiden Punkten, die eine solche Straße bilden. Danach füge ich den Index des anderen Punktes dieser Straße mit der Länge `dist` als ein Paar `pair<int, double>` in die Menge der Nachbarn von `p` ein.
Beim Bau des Graphen Typ 2 erfolgt das Gleiche, aber diesmal müssen noch die Abbiegungen bestimmt werden.
Wir nehmen jedes Mal eine Straße. Eine Straße besitzt zwei Punkte a und b. Für jeden Punkt bestimmten wir bereits alle seine Nachbarn. Wir nehmen den Punkt a und iterieren durch die Menge seiner Nachbarn. Nun prüfen wir, ob Punkte a, b und der Nachbarpunkt p kollinear sind. Wir speichern diesen boolschen Wert als `currTurn`. Jetzt müssen wir nur prüfen, ob einer der Punkte ein Pivotpunkt ist. Wenn ja, dann fügen wir zur Menge von Nachbarn der Start–Pivotstraße den Index der anderen Straße, die aus den zwei übrig gebliebenen Punkten besteht, bzw. zur Menge der anderen Straße, die aus den zwei übrig gebliebenen Punkten besteht, die Ziel–Pivotstraße ein. Diese Informationen werden als `pair<double, double>` gespeichert. In beiden Fällen ist der Wert der Abbiegung 0 und als zweiter Wert in `pair<double, double>` gilt genau diese Zahl.
Wenn aber keiner der Punkte ein Pivotpunkt ist, dann müssen wir die x–Koordinaten von a und p vergleichen.
$a_x \leq p_x$, dann fügen wir zur Menge der Straße (a, b) den Index der Straße (b, p) mit dem Wert `currTurn` ein.
$a_x \geq p_x$, dann fügen wir zur Menge der Straße (b, p) den Index der Straße (a, b) mit dem Wert `currTurn` ein.
Danach wiederholen wir das Gleiche für den Punkt b. Für das Einfügen der Indizes der entsprechenden Straßen vertauscht man nur die Variablen a mit b.
Am Ende bekommen wir eine `map`, in der jedem internen Straße–Index eine Menge mit Nachbarstraßen und deren entsprechende Abbiegungen zugeordnet ist.

Um die größte Funktionalität meines Programms zu erhalten, entschied mich dafür, dass ich die Pivotpunkte außerhalb der Matrix platziere. Dem Start–Pivotpunkt gebe ich folgende Koordinaten: (-1, 0) und dem Ziel–Pivotpunkt die Koordinaten: (-2, 0).

In beiden Graphen werden Knoten als Zeiger der Klasse `Node` gespeichert. Diese Klasse besteht aus zwei Werten: dem internen Index und einem Gewicht (Entfernung vom Startknoten im Graphen; genutzt bei Yen). Auch werden Pfade als Zeiger der Klasse `Path` dargestellt. Ein Objekt von `Path` beinhaltet die Länge des gesamten Pfads, das gesamte Gewicht an den Kanten des Pfads und den Vektor von Zeigern von `Node`, der alle Knoten im Pfad enthält. Die Verwendung von Zeigern hat zum Ziel eine verbesserte Laufzeit und eine effiziente Arbeitsspeicherverwaltung. Die Kanten werden in einer `map<int, double>` gespeichert, die den internen Index einer Kante und das entsprechende Gewicht enthält.
Ein wichtiges Element der Implementierung stellen zwei Map–Container dar, die ich `inNodes` und

`outNodes` nenne. Diese erhalten als Schlüssel einen Knotenindex und als Wert eine Menge mit allen Nachbarn, die entsprechend aus (engl. *out*) oder zu (engl. *in*) dem Knoten führen. Diese sind die Grundlagen der Funktionsweise des Dijkstra–Algorithmus in meiner Implementierung.

2.2 Klasse `Dijkstra`

In der Klasse `Dijkstra` läuft ein ganz normaler Dijkstra–Algorithmus. Ich verwende eine Vorrangwarteschlange. Die Entfernungen vom Start zum jedem Knoten werden mit Hilfe einer `map<Node*, double>` gespeichert. Sie nenne ich `startToDistance`. Eine andere `map`, die einen Vorgänger jedes Knotens im Pfad enthält, nenne ich `map<Node*, Node*> previousNode`. Eine Menge `visNodes` enthält alle bereits besuchte Knoten.

Die Methode `Dijkstra::determineConnections(Node* start, Node* end, bool direction)` stellt Vorgänger von Knoten in `previousNode` und bestimmt die Entfernung jedes Knotens vom Ursprung `start` in `startToDistance`. Das ist die Grundlage der Funktionsweise des Dijkstra–Algorithmus. Diese Methode wird auch zur Traversierung des Graphen G' vom Zielknoten im Yen–Algorithmus verwendet. Aus diesem Grund beschreibt `direction`, in welche Richtung die Traversierung verläuft (1 für die Traversierung vom Startknoten zum Zielknoten, 0 für andersherum).
Als `startNode` und `endNode` bezeichnet werden die Knoten, von dem wir anfangen und an dem wir enden. Zuerst wird überprüft, welche in welche Richtung traversiert wird. Wenn `direction` gleich 1 ist, werden`start` und `end` entsprechend `startNode` und `endNode`. Andernfalls wird die Reihenfolge getauscht. Der Knoten `startNode` wird in die Vorrangswarteschlange eingefügt. Es beginnt eine Schleife, die läuft, bis es keine weiete Knoten in der Vorrangswarteschlange gibt. Jeden iterierten Knoten aus der Vorrangswarteschlange nenne ich hier `currNode`.
In der Schleife wird zuerst der erste Knoten in der Schlange abgerufen: `currNode`. Dieses Element wird auch gleichzeitig aus der Schleife gelöst. Wir prüfen, ob `currNode` gleich `endNode` ist, ob wir nicht die Schleife nicht jetzt beeden sollen.
`currNode` wird als besucht in `visNodes` gekennzeichnet. Jetzt wird entweder die Menge `outNodes` des Knotens `currNode`, wenn `direction` 1 ist, oder `inNodes` des Knotens `currNode`, wenn `direction` 0 ist, als `neighborNodes` abgerufen. Wir iterieren durch diese Menge. Jeden iterierten Nachbarn des Knotens `currNode` bezeichne ich hier als n_i.
Wir prüfen, ob n_i noch nicht besucht wurde. Wir ordnen `currNode` seine Entfernung vom Ursprung aus `startToDistance` zu. Wenn ihm noch keine Entfernung zuzuodrnet war, ordnen wir ihm den Wert `DBL_MAX` (ein Ersatz für Unendlichkeit). Die Entfernung vom Ursprung von `currNode` speichern wir als `distance`. Wir vergrößern `distance` um das Gewicht an der Kante zwischen n_i und `currNode`. Wir suchen im Map–Container `startToDistance` nach der Entfernung von n_i und speicher sie als d.
Wenn d nicht gefunden wird (Knoten nicht nicht erreicht) oder wenn $d >$ `distance`, heißt, wir fanden eine bessere Verbindung von `currNode` zu n_i. Der Wert von n_i in `startToDistance` wird als `distance` gespiechert. `currNode` wird zum Vorgänger von n_i und diese Information wird in `previousNode` gespeichert. In der Klasse `Node` von n_i wird das Gewicht als `distance` eingestellt. Danach prüfen wir, ob n_i isch in der Vorrangswarteschlange befindet. Wenn ja, dann entfernen wir ihn. Es kann ja sein, dass es eine veraltete Version von n_i in der Vorrangswarteschlange gibt. Danach fügen wir n_i in die Vorrangswarteschlange ein.

Die folgenden zwei Methoden helfen uns im Yen–Algorithmus, die Pfade zu aktualisieren, wenn Kanten und Knoten entfernt werden. Sie ersetzen auch einen weiteren Lauf des Dijkstra–Algorithmus im Yen–Algorithmus

Die Methode `Dijkstra::updateOutDistance(Node* n)` funktioniert auf folgender Weise. Wir rufen die Menge `outNodes` des Knotens n ab. Wir prüfen, ob es bereits einen Pfad zu n gibt, indem wir prüfen, ob dieser Knoten einen Wert im Map–Container `startToDistance` hat. Wenn kein Pfad gefunden wurde, dann fügen wir diesen Knoten mit dem Wert `DBL_MAX` (ein Ersatz für Unendlichkeit) in diese `map` ein. Dann iterieren wird durch alle Knoten in der Menge `outNodes` des Knotens n. Wir suchen im Map–Container `startToDistance` nach der Entfernung vom Ursprung des Nachbarn und speichern sie als `currDistance`. Falls zu einem Knoten kein Pfad gefunden wurde, bekommt diese Variable den Wert `DBL_MAX`. Danach wird `currDistance` bei jedem Nachbarn um die Kante, die n und der Nachbar bilden, vergrößert. Wenn `currDistance` kleiner ist als die Entfernung vom Urspung von n, wird diese Entfernung aktualisiert.
Wenn die Entfernung vom Ursprung von n überhaupt aktualisiert wurde, erstellen wir einen neuen Pfad.

Wir fangen mit dem Knoten n an und setzen mit dem Wert von n im Map–Container `previousPath` fort. Dann ist der nächste Knoten der Vorgänger von n. So setzen wir fort, bis wir auf einen Knoten kommen, der keinen Vorgänger hat. Die Länge des ganzen Pfades ist natürlich die aktualisierte Entfernung vom Ursprung des Knotens n.

Die andere Methode, die die Knoten aktualisiert, ist `Dijkstra::updateInDistance(Node* n)`. In dieser Methode befindet sich eine Liste von Knoten, die zu aktualisieren sind. Als ersten Knoten fügen wir den Knoten n ein. Dann läuft eine Schleife, in der alle Elemente von dieser Liste iteriert werden.
Bei jedem Knoten i, der sich in der Liste befindet, wird seine Entfernung vom Ursprung `currDistance` anhand des Map–Containers `startToDistance` gefunden. Dann wird die Menge `inNodes` des Knotens i abgerufen. Wir iterieren durch diese Menge. Hier wird für jeden Nachbarn q seine Entfernung vom Ursprung aus dem Map–Container `startToDistance` abgelesen. Diese Information wird in der Variable `neighborDistance` gespeichert. Ähnlich wie in der vorherigen Methode: Falls zu einem Knoten kein Pfad gefunden wurde, bekommt diese Variable den Wert `DBL_MAX`. Hier erstellen wir auch eine andere neue Variable `updatedDistance`, die gleich `currDistance` und dem Gewicht an der Kante zwischen i und q ist.
Wenn `updatedDistance` kleiner ist als `neighborDistance`, dann wird die Entfernung vom Ursprung von q aktualisiert, der Vorgänger von q wird i und der Knoten q wird in die Liste von Knoten, die zu aktualisieren sind, eingefügt.

Die Methode `Dijkstra::getReversedTraversal` iniziert die Funktion `determineConnections`, aber die Variable `direction` ist stets 0. Der Startknoten wird aber auch nicht definiert, sodass die Funktion für jeden *spurNode* im Yen–Algorithmus geeignet ist. Wir traversieren vom Zielknoten solange, bis es noch Knoten in der Vorrangsschlange gibt, wir sind durch keinen Zielknoten (=Startknoten) begrenzt. Diese Funktion wird im Yen–Algorithmus benutzt, um neue Verbindungen zwischen Knoten im Graphen G' mit entfernten Knoten und Kanten zu finden.

2.3 Klasse `Yen`

Wie schon im ersten Kapitel beschrieben, basiert meine Implementierung des Yen–Algorithmus sehr stark auf dem Pseudocode im entsprechenden englischsprachigen Wikipedia–Artikel. Praktisch ist die einzige Änderung/Erweiterung die Weise, auf der ich einen neuen Pfad erstelle. Ich lasse den Dijkstra–Algorithmus in Form von `Dijkstra::getReversedTraversal` laufen. Danach bei Zurückstellung jedes Knotens im aktuellen Pfad (s. oben, „Lösungsidee") verwende ich die Methoden `Dijkstra::updateOutDistance()` und `Dijkstra::updateInDistance()` aktualisiere ich die Verbindungen im Graphen G'. Mit Hilfe der ersten Methode wird auch die ein neuer *spurPath* gefunden.

Ich füge den Code des Yen-Algorithmus, sowie die Implementierungen der beiden Methoden `Dijkstra::updateOutDista` und `Dijkstra::updateInDistance()` im Abschnitt „Quellcode" bei.

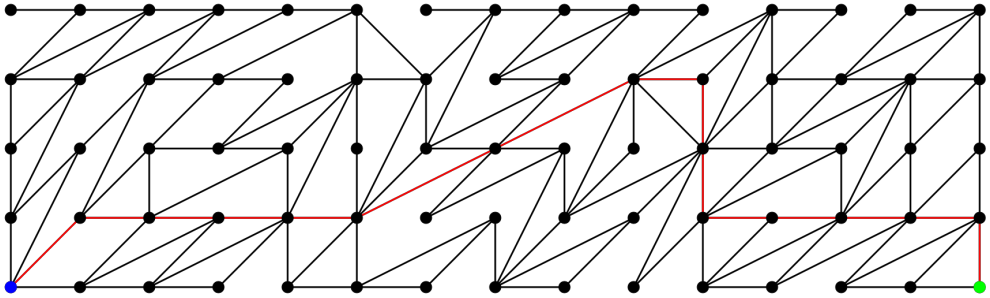
3 Beispiele

Als eine Erweiterung der Aufgabenstellung generiere ich Grafiken, die den gefundenen Pfad abbilden. In den dargestellten Grafiken stehen der blaue Punkt für den Startpunkt und der grüne Punkt für den Zielpunkt. Der rote Pfad bezeichnet den Pfad mit der niedrigsten Anzahl von Abbiegungen.
Einige Pfade wiederholen sich in manchen Prozentbegrenzungen. Das passiert aus dem Grund, dass ich aus der Menge der Pfade mit derselben Anzahl von Abbiegungen immer den kürzesten generierten Pfad nehme.
Außerdem präsentiere ich als eine nächste Erweiterung der Aufgabenstellung die Pfade, bei denen die Anzahl von Abbiegungen minimal ist, wenn in keiner von den Prozentbegrenzungen eine solche minimale Anzahl auftritt. Zusätlich präsentiere ich zum Vergleich auch den kürzesten Pfad, also der Pfad mit der Länge ω, mit der entsprechenden Anzahl von Abbiegunen, wenn er nicht auftritt.

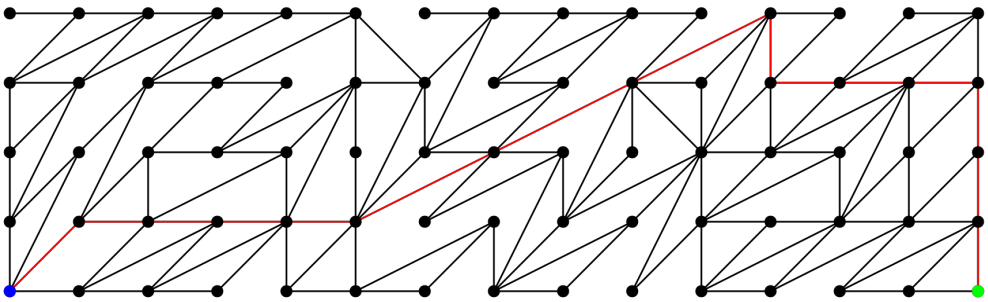
3.1 Beispiel 1 (BWINF)

Textdatei: `abbiegen1.txt`

- 110%
  - Abbiegen: **6**
  - Länge des Pfades: **17,8863**
  - Länge des Pfades prozentual: **104,462%**
  - Punkte: **(0, 0), (1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 1), (5, 1), (7, 2), (9, 3), (10, 3), (10, 2), (10, 1), (11, 1), (12, 1), (13, 1), (14, 1), (14, 0)**

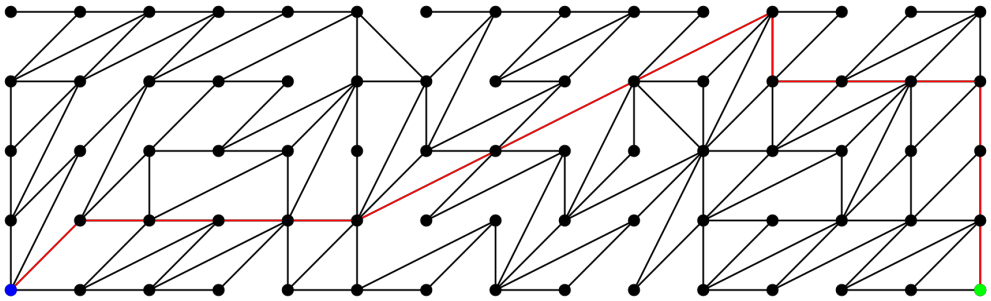


- 115%
  - Abbiegen: **5** (das beste Ergebnis)
  - Länge des Pfades: **19,1224**
  - Länge des Pfades prozentual: **111,6%**
  - Punkte: **(0, 0), (1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 1), (5, 1), (7, 2), (9, 3), (11, 4), (11, 3), (12, 3), (13, 3), (14, 3), (14, 2), (14, 1), (14, 0)**

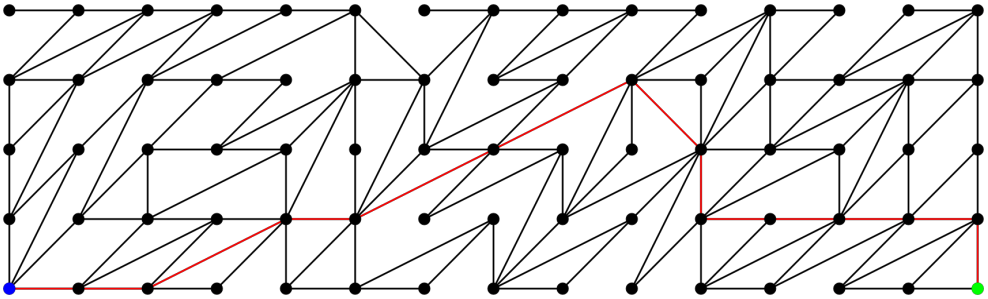


- 130%
  - Abbiegen: **5** (das beste Ergebnis)
  - Länge des Pfades: **19,1224**

  - Länge des Pfades prozentual: **111,6%**
  - Punkte: **(0, 0)**, **(1, 1)**, **(2, 1)**, **(3, 1)**, **(4, 1)**, **(5, 1)**, **(7, 2)**, **(9, 3)**, **(11, 4)**, **(11, 3)**, **(12, 3)**, **(13, 3)**, **(14, 3)**, **(14, 2)**, **(14, 1)**, **(14, 0)**



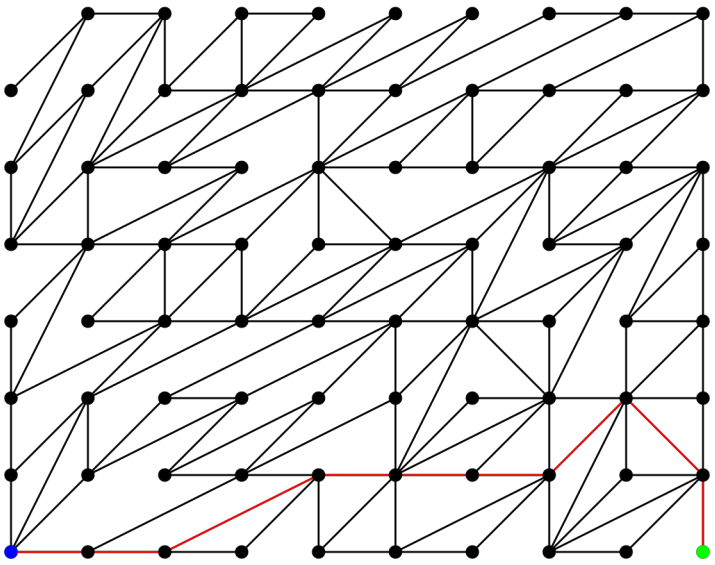
- der kürzeste Pfad
  - Abbiegen: 7
  - Länge des Pfades: 17,1224



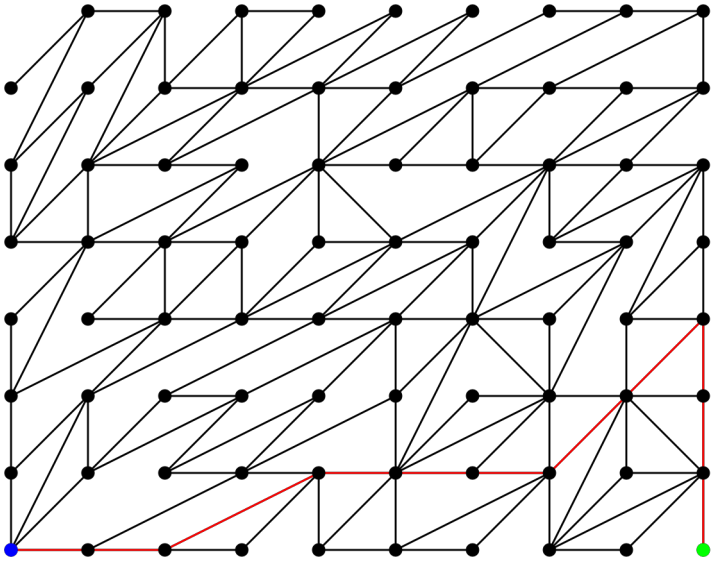
3.2 Beispiel 2 (BWINF)

Textdatei: `abbiegen2.txt`

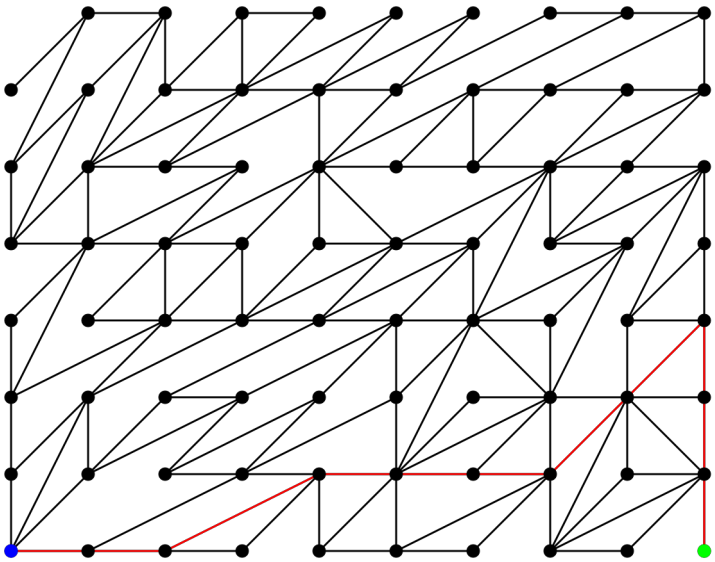
- 110%
  - Abbiegen: **5**
  - Länge des Pfades: **11,0645**
  - Länge des Pfades prozentual: **101,636%**
  - Punkte: **(0, 0)**, **(1, 0)**, **(2, 0)**, **(4, 1)**, **(5, 1)**, **(6, 1)**, **(7, 1)**, **(8, 2)**, **(9, 1)**, **(9, 0)**



- 115%
  - Abbiegen: **4**
  - Länge des Pfades: **13,0645**
  - Länge des Pfades prozentual: **120,008%**
  - Punkte: **(0, 0)**, **(1, 0)**, **(2, 0)**, **(4, 1)**, **(5, 1)**, **(6, 1)**, **(7, 1)**, **(8, 2)**, **(9, 3)**, **(9, 2)**, **(9, 1)**, **(9, 0)**

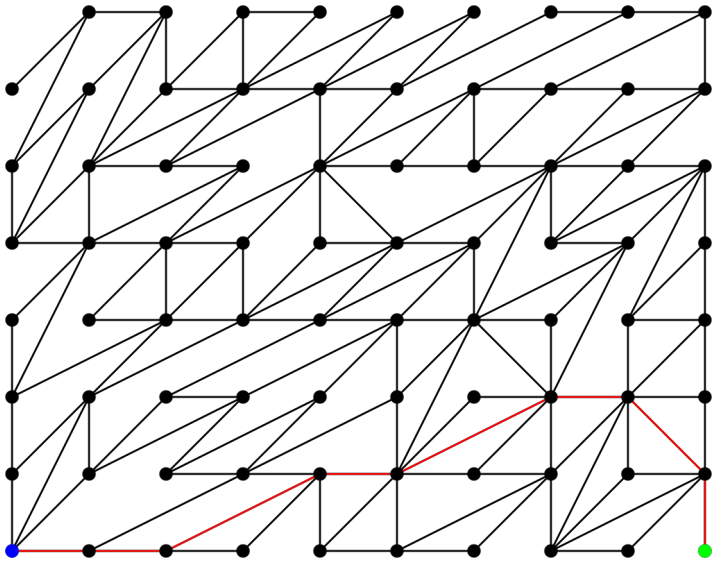


- 130%
  - Abbiegen: **4**
  - Länge des Pfades: **13,0645**
  - Länge des Pfades prozentual: **120,008%**
  - Punkte: **(0, 0)**, **(1, 0)**, **(2, 0)**, **(4, 1)**, **(5, 1)**, **(6, 1)**, **(7, 1)**, **(8, 2)**, **(9, 3)**, **(9, 2)**, **(9, 1)**, **(9, 0)**

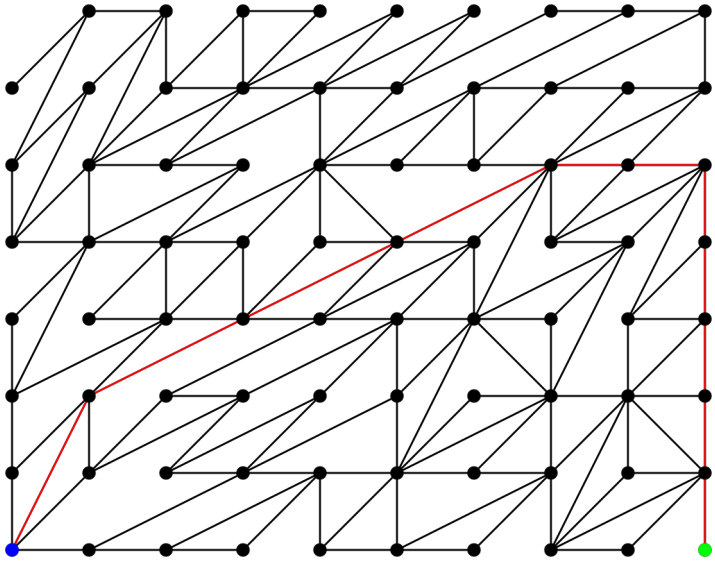


- der kürzeste Pfad
  - Abbiegen: 6

  - Länge des Pfades: 10,8863



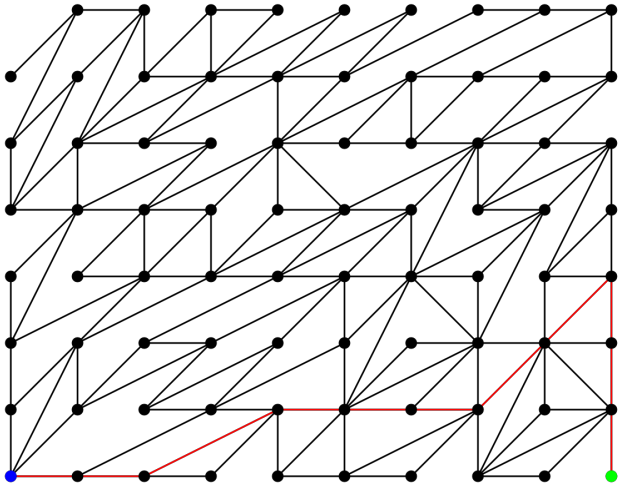
- der Pfad mit der niedrigsten Anzahl von Abbiegungen
  - Abbiegen: 3
  - Länge des Pfades: 15,9443
  - Länge des Pfades prozentual: 146,461%



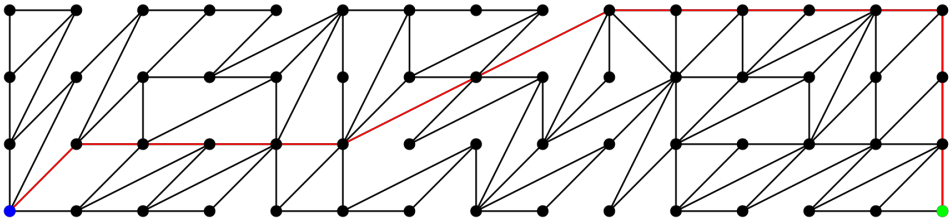
3.3 Beispiel 3 (BWINF)

Textdatei: `abbiegen3.txt`

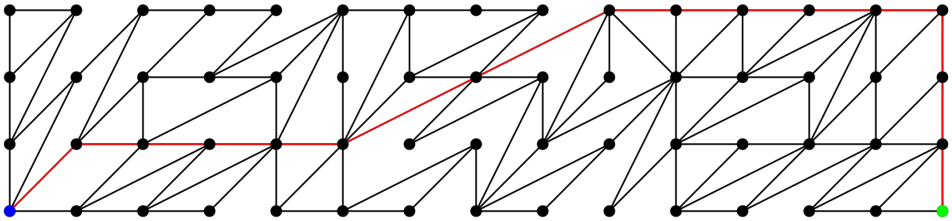
- 110%
  - Abbiegen: **4** (das beste Ergebnis)
  - Länge des Pfades: **17,8863**
  - Länge des Pfades prozentual: **104,462%**
  - Punkte: **(0, 0)**, **(1, 1)**, **(2, 1)**, **(3, 1)**, **(4, 1)**, **(5, 1)**, **(7, 2)**, **(9, 3)**, **(10, 3)**, **(11, 3)**, **(12, 3)**, **(13, 3)**, **(14, 3)**, **(14, 2)**, **(14, 1)**, **(14, 0)**



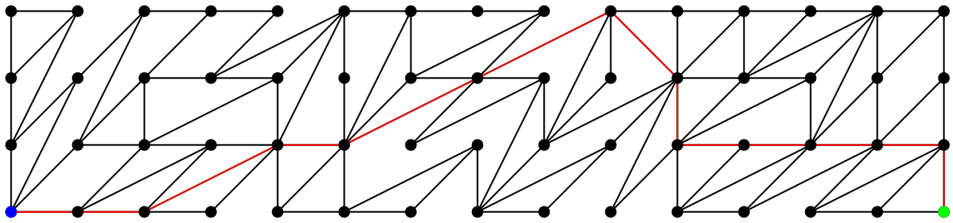
- 115%
  - Abbiegen: **4**
  - Länge des Pfades: **17,8863**
  - Länge des Pfades prozentual: **104,462%**
  - Punkte: **(0, 0), (1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 1), (5, 1), (7, 2), (9, 3), (10, 3), (11, 3), (12, 3), (13, 3), (14, 3), (14, 2), (14, 1), (14, 0)**



- 130%
  - Abbiegen: **4**
  - Länge des Pfades: **17,8863**
  - Länge des Pfades prozentual: **104,462%**
  - Punkte: **(0, 0), (1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 1), (5, 1), (7, 2), (9, 3), (10, 3), (11, 3), (12, 3), (13, 3), (14, 3), (14, 2), (14, 1), (14, 0)**



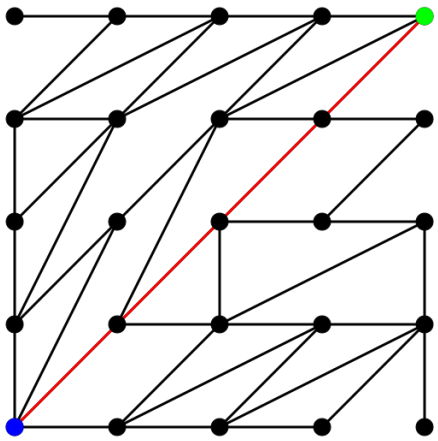
- der kürzeste Pfad
  - Abbiegen: 7
  - Länge des Pfades: 17,1224



3.4 Beispiel 4

Textdatei: `abbiegen4.txt`
Besonderheit: der Pfad mit der niedrigsten Anzahl von Abbiegungen ist gleich 0, der Pfad verläuft nur über den Diagonalen

- 110%
  - Abbiegen: **0** (das beste Ergebnis)
  - Länge des Pfades: **5,65685**
  - Länge des Pfades prozentual: **100%**
  - Punkte: **(0, 0)**, **(1, 1)**, **(2, 2)**, **(3, 3)**, **(4, 4)**

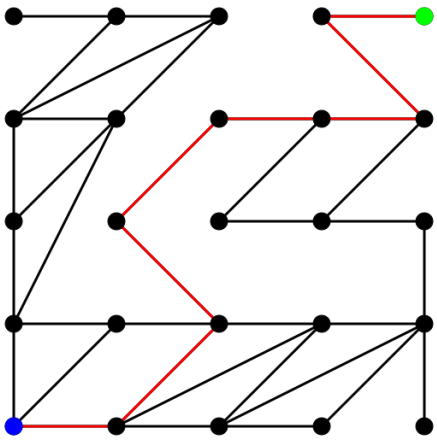


- 115%: das Gleiche wie bei 110%
- 130%: das Gleiche wie bei 110%

3.5 Beispiel 5

Textdatei: `abbiegen5.txt`
Besonderheit: sehr viele Abbiegungen im besten Pfad, das Ziel ist isoliert vom Rest des Graphen, vom Punkt (4, 3) zum (3, 4) macht der Algorithmus einen Schritt zurück in Bezug auf die x-Achse (s. Lösungsidee)

- 110%
  - Abbiegen: **6** (das beste Ergebnis)
  - Länge des Pfades: **9,65685**
  - Länge des Pfades prozentual: **100%**
  - Punkte: **(0, 0)**, **(1, 0)**, **(2, 1)**, **(1, 2)**, **(2, 3)**, **(3, 3)**, **(4, 3)**, **(3, 4)**, **(4, 4)**

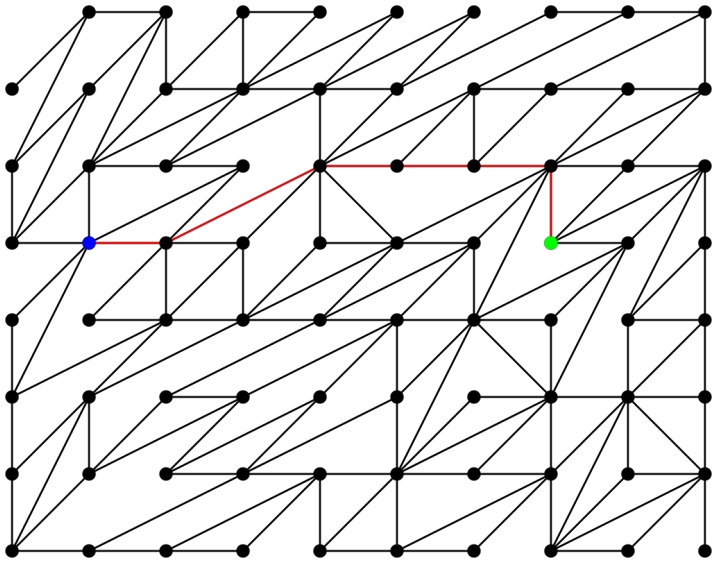


- 115%: das Gleiche wie bei 110%
- 130%: das Gleiche wie bei 110%

3.6 Beispiel 6

Textdatei: `abbiegen6.txt`
Besonderheit: Da Ziel befindet sich nicht „am Ende" der Matrix

- 110%
  - Abbiegen: **3** (das beste Ergebnis)
  - Länge des Pfades: **7.23607**
  - Länge des Pfades prozentual: **100%**
  - Punkte: **(1, 4), (2, 4), (4, 5), (5, 5), (6, 5), (7, 5), (7, 4)**



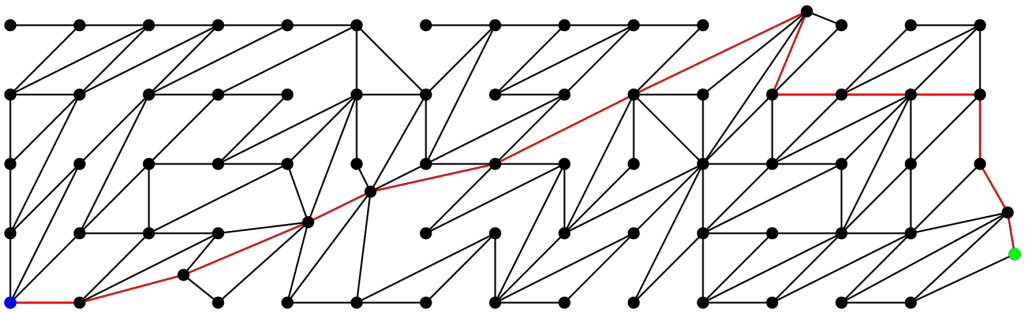
- 115%: das Gleiche wie bei 110%
- 130%: das Gleiche wie bei 110%

3.7 Beispiel 7

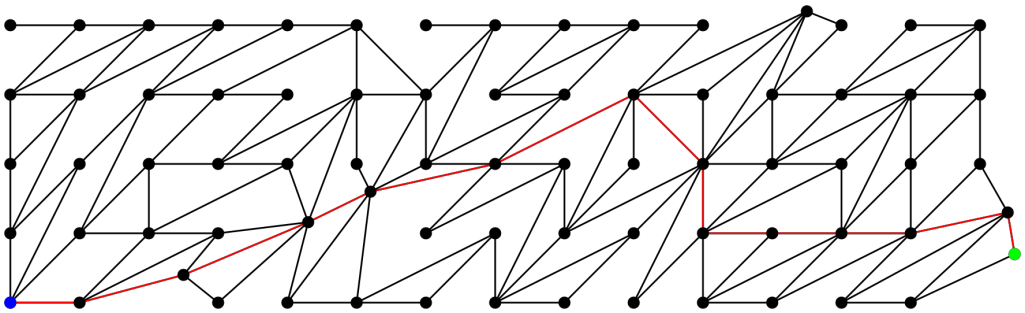
Textdatei: `abbiegen7.txt`
Besonderheit: nichtganzzahlige Koordinaten

- 110%

  - Abbiegen: **3** (das beste Ergebnis)
  - Länge des Pfades: **13,4721**
  - Länge des Pfades prozentual: **106,497%**
  - Punkte: **(0, 0), (1, 0), (2.5, 0.4), (4.3, 1.16), (5.2, 1.6), (7, 2), (9, 3), (11.5, 4.2), (11, 3), (12, 3), (13, 3), (14, 3), (14, 2), (14.4, 1.3), (14.5, 0.7)**



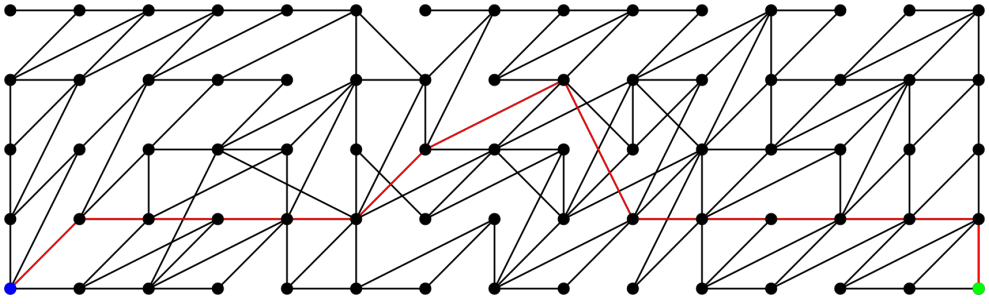
- 115%: das Gleiche wie bei 110%
- 130%: das Gleiche wie bei 110%
- der kürzeste Pfad
  - Abbiegen: 3
  - Länge des Pfades: 12,6503



3.8 Beispiel 8

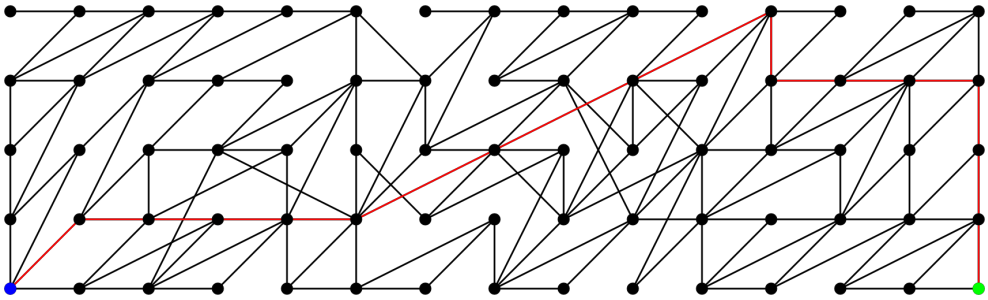
Textdatei: `abbiegen8.txt`
Besonderheit: Straßen kreuzen sich

- 110%
  - Abbiegen: **6**
  - Länge des Pfades: **17,3006**
  - Länge des Pfades prozentual: **101,04%**
  - Punkte: **(0, 0), (1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 1), (5, 1), (6, 2), (8, 3), (9, 1), (10, 1), (11, 1), (12, 1), (13, 1), (14, 1), (14, 0)**

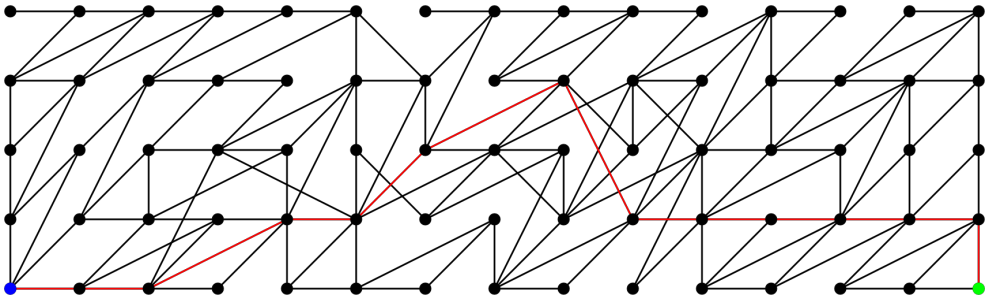


- 115%

  - Abbiegen: **5** (das beste Ergebnis)
  - Länge des Pfades: **19,1224**
  - Länge des Pfades prozentual: **111,681%**
  - Punkte: **(0, 0), (1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 1), (5, 1), (7, 2), (9, 3), (11, 4), (11, 3), (12, 3), (13, 3), (14, 3), (14, 2), (14, 1), (14, 0)**



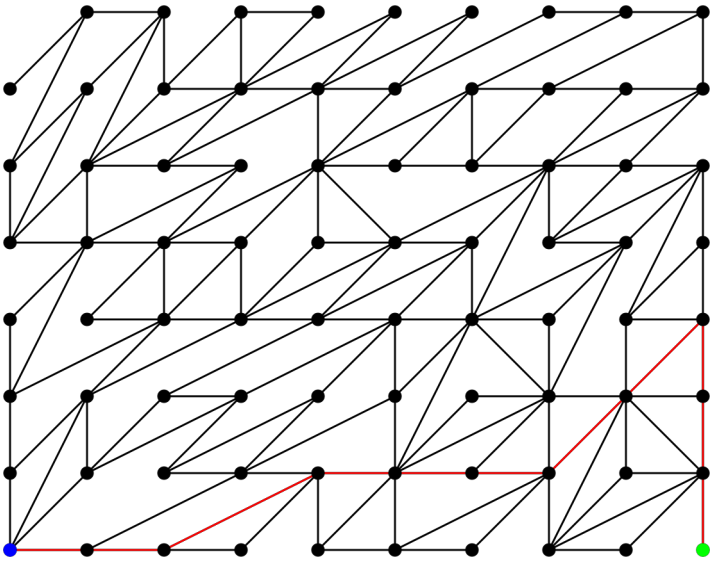
- 130%: das Gleiche wie bei 115%
- der kürzeste Pfad
  - Abbiegen: 7
  - Länge des Pfades: 17,1224



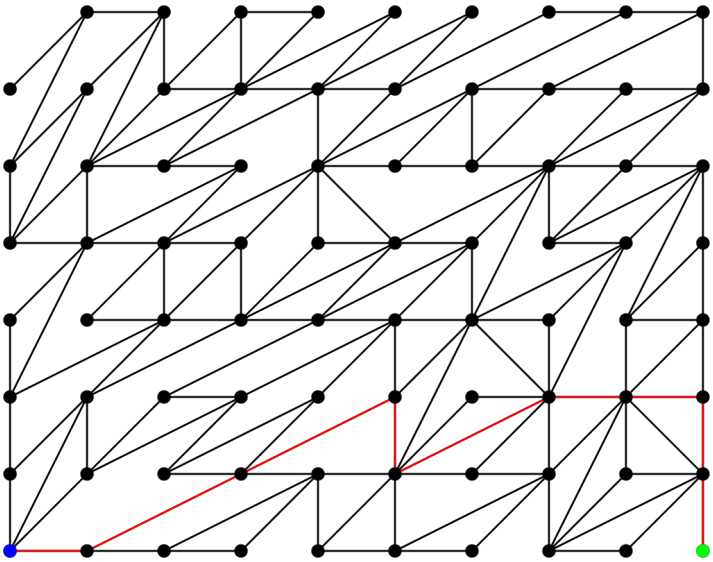
3.9 Beispiel 2 (erweitert)

Textdatei: `abbiegen2.txt`
Besonderheit: Anwendung der Möglichkeit der Wahl der Genauigkeit

- 120% (approximierte Suche)
  - Abbiegen: **4**
  - Länge des Pfades: **13,0645**
  - Länge des Pfades prozentual: **120%** (eigentlich 120,008%)
  - Punkte: **(0, 0), (1, 0), (2, 0), (4, 1), (5, 1), (6, 1), (7, 1), (8, 2), (9, 3), (9, 2), (9, 1), (9, 0)**



- 120% (genaue Suche)
  - Abbiegen: **5**
  - Länge des Pfades: **12,7082**
  - Länge des Pfades prozentual: **116,735%**
  - Punkte: **(0, 0)**, **(1, 0)**, **(3, 1)**, **(5, 2)**, **(5, 1)**, **(7, 2)**, **(8, 2)**, **(9, 2)**, **(9, 1)**, **(9, 0)**



4 Quellcode

Hier füge ich Implementierungen von zwei Methoden bei: den Yen–Algotihmus und den Algorithmus, der die Kanten im Graphen G' (Typ 2) erstellt.
Die Zeilenangaben beziehen sich auf die Zeilen im Pseudocode aus Wikipedia auf Seite 25.

```
1
//ein "naechster" Pfad des Yen-Algorithmus wird
3 //hier bestimmt
Path* generatePath()
5 {
  //An dieser Stelle wurde bereits der kuerzeste Pfad im Graphen gefunden
7 //und wurde in die Menge B (Kandidatenliste) eingefuegt

9 //der erste Pfad aus der Kandidatenliste wird betrachtet [Z.53]
  Path* currPath = *(B.begin());
11 int currPathLen = currPath->getLength();

13 //der aktuelle Pfad wird in die Ergebnissenlisten einfeguegt
  A.pb(currPath);
15
  //der spurNode (Abzweigungsknoten)  gilt als Knoten, ab dem
17 //wir den Pfad veraendern
  Node* spurNode = pathsToSpurNodes.find(currPath)->second;
19
  //der Teilpfad bis zum spurNode
21 vector<Node*> rootPath;
  currPath->subPath(rootPath, spurNode);
23
  //wir beginnen, entsprechende Knoten und Kanten zu entfernen [Z.18-22]
25 for (int i=0; i<A.size()-1; ++i)
  {
27   //jeder fertige Pfad (ausser dem, der wir gerade einfuegten)
    //aus der Liste A wird untersucht, ob er den Teilpfad beinhaltet
29   Path* currAPath = A[i];
    vector<Node*> currSubPathRootPath;
31
    //wir bestimmen den Teilpfad
33   //wenn es nicht geht, setzen wir mit dem naechsten fertigen Pfad fort
    if (!currAPath->subPath(currSubPathRootPath, spurNode)) continue;
35
    //wenn die Laengen der Teilpfade nicht uebereinstimmen,
37   //setzen wir mit dem naechsten fertigen Pfad fort
    if (rootPath.size() != currSubPathRootPath.size()) continue;
39
    //hier wird geprueft,
41   //ob die Pfade dieselben Knoten an allen Stellen beinhalten
    bool same = true;
43   for (int i=0; i<rootPath.size(); ++i)
    {
45     if (rootPath[i] != currSubPathRootPath[i])
      {
47       same = false;
        break;
49     }
    }
51   if (!same) continue;

53   //wir suchen nach dem folgenden Knoten im aktuellen Pfad,
    //um die Kante, die ihn und den Abzweigunsknoten verbindet
55   //danach zu entfernen
    Node* nextNode = currAPath->getNode(rootPath.size()+1);
57   G->removeEdge(mp(spurNode->getID(), nextNode->getID()));
  }
59
  //wir entfernen Kanten und Knoten im aktuellen Pfad [Z. 24f.]
61 for(int i=0; i<currPathLen-1; ++i)
  {
63   G->removeNode(currPath->getNode(i)->getID());
    G->removeEdge(mp(currPath->getNode(i)->getID(), currPath->getNode(i+1)->getID()));
65 }

67 //wir aktualisieren stetig
```

```
  //die Punkte vom Zeilknoten zum spurNode
69 //[Start (s. Ende unten) Z. 28]
   Dijkstra rDijkstra(G);
71 rDijkstra.getReversedTraversal(endNode);

73 //wir koennen nun die entfernten Kanten und Knoten
   //auf dem aktuellen Pfad zurueckstellen
75 bool done = false;
   for(int i = currPathLen-2; i >= 0 && !done; i--)
77 {
     //Zurueckstellung jedes Knotens im aktuellen Pfad
79   Node* currNode = currPath->getNode(i);
     G->restoreNode(currNode->getID());
81
     //wir sollen ueberpruefen, ob wir in der naechten Iteration
83   //aufhoeren sollen, die Kanten und Knoten zurueckzustellen
     if (currNode->getID() == spurNode->getID())
85     done = true;

87   //die Gewichte an den Kanten aus der Menge der outNodes des
     //aktuellen Knotens werden aktualisiert
89   //und es entsteht ein Teilpfad vom aktuellen Knoten
     //bis zum Knoten der bereits einen Vorgaenger hat [Z.28]
91   Path* totalPath = rDijkstra.updateOutDistance(currNode);

93   //wenn ein solcher Pfad entsteht
     if (totalPath != NULL)
95   {
       //die gesamte Anzahl an Abbiegungen im aktuellen Pfad
97     double totalWeight = 0;
       //die inNodes werden um die entfernten Kanten und Knoten aktualisiert
99     rDijkstra.updateInDistance(currNode);

101    //der aktuelle Pfad (currPfad) wird zu spurPath kopiert
       //bis auf den aktuellen Knoten, den wir entfernten
103    vector<Node*> spurPath;
       for (int j=0; j<currPathLen; ++j)
105    {
         Node* n = currPath->getNode(j);
107      if (n->getID() != currNode->getID())
         {
109        totalWeight +=
             G->getRemovedEdgeWeight(currPath->getNode(j),
111            currPath->getNode(j+1));

113        spurPath.pb(n);
         }
115      else
           break;
117    }

119    //totalPath wird am Ende von prePath eingefuegt
       for (int j = 0; j < totalPath->getLength(); ++j)
121      spurPath.pb(totalPath->getNode(j));

123    //Erstellung eines neuen Kandidaten [Ende (s. Start oben) Z.28]
       totalPath = new Path(spurPath, totalWeight+totalPath->getWeight());
125
       //wir stellen sicher, ob es sich genau so
127    //einen Pfad noch nicht in der Kandidatenliste gibt [Z.33f.]
       if (pathsToSpurNodes.find(totalPath) == pathsToSpurNodes.end())
129    {
         B.insert(totalPath);
131      pathsToSpurNodes[totalPath] = currNode;
       }
133  }

135  //Zurueckstellung jeder Kante im aktuellen Pfad [Z.39]
     Node* nextNode = currPath->getNode(i+1);
137  G->restoreEdge(mp(currNode->getID(), nextNode->getID()));

139  //es kann sein, dass das Gewicht an der Kante sich aenderte,
     //muessen wir es entprechend aktualisieren
```

```
141     double edgeWeight = G->getEdgeWeight(currNode, nextNode)
          + rDijkstra.getStartDistance(nextNode);
143
        //Wenn das Gewicht sich veraenderte, muessen
145     //wir die Entfernung, den Vorgaenger und die
        //inNodes vom aktuellen Knoten aktualisieren
147     if (rDijkstra.getStartDistance(currNode) > edgeWeight)
        {
149       rDijkstra.setStartDistance(currNode, edgeWeight);
          rDijkstra.setPreviousNode(currNode, nextNode);
151       rDijkstra.updateInDistance(currNode);
        }
153   }

155   //wir stellen sicher, dass keine
      //Kanten und Knoten in den Vektoren
157   //uebrig blieben [Z.38f]
      G->purgeRemovedEdges();
159   G->purgeRemovedNodes();

161   //der erste Pfad in der Kandidatenliste wird entfernt [Z. 56]
      B.erase(B.begin());
163
      return currPath;
165 }

167
    //Die Funktion aktualisiert die Gewichte (Entfernungen)
169 //der Knoten, die aus dem Knoten n fuehren
    Path* Dijkstra::updateOutDistance(Node* n)
171 {
      //wir stellen das Geiwcht als den maximalen Wert von double ein
173   //Indikator dafuer, dass mindestens eine Entfernung veraendert wurde
      double weight = DBL_MAX;
175
      //wir rufen die outNodes des aktuellen Knotens ab
177   set<Node*>* outNeighbors = new set<Node*>();
      G->getOutNeighbors(n, *outNeighbors);
179
      //wir suchen nach der Entfernung vom Ursprung des aktuellen Knotens
181   map<Node*, double>::iterator it = startToDistance.find(n);
      //wenn es ihn nicht gibt, wird er mit dem maximalen Wert
183   //von double als Entfernung eingefuegt
      if (it == startToDistance.end())
185     it = (startToDistance.insert(mp(n, DBL_MAX))).first;

187   //wir iterieren durch alle Nachbarn, die aus dem aktuellen Knoten fuehren
      for (set<Node*>::const_iterator it2 = outNeighbors->begin(); it2 != outNeighbors->end(); ++it2)
189   {
        //wir stellen die Entfernung des Nachbarns ein
191     //wenn es ihn nicht gibt, wird der maximale Wert von double zugeordnet
        map<Node*, double>::const_iterator it3 = startToDistance.find(*it2);
193     double currDistance = it3 == startToDistance.end() ? DBL_MAX : it3->second;

195     //die aktuelle Entfernung ist um das Gewicht an der Kante
        //zwischen dem aktuellen Nachbarn und dem akuellen Knoten vergroesst
197     currDistance += G->getEdgeWeight(n, *it2);

199     //wir aktualisieren die Entfernung vom Ursprung von n,
        //falls sie kleiner ist
201     if (it->second > currDistance)
        {
203       startToDistance[n] = currDistance;
          previousNode[n] = it3->first;
205       weight = currDistance;
        }
207   }

209   //wenn die Entfernung von n aktualisiert wurde,
      //erstellen wir einen neuen Pfad
211   Path* p = NULL;
      if (weight < DBL_MAX)
213   {
```

```
    vector<Node*> v;

    //wir fangen mit dem aktuellen Knoten an
    v.pb(n);

    map<Node*, Node*>::const_iterator it = previousNode.find(n);

    //alle Knoten, die einen Vorgaenger haben, werden
    //in den neuen Pfad eingefuegt
    while(it != previousNode.end())
    {
      v.pb(it->second);
      it = previousNode.find(it->second);
    }

    //weight gilt hier als die Gesamtentfernung des Pfades
    p = new Path(v, weight);
  }
  return p;
}

//Die Funktion aktualisiert die Gewichte (Entfernungen)
//der Knoten, die zum Knoten n fuehren
void Dijkstra::updateInDistance(Node* n)
{
  vector<Node*> v;
  v.pb(n);

  while(!v.empty())
  {
    Node* currNode = *(v.begin());
    v.erase(v.begin());

    //die aktuelle Entfernung ist die Entfernung des aktuellen Knotens
    double currDistance = startToDistance[currNode];

    //wir rufen die inNodes des aktuellen Knotens ab
    set<Node*> inNeighbors;
    G->getInNeighbors(currNode, inNeighbors);

    //wir iterieren durch alle Nachbarn, die zum aktuellen Knoten fuehren
    for (set<Node*>::const_iterator it = inNeighbors.begin(); it != inNeighbors.end(); ++it)
    {
      //wir stellen die Entfernung des Nachbarns ein
      //wenn es ihn nicht gibt, wird der maximale Wert von double zugeordnet
      map<Node*, double>::const_iterator it1 = startToDistance.find(*it);
      double neighborDistance = startToDistance.end() == it1 ? DBL_MAX : it1->second;

      //wir aktualisieren die Gesamtentfernung, falls sie kleiner ist
      //als die Entfernung des Nachbarns
      double updatedDistance = currDistance + G->getEdgeWeight(*it, currNode);
      if (neighborDistance > updatedDistance)
      {
        startToDistance[*it] = updatedDistance;
        previousNode[*it] = currNode;

        //wir fuegen den Nachbarn in den Vektor ein,
        //um auf ihn danach Veraenderungen durchzufuehren
        v.pb(*it);
      }
    }
  }
}
```

abbiegen.m

5 Pseudocode aus Wikipedia

Der mehrmals zitierte Pseudocode aus dem englischen Wikipedia-Artikel über den Yen-Algorithmus.
Quelle: `https://en.wikipedia.org/wiki/Yen%27s_algorithm#Pseudocode`, Zugang 15.03.2020

```
function YenKSP(Graph, source, sink, K):
    // Determine the shortest path from the source to the sink.
    A[0] = Dijkstra(Graph, source, sink);
    // Initialize the set to store the potential kth shortest path.
    B = [];

    for k from 1 to K:
        // The spur node ranges from the first node to the
        // next to last node in the previous k-shortest path.
        for i from 0 to size(A[k - 1]) - 2:

            // Spur node is retrieved from the previous k-shortest path, k - 1.
            spurNode = A[k-1].node(i);
            // The sequence of nodes from the source to the
            // spur node of the previous k-shortest path.
            rootPath = A[k-1].nodes(0, i);

            for each path p in A:
                if rootPath == p.nodes(0, i):
                    // Remove the links that are part of the previous
                    // shortest paths which share the same root path.
                    remove p.edge(i,i + 1) from Graph;

            for each node rootPathNode in rootPath:
                remove rootPathNode from Graph;

            // Calculate the spur path from the spur node to the sink.
            spurPath = Dijkstra(Graph, spurNode, sink);

            // Entire path is made up of the root path and spur path.
            totalPath = rootPath + spurPath;
            // Add the potential k-shortest path to the heap.
            if (totalPath not in B):
                B.append(totalPath);

            // Add back the edges and nodes that were removed
            // from the graph.
            restore edges to Graph;
            restore nodes in rootPath to Graph;

        if B is empty:
            // This handles the case of there being no spur paths,
            // or no spur paths left.
            // This could happen if the spur paths have already
            // been exhausted (added to A),
            // or there are no spur paths at all - such as when both
            // the source and sink vertices
            // lie along a "dead end".
            break;
        // Sort the potential k-shortest paths by cost.
        B.sort();
        // Add the lowest cost path becomes the k-shortest path.
        A[k] = B[0];
        // In fact we should rather use shift since we are
        // removing the first element
        B.pop();

    return A
```