Aufgabe 2: Spießgesellen

Teilnahme-Id: 55628

Bearbeiter dieser Aufgabe:
Michal Boron

April 2021

Inhaltsverzeichnis

1 Lösungsidee

1.1 Aufgabenstellung

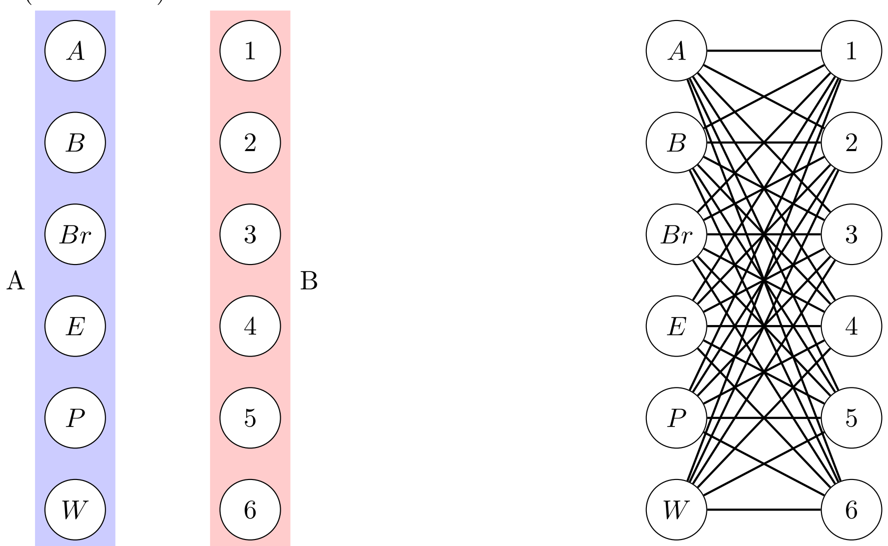
Gegeben sind eine Menge von n *Obstsorten* A und eine Menge von n ganzen Zahlen $B = \{1, 2, ..., n\}$, die für die Indizes der Obstsorten stehen. Gegeben sind auch m *Spießkombinationen*, wobei jede i–te Spießkombination aus einer Menge von Obstsorten $F_i \subseteq A$ und einer Menge der Zahlen $Z_i \subseteq B$ besteht. Für jedes i besteht die Menge Z_i nur aus den in B enthaltenen Indizes, die den Obstsorten in F_i entsprechen, deshalb haben auch die beiden Mengen F_i und Z_i dieselbe Anzahl an Elementen. Außerdem gegeben ist auch eine *Wunschliste* $W \subseteq A$.
Die Aufgabe ist, zu entscheiden, ob die Menge der Indizes der in W gegebenen Obstsorten $W' \subseteq B$ anhand der m Spießkombinationen ein(ein?)deutig bestimmt werden kann. Falls ja, soll sie auch ausgegebn werden.

1.2 Graph

TODO:
Name ändern
Bild

Man kann die beiden Mengen A und B zu Knoten eines bipartiten Graphen $G = (A \cup B, E)$ umwandeln. Die Menge der Kanten E wird im Folgenden festgelegt. Man stellt den Graphen als eine Adjazenzmatrix M der Größe $n \times n$ dar. Als M_i bezeichne ich die Liste der Länge n, die die Beziehungen des Knotens $i \in A$ zu jedem Knoten $j \in B$ als 1 (Kante) 0 (keine Kante) darstellt.
Nach der Aufgabenstellung gehört jeder Obstsorte aus A genau ein Index aus B. Dennoch man kann am Anfang keiner Obsorte einen Index zuweisen. Deshalb verbinden wir zunächst jeden Knoten aus A mit jedem Knoten aus B durch eine Kante. Am Anfang ist M dementsprechend voll mit 1–en. Bei der Erstellung der Adjazenzmatrix können wir den Vorteil nutzen, dass die jeweilige Liste von Nachbarn des jeden Knotens $x \in A$ nur aus 0–en und 1-en besteht, indem wir diese Liste als Bitmasken darstellen (mehr dazu in der Umsetzung).

Abbildung 1: Beide Abbildungen stellen den Graphen für das Beispiel aus der Aufgabenstellung dar (s. auch 3.1).



(a) Die entsprechenden Mengen des Graphen

(b) Der Graph am Anfang

Jede i–te *Spießkombinationen* bringt uns Informationen über die Obstsorten in F_i. Als $a \rightsquigarrow b$ bezeichnen wir, dass a den Index b haben kann. Wir können Folgendes festellen.

Lemma 1. *Für jede i–te Spießkombination mit $F_i \subseteq A$ und $Z_i \subseteq B$ gilt, dass $\forall x \in F_i, \forall y \in Z_i : x \rightsquigarrow y$. Es gilt gleichzeitig, dass $\nexists p \in F_i, \forall q \in B \setminus Z_i : p \rightsquigarrow q$*

TODO: Beweis

Beweis. □

Nach Lemma 1 dürfen wir alle Kanten, die aus jedem Knoten $x \in F_i$ zu einem Knoten $y \in B \setminus Z_i$ führen, aus E entfernen und nur die Kanten lassen, die zu allen $z \in Z_i$ führen. Da wir Bitmasken für die Darstellung jeder Liste M_i ($i \in A$) verwenden, können wir die Laufzeit bei der Analyse der jeweiligen Spießkombination optimieren, weil ich für die Operation des Entfernens Logikgatter verwende.

1.3 Logik

TODO: Veranschauung

Betrachten wir eine Spießkombination s, die aus den Mengen $F_s \subseteq A$ und $Z_s \subseteq B$ besteht.
Wir erstellen 3 Bitmasken bf, bn und br jeweils der Länge n. Die Bitmaske bf besteht aus n 1–en. In der Maske bn stehen die 1–Bits an allen Stellen, die den Indizes in Z_s entsprechen. Die Bitmaske br wird auf folgende Weise definiert:

$$br := \neg(bn) \wedge bf.$$

So können wir auf allen Listen M_i, wobei $i \in F_s$, die AND–Operation mit der Maske bn durchführen:

$$M_i := M_i \wedge bn.$$

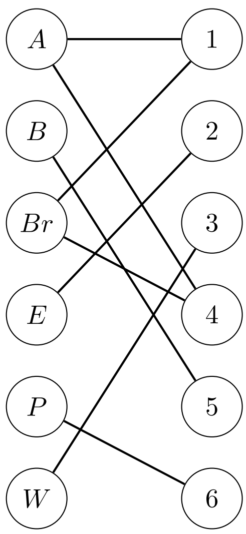
Analog führen wir die AND–Operation mit der Maske br auf allen Listen M_j, wobei $j \in A \setminus F_s$, durch:

$$M_j := M_j \wedge br.$$

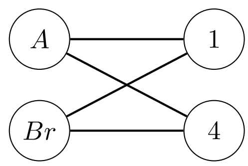
Was die beschriebenen Operationen verursachen, erläutere ich anhand der folgenden Fallunterscheidung.

1. Falls es sich um einen Knoten $x \in F_s$ handelt.
   a) Falls ein Knoten y zu Z_s gehört, aber an der Stelle y in M_x 0 steht, ergibt sich laut Lemma 1 ein Widerspruch. [MB: No i co z tego?? Dopisać]
   b) Falls ein Knoten y zu Z_s gehört und an der Stelle y in M_x 1 steht, bleibt es auch 1.
   c) Falls ein Knoten y nicht zu Z_s gehört und an der Stelle y in M_x 0 steht, bleibt es auch 0.
   d) Falls ein Knoten y nicht zu Z_s gehört, aber an der Stelle y in M_x 1 steht, wird die Stelle y in M_x zu 0.
2. Falls es sich um einen Knoten $x \in A \setminus F_s$ handelt.
   a) Falls ein Knoten y nicht zu Z_s gehört und an der Stelle y in M_x 0 steht, ergibt sich laut Lemma 1 ein Widerspruch.
   b) Falls ein Knoten y nicht zu Z_s gehört, aber an der Stelle y in M_x 1 steht, wird die Stelle y in M_x zu 0.
   c) Falls ein Knoten y zu Z_s gehört, aber an der Stelle y in M_x 1
   d) Falls ein Knoten y zu Z_s gehört, aber an der Stelle y in M_x 0

1.4 Komponenten



(a) Der Graph nach der Analyse der allen Spießkombinationen



(b) Die ürbige Zusammenhangskomponente

1.5 Laufzeit

1.6 Prüfung auf Korrektheit der Eingabe

2 Umsetzung

3 Beispiele

3.1 Beispiel 0 (Aufgabenstellung)

Textdatei: `spiesse0.txt`

Apfel, Brombeere, Weintraube

1, 3, 4

3.2 Beispiel 1 (BWINF)

Textdatei: `spiesse1.txt`

Clementine, Erdbeere, Grapefruit, Himbeere, Johannisbeere

1, 2, 4, 5, 7

3.3 Beispiel 2 (BWINF)

Textdatei: `spiesse2.txt`

Apfel, Banane, Clementine, Himbeere, Kiwi, Litschi

1, 5, 6, 7, 10, 11

3.4 Beispiel 3 (BWINF)

Textdatei: `spiesse3.txt`

Clementine, Erdbeere, Feige, Himbeere, Ingwer, Kiwi, Litschi

unlösbar: Litschi gehört zur Komponente mit Grapefruit. Dabei ist Grapefruit kein Wunsch.

3.5 Beispiel 4 (BWINF)

Textdatei: `spiesse4.txt`

Apfel, Feige, Grapefruit, Ingwer, Kiwi, Nektarine, Orange, Pflaume

2, 6, 7, 8, 9, 12, 13, 14

3.6 Beispiel 5 (BWINF)

Textdatei: `spiesse5.txt`

Apfel, Banane, Clementine, Dattel, Grapefruit, Himbeere, Mango, Nektarine, Orange, Pflaume, Quitte, Sauerkirsche, Tamarinde

1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 12, 14, 16, 19, 20

3.7 Beispiel 6 (BWINF)

Textdatei: `spiesse6.txt`

Clementine, Erdbeere, Himbeere, Orange, Quitte, Rosine, Ugli, Vogelbeere

4, 6, 7, 10, 11, 15, 18, 20

3.8 Beispiel 7 (BWINF)

Textdatei: `spiesse7.txt`

```
Apfel, Clementine, Dattel, Grapefruit, Mango, Sauerkirsche, Tamarinde, Ugli, Vogelbeere, Xenia,
Yuzu, Zitrone
```

unlösbar: Apfel, Grapefruit und Xenia gehören zur Komponente mit Litschi. Dabei ist Litschi kein Wunsch. Ugli gehört zur Komponente mit Banane. Dabei ist Banane kein Wunsch.

4 Quellcode

./tex/spiesse.m