Aufgabe 2: Spießgesellen

Teilnahme-Id: 55628

Bearbeiter dieser Aufgabe:
Michal Boron

April 2021

Inhaltsverzeichnis

1 Lösungsidee

1.1 Formulierung des Problems

Axiom 1. *Jeder **Obstsorte** wird genau ein einzigartiger natürlicher Index zugewiesen.*
Man schreibt: $o(x, i)$ — eine Obstsorte x besitzt einen Index i.

Gegeben sind eine Menge von n Obstsorten A und eine Menge von n ganzen Zahlen $B = \{1, 2, ..., n\}$, zu der die Indizes der Obstsorten aus A gehören.

Definition 1 (Spießkombination)**.** *Als eine **Spießkombination** $K = (F, Z)$ bezeichnet man eine Verknüpfung von zwei Mengen $F \subseteq A$ und Z, wobei $Z = \{i \in B \mid \forall x \in F : o(x, i)\}$.*

Gegeben sind auch m Spießkombinationen, wobei jede i–te Spießkombination aus einer Menge von Obstsorten $F_i \subseteq A$ und einer Menge der Zahlen $Z_i \subseteq B$ besteht. Nach der Definition 1 besteht die Menge Z_i nur aus den in B enthaltenen Indizes, die zu den Obstsorten in F_i gehören, deshalb sind die beiden Mengen F_i und Z_i auch gleichmächtig.

Außerdem gegeben ist auch eine ***Wunschliste*** $W \subseteq A$.

Die Aufgabe ist ein Entscheidungsproblem. Es soll entschieden werden, ob die Menge der Indizes der in W enthaltenen Obstsorten $W' \subseteq B$ anhand der m Spießkombinationen eindeutig bestimmt werden kann. Falls ja, soll sie auch ausgegebn werden.

In den folgenden Überlegungen wird angenommen, dass das Axiom 1 für alle Obstsorten in der Eingabe gilt. Es ist aber möglich, dass die Spießkombination in einer Eingabe diesem Axiom nicht folgen, das heißt, es an einer Stelle einen Widersprcuh gibt. Laut der Aufgabenstellung ist ein solcher Fall nicht ausgeschlossen. Um diesen Fall zu verhindern, muss man die Korrektheit der Eingabe überprüfen. Mehr dazu folgt im Teil 1.5.

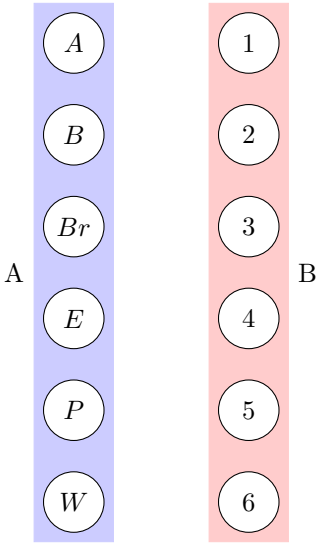
1.2 Bipartiter Graph

Man kann die beiden Mengen A und B zu Knoten eines bipartiten Graphen $G = (A \cup B = V, E)$ umwandeln. Die Menge der Kanten E wird im Folgenden festgelegt. Man stellt den Graphen als eine Adjazenzmatrix M der Größe $n \times n$ dar. Als M_i bezeichnet wird die Liste der Länge n, die die Beziehungen eines Knotens $i \in A$ zu jedem Knoten $j \in B$ als 1 (Kante) oder 0 (keine Kante) darstellt. Als $M_{i,j}$ bezeichnet wird die j–te Stelle in der i–ten Liste der Matrix.
Nach Axiom 1 gehört jeder Obstsorte aus A genau ein Index aus B. Dennoch man kann am Anfang keiner Obsorte einen Index zuweisen. Deshalb wird zunächst jeder Knoten aus A mit jedem Knoten aus B durch eine Kante verbunden:

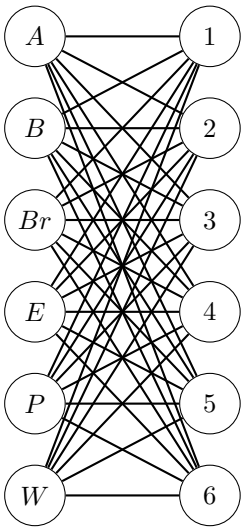
$$E = A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ und } y \in B\}.$$

Am Anfang ist M dementsprechend voll mit 1–en. Bei der Erstellung der Adjazenzmatrix kann man den Vorteil nutzen, dass die jeweilige Liste von Nachbarn des jeden Knotens $x \in A$ nur aus 0–en und 1-en besteht, indem diese Liste als Bitmasken dargestellt werden kann (mehr dazu in der Umsetzung).

Abbildung 1: Beide Abbildungen stellen den Graphen für das Beispiel aus der Aufgabenstellung dar. Die Buchstaben stehen für die entsprechenden Obstsorten aus diesem Beispiel (s. auch 3.1).



(a) Die entsprechenden Mengen des Graphen



(b) Der Graph am Anfang

Jede i–te Spießkombination bringt mit sich Informationen über die Obstsorten in F_i. Man kann Folgendes festellen.

Lemma 1. *Sei $K = (F, Z)$ eine Spießkombination. Für jede Obstsorte $o(x, i)$, wobei $x \in F$, gilt:*

(i) $i \in Z$,

(ii) $i \notin B \setminus Z$.

Deshalb darf man alle Kanten, die aus jedem Knoten $x \in F$ zu jedem Knoten $y \in B \setminus Z$ führen, aus E entfernen.

Beweis. Nach Definition 1 gilt (i). Nach Axiom 1 besitzt jede Obstsorte einen einzigartigen Index i, deshalb kann i nicht gleichzeitig zu Z und $B \setminus Z$ gehören (ii).
Die Folgerung gilt, da jede Kante zwischen zwei beliebigen Knoten $x \in A$ und $y \in B$ die Möglichkeit darstellt, dass x einen Index y besitzen kann. Wenn eine Teilmenge von A und B in Form einer Spießkombination augegliedert wird, schrumpft die Anzahl an möglichen Zuweisungen zwischen jedem x und jedem y. □

Aus Lemma 1 ergibt sich direkt auch eine andere Beobachtung.

Korollar 1. *Sei $C = (L_c \cup R_c, E_c)$ eine Zusammenhangskomponente in G. Sei $K = (F, Z)$ eine Spießkombiantion. Falls $F \subseteq L_c$ gilt, dann gilt für jede Obstsorte $o(x, i)$, wobei $x \in F$:*

(i) $i \in Z$,

(ii) $i \notin R_c \setminus Z$.

Deshalb werden alle Kanten, die aus jedem Knoten $x \in F$ zu jedem Knoten $y \in R_c \setminus Z$ führen, aus E entfernt.

Da Bitmasken für die Darstellung jeder Liste M_i ($i \in A$) verwendet werden, kann die Laufzeit bei der Analyse der jeweiligen Spießkombination optimiert werden (mehr dazu im Teil 1.6), weil man für die Operation des Entfernens Logikgatter verwenden kann.

1.3 Logik

Betrachten wir eine Spießkombination $s = (F_s, Z_s)$. Wir erstellen 3 Bitmasken bf, bn und br jeweils der Länge n. Die Bitmaske bf besteht aus n 1–en. In der Maske bn stehen die 1–Bits an allen Stellen, die den Indizes in Z_s entsprechen. Die Bitmaske br wird auf folgende Weise definiert:

$$br := \neg(bn) \wedge bf.$$

So können wir auf allen Listen M_i, wobei $i \in F_s$, die AND–Operation mit der Maske bn durchführen:

$$M_i := M_i \wedge bn.$$

Analog führen wir die AND–Operation mit der Maske br auf allen Listen M_j, wobei $j \in A \setminus F_s$, durch:

$$M_j := M_j \wedge br.$$

Abbildung 3: Beide Abbildungen stellen die Adjazenzmatrix für das Beispiel aus der Aufgabenstellung dar. Die Buchstaben in der ersten Spalte stehen für die entsprechenden Obstsorten und die Zahlen in der ersten Zeile stehen für die Indizes aus demselben Beispiel (s. auch 3.1).
Auf der Abb. 4b stehen bn und br für die entsprechenden Bitmasken.

Spießkombination: F = {Banane, Pflaume, Weintraube}
Z = {3, 5, 6}

	6	5	4	3	2	1
bn	1	1	0	1	0	0
br	0	0	1	0	1	1

	6	5	4	3	2	1
A	0	1	1	0	0	1
B	0	1	1	0	0	1
Br	0	1	1	0	0	1
E	1	0	0	1	1	0
P	1	0	0	1	1	0
W	1	0	0	1	1	0

(a) M vor der neuen Spießkombination

	6	5	4	3	2	1
A	0	0	1	0	0	1
B	0	1	0	0	0	0
Br	0	0	1	0	0	1
E	0	0	0	0	1	0
P	1	0	0	1	0	0
W	1	0	0	1	0	0

(b) M nach der Verarbeitung der beschriebenen Spießkombination.

Auf der obigen Abbildung werden blau und rot die entsprechenden Listen gekennzeichnet, auf denen die AND–Operation mit der entsprechenden Bitmaske durchgefüht wurde. Rot werden die Bits gekennzeichnet, die sich nach der Verarbeitung der Spießkombination veränderten.

Was die beschriebenen Operationen verursachen, wird anhand der folgenden Fallunterscheidung erläutert.

1. Falls es sich um einen Knoten $x \in F_s$ handelt, betrachten wir dazu die entsprechende Liste M_x und einen Knoten $y \in B$.
   a) Falls der Knoten y zu Z_s gehört, aber an der Stelle $M_{x,y}$ 0 steht, bleibt es auch 0.
   b) Falls der Knoten y zu Z_s gehört und an der Stelle $M_{x,y}$ 1 steht, bleibt es auch 1.
   c) Falls der Knoten y zu Z_s nicht gehört und an der Stelle $M_{x,y}$ 0 steht, bleibt es auch 0.
   d) Falls der Knoten y zu Z_s nicht gehört, aber an der Stelle $M_{x,y}$ 1 steht, wird die Stelle $M_{x,y}$ zu 0.
2. Falls es sich um einen Knoten $x \in A \setminus F_s$ handelt, betrachten wir dazu die entsprechende Liste M_x und einen Knoten $y \in B$.
   a) Falls der Knoten y zu Z_s nicht gehört, aber an der Stelle $M_{x,y}$ 0 steht, bleibt es auch 0.
   b) Falls der Knoten y zu nicht Z_s gehört und an der Stelle $M_{x,y}$ 1 steht, bleibt es auch 1.
   c) Falls der Knoten y zu Z_s gehört, aber an der Stelle $M_{x,y}$ 1, wird die Stelle $M_{x,y}$ zu 0.
   d) Falls der Knoten y zu Z_s gehört und an der Stelle $M_{x,y}$ 0 steht, bleibt es auch 0.

1.4 Zusammenhangskomponenten

Nach der Verarbeitung der allen m Spießkombinationen verfügen wir über den Graphen G, in dem viele Kanten in E entfernet wurden. Auf diese Weise können wir schon anfangen, die Indizes der Obstsorten aus W festzulegen. Definieren wir zunächst, was generell ein **Matching** ist.

Definition 2 (Matching)**.** *Sei $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ ein ungerichteter Graph. Als ein **Matching** bezeichnen wir eine Teilmenge $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{E}$, sodass für alle $v \in \mathcal{V}$ gilt, dass höchstens eine Kante aus $\mathcal{S}$ inzident zu v ist. Wir bezeichnen einen Knoten $v \in \mathcal{V}$ als in $\mathcal{S}$ **gematcht**, wenn eine Kante aus $\mathcal{S}$ inzident zu v ist.* [1, S. 732].

Zwischen verschiedenen Typen des Matchings unterscheidet man auch das **perfekte Matching**.

Definition 3 (Perfektes Matching)**.** *Sei $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ ein ungerichteter Graph. Ein **perfektes Matching** ist so ein Matching, in dem alle Knoten aus $\mathcal{V}$ gematcht sind.*[1, S. 735, Übung]

Um die Aufgabe in der Form zu lösen, eignet sich gut der **Satz von Hall**, der als ein Ausgangspunkt der ganzen Matching–Theorie gilt. Um sich dieses Satzes zu bedienen, muss man noch den Begriff der **Nachbarschaft** einführen.

Definition 4 (Nachbarschaft)**.** *Sei $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ ein ungerichteter Graph. Für alle $X \subseteq \mathcal{V}$ definieren wir die **Nachbarschaft** von X als $N(X) = \{y \in \mathcal{V} \mid \forall x \in X : (x, y) \in \mathcal{E}\}$.*[1, S. 735, Übung]

Satz 1 (Satz von Hall)**.** *Sei $\mathcal{G} = (\mathcal{L} \cup \mathcal{R}, \mathcal{E})$ ein bipartiter, ungerichteter Graph. Es existiert ein perfektes Matching genau dann, wenn es für alle Teilmengen $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{L}$ gilt: $|\mathcal{K}| \leqslant |N(\mathcal{K})|$.*[1, S. 736, Übung]

Beweis. Auf den Beweis verzichte ich. Ein Beweis ist beispielsweise hier [1] zu finden. □

Wir können Folgendes feststellen.

Lemma 2. *Sei $C = (V_c, E_c)$ eine beliebige Zusammenhangskomponente in G. Dann bildet C nach Verarbeitung jeder k–ten Spießkombination selbt einen vollständigen, bipartiten Graphen.*

Beweis.

TODO: check proof and lemma

Diese Aussage kann durch die vollständige Induktion für jedes $k \in \mathbb{N}$ bewiesen werden.

Induktionsanfang: Die beiden Mengen A und B sind gleichmächtig und ganz am Anfang ist G vollständig. Sei die erste Spießkombination $K_1 = (F_1, Z_1)$, wobei $F_1 \neq A$. (Falls $F_1 = A$, dann gilt die Aussage sofort für $k = 1$.) Nach der Verarbeitung von K_1 entstehen zwei Zusammenhangskomponenten:

[1] Anup Rao. Lecture 6 Hall's Theorem. October 17, 2011. University of Washington. [Zugang 21.01.2021] https://homes.cs.washington.edu/~anuprao/pubs/CSE599sExtremal/lecture6.pdf

$C_1 \cup C_2 = G$, wobei o.B.d.A $C_1 = F \cup Z$. Dann sind $C_1 \cap A$ und $C_1 \cap B$ nach Definition 1 auch gleichmächtig. Ebenfalls sind dann $C_2 \cap A$ und $C_2 \cap B$ gleichmächtig. Nach 1 gilt, dass alle Kanten zwischen C_1 und C_2 aus E entfernt wurden, aber alle innerhalb von C_1 und innerhalb von C_2 beibehalten wurden. Dies bedeutet, dass die Komponenten C_1 und C_2 selbst vollständige, bipartite Graphen sind.
Damit ist die Aussage für $k = 1$ bewiesen und der Induktionsanfang erledigt.

Induktionsschritt: Es gelte die Aussage, also die **Induktionsannahme**, für $k \in \mathbb{N}$, d.h., es gelte, dass jede Zusammenhangskomponente in G nach Verarbeitung von k Spießkombinationen selbst einen vollständigen, bipartiten Graphen bildet.

Zu zeigen ist die Aussage für $k+1$, also, dass jede Zusammenhangskomponente in G nach Verarbeitung von $k+1$ Spießkombinationen selbst einen vollständigen, bipartiten Graphen bildet.

Sei $K_i = (F_i, Z_i)$ die $k+1$–te Spießkombination. Zu untersuchen ist die folgende Fallunterscheidung:

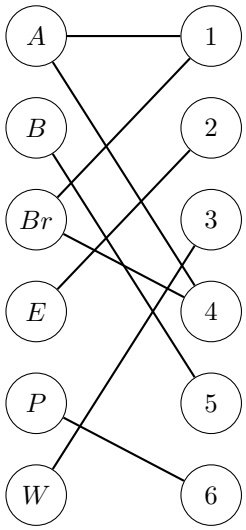
(i) Sei $D = (V_D, E_D)$ eine Zusammenhangskomponente in G. Sei $F_i \cup Z_i = V_D$. Da alle Knoten der Spießkombination sich mit allen Knoten von D decken, können, nach Korollar 1, keine Kanten aus E entfernt werden, deshalb entstet keine neue Zusammenhangskomponente, also ist jede Zusammenhangskomponente nach der Induktionsannahme ein vollständiger, bipartiter Graph.

(ii) Sei $D = (V_D, E_D)$ eine Zusammenhangskomponente in G. Sei $F_i \cup Z_i \subsetneq V_D \wedge (F_i \cup Z_i) \not\subset (A \cup B)$, also $F_i \cup Z_i$ gehört nur zu einer Zusammenhangskomponente in G. D ist laut Induktionsannahme selbt ein vollständiger, bipartiter Graph. Nach Korollar 1 werden alle Kanten zwischen allen $x \in F_i$ und allen $y \in V_D \cap Z_i$ entfernt. So entstehen zwei neue Zusammenhangskomponenten: $C_1 = F_i \cup Z_i$ und $C_2 = V_D \setminus (F_i \cup Z_i)$, die ebenfalls selbt vollständige, bipartite Grpahen sind. Jede andere Zusammenhangskomponente in G ist nach der Induktionsannahme ein vollständiger, bipartiter Graph.

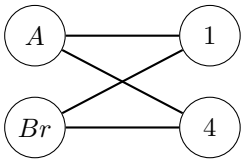
(iii) Sei $1 \leqslant p \leqslant n$ beliebig, aber fest. Seien $C_1, C_2, ..., C_p$ untereinander unterschiedliche Zusammnhangskomponenten in G. Gehöre $(F_i \cup Z_i)$ zu mehreren Komponenten $C_p, ..., C_q$. Dann gilt für jede Zusammenhangskomponente C_i entweder (i) oder (ii), abhängig davon, ob C_i vollständig zu $F_i \cup Z_i$ gehört oder nur zum Teil. Das bedeutet, entweder entsteht keine neue Zusammenhangskomponente (i) oder C_i wird in zwei neue Zusammenhangskomponenten gespalten (ii).

Da alle mögliche untersucht wurden, ist der Induktionsschritt vollzogen und die Behauptung gilt für jedes $k \in \mathbb{N}$. □

Abbildung 5: Abbgebildet ist das Beispiel aus der Aufgabenstellung nach der Verarbeitung der allen m Spießkombinationen.



(a) Der Graph nach der Verarbeitung der allen Spießkombinationen



(b) Die ürbige Zusammenhangskomponente mit mehr als 2 Knoten

Lemma 3. *Sei $C = (V_c, E_c)$ eine Zusammenhangskomponente in G. Dann existiert immer ein perfektes Matching zu C.*

Beweis.
TODO: check details, fomulate things differently

Nach Lemma 2 ist jede Zusammenhangskomponente ein vollständiger, bipartiter Graph. Nach Satz von Hall existiert ein perfektes Matching, wenn für alle Teilmengen $K \subseteq A \cap V_c$ gilt: $|K| \leqslant |N(K)|$. Die obere Behauptung kann für beliebig größe Mächtigkeiten $|K| = k \in \mathbb{N}$ durch die vollständige Induktion bewiesen werden.

Induktionsanfang: Für $k = 1$ hat der einzelne Knoten $x \in K \subseteq A \cap V_c$ die Kardinalität $\Delta(x) = 1$. Deshalb gilt: $|K| = 1 \leqslant |N(x)| = 1$. Damit stimmt die Behauptung für $k = 1$ und der Induktionsanfang ist erledigt.

Induktionsschritt: Es gelte die Aussage für ein $k \in \mathbb{N}$, also für eine Teilemenge $K \subseteq A \cap V_c$, die aus k Knoten besteht und in der jeder Knoten $x \in K$ die Kardinalität $\Delta(x) = k$ hat.
Es gelte also: $|K| \leqslant |N(K)|$.
Zu zeigen ist die Aussage für $k + 1$, also für eine Teilmenge $K' \subseteq A \cap V_c$ der Mächtigkeit $|K'| = k + 1$:

$$|K'| \leqslant |N(K')|.$$

Wir verifizieren:
Jeder Knoten in C hat den Grad $k + 1$, also: $|K'| = k + 1 \leqslant |N(K')| = (k + 1)^2 = k^2 + 2k + 1$.
Folglich stimmt die Behauptung für $k + 1$.

Der Induktionsschritt ist damit vollzogen und es wurde bewiesen, dass die Behauptung für beliebige Mächtigkeit von K gilt. Dadurch wurde auch bewiesen, dass es in einer Zusammenhangskomponente in G immer ein perfektes Matching gibt. □

Nach der Verarbeitung der allen Spießkombinationen entsteht ein Graph mit vielen Zusammenhangskomponenten (s. Abb. 5). An dieser Stelle muss man noch die Wuschnliste W untersuchen, um die entsprechende Menge W' zu bestimmen. Dazu muss man die folgenden zwei Beobachtungen betrachten.

Lemma 4. *Sei $C = (L_c \cup R_c, E_c)$ eine Zusammenhangskomponente in G. Wenn gilt: $\forall x \in L_c : x \in W$, dann werden alle $y \in R_c$ in W' hinzugefügt.*

Beweis. Nach Axiom 1 besitzt jede Obstsorte genau einen einzigartigen Index. Die Zusammenhangskomponente C beschreibt nach Lemmata 2 und 3, dass jede Obstsorte $p \in L_c$ jeden Index $q \in R_c$ haben kann, weil C ein vollständiger, bipartiter Graph ist und ein perfektes Matching stets existiert.
Dadurch, dass $\forall x \in L_c : x \in W$ gilt, ist ohne Bedeutung, welchen Index die jeweilige Obstsorte besitzt, da die Lösung des Problems eine Menge W' mit den Indizes der Obstsorten aus W sein soll.
Dadurch, dass $L_c \subseteq W$ gilt, gilt auch: $R_c \subseteq W'$. □

Lemma 5. *Sei $C = (L_c \cup R_c, E_c)$ eine Zusammenhangskomponente in G. Wenn gilt: $\exists x \in L_c : x \notin W$ und $\exists y \in L_c : y \in W$, dann kann die Menge W' nicht eindeutig festgelegt werden.*

Beweis. Nach Axiom 1 besitzt jede Obstsorte genau einen einzigartigen Index. Die Zusammenhangskomponente C beschreibt nach Lemmata 2 und 3, dass jede Obstsorte $p \in L_c$ jeden Index $q \in R_c$ haben kann, weil C ein vollständiger, bipartiter Graph ist und ein perfektes Matching stets existiert.
Angenommen, $\exists r \in L_c : r \notin W$. Dann ist es unmöglich, festzustellen, welcher Index aus R_c der Obstsorte r gehört. Also ist es auch unmöglich, festzustellen, welche Indizes in W' hinzugefügt werden sollen. Deshalb ist es unmöglich (unabhängig von allen anderen Zusammenhangskomponenten des Graphen G), eine eindeutige Menge der Indizes der gewünschten Obstsorten festzulegen. Dadurch gibt es keine eindeutige Lösung zu diesem Problem für diese Eingabe. □

Direkt aus Lemma 4 ergibt sich das folgende Korollar. Man bedient sich dessen und des Lemmas 5, um das ganze Problem zu lösen, also ob, die Menge W' eindeutig bestimmt werden kann.

Korollar 2. *Seien $C_1 = (L_1 \cup R_1, E_1), ..., C_k = (L_k \cup R_k, E_k)$ alle Zusammenhangskomponenten in G, für jede i–te von denen gilt: $\exists x \in L_i : x \in W$. Falls für jede i–te von diesen Komponenten gilt: $L_i \subseteq W$, dann kann W' eindeutig und vollständig bestimmt werden.*

Man stellt fest, dass man die Menge W untersuchen kann und wenn ein $x \in W$ in G die Kardinalität $\Delta(x) = 1$ besitzt, kann der einzelne Nachbar von x in W' hinzugefügt werden (Lemma 4). Im sonstigen Fall, also wenn $\Delta(x) > 1$, muss die ganze Zusammenhangskomponente $C_x = (L_x \cup R_c, E_x)$, zu der x gehört, untersucht werden, ob gilt: $\forall p \in L_x : p \in W$ (Lemmata 4 und 5).

Man erstellt eine Liste $\bar{W}$ der Länge n, in der die Zugehörigkeit einer Obstsorte zu W durch 1 oder 0 gekennzeichnet wird (s. Umsetzung). Außerdem erstellt wird eine Liste $\bar{R}$ der Länge n, in der jede gewünschte Obstsorte x als 1 gekennzeichnet wird, falls der Knoten x in G bereits besucht wurde (s. Umsetzung).

Wenn man einen Knoten $x \in W$ untersucht, deren Kardinalität $\Delta(x) > 1$ ist, kann man die Liste der Nachbarknoten $n(x)$ von x aufrufen. Da eine Zusammenhangskomponente selbst vollständig ist (Lemma 2), kann man die Liste der Nachbarknoten $n(y)$ eines beliebigen Nachbarn y von x ($y \in n(x)$) aufrufen. So kann man jeden Knoten $z \in n(y)$ untersuchen, ob 1 bei jedem z in $\bar{W}$ steht. Falls ja, wird z auch in $\bar{R}$ markiert, sodass man denselben Vorgang bei einem anderen Knoten in dieser Komponente nicht wiederholen muss. Falls alle z zu W geören, wird die ganze Liste $n(x)$ in W' hinzugefügt. Sonst werden alle Knoten dieser Komponente gespeichert, insbesondere diese Obstsorten, die zu W nicht gehören. Man widerholt diesen Vorgang, bis alle gewünschten Obstsorten mit 1 in $\bar{R}$ markiert werden.

Ausgegeben wird entweder die vollständige Menge W' oder eine Nachricht über die jeweilige Zusammenhangskomponente, zu der Obstsorten gehören, die nicht gewünscht waren. Diese werden auch in der Ausgabe aufgezählt.

1.5 Prüfung auf Korrektheit der Eingabe

Am Ende des Teils 1.1 wurde bemerkt, dass die Korrektheit und Vollstädigkeit der Lösung davon abhängt, ob alle Obstsorten in einer Eingabe Axiom 1 folgen.

Indentifiziern wir zuerst die Probleme, die auftreten können. In den folgenden Überlegungen nehmen wir an, dass jede Spießkombination nach ihrer Definition gebildet wird, insbesondere gilt: $|F_i| = |Z_i|$. (Falls man dies nicht angenommen hätte, wäre eine Eingabe schon an dieser Stelle falsch, da eine Obstsorte zwei Indizes oder zwei Obstsorten einen Index haben müssten. Außerdem ist dieser Fehler leicht herauszufinden, indem man beim Einlesen prüft, ob die beiden Mengen gleichmächtig sind.) Im Allgemeinen kommt es zu einem Widerspruch, wenn die Eingabe dem Axiom 1 nicht folgt. Das heißt, es können die folgenden Möglichkeiten auftreten:

(P1) In einer Eingabe existieren zwei Obstsorten: $o(x, i)$ und $o(y, i)$, wobei $x \neq y$,

(P2) In einer Eingabe existieren zwei Obstsorten: $o(x, i)$ und $o(x, j)$, wobei $i \neq j$.

Untersuchen wir die Situation, in der die folgenden zwei Obstsorten existieren: $o(x, i)$ und $o(y, j)$. Nehmen wir an dieser Stelle an, dass $i = j$. Betrachten wir dazu zwei Spießkombinationen: $K_1 = (F_1, Z_1)$ und $K_2 = (F_2, Z_2)$. Es gelte: $x \in F_1$ und entsprechend $i \in Z_1$.

TODO: Bild vielleicht?

(F1) Falls $y \in F_1$ und $i = j$, dann ist i bereits in Z_1. Sodass $|F_1| = |Z_1|$ gilt, muss gelten: $\exists o(z, k) : z \notin F_1 \wedge k \in Z_1$. Dann muss zwar kein Widerpsurch erfolgen, aber wir haben den Obstsorte neue Indizes zugewiesen, also kann an dieser Stelle die Bezieung zwischen z und k gar nicht festgestellt werden. Falls alle anderen Spießkombinationen widerspruchsfrei sind, wird z ein Index $\ell \in B \setminus F_1$ zugewiesen.

(F2) Falls $y \notin F_1 \wedge y \in F_2 \wedge x \notin F_2 \wedge i = j$, dann ist i bereits in Z_1. Dann muss für i auch gelten: $i \in Z_2$. Am Anfang ist der bipartite Graph G vollständig. Nach der Verarbeitung der Spießkombination K_1 werden alle Kanten zwischen allen $p \in Z_1$ und allen $q \in A \setminus F_1$ entfernt, darunter auch die Kante zwischen y und i. Nach der Verarbeitung von K_2 wird auch die Kante zwischen x und i entfernt, da $x \notin F_2$. Der Knoten x hat dann die Kardinalität $\Delta(x) = 0$.

Bei der Untersuchung der Situation für (P2) geht man durch eine analoge Fallunterscheidung wie in (F1) und (F2).

Deshalb, um zu prüfen, ob die Eingabe Axiom 1 widerspricht, muss man nur untersuchen, ob keiner der Knoten in G eine Kardinalität von 0 besitzt.
Dazu muss man beachten, dass die Zahl n in einigen Beispieldateien größer ist als die Anzahl der in Spießkombinationen und in der Wunschliste verwendeteten Obstsorten und Indizes. In diesem Fall muss man die nicht genutzten Obstsorten und Indizes beim Einesen entsprechend markieren und sie beim Prüfen auf Korrektheit der Eingabe überspringen. Mehr dazu in der Umsetzung.

1.6 Laufzeit

n — die Anzahl der Obstsorten
m — die Anzahl der Spießkombinationen
w — die Anzahl der Wünsche (also $|W|$), im worst-case $w = n$

Da wir Bitmasken in unserem Programm verwenden, ist nocht eine Konstante einzuführen: β, die für die β–Bit–Architektur eines Rechners[2] steht, auf dem das Programm ausgeführt wird. D.h., bei der 64–Bit–Architektur beträgt $\beta = 64$. Die bitweisen Operationen in C++ auf `bitset` werden in der Laufzeit von $O(\frac{|k|}{\beta})$ ausgefüht, wobei $|k|$ die Länge eines `bitset` ist. Außerdem muss die Länge eines `bitset` kontant sein, d.h., man muss schon im Programm eine feste Länge für alle Eingabegrößen eingeben. Diese feste Länge nennen wir N und setzen $N = 26$, da so viele Obstsorten das größte Beispiel auf der BWINF–Webseite umfasst. [MB: coś na temat słowa maszynowego]

- Einlesen: $O(n(\frac{N}{\beta} + m \log n) + w(\log n + \log w))$ (worst-case) [MB: sprawdzić bitsety]
  - Erstellung der Adjazenzmatrix M: $O(n \cdot \frac{N}{\beta})$
  - Erstellung der Liste `used` (s. Umsetzung): $O(n)$
  - Einlesen der Menge W: $O(w \log w)$
    Implementierug von `set` in C++ als Rot-schwarz-Bäume[3]
  - Einlesen der Spießkombinationen: $O(m \cdot n \log n)$ (worst-case)
    Im schlimmsten Fall enthält jede Spießkombination alle Obstsorten. Die logarithmische Laufzeit ist durch Einfügen in eine Menge verursacht.
  - Zuweisung der internen Indizes der Obstsorten (s. Umsetzung): $O(n \log n)$
    Implementierug von `map` in C++ als Rot-schwarz-Bäume[4]
  - Umwandlung der gewünschten Obstsorten von Strings zu Integers: $O(w(\log n + \log w))$
    Das Suchen in einer `map` hat logarithmische Laufzeit bezüglich der Anzahl der Obstsorten: $O(\log n)$. Das Einfügen in eine `set` hat logarithmische Laufzeit bezüglich der Anzahl der Wünsche: $O(\log w)$. Also gilt für die gesamte Laufzeit: $O(w(\log n + \log w))$.
  - Umwandlung der Obstsorten in allen Spießkombinationen von Strings zu Integers: $O(m \cdot n \log n)$
    In jeder Spießkombination können sich im worst-case alle n Obstsorten befinden. Das Suchen in einer `map` hat logarithmische Laufzeit bezüglich der Anzahl der Obstsorten: $O(\log n)$. Das Einfügen in eine `set` hat ebenfalls logarithmische Laufzeit bezüglich der Anzahl der Obstsorten: $O(\log n)$. Deshalb beträgt die Laufzeit für alle Obstsorten in einer Spießkombination höchstens: $O(n \log n)$.
  - Die gesamte Laufzeit für diesen Teil (worst-case): $O(n \cdot \frac{N}{\beta}) + O(n) + O(w \log w) + O(m \cdot n \log n) + O(w(\log n + \log w)) + O(m \cdot n \log n) = O(n \cdot \frac{N}{\beta} + n + w \log w + m \cdot n \log n + w(\log n + \log w) + m \cdot n \log n) \in O(n \cdot \frac{N}{\beta} + m \cdot n \log n + w(\log n + \log w)) \in O(n(\frac{N}{\beta} + m \log n) + w(\log n + \log w))$
- Verarbeitung der Spießkombinationen: $O(m \cdot n \cdot \frac{N}{\beta} + n^2 \log N)$ (worst-case)
  - Verarbeitung einer Spießkombination $K = (F, Z)$: $O(n \cdot \frac{N}{\beta})$
    Man geht davon aus, dass eine Spießkombination im worst-case alle Obstsorten enthält.
    - Erstellung der Bitmaske bf: $O(n)$

[2] https://en.wikipedia.org/wiki/Word_(computer_architecture)
[3] https://en.cppreference.com/w/cpp/container/set
[4] https://en.cppreference.com/w/cpp/container/map

    - Erstellung der Bitmaske bn: $O(|F|)$, worst-case: $O(n)$
      Die Operation hat eine lineare Laufzeit bezüglich der Anzahl der Elementen in einer Spießkombination. Eine Spießkombination kann im worst-case alle n Obstsorten beinhalten.
    - Erstellung der Bitmaske br: $O(\frac{N}{\beta})$
    - Entfernen der Kanten: $O(n \cdot \frac{N}{\beta})$
      Für jede Liste M_i wird geprüft, ob i sich in F befindet. Diese Operation kann in $O(1)$ ausgeführt werden, indem wir durch die Menge F gleichzeitig iterieren, wie durch die Matrix M (s. Umsetzung). An jeder Liste M_i wird genau eine bitweise Operation durchgeführt.
    - Die gesamte Laufzeit für eine Spießkombination beträgt (worst-case):
      $O(n) + O(n) + O(\frac{N}{\beta}) + O(n \cdot \frac{N}{\beta}) = O(n + n + \frac{N}{\beta} + n \cdot \frac{N}{\beta}) \in O(n \cdot \frac{N}{\beta})$ [MB: zapis?]
  - Verarbeitung der allen Spießkombination entsprechend: $O(m \cdot n \cdot \frac{N}{\beta})$
  - Kopieren der Adjazenzmatrix in `Graph G` (s. Umsetzung): average-case: $O(n \cdot \delta \cdot \log N)$, worst-case: $O(n^2 \log N)$
    Für jede Liste M_i werden alle 1–en in `G` als Kanten vom Knoten i eingefügt. Dazu bediene ich mich der eingebauten Funktion `_Find_next()`, die jeweils das nächste 1–Bit in einem `bitset` findet. Jedoch ihre Laufzeit ist mir nicht bekannt. Ich gehe davon aus, dass dieser Vorgang in logarithmischer Laufzeit abzuschließen ist, wie es hier[5] beschrieben ist.
    Deshalb erfolgt die Iteration über eine Liste M_i in $O(\delta \log N)$, wobei δ die Anzahl der 1–en ist. Im schlimmsten Fall, wenn alle Spießkombinationen aus n Obstsorten bestehen, gilt: $\delta = n$, also gilt es: $O(n \log N)$. Dennoch im allgemeinen Fall gilt: $\delta \ll n$. Den Vorgang muss man für alle n Obstsorten ausführen.
    Man könnte auch denken, dass das Kopieren unnötig ist. Falls man den Graphen nicht in eine Adjazenzliste–Form kopiert, muss man sowieso an einer Stelle die entsprechenden 1–en aus der Adjazenzmatrix ablesen.
  - Die gesamte Laufzeit für diesen Teil beträgt (worst-case):
    $O(m \cdot n \cdot \frac{N}{\beta}) + O(n^2 \log N) = O(m \cdot n \cdot \frac{N}{\beta} + n^2 \log N)$

- Prüfung der Korrektheit der Eingabe: $O(n)$
  - Für jeden Knoten im Graphen wird geprüft, ob er in `used` markiert ist: $O(1)$ und, bo die Kardinaliät dieses Knotens nicht 0 beträgt: $O(1)$.
    Deshalb für alle Knoten im bipartiten Graphen gilt: $O(n + n) \in O(n)$ [MB: zapis?]

- Prüfung der Existenz einer Lösung: $O(n \log n)$ (worst-case)
  - Erstellung von $\bar{W}$: $O(n)$
  - Erstellung von $\bar{R}$: $O(n)$
  - Prüfung der Wunschliste: $O(w \log w)$
    Es wird geprüft, ob die Kardinalität des jeden Knotens 1 beträgt
    - Prüfung auf Kardinalität $\Delta(x) = 1$: $O(1)$
    - Zugriff auf die Liste der Nachbarknoten in G: $O(1)$
    - ggf. Einfügen in W': $O(\log w)$
    - ggf. Einfügen in `multip` (s. Umsetzung): $O(\log w)$ (worst-case)
      Im schlimmsten Fall hat keiner der Knoten in der Wunschliste die Kardinalität von 1.
    - ggf. Markierung in $\bar{W}$: $O(1)$
  - Iteration durch `multip`: $O(n \log w)$ (worst-case)
    Die folgenden Operation werden nur dann ausgeführt, wenn die Komponente, zu der der iterierte Knoten gehört, noch nicht bearbeitet wurde, also ob dieser Knoten in $\bar{R}$ markiert wurde. Wir können feststellen, dass diese Bedingung im schlimmsten Fall nur $\frac{w}{2}$–mal erfüllt werden kann. Alle Komponenten mit genau 1 Knoten aus A wurden bereits behandelt und in diesem Fall müssten alle Komponenten aus genau 2 Knoten aus A bestehen. $\frac{w}{2}$ ist somit die maximale Anzahl an Zusammenhangskomponenten in G, die mehr als einen Knoten aus A besitzen.
    - Prüfung auf Markierung in $\bar{R}$: $O(1)$

[5] https://stackoverflow.com/questions/58795338/find-next-array-index-with-true-value-c

  - ggf. Zugriff auf die Liste der Nachbarn eines iterierten Knotens x ($n(x)$): $O(1)$
  - ggf. Zugriff auf die Liste der Nachbarn eines Nachbarn y eines iterierten Knotens ($n(y)$): $O(1)$
  - ggf. Iteration durch $n(y)$: $O(n)$ (worst-case)
    In dieser Schleife wird geprüft, ob der iterierte Index i in $\bar{W}$ markiert ist: $O(1)$, und dann wird i in $\bar{R}$ markiert: $O(1)$. Wenn es einen Knoten gibt, der nicht gwünscht ist, aber sich auf der Komponente befindet, wird dies mit einer boolschen Variable `prob` markiert: $O(1)$. Im worst-case kann die Schleife n–mal iteriert werden, wenn es nur eine Zusammenhangskomponente in G gibt. Jedoch wird die äußere Schleife nur einmal iteriert, da alle gewünschten Obstsorten auf der Komponente als besucht in $\bar{R}$ markiert werden.
  - ggf. Kopieren der Knoten aus dieser Komponente zu `problems` (s. Umsetzung): $O(n)$ (worst-case)
  - ggf. Einfügen der Knoten aus dieser Komponente zu W': $O(n \log w)$ (worst-case)
    Das Einfügen in eine Menge hat eine logarithmische Laufzeit bezüglich w.
  - Um die gesamte Laufzeit für diesen Teil zu bestimmen, müssen wir bemerken, dass diese Laufzeit von der Anzahl der Knoten der Menge A auf allen Zusammenhangskomponenten abhängt, auf deren sich mind. eine gewünschte Obstsorte befindet. Durch die Markierung in $\bar{R}$ wird jeder Knoten auf jeder von diesen Zusammenhangskomponenten nur einmal behandelt. Damit ergibt sich im worst-case die Laufzeit von $O(n \log w)$, indem die gewünschten Obstsorten auf allen Zusammenhangskomponenten in G verteilt sind.

- Ausgabe für eine Eingabe, für die W' nicht eindeutig bestimmt werden kann: $O(n \log n)$
  Es wird durch alle Komponenten iteriert, die mind. eine ungewünschte Obstsorte enthalten, und alle Knoten werden mit den Namen der Obstsorte aufgezählt. Deshalb muss jedes Mal die Suchfunktion in der `map` mit den Zuweisungen der internen Indizes der Obstsorten und den Obstsorten aufgerufen werden: $O(\log n)$. Im schlimmsten Fall muss in der Ausgabe durch alle Knoten in A iteriert werden, falls es nur eine Zusammenhangskomponente in G gibt.
- Die gesamte Laufzeit für diesen Teil beträgt (worst-case, nach oben geschätzt: $n > w$): $O(n) + O(n) + O(w \log w) + O(n \log w) + O(n \log n) = O(n+n+w \log w + n \log w + n \log n) \in O(n \log n)$
  [MB: zapis? zgadza się?]

Fassen wir die Laufzeit im worst-case zusammen. Also ein worst-case kann so ein Fall gelten, in dem alle m Spießkombinationen und die Wunschliste aus allen n Obstsorten bestehen.

- Einlesen: $O(n(\frac{N}{\beta} + m \log n) + w(\log n + \log w))$
- Verarbeitung der Spießkombinationen: $O(m \cdot n \cdot \frac{N}{\beta} + n^2 \log N)$
- Prüfung der Korrektheit der Eingabe: $O(n)$
- Prüfung der Existenz einer Lösung: $O(n \log n)$

TODO: sprawdzić

$$O(n(\tfrac{N}{\beta} + m \log n) + w(\log n + \log w)) + O(m \cdot n \cdot \tfrac{N}{\beta} + n^2 \log N) + O(n) + O(n \log n) =$$
$$= O(n(\tfrac{N}{\beta} + m \log n) + w(\log n + \log w) + m \cdot n \cdot \tfrac{N}{\beta} + n^2 \log N + n + n \log n)$$
$$\in O(n(\tfrac{N}{\beta} + m(\log n + \tfrac{N}{\beta}) + n \log N) + w(\log n + \log w))$$

Nach der Abschätzung $w = n$ ergibt sich:
$O(n(\frac{N}{\beta} + m(\log n + \frac{N}{\beta}) + n \log N))$

Für die maximale Anzahl an Obstsorten, die in den BWINF–Beispielen auftreten, können wir bemerken, dass fast alle modernen Rechner auf einer mind. 32–Bit-Architektur basieren, das heißt, wir können $\beta = 32$ setzen. In diesem Zusammenhang gilt: $\frac{N}{\beta} = \frac{26}{32} < 0$. In diesem Fall ist dieser Bruch ein vernachlässiger Faktor. Es ergibt sich im schlimmsten Fall:

$$O(n(m \log n + n \log N))$$

Literatur

[1] T.H. Cormen u. a. *Introduction To Algorithms. Third edtition.* Introduction to Algorithms. MIT Press, 2009. ISBN: 9780262533058.

2 Umsetzung

2.1 Klasse `Solver`

Die Matrix M wird als ein `vector` von `bitset` dargestellt. Dazu muss man erwähnen, dass ein `bitset` in C++ eine feste Länge besitzen muss. Dazu wurde die maximale Größe von n eingegeben, also 26. Das müsste ggf. im Program selbst umgestellt werden, falls man eine größere Datei einlesen möchte.
Die feste Länge ist auch der Grund dafür, dass die Bitmaske br im Teil 1.3 auf folgende Weise definiert wird:

$$br := \neg(bn) \wedge bf.$$

Im Fall, wenn man mit einer Bimaske einer festen Größe operiert, würde eine einfache Negation der Bitmaske bn nicht hinreichen.

Die Obstsorten werden als Strings eingelesen, aber in der Methode `readFile()` wird jeder Obstsorte ein interner Index[6] zugewiesen und in weiteren Operationen im Programm werden die Obstsorten als einfache Integers behandelt. Es werden dazu zwei Maps festgelegt: `fruit2ID` und `ID2Fruit`, in denen die Obstsorten und die entsprechenden internen Indizes gespeichert sind.

Jede Spießkombination wird als `pair<set<int>, set<int>`, also ein Tupel entsprechend aus der Menge der internen Indizes der Obstsorten und der Menge der Indizes aus der Aufgabenstellung. Alle Spießkombinationen werden in einem `vector` gespiechert, der `infos` heißt.

In `wishes` werden als ein `set` von Integers werden die internen Indizes der gewünschten Obstsorten, also der Elemente der Menge W, gespeichert. Analog werden in `result`, also ebenfalls ein `set` von Integers, die Indizes der gewünschten Obstsorten, also die Elemente der Menge W' hinzugefügt.

Der `vector`, der `used` heißt, wird verwendet, um die benutzten internen Indizes der Obstsorten, wie auch die Indizes der Obstsorten zu markieren, die im Graphen verwendet werden, da es in einzigen Textdateien ein größeres n gibt als die Anzahl der in den Spießkombinationen un der Wunschliste verwendeten Obstsorten und Indizes. Diese Markierung zeigt sich bei der Prüfung auf korrekte Eingabe hilfreich.

Die Methode `analyzeInfo()` nimmt als Argument eine Spießkombination. In der Methode werden die drei Bitmasken bn, br, bf erstellt. Um die Laufzeit zu optimieren, wird durch die Menge der internen Indizes der Obstsorten `fruits` aus dieser Spießkombination gleichzeitig mit den Obstsorten aus der Matrix iteriert. Da die Menge `fruits` vorsortiert ist, müssen wir nicht bei jeder Obstsorte in der Matrix prüfen, ob sie sich in `fruits` befindet, um die Entscheidung zu treffen, welche der beiden Bitmasken anzuwenden.
Nachdem alle m Spießkombinationen verarbeitet wurden, werden in der Methode `analyzeAllInfos()` alle übrigen 1–Beziehungen in der Adjazenzmatrix als Kanten in den Graphen `G` der Klasse `Graph` kopiert. Die einzelnen 1–en in `matrix` werden mithilfe der eingebauten Funktion `_Find_next()` gefunden.

Die Methode `checkCoherence()` prüft, ob die Eingabe dem Axiom 1 folgt. Dennoch es gibt Beispiele, in denen n größer ist als die Anzahl der verwendeten Elementen in den Spießkombinationen und der Wunschliste. Bei der Zuweisung der internen Indizes jeder Obstsorte werden die verwendeten Obstsorten und Indizes in `used` markiert. Diesen Vorteil können wir nutzen, um die Prüfung der Kardinalität des jeden Knotens in `G` zu überprüfen: Es wird geprüft, ob die Kardinalität 0 beträgt. Alle Knoten, die in `used` nicht markiert wurden, werden übersprungen. Falls bei mindestens einem Knoten die Kardinalität 0 ist, wird `false` ausgegeben und die Eingabe im gegebenen Beispiel ist fehlerhaft.
Sonst, wenn alle verwendeten Knoten eine Kardinalität von mindestens 1 besitzen, wird `true` ausgegeben.

Nachdem die Korrektheit der Eingabe geprüft wurde, kann festgestellt werden, ob W' eindeutig bestimmt werden kann. Dazu dient die Methode `checkResult()`.
Es werden ein `vector todo` der Länge n, ein `vector ready` der Länge n und ein `set multip` erstellt. `todo` ist die Liste $\bar{W}$. `ready` ist die Liste $\bar{R}$.
Es wird zunächst über die Menge der Wünsche `wishes` iteriert. Falls ein Knoten `x` (der interne Index einer Obstsorte) in `G` die Kardinalität 1 besitzt, wird sein einzelner Nachbar in `result` hinzugefügt. Im sonstigen Fall wird `x` in `multip` hinzugefügt und die Stelle `x` in `todo` wird mit 1 markiert.
Dann wird geprüft, ob die Menge `multip` überhaupt irgendwelche Elemente enthält. Falls nicht, gibt die

[6] Nummerierung ab 0.

ganze Funktion an dieser Stelle `true` zurück.
Sont wird eine boolsche Variable `solv` erstellt, die für die Existenz einer Lösung steht. Am Anfang nimmt sie `true` als Wert. Dazu wird auch eine Liste von Mengen `problems` erstellt, die dazu da ist, um die Obstsorten einer Zusammenhangskomponente zu speichern, die eine nicht gewünschte Obstsorte enthält.
Danach wird über die Menge `multip` iteriert. Für jedes Element `x` aus dieser Menge wird eine boolsche Variable `prob` erstellt, die anzeigt, ob mindestens eine Obstsorte zu der Komponente gehört, die nicht gewünscht ist. Am Anfang hat sie den Wert `false`.
Es wird zunächst geprüft, ob an der Stelle `x` in `ready` 0 steht, d.h., der Knoten gehört zu einer Zusammenhangskomponente, die noch nicht bearbeitet wurde. Falls ja, dann werden zwei Listen `setB` und `setA` erstellt, die der Liste der Nachbarn von `x` und der Liste der Nachbarn von einem Nachbarn von `x` entsprechen. Es wird durch die Menge `setA` iteriert.
Falls an der Stelle eines internen Index einer Obstsorte in `todo` keine 1 steht, wird `solv = false` und `prob = true` gesetzt. Dies bedeutet, es gibt eine nicht gewünschte Obstsorte in der Komponente.
Sonst wird die Stelle des internen Index dieser Obstsorte in `ready` mit 1 markiert.
Danach wird geprüft, ob `prob == true`. Falls `prob == false` gilt, wird die Menge `setB` in `result` hinzugefügt. Sonst, wird die Menge `setA` in `problems` hinzugefügt, um sie danach als Nachricht für den Nutzer vorzustellen, dass aufgrund von einzigen Obstsorten die Menge W' nicht eindeutig bestimmt werden kann.
Am Ende, nach der Schleife über `multip`, wird geprüft, ob es eine Lösung zur Aufgabe für eine Eingabe gibt: Es wird gepüft, ob `solv == true`. Falls ja, dann wir `true` zurückgegeben. Sonst wird eine Meldung ausgegeben, die alle Zusammenhangskomponenten beinhaltet, die eine nicht gewünschte Obstsorte enthalten, und die nicht gewünschten Obstsorten werden ebenfalls angezeigt.

2.2 Klasse `Graph`

Diese Klasse ist grundsätzlich aus Übersichtlichkeits– sowie aus Vereinfachungsgründen entstanden. Theoretisch könnte man die enthaltenen Methoden in der Klasse `Solver` speichern.

Der Graph ist als eine Adjazenzliste aus `vector` von `vector` von Integers gespeichert. Der Konstruktor nimmt zwei Parameter: die Größen der beiden Partitionen im bipartiten Grphen, obwohl sie in der Aufgabe gleich groß sind.

Zu den verfügbaren Methoden zählen: `addEdge()`, die eine ungerichtete Kante zwischen zwei Knoten einfügt; `deg()`, die die Kardinalität eines Knotens zurückgibt; `getNeighbors()`, die den `vector`, also die Adjazenzliste eines Knotens zurückgibt. Außerdem gibt es ein paar Methoden, die zum Debugging dienen.

3 Beispiele

TODO: dodać dodatkowe przykłady

3.1 Beispiel 0 (Aufgabenstellung)

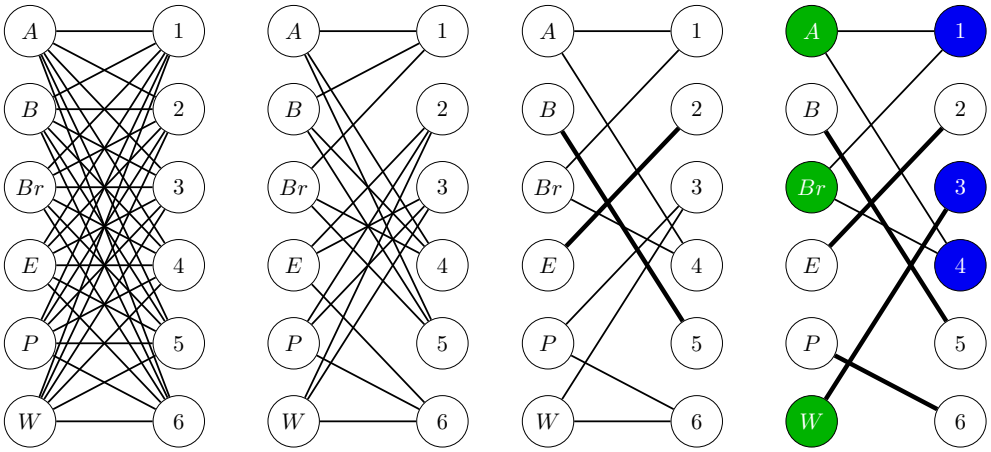
Textdatei: `spiesse0.txt`

TODO: nheme Bezug auf die Aufgabenstellung

Apfel, Brombeere, Weintraube

1, 3, 4

Auf Papier kann man das Beispiel auf folgende Weise lösen. Lassen wir alle



3.2 Beispiel 1 (BWINF)

Textdatei: `spiesse1.txt`

Wünsche: Clementine, Erdbeere, Grapefruit, Himbeere, Johannisbeere

1, 2, 4, 5, 7

3.3 Beispiel 2 (BWINF)

Textdatei: `spiesse2.txt`

Wünsche: Apfel, Banane, Clementine, Himbeere, Kiwi, Litschi

1, 5, 6, 7, 10, 11

3.4 Beispiel 3 (BWINF)

Textdatei: `spiesse3.txt`

Wünsche: Clementine, Erdbeere, Feige, Himbeere, Ingwer, Kiwi, Litschi

unlösbar: Litschi gehört zur Komponente mit Grapefruit. Dabei ist Grapefruit kein Wunsch.

3.5 Beispiel 4 (BWINF)

Textdatei: `spiesse4.txt`

Wünsche: Apfel, Feige, Grapefruit, Ingwer, Kiwi, Nektarine, Orange, Pflaume

2, 6, 7, 8, 9, 12, 13, 14

3.6 Beispiel 5 (BWINF)

Textdatei: `spiesse5.txt`

Wünsche: Apfel, Banane, Clementine, Dattel, Grapefruit, Himbeere, Mango, Nektarine, Orange, Pflaume, Quitte, Sauerkirsche, Tamarinde

1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 12, 14, 16, 19, 20

3.7 Beispiel 6 (BWINF)

Textdatei: `spiesse6.txt`

Wünsche: Clementine, Erdbeere, Himbeere, Orange, Quitte, Rosine, Ugli, Vogelbeere

4, 6, 7, 10, 11, 15, 18, 20

3.8 Beispiel 7 (BWINF)

Textdatei: `spiesse7.txt`

Wünsche: Apfel, Clementine, Dattel, Grapefruit, Mango, Sauerkirsche, Tamarinde, Ugli, Vogelbeere, Xenia, Yuzu, Zitrone

unlösbar: Apfel, Grapefruit und Xenia gehören zur Komponente mit Litschi. Dabei ist Litschi kein Wunsch. Ugli gehört zur Komponente mit Banane. Dabei ist Banane kein Wunsch.

3.9 Beispiel 8

Textdatei: `spiesse8.txt`
Besonderheit: Ein Beispiel für den Fall (P1) → (F2), s. Teil 1.5.

```
5
Aprfel Erdbeere Banane
2
2 3
Banane Clementine
2 4
Dattel Erdbeere
```

Wünsche: Apfel, Erdbeere, Banane

Error: Es gibt Fehler in der Eingabedatei.

Die erste Spießkombination legt fest, dass ...

TODO: dokończyć

4 Quellcode