ОБЕРНЕНІ ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ФУНКЦІЇ ТА ПРЯМОКУТНИЙ ТРИКУТНИК

Р. Гусейнов, м. Дніпро

Для успішного розв'язування задач із застосуванням обернених тригонометричних функцій передусім необхідно повторити означення функцій $y=\arcsin x$, $y=\arccos x$, $y=\operatorname{arctg} x$, $y=\operatorname{arcctg} x$

З означення цих функцій випливають такі тотожності:

$$\sin(\arcsin a)=a \quad (-1\le a\le 1);$$
$$\cos(\arccos a)=a \quad (-1\le a\le 1);$$
$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} a)=a \quad (a\in\mathbb{R});$$
$$\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} a)=a \quad (a\in\mathbb{R}).$$

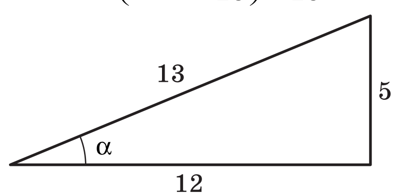
Приклад 1. Обчисліть: $\sin\left(\arccos\frac{12}{13}\right)$.

Розв'язання

Відомо, що $\arccos\frac{12}{13}$ — кут, косинус якого дорівнює $\frac{12}{13}$, тому побудуємо прямокутний трикутник з прилеглим катетом — 12 і гіпотенузою — 13, тоді другий катет дорівнює 5.

За означенням синуса гострого кута прямокутного трикутника маємо:

$$\sin\left(\arccos\frac{12}{13}\right)=\frac{5}{13}.$$



Відповідь. $\frac{5}{13}$.

Приклад 2. Обчисліть:

$$\cos\left(\arcsin\frac{1}{3}-\operatorname{arctg}2\right).$$

Розв'язання

За відомою формулою

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

маємо:

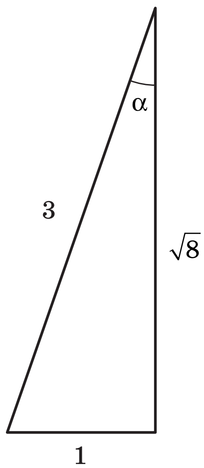
$$\cos\left(\arcsin\frac{1}{3}-\operatorname{arctg}2\right)=\cos\left(\arcsin\frac{1}{3}\right)\cos(\operatorname{arctg}2)+$$
$$+\sin\left(\arcsin\frac{1}{3}\right)\sin(\operatorname{arctg}2).$$

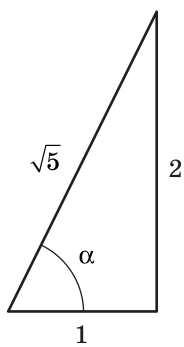
Оскільки

$$\cos\left(\arcsin\frac{1}{3}\right)=\frac{2\sqrt{2}}{3},\ \cos(\operatorname{arctg}2)=\frac{1}{\sqrt{5}},$$
$$\sin(\operatorname{arctg}2)=\frac{2}{\sqrt{5}}\ \ (\textit{див. рис.}),$$

то маємо:

$$\cos\left(\arcsin\frac{1}{3}-\operatorname{arctg}2\right)=$$
$$=\frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2}{3\sqrt{5}}\left(\sqrt{2}+1\right).$$





Відповідь. $\frac{2\sqrt{5}}{15}\left(\sqrt{2}+1\right)$.

МАТЕМАТИКА В ШКОЛАХ УКРАЇНИ

Приклад 3. Доведіть, що

$$\sin\left(\arccos\frac{7}{8}-2\arcsin\frac{1}{4}\right)=0.$$

Доведення

Під час доведення скористаємося такими формулами: $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha$, $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$, $\cos^2 2\alpha=1-2\sin^2\alpha$.

$$\sin\left(\arccos\frac{7}{8}-2\arcsin\frac{1}{4}\right)=$$

$$=\sin\left(\arccos\frac{7}{8}\right)\cos\left(2\arcsin\frac{1}{4}\right)-$$

$$-\sin\left(2\arcsin\frac{1}{4}\right)\cos\left(\arccos\frac{7}{8}\right)=$$

$$=\frac{\sqrt{15}}{8}\cdot\left(1-2\sin^2\left(\arcsin\frac{1}{4}\right)\right)-$$

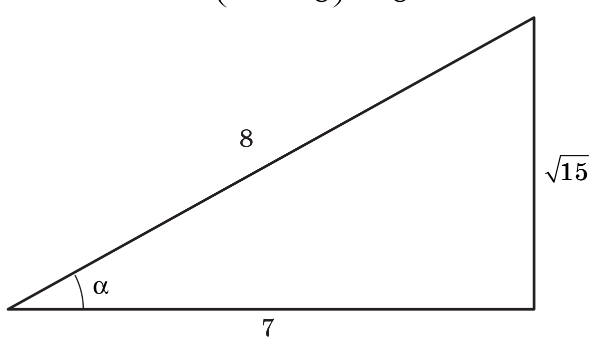
$$-2\cdot\frac{1}{4}\cdot\cos\left(\arcsin\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{7}{8}=$$

$$=\frac{\sqrt{15}}{8}\cdot\left(1-2\cdot\frac{1}{16}\right)-\frac{7}{16}\cdot\frac{\sqrt{15}}{4}=$$

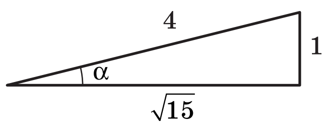
$$=\frac{\sqrt{15}}{8}-\frac{\sqrt{15}}{64}-\frac{7\sqrt{15}}{64}=0,$$

що потрібно було довести.

$$\sin\left(\arccos\frac{7}{8}\right)=\frac{\sqrt{15}}{8}$$



$$\cos\left(\arcsin\frac{1}{4}\right)=\frac{\sqrt{15}}{4}$$



Приклад 4. Обчисліть:

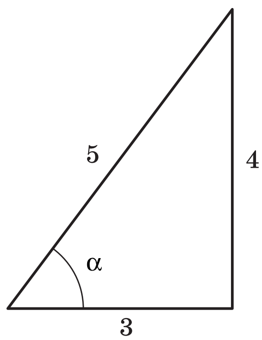
$$\mathrm{tg}\left(\arcsin\left(\mathrm{ctg}\left(\arccos\frac{3}{5}\right)\right)\right).$$

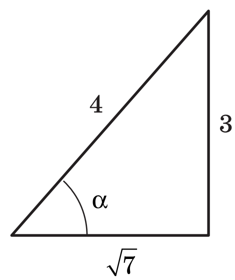
Розв'язання

Оскільки

$$\mathrm{ctg}\left(\arccos\frac{3}{5}\right)=\frac{3}{4}\text{ і }\mathrm{tg}\left(\arcsin\frac{3}{4}\right)=\frac{3}{\sqrt{7}}\ (\textit{див. рис.}),$$

$$\text{то }\mathrm{tg}\left(\arcsin\left(\mathrm{ctg}\left(\arccos\frac{3}{5}\right)\right)\right)=\frac{3}{\sqrt{7}}.$$





Відповідь. $\frac{3\sqrt{7}}{7}$.

Приклад 5. Розв'яжіть рівняння

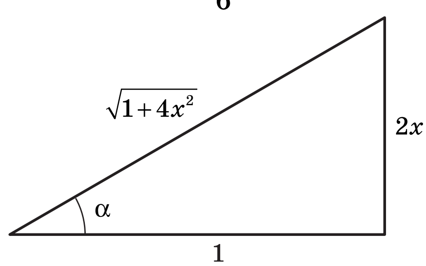
$$\sin(\mathrm{arctg}\,2x)=\frac{1}{2},\quad x>0.$$

Розв'язання

Оскільки $\sin(\mathrm{arctg}\,2x)=\frac{2x}{\sqrt{1+4x^2}}$ (*див. рис.*),

то маємо рівняння $\frac{2x}{\sqrt{1+4x^2}}=\frac{1}{2}$, за умови $x>0$.

Звідки маємо $x=\frac{\sqrt{3}}{6}$.



Відповідь. $\frac{\sqrt{3}}{6}$.

Приклад 6. Розв'яжіть рівняння

$$\cos\left(\arccos 2x + \arcsin\sqrt{1-x^2}\right) = -\frac{1}{2} \quad \text{при} \quad x > 0.$$

Розв'язання

Знайдемо ОДЗ рівняння із системи нерівностей $\begin{cases} -1 \le 2x \le 1, \\ -1 \le \sqrt{1-x^2} \le 1, \end{cases}$ звідки $x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$.

Ураховуючи умову, маємо: $x \in \left(0; \frac{1}{2}\right]$.

$$\cos\left(\arccos 2x + \arcsin\sqrt{1-x^2}\right) =$$

$$= \cos(\arccos 2x)\cos\left(\arcsin\sqrt{1-x^2}\right) -$$

$$-\sin(\arccos 2x)\sin\left(\arcsin\sqrt{1-x^2}\right) =$$

$$= 2x \cdot x - \sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{1-4x^2} = 2x^2 - \sqrt{\left(1-x^2\right)\left(1-4x^2\right)}.$$

Маємо рівняння $2x^2 - \sqrt{4x^4 - 5x^2 + 1} = -\frac{1}{2}$,

$$\sqrt{4x^4 - 5x^2 + 1} = 2x^2 + \frac{1}{2},$$

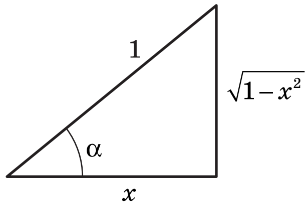
$$4x^4 - 5x^2 + 1 = 4x^4 + 2x^2 + \frac{1}{4},$$

$$7x^2 = \frac{3}{4},$$

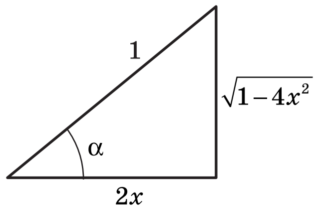
$$x^2 = \frac{3}{28},$$

звідки, ураховуючи, що $x > 0$, маємо $x = \frac{\sqrt{21}}{14}$.

$$\cos\left(\arcsin\sqrt{1-x^2}\right) = x$$



$$\sin(\arccos 2x) = \sqrt{1-4x^2}$$



Відповідь. $\frac{\sqrt{21}}{14}$.

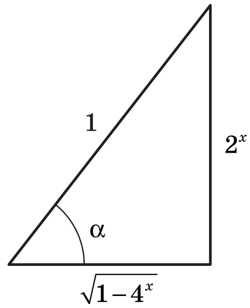
Приклад 7. Знайдіть похідну

$$y = \mathrm{tg}\left(\arcsin 2^x\right).$$

Розв'язання

$$y' = \frac{\left(\arcsin 2^x\right)'}{\cos^2\left(\arcsin 2^x\right)} = \frac{\frac{2^x \ln 2}{\sqrt{1-4^x}}}{\cos^2\left(\arcsin 2^x\right)} = \frac{2^x \ln 2}{\left(1-4^x\right)^{\frac{3}{2}}},$$

де $\cos^2\left(\arcsin 2^x\right) = \sqrt{1-4x^2}$ (*див. рис.*).

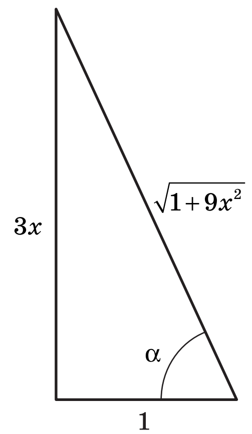


Відповідь. $y' = \frac{2^x \ln 2}{\left(1-4^x\right)^{\frac{3}{2}}}$.

Приклад 8. Обчисліть інтеграл:

$$\int_0^1 \sin(\mathrm{arctg}\, 3x)\, dx.$$

Розв'язання



Спочатку з прямокутного трикутника з катетами 1 і $3x$ знайдемо $\sin(\mathrm{arctg}\, 3x)$.

Маємо: $\sin(\mathrm{arctg}\, 3x) = \frac{3x}{\sqrt{1+9x^2}}$.

$$\int_0^1 \sin(\operatorname{arctg} 3x)\,dx = \int_0^1 \frac{3x}{\sqrt{1+9x^2}}\,dx =$$

$$= \frac{1}{3}\sqrt{1+9x^2}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}\left(\sqrt{10}-1\right).$$

Відповідь. $\frac{1}{3}\left(\sqrt{10}-1\right)$.

Завдання для самостійного розв'язування

1. Обчисліть:

1) $\sin\left(\arccos\frac{17}{18} - 2\arcsin\frac{1}{6}\right)$;

2) $\cos\left(\arccos\frac{7}{9} - 2\arcsin\frac{1}{3}\right)$;

3) $\operatorname{tg}\left(\arcsin\left(\cos\left(\operatorname{arctg} 2\right)\right)\right)$.

2. Розв'яжіть рівняння:

1) $\cos(\operatorname{arctg} 5x) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \ x > 0$;

2) $\sin\left(\operatorname{arctg}\frac{x^2}{x^2+1}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

3. Знайдіть похідну

$$y = \operatorname{tg}\left(\arccos e^{x^2}\right).$$

4. Обчисліть інтеграл:

$$\int_1^2 e^x \operatorname{tg}\left(\arccos e^{-x}\right)dx.$$

ЛІТЕРАТУРА

1. *Литвиненко В. Н., Мордкович А. Г.* Практикум по элементарной математике. — М. : Просвещение — 1991.