АЛГЕБРАЇЧНИЙ МЕТОД У КОНСТРУКТИВНИХ ЗАДАЧАХ ПІДВИЩЕНОЇ СКЛАДНОСТІ

О. І. Баран, В. М. Дармосюк, Миколаївський національний університет ім. В. О. Сухомлинського

У статті досліджується роль і місце алгебраїчних методів у конструктивній геометрії, їхнє значення для формування математичної освіти учнів і студентів, обґрунтовується необхідність підвищення рівня викладання цього розділу геометрії, особливо для майбутніх викладачів математики. Виклад теоретичного і методичного матеріалу ілюструється задачами підвищеної складності і олімпіадного рівня.

ВСТУП

Складність розв'язання задачі є суб'єктивною, але дуже важливою характеристикою задачі. Геометричні задачі, й особливо конструктивні, традиційно відносять до складних задач. Розв'язуючи такі задачі, учні або студенти, розвивають уміння узагальнювати і поширювати набуті теоретичні та практичні знання, формують творчі здібності.

Цікаві конструктивні задачі різного рівня складності вміщуються в збірниках [1, 4, 8, 9, 10]. Відповідні теоретичні відомості й методичні вказівки до розв'язання таких задач ґрунтовно подані в посібниках [2, 3, 7, 11, 12].

У багатьох випадках під час розв'язування конструктивних задач доцільно використовувати алгебраїчний метод. Суть алгебраїчного методу полягає в такому: побудова шуканої фігури Ф зводиться до побудови деякого ключового відрізка XY, довжину якого x виражають через довжини a, b, c, ..., m заданих відрізків, використовуючи для цього відповідні теореми і формули елементарної геометрії. У результаті одержують співвідношення такого виду:

$$x = f(a,b,c,\ldots,m).$$

Далі за цією формулою будують відрізок XY, а потім — і всю шукану фігуру Ф.

Алгебраїчний метод уважають найбільш універсальним, бо з його допомогою можна розв'язувати майже всі конструктивні задачі. Більше того, у випадках, коли застосування суто геометричних методів викликає значні труднощі або взагалі стає неможливим, на допомогу приходить алгебраїчний метод. При цьому розв'язок задачі та його дослідження, як правило, спрощуються. Цей метод посідає особливе місце в конструктивній геометрії ще й тому, що він допомагає підвести під цей розділ геометрії міцний теоретичний фундамент.

Алгебраїчний метод розв'язування конструктивних задач має незаперечні переваги перед іншими методами. Це пояснюється такими факторами:

- ✓ алгебраїчні залежності між заданими і шуканими величинами у більшості випадків можна легко знайти;
- ✓ одержані під час аналізу конструктивної задачі формули часто вказують на метод виконання шуканих побудов;
- ✓ у випадках, коли інші методи розв'язування конструктивних задач здаються недієвими, алгебраїчний метод залишається єдиним ефективним засобом для її розв'язання;
- ✓ додаткові побудови, якщо вони необхідні, виконуються на цілком природному підґрунті на основі аналізу знайдених виразів для невідомих елементів (тобто, евристичний рівень розв'язування задач порівняно з іншими методами нижчий, а задачу розв'язувати таким методом легше);
- ✓ алгебраїчний метод спрощує заключний аналіз і дозволяє легко визначити умови, за яких задача має розв'язки, виявити їх

кількість залежно від співвідношень між заданими елементами тощо;
- ✓ алгебраїчний метод дозволяє звести кожну конструктивну задачу, яка розв'язується за допомогою циркуля і лінійки, до послідовності обмеженої кількості основних побудов (їх усього сім);
- ✓ алгебраїчний метод дозволяє звести конструктивні задачі до розв'язування алгебраїчних рівнянь, що значно спрощує розв'язання задачі і надає можливість дослідити властивості креслярських інструментів і можливості виконання ними тих чи інших побудов;

Отже, алгебраїчний метод розв'язування задач на побудову є найбільш ефективним під час визначення можливості побудови, і саме в цьому полягає його найважливіше теоретичне значення.

МЕТОДИКА РОЗВ'ЯЗУВАННЯ КОНСТРУКТИВНИХ ЗАДАЧ АЛГЕБРАЇЧНИМ МЕТОДОМ

Аналіз і розв'язування задач на побудову алгебраїчним методом рекомендується виконувати в такій послідовності [2, 3]:
- ✓ уважаємо, що задача розв'язана, і виконуємо схематичний рисунок заданих і шуканої фігур;
- ✓ уводимо позначення для відомих і невідомих величин, пов'язаних із заданими і шуканими фігурами (довжини відрізків і величини кутів, площі тощо);
- ✓ пригадуємо теореми і формули, які пов'язують ці величини між собою;
- ✓ складаємо рівняння або систему рівнянь, у яких в алгебраїчній формі фіксуємо знайдені залежності;
- ✓ розв'язуємо це рівняння або систему рівнянь відносно невідомих елементів (знаходимо формули, у яких невідомі величини явно виражені через відомі);
- ✓ з'ясовуємо, чи дозволяють знайдені формули виконати послідовно побудови шуканих елементів дозволеними методами (переважно за допомогою циркуля і лінійки);
- ✓ якщо такі побудови можливі, складаємо алгоритм побудови шуканої фігури;
- ✓ обґрунтовуємо знайдений алгоритм (доводимо, що побудова на його основі правильна, а знайдена фігура відповідає умовам задачі);
- ✓ досліджуємо розв'язки на основі знайдених формул.

Усе зазначене щодо алгебраїчного методу розв'язування задач на побудову дозволяє дійти висновку, що для практичних і теоретичних потреб його можна вважати найкращим. Тобто, він не такий естетичний порівняно з іншими методами, зате найбільш ефективний.

Зауваження. Під час розв'язування конструктивної задачі доцільно користуватися «методом човника». Суть цього методу полягає в такому: якщо на деякому етапі розв'язування виникають суттєві проблеми, необхідно повернутися до попередніх етапів, за необхідності виконати допоміжні побудови, переглянути зв'язки між заданими і шуканими фігурами, скласти додаткові співвідношення тощо.

Сформулюємо основну теорему (ОТ) конструктивної геометрії [2, 3].

Відрізок XY можна побудувати за заданими відрізками за допомогою циркуля і лінійки тоді й тільки тоді, коли довжина відрізка XY виражається через довжини заданих відрізків і раціональні числа за допомогою скінченного числа раціональних операцій (додавання, віднімання, множення і ділення) і добування квадратного кореня.

Зауваження 1. Важливо підкреслити, що ліва і права частини виразу $x=f(a,b,c,\ldots,m)$ повинні мати однакову, тобто лінійну, розмірність.

Зауваження 2. Традиційно відрізки і довжини відрізків позначають маленькими латинськими літерами. Де відрізки, а де літери, зрозуміло із контексту. У подальшому, якщо це не викликає труднощів, користуватимемося такими позначеннями.

Елементарними побудовами (ЕП) вважатимемо такі побудови відрізків за наведеними формулами [2, 3]:

ЕП1. $x=m\cdot a\pm n\cdot b,\ m\in\mathbb{N},\ n\in\mathbb{N},\ m\cdot a\geq n\cdot b;$

ЕП2. $x = \dfrac{m \cdot b}{n}$, $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$;

ЕП3. $x = \dfrac{a \cdot b}{c}$;

ЕП4. $x = \sqrt{a^2 \pm b^2}$, $a \geq b$;

ЕП5. $x = \sqrt{a \cdot b}$.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ КОНСТРУКТИВНИХ ЗАДАЧ ПІДВИЩЕНОЇ СКЛАДНОСТІ АЛГЕБРАЇЧНИМ МЕТОДОМ

Розглянемо приклади конструктивних задач підвищеної складності, які розв'язуються за допомогою алгебраїчного методу.

Приклад 1

За відрізками a, b, c, d, e, f, g побудувати відрізок x, якщо $x = \dfrac{abcd}{efg}$ [4].

Розв'язання

Тричі використовуємо елементарну побудову третього типу, тобто послідовно будуємо три такі відрізки: $y = \dfrac{ab}{e}$, $z = \dfrac{yc}{f}$, $x = \dfrac{zd}{g}$.

Приклад 2

За відрізками a, b побудувати відрізок x, якщо $x = \sqrt[16]{a^{16} + b^{16}}$ [4].

Розв'язання

Неважко бачити, що в цій формулі застосовуються тільки «дозволені» в умові основної теореми операції, а розмірності правої й лівої частини лінійні. Тобто, за допомогою циркуля і лінійки такий відрізок можна побудувати.

Перетворимо подану формулу так, щоб вона складалася з послідовності елементарних операцій типу 1–5:

$$x = \sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a^2 + \left(\frac{b^8}{a^7}\right)^2}}}}.$$

Тепер послідовно будуємо такі відрізки: $z_1 = \dfrac{b^8}{a^7}$ (*див. попередню задачу*),

$$z_2 = \sqrt{a^2 + z_1^2},\ z_3 = \sqrt{az_2},\ z_4 = \sqrt{az_3},\ x = \sqrt{az_4}.$$

Зауваження. У випадку, коли задача розв'язується за допомогою циркуля і лінійки алгебраїчним методом, відповідну ключову формулу задачі завжди (і при тому досить легко) можна подати у вигляді послідовності «дозволених» побудов типу 1–5. Часто таких подань для конкретної задачі можна вказати декілька.

Приклад 3

Побудувати кут α, якщо $\sin\alpha = \dfrac{a^3 - b^3}{a^3 + b^3}$, де a і b — задані відрізки, причому $a > b$ [4].

Ця задача також розв'язується за допомогою алгебраїчного методу. Для цього скористаємося означенням синуса. Поділимо чисельник і знаменник дробу в лівій частині на ab і подамо початкову формулу в такому вигляді:

$$\sin\alpha = \frac{m}{n} = \frac{\frac{a^2}{b} - \frac{b^2}{a}}{\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a}},$$

де m і n — відповідно катет та гіпотенуза прямокутного трикутника, у якого кут, протилежний катету довжиною m, є шуканим. Отже, визначивши m і n, побудуємо цей трикутник і тим самим побудуємо і шуканий кут.

А це легко зробити, виконавши таку послідовність побудов відрізків: $u = \dfrac{a^2}{b}$, $v = \dfrac{b^2}{a}$ (ЕП2). Тепер будуємо відрізки: $m = u - v$ та $n = u + v$, а далі і відповідний прямокутний трикутник із катетом m і гіпотенузою n. Тоді проти катета m одержимо шуканий кут α.

Зауваження. До мети може вести й інше перетворення цієї формули, наприклад таке: $\sin\alpha = \dfrac{p}{q} = \dfrac{a - \frac{b^3}{a^2}}{a + \frac{b^3}{a^2}}$. Причому зрозуміло, що розв'язок задачі не залежить від застосованого методу, бо $\sin\alpha = \dfrac{m}{n} = \dfrac{p}{q}$.

Приклад 4

Усередині трикутника ABC побудувати точку P таку, щоб для площ трикутників ABP, BCP і CAP справджувалися співвідношення: $S_{ABP} : S_{BCP} : S_{CAP} = 1:2:3$.

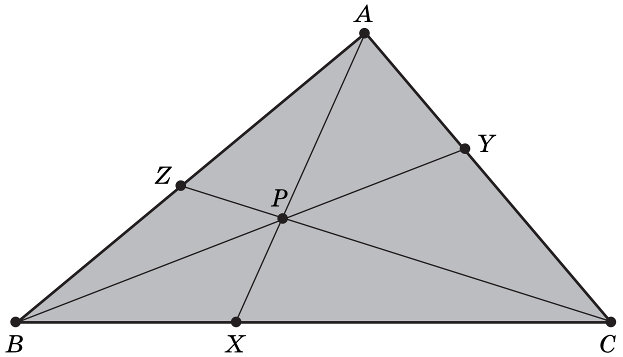
Аналіз

Попередньо розглянемо деякі цікаві властивості шуканих трикутників у взаємозв'язку з іншими трикутниками, із яких складається заданий трикутник. Нехай усередині заданого трикутника ABC таку точку вже побудовано, тоді продовжимо відрізок AP до перетину зі стороною BC у точці X.

Нехай $\frac{BX}{XC}=k \Rightarrow BX=k\cdot XC$. Тепер, оскільки трикутники ABX і ACX мають однакову висоту, то очевидно, що $S_{ABX}=k\cdot S_{CPX}$. Аналогічно $S_{BPX}=k\cdot S_{CPX}$. Тоді маємо:

$$\frac{S_{ABP}}{S_{ACP}}=\frac{S_{ABX}-S_{PBX}}{S_{ACX}-S_{PCX}}=\frac{k\left(S_{ACX}-S_{PCX}\right)}{S_{ACX}-S_{PCX}}=k.$$

До речі, до такого ж висновку можна дійти й інакше, розглянувши трикутники ABP і ACP. Вони мають спільну основу, а відношення їхніх висот дорівнює k, тому і відношення їхніх площ дорівнює k.



Побудова

Спочатку будуємо точку Y, яка ділить сторону AC заданого трикутника у відношенні 1:2, тобто $AY:YC=1:2$. Тепер на BC будуємо точку X, яка ділить BC у відношенні 1:3, тобто $BX:XC=1:3$. Тепер знаходимо шукану точку P як перетин відрізків AX і BY. На основі аналізу нескладно довести, що побудована точка задовольняє умову задачі.

Приклад 5

Побудувати прямокутний трикутник за гіпотенузою і медіаною гострого кута [1].

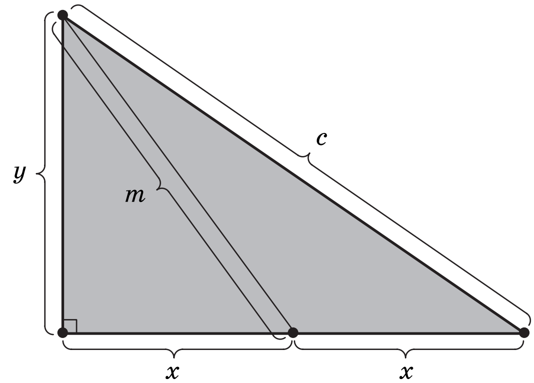
Аналіз і побудова

Нехай задано гіпотенузу c і медіану m шуканого прямокутного трикутника.

Очевидно, що для розв'язання задачі цілком достатньо знайти додатково один із його катетів.

Нехай задача розв'язана і шуканий трикутник побудовано. Тоді, використовуючи теорему Піфагора, можна скласти таку систему рівнянь:

$$\begin{cases}(2x)^2+y^2=c^2,\\ x^2+y^2=m^2.\end{cases}$$



Розв'язуємо цю систему відносно x:

$$\begin{cases}4x^2+y^2=c^2,\\ x^2+y^2=m^2\end{cases} \Rightarrow\ 3x^2=c^2-m^2\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ x=\sqrt{\frac{c+m}{3}\cdot(c-m)}.$$

Далі побудова відрізка x і шуканого трикутника не викликає труднощів.

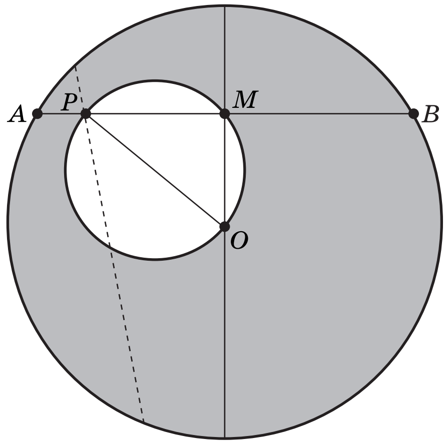
Відрізок x можна побудувати як середнє геометричне двох відрізків: $\frac{c+m}{3}$ і $c-m$.

До речі, звідси випливає очевидне обмеження на умову задачі: $m<c$.

Якщо добудувати заданий трикутник до паралелограма так, щоб задана подвоєна медіана було діагоналлю цього паралелограма, то одержимо ще одну умову відносно заданих відрізків: $2m>c$ (проти більшого кута лежить більша сторона).

Приклад 6

Через задану точку P, яка лежить усередині заданого кола, провести хорду так, щоб різниця довжин відрізків, на які шукана точка ділить хорду, мала задану величину a [9].



Аналіз

Попередньо пригадуємо властивості хорд у колі. Зокрема, звертаємо увагу на те, що діаметр, перпендикулярний до хорди, ділить її на дві рівні частини. Далі вже зовсім просто побудувати такий ланцюжок рівностей:

$$BP - AP = 2 \cdot AM - 2 \cdot AP = 2 \cdot PM = a.$$

Отже, трикутник PMO — прямокутний і його не складно побудувати за заданою гіпотенузою PO і катетом $MP = \frac{a}{2}$.

Побудова

На PO як на діаметрі будуємо коло, а потім із точки P проводимо дугу кола радіусом $\frac{a}{2}$ до перетину з побудованим внутрішнім колом у точці M. Тепер через точки P і M проводимо шукану хорду AB.

Зауваження.

Задача має два розв'язки: друга хорда, яка задовольняє умову задачі, проходить симетрично AB відносно прямої PO.

Приклад 7

Побудувати радіус r вписаного в заданий трикутник кола, якщо задана площа трикутника S і його півпериметр p.

Розв'язання задачі відносно просте: радіус вписаного кола нескладно знайти за формулою: $r = \frac{S}{p}$. При цьому необхідно зазначити, що в конструктивній геометрії площа S задається деяким прямокутником (або многокутником, який легко перетворити на прямокутник [5]). Тобто, площа задається двома відрізками m і n такими, що $S = mn$. А шуканий радіус вписаного кола можна побудувати за формулою: $r = \frac{m \cdot n}{p}$.

Дослідження

Розв'язання цієї задачі не викликає труднощів, оскільки шукана побудова відноситься до елементарних. Знайдемо відповідь на більш складне запитання: якому співвідношенню повинні задовольняти довжини відрізків m і n за фіксованого відрізка p, щоб задача мала розв'язок.

Спочатку скористаємося нерівністю між середнім геометричним і середнім арифметичним:

$$\sqrt[3]{(p-a)(p-b)(p-c)} \le$$
$$\le \frac{(p-a)+(p-b)+(p-c)}{3} = \frac{3p-2p}{3} = \frac{p}{3}.$$

Тобто, $(p-a)(p-b)(p-c) \le \frac{p^3}{27}$.

Тепер, ураховуючи останнє співвідношення із формули Герона $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, одержимо таку нерівність:

$$S = m \cdot n = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \le \sqrt{\frac{p^4}{27}} = \frac{p^2}{3\sqrt{3}}.$$

Отже, довжини відрізків m і n зв'язані співвідношенням:

$$m \cdot n \le \frac{p^2}{3\sqrt{3}}.$$

Це означає, що один із відрізків, (наприклад, $m \ge 0$), можна вибрати довільно. Тоді відрізок n повинен задовольняти подвійну нерівність:

$$0 < n \le \frac{p^2}{3\sqrt{3}m}.$$

Комбінований метод (застосування паралельного перенесення і геометричних місць точок) дозволяє легко розв'язати такі конструктивні задачі:

- ✓ побудувати трапецію за двома заданими основами і бічними сторонами;
- ✓ побудувати трапецію за двома заданими основами та її діагоналями.

Наступна задача виявляється набагато складнішою. Нам відомий тільки її алгебраїчний розв'язок.

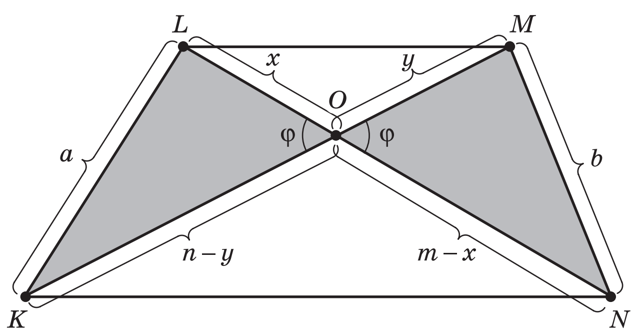
Приклад 8

Побудувати трапецію за заданими бічними сторонами a і b та за її діагоналями m і n [7].

Дослідження і побудова

Відомо декілька алгебраїчних розв'язків цієї задачі, розглянемо один із найпростіших. Уважатимемо, що шукана трапеція $KLMN$ побудована. Позначимо частини діагоналей, які одержимо в результаті їхнього перетину як x, $m-x$, y, $n-y$. Тепер, за теоремою Фалеса, легко знайти співвідношення між x та y:

$$\frac{x}{y}=\frac{m-x}{n-y}=\frac{m}{n} \Rightarrow y=\frac{nx}{m}.$$



Застосуємо теорему косинусів до трикутників LOK і MON, одержимо такі співвідношення:

$$\left.\begin{aligned} a^2 &= x^2+(n-y)^2-2x(n-y)\cos\varphi \\ b^2 &= y^2+(m-x)^2-2y(m-x)\cos\varphi \end{aligned}\right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x^2+(n-y)^2-a^2}{2x(n-y)}=\frac{y^2+(m-x)^2-b^2}{2y(m-x)}.$$

Далі, ураховуючи, що $y=\frac{nx}{m}$, після нескладних перетворень матимемо:

$$x=\frac{m}{2}+\frac{m(a^2-b^2)}{2(m^2-n^2)},\ \ y=\frac{n}{2}+\frac{n(a^2-b^2)}{2(m^2-n^2)},$$

$$m-x=\frac{m}{2}-\frac{m(a^2-b^2)}{2(m^2-n^2)},\ \ n-y=\frac{n}{2}-\frac{n(a^2-b^2)}{2(m^2-n^2)}.$$

Побудови цих чотирьох відрізків не викликають особливих труднощів, хоча вони дещо громіздкі і вимагають відповідних навичок.

Тепер побудова шуканої трапеції $KLMN$ зводиться до побудови трикутників LOK і MON, за сторонами a, x, $n-y$ і b, y, $m-x$ відповідно.

Зауваження

Очевидно, що задача має розв'язок не завжди. Наприклад, спочатку можна взяти сторону й одну з діагоналей.

При цьому можливо, що друга діагональ виявитися або занадто короткою, або занадто довгою навіть для того, щоб можна було побудувати чотирикутник. Із останніх алгебраїчних співвідношень випливає, що за заданими в умові задачі відрізками трапецію можливо побудувати лише у випадку, коли виконується нерівність:

$$0<\left|\frac{a^2-b^2}{m^2-n^2}\right|<1.$$

У випадку, коли $a=b$, $m=n$, попередні формули стають невизначеними, а задача має безліч розв'язків (можна побудувати як завгодно багато рівнобедрених трапецій, які задовольняють умову задачі).

Приклад 9 (Задача з «Начал» Евкліда)

Поділити заданий відрізок на дві частини так, щоб площа прямокутника, побудованого на цьому відрізку і на одній його частині, дорівнювала площі квадрата, побудованого на іншій його частині.

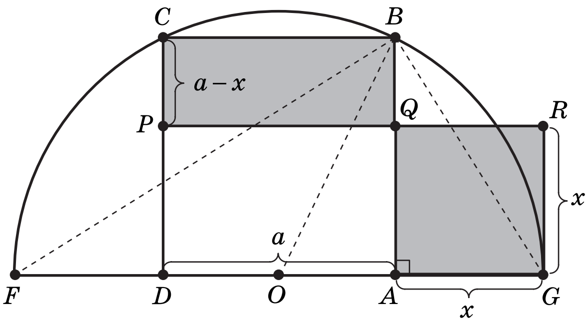
Розв'язання

Спосіб 1. Дослідження і побудова

Побудуємо на заданому відрізку AB, довжина якого дорівнює a, квадрат $ABCD$ і півколо радіусом OB (центр кола — точка O, належить AD і $OA=OD$) (*див. рис. на с. 12*).

На відрізку AG діаметра FG будуємо ще один, менший квадрат, потім продовжимо його сторону QR до перетину з відрізком AB у точці P.

При цьому точка Q ділить заданий відрізок так, що площа квадрата $AGRQ$ дорівнює площі прямокутника $PQBC$.



Доведемо це. За побудовою трикутник FBG прямокутний, тому виконується співвідношення: $AB^2 = AF \cdot AG = AF \cdot RG = DG \cdot GR$. Тобто, квадрат $ABCD$ і прямокутник $DGRP$ рівновеликі. Тепер, віднімаючи від площі кожного з них площу спільного прямокутника $AQPD$, одержимо шукане співвідношення: площа $PQBC$ дорівнює площі $AGRQ$.

Тобто, точка Q — шукана. Саме так задача розв'язана в Евкліда.

Спосіб 2. Дослідження і побудова

Нехай довжина заданого відрізка AB дорівнює a і шукана точка Q ділить цей відрізок на дві частини: $AQ = x$, $QB = a - x$. Тоді, за умовою задачі маємо: $a(a-x) = x^2$. Розв'яжемо це рівняння, виключаючи від'ємний корінь: $x = \frac{a}{2}\left(\sqrt{5}-1\right)$.

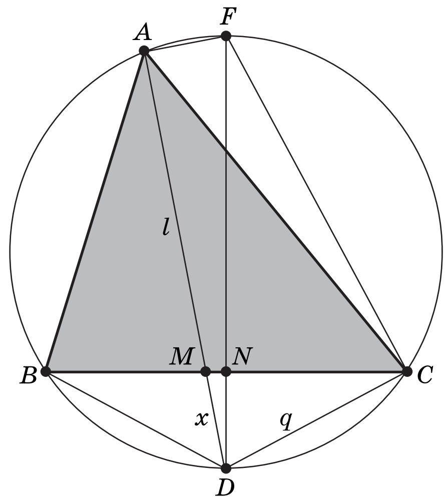
Тепер шуканий відрізок x нескладно побудувати за допомогою циркуля і лінійки. Очевидно, що алгебраїчний метод розв'язування цієї задачі виявився набагато простішим і більш доступним.

Кажуть, що такий поділ відрізка виконано «у крайньому і середньому відношенні», при якому більша частина відрізка є середнім пропорційним між усім відрізком та його меншою частиною. Такий переріз часто зустрічається під час розв'язування різноманітних математичних задач, його ще називають «золотим перерізом». Число $\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1{,}618033988749895\ldots$ визначає відношення двох частин відрізка, поділеного «золотим перерізом». Задача про золотий переріз уперше зустрічається у другій книзі «Начал» Евкліда.

Приклад 10 (Задача Паппа)*

Побудувати трикутник, якщо задані кут A, бісектриса цього кута l_a і сторона a [9].

Аналіз



Нехай шуканий трикутник ABC побудовано. Виконаємо додаткові побудови. Побудуємо описане навколо трикутника коло, проведемо бісектрису $AM = l_a = l$ кута A, продовження якої перетне відповідну дугу описаного кола у точці D (середина дуги). Проведемо також діаметр описаного кола DF, який перетне сторону трикутника BC у точці N. Нехай також $CD = q$, а $MD = x$. Отже, розв'язування задачі можна звести до побудови відрізка x.

Задачу доцільно розв'язувати алгебраїчним способом. Для цього треба знайти співвідношення між заданими відрізками і шуканим.

Розглянемо дві пари подібних прямокутних трикутників:

$$\Delta DNM \sim \Delta DAF.$$

Тому $\frac{x}{DN} = \frac{FD}{l+x} \;\Rightarrow\; x(l+x) = DN \cdot FD.$

$$\Delta FCD \sim \Delta CND.$$

Тому $\frac{FD}{CD} = \frac{CD}{DN} \;\Rightarrow\; DN \cdot FD = CD^2 = q^2.$

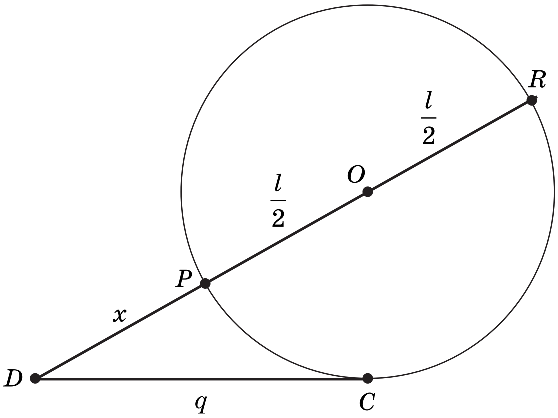
Отже, доведено, що $x(l+x) = q^2$.

* *Папп Александрійський* — давньогрецький математик другої половини III ст.

Побудова

Побудову шуканого трикутника почнемо з відкладання основи BC, побудови описаного кола і точки D.

Для зручності, подальші побудови проілюструємо на окремому рисунку, але всі побудови можна виконувати тільки на одному.



У точці C до прямої CD побудуємо дотичне коло радіусом $\frac{l}{2}$. Із точки D проведемо через центр кола січну PR. Маємо: $DP=x$, $PR=l$, $DC=q$. Тому, за відомою теоремою про січну і дотичну, виконується рівність: $x(l+x)=q^2$.

Тепер із точки D достатньо провести коло радіусом $DR=l+x$. Точки перетину цього кола з колом, описаним навколо шуканого трикутника (якщо вони існують), дадуть множину можливих вершин A шуканого трикутника.

Задача розв'язана.

Дослідження

Задача має розв'язки для довільних значень кута A і сторони a, але при цьому на величину бісектриси l_a накладаються такі обмеження:

$$0<l_a\le\frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{A}{2}.$$

Розв'язуючи рівняння $x(l+x)=q^2$, одержимо для шуканого відрізка x таке значення:

$$x=-\frac{l}{2}+\sqrt{\frac{l^2}{4}+q^2}.$$

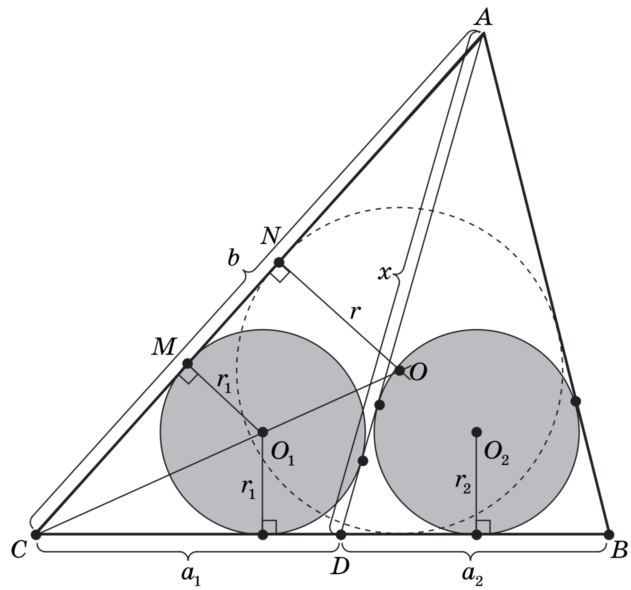
Другий розв'язок квадратного рівняння дає від'ємне значення довжини відрізка x, що неприпустимо. Отже, за припустимих даних задача має єдиний розв'язок.

Приклад 11
(З японської храмової геометрії Сангаку)

Розрізати заданий трикутник на два трикутники так, щоб радіуси кіл, які можна вписати в маленькі трикутники, були рівні [6].

Розв'язання

Нехай задано трикутник ABC, радіус вписаного кола якого дорівнює r. Нехай AD — відрізок, який забезпечує шуканий поділ заданого трикутника на два маленькі трикутники з рівними радіусами вписаних кіл r_1 і r_2.



1. Площа заданого трикутника дорівнює сумі площ двох маленьких трикутників, звідки легко одержуємо ланцюжок рівностей:

$$S=S_1+S_2 \;\Rightarrow\; pr=(p_1+p_2)r_1.$$

Далі, ураховуючи, що $p_1+p_2=p+x$, маємо: $pr=(p+x)r_1$.

$$\text{Або } \frac{r_1}{r}=\frac{p}{p+x}.$$

2. Тепер знайдемо відношення r_1 і r з іншої умови. Скористаємось для цього умовою, що кола O і O_1 подібні з центром подібності в точці C.

Тому $\frac{r_1}{r}=\frac{CM}{CN}$.

Легко бачити, що

$$CN=\frac{a+b-c}{2},\text{ а } CM=\frac{a_1+b-x}{2}.$$

Отже, $\frac{r_1}{r}=\frac{a_1+b-x}{a+b-c}$.

Аналогічно для іншої пари подібних кіл одержимо таке відношення:

$$\frac{r_1}{r}=\frac{a_2+c-x}{a+c-b}.$$

Тепер, скориставшись відомою властивістю додавання пропорцій, одержимо:

$$\frac{r_1}{r}=\frac{a_1+b-x+a_2+c-x}{a+b-c+a+c-b}=\frac{2p-2x}{2a}=\frac{p-x}{a},$$

або

$$\frac{r_1}{r}=\frac{p-x}{a}.$$

3. Порівнюючи попередні результати, знаходимо довжину відрізка $AD=x$:

$$\frac{r_1}{r}=\frac{p}{p+x}=\frac{p-x}{a}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ p^2-x^2=pa\ \Rightarrow\ x=\sqrt{p(p-a)}.$$

Тепер побудову шуканого відрізка AD нескладно виконати за допомогою алгебраїчного методу конструктивної геометрії.

ВИСНОВКИ

Складність математичної задачі є її невід'ємним атрибутом і головною сутністю поняття задачі загалом, і конструктивні задачі серед інших задач не виняток. Але і навчати і навчитися розв'язувати такі задачі можна. Цьому можуть сприяти відповідні теоретичні знання, методичні вказівки і досвід. Тому треба навчати учнів і студентів такому підходу до конструктивних задач, за якого задача виступає як об'єкт ретельного вивчення, а її розв'язання — як об'єкт конструювання і винаходу.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Александров И. И.* Сборник геометрических задач на построение. — М. : Учпедгиз, 1950. — 174 с.
2. *Аргунов Б. И., Балк М. Б.* Элементарная геометрия. — М. : Просвещение, 1966. — 366 с.
3. *Астряб О. М., Смогоржевський О. С.* та інші. Методика розв'язування задач на побудову. — К. : Радянська школа, 1960. — 387 с.
4. *Базылев В. Т.* и др. Сборник задач по геометрии (под редакцией Базылева В.Т.). — М. : Просвещение, 1980. — 238 с.
5. *Баран О. І., Калініченко Г. Л.* Практична спрямованість конструктивної геометрії // Питання удосконалення змісту і методики викладання фізики у середній і вищій школі. Вип. 12. — Миколаїв, 2006. — С. 99–107.
6. *Карлюченко А. В., Карлюченко О. А.* Сангаку. Японская Храмовая Геометрия. — К. : Сталь, 2012. — 247 с.
7. *Кушнір І. А.* Методи розв'язання задач з геометрії. — К. : Абрис, 1994. — 463 с.
8. *Лоповок Л. М.* Сборник задач по геометрии для 6–8 кл. — К. : Радянська школа, 1985. — 104 с.
9. *Моденов П. С.* Сборник задач по специальному курсу элементарной математики. — М. : Советская наука, 1957. — 666 с.
10. *Назаретский В. Е., Федин Н. Г.* Задачник-практикум по элементарной геометрии. — М. : Просвещение, 1965. — 163 с.
11. *Тесленко І. Ф.* та інші. Практикум з розв'язування задач. Геометрія. — К. : Вища школа, 1978. — 208 с.
12. *Энциклопедия* элементарной математики. Книга IV. Геометрия. — М. : Физматгиз, 1963. — 567 с.

У навчанні дітей треба прагнути до того, щоб поступово поєднувати знання і вміння. З усіх наук математика, здається, єдина, що спроможна задовольнити цю вимогу якнайповніше.

І. Кант