СИМЕТРІЯ В АЛГЕБРІ І РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ОДНОРІДНИХ СИМЕТРИЧНИХ ДІОФАНТОВИХ РІВНЯНЬ ЧЕТВЕРТОГО СТЕПЕНЯ І НЕ ТІЛЬКИ*

А. В. Носенко, с. Семенівка, Каховський р-н, Херсонська обл.

ІІ СПОСІБ РОЗКЛАДАННЯ НА МНОЖНИКИ ОДНОРІДНОГО СИМЕТРИЧНОГО МНОГОЧЛЕНА $P(x;y)$ ЧЕТВЕРТОГО СТЕПЕНЯ

Розв'язати рівняння

$$2x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + 2y^4 = 48,$$

$x \neq 0,\ y \neq 0$ у цілих числах.

Розв'язання

Розкладемо ліву частину на множники:

$$\frac{2x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + 2y^4}{y^4} \cdot y^4 = \left(2\left(\frac{x}{y}\right)^4 - \left(\frac{x}{y}\right)^3 + \left(\frac{x}{y}\right)^2 - \frac{x}{y} + 2\right) \cdot y^4 = P(x;y);$$

Нехай $\dfrac{x}{y} = z,\ x \neq 0,\ z \neq 0$, тоді

$$P = \left(\frac{2z^4 - z^3 + z^2 - z + 2}{z^2}\right) \cdot z^2 \cdot y^4 =$$

$$= \left(2z^2 - z + 1 - \frac{1}{z} + \frac{2}{z^2}\right) \cdot z^2 \cdot y^4 =$$

$$= 2\left(\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right) - \left(z + \frac{1}{z}\right) + 1\right) \cdot z^2 \cdot y^4.$$

Нехай $z + \dfrac{1}{z} = u$, тоді $z^2 + 2z \cdot \dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{z^2} = u^2;\ z^2 + \dfrac{1}{z^2} = u^2 - 2$, тоді

$$P = \left(2\left(u^2 - 2\right) - u + 1\right) \cdot z^2 \cdot y^4 = \left(2u^2 - u - 3\right) \cdot z^2 \cdot y^4.$$

Розкладаємо квадратний тричлен відносно u на множники:

$$D = 1 - 4 \cdot 2 \cdot (-3) = 1 + 24 = 25,\ \sqrt{D} = 5,$$

* Закінчення. Початок див. у № 16–18 (568–570).

$$u_1 = \frac{1-5}{4} = -1,\ u_2 = \frac{1+5}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}.$$

Маємо:

$$P = 2(u+1)\left(u-\frac{3}{2}\right)\cdot z^2\cdot y^4 =$$

$$= 2\left(z+\frac{1}{z}+1\right)\left(z+\frac{1}{z}-\frac{3}{2}\right)\cdot z^2\cdot y^4 =$$

$$= 2\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+1\right)\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-\frac{3}{2}\right)\cdot z^2\cdot y^4 =$$

$$= 2\cdot\frac{x^2+xy+y^2}{xy}\cdot\frac{2x^2-3xy+2y^2}{2xy}\cdot z^2\cdot y^4 =$$

$$= \frac{\left(x^2+xy+y^2\right)\left(2x^2-3xy+2y^2\right)}{x^2y^2}\cdot\frac{x^2}{y^2}\cdot y^4 =$$

$$= \left(x^2+xy+y^2\right)\left(2x^2-3xy+2y^2\right).$$

Далі розв'язуємо рівняння:

$$\left(x^2+xy+y^2\right)\left(2x^2-3xy+2y^2\right) = 48 \text{ (}\textit{див. завдання 4}\text{)}.$$

Відповідь. $(-1;2)$, $(1;-2)$, $(-2;1)$, $(2;-1)$.

Завдання 5

Розв'язати в цілих числах рівняння

$$18x^4-21x^3y-94x^2y^2-21xy^3+18y^4=-16.$$

Розв'язання

Нескладно побачити, що $x\neq 0,\ y\neq 0$.

Виразимо ліву частину через $u=x+y,\ v=xy$,

$$18\left(x^4+y^4\right)-21xy\left(x^2+y^2\right)-94x^2y^2 = 18S_4-21v\cdot S_2-94v^2 =$$

$$= 18\left(u^4-4u^2v+2v^2\right)-21v\left(u^2-2v\right)-94v^2 = 18u^4-93u^2v-16v^2 =$$

$$= \left(3u^2-16v\right)\left(6u^2+v\right) = \left(3(x+y)^2-16xy\right)\left(6(x+y)^2+xy\right) =$$

$$= \left(3x^2-10xy+3y^2\right)\left(6x^2+13xy+6y^2\right) = (x-3y)(3x-y)(2x+3y)(3x+2y).$$

Маємо таке рівняння в цілих числах:

$$(x-3y)(3x-y)(2x+3y)(3x+2y) = -16;$$

-16 ділиться на $\pm1;\ \pm2;\ \pm4;\ \pm8;\ \pm16$.

Не порушуючи загальності міркувань, розв'яжемо рівняння:

$$\left(3x^2-10xy+3y^2\right)\left(6x^2+13xy+6y^2\right)=-16.$$

З усіх можливих випадків рівняння в цілих числах задовольняють пари: $(-1;1)$ і $(1;-1)$, які є розв'язками системи

$$\begin{cases}3x^2-10xy+3y^2=16,\\ 6x^2+13xy+6y^2=-1.\end{cases}$$

Відповідь. $(-1;1)$ і $(1;-1)$.

Завдання 6

Розв'язати рівняння

$$2x^4-x^3y+3x^2y^2-xy^3+2y^4=5$$

у цілих числах.

Розв'язання

Очевидно, що $x\neq 0$, $y\neq 0$.

Групуємо доданки:

$$2\left(x^4+y^4\right)-xy\left(x^2+y^2\right)+3x^2y^2=5.$$

Уводимо заміну: $u=x+y$, $v=xy$, $u\in\mathbb{Z}$, $v\in\mathbb{Z}$.

$$x^4+y^4=u^4-4u^2v+2v^2;\ x^2+y^2=u^2-2v.$$

Маємо:

$$2\left(u^4-4u^2v+2v^2\right)-v\left(u^2-2v\right)+3v^2=5;$$

$$2u^4-8u^2v+4v^2-u^2v+2v^2+3v^2=5;$$

$$2u^4-9u^2v+9v^2=5.$$

Розкладаємо ліву частину останнього рівняння на множники як квадратний тричлен відносно v.

$$9v^2-9u^2v+2u^4=9\left(v-v_1\right)\left(v-v_2\right);$$

$$D=81u^4-4\cdot 9\cdot 2u^4=81u^4-72u^4=9u^4,\ \sqrt{D}=3u^2;$$

$$v_1=\frac{9u^2-3u^2}{18}=\frac{6u^2}{18}=\frac{u^2}{3};\ v_2=\frac{9u^2+3u^2}{18}=\frac{12u^2}{18}=\frac{2}{3}u^2.$$

Маємо:

$$9v^2-9u^2v+2u^4=9\left(v-\frac{u^2}{3}\right)\left(v-\frac{2}{3}u^2\right)=$$

$$=\left(3v-u^2\right)\left(3v-2u^2\right)=\left(3xy-(x+y)^2\right)\left(3xy-2(x+y)^2\right)=$$

$$=\left(3xy-x^2-2xy-y^2\right)\left(3xy-2x^2-4xy-2y^2\right)=$$

$$=\left(x^2-xy+y^2\right)\left(2x^2+xy+2y^2\right).$$

Задане рівняння має вигляд:

$$\left(x^2-xy+y^2\right)\left(2x^2+xy+2y^2\right)=5. \qquad (*)$$

Дискримінанти обох множників відносно x (чи відносно y) від'ємні, отже, на множники вони не розкладаються і набувають додатних значень.

Крім того, $2x^2+xy+2y^2-x^2+xy-y^2=x^2+2xy+y^2\geq 0$, тобто перший множник не більше за другий.

Тоді останнє рівняння (*) рівносильне системі:

$$\begin{cases} x^2-xy+y^2=1, \\ 2x^2+xy+2y^2=5; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2-2xy+2y^2=2, \\ 2x^2+xy+2y^2=5. \end{cases}$$

Віднявши рівняння системи, дістанемо:

$$3xy=3,\ xy=1;$$

на множині цілих чисел маємо розв'язки $(1;1)$, $(-1;-1)$, які задовольняють рівняння системи.

Відповідь. $(1;1)$, $(-1;-1)$.

Завдання 7

Розв'язати в цілих числах рівняння

$$3x^4-8x^3y+14x^2y^2-8xy^3+3y^4=27.$$

Розв'язання

Нескладно побачити, що $x\neq 0$, $y\neq 0$.

Маємо:

$$3x^4-8x^3y+14x^2y^2-8xy^3+3y^4=$$

$$=3\left(x^4+y^4\right)-8xy\left(x^2+y^2\right)+14x^2y^2=$$

$$=3S_4-8v\cdot S_2+14v^2=$$

$$=3\left(u^4-4u^2v+2v^2\right)-8v\left(u^2-2v\right)+14v^2=$$

$$=3u^4-20u^2v+36v^2=36v^2-20u^2v+3u^4.$$

Одержаний квадратний тричлен (відносно v) має від'ємний дискримінант і не розкладається на множники з дійсними коефіцієнтами.

Тому необхідно застосувати інший спосіб розкладання на множники.

Метод невизначених коефіцієнтів

Подамо заданий у лівій частині рівняння многочлен у вигляді добутку двох квадратних тричленів, однорідних симетричних або однорідних несиметричних (коли другий утворюється з першого перестановкою x і y).

Нескладно довести такі теореми.

Теорема 1. Добуток двох однорідних симетричних многочленів другого степеня відносно x і y є однорідним симетричним многочленом четвертого степеня:

$$\left(ax^2+bxy+ay^2\right)\left(cx^2+dxy+cy^2\right)=a_1x^4+a_2x^3y+a_3x^2y^2+a_2xy^3+a_1y^4.$$

Теорема 2. Добуток двох однорідних несиметричних многочленів другого степеня відносно x і y (коли другий утворений із першого перестановкою x і y) є однорідним симетричним многочленом четвертого степеня:

$$\left(ax^2+bxy+cy^2\right)\left(cx^2+bxy+ay^2\right)=a_1x^4+a_2x^3y+a_3x^2y^2+a_2xy^3+a_1y^4.$$

Під час виконання завдання 7 скористаємося теоремою 2.

Тобто, нехай:

$$3x^4-8x^3y+14x^2y^2-8xy^3+3y^4=\left(ax^2+bxy+cy^2\right)\left(cx^2+bxy+ay^2\right).$$

Для знаходження коефіцієнтів a, b і c зазначимо, що остання рівність є тотожністю, у якій коефіцієнти при подібних доданках лівої і правої частин (після спрощення) мають бути рівними.

Перемножуємо квадратні тричлени правої частини тотожності:

$$\left(ax^2+bxy+cy^2\right)\left(cx^2+bxy+ay^2\right)=$$

$$=acx^4+abx^3y+a^2x^2y^2+bcx^3y+b^2x^2y^2+abxy^3+c^2x^2y^2+bcxy^3+acy^4=$$

$$=acx^4+(ab+bc)x^3y+\left(a^2+b^2+c^2\right)x^2y^2+(ab+bc)xy^3+acy^4.$$

(Цим доведена теорема 2, аналогічно доводиться теорема 1).

Порівняємо ліву і праву частини тотожності:

$$3x^4-8x^3y+14x^2y^2-8xy^3+3y^4=$$

$$=acx^4+(ab+bc)x^3y+\left(a^2+b^2+c^2\right)x^2y^2+(ab+bc)xy^3+acy^4,$$

маємо:

$$\begin{cases} ac = 3, \\ ab + bc = -8, \\ a^2 + b^2 + c^2 = 14. \end{cases}$$

Розв'язавши систему рівнянь, дістаємо: $a = 3$, $b = -2$, $c = 1$.

Отже,

$$3x^4 - 8x^3y + 14x^2y^2 - 8xy^3 + 3y^4 =$$
$$= \left(x^2 - 2xy + 3y^2\right)\left(3x^2 - 2xy + y^2\right).$$

Маємо рівняння $\left(x^2 - 2xy + 3y^2\right)\left(3x^2 - 2xy + y^2\right) = 27$ (*) у цілих числах.

Нескладно побачити, що $x \neq 0$, $y \neq 0$,

$$x^2 - 2xy + 3y^2 = x^2 - 2xy + y^2 + 2y^2 = (x - y)^2 + 2y^2 > 0,$$

$$3x^2 - 2xy + y^2 = 2x^2 + x^2 - 2xy + y^2 = 2x^2 + (x - y)^2 > 0.$$

Квадратні тричлени останнього рівняння мають від'ємні дискримінанти і не розкладаються на множники.

Множники лівої частини останнього рівняння (*) додатні, 27 ділиться на 1; 3; 9; 27.

Щоб розв'язати рівняння (*), треба розв'язати сукупність систем у цілих числах:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2 - 2xy + 3y^2 = 1, \\ 3x^2 - 2xy + y^2 = 27; \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 - 2xy + 3y^2 = 27, \\ 3x^2 - 2xy + y^2 = 1; \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 - 2xy + 3y^2 = 3, \\ 3x^2 - 2xy + y^2 = 9; \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 - 2xy + 3y^2 = 9, \\ 3x^2 - 2xy + y^2 = 3. \end{cases} \end{array}\right.$$

Перші дві системи цілих розв'язків не мають.

Третя система має розв'язки в цілих числах $(2;1)$, $(-2;-1)$.

Четверта система має розв'язки в цілих числах $(1;2)$, $(-1;-2)$.

Усі чотири розв'язки задовольняють рівняння.

Відповідь. $(1;2)$, $(2;1)$, $(-1;-2)$, $(-2;-1)$.

Нескладно показати, що коренем однорідного непарного степеня симетричного рівняння $P(x;y)=0$ є $(-y)$, якщо вважати x змінною, а y — параметром.

Справді, якщо

$$P(x;y)=$$
$$=a_1x^{2n-1}+a_2x^{2n-2}y+a_3x^{2n-3}y^2+\ldots+a_3x^2y^{2n-3}+a_2xy^{2n-2}+a_1y^{2n-1}=0,$$

то в результаті підстановки $(-y)$ на місце x маємо множину попарно протилежних доданків, тобто $P(x;y)=0$.

Отже, однорідний симетричний многочлен $P(x;y)$ непарного степеня ділиться на симетричний двочлен $x+y$.

Якщо позначити $P^{2n-1}(x;y)$ — однорідний симетричний многочлен непарного степеня, то $P^{2n-1}(x;y)=(x+y)\cdot P^{2n-2}(x;y)$.

Для розв'язування однорідного симетричного непарного степеня діофантового рівняння виду $P^{2n-1}(x;y)=a$, де $a\in\mathbb{Z}$ (зокрема $a=0$, $a=P$), розкладаємо цей многочлен на множники діленням на $x+y$, а далі розв'язуємо, як зазначено вище для однорідного симетричного многочлена парного степеня.

Завдання для самостійної роботи

Розв'яжіть рівняння в цілих числах:

1) $x^4-4x^3y-x^2y^2-4xy^3+y^4=-35$;
2) $2x^4-11x^3y+19x^2y^2-11xy^3+2y^4=5$;
3) $3x^4+x^3y+4x^2y^2+xy^3+3y^4=48$;
4) $3x^4+4x^3y+7x^2y^2+4xy^3+3y^4=3$;
5) $x^4-x^3y-xy^3+y^4=7$;
6) $x^4-9x^3y+22x^2y^2-9xy^3+y^4=6$.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Гельфонд А. О.* Решение уравнений в целых числах. 4-е изд. — М. : Наука, 1983.
2. *Лейфура В. М.* Діофантові рівняння. У світі математики. — К. : Радянська школа, 1985. — Вип. 16.
3. *Вороний О. М.* Готуємося до олімпіад з математики. — Х. : Вид. група «Основа», 2008.
4. *Болтянский В. Г., Виленкин Н. Я.* Симетрия в алгебре, 2-е изд. — М., 2002.
5. *Виленкин Н. Я.* и др. Алгебра, учебное пособие для 9-10 классов средних школ с математической специализацией. — М. : Просвещение, 1968.