ЗАДАЧІ, РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЯКИХ СПРИЯЄ РОЗВИТКУ ІНТУЇЦІЇ УЧНІВ

М. Ф. Бурляй, м. Чернігів

Одним із завдань шкільної математики є розвиток творчих здібностей людини. Важливим компонентом творчих здібностей людини є інтуїція. Природа інтуїції, яку потрібно було б знати для розробки процесу її розвитку, ще не встановлена. У різні часи філософи і психологи пропонували своє розуміння цього феномену мислення. Інтуїцію представляли «как некоторое божественное знание» (Платон); «как средство познания априорных истин» (І. Кант); «как чувственное созерцание» (Г. Гегель); «как неосознанную умственную деятельность» (І. Павлов); «как способность выявлять и использовать аналогии между разными идеями» (радянський фізик Яків Френкель) тощо [1, с. 24]. Існує така думка: «Інтуїція — це процес мислення, який відбувається на межі свідомості і підсвідомості».

Як і будь-яку якість інтелекту людини, інтуїцію можна розвивати в учнів за допомогою спеціально дібраних задач. Ці задачі повинні містити елементи вибору, збуджувати процеси в голові учня, які відповідають потрібному розвитку мислення.

Розглянемо задачі, розв'язування яких пов'язано з боротьбою принаймні двох гіпотез у свідомості учня. Ця боротьба розвиває критичне мислення учня і формує певний практичний досвід, який може бути використаний під час розв'язування інших задач.

Задача 1. Раціональним чи ірраціональним є число $\log_{\sqrt{3}} 2$?

Розв'язання

Покажемо, що число $\log_{\sqrt{3}} 2$ є ірраціональним. Припустимо, що число $\log_{\sqrt{3}} 2$ є раціональним, тобто

$$\log_{\sqrt{3}} 2 = \frac{p}{q},$$

де p — ціле, а q — натуральне. Тоді

$$\left(\sqrt{3}\right)^{\frac{p}{q}} = 2.$$

Підносячи обидві частини останньої рівності до степеня $2q$, дістанемо

$$3^{2p} = 2^{2q}.$$

Остання рівність неможлива, оскільки ліворуч — число непарне, а праворуч — парне.

Задача 2. Скільки із наведених тверджень є правильними, якщо розглянуті функції визначені на множині всіх дійсних чисел?

1) Сума двох зростаючих функцій — завжди зростаюча функція.
2) Різниця двох зростаючих функцій — завжди зростаюча функція.
3) Сума зростаючої і спадної функцій — завжди зростаюча функція.
4) Сума зростаючої і спадної функцій — завжди спадна функція.
5) Різниця зростаючої і спадної функцій — завжди спадна функція.
6) Різниця зростаючої і спадної функцій — завжди зростаюча функція.

Відповідь. Правильними є твердження 1) і 6).

Задача 3. Раціональними чи ірраціональними будуть числа $\alpha+\beta$, $\alpha-\beta$, $\alpha\cdot\beta$, $\frac{\alpha}{\beta}$, де α — раціональне число, а β — ірраціональне число.

Розв'язання

Покажемо ірраціональність числа $\alpha+\beta$. Ірраціональність інших чисел доводиться аналогічно. Припустимо, що $\alpha+\beta$ є числом раціональним, тобто

$$\alpha+\beta=r,$$

де r — раціональне число. Але тоді

$$\beta=r-\alpha,$$

що можливо, оскільки β — ірраціональне число, а $r-\alpha$ — число раціональне.

Задача 4. Нехай α і β — ірраціональні числа. Чи може α^{β} бути раціональним?

Відповідь. Може. Наприклад,

$$\left(\sqrt{3}\right)^{\log_{\sqrt{3}} 2} = 2.$$

Задача 5. Чи може послідовність, у якої один із будь-яких двох сусідніх членів є раціональним, а другий — ірраціональним числом, бути збіжною?

Відповідь. Може. Наприклад, послідовність $\frac{1}{1}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \frac{\sqrt{2}}{n}, \ldots$ є збіжною.

Задача 6. Парною чи непарною є функція

$$f(x) = \sin^2 x + \cos^2 x - 1?$$

Розв'язання

Оскільки

$$f(x) = \sin^2 x + \cos^2 x - 1 \equiv 0,$$

то $f(x)$ є означеною і парною, і непарною.

Зазначимо, що інтуїція в багатьох випадках виявляється ненадійною, оскільки твердження, яке, згідно з інтуїцією, повинно бути правильним, виявляється неправильним у результаті ретельної перевірки. Отже, обґрунтовувати за допомогою інтуїції правильність математичного твердження дуже небезпечно. Наприклад, добре відомо, що границя суми двох функцій, які мають границю, теж має границю; що сума двох неперервних функцій є функцією неперервною; сума двох диференційовних функцій є диференційовна. А що можна сказати про періодичність двох періодичних функцій? Ураховуючи попередній досвід, можна було б сформулювати твердження, що сума двох періодичних функцій є функція періодична, але це не завжди так. Розглянемо, наприклад, функцію

$$f(x) = A\sin ax + B\cos bx, \qquad (1)$$

де $a \neq b$, $a > 0$, $b > 0$, $A \neq 0$, $B \neq 0$. Функція $f(x)$ є сумою двох періодичних функцій із періодами

$$T_1 = \frac{2\pi}{a},\ T_2 = \frac{2\pi}{b}.$$

Але функція (1) не завжди буде періодичною. Справді, нехай функція $f(x)$ є періодичною з періодом T, тоді для всіх x з області визначення функції $f(x)$ має місце тотожність

$$A\sin a(x+T) + B\cos b(x+T) =$$
$$= A\sin ax + B\cos bx. \qquad (2)$$

Диференціюючи тотожність (2), дістанемо тотожність

$$Aa\cos a(x+T) - Bb\sin b(x+T) =$$
$$= Aa\cos ax - Bb\sin bx. \qquad (3)$$

Оскільки тотожності (2) і (3) правильні для всіх x, то покладемо

$$x = -\frac{T}{2}.$$

Тоді

$$A\sin a\frac{T}{2} + B\cos b\frac{T}{2} =$$
$$= -A\sin a\frac{T}{2} + B\cos b\frac{T}{2}, \qquad (4)$$
$$Aa\cos\frac{aT}{2} - Bb\sin\frac{bT}{2} =$$
$$= Aa\cos\frac{aT}{2} + Bb\sin\frac{bT}{2}. \qquad (5)$$

Звідки з рівностей (4) і (5) відповідно дістанемо:

$$2A\sin\frac{aT}{2} = 0,\ \frac{aT}{2} = n\pi,\ a = \frac{2n\pi}{T},$$

$$2B\sin\frac{bT}{2} = 0,\ \frac{bT}{2} = m\pi,\ b = \frac{2m\pi}{T},$$

де m і n — цілі числа. Отже,

$$\frac{a}{b} = \frac{n}{m}$$

є раціональним числом. Виявляється, що коли $\frac{a}{b}$ є ірраціональним числом, то функція $f(x)$ не є періодичною.

Література

1. *Новиков Н. Б.* 1000 аналогий, изменивших науку (новый взгляд на гениальность). — М. : ИП РАН, 2010. — 878 с.
2. *Ивашев-Мусатов О. С.* К изучению элементов математического анализа на внеклассных занятиях // Математика в школе. — 1970. — № 4.