ЗАДАЧІ З ПАРАМЕТРАМИ НА ЗНО*

О. В. Пліско, м. Харків

Як відомо, задачі з параметрами можуть бути різних типів. У пропонованій статті розглянемо тільки традиційні задачі, у яких вимагається розв'язати рівняння (нерівність, систему рівнянь) залежно від параметра. Розв'язання таких задач більш прозоре, ніж задач інших типів, але потребує від учнів глибоких знань властивостей рівнянь (нерівностей) та функцій, розуміння сутності рівносильних перетворень, методу інтервалів, добре сформованих умінь та навичок виконувати тотожні перетворення виразів тощо.

3 (Пробне ЗНО-2016) Розв'яжіть нерівність $\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}>a$ при всіх значеннях параметра a.

Розв'язання

Розглянемо нерівність при $a<0$.

ОДЗ: $\begin{cases} x\ge -a, \\ x\le a. \end{cases}$ Оскільки $a<0$, то в цьому випадку ОДЗ нерівності — порожня множина. Отже, нерівність не має розв'язків.

При $a=0$ дістанемо нерівність $\sqrt{x}+\sqrt{-x}>0$, яка також не має розв'язків.

Розглянемо нерівність при $a>0$.

У цьому випадку ОДЗ нерівності: $x\in[-a;a]$.

Оскільки обидві частини нерівності невід'ємні, то піднісши обидві її частини до квадрата, дістанемо $a+x+2\sqrt{a^2-x^2}+a-x>a^2$.

Нерівність $2\sqrt{a^2-x^2}>a^2-2a$ рівносильна

сукупності: $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a>0, \\ a^2-2a<0, \\ -a\le x\le a; \end{cases} \\ \begin{cases} a>0, \\ a^2-2a\ge 0, \\ 4a^2-4x^2>a^4-4a^3+4a^2; \end{cases} \end{array}\right.$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0<a<2, \\ -a\le x\le a; \end{cases} \\ \begin{cases} a\ge 2, \\ x^2<\dfrac{a^3(4-a)}{4}. \end{cases} \end{array}\right.$$

Розв'яжемо нерівність $x^2<\dfrac{a^3(4-a)}{4}$. Ця нерівність має розв'язки, якщо $\dfrac{a^3(4-a)}{4}>0$. Тобто, при $a\in(0;4)$. Тоді $|x|<\dfrac{\sqrt{a^3(4-a)}}{2}$, звідки $-\dfrac{\sqrt{a^3(4-a)}}{2}<x<\dfrac{\sqrt{a^3(4-a)}}{2}$ при $a\in[2;4)$ (урахували, що $a\ge 2$).

При $a\in[4;+\infty)$ нерівність розв'язків не має.

Відповідь. Якщо $a\in(-\infty;0]\cup[4;+\infty)$, то розв'язків немає; якщо $a\in(0;2)$, то $x\in[-a;a]$; якщо $a\in[2;4)$, то $x\in\left(-\dfrac{a\sqrt{4a-a^2}}{2};\dfrac{a\sqrt{4a-a^2}}{2}\right)$.

4 (ЗНО-2015, пробне) Розв'яжіть рівняння $\sqrt{2x-5a}\cdot\left(\sqrt{x^2+10x+25}-\sqrt{x^2-2ax+a^2}\right)=$ $=a\sqrt{2x-5a}$ залежно від параметра a.

Розв'язання

$$\sqrt{2x-5a}\cdot\left(\sqrt{x^2+10x+25}-\sqrt{x^2-2ax+a^2}\right)=$$
$$=a\sqrt{2x-5a}.$$
$$\sqrt{2x-5a}\cdot\left(\sqrt{(x+5)^2}-\sqrt{(x-a)^2}\right)-a\sqrt{2x-5a}=0.$$

Рівняння $\sqrt{2x-5a}\cdot(|x+5|-|x-a|-a)=0$ рівносильне сукупності:

$$\left[\begin{array}{l} x=2{,}5a, \\ \begin{cases} x\ge 2{,}5a, \\ |x+5|-|x-a|=a. \end{cases} \end{array}\right.$$

* Закінчення. Початок у № 12 (564).

Ця сукупність, а з ним і рівняння має корінь $x=2{,}5a$ при будь-яких значеннях параметра a.

Розв'яжемо рівняння $|x+5|-|x-a|=a$.

Визначимо нулі підмодульних виразів: $x=-5$, $x=a$.

Числа -5 і a мають різні випадки розташування залежно від параметра a.

1) Розглянемо випадок, коли $a>-5$.

При $x\in(-\infty;-5]$ рівняння набуває вигляду $-x-5+x-a=a$, звідки дістанемо рівняння $0x=2a+5$, яке має безліч коренів $x\in(-\infty;-5]$ при $a=-2{,}5$.

При $x\in(-5;a]$ рівняння набуває вигляду $x+5+x-a=a$, звідки $x=a-2{,}5$.

Визначимо, при яких значеннях параметра a корінь рівняння належить проміжку $(-5;a]$. Для цього розв'яжемо систему нерівностей $\begin{cases} a-2{,}5>-5, \\ a-2{,}5\le a; \end{cases}$ $\begin{cases} a>-2{,}5, \\ -2{,}5\le 0. \end{cases}$

Отже, при $a>-2{,}5$ $x=a-2{,}5$.

Визначимо значення параметра a, при яких корінь $x=a-2{,}5$ задовольняє умову $x\ge 2{,}5a$.

Для цього розв'яжемо нерівність $a-2{,}5\ge 2{,}5a$, звідки маємо $a\le -\frac{5}{3}$.

При $x\in(a;+\infty)$ рівняння набуває вигляду $x+5-x+a=a$, звідки дістанемо рівняння $0x=-5$, яке не має коренів.

2) Розглянемо випадок, коли $a=-5$. Рівняння набуває вигляду $|x+5|-|x+5|=-5$.

Це рівняння не має коренів.

3) Розглянемо випадок, коли $a<-5$.

При $x\in(-\infty;a]$ рівняння набуває вигляду $-x-5+x-a=a$, $0x=2a+5$. Це рівняння не має коренів при $a<-5$.

При $x\in(a;-5]$ рівняння набуває вигляду $-x-5-x+a=a$, звідки маємо: $x=-2{,}5$. Цей корінь не належить проміжку $(a;-5]$.

При $x\in(-5;+\infty)$ рівняння набуває вигляду $x+5-x+a=a$, $0x=-5$. Це рівняння не має коренів.

Відповідь.

✓ Якщо $a\in\left(-\infty;-\frac{5}{2}\right)\cup\left(-\frac{5}{3};+\infty\right)$, то $x=2{,}5a$;

✓ якщо $a=-\frac{5}{2}$, то $x\in(-\infty;-5]$;

✓ якщо $a\in\left(-\frac{5}{2};-\frac{5}{3}\right)$, то $x=2{,}5a$, $x=a-2{,}5$;

✓ якщо $a=-\frac{5}{3}$, то $x=-\frac{25}{4}$.

5 (ЗНО-2015, додаткова сесія) Розв'яжіть рівняння $\dfrac{\log_2^2(x-a)+(4x-1-4a)\log_2(x-a)}{\sqrt{(0{,}5)^{x-3-a}-(0{,}5)^{2x-1}}}=0$ залежно від значень параметра a.

Розв'язання

Рівняння рівносильне системі

$$\begin{cases} x>a, \\ (0{,}5)^{x-3-a}>(0{,}5)^{2x-1}, \\ \log_2^2(x-a)+(4x-1-4a)\log_2(x-a)=0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x>a, \\ x-3-a<2x-1, \\ \log_2(x-a)\left(\log_2(x-a)+4x-1-4a\right)=0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x>a, \\ x>-a-2, \\ \left[\begin{array}{l} \log_2(x-a)=0, \\ \log_2(x-a)=-4x+4a+1; \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x>a, \\ x>-a-2, \\ \left[\begin{array}{l} x=a+1, \\ \log_2(x-a)=-4x+4a+1. \end{array}\right. \end{cases}$$

Розв'яжемо рівняння

$$\log_2(x-a)=-4x+4a+1.$$

Оскільки функція $y=\log_2 t$ зростає на своїй області визначення, а функція $y=-4x+4a+1$ спадає на всій числовій прямій, то рівняння має не більше ніж один корінь.

Перевіримо, чи є $x=a+\frac{1}{2}$ коренем цього рівняння.

$$\log_2\left(a+\frac{1}{2}-a\right)=-4a-2+4a+1,$$

$\log_2\frac{1}{2}=-1$ — правильна рівність. Отже, $x=a+\frac{1}{2}$ — корінь цього рівняння.

Отже, маємо систему

$$\begin{cases}x>a,\\x>-a-2,\\\left[\begin{array}{l}x=a+\frac{1}{2},\\x=a+1;\end{array}\right.\end{cases}\quad\begin{cases}x>-a-2,\\\left[\begin{array}{l}x=a+1,\\x=a+\frac{1}{2}.\end{array}\right.\end{cases}$$

При $-a-2<a+\frac{1}{2}$, тобто при $a\in\left(-\frac{5}{4};+\infty\right)$ маємо: $\left[\begin{array}{l}x=a+1,\\x=a+\frac{1}{2}.\end{array}\right.$

При $\begin{cases}a+\frac{1}{2}\le -a-2,\\-a-2<a+1;\end{cases}$ тобто при $a\in\left(-\frac{3}{2};-\frac{5}{4}\right]$ маємо $x=a+1$.

При $-a-2>a+1$, тобто при $a\in\left(-\infty;-\frac{3}{2}\right]$ маємо, що коренів немає.

Відповідь

✓ Якщо $a\in\left(-\infty;-\frac{3}{2}\right]$, то коренів немає;

✓ якщо $a\in\left(-\frac{3}{2};-\frac{5}{4}\right]$, то $x=a+1$;

✓ якщо $a\in\left(-\frac{5}{4};+\infty\right)$, то $x=a+\frac{1}{2}$, $x=a+1$.

6 (ЗНО-2016, основна сесія) Розв'яжіть рівняння $\frac{\sqrt{x^2+(4a-4)x+4a^2}-2\sqrt{2a}}{5\cdot 5^{2x}-5^{a+x}-5^{a-1}+5^x}=0$ залежно від значень параметра a.

Розв'язання

Подане рівняння рівносильне системі

$$\begin{cases}\sqrt{x^2+(4a-4)x+4a^2}-2\sqrt{2a}=0,\\5\cdot 5^{2x}-5^{a+x}-5^{a-1}+5^x\ne 0;\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sqrt{x^2+(4a-4)x+4a^2}=2\sqrt{2a},\\5^x\cdot\left(5^{x+1}+1\right)-5^{a-1}\left(5^{x+1}+1\right)\ne 0;\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sqrt{x^2+(4a-4)x+4a^2}=2\sqrt{2a},\\\left(5^{x+1}+1\right)\left(5^x-5^{a-1}\right)\ne 0;\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sqrt{x^2+(4a-4)x+4a^2}=2\sqrt{2a},\\5^{x+1}\ne -1,\\5^x\ne 5^{a-1};\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sqrt{x^2+(4a-4)x+4a^2}=2\sqrt{2a},\\x\ne a-1.\end{cases}$$

Розв'яжемо рівняння

$$\sqrt{x^2+(4a-4)x+4a^2}=2\sqrt{2a}.$$

Це рівняння матиме розв'язки при $a\ge 0$.

Піднесемо обидві частини рівняння до квадрата, дістанемо $x^2+(4a-4)x+4a^2=8a$ (зауважимо, що ОДЗ рівняння врахована).

$$x^2+(4a-4)x+4a^2-8a=0,$$

$$x^2+4(a-1)x+4a^2-8a=0.$$

$$\frac{D}{4}=4(a-1)^2-4a^2+8a=4a^2-8a+4-4a^2+8a=4.$$

$$x_1=-2(a-1)+2=-2a+4,\ \ x_2=-2(a-1)-2=-2a.$$

Отже, маємо: $\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=-2a,\\x=-2a+4;\end{array}\right.\\x\ne a-1.\end{cases}$

Визначимо, при яких значеннях параметра a має місце рівність $-2a=a-1$, звідки $a=\frac{1}{3}$.

При $a=\frac{1}{3}$ інший корінь рівняння дорівнює $3\frac{1}{3}$.

Визначимо, при яких значеннях a має місце рівність $-2a+4=a-1$, звідки $a=\frac{5}{3}=1\frac{2}{3}$.

При $a=1\frac{2}{3}$ інший корінь рівняння дорівнює $-3\frac{1}{3}$.

Відповідь

- ✓ Якщо $a\in(-\infty;0)$, то коренів немає;
- ✓ якщо $a=\frac{1}{3}$, то $x=3\frac{1}{3}$;
- ✓ якщо $a=1\frac{2}{3}$, то $x=-3\frac{1}{3}$;
- ✓ якщо $a\in\left[0;\frac{1}{3}\right)\cup\left(\frac{1}{3};\frac{5}{3}\right)\cup\left(\frac{5}{3};+\infty\right)$,

  то $x=-2a$, $x=-2a+4$.

7 (ЗНО-2016, додаткова сесія) Розв'яжіть рівняння $\frac{\left(\sqrt{x+2a}-\sqrt{4-x}\right)\sin\frac{\pi x}{7}}{|x+6|-|x|+6}=0$ залежно від параметра a.

Розв'язання

Рівняння рівносильне системі

$$\begin{cases}\left(\sqrt{x+2a}-\sqrt{4-x}\right)\sin\frac{\pi x}{7}=0,\\ |x+6|-|x|+6\neq 0;\end{cases}$$

$$\begin{cases}x\geq -2a,\\ x\leq 4,\\ |x+6|-|x|+6\neq 0,\\ \left[\begin{array}{l}\sqrt{x+2a}-\sqrt{4-x}=0,\\ \sin\frac{\pi x}{7}=0;\end{array}\right.\end{cases}$$

$$\begin{cases}x\geq -2a,\\ x\leq 4,\\ |x+6|-|x|+6\neq 0,\\ \left[\begin{array}{l}x+2a=4-x,\\ \frac{\pi x}{7}=\pi n, n\in\mathbb{Z};\end{array}\right.\end{cases}\quad \begin{cases}x\geq -2a,\\ x\leq 4,\\ |x+6|-|x|+6\neq 0,\\ \left[\begin{array}{l}x=2-a,\\ x=7n, n\in\mathbb{Z}.\end{array}\right.\end{cases}$$

Розв'яжемо рівняння $|x+6|-|x|+6=0$.

При $x\in(-\infty;-6]$ рівняння набуває вигляду $-x-6+x+6=0$, $0x=0$. Отже, $x\in(-\infty;-6]$.

При $x\in(-6;0]$ рівняння набуває вигляду $x+6+x+6=0$, звідки $x=-6$ (не є коренем рівняння).

При $x\in(0;+\infty)$ рівняння набуває вигляду $x+6-x+6=0$, звідки маємо, що рівняння коренів не має.

Отже, $x\in(-\infty;-6]$ — розв'язки рівняння $|x+6|-|x|+6=0$. Тоді $|x+6|-|x|+6\neq 0$ при $x>-6$.

$$\begin{cases}x\geq -2a,\\ x\leq 4,\\ x>-6,\\ \left[\begin{array}{l}x=2-a,\\ x=7n, n\in\mathbb{Z}.\end{array}\right.\end{cases}$$

Якщо $-2a>4$, тобто при $a<-2$ система розв'язків не має.

Якщо $-2a\leq -6$, тоді $a\geq 3$ система набуває вигляду $\begin{cases}-6<x\leq 4,\\ \left[\begin{array}{l}x=2-a,\\ x=7n, n\in\mathbb{Z}.\end{array}\right.\end{cases}$

Зрозуміло, що рівняння $x=7n$, де $n\in\mathbb{Z}$, має тільки один корінь $x=0$, що задовольняє систему.

Визначимо значення параметра a, при яких корінь $x=2-a$ задовольняє нерівність $-6<x\leq 4$.

$-6<2-a\leq 4$, звідки $a\in[-2;8)$.

Отже, при $a\in[3;8)$ маємо: $x=0$, $x=2-a$.

Якщо $-6<-2a<4$, тобто при $a\in(-2;3)$ маємо систему $\begin{cases}-2a\leq x\leq 4,\\ \left[\begin{array}{l}x=2-a,\\ x=7n, n\in\mathbb{Z}.\end{array}\right.\end{cases}$

Визначимо значення параметра a, при яких корінь $x=2-a$ задовольняє нерівність $-2a\leq x\leq 4$. Для цього розв'яжемо систему $\begin{cases}-2a\leq 2-a,\\ 2-a\leq 4,\end{cases}$ звідки маємо $a\geq -2$.

Отже, при $a\in[-2;3)$ маємо $x=2-a$.

Визначимо значення параметра a, при яких корінь $x=0$ задовольняє нерівність $-2a\leq 0$.

$a\geq 0$.

Отже, при $a\in[-2;0)$ рівняння має корінь $x=2-a$, при $a\in[0;2)\cup(2;3)$ рівняння має корені $x=2-a$, $x=0$. При $a=2$ рівняння має корінь $x=0$.

Відповідь

- ✓ Якщо $a\in(-\infty;-2)$, то коренів немає;
- ✓ якщо $a\in[-2;0)$, то $x=2-a$;
- ✓ якщо $a\in[0;2)\cup(2;8)$, то $x=2-a$, $x=0$;
- ✓ якщо $a\in\{2\}\cup[8;+\infty)$, то $x=0$.

8 (Пробне, ЗНО-2017) Розв'яжіть рівняння $\dfrac{3x^2-6ax-a+2^{\log_2(x-a)}}{|\cos(\pi x)+1|-1}=0$ залежно від значень параметра a.

Розв'язання

Рівняння рівносильне системі

$$\begin{cases} x>a,\\ 3x^2-6ax-a+x-a=0,\\ |\cos(\pi x)+1|\neq 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x>a,\\ 3x^2+(1-6a)x-2a=0,\\ \cos(\pi x)+1\neq 1,\\ \cos(\pi x)+1\neq -1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x>a,\\ 3x^2+(1-6a)x-2a=0,\\ \cos(\pi x)\neq 0,\\ \cos(\pi x)\neq -2; \end{cases} \quad \begin{cases} x>a,\\ 3x^2+(1-6a)x-2a=0,\\ x\neq \dfrac{1}{2}+n, n\in\mathbb{Z}. \end{cases}$$

Розв'яжемо квадратне рівняння

$$3x^2+(1-6a)x-2a=0.$$

$$D=(1-6a)^2+24a=1+12a+36a^2=(1+6a)^2.$$

При $a=-\dfrac{1}{6}$ рівняння має єдиний корінь $x=-\dfrac{1}{3}$, але цей корінь не задовольняє систему.

$$x_1=\frac{6a-1+1+6a}{6}=2a;\quad x_2=\frac{6a-1-1-6a}{6}=-\frac{1}{3}.$$

При $a>0$ корінь $x=2a$ задовольняє нерівність $x>a$.

Визначимо, при яких значеннях параметра $a>0$ корінь $x=2a$ задовольняє умову $x\neq\dfrac{1}{2}+n$, де $n\in\mathbb{Z}$. Для цього розв'яжемо рівняння $2a=\dfrac{1}{2}+n$, звідки $a=\dfrac{1}{4}+\dfrac{n}{2}$, $n\in\mathbb{Z}$.

Отже, при $a>0$ і $a\neq\dfrac{1}{4}+\dfrac{n}{2}$, $n=0, 1, 2, \ldots$ маємо корінь $x=2a$.

При $a<-\dfrac{1}{3}$ система матиме розв'язок $x=-\dfrac{1}{3}$.

Відповідь. Якщо $a\in\left(-\infty;-\dfrac{1}{3}\right)$, то $x=-\dfrac{1}{3}$; якщо $a\in\left[-\dfrac{1}{3};0\right]$ і $a=\dfrac{1}{4}+\dfrac{n}{2}$, де $n=0, 1, 2,\ldots$, то коренів немає; якщо $a\in(0;+\infty)$ і $a\neq\dfrac{1}{4}+\dfrac{n}{2}$, де $n=0, 1, 2,\ldots$, то $x=2a$.

9 (ЗНО-2017, додаткова сесія) Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases}(2x+a)^2=(2y+a)^2,\\ \sqrt{3ax-8x-6y}=x\end{cases}$ залежно від значень параметра a.

Розв'язання

Подана система рівнянь рівносильна системі

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} 2x+a=2y+a,\\ 2x+a=-2y-a, \end{array}\right.\\ x\geq 0,\\ 3ax-8x-6y=x^2; \end{cases} \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=y,\\ x+y=-a, \end{array}\right.\\ x\geq 0,\\ x^2+(8-3a)x+6y=0; \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=y,\\ x\geq 0,\\ x^2+(8-3a)x+6y=0; \end{cases}\\ \begin{cases} y=-a-x,\\ x\geq 0,\\ x^2+(8-3a)x+6y=0; \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=y,\\ x\geq 0,\\ x^2+(14-3a)x=0; \end{cases}\\ \begin{cases} y=-a-x,\\ x\geq 0,\\ x^2+(2-3a)x-6a=0; \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=y,\\ x\geq 0,\\ x(x+14-3a)=0; \end{cases}\\ \begin{cases} y=-a-x,\\ x\geq 0,\\ (x-3a)(x+2)=0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Розв'яжемо першу систему сукупності

$$\begin{cases} x = y, \\ x \ge 0, \\ \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = 3a - 14. \end{array}\right. \end{cases}$$

$(0;0)$ — розв'язок системи при будь-яких значеннях параметра a.

Визначимо значення параметра a, при яких $x = 3a - 14 > 0$. Маємо: $a > \frac{14}{3} = 4\frac{2}{3}$.

Отже, при $a \in \left(4\frac{2}{3};+\infty\right)$ маємо другий розв'язок системи $(3a-14;3a-14)$.

Розв'яжемо другу систему сукупності

$$\begin{cases} y = -a - x, \\ x \ge 0, \\ (x - 3a)(x + 2) = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -a - x, \\ x \ge 0, \\ \left[\begin{array}{l} x = 3a, \\ x = -2; \end{array}\right. \end{cases} \quad \begin{cases} y = -a - x, \\ x \ge 0, \\ x = 3a. \end{cases}$$

Очевидно, що ця система має розв'язки при $a \ge 0$. Це розв'язки $(3a;-4a)$.

Відповідь.

- ✓ Якщо $(-\infty;0]$, то розв'язок системи $(0;0)$;
- ✓ якщо $a \in \left(0;4\frac{2}{3}\right]$, то розв'язки системи $(0;0)$, $(3a;-4a)$;
- ✓ якщо $a \in \left(4\frac{2}{3};+\infty\right)$, то розв'язки системи $(3a-14;3a-14)$, $(0;0)$, $(3a;-4a)$.

10 (ЗНО-2017, основна сесія) Розв'яжіть систему рівнянь

$$\begin{cases} |x - y| = |x - a|, \\ \lg(y - a) = \lg\left(4a^2 + x - x^2\right) \end{cases}$$

залежно від значень параметра a.

Розв'язання

Подана система рівносильна сукупності

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x - y = x - a, \\ \lg(y - a) = \lg\left(4a^2 + x - x^2\right), \end{cases} \\ \begin{cases} x - y = a - x, \\ \lg(y - a) = \lg\left(4a^2 + x - x^2\right); \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = a, \\ \lg(y - a) = \lg\left(4a^2 + x - x^2\right), \end{cases} \\ \begin{cases} y = 2x - a, \\ \lg(y - a) = \lg\left(4a^2 + x - x^2\right). \end{cases} \end{array}\right.$$

Перша система сукупності не має розв'язків.

Розв'яжемо другу систему сукупності.

$$\begin{cases} y = 2x - a, \\ \lg(2x - 2a) = \lg\left(4a^2 + x - x^2\right); \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2x - a, \\ 2x - 2a = 4a^2 + x - x^2, \\ x > a; \end{cases} \quad \begin{cases} y = 2x - a, \\ x^2 + x - 2a - 4a^2 = 0, \\ x > a. \end{cases}$$

Розв'яжемо рівняння $x^2 + x - 2a - 4a^2 = 0$.

$$D = 1 + 8a + 16a^2 = (1 + 4a)^2.$$

При $a = -\frac{1}{4}$ маємо $x = -\frac{1}{2}$, тоді система набуває вигляду

$$\begin{cases} y = 2x + \frac{1}{4}, \\ x = -\frac{1}{2}, \\ x > -\frac{1}{4}. \end{cases}$$

Ця система не має розв'язків.

Якщо $D > 0$, то рівняння має такі корені:

$$x_1 = \frac{-1 + 1 + 4a}{2} = 2a, \quad x_2 = \frac{-1 - 1 - 4a}{2} = -1 - 2a.$$

Визначимо значення параметра a, при яких корені рівняння задовольняють умову $x > a$.

1) Оскільки $2a > a$ при $a > 0$, то при $a > 0$ система матиме такі розв'язки: $(2a;3a)$.

2) Оскільки $-1-2a>a$ при $a<-\frac{1}{3}$, то при $a<-\frac{1}{3}$ система має такі розв'язки:

$$(-1-2a;-2-5a).$$

Відповідь. Якщо $a\in\left(-\infty;-\frac{1}{3}\right)$, то система має розв'язки $(-2a-1;-5a-2)$; якщо $a\in\left[-\frac{1}{3};0\right]$, то розв'язків немає; якщо $a\in(0;+\infty)$, то система має розв'язки $(2a;3a)$.

11 Розв'яжіть рівняння

$$\log_3\left(31-\left|x^2-6x+5\right|\right)=a$$

залежно від значень параметра a.

Розв'язання

Задане рівняння рівносильне рівнянню $31-\left|x^2-6x+5\right|=3^a$ (ОДЗ урахована).

Рівняння $\left|x^2-6x+5\right|=31-3^a$ матиме корені за умови $31-3^a\geq 0$.

Якщо $31-3^a=0$, тобто $a=\log_3 31$, рівняння матиме два корені $x=1$, $x=5$.

Якщо $31-3^a>0$, тобто $a<\log_3 31$, маємо, що рівняння $\left|x^2-6x+5\right|=31-3^a$ рівносильне сукупності

$$\left[\begin{array}{l}x^2-6x+5=31-3^a,\\ x^2-6x+5=3^a-31;\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}x^2-6x+3^a-26=0,\\ x^2-6x+36-3^a=0.\end{array}\right.$$

Розв'яжемо кожне рівняння сукупності.

1) $x^2-6x+3^a-26=0$.

$$\frac{D}{4}=9+26-3^a=35-3^a.$$

Оскільки $\frac{D}{4}$ набуватиме додатних значень при $a<\log_3 31$, то рівняння $x^2-6x+3^a-26=0$ матиме два корені $x_{1,2}=3\pm\sqrt{35-3^a}$.

2) $x^2-6x+36-3^a=0$.

$$\frac{D}{4}=9-36+3^a=3^a-27.$$

При $a=3$ рівняння $x^2-6x+36-3^a=0$ має один корінь $x=3$.

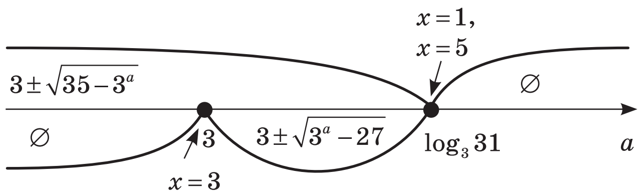
При $3<a<\log_3 31$ рівняння

$$x^2-6x+36-3^a=0$$

матиме два корені $x_{1,2}=3\pm\sqrt{3^a-27}$.

При $a<3$ рівняння $x^2-6x+36-3^a=0$ не має коренів.

Для наочності зобразимо на прямій значення параметра a і відповідні їм корені рівняння.



Відповідь

- ✓ Якщо $a\in(-\infty;3]$, то $x=3\pm\sqrt{35-3^a}$, $x=3$;
- ✓ якщо $a\in(3;\log_3 31)$, то $x=3\pm\sqrt{3^a-27}$, $x=3\pm\sqrt{35-3^a}$;
- ✓ якщо $a=\log_3 31$, то $x=1$, $x=5$;
- ✓ якщо $a\in(\log_3 31;+\infty)$, то коренів немає.

Офіційні дані зі звіту Українського центру оцінювання якості освіти

- ✓ *2015 року 16 034 учасників тестування складали поглиблений рівень тестових завдань, із них 40 отримали 6 балів за завдання з параметром.*
- ✓ *2016 року із 123 047 учасників тестування 135 отримали 6 балів за завдання з параметром.*
- ✓ *2017 року із 106 325 учасників тестування 319 отримали 6 балів за завдання з параметром.*