ПОЗАКЛАСНА РОБОТА

НЕСТАНДАРТНІ ЛОГАРИФМІЧНІ РІВНЯННЯ

С. О. Барановська, м. Мирноград, Донецька обл.

Я дивуюся тому, що ніхто не винайшов логарифмів раніше, такими вони здаються простими після того, як про них знаєш.

Г. Бріґґз, англійський математик

Відкриття логарифмів спричинило справжню революцію в математиці, особливо в галузі обчислень. Логарифмічні лінійки широко використовували для виконання інженерних розрахунків приблизно до початку 1980-х років, і хоча сьогодні їх практично витіснили з інженерного використання мікрокалькулятори, можна без сумніву сказати, що без логарифмів і, зокрема, логарифмічної лінійки не були б створені ні комп'ютери, ні калькулятори.

На початку XXI століття логарифмічні лінійки отримали друге народження в наручних годинниках: виробники деяких марок випустили моделі з убудованою логарифмічною лінійкою, шкали якої виконано у вигляді кілець, що обертаються навколо циферблата.

Їхнє достоїнство — можна відразу, на відміну від мікрокалькулятора, отримувати інформацію, що відповідає табличній формі подання (наприклад, таблиця витрат палива на пройдену відстань, переведення миль у кілометри, обчислення пульсу, визначення швидкості потяга тощо).

Отже, логарифми рано вважати історичним минулим. Тому ми розглянемо декілька нестандартних логарифмічних рівнянь, які можна пропонувати учням на заняттях гуртків і факультативів, для самостійного розв'язування, як завдання для шкільних олімпіад і інтелектуальних турнірів, для підготовки до ДПА і ЗНО.

РІВНЯННЯ 1

$$\left(1+\log_5 3\right)\cdot\log_{15}x=\log_5 28+\log_{0,2}(x-3).$$

Розв'язання

ОДЗ: $\begin{cases}x>0,\\x>3,\end{cases}\quad x\in(3;+\infty).$

$$\left(\log_5 5+\log_5 3\right)\cdot\log_{15}x=\log_5 28+\log_{\frac{1}{5}}(x-3),$$

$$\log_5 15\cdot\log_{15}x=\log_5 28-\log_5(x-3),$$

$$\log_5 15\cdot\frac{\log_5 x}{\log_5 15}=\log_5\frac{28}{x-3},$$

$$\log_5 x=\log_5\frac{28}{x-3},$$

$$x=\frac{28}{x-3},\quad x^2-3x-28=0,$$

звідки $x_1=-4\notin(3;+\infty)$ — сторонній корінь; $x_2=7$.

Відповідь. 7.

РІВНЯННЯ 2

$$\frac{1}{\log_7(5-x)}+\frac{3\log_{0,125}(x+3)}{\log_2(5-x)}=1.$$

Розв'язання

ОДЗ: $\begin{cases}5-x>0,\\5-x\neq 1,\\x+3>0,\end{cases}\quad\begin{cases}x<5,\\x\neq 4,\\x>-3,\end{cases}\quad x\in(-3;4)\cup(4;5).$

$$\log_{(5-x)}7+\frac{3\log_{2^{-3}}(x+3)}{\log_2(5-x)}=1,$$

$$\log_{(5-x)}7-\frac{\log_2(x+3)}{\log_2(5-x)}=1,$$

$$\log_{(5-x)}7-\log_{(5-x)}(x+3)=1,$$

$$\log_{(5-x)}\frac{7}{x+3}=\log_{(5-x)}(5-x),$$

$$\frac{7}{x+3}=5-x,$$

$$5x+15-x^2-3x-7=0,$$

$$x^2-2x-8=0,$$

звідки $x_1=-2$; $x_2=4\notin(-3;4)\cup(4;5)$ — сторонній корінь.

Відповідь. -2.

РІВНЯННЯ 3

$$2\log_x\left(4+\sqrt{x}\right)=2-\log_{\sqrt{x}}2.$$

Розв'язання

ОДЗ: $\begin{cases}x>0,\\ x\neq 1,\end{cases}$ $x\in(0;1)\cup(1;+\infty).$

$$\log_x\left(4+\sqrt{x}\right)^2=\log_x x^2-\log_x 4,$$

$$\log_x\left(4+\sqrt{x}\right)^2=\log_x\frac{x^2}{4},\quad \left(4+\sqrt{x}\right)^2=\frac{x^2}{4}.$$

Ураховуючи ОДЗ, маємо $4+\sqrt{x}=\dfrac{x}{2}$, звідки $x=8+2\sqrt{x}$, $x-2\sqrt{x}-8=0.$

Нехай $\sqrt{x}=t.$

Тоді $t^2-2t-8=0$, $t_1=-2$, $t_2=4.$

Повертаючись до початкової змінної, маємо:

$\sqrt{x}=-2$ — коренів немає;

$$\sqrt{x}=4,\quad x=16.$$

Відповідь. $16.$

РІВНЯННЯ 4

$$\log_3 x-\frac{2}{1+\log_x 27}=\frac{6}{3+\log_3 x}.$$

Розв'язання

ОДЗ: $\begin{cases}x>0,\\ x\neq 1,\\ \log_x 27\neq -1,\\ \log_3 x\neq -3,\end{cases}$ $\begin{cases}x>0,\\ x\neq 1,\\ x\neq \dfrac{1}{27},\end{cases}$

$$x\in\left(0;\frac{1}{27}\right)\cup\left(\frac{1}{27};1\right)\cup(1;+\infty).$$

$$\log_3 x-\frac{2}{1+\dfrac{3}{\log_3 x}}=\frac{6}{3+\log_3 x}.$$

Нехай $\log_3 x=t$. Тоді $t-\dfrac{2}{1+\dfrac{3}{t}}=\dfrac{6}{3+t}$,

$$t-\frac{2t}{3+t}-\frac{6}{3+t}=0,\quad t-\frac{2(t+3)}{t+3}=0.$$

Рівняння рівносильне системі $\begin{cases}t=2,\\ t\neq -3,\end{cases}$ звідки маємо: $t=2.$

Повертаючись до початкової змінної, маємо $\log_3 x=2$, $x=9.$

Відповідь. $9.$

РІВНЯННЯ 5

$$1+\log_x(5-x)=\log_7 4\cdot\log_x 7.$$

Розв'язання

ОДЗ: $\begin{cases}5-x>0,\\ x>0,\\ x\neq 1,\end{cases}$ $x\in(0;1)\cup(1;5).$

$$\log_x x+\log_x(5-x)=\log_x 7^{\log_7 4},$$

$$\log_x\left(x(5-x)\right)=\log_x 4,$$

$$5x-x^2-4=0,\quad x^2-5x+4=0,$$

звідки $x_1=1$ — сторонній корінь; $x_2=4$,

Відповідь. $4.$

РІВНЯННЯ 6

$$\left(\log_9(7-x)+1\right)\cdot\log_{(3-x)}3=1.$$

Розв'язання

ОДЗ: $\begin{cases}7-x>0,\\ 3-x>0,\\ 3-x\neq 1,\end{cases}$ $\begin{cases}x<7,\\ x<3,\\ x\neq 2,\end{cases}$ $x\in(-\infty;2)\cup(2;3).$

$$\left(\log_9(7-x)+\log_9 9\right)\cdot\log_{(3-x)}3=1,$$

$$\log_9\left(9\cdot(7-x)\right)\cdot\frac{1}{\log_3(3-x)}=1,$$

$$\log_3\left(9\cdot(7-x)\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{\log_3(3-x)}=1,$$

$$\log_3\left(9\cdot(7-x)\right)^{\frac{1}{2}}=\log_3(3-x),$$

$$\sqrt{63-9x}=3-x,$$

$$63-9x=9-6x+x^2,$$

$$x^2+3x-54=0,$$

звідки $x_1=-9$, $x_2=6\notin(-\infty;2)\cup(2;3)$ — сторонній корінь.

Відповідь. $-9.$

РІВНЯННЯ 7

$$\lg^2 x-\lg x^6-\lg^2 3+9=0.$$

Розв'язання

ОДЗ: $x>0$, $x\in(0;+\infty).$

$\lg^2 x-6\lg x-\lg^2 3+9=0$ — квадратне рівняння відносно $\lg x$. Тоді

$$D=36-4\left(-\lg^2 3+9\right)=36+4\lg^2 3-36=4\lg^2 3,$$

$$\lg x_1 = \frac{6+2\lg 3}{2} = 3+\lg 3 = \lg 1000 + \lg 3 = \lg 3000,$$

$$x_1 = 3000;$$

$$\lg x_2 = \frac{6-2\lg 3}{2} = 3-\lg 3 = \lg 1000 - \lg 3 = \lg\frac{1000}{3},$$

$$x_2 = \frac{1000}{3}.$$

Відповідь. $3000,\ \frac{1000}{3}$.

РІВНЯННЯ 8

$$\sqrt{\log_{\sqrt{x}}(5x)}\cdot\log_5 x = -2.$$

Розв'язання

ОДЗ: $\begin{cases} x>0, \\ x\neq 1, \\ \log_{\sqrt{x}}(5x)\geq 0. \end{cases}$

Оскільки знаходження ОДЗ цього рівняння є досить громіздким, з'ясуємо, чи не є знайдені корені сторонніми, шляхом безпосередньої перевірки.

$$\sqrt{\left(\log_x(5x)\right)^2}\cdot\frac{1}{\log_x 5} = -2,$$

$$\sqrt{\left(\log_x(5x)\right)^2} = -2\cdot\log_x 5,$$

$$\sqrt{2\left(\log_x 5 + \log_x x\right)} = -2\log_x 5.$$

Нехай $\log_x 5 = t$, тоді:

$$\sqrt{2(t+1)} = -2t,$$

Це рівняння рівносильне системі

$$\begin{cases} 2(t+1)=4t^2, \\ t\leq 0; \end{cases}\quad 2(t+1)=4t^2,\quad \begin{cases} 2t^2-t-1=0, \\ t\leq 0; \end{cases}$$

звідки маємо: $t=-\frac{1}{2}$. Повертаючись до початкової змінної, маємо:

$$\log_x 5 = -\frac{1}{2},$$

звідки $x=\frac{1}{25}$.

Перевірка

$$\sqrt{\log_{\sqrt{\frac{1}{25}}}\left(5\cdot\frac{1}{25}\right)}\cdot\log_5\frac{1}{25} = \sqrt{\log_{\frac{1}{25}}\left(\frac{1}{5}\right)^2}\cdot(-2) = 1\cdot(-2) = -2;$$

$-2=-2$ — рівність правильна.

Відповідь. $\frac{1}{25}$.

РІВНЯННЯ 9

$$\lg^2\left(1+\frac{4}{x}\right)+\lg^2\left(1-\frac{4}{x+4}\right)=2\lg^2\left(\frac{2}{x-1}-1\right).$$

Розв'язання

ОДЗ: $\begin{cases} 1+\frac{4}{x}>0, \\ 1-\frac{4}{x+4}>0, \\ \frac{2}{x-1}-1>0, \end{cases}\quad \begin{cases} \frac{x+4}{x}>0, \\ \frac{x}{x+4}>0, \\ \frac{3-x}{x-1}>0, \end{cases}\quad \begin{cases} x(x+4)>0, \\ (3-x)(x-1)>0, \end{cases}$

$x\in(1;3)$.

$$\lg^2\left(\frac{x+4}{x}\right)+\lg^2\left(\frac{x}{x+4}\right)=2\lg^2\left(\frac{3-x}{x-1}\right),$$

$$\lg^2\left(\frac{3-x}{x-1}\right)-\lg^2\left(\frac{x+4}{x}\right)+\lg^2\left(\frac{3-x}{x-1}\right)-\lg^2\left(\frac{x}{x+4}\right)=0,$$

$$\left(\lg\left(\frac{3-x}{x-1}\right)+\lg\left(\frac{x+4}{x}\right)\right)\left(\lg\left(\frac{3-x}{x-1}\right)-\lg\left(\frac{x+4}{x}\right)\right)+$$

$$+\left(\lg\left(\frac{3-x}{x-1}\right)+\lg\left(\frac{x}{x+4}\right)\right)\left(\lg\left(\frac{3-x}{x-1}\right)-\lg\left(\frac{x}{x+4}\right)\right)=0,$$

$$\left(\lg\left(\frac{(3-x)(x+4)}{x(x-1)}\right)\right)\left(\lg\left(\frac{(3-x)x}{(x-1)(x+4)}\right)\right)+$$

$$+\left(\lg\left(\frac{(3-x)x}{(x-1)(x+4)}\right)\right)\left(\lg\left(\frac{(3-x)(x+4)}{x(x-1)}\right)\right)=0,,$$

$$\left(\lg\left(\frac{(3-x)(x+4)}{x(x-1)}\right)\right)\left(\lg\left(\frac{(3-x)x}{(x-1)(x+4)}\right)\right)=0.$$

Маємо:

$$\lg\left(\frac{(3-x)(x+4)}{x(x-1)}\right)=0 \text{ або } \lg\left(\frac{(3-x)x}{(x-1)(x+4)}\right)=0.$$

Розв'яжемо перше рівняння $\frac{(3-x)(x+4)}{x(x-1)}=1$, $x^2=6$, звідки, ураховуючи ОДЗ рівняння, маємо $x=\sqrt{6}$.

Корінь другого рівняння $x=\sqrt{2}$.

Відповідь. $\sqrt{2},\ \sqrt{6}$.

РІВНЯННЯ 10

$$\log_7|x-1|+\log_7\left(\frac{2x+9}{7x+9}\right)=0.$$

Розв'язання

ОДЗ: $\begin{cases} x-1\neq 0, \\ \frac{2x+9}{7x+9}>0, \end{cases}\quad \begin{cases} x\neq 1, \\ (2x+9)(7x+9)>0, \end{cases}$

$$x\in\left(-\infty;-\frac{9}{2}\right)\cup\left(-\frac{9}{7};1\right)\cup(1;+\infty).$$

$$\log_7\left(|x-1|\cdot\frac{2x+9}{7x+9}\right)=\log_7 1,$$

$$|x-1|\cdot\frac{2x+9}{7x+9}=1.$$

1) Якщо $x>1$, то $|x-1|=x-1$, тобто $\frac{(x-1)(2x+9)}{7x+9}=1$, звідки $2x^2-18=0$, $x=-3$ — не задовольняє умову $x>1$, або $x=3$;

2) якщо $x<1$, то $|x-1|=1-x$, тобто $\frac{(1-x)(2x+9)}{7x+9}=1$, звідки $2x^2+14x=0$, $x=-7$ або $x=0$.

Відповідь. -7; 0; 3.

РІВНЯННЯ 11

$$\left|\log_{\frac{1}{3}}(1+\sin 2x)\right|+\left|\log_{\frac{1}{3}}(1-\sin 2x)\right|=1.$$

Розв'язання

ОДЗ: $\sin 2x\neq\pm1$, $x\neq\pm\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$.

Нехай $\sin 2x=t$ $(|t|<1)$, тоді

$$\left|\log_{\frac{1}{3}}(1+t)\right|+\left|\log_{\frac{1}{3}}(1-t)\right|=1.$$

Областю визначення функції

$$f(t)=\left|\log_{\frac{1}{3}}(1+t)\right|+\left|\log_{\frac{1}{3}}(1-t)\right|$$

є проміжок $(-1;1)$. Цьому проміжку належить єдиний нуль функції $t=0$.

1) Якщо $t\in(-1;0]$, то

$$\left|\log_{\frac{1}{3}}(1+t)\right|=\log_{\frac{1}{3}}(1+t),\quad \left|\log_{\frac{1}{3}}(1-t)\right|=-\log_{\frac{1}{3}}(1-t),$$

тобто $\log_{\frac{1}{3}}(1+t)-\log_{\frac{1}{3}}(1-t)=1,$

$$\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1+t}{1-t}\right)=\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{3},\quad \frac{1+t}{1-t}=\frac{1}{3},\ \text{звідки}\ t=-\frac{1}{2};$$

2) якщо $t\in(0;1)$, то

$$\left|\log_{\frac{1}{3}}(1+t)\right|=-\log_{\frac{1}{3}}(1+t),\quad \left|\log_{\frac{1}{3}}(1-t)\right|=\log_{\frac{1}{3}}(1-t),$$

тобто $-\log_{\frac{1}{3}}(1+t)+\log_{\frac{1}{3}}(1-t)=1$, $\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1-t}{1+t}\right)=\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{3}$,

$$\frac{1-t}{1+t}=\frac{1}{3},\ \text{звідки}\ t=\frac{1}{2}.$$

Повертаючись до початкової змінної, маємо:

1) $\sin 2x=-\frac{1}{2}$, $2x=(-1)^{k+1}\arcsin\frac{1}{2}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$,

$$2x=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z},\quad x=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2},\ k\in\mathbb{Z};$$

2) $\sin 2x=\frac{1}{2}$, $2x=(-1)^m\arcsin\frac{1}{2}+\pi m$, $k\in\mathbb{Z}$,

$$2x=(-1)^m\frac{\pi}{6}+\pi m,\ k\in\mathbb{Z},\quad x=(-1)^m\frac{\pi}{12}+\frac{\pi m}{2},\ m\in\mathbb{Z}.$$

Відповідь. $(-1)^{k+1}\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}$, $k\in\mathbb{Z}$; $(-1)^m\frac{\pi}{12}+\frac{\pi m}{2}$, $m\in\mathbb{Z}$.

РІВНЯННЯ 12

$$2\log_9(-\cos x)-\log_9\sin x+\log_9\left(2\sqrt{3}\right)=0.$$

Розв'язання

ОДЗ: $\begin{cases}\cos x<0,\\ \sin x>0,\end{cases}$ $x\in\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n;\pi+2\pi n\right)$, $n\in\mathbb{Z}$.

$$\log_9\left(\frac{\cos^2 x}{\sin x}\cdot2\sqrt{3}\right)=\log_9 1,$$

$$\frac{1-\sin^2 x}{\sin x}\cdot2\sqrt{3}=1,$$

$$\left(1-\sin^2 x\right)\cdot2\sqrt{3}=\sin x,$$

$$2\sqrt{3}\sin^2 x+\sin x-2\sqrt{3}=0.$$

Нехай $\sin x=t$ $(|t|\le1)$, тоді маємо:

$$2\sqrt{3}t^2+t-2\sqrt{3}=0,$$

$$D=1+4\cdot2\sqrt{3}\cdot2\sqrt{3}=49,$$

$t_1=\frac{-1-\sqrt{49}}{4\sqrt{3}}=-\frac{2}{\sqrt{3}}$ — не задовольняє умову $|t|\le1$;

$$t_2=\frac{-1+\sqrt{49}}{4\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Повертаючись до початкової змінної, дістанемо:

$$\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2},\quad x=(-1)^k\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}+\pi k,\quad k\in\mathbb{Z},$$

$$x=(-1)^k\frac{\pi}{3}+\pi k,\quad k\in\mathbb{Z}.$$

Ураховуючи ОДЗ, отримаємо $x=\frac{2\pi}{3}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$.

Відповідь. $\frac{2\pi}{3}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$.