Магія паркетів

За допомогою математики ми лише відкриваємо двері, які ведуть в інший світ, і будемо милуватися садом, який лежить за ними

Мауріц Корнеліус Ешер

9 клас

Вчитель Кулик Н.Л.

Паркетом ***називається таке заповнення площини однаковими фігурами (елементами паркету), які повторюються і не перекривають одна одну і не залишають на площині порожнього простору. Іноді паркетом називають заповнення площини декількома фігурами, наприклад, правильними многокутниками.***

Якими многокутниками можна заповнити площину

Доведемо, що не будь-якими правильними многокутниками можна замостити площину.

Сума кутів опуклого многокутника дорівнює $180^\circ\,(n-2)$.

Всі кути правильного многокутника рівні, тому кожний із них дорівнює $180^\circ\,(n-2)/n$. В кожній вершині паркету сходиться ціле число кутів, тому число $180^\circ \cdot 2$ повинне бути кратним числу $180^\circ\,(n-2)/n$. Отже, різниця *n-2* може набувати значень 1; 2 або 4. Звідси маємо, що n може бути тільки 3; 4 або 6.

Якими многокутниками можна заповнити площину

Отже, можна отримати паркети складені із

правильних трикутників,

квадратів

або правильних шестикутників.

Не існує правильних паркетів із семикутників, восьмикутників і т.д.

Правильні паркети

Паркет називається правильним, якщо він складається із правильних многокутників і навколо кожної вершини правильні многокутники розміщені одним і тим же способом.

Правильні паркети

Аркуш із зошита в клітинку являє собою найпростіший паркет. Елементом паркету тут є квадрат.В цьому випадку два квадрати мають або спільну сторону, або спільну вершину або не мають спільних точок. Правильні паркети називають також ***Платоновими паркетами***

Правильні многокутники в природі

Бджоли - дивовижні комахи, відомі своєю неймовірною працелюбністю. Варто придивитися до них уважніше і ми помітимо, що це не просто бездумні комахи, а неймовірно розумні створіння.

Геометричні здібності бджіл проявляються при побудові стільників. Якщо розрізати бджолині стільники площиною, перпендикулярною до їх ребер, то стане видно рівні один одному правильні шестикутники, розміщені у вигляді паркету. Виникає питання: «Чому бджоли будують чарунки саме так: вони надають перевагу правильним шестикутникам, а не правильним трикутникам або квадратам, адже здається, їх простіше сконструювати?»

Правильні многокутники в природі

Будуючи шестикутні чарунки, бджоли найбільш економно використовують площу всередині вулика і віск для виготовлення чарунок.

Причому бджолині стільники являють собою не плоский, а просторовий паркет, так як заповнюють простір так, що не залишають пустоти.

Математичні таємниці стільників

Як не погодитися із думкою Бджоли із казки “Тисяча і одна ніч:

“Мій будинок побудований згідно законів самої строгої архітектури. Сам Евклід міг би повчитися, пізнаючи геометрію моїх стільників”

Напівправильні паркети

Паркети , що складаються з правильних многокутників двох або більше типів, такі, що для будь-яких двох вершин паркету існує перетворення симетрії (самопоєднання), що переводить одну з них в іншу, називаються напівправильними паркетами або Архімедовими . Існує 8 напівправильних паркетів.

Усічений квадратний паркет
4.8.8

Тришестикутний паркет
3.6.3.6

Кирпатий квадратний паркет
3.3.4.3.4

Напівправильні паркети

Усічений шестикутний паркет
3.12.12

Ромботришестикутний паркет
3.4.6.4

Ромбоусічений тришестикутний паркет
4.6.12

Напівправильні паркети

Ізокирпатий трикутний паркет
3.3.3.4.4

Кирпатий тришестикутний паркет
3.3.3.3.6

Красивий паркет можна створити з правильних шестикутників, квадратів і правильних трикутників

360º

360°

360º

Паркет із неправильних многокутників

Не складно замостити площину паралелограмами

Можна побудувати паркет із довільного трикутника: два рівних трикутники скласти в паралелограм, і замостити площину утвореними паралелограмами

П’ятикутний паркет

Математик Карл Рейнхард (Франкфуртський університет) в 1918 році здійснив першу класифікацію опуклих п’ятикутників, якими можна замостити площину. Він описав 5 типів фігур. З 1968 р. по 1985 рік чотири других вчених знайшли ще 9 типів аналогічних многокутників.

П’ятикутний паркет

В 2015році професори Кейсі Манн і Дженіфер Маклауд і бакалавр Девід Дюрей із Вашінгтонського університету в Ботеллі відкрили новий тип 5-кутного паркету

Дослідження 5-кутних паркетів має не лише академічний, а й практичний інтерес. Деякі із структур, які ми бачимо в природі, наприклад, капсули вірусів, мають схожу будову. Ця проблема на протязі останніх 100 років не має повного розв’язку. Дослідження полягає в переборі на комп’ютері всіх можливих варіантів.

$A = 60°$ $\quad a = 1$

$B = 135°$ $\quad b = 1/2$

$C = 105°$ $\quad c = \dfrac{1}{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}$

$D = 90°$ $\quad d = 1/2$

$E = 150°$ $\quad e = 1/2$

Паркети із неправильних многокутників

На малюнку наведено паркет, елементами якого є однакові п’ятикутники з кутами 90°, 120°, 60°, 240° і 30°, які вийшли розбиттям правильного шестикутника. З цих п’ятикутників утворені фігури.

Перерахування паркету

- Завдання визначення кількості паркету, що складаються з опуклих многокутників заданого типу, вирішена лише частково.
- Будь-яким трикутником або чотирикутником можна замостити площину.
- Відомо 15 п'ятикутників, здатних замостити площину; невідомо, чи є цей перелік повним. Проблема перерахування п'ятикутних паркетів має багату історію.
- Неможливо замостити площину однаковими опуклими многокутниками з числом сторін, більшим або рівним семи.

Дякую за увагу

Біля воріт чарівного саду

9 клас
Вчитель Кулик Н.Л.

Художній паркет

Паркети із давніх часів приваблювали до себе погляди людей. Ними оздоблювали підлогу в приміщеннях, стіни будинків, використовували в декоративно-прикладному мистецтві.

Художній паркет

Художній паркет

Європейський паркет XVII ст. можна порівнювати з мистецтвом виготовлення килима або мозаїки: примхливий орнамент вручну викладався із дерев’яних плиток різних відтінків або інкрустувався в суцільну дерев’яну основу. Такий паркет отримав назву “художній”.

Художній паркет

Художній паркет

Художній паркет

Художній паркет

Паркет за мотивами малюнків Мауріца Ешера

Мауріц Корнеліс Эшер народився 17 червня 1898 в м. Леуварден в Нідерландах, помер 27 березня 1972. Цікавість до мозаїк у художника появилася в 1936 під час подорожі до Іспанії під впливом геометричних орнаментів Альгамбри (палац в іспанському місті Гранада)

Паркет Мауріца Ешера

Ящірки, зображені голандським художником М. Ешером, утворюють паркет. Кожна ящірка щільно прилягає до своїх сусідок без жодної щілини, як дощечки паркетного полу.

Паркет, створений Мауріцом Ешером за допомогою паралельного перенесення фігур.

Паркет Мауріца Ешера

Паркет за мотивами малюнків Мауріца Ешера

М.Ешер створив безліч фантастичних многокутників. На його картині “Вершник на коні” кожний вершник із конем – фігура паркетна. Сумістити двох таких однаково орієнтованих вершників можна за допомогою паралельного перенесення, а протилежно орієнтованих – ковзною симетрією

Роботам відомого шудожника Мауріца Ешера притаманнна невідома магічна сила, що привертає увагу.

Фрагмент мозаїки “Два птахи”

Фрагмент мозаїки “Птахи”

Фрагмент картини “Лебеді”

Фрагмент картини “Риби”

Фрагмент картини “Риба, яка поглинає корабель”

Малюнки великого майстра ілюзій і головоломок і по сьогоднішній день дарують натхнення. Тепер його складний малюнок “Ящірка” (“Lizard”) втілений у формі паркетних дощок.

Одного замовника так зачарував візерунок “Ящірки”, що він побажав бачити його у себе на підлозі. Паркет з настільки складним малюнком розробили в іспанській компанії Arbore, яка спеціалізується на дизайні підлоги. Проект був реалізований в одній квартирі в Мадриді. Малюнок був істотно спрощений, але будь-хто, навіть мигцем поглянувши на нього, відразу впізнає фірмовий візерунок у вигляді ящірок.

Математики знаходять шлях до брами саду. Але вони ніколи не заходять усередину, щоб оцінити його насолоду

Мауріц Ешер, нідерланський художник-графік

Дякую за увагу

Способи побудови паркетів

9 клас

Вчитель КуликН.Л.

Способи побудови паркетів

Деякі означення паркету не обмежуються многокутниками, в цьому випадку паркетом називається замощення площини без пропусків и накладання довільними фігурами.

Появляється безліч різних паркетів, які складаються не із многокутників, а із криволінійних фігур.

Розглянемо деякі із можливих способів побудови нового паркету.

Спосіб перший

Беремо деяку сітку (уже відомий нам паркет) - із правильних трикутників, квадратів, шестикутників, або із довільних многокутників, і виконуємо всеможливі перетворення: стиск, розтяг, заміна прямолінійних відрізків кривими з початком і кінцем в тих самих точках, що і у відрізків.

Наприклад: паркети, утворені заміною відрізків "квадратної" сітки деякими кривими або ламаними.

Спосіб другий

Об’єднуємо окремі елементи уже існуючих паркетів.

Паркети із фігур, отримані комбінаціями квадратів

Паркет, кожний елемент якого отриманий в результаті об’єднання п’яти трикутників

Паркети із фігур, отримані комбінаціями квадратів

Спосіб третій

Візьмемо існуючу сітку і доповнимо її новими лініями. Отримаємо розбивку площини на фігури, які потім можна по-новому об’єднати. В окремому випадку - накладаємо одну на одну дві (або й більше) сітки уже відомих паркетів, зміщуючи або повертаючи одну сітку відносно іншої; фігури, які утворилися при перетині, вважаємо елементами паркету.

1.

2.

3.

4.

5.

Спосіб четвертий

Вибираємо деяку криву або ламану і починаємо її переносити на деякий вектор, повертаючи, відображаючи. Утворені криві або ламані розміщуємо на площині таким чином, щоб вони утворювали замкнуті контури (які в подальшому будуть розглядатися як елементи паркету).

Паркети, утворені за допомогою паралельного перенесення зірчастих многокутників:

Спосіб побудови паркету

Заповніть даної фігурою площину, отримавши паркет

Паркети, у яких кілька елементів утворюють фігуру, подібну елементу паркету

Паркети із елементів кола

Паркет можна створити, починаючи із квадрата.

1.

2.

3.

4.

5.

Варіантів побудови паркетів на основі правильних многокутників - величезна кількість! Все залежить від фантазії.

Орнамент із мотивів, утворених однією кривою, побудованих на трикутній сітці .

Орнамент, побудований на основі правильного шестикутника і вписаних в нього правильних трикутників.

Мозаїка Пенроуза

- Неперіодична мозаїка, вперше опублікована Р.Пенроузом в 1978 році

Мозаїка Пенроуза

Мозаїка Роджера Пенроуза – замощення площини ромбами двох типів – з кутами 72^0 і 108^0, 36^0 і 144^0 таким чином, що любі два сусідні ромби не утворюють разом паралелограм. Ця мозаїка, залишаючись симетричною, заповнює площину не повторюючись.

Білою точкою відмічено центр поворотної симетрії 5 порядку: поворот навколо неї на 72^0 переводить мозаїку саму в себе

Створення паркетів - одне із дуже цікавих занять, в якому переплітаються математика і творчість, строгість і довільність, гармонія і краса

Дякую за увагу