НЕРІВНОСТІ, ПОВ'ЯЗАНІ З ЧИСЛАМИ ФІБОНАЧЧІ, ЛЮКА І ВІДНОШЕННЯМ ЗОЛОТОГО ПЕРЕРІЗУ

Р. П. Ушаков, заслужений учитель України, м. Київ

В існуючій літературі, присвяченій числам Фібоначчі і Люка, мало уваги приділяється нерівностям. У пропонованій статті розглядаються нерівності певного типу, пов'язані з числами Фібоначчі, Люка і відношенням золотого перерізу. Основним у статті є поняття опуклої послідовності. Означення і властивості опуклої послідовності даються за допомогою відповідних нерівностей. Це дає змогу одержувати нерівності цього типу.

У статті прийняті загальновідомі позначення. Запис $\{u_n,\ n \ge k\}$ означає, що задана послідовність розглядається на множині натуральних чисел $\{k,\ k+1,\ k+2,\ \ldots\}$. Знаки ⌈ та ⌉ означають відповідно початок і кінець доведення.

Означення. Послідовність $\{u_n,\ n \ge 0\}$ називають опуклою при $n \ge n_0$, якщо для будь-якого $n \ge n_0$ виконується нерівність

$$2u_n \le u_{n-1} + u_{n+1}. \qquad (1)$$

Деякі опуклі послідовності

1. Послідовність чисел Фібоначчі $\{F_n,\ n \ge 0\}$.

Ця послідовність задається рівностями $F_0 = 0,\ F_1 = 1,\ F_{n+1} = F_n + F_{n-1},\ n \in \mathbb{N}$.

$$\lceil\ 2F_n \le F_{n-1} + F_{n+1},\ 2F_n \le F_{n-1} + F_{n-1} + F_n,$$
$$F_n \le 2F_{n-1},\ F_{n-2} + F_{n-1} \le 2F_{n-1},\ F_{n-2} \le F_{n-1},$$

що справедливо при $n \ge 2$. (Ми розглядаємо тільки невід'ємні індекси).

Отже, послідовність $\{F_n,\ n \ge 0\}$ опукла при $n \ge 2$ $(n_0 = 2)$. ⌉

2. Послідовність чисел Люка $\{L_n,\ n \ge 0\}$.

Ця послідовність задається рівностями $L_0 = 2,\ L_1 = 1,\ L_{n+1} = L_n + L_{n-1},\ n \in \mathbb{N}$.

$$\lceil\ 2L_n \le L_{n-1} + L_{n+1},\ 2L_n \le L_{n-1} + L_{n-1} + L_n,$$
$$L_n \le 2L_{n-1},\ L_{n-2} + L_{n-1} \le 2L_{n-1},\ L_{n-2} \le L_{n-1},$$

що справедливо при $n \ge 3$.

Отже, послідовність $\{L_n,\ n \ge 0\}$ опукла при $n \ge 3$ $(n_0 = 3)$. ⌉

3. Послідовність $\left\{\dfrac{1}{F_n},\ n \ge 1\right\}$.

$$\lceil\ \frac{2}{F_n} \le \frac{1}{F_{n-1}} + \frac{1}{F_{n+1}},\ 2F_{n-1}F_{n+1} \le F_nF_{n+1} + F_{n-1}F_n,$$
$$F_{n-1}F_{n+1} - F_{n-1}F_n \le F_nF_{n+1} - F_{n-1}F_{n+1},$$
$$F_{n-1} \cdot (F_{n+1} - F_n) \le F_{n+1} \cdot (F_n - F_{n-1}),\ F_{n-1}F_{n-1} \le F_{n+1}F_{n-2},$$
$$\frac{F_{n-1}}{F_{n-2}} \le \frac{F_{n+1}}{F_{n-1}},\ \frac{F_{n-2} + F_{n-3}}{F_{n-2}} \le \frac{F_n + F_{n-1}}{F_{n-1}},$$
$$1 + \frac{F_{n-3}}{F_{n-2}} \le 1 + \frac{F_n}{F_{n-1}},\ \frac{F_{n-3}}{F_{n-2}} \le \frac{F_n}{F_{n-1}},$$

що справедливо, бо $\dfrac{F_{n-3}}{F_{n-2}} < 1 < \dfrac{F_n}{F_{n-1}}$ при $n \ge 3$.

Отже, послідовність $\left\{\dfrac{1}{F_n},\ n \ge 1\right\}$ опукла при $n \ge 3$ $(n_0 = 3)$. ⌉

4. Послідовність $\left\{\dfrac{1}{L_n},\ n \ge 0\right\}$.

$$\lceil\ \frac{2}{L_n} \le \frac{1}{L_{n-1}} + \frac{1}{L_{n+1}},\ 2L_{n-1}L_{n+1} \le L_nL_{n+1} + L_nL_{n-1},$$
$$L_{n-1}L_{n+1} - L_nL_{n-1} \le L_nL_{n+1} - L_{n-1}L_{n+1},$$
$$L_{n-1} \cdot (L_{n+1} - L_n) \le L_{n+1} \cdot (L_n - L_{n-1}),$$
$$L_{n-1}L_{n-1} \le L_{n+1}L_{n-2},\ \frac{L_{n-1}}{L_{n-2}} \le \frac{L_{n+1}}{L_{n-1}},$$
$$\frac{L_{n-2} + L_{n-3}}{L_{n-2}} \le \frac{L_n + L_{n-1}}{L_{n-1}},\ 1 + \frac{L_{n-3}}{L_{n-2}} \le 1 + \frac{L_n}{L_{n-1}},$$

$$\frac{L_{n-3}}{L_{n-2}} \le \frac{L_n}{L_{n-1}},$$

що справедливо, при $n \ge 4$. Отже, послідовність $\left\{\frac{1}{L_n},\ n \ge 0\right\}$ опукла при $n \ge 4$ $(n_0 = 4)$. ⌉

5. Послідовність $\left\{F_n^2,\ n \ge 0\right\}$.

⌈ ***Спосіб 1.***

$$2F_n^2 \le F_{n-1}^2 + F_{n+1}^2,\ \ F_n^2 - F_{n-1}^2 \le F_{n+1}^2 - F_n^2,$$

$$(F_n - F_{n-1})\cdot(F_n + F_{n-1}) \le (F_{n+1} - F_n)\cdot(F_{n+1} + F_n),$$

$$F_{n-2}\cdot F_{n+1} \le F_{n-1}\cdot F_{n+2},$$

що справедливо при $n \ge 2$, бо при $n \ge 2$ $F_{n-2} < F_{n-1}$ і $F_{n+1} < F_{n+2}$.

Отже, послідовність $\left\{F_n^2,\ n \ge 0\right\}$ опукла при $n \ge 2$.

Спосіб 2. *Лема.* Має місце подвійна нерівність $\sqrt{2}F_n < F_{n+1} \le 2F_n$ при $n \ge 2$.

Права частина

$$F_{n+1} \le 2F_n,\ \ F_n + F_{n-1} \le 2F_n,\ \ F_{n-1} \le F_n,$$

що справедливо при $n \ge 2$.

Ліва частина

$$\sqrt{2}F_n < F_{n+1},\ \ 2F_n^2 < F_{n+1}^2,\ \ 2F_n^2 < (F_n + F_{n-1})^2,$$

$$2F_n^2 < F_n^2 + 2F_n\cdot F_{n-1} + F_{n-1}^2,\ \ F_n^2 < 2F_n\cdot F_{n-1} + F_{n-1}^2.$$

$$F_n^2 < 2F_n\cdot F_{n-1}\ \text{ при } n \ge 2.\ \ F_n < 2F_{n-1},$$

що справедливо при $n \ge 2$, як було доведено в правій частині. Отже,

$$F_n^2 < 2F_nF_{n-1} < 2F_nF_{n-1} + F_{n-1}^2\ \text{ при } n \ge 2.$$ ⌉

6. Послідовність $\left\{L_n^2,\ n \ge 0\right\}$.

$$⌈\ 2L_n^2 \le L_{n-1}^2 + L_{n+1}^2,\ \ L_n^2 - L_{n-1}^2 \le L_{n+1}^2 - L_n^2,$$

$$L_{n-2}\cdot L_{n+1} \le L_{n-1}\cdot L_{n+2},$$

що справедливо при $n \ge 3$. Отже, послідовність $\left\{L_n^2,\ n \ge 0\right\}$ опукла при $n \ge 3$. ⌉

Доведіть цей факт другим способом за допомогою подвійної нерівності $\sqrt{2}L_n < L_{n+1} < 2L_n$ при $n \ge 3$.

7. Послідовність

$$\left\{F_n^k,\ n \ge 0,\ k > 2 \text{ — натуральне фіксоване}\right\}.$$

$$⌈\ 2F_n^k \le F_{n-1}^k + F_{n+1}^k.$$

Доведемо, що при $k > 2$ $2F_n^k < F_{n+1}^k$. Справді, $2F_n^k < F_{n+1}^k$, $\sqrt[k]{2}F_n < F_{n+1}$, що справедливо, бо $\sqrt[k]{2}F_n < \sqrt{2}F_n < F_{n+1}$ при $n \ge 2$. Отже, послідовність $\left\{F_n^k,\ n \ge 0,\ k > 2 \text{ — натуральне фіксоване}\right\}$ опукла при $n \ge 2$. ⌉

8. Послідовність

$$\left\{L_n^k,\ n \ge 0,\ k > 2 \text{ — натуральне фіксоване}\right\}.$$

$$⌈\ 2L_n^k \le L_{n-1}^k + L_{n+1}^k.$$

Доведемо, що при $k > 2$ $2L_n^k < L_{n+1}^k$. Справді, $\sqrt[k]{2}L_n \le L_{n+1}$, бо при $k > 2$ $\sqrt[k]{2}L_n < \sqrt{2}L_n \le L_{n+1}$ при $n \ge 3$.

Отже, послідовність $\left\{L_n^k,\ n \ge 0,\ k > 2 \text{ — натуральне фіксоване}\right\}$ опукла при $n \ge 3$. ⌉

9. Послідовність $\left\{\frac{1}{F_n^2},\ n \ge 1\right\}$.

$$⌈\ \frac{2}{F_n^2} \le \frac{1}{F_{n-1}^2} + \frac{1}{F_{n+1}^2}.$$

Доведіть, що при $n \ge 3$ $\frac{2}{F_n^2} \le \frac{1}{F_{n-1}^2}$ і $\frac{2}{F_n^2} \le \frac{1}{F_{n-1}^2} + \frac{1}{F_{n+1}^2}$. Отже, послідовність $\left\{\frac{1}{F_n^2}\right\}$ опукла при $n \ge 3$. ⌉

10. Послідовність $\left\{\frac{1}{L_n^2},\ n \ge 0\right\}$.

$$⌈\ \frac{2}{L_n^2} \le \frac{1}{L_{n-1}^2} + \frac{1}{L_{n+1}^2},\ \ \frac{2}{L_n^2} \le \frac{1}{L_{n-1}^2},\ \ 2L_{n-1}^2 \le L_n^2,$$

$$\sqrt{2}L_{n-1} \le L_n,$$

що справедливо при $n \ge 2$. Отже, при $n \ge 2$ $\frac{2}{L_n^2} \le \frac{1}{L_{n-1}^2} < \frac{1}{L_{n+1}^2} + \frac{1}{L_{n-1}^2}$. Послідовність опукла при $n \ge 2$. ⌉

11. **Послідовність**
$$\left\{\frac{1}{F_n^k},\ n\ge 1,\ k\ge 3 \text{ — натуральне фіксоване}\right\}.$$

⌈ $$\frac{2}{F_n^k}\le\frac{1}{F_{n-1}^k}+\frac{1}{F_{n+1}^k},\ \frac{2}{F_n^k}\le\frac{1}{F_{n-1}^k},\ 2F_{n-1}^k\le F_n^k,$$
$$\sqrt[k]{2}F_{n-1}\le F_n.$$

При $k\ge 3$ і $n\ge 3$ $\sqrt[k]{2}F_{n-1}<\sqrt{2}F_{n-1}<F_n$, що справедливо. Отже, $\frac{1}{F_n^k}\le\frac{1}{F_{n-1}^k}<\frac{1}{F_{n-1}^k}+\frac{1}{F_{n+1}^k}$ $(k\ge 3,\ n\ge 3)$. Послідовність опукла при $n\ge 3$. ⌉

12. **Послідовність**
$$\left\{\frac{1}{L_n^k},\ n\ge 0,\ k\ge 3 \text{ — натуральне фіксоване}\right\}.$$

⌈ $$\frac{2}{L_n^k}\le\frac{1}{L_{n-1}^k}+\frac{1}{L_{n+1}^k},\ \frac{2}{L_n^k}\le\frac{1}{L_{n-1}^k},\ 2L_{n-1}^k\le L_n^k,$$
$$\sqrt[k]{2}L_{n-1}\le L_n,\ \sqrt[k]{2}L_{n-1}<\sqrt{2}L_{n-1}<L_n,$$

що справедливо при $n\ge 3$. Отже, послідовність опукла при $n\ge 3$ і $k\ge 3$. ⌉

13. **Послідовність** $\left\{\varphi^n,\ n\ge 0\right\}$. φ — це відношення золотого перерізу. φ — додатний корінь рівняння $z^2-z-1=0$. $\varphi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Помітимо, що $\varphi^2=1+\varphi$.

⌈ $$2\varphi^n\le\varphi^{n-1}+\varphi^{n+1},\ 2\le\frac{1}{\varphi}+\varphi,$$

що справедливо. Отже, послідовність опукла при $n\ge 1$. (Перевірте, що $2\varphi^1\le\varphi^0+\varphi^2$). ⌉

14. **Послідовність** $\left\{\frac{1}{\varphi^n},\ n\ge 0\right\}$.

⌈ $$\frac{2}{\varphi^n}\le\frac{1}{\varphi^{n-1}}+\frac{1}{\varphi^{n+1}},\ 2\le\varphi+\frac{1}{\varphi},$$

що справедливо. Послідовність опукла при $n\ge 1$. ⌉

Зазначимо дві властивості опуклих послідовностей.

1. Якщо послідовність $\{a_n\}$ опукла при $n\ge n_0$ і $k>0$, то послідовність $\{ka_n\}$ також опукла при $n\ge n_0$.

2. Якщо послідовність $\{a_n\}$ опукла при $n\ge n_1$, а послідовність $\{b_n\}$ опукла при $n\ge n_2$, $k_1>0$ і $k_2>0$, то послідовність $\{k_1a_n+k_2b_n\}$ опукла при $n\ge\max(n_1,n_2)$.

Ці дві прості властивості доведіть самостійно. За допомогою цих двох властивостей можна одержати багато опуклих послідовностей. Так опуклими є послідовності $\{2F_n\}$ при $n\ge 2$, $\{3L_n\}$ при $n\ge 3$, $\{F_n+L_n\}$ при $n\ge 3$, $\{3F_n+5L_n\}$ при $n\ge 3$, $\{F_n^2+2L_n^2\}$ при $n\ge 3$, $\left\{\frac{4}{F_n}+\frac{3}{L_n}\right\}$ при $n\ge 4$, $\{2F_n^3+4L_n^2\}$ при $n\ge 3$ тощо.

Теорема 1. Для послідовності $\{a_n\}$, опуклої при $n\ge n_0$, виконується нерівність
$$a_n+a_{n+1}\le a_{n-1}+a_{n+2} \text{ при } n\ge n_0. \qquad (2)$$

⌈ Оскільки послідовність $\{a_n\}$ опукла при $n\ge n_0$, виконуються нерівності $2a_n\le a_{n-1}+a_{n+1}$ та $2a_{n+1}\le a_n+a_{n+2}$. Додамо ці нерівності $2a_n+2a_{n+1}\le a_{n-1}+a_n+a_{n+1}+a_{n+2}$, $a_n+a_{n+1}\le a_{n-1}+a_{n+2}$, що вимагалося довести. ⌉

Застосуємо нерівність (2) до опуклих послідовностей.

- ✓ Для послідовності $\{F_n\}$ маємо $F_n+F_{n+1}\le F_{n-1}+F_{n+2},\ n\ge 2$;
- ✓ для послідовності $\{L_n\}$ маємо $L_n+L_{n+1}\le L_{n-1}+L_{n+2},\ n\ge 3$;
- ✓ для послідовності $\left\{\frac{1}{F_n}\right\}$ маємо $\frac{1}{F_n}+\frac{1}{F_{n+1}}\le\frac{1}{F_{n-1}}+\frac{1}{F_{n+2}},\ n\ge 3$;
- ✓ для послідовності $\left\{\frac{1}{L_n}\right\}$ маємо $\frac{1}{L_n}+\frac{1}{L_{n+1}}\le\frac{1}{L_{n-1}}+\frac{1}{L_{n+2}},\ n\ge 4$;
- ✓ для послідовності $\{F_n^2\}$ маємо $F_n^2+F_{n+1}^2\le F_{n-1}^2+F_{n+2}^2,\ n\ge 2$;

✓ для послідовності $\left\{L_n^2\right\}$

маємо $L_n^2+L_{n+1}^2\le L_{n-1}^2+L_{n+2}^2,\ \ n\ge 3;$

✓ для послідовності

$\left\{F_n^k,\ k>2 \text{ — натуральне фіксоване}\right\}$

маємо $F_n^k+F_{n+1}^k\le F_{n-1}^k+F_{n+2}^k,\ \ n\ge 2;$

✓ для послідовності

$\left\{L_n^k,\ k>2 \text{ — натуральне фіксоване}\right\}$

маємо $L_n^k+L_{n+1}^k\le L_{n-1}^k+L_{n+2}^k,\ \ n\ge 3;$

✓ для послідовності $\left\{\dfrac{1}{F_n^2}\right\}$

маємо $\dfrac{1}{F_n^2}+\dfrac{1}{F_{n+1}^2}\le\dfrac{1}{F_{n-1}^2}+\dfrac{1}{F_{n+2}^2},\ \ n\ge 3;$

✓ для послідовності $\left\{\dfrac{1}{L_n^2}\right\}$

маємо $\dfrac{1}{L_n^2}+\dfrac{1}{L_{n+1}^2}\le\dfrac{1}{L_{n-1}^2}+\dfrac{1}{L_{n+2}^2},\ \ n\ge 2;$

✓ для послідовності

$\left\{\dfrac{1}{F_n^k},\ k\ge 3 \text{ — фіксоване}\right\}$

маємо $\dfrac{1}{F_n^k}+\dfrac{1}{F_{n+1}^k}\le\dfrac{1}{F_{n-1}^k}+\dfrac{1}{F_{n+2}^k},\ \ n\ge 3;$

✓ для послідовності

$\left\{\dfrac{1}{L_n^k},\ k\ge 3 \text{ — фіксоване}\right\}$

маємо $\dfrac{1}{L_n^k}+\dfrac{1}{L_{n+1}^k}\le\dfrac{1}{L_{n-1}^k}+\dfrac{1}{L_{n+2}^k},\ \ n\ge 3;$

✓ для послідовності $\left\{\varphi^n\right\}$

маємо $\varphi^n+\varphi^{n+1}\le\varphi^{n-1}+\varphi^{n+2},\ \ n\ge 1;$

✓ для послідовності $\left\{\dfrac{1}{\varphi^n}\right\}$

маємо $\dfrac{1}{\varphi^n}+\dfrac{1}{\varphi^{n+1}}\le\dfrac{1}{\varphi^{n-1}}+\dfrac{1}{\varphi^{n+2}},\ \ n\ge 1.$

Теорема 2. Для послідовності $\left\{a_n\right\}$, опуклої при $n\ge n_0$, виконується нерівність

$$a_{k-1}+a_{k+1}\le a_{k-l}+a_{k+l}\quad\left(2\le l\le k-n_0\right). \qquad (3)$$

⌈ Для опуклої послідовності $\left\{a_n\right\}$ виконуються три нерівності:

$$2a_{k-1}\le a_{k-2}+a_k,\ \ 2a_k\le a_{k-1}+a_{k+1},\ \ 2a_{k+1}\le a_k+a_{k+2}.$$

Додаючи почленно ці три нерівності, дістанемо $a_{k-1}+a_{k+1}\le a_{k-2}+a_{k+2}$. Аналогічно доведемо, що $a_{k-2}+a_{k+2}\le a_{k-3}+a_{k+3},\ a_{k-3}+a_{k+3}\le a_{k-4}+a_{k+4},\ \ldots$ і нарешті, $a_{k-l+1}+a_{k+l-1}\le a_{k-l}+a_{k+l}$. Із цих нерівностей і випливає нерівність (3). ⌉

Покажемо ще один спосіб доведення нерівності (3).

Лема. В опуклої при $n\ge n_0$ послідовності різниці між сусідніми членами не спадають при $n\ge n_0$.

⌈ Нехай $\left\{a_n\right\}$ — опукла послідовність. За означенням

$$2a_n\le a_{n-1}+a_{n+1}\Leftrightarrow a_n-a_{n-1}\le a_{n+1}-a_n,$$

що вимагалось довести. Ці нерівності виконуються при $n\ge n_0$. ⌉

Далі, згідно з лемою

$$a_{k-1}-a_{k-2}\le a_{k+2}-a_{k+1},\ \ a_{k-1}+a_{k+1}\le a_{k-2}+a_{k+2}.$$

Аналогічно маємо

$$a_{k-2}+a_{k+2}\le a_{k-3}+a_{k+3},\ \ a_{k-3}+a_{k+3}\le a_{k-4}+a_{k+4},\ldots,$$
$$a_{k-l+1}+a_{k+l-1}\le a_{k-l}+a_{k+l}.$$

Ми одержали ланцюжок нерівностей

$$a_{k-1}+a_{k+1}\le a_{k-2}+a_{k+2}\le a_{k-3}+a_{k+3}\le\ldots\le$$
$$\le a_{k-l+1}+a_{k+l-1}\le a_{k-l}+a_{k+l},$$

звідки випливає нерівність (3) при $2\le l\le k-n_0$.

Застосуємо нерівність (3) до опуклих послідовностей.

✓ Для послідовності $\left\{F_n\right\}$

маємо $F_{k-1}+F_{k+1}\le F_{k-l}+F_{k+l}$ при $2\le l\le k-2;$

✓ для послідовності $\left\{L_n\right\}$

маємо $L_{k-1}+L_{k+1}\le L_{k-l}+L_{k+l},\ 2\le l\le k-3;$

✓ для послідовності $\left\{\dfrac{1}{F_n}\right\}$

маємо $\dfrac{1}{F_{k-1}}+\dfrac{1}{F_{k+1}}\le\dfrac{1}{F_{k-l}}+\dfrac{1}{F_{k+l}},\ 2\le l\le k-3;$

✓ для послідовності $\left\{\frac{1}{L_n}\right\}$

маємо $\frac{1}{L_{k-1}}+\frac{1}{L_{k+1}}\le\frac{1}{L_{k-l}}+\frac{1}{L_{k+l}},\ 2\le l\le k-4;$

✓ для послідовності $\left\{F_n^2\right\}$

маємо $F_{k-1}^2+F_{k+1}^2\le F_{k-l}^2+F_{k+l}^2,\ 2\le l\le k-2;$

✓ для послідовності $\left\{L_n^2\right\}$

маємо $L_{k-1}^2+L_{k+1}^2\le L_{k-l}^2+L_{k+l}^2,\ 2\le l\le k-3;$

✓ для послідовності $\left\{F_n^p,\ p>2 \text{ — натуральне фіксоване}\right\}$

маємо $F_{k-1}^p+F_{k+1}^p\le F_{k-l}^p+F_{k+l}^p,\ 2\le l\le k-2;$

✓ для послідовності $\left\{L_n^p,\ p>2\right\}$

маємо $L_{k-1}^p+L_{k+1}^p\le L_{k-l}^p+L_{k+l}^p,\ 2\le l\le k-3;$

✓ для послідовності $\left\{\frac{1}{F_n^2}\right\}$

маємо $\frac{1}{F_{k-1}^2}+\frac{1}{F_{k+1}^2}\le\frac{1}{F_{k-l}^2}+\frac{1}{F_{k+l}^2},\ 2\le l\le k-3;$

✓ для послідовності $\left\{\frac{1}{L_n^2}\right\}$

маємо $\frac{1}{L_{k-1}^2}+\frac{1}{L_{k+1}^2}\le\frac{1}{L_{k-l}^2}+\frac{1}{L_{k+l}^2},\ 2\le l\le k-2;$

✓ для послідовності $\left\{\frac{1}{F_n^p},\ p>2 \text{ — натуральне}\right\}$

маємо $\frac{1}{F_{k-1}^p}+\frac{1}{F_{k+1}^p}\le\frac{1}{F_{k-l}^p}+\frac{1}{F_{k+l}^p},\ 2\le l\le k-3;$

✓ для послідовності $\left\{\frac{1}{L_n^p},\ p>2 \text{ — натуральне}\right\}$

маємо $\frac{1}{L_{k-1}^p}+\frac{1}{L_{k+1}^p}\le\frac{1}{L_{k-l}^p}+\frac{1}{L_{k+l}^p},\ 2\le l\le k-3;$

✓ для послідовності $\left\{\varphi^n\right\}$

маємо $\varphi^{k-1}+\varphi^{k+1}\le\varphi^{k-l}+\varphi^{k+l},\ 2\le l\le k-1;$

✓ для послідовності $\left\{\frac{1}{\varphi^n}\right\}$

маємо $\frac{1}{\varphi^{k-1}}+\frac{1}{\varphi^{k+1}}\le\frac{1}{\varphi^{k-l}}+\frac{1}{\varphi^{k+l}},\ 2\le l\le k-1.$

Вправа. Довести, що для опуклої послідовності виконується нерівність $2a_n\le a_{n-l}+a_{n+l}$, $(l\le n-n_0,\ n\ge 2)$.

Теорема 3. Для опуклої послідовності $\{a_n\}$ виконується нерівність

$$a_p+a_k\le a_{p-l}+a_{k+l}\quad (l<p<k). \tag{4}$$

⌈ Згідно з лемою

$$a_p+a_k\le a_{p-1}+a_{k+1}\le a_{p-2}+a_{k+2}\le\ldots\le a_{p-l}+a_{k+l}.$$ ⌉

Згідно з (4) для послідовності $\{F_n\}$ маємо $F_p+F_k\le F_{p-l}+F_{k+l}\quad (l<p<k)$; для послідовності $\{L_n\}$ маємо $L_p+L_k\le L_{p-l}+L_{k+l}\quad (l<p<k)$. ⌉

Побудуйте відповідні нерівності для інших опуклих послідовностей.

Теорема 4. Для опуклої послідовності $\{a_n\}$ виконується нерівність

$$a_{n_0}+a_n\ge\frac{2}{n-n_0+1}\sum_{k=n_0}^{n}a_k. \tag{5}$$

⌈ Згідно з теоремою 1, маємо ланцюжок нерівностей

$$a_{n_0}+a_n\ge a_{n_0+1}+a_{n-1}\ge a_{n_0+2}+a_{n-2}\ge a_{n_0+3}+a_{n-3}\ge\ldots\ge$$
$$\ge a_{n-1}+a_{n_0+1}.$$

Таких нерівностей $n-n_0-1$. Приєднавши до них дві рівності $a_{n_0}+a_n=a_{n_0}+a_n$, дістанемо $n-n_0+1$ співвідношення:

$$a_{n_0}+a_n=a_{n_0}+a_n,\ \ a_{n_0}+a_n\ge a_{n_0+1}+a_{n-1},$$
$$a_{n_0}+a_n\ge a_{n_0+2}+a_{n-2},\ \ a_{n_0}+a_n\ge a_{n_0+3}+a_{n-3},\ \ldots,$$
$$a_{n_0}+a_n\ge a_{n-1}+a_{n_0+1},\ \ a_{n_0}+a_n=a_n+a_{n_0}.$$

Додаючи почленно всі ці співвідношення, дістаємо нерівність $(n-n_0+1)(a_{n_0}+a_n)\ge 2\sum_{k=n_0}^{n}a_k$, звідки випливає нерівність (5). ⌉

Застосуємо нерівність (5) до опуклих послідовностей.

✓ Для послідовності $\{F_n\}$

маємо $F_2+F_n\ge\frac{2}{n-1}\sum_{k=2}^{n}F_k$;

✓ для послідовності $\{L_n\}$

маємо $L_3+L_n\ge\frac{2}{n-2}\sum_{k=3}^{n}L_k$;

✓ для послідовності $\left\{\frac{1}{F_n}\right\}$

маємо $\frac{1}{F_3}+\frac{1}{F_n}\ge\frac{2}{n-2}\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{F_k}$;

✓ для послідовності $\left\{\frac{1}{L_n}\right\}$

маємо $\frac{1}{L_4}+\frac{1}{L_n}\ge\frac{2}{n-3}\sum_{k=4}^{n}\frac{1}{L_k}$;

✓ для послідовності $\{F_n^2\}$

маємо $F_2^2+F_n^2\ge\frac{2}{n-1}\sum_{k=2}^{n}F_k$;

✓ для послідовності $\{L_n^2\}$

маємо $L_3^2+L_n^2\ge\frac{2}{n-2}\sum_{k=3}^{n}L_k$;

✓ для послідовності $\{F_n^k,\ k\ge 2\}$

маємо $F_2^k+F_n^k\ge\frac{2}{n-1}\sum_{p=2}^{n}F_p^k$;

✓ для послідовності $\{L_n^k,\ k>2\}$

маємо $L_3^k+L_n^k\ge\frac{2}{n-2}\sum_{p=3}^{n}L_p^k$;

✓ для послідовності $\left\{\frac{1}{F_n^2}\right\}$

маємо $\frac{1}{F_3^2}+\frac{1}{F_n^2}\ge\frac{2}{n-2}\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{F_k^2}$;

✓ для послідовності $\left\{\frac{1}{L_n^2}\right\}$

маємо $\frac{1}{L_2^2}+\frac{1}{L_n^2}\ge\frac{2}{n-1}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{L_k^2}$;

✓ для послідовності $\left\{\frac{1}{F_n^k},\ k>2\right\}$

маємо $\frac{1}{F_3^k}+\frac{1}{F_n^k}\ge\frac{2}{n-2}\sum_{p=3}^{n}\frac{1}{F_p^k}$;

✓ для послідовності $\left\{\frac{1}{L_n^k},\ k\ge 3\right\}$

маємо $\frac{1}{L_3^k}+\frac{1}{L_n^k}\ge\frac{2}{n-2}\sum_{p=3}^{n}\frac{1}{L_p^k}$;

✓ для послідовності $\{\varphi^n\}$

маємо $\varphi^1+\varphi^n\ge\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}\varphi^k$;

✓ для послідовності $\left\{\frac{1}{\varphi^n}\right\}$

маємо $\frac{1}{\varphi^1}+\frac{1}{\varphi^n}\ge\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\varphi^k}$.

Теорема 5. Для опуклої послідовності $\{a_n\}$ виконується нерівність

$$\frac{a_2+a_4+\ldots+a_{2n}}{n}\le\frac{a_1+a_3+\ldots+a_{2n+1}}{n+1}. \qquad (6)$$

Доведення цієї нерівності наведене в статті [1].

Ми розглянемо три частинних випадки.

1. $\frac{F_2+F_4+\ldots+F_{2n}}{n}\le\frac{F_1+F_3+\ldots+F_{2n+1}}{n+1}$.

⌈ Помітимо, що

$$F_2+F_4+F_6+\ldots+F_{2n}=$$
$$=F_3-F_1+F_5-F_3+F_7-F_5+\ldots+F_{2n+1}-F_{2n-1}=$$
$$=F_{2n+1}-1;$$

$$F_1+F_3+F_5+\ldots+F_{2n+1}=$$
$$=F_2+F_4-F_2+F_6-F_4+\ldots+F_{2n}-F_{2n-2}+F_{2n+2}-F_{2n}=$$
$$=F_{2n+2}.$$

Вихідна нерівність рівносильна нерівності

$$\frac{F_{2n+1}-1}{n}\le\frac{F_{2n+2}}{n+1},\ (n+1)(F_{2n+1}-1)\le nF_{2n+2},$$

$$(n+1)(F_{2n+1}-1)\le n(F_{2n+1}+F_{2n}),\ \ F_{2n+1}-n-1\le nF_{2n},$$

$$F_{2n+1}\le nF_{2n}+n+1.$$

При $n \ge 2$ $F_{2n+1} \le nF_{2n}$.

Справді,

$$F_{2n+1} \le 2F_{2n},\ F_{2n} + F_{2n-1} \le 2F_{2n},\ F_{2n-1} \le F_n,$$

що справедливо.

2. $\dfrac{L_2 + L_4 + \ldots + L_{2n}}{n} \le \dfrac{L_1 + L_3 + \ldots + L_{2n+1}}{n+1}$.

⌈Доведіть, що $L_2 + L_4 + \ldots + L_{2n} = L_{2n+1} - 1$; $L_1 + L_3 + \ldots + L_{2n+1} = L_{2n+2} - 2$.

Вихідна нерівність рівносильна нерівності

$$\frac{L_{2n+1} - 1}{n} \le \frac{L_{2n+2} - 2}{n+1},\ (n+1)(L_{2n+1} - 1) \le n(L_{2n+2} - 2),$$

$$(n+1)(L_{2n+1} - 1) \le n(L_{2n+1} + L_{2n} - 2),$$

$$L_{2n+1} - n - 1 \le nL_{2n} - 2n,\ L_{2n+1} - 1 \le nL_{2n} - n. \quad (*)$$

Далі застосуємо метод математичної індукції.

1. Перевірте, що нерівність (*) виконується при $n = 2$ і $n = 3$.
2. Нехай при деякому $n > 3$ виконується нерівність (*). Додамо до обох частин нерівності (*) L_{2n+2}.

$$L_{2n+2} + L_{2n+1} - 1 \le nL_{2n} + L_{2n+2} - n,$$

$$L_{2n+3} - 1 \le nL_{2n} + L_{2n+2} - n.$$

Тепер доведемо, що

$$nL_{2n} + L_{2n+2} - n \le (n+1)L_{2n+2} - n - 1,$$

$$nL_{2n} \le nL_{2n+2} - 1,\ nL_{2n} \le n(L_{2n} + L_{2n+1}) - 1,$$

$$1 \le nL_{2n+1},$$

що справедливо. Отже,

$$L_{2n+3} - 1 \le (n+1)L_{2n+2} - n - 1,$$

що завершує індуктивне доведення.

3. $\dfrac{\varphi^2 + \varphi^4 + \ldots + \varphi^{2n}}{n} \le \dfrac{\varphi^1 + \varphi^3 + \ldots + \varphi^{2n+1}}{n+1}$.

Використовуючи формулу суми членів геометричної прогресії, маємо

$$\frac{\varphi^2(\varphi^{2n} - 1)}{n(\varphi^2 - 1)} \le \frac{\varphi(\varphi^{2n+2} - 1)}{(n+1)(\varphi^2 - 1)},$$

$$(n+1)\varphi(\varphi^{2n} - 1) \le n(\varphi^{2n+2} - 1),$$

$$n\varphi^{2n+1} - n\varphi + \varphi^{2n+1} - \varphi \le n\varphi^{2n+2} - n,$$

$$n - n\varphi - \varphi + \varphi^{2n+1} \le n(\varphi^{2n+2} - \varphi^{2n+1}),$$

$$n - n\varphi - \varphi \le n\varphi^{2n+1}(\varphi - 1) - \varphi^{2n+1},$$

що справедливо, бо ліва частина нерівності від'ємна, а права додатна.

Справді,

$$n\varphi^{2n+1}(\varphi - 1) - \varphi^{2n+1} = \varphi^{2n+1}(n(\varphi - 1) - 1) > 0,$$

бо при $n \ge 2$

$$n(\varphi - 1) - 1 \ge 2\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} - 1\right) - 1 \ge \sqrt{5} - 2 > 0.$$

ЛІТЕРАТУРА

1. *Ушаков Р. П., Хацет Б. І.* Опуклі послідовності та пов'язані з ними нерівності. Збірник статей за 1985 рік. — Випуск 16.
2. *Ушаков Р. П.* Числа Фібоначчі і Люка. — Х. : ВГ «Основа», 2013.

Ми тільки тоді виконаємо свій обов'язок перед молодим поколінням, коли на наших уроках зуміємо переконати, що наука — це нескінченний пошук заради кращого майбутнього людства, і донести ту безмежну мужність, любов до людей і жертовність, які ховаються за скупими рядками наукових законів, формул і теорем...

О. І. Маркушевич (1908–1979)

Потрібні розробки уроків на новий навчальний рік? Обирайте та економте час протягом року!

10 клас за новою програмою!

Серія «Усі уроки»

• Докладні розробки УСІХ уроків класу.

• Багатий додатковий матеріал, методичні рекомендації для вчителя, різноманітність завдань і вправ відрізняють ці посібники від традиційних планів-конспектів.

• УСІ — бренд, визнаний учителями, що користується сталим попитом.

Код	Клас	Стор.	Ціна
Усі уроки математики			
20ПМУ1	6 клас. І семестр	288	40,00
20ПМУ2	6 клас. ІІ семестр	304	40,00
Усі уроки алгебри			
20ПМУ004	7 клас	272	50,00
Усі уроки геометрії			
20ПМУ005	7 клас	288	60,00

Укр. мова, формат А5, м'яка обкладинка

Серія «Збірники»

Код	Клас	Стор.	Ціна
Математика			
20ЗБК005*	10 клас. Рівень стандарту	—	—
Алгебра			
20ЗБК006*	10 клас. Профільний рівень	—	—
Геометрія			
20ЗБК007*	10 клас. Профільний рівень	—	—

* Незабаром у продажу

Серія «Ключові компетентності»

Код	Назва
20КЛК005*	Математика. Завдання із сучасним змістом

* Незабаром у продажу

Серія «Електронний конструктор уроку»

АКЦІЯ! ЗНИЖКА 69%
спеціальна ціна

Код	Клас	Ціна
Математика		
⚠ 20ЕКУ233	5 клас	30,00
20ЕКУ331	6 клас. І семестр	99,00
Алгебра		
20ЕКУ364	7 клас	99,00
20ЕКУ427*	9 клас	—
Геометрія		
20ЕКУ365	7 клас	99,00

* Незабаром у продажу

Укр. мова, формат CD

Будьте забезпечені розробками уроків на весь навчальний рік!