ПРОГРАМНА «КЛАСИКА»

ЛОГАРИФМИ ТА ЇХНІ ВЛАСТИВОСТІ

Урок алгебри та початків аналізу. 11 клас

Презентація

О. Є. Кабанець, м. Дніпро

Мета:

- ✓ *навчальна:* повторити означення степеня з цілим від'ємним показником, із раціональним показником, властивості степенів; увести означення логарифма, розглянути окремі випадки логарифмів; вивчити основну логарифмічну тотожність, властивості логарифмів; формувати навички обчислювати логарифми та розв'язувати вправи на використання їхніх властивостей;
- ✓ *виховна:* виховувати старанність та охайність учнів; формувати вміння слухати, грамотно висловлюватись та доповідати;
- ✓ *розвивальна:* розвивати загальний кругозір школярів; удосконалювати обчислювальні навички учнів.

Обладнання: презентація «Логарифми та їхні властивості», комп'ютер, екран, проектор, картки самоконтролю, роздавальний матеріал до уроку, логарифмічна лінійка.

Тип уроку: комбінований.

Література

1. Логарифм [Електронний ресурс] // Режим доступу: https://uk.wikipedia.org/wiki/Логарифм
2. Глейзер Г. И. История математики в школе IX–X кл. Пособие для учителей / Г. И. Глейзер. — М. : Просвещение, 1983.
3. Нелін Є. П. Алгебра. 11 клас : підруч. для загальноосвіт. навч. закладів : академ. рівень, проф. рівень / Є. П. Нелін, О. Є. Долгова. — Х. : Гімназія, 2011.

План роботи (*2 год*)

1. Привітання (*1 хв*).
2. Повідомлення теми, задач та цілей уроку (*2 хв*).
3. Повідомлення про історію виникнення логарифмів (*5 хв*).
4. Актуалізація опорних знань студентів (*5 хв*).
5. Вивчення поняття «логарифм» (*8 хв*).
6. Закріплення (*8 хв*).
7. Робота за картками з перевіркою в парах (*8 хв*).
8. Вивчення нового матеріалу (*8 хв*).
9. Перерва.
10. Продовження вивчення нового матеріалу (*7 хв*).
11. Розв'язування вправ (*15 хв*).
12. Закріплення. Гра «Так — ні» з перевіркою у парах (*7 хв*).
13. Застосування логарифмів (*5 хв*).
14. Повідомлення про логарифмічну спіраль (*6 хв*).
15. Домашнє завдання (*2 хв*).
16. Підсумки уроку (*3 хв*).

ХІД УРОКУ

Лунає музика — учениця грає на роялі.

1. ОРГАНІЗАЦІЙНИЙ ЕТАП. ПРИВІТАННЯ

Доброго дня! Сідайте, будь ласка.

2. ОГОЛОШЕННЯ ТЕМИ ТА ЗАВДАНЬ УРОКУ

Слайд 1

Учитель. Відкрийте зошити, запишіть число, тему уроку «Логарифми та їхні властивості».

Ви, мабуть, помітили, що сьогодні у нас особливий урок. По-перше, на уроці присутні гості, по-друге, у кабінеті лунає музика. Чому саме сьогодні ми чуємо її на уроці математики?

Слайд 2

Відомий фізик А. Ейхенвальд зазначав, що «граючи по клавішах сучасного рояля, ми граємо по логарифмах». Справа в тому, що ступені темперованої (пропорційної) хроматичної гами (12-звукової) частот звукових коливань є логарифмами.

На уроці ми маємо розібратися, що таке логарифми, навчитись обчислювати їх, вивчити властивості логарифмів та зрозуміти, чому логарифми посідають таке важливе місце в математиці та нашому житті.

3. ПОВІДОМЛЕННЯ УЧНЯ ПРО ІСТОРІЮ ВИНИКНЕННЯ ЛОГАРИФМІВ

Учитель. Послухаємо повідомлення про історію виникнення логарифмів.

Текст повідомлення

Споконвіків люди намагалися спростити обчислення: складали таблиці, упроваджували наближені формули, що полегшують розрахунки, намагалися замінити складні операції множення і ділення простішими — додаванням і відніманням.

Слайд 3

В основі появи логарифма лежить дуже проста ідея, яку приписують ще Архімеду.

Розглянемо дві прогресії, арифметичну і геометричну при $d=1$, $q=2$.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024

Виявляється, ці рядки дозволяють спрощувати обчислення. Справді, якщо ми хочемо перемножити два числа нижнього ряду, наприклад, 16 і 32, нам досить додати відповідні числа верхнього ряду. Над числом 16 стоїть 4, над числом 32 — 5; додаємо числа 4 і 5 (маємо 9) і дивимось: під 9 стоїть 512. Отже, $16 \cdot 32 = 512$. (*Аналогічно виконується і ділення, лише числа першого ряду потрібно віднімати*).

Якщо уважно придивитися до рядків, можна зрозуміти, що числа верхнього ряду є показниками виписаних у нижньому ряду степенів з основою 2.

Ідея Архімеда отримала розвиток не відразу. На той час математикам вистачало вже існуючих засобів обчислень.

У своїй роботі «Загальна арифметика» (1544) М. Штифель, зіставивши арифметичну та геометричну прогресії, зазначив величезну кількість властивостей та залежностей цих двох рядів та написав: «Можна було б написати цілу книжку про ці визначні властивості числових рядів, але цим обмежусь та пройду повз із закритими очима». І він справді пройшов повз можливість застосування властивостей зазначених прогресій для вдосконалення обчислень.

Але задачі ускладнювалися.

Найбільші європейські держави прагнули до пануванням на морі. Для далеких плавань, для визначення розташування морських суден за зірками і за сонцем необхідно було все більш розвивати астрономію, а отже, і тригонометрію.

Зокрема, знадобилися досконаліші тригонометричні таблиці.

У зв'язку зі збільшенням запитів практики продовжували вдосконалюватися астрономічні інструменти, збільшувалася точність спостережень, досліджувалися планетні рухи.

Обробка отриманих даних вимагала колосальних розрахунків, і з'явилася необхідність у нових засобах спрощення обчислень.

Слайд 4

І вже наприкінці 16-го — на початку 17-го століття логарифми почали використовувати для спрощення обчислень. Вони були введені шотландським математиком Дж. Непером (1550–1617) і незалежно від нього швейцарським механіком і математиком І. Бюргі (1552–1632).

Члени геометричної прогресії Джон Непер назвав числами, а члени арифметичної прогресії — їхніми логарифмами (від грецьких слів «логос» — відношення, «аріфмос» — число).

Таким чином, книга перших таблиць логарифмів вийшла зі сповна сучасною назвою «Опис дивної таблиці логарифмів» (1614).

Пізніше з'явився дивовижний інструмент для швидких обчислень — логарифмічна лінійка, яка використовувалася, доки в наше життя не ввійшли калькулятори. Її винахідниками вважають Уїльяма Отреда та Річарда Деламейна.

4. АКТУАЛІЗАЦІЯ ОПОРНИХ ЗНАНЬ

Учитель. Як бачимо з цієї історичної довідки, поняття логарифма тісно пов'язане зі степенями. Тому повторимо те, що знаємо про степені.

Слайд 5

Продовжте рівності:

$a^{-n} =$	$3^{-1} =$
$a^{\frac{m}{n}} =$	$6^{-2} =$
$a^n \cdot a^m =$	$\left(\frac{2}{3}\right)^{-3} =$
$a^n : a^m =$	$49^{\frac{1}{2}} =$
$\left(a^n\right)^m =$	$8^{\frac{1}{3}} =$
$\left(a \cdot b\right)^n =$	$25^{-\frac{1}{2}} =$
$\left(\frac{a}{b}\right)^n =$	$\frac{3^5}{6^5}$
$a^0 =$ при $a \neq 0$	$\left(\frac{2}{3}\right)^{10} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^9$

5. ВИВЧЕННЯ ПОНЯТТЯ «ЛОГАРИФМ»

Слайд 6

Спробуємо прийти до поняття «логарифм». Розв'яжіть рівняння:

$$3^x = 27;\ \ 4^x = 16;\ \ 5^x = \frac{1}{25};\ \ 2^x = -16..$$

Не дивуйтеся, але розв'язавши перші три рівняння, ви знайшли логарифми.

У загальному випадку:

$$a^x = b,\quad a > 0,\quad a \neq 1.$$

✓ Якщо $b > 0$, то рівняння має єдиний корінь;
✓ якщо $b \leq 0$, то рівняння розв'язків не має.

Означення. *Корінь рівняння* $a^x = b$, $a > 0$, $a \neq 1$, називають логарифмом числа b за основою a та позначають $x = \log_a b$.

Логарифмом числа b *за основою* a називають показник степеня, у яку потрібно піднести число a, щоб дістати число b.

6. ЗАКРІПЛЕННЯ НОВИХ ЗНАНЬ

Користуючись означенням логарифма числа, обчисліть:

$$\log_2 8;\ \log_5 25;\ \log_{\sqrt{2}} 16;\ \log_{\sqrt{3}} 27;\ \log_3 \frac{1}{9};$$

$$\log_6 1;\ \log_{27} 3;\ \log_5 0{,}04.$$

Слайд 7

Окремі випадки:

1) $\log_{10} x = \lg x$ — десятковий логарифм;
2) $\log_e x = \ln x$ — натуральний логарифм.

7. РОБОТА ЗА КАРТКАХ З ПЕРЕВІРКОЮ В ПАРАХ

Слайд 8

Учитель. Шановні учні, сьогодні на уроці вам надається можливість самостійно оцінити свою роботу. У вас на столах лежать картки самоконтролю, які ви заповнюватиме впродовж усього заняття, і наприкінці уроку ми визначимо рейтинг кожного з вас.

Обчисліть:

$\log_3 27$	$\log_3 \frac{1}{27}$	$\log_4 16$	$\log_4 \frac{1}{16}$
$\log_7 49$	$\log_7$	$\log_7 7$	$\log_{\frac{1}{2}} 4$
$\lg 100$	$\log_{\sqrt{2}} 2$	$\log_{\sqrt{2}} 8$	$\log_7 \sqrt[3]{7}$

8. ПРОДОВЖЕННЯ ВИВЧЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

Учитель. Щоб навчитись розв'язувати логарифмічні рівняння та нерівності та зрозуміти сутність логарифмів, треба знати властивості логарифмів.

Повернемося до рівняння $a^x = b$, $a > 0$, $a \neq 1$.

Якщо $x = \log_a b$, то $a^{\log_a b} = b$.

$a^{\log_a b} = b$ — основна логарифмічна тотожність.

Приклад. $3^{\log_3 7} = 7$.

⏩ Властивості логарифмів

Уважатимемо, що $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$, $y > 0$, $n \in \mathbb{Q}$.

1) $\log_a 1 = 0$;
2) $\log_a a = 1$;
3) $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$ — логарифм добутку. Доведемо цю властивість.

Слайд 9

За основною логарифмічною тотожністю маємо:

$$x = a^{\log_a x},\quad y = a^{\log_a y}.$$

Перемножимо окремо ліві та праві частини цих рівностей:

$$xy = a^{\log_a x} \cdot a^{\log_a y};$$

$$xy = a^{\log_a x + \log_a y}.$$

Знайдемо логарифми обох частин:

$$\log_a xy = \log_a a^{\log_a x + \log_a y};$$

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y.$$

Властивість доведено.

Аналогічно доводяться властивості 4)–5).

4) $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$ — логарифм частки;

5) $\log_a x^n = n \log_a x$ — логарифм степеня;

6) $\log_a x = \frac{\log_c x}{\log_c a}$ — формула переходу до логарифма з новою основою ($c > 0$, $c \neq 1$).

Приклад. $\log_2 5 = \frac{\log_3 5}{\log_3 2}$.

7) $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$ $\left(\log_a b = \frac{\log_b b}{\log_b a} = \frac{1}{\log_b a}\right)$, $b > 0$, $b \neq 1$.

Приклад. $\log_7 4 = \frac{1}{\log_4 7}$.

8) $\log_a b = \log_{a^n} b^n$, $a > 0$, $a \neq 1$.

Слайд 10

9. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ВПРАВ

Учні працюють біля дошки або на місцях на випередження.

Знайдіть значення виразу:

1) $\log_3 18 + \log_3 \frac{1}{6}$;
2) $\log_5 1000 - \log_5 8$;
3) $3\log_6 2 + \log_6 27$;
4) $10^{\lg 2 + \lg 3}$;
5) $\frac{\log_5 8}{\log_5 2}$;
6) $9^{\log_3 7}$;
7) $2\log_5 15 - 4\log_{25} 3$;
8) $5^{\log_{25} 64} - 9^{\log_3 2}$;
9) $10^{\frac{2}{\log_3 10}} + 3^{\frac{1}{\log_6 3}}$;
10) $10\log_9 \sqrt[5]{27} + \log_6\left(\log_5 \sqrt{\sqrt[3]{5}}\right)$.

10. ЗАКРІПЛЕННЯ НОВИХ ЗНАНЬ

Гра «Так — ні» з перевіркою в парах

Слайд 11

Повертаємось до карток самоконтролю.

Серед наступних тверджень є правильні та неправильні. Визначте їх правильність та поставте позначку «+» чи «−».

1) Існують логарифми тільки додатних чисел.
2) Логарифм числа не може бути від'ємним.
3) Логарифм 1 за будь-якою основою дорівнює 0.
4) $\log_a x + \log_a y = \log_a xy$.
5) $\log_a x - \log_a y = \log_a (x - y)$.
6) $5^{\log_5 9} = 9$.
7) $\frac{1}{\log_7 6} = \log_7 6$.
8) Логарифми $\log_3 5$ та $\log_5 3$ — взаємно обернені числа.

Після роботи відбувається перевірка з повним обґрунтуванням.

11. ЗАСТОСУВАННЯ НАБУТИХ ЗНАНЬ

Слайди 12, 13

Учитель. Повернемося на початок заняття. Чому ж говорять, що граючи на роялі, грають на логарифмах. Подивимось на формулу:

$$\log_2 N_{pm} = m + \frac{p}{12}.$$

Тут N_{pm} — частота, тобто висота будь-якого звуку, p — номер ноти хроматичної гамми, m — номер октави.

Де ще застосовують логарифми?

У *інформатиці* одиницею вимірювання інформації є біт. Для зберігання в комп'ютері натурального числа N (у звичайному для комп'ютера двійковому форматі) необхідно $\log_2 N + 1$ біт.

У *фізиці* формулою $V = I \cdot \ln \frac{M_1}{M_2}$ визначається швидкість, яку розвиває літаючий апарат під дією тяги ракетного двигуна, незмінної за напрямком та за відсутності інших сил. Тут V — кінцева швидкість (після виробітки всього палива), I — питомий імпульс ракетного двигуна (відношення тяги двигуна до секундної витрати маси палива), M_1 — початкова маса літального апарата, M_2 — кінцева маса літального апарата (без палива).

У *психології* та *фізіології* діє закон Вебера-Фехнера, згідно з яким сила відчуття p пропорційна логарифму інтенсивності S подразника:

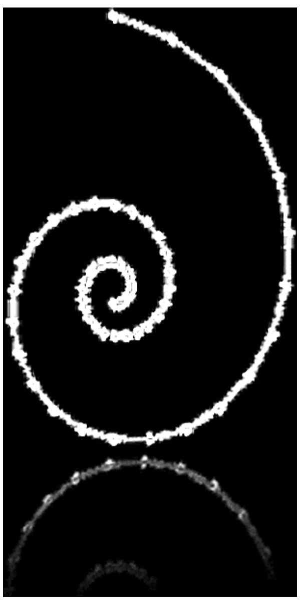
$$p = k \cdot \ln \frac{S}{S_0},$$

де S — значення інтенсивності подразника, S_0 — нижнє граничне значення інтенсивності подразника: якщо $S < S_0$ подразник зовсім не відчувається; k — константа, яка залежить від суб'єкта відчуття.

12. ПОВІДОМЛЕННЯ УЧНІВ ПРО ЛОГАРИФМІЧНУ СПІРАЛЬ

Текст повідомлення

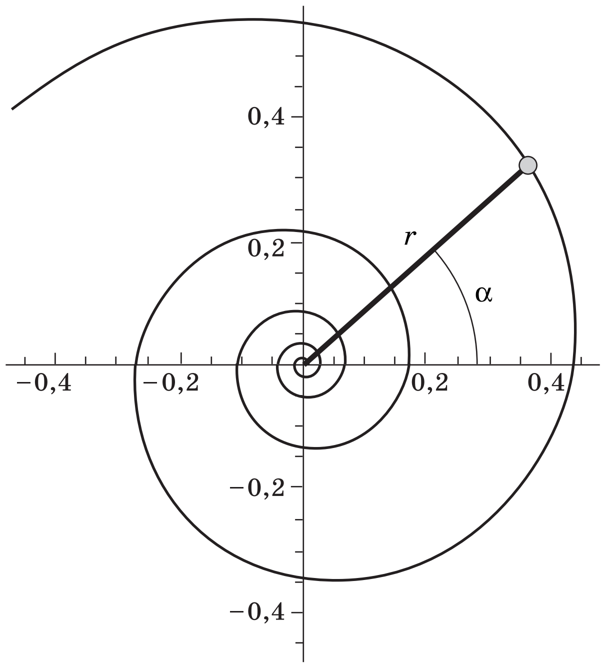
Математики, намагаючись скласти математичну модель того або іншого явища, досить часто звертаються саме до логарифмічної функції. Одним із найбільш наочних прикладів такого звернення є логарифмічна спіраль. Спіраль в один бік розгортається до нескінченності, а довкола полюса, навпаки, закручується, наближаючись до нього, але не досягаючи.



У полярних координатах рівняння логарифмічної спіралі має такий вигляд:

$$\alpha = \frac{1}{b} \ln \frac{r}{a},$$

де α — кут відхилення точки від нуля, r — радіус-вектор точки, a — коефіцієнт, що відповідає за відстань між витками, b — коефіцієнт, що відповідає за густину витків.

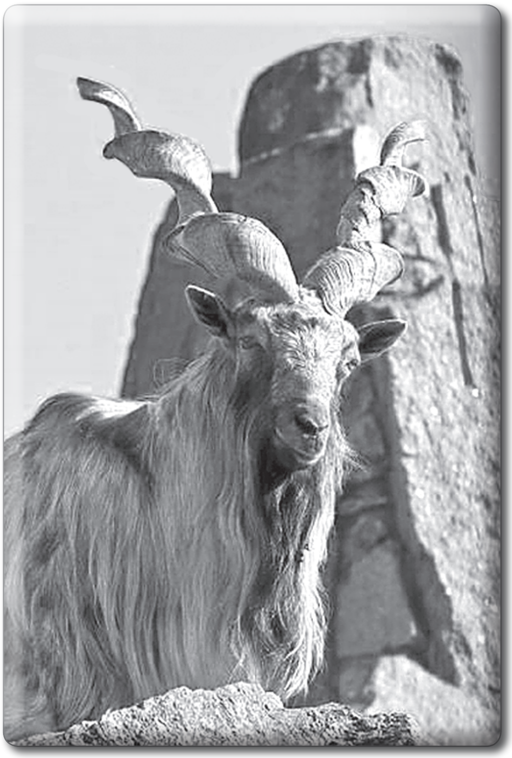


$a = 0{,}01 \quad b = 0{,}15$

Де ми зустрічаємо логарифмічну спіраль?

Відомо, що живі істоти зазвичай зростають, зберігаючи загальне зображення своєї форми. При цьому найчастіше вони зростають за всіма напрямками — доросла істота і вища, і товща за малюка. Але раковини морських тварин можуть зростати лише в одному напрямку. Щоб не дуже витягуватися в довжину, їм доводиться скручуватися, причому зростання здійснюється так, що зберігається подібність раковини з її первинною формою. А таке зростання може здійснюватися лише за логарифмічною спіраллю або її просторовими аналогами. Тому раковини багатьох молюсків, равликів, а також роги таких ссавців, як гірські козли (архари), закручені за логарифмічною спіраллю.

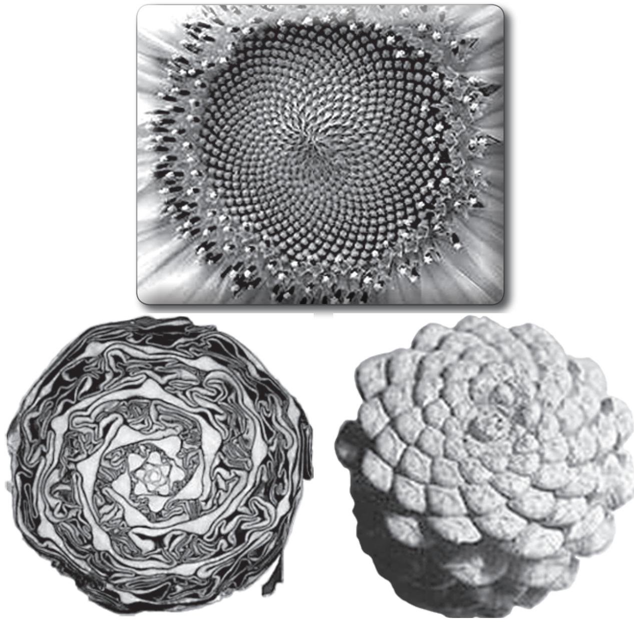
Раковина молюска



Гірський козел

Можна сказати, що ця спіраль є математичним символом співвідношення форми і зростання. Великий німецький поет Іоганн-Вольфганг Гете вважав її математичним символом життя і духовного розвитку.

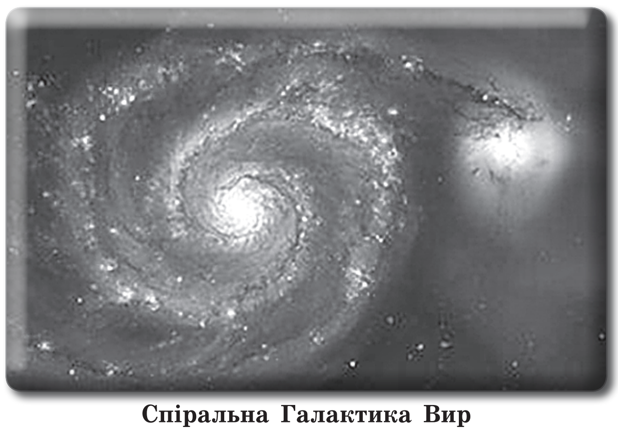
Форму логарифмічної спіралі мають не лише раковини. Один із найбільш поширених павуків, епейра, сплітаючи павутину, закручує нитки довкола центра по логарифмічних спіралях. У соняшнику насіння розташоване дугами, близькими до логарифмічної спіралі.



Логарифмічна спіраль у природі

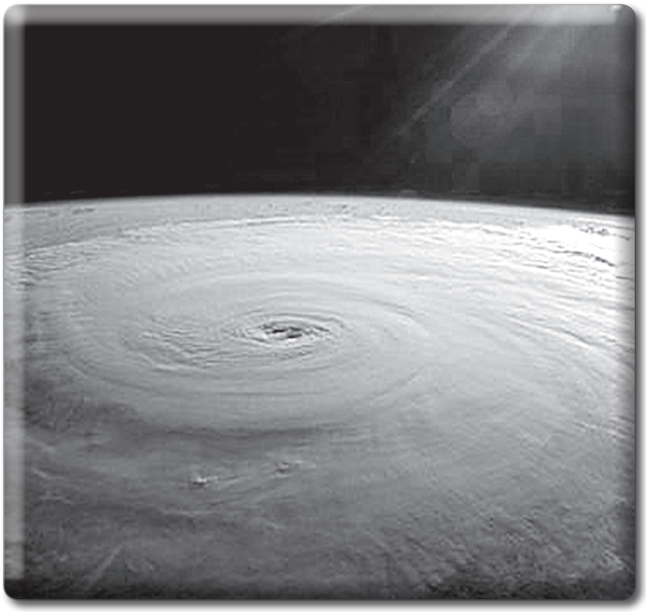
По логарифмічних спіралях закручено і багато Галактик, зокрема Галактика, якій належить Сонячна система.

Галактика Молочний шлях



Спіральна Галактика Вир

У логарифмічну спіраль закручено і циклони.



Ураган Даніель

Отже, можна сказати, що логарифми повсюди.

13. ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

Слайд 14

Розвиток і освіта жодній людині не можуть бути надані або повідомлені. Усякий, хто бажає до них долучитися, повинен досягти цього власною діяльністю, власними силами, власним зусиллям.

А. Дістервег
(видатний німецький педагог та політик)

1) Знайти приклади використання логарифмів.
2) Вивчити теоретичні відомості.
3) Виконати завдання за підручником.

14. ПІДСУМКИ УРОКУ

Учні підраховують бали в картках самоконтролю. Учитель виставляє оцінки в журнал.

Повідомлення з презентаціями оцінюються окремо.

Заняття закінчено, дякую за роботу!