БЕНЕФІС ОДНІЄЇ ЗАДАЧІ

О. І. Баран, м. Миколаїв

Геометрія сповнена пригод, оскільки за кожною задачею ховається пригода думки. Розв'язати задачу — означає пережити пригоду.
В. Проізволов

Бенефіс (франц. *benefice*) — прибуток, користь, від лат. beneficium (bene — добре, і facere — робити):

1) *застар.* вистава або концерт, збір із якого повністю або частково надходить на користь одного або декількох артистів, працівників театру;
2) спектакль на честь одного з його учасників як визнання заслуг, майстерності артиста.

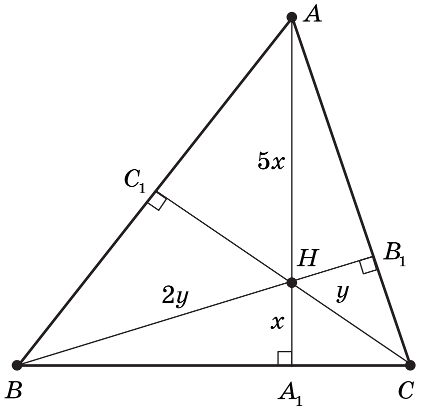
Поступово з'явилося друге, переносне значення цього слова. Так стали називати будь-який вдалий виступ — не тільки актора, а, скажімо, спортивної команди, а часом вдалу участь у якій-небудь справі.

Пропонуємо вашій увазі незвичайний математичний бенефіс. Його дійові особи і герої: Архімед, Жергонн, Менелай, Піфагор, Фалес, Чева, Ейлер і одна задача. Дії вистави відбуваються в аудиторіях університету, на вулицях Миколаєва і в трамваї.

Отже, розпочинаємо. Завіса піднімається.

Років десять тому на курсах підвищення кваліфікації хтось із учителів запропонував розв'язати таку задачу.

ЗАДАЧА. Дві висоти гострокутного трикутника діляться в ортоцентрі у відношеннях $5:1$ і $2:1$, починаючи від вершин. У якому відношенні в ортоцентрі ділиться третя висота?



Це і є наша бенефіціантка. А для кращого сприйняття подальшого тексту спробуйте самостійно знайти розв'язання цієї задачі або хоча б оцінити рівень її складності. Уважаємо, що це буде і цікаво, і корисно.

Спочатку задача видалася мені нескладною, але відразу її розв'язати не зміг. І все ж після досить тривалих роздумів наступного дня я приніс її розв'язання, у якому використовується теорема Ейлера, яка, у свою чергу, випливає з теореми Ван-Обеля.

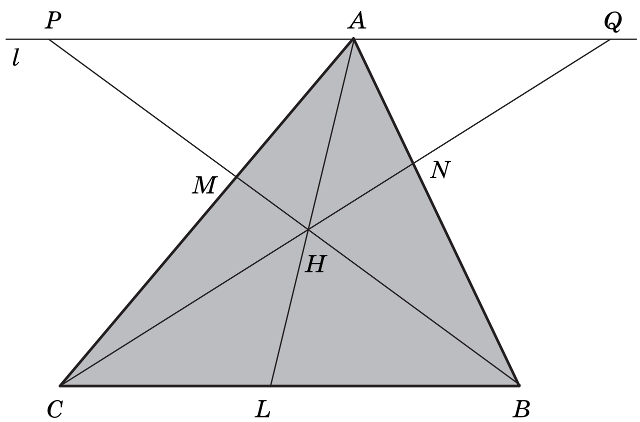
Напевно, буде не зайвим навести доведення цих теорем, тим більше, що вони не часто зустрічаються в посібниках із геометрії.

Фламандський математик **Хенрікус Хубертус Ван-Обель** (народився 20 листопада 1830 у Маастріхті; помер 3 лютого 1906 року в Антверпені) — учитель математики в королівському атенеумі Антверпена (аналог класичної гімназії в дореволюційній системі освіти Росії).

Теорема Ван-Обеля

Нехай чевіани AL, BM, CN трикутника ABC перетинаються в точці H. Довести, що має місце рівність

$$\frac{AH}{HL}=\frac{AM}{MC}+\frac{AN}{NB}.$$



Нагадаємо, що відрізок, який сполучає вершину трикутника з будь-якою точкою, що лежить на протилежній стороні або її продовженні, називають чевіаною.

Доведення

Проведемо через точку A пряму l, паралельно BC. Нехай BM перетинає пряму l у точці P, а CN перетинає її в точці Q.

Тепер розглянемо три пари подібних трикутників: AMP і CMB, ANQ і BNC, PHQ і BHC, звідки дістанемо:

$$\frac{AM}{MC}=\frac{PA}{BC},$$

$$\frac{AN}{NB}=\frac{AQ}{BC},$$

$$\frac{PQ}{BC}=\frac{AH}{HL}.$$

Додамо дві перші рівності, із урахуванням третьої, дістанемо:

$$\frac{AM}{MC}+\frac{AN}{NB}=\frac{PA}{BC}+\frac{AQ}{BC}=\frac{PQ}{BC}=\frac{AH}{HL},$$

що й доводить теорему [3].

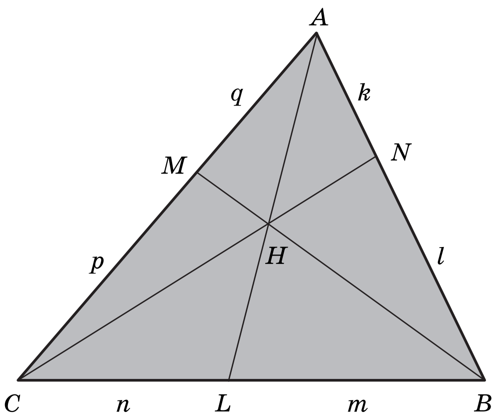
Терема Ейлера

Довести, що в умовах попередньої теореми має місце рівність

$$\frac{AH}{HL}\cdot\frac{BH}{HM}\cdot\frac{CH}{HN}-\left(\frac{AH}{HL}+\frac{BH}{HM}+\frac{CH}{HN}\right)=2.\ (*)$$

Доведення

Позначимо відповідні відрізки трикутника так, як показано на *рисунку*.



При цьому має місце співвідношення, яке випливає з теореми Чеви:

$$\frac{q}{p}\cdot\frac{n}{m}\cdot\frac{l}{k}=1.$$

Тепер перевіримо справедливість цієї рівності за допомогою теореми Ван-Обеля:

$$\frac{AH}{HL}=\frac{q}{p}+\frac{k}{l},$$

$$\frac{BH}{HM}=\frac{l}{k}+\frac{m}{n},$$

$$\frac{CH}{HN}=\frac{n}{m}+\frac{p}{q}.$$

Уведемо ще такі позначення:

$$x=\frac{q}{p},\quad y=\frac{l}{k},\quad z=\frac{n}{m}.$$

Із теореми Чеви також випливає, що $xyz=1$.

Тоді співвідношення (*) після відповідних спрощень можна записати в такому вигляді:

$$\left(\frac{q}{p}+\frac{k}{l}\right)\cdot\left(\frac{l}{k}+\frac{m}{n}\right)\cdot\left(\frac{n}{m}+\frac{p}{q}\right)-\left(\frac{q}{p}+\frac{k}{l}+\frac{l}{k}+\frac{m}{n}+\frac{n}{m}+\frac{p}{q}\right)=$$

$$=\left(x+\frac{1}{y}\right)\cdot\left(y+\frac{1}{z}\right)\cdot\left(z+\frac{1}{x}\right)-\left(x+\frac{1}{y}+y+\frac{1}{z}+z+\frac{1}{x}\right)=$$

$$=\frac{1}{xyz}\cdot\left(x^2y^2z^2+x^2yz+xy^2z+xyz^2+xy+yz+zx+1\right)-$$

$$-\frac{1}{xyz}\cdot\left(x^2yz+xy^2z+xyz^2+xy+yz+zx\right)=.$$

$$=\frac{(xyz)^2+1}{xyz}=\frac{1+1}{1}=2.$$

Що й потрібно було довести [3].

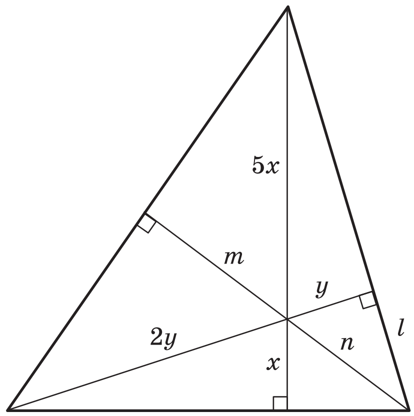
Отже, **РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ**.

ПЕРШИЙ СПОСІБ

Більшість задач розв'язуються дивовижно просто: треба взяти і розв'язати!

Із математичного фольклору

Позначимо довжини відрізків двох висот так: $5x$ і x, $2y$ і y. Нехай третя висота поділена на відрізки m і n.



Використовуючи теорему Ейлера, знайдемо відношення $\frac{n}{m}$:

$$\frac{5x}{x}\cdot\frac{2y}{y}\cdot\frac{n}{m}-\left(\frac{5x}{x}+\frac{2y}{y}+\frac{n}{m}\right)=2,$$

звідки

$$\frac{n}{m}=1.$$

Отже, третя висота заданого трикутника в ортоцентрі ділиться навпіл.

Після цього достатньо швидко вдалося знайти розв'язання на основі теореми Жергонна.

Жозеф Діас Жергонн (Joseph Diaz Gergonne, 1771–1859) — французький астроном і математик, геометр, на якого мав великий вплив Монж.

Із 1830 року по 1844 був ректором університету Монпельє.

Із 1810 року Жергонн почав видавати свій журнал, який мав офіційну назву Annales de mathematiques pures et appliquees, але став відомий як Annales de Gergonne. Цей журнал видавався протягом 22 років, в основному в ньому друкувалися статті, присвячені геометрії як основній сфері інтересів Жергонна, роботи багатьох відомих математиків: Понселе, Плюкера, Бріаншона, Галуа та ін.

Жергонн навів елегантне розв'язання задачі Аполлонія: побудувати коло, яке дотикається до трьох заданих кіл. Він увів термін «поляра» і разом із Ж. Понселе розробив принцип подвійності в проективній геометрії.

Теорема Жергонна

Мистецтво розв'язувати геометричні задачі чимось нагадує трюки ілюзіоністів: іноді, навіть знаючи розв'язання задачі, важко зрозуміти, як можна було до нього додуматися.

І. Д. Новиков

Нехай три чевіани AD, BE і CF перетинаються в точці K усередині трикутника ABC. Тоді мають місце такі рівності:

$$\frac{KD}{AD}+\frac{KE}{BE}+\frac{KF}{CF}=1; \quad (1)$$

$$\frac{AK}{AD}+\frac{BK}{BE}+\frac{CK}{CF}=2. \quad (2)$$

Доведення

Для доведення скористаємося умовою, що відношення площ трикутників зі спільною основою дорівнює відношенню їхніх відповідних висот. Відповідно, відношення висот таких трикутників дорівнюватиме відношенню відрізків чевіан, проведених до спільної сторони з протилежної вершини.

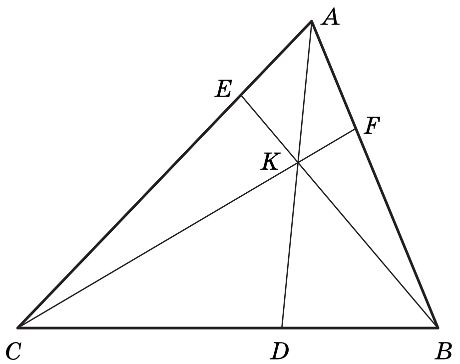
Оскільки мають місце очевидні рівності

$$\frac{AK}{AD}+\frac{KD}{AD}=1,\quad \frac{BK}{BE}+\frac{KE}{BE}=1,\quad \frac{CK}{CF}+\frac{KF}{CF}=1,$$

то рівності (1) і (2) еквівалентні.

Доведемо першу з них. Розглянемо відношення площ трикутників:

$$\frac{S_{\Delta BKC}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{KD}{AD},\quad \frac{S_{\Delta AKC}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{KE}{BE},\quad \frac{S_{\Delta AKB}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{KF}{CF}.$$



Тепер додамо відношення площ:

$$\frac{KD}{AD}+\frac{KE}{BE}+\frac{KF}{CF}=$$

$$=\frac{S_{\Delta BKC}+S_{\Delta AKC}+S_{\Delta AKB}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta ABC}}=1.$$

Рівність (2) є наслідком очевидних співвідношень:

$$\frac{AK}{AD}=\frac{AD-KD}{AD}=1-\frac{KD}{AD},$$

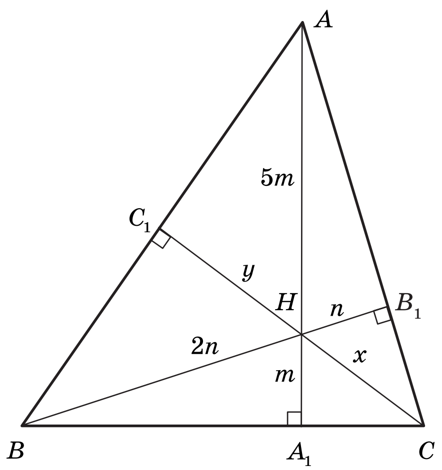
$$\frac{BK}{BE}=\frac{BE-KE}{BE}=1-\frac{KE}{BE},$$

$$\frac{CK}{CF}=\frac{CF-KF}{CF}=1-\frac{KF}{CF}.$$

Додамо їх, дістанемо шукану другу рівність (із урахуванням першої) [3].

ДРУГИЙ СПОСІБ

Теорема Жергонна 1



$$\frac{HA_1}{AA_1}+\frac{HB_1}{BB_1}+\frac{HC_1}{CC_1}=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}+k=1,$$

звідки

$$k=1-\frac{1}{3}-\frac{1}{6}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

Отже, висота CC_1 в ортоцентрі ділиться навпіл.

ТРЕТІЙ СПОСІБ

Теорема Жергонна 2

$$\frac{AH}{AA_1}+\frac{BH}{BB_1}+\frac{CH}{CC_1}=\frac{5}{6}+\frac{2}{3}+k=2,$$

звідки

$$k=2-\frac{2}{3}-\frac{5}{6}=2-\frac{9}{6}=2-\frac{3}{2}=\frac{1}{2}.$$

Отже, висота CC_1 в ортоцентрі ділиться навпіл.

Три попередні способи розв'язання задачі залишили неприємне відчуття невиправданої й зайвої складності. Тому я періодично повертався до цієї задачі і думав про те, як покращити її розв'язання. І через деякий час, дорогою на роботу, у трамваї, були знайдені нові ідеї та розв'язання, які виявилися простішими і такими, що спираються на традиційні методи елементарної геометрії. Нижче наведені деякі з них (які здаються найбільш вдалими).

ЧЕТВЕРТИЙ СПОСІБ

Під час розв'язування задачі поганий план часто виявляється корисним: він може привести до кращого плану.

Д. Пойа

Теорема Менелая

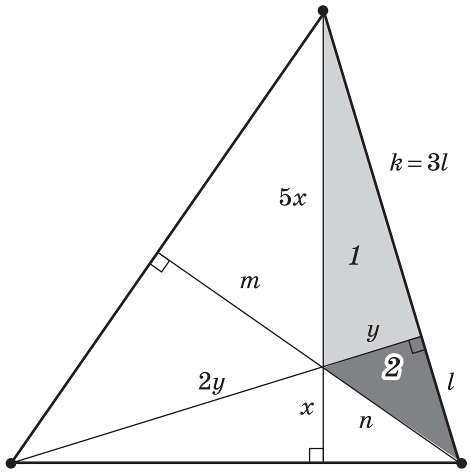
Одним із кращих розв'язань цієї задачі є розв'язання за допомогою теореми Менелая. Пропонуємо мнемонічну схему застосування цієї теореми:

Розглядаємо перетин трикутника довільною прямою і знаходимо добуток трьох відношень:

- ✓ від першої вершини — до першої точки, від першої точки — до другої вершини (перше відношення);
- ✓ від другої вершини — до другої точки, від другої точки — до третьої вершини (друге відношення);

- ✓ від третьої вершини — до третьої точки, від третьої точки — до першої вершини (третє відношення).

Вершини трикутника і точки на січній прямій чергуються, добуток цих відношень дорівнює одиниці.



Отже, «Робимо — раз!». Застосуємо теорему Менелая до трикутника *1*, починаючи від указаної вершини, вибравши за січну основу заданого трикутника:

$$\frac{6}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{l}{k+l}=1,\quad \frac{k+l}{l}=4,$$

$$1+\frac{k}{l}=4,\quad k=3l.$$

«Робимо — два!». Тепер застосуємо теорему Менелая до трикутника *2*, починаючи з позначеної вершини при основі заданого трикутника, вибравши за січну бічну сторону заданого трикутника:

$$\frac{m+n}{m}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}=1,\quad \frac{m+n}{m}=2,\quad 1+\frac{n}{m}=2,$$

$$m=n.$$

Отже, третя висота заданого трикутника в ортоцентрі ділиться навпіл.

Зауваження. Розв'язання задачі за допомогою теореми Менелая також «напрошувалось» із самого початку. Але після декількох невдалих спроб воно було відхилене, оскільки «все і відразу» не виходило. Це також повчальний приклад недостатньої наполегливості під час пошуку розв'язання задачі.

У таких випадках часто пригадую свого шкільного вчителя математики, Федора Михайловича Лемеша:

Учитель: Ты решил задачу?

Ученик: Нет, не вышла!

Учитель: Значит, плохо звал!

І ось, після того як теорема Менелая здійснила своєрідний прорив, «заговорила класика».

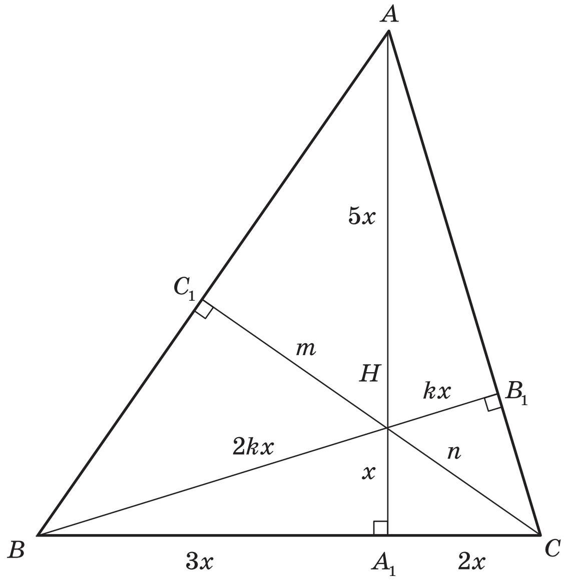
П'ЯТИЙ СПОСІБ

Теорема Піфагора

Початок — половина цілого.

Піфагор

Уведемо позначення, як показано на *рисунку*.



Навколо чотирикутника AB_1A_1B можна описати коло. Тоді, ураховуючи рівність добутків відрізків хорд, що проходять через точку H, дістанемо:

$$5x^2=2k^2x^2,$$

$$k^2=\frac{5}{2};$$

$$BA_1=\sqrt{4k^2x^2-x^2}=\sqrt{4\cdot\frac{5}{2}\cdot x^2-x^2}=3x,$$

$$AB=\sqrt{36x^2+9x^2}=\sqrt{45}\cdot x=3\sqrt{5}\cdot x.$$

Із подібності трикутників AA_1C і BA_1H маємо:

$$\frac{A_1C}{6x}=\frac{x}{3x},$$

$$\frac{A_1C}{6x}=\frac{x}{3x},$$

$$A_1C=2x;$$

а

$$n=\sqrt{x^2+4x^2}=\sqrt{5}\cdot x.$$

Тепер ще раз скористаємося добутком хорд у колі:

$$m\cdot n=5x\cdot x,\quad m\cdot\sqrt{5}x=5x^2,\quad m=\sqrt{5}\cdot x.$$

Отже, $m=n$.

Інакше: двома способами виражаючи площу заданого трикутника, дістанемо:

$$2S_\Delta=5x\cdot 6x=3\sqrt{5}\cdot x\cdot h,$$

$$h=m+n=\frac{5\cdot 6x}{3\sqrt{5}},$$

$$m+n=2\sqrt{5}\cdot x.$$

Отже, висота CC_1 в ортоцентрі ділиться навпіл.

ШОСТИЙ СПОСІБ

Теорема Фалеса

Фалес! Как много в этом слове
Для математиков слилось,
Как много в нём отозвалось!

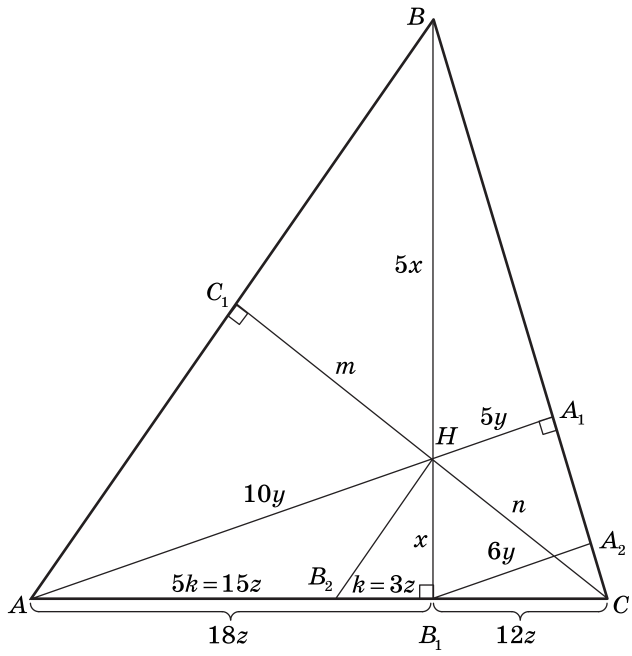
У пізнанні, звідки б не починати, все одно повернешся до початку, бо істина кругом.

Фалес Мілетський

І ось на сцену виходить теорема Фалеса, що, до речі, було цілком очікуваним. Я з самого початку намагався використовувати і цю теорему, але сам алгоритм розв'язання було знайдено не відразу, а після певних зусиль і також у трамваї.

Складність полягала в тому, що фактично ця теорема теж використовується тут кілька разів.

Уведемо позначення відповідно до умови задачі, як показано на *рисунку*.



Тут $B_1A_2\parallel HA_1$, $HB_2\parallel AB$.

Із подібності трикутників BHA_1 і BB_1A_2 маємо: $B_1A_2=6y$.

Далі, з подібності трикутників AA_1C і B_1A_2C випливає, що

$$\frac{B_1C}{AC}=\frac{6}{15}.$$

Нехай тоді $AB_1=18z$, а $B_1C=12z$.

Застосувавши теорему Фалеса до кута AB_1B, дістанемо:

$$\frac{AB_2}{B_2B_1}=\frac{5k}{k}=\frac{15z}{3z}.$$

Тепер, застосувавши теорему Фалеса до кута ACC_1, дістанемо:

$$\frac{m}{n}=\frac{AB_2}{B_2C}=\frac{15z}{15z}=1.$$

Отже, третя висота в ортоцентрі ділиться навпіл.

СЬОМИЙ СПОСІБ

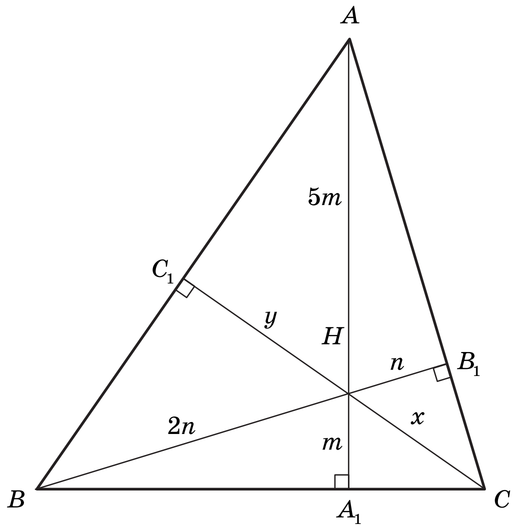
Метод площ

Для обережного розуму багатослівність — не доказ.

Фалес Мілетський

Це розв'язання є найкоротшим і найбільш витонченим. І воно також із «трамвая».

Скористаємося *рисунком*.



Нехай площа заданого трикутника $S_{ABC}=1$. Тоді $S_{BHC}=\dfrac{1}{6}$, $S_{AHC}=\dfrac{1}{3}$.

Отже,

$$S_{AHB}=1-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

Звідси випливає, що $CC_1=2C_1H$.

Таким чином, висота CC_1 в ортоцентрі ділиться навпіл.

ВОСЬМИЙ СПОСІБ

Надайте мені точку опори, і я зрушу Землю.

Архімед

Теорема косинусів
для висот гострокутного трикутника

Ця теорема зустрічається досить рідко, тому доцільно навести її доведення.

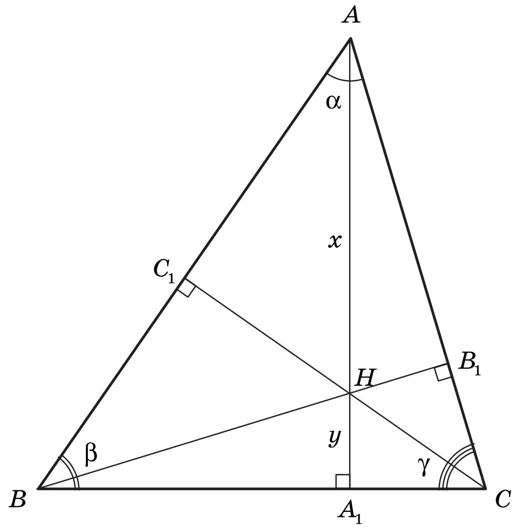
Теорема. У гострокутному трикутнику відрізки висот діляться в таких відношеннях:

$$\frac{AH}{HA_1}=\frac{\cos\alpha}{\cos\beta\cdot\cos\gamma},$$

$$\frac{BH}{HB_1}=\frac{\cos\beta}{\cos\gamma\cdot\cos\alpha},$$

$$\frac{CH}{HC_1}=\frac{\cos\gamma}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}.$$

Доведення



Маємо:

$$x=\frac{AB_1}{\sin\gamma},\quad AB_1=c\cdot\cos\alpha,$$

звідки

$$x=\frac{c\cdot\cos\alpha}{\sin\gamma}.$$

$$AA_1=x+y=b\cdot\sin\gamma,\ \text{тоді}\ \ y=b\cdot\sin\gamma-\frac{c\cdot\cos\alpha}{\sin\gamma}.$$

Тепер знаходимо шукане відношення відрізків висоти:

$$\frac{x}{y}=\frac{c\cdot\cos\alpha}{\sin\gamma}:\left(b\cdot\sin\gamma-\frac{c\cdot\cos\alpha}{\sin\gamma}\right).$$

Далі за теоремою синусів маємо:

$$\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma},\quad b\cdot\sin\gamma=c\cdot\sin\beta.$$

Тепер шукане відношення можна записати так:

$$\frac{x}{y}=\frac{c\cdot\cos\alpha}{\sin\gamma}:\left(c\cdot\sin\beta-\frac{c\cdot\cos\alpha}{\sin\gamma}\right),$$

$$\frac{x}{y}=\frac{\cos\alpha}{\sin\gamma}\cdot\frac{\sin\gamma}{\sin\beta\cdot\sin\gamma-\cos\alpha},$$

$$\frac{x}{y}=\frac{\cos\alpha}{\sin\beta\cdot\sin\gamma-\cos\bigl(\pi-(\beta+\gamma)\bigr)},$$

$$\frac{x}{y}=\frac{\cos\alpha}{\sin\beta\cdot\sin\gamma+\cos(\beta+\gamma)},$$

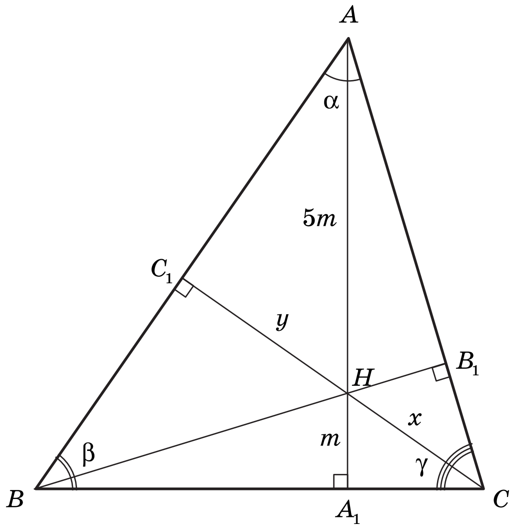
$$\frac{x}{y}=\frac{\cos\alpha}{\cos\beta\cdot\cos\gamma},$$

що і потрібно було довести.

Дві інші рівності доводяться аналогічно.

А тепер можна приступати до безпосереднього розв'язування заданої задачі.

Уведемо позначення, як показано на *рисунку*.



Тепер скористаємося щойно доведеною теоремою:

$$\frac{AH}{HA_1}=\frac{\cos\alpha}{\cos\beta\cdot\cos\gamma}=\frac{5}{1},\quad \frac{BH}{HB_1}=\frac{\cos\beta}{\cos\gamma\cdot\cos\alpha}=\frac{2}{1},$$

$$\frac{\cos\gamma\cdot\cos\alpha}{\cos\beta}=\frac{1}{2},$$

звідки дістанемо:

$$\frac{\cos\alpha}{\cos\beta\cdot\cos\gamma}\cdot\frac{\cos\gamma\cdot\cos\alpha}{\cos\beta}=\frac{5}{2},\qquad \frac{\cos\alpha}{\cos\beta}=\sqrt{\frac{5}{2}}.$$

Із урахуванням цього перше співвідношення можна записати так:

$$\frac{\cos\alpha}{\cos\beta\cdot\cos\gamma}=\sqrt{\frac{5}{2}}\cdot\frac{1}{\cos\gamma}=5,\quad \cos\gamma=\frac{\sqrt{10}}{10}.$$

Тепер із трикутника AA_1C знаходимо A_1C:

$$A_1C=6m\cdot\operatorname{ctg}\gamma=6m\cdot\frac{\cos\gamma}{\sqrt{1-\cos^2\gamma}}=$$

$$=6m\cdot\frac{\sqrt{10}}{10}\cdot\frac{10}{3\sqrt{10}}=2m.$$

Далі за теоремою Піфагора знаходимо HC: $HC=x=\sqrt{5}\,m.$

Скористаємося подібністю трикутників HC_1A і HA_1C:

$$\frac{5m}{y}=\frac{x}{m},\quad 5m^2=xy,\quad 5m^2=\sqrt{5}m\cdot y,\quad y=\sqrt{5}m.$$

Отже, $x=y$ і третя висота в ортоцентрі ділиться навпіл.

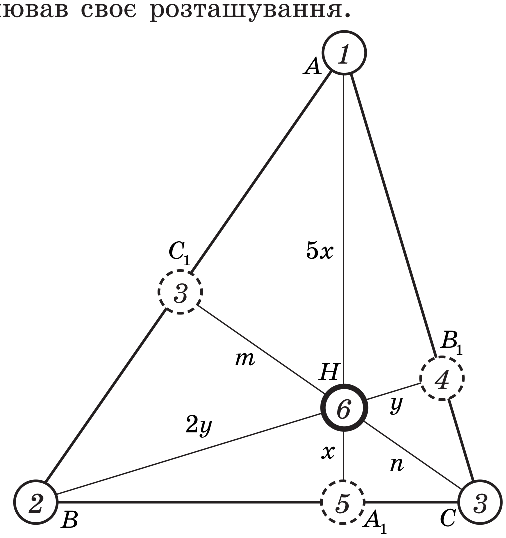
ДЕВ'ЯТИЙ СПОСІБ

Геометрія мас

Механіка є раєм математичних наук.

Леонардо да Вінчі

Завантажимо вершини трикутника точковими масами так, щоб точка перетину висот була також центром мас цієї трійки матеріальних точок. При цьому зручно прийняти масу всієї системи за 6 одиниць (звичайно, це може бути довільне число, але це число ділиться і на 2, і на 3, що зручно під час подальшого розподілу мас). Будемо також по-різному групувати матеріальні точки так, щоб центр мас матеріальної системи точок не змінював своє розташування.



1. Нехай спочатку вся маса зосереджена в ортоцентрі. Розподілимо її по точках A і A_1. Тоді з умови рівності моментів у цих точках потрібно розмістити 1 і 5 одиниці маси відповідно. Зафіксуємо масу в точці A. У свою чергу 5 одиниць маси тепер потрібно розподілити по вершинах B, і C, але ми цього ще не зможемо зробити.

2. Нехай тепер знову вся маса зосереджена в ортоцентрі. Розподілимо її по точках B і B_1. Тоді в цих точках потрібно розмістити відповідно маси 2 і 4. Фіксуємо масу в точці B. Отже, у точці C, яка лежить на перетині BA_1 і AB_1, потрібно розмістити 3 одиниці маси, що залишилися. Тепер уся маса розподілена по вершинах трикутника.

3. Оскільки розташування центра мас системи не залежить від способу його визначення, визначимо його так. Спочатку згрупуємо маси у вершинах A і B. Тоді в точці C_1 буде сумарна маса $1+2=3$. При цьому пряма CC_1 обов'язково пройде через ортоцентр (точку H), яка тепер буде також центром мас системи двох точок C і C_1.

Оскільки маси в точках C і C_1 рівні, то і $CH=HC_1$.

Крім того, тепер за допомогою цього методу можна легко визначити, у якому відношенні висоти заданого трикутника ділять його сторони.

Більш строге і докладне обґрунтування розв'язання цієї задачі, із використанням геометрії матеріальних точок, читач зможе продумати самостійно, прийнявши за основу ідеї чудової книги [1], які, у свою чергу, сходять до наукової спадщини славетного Архімеда.

Але і це, звісно, не все! Для розв'язання цієї задачі можна використати подібність трикутників, теорему Чеви й інші ідеї й методи планіметрії.

Але вистава вже й так затягнулась, і час опускати завісу. Наприкінці слід також звернути увагу на те, що ця задача належить до афінних задач. Тому вказівка на те, що в умові завдання задано висоти, є в якомусь сенсі «зайвою», хоча це дозволяє в ряді випадків полегшити розв'язання (використання подібності трикутників, теореми Піфагора, кіл), у більшості наведених розв'язань цей факт повністю ігнорується.

У цій задачі знаходить відображення майже вся геометрія трикутника.

Але залишається ще одне нез'ясоване питання: хто, коли і як придумав цю чудову задачу? ...

ДОДАТКОВІ ЗАДАЧІ

Математика цікава тоді, коли живить нашу винахідливість і здатність міркувати.

Д. Пойа

1. Заданий гострокутний трикутник, дві висоти якого діляться в ортоцентрі у відношеннях $5:1$ і $2:1$, починаючи від вершин.

1) Знайдіть площу цього трикутника, якщо довжина найбільшої висоти дорівнює 18 см.
2) Знайдіть гострий кут між указаними висотами.
3) За допомогою циркуля і лінійки побудуйте вказаний трикутник, якщо задана одна з його висот (розгляньте всі можливі випадки).
4) За допомогою циркуля і лінійки побудуйте указаний трикутник, якщо задана одна з його сторін (розгляньте всі можливі випадки).

2. Заданий гострокутний трикутник, дві висоти якого діляться в ортоцентрі у відношеннях $1:1$ і $2:1$, починаючи від вершин. У якому відношенні в ортоцентрі ділиться третя висота?

3. Чи існує такий гострокутний трикутник, дві висоти якого діляться в ортоцентрі у відношеннях $3:4$ і $4:3$, починаючи від вершин?

ЛІТЕРАТУРА

1. *Балк М. Б., Болтянский В. Г.* Геометрия масс. — М. : Наука, 1987. — 160 с.
2. *Готман Э. Г., Скопец З. А.* Задача одна — решения разные. — К. : Радянська школа, 1988. — 174 с.
3. *Кушнір І. А.* Методи розв'язування задач з геометрії. Книга для вчителя. — К. : Абрис, 1994. — 463 с.
4. *https://znanija.com/task/23721207*
5. *http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Gergonne.html_*
6. *http://jwilson.coe.uga.edu/EMT669/Essay.Ideas/Gergonne/Gergonne.html*
7. *http://www.cut-the-knot.org/triangle/Gergonne.shtml*
8. *http://www.collections.univ-montp2.fr/page:JD_Gergonne*