У НОМЕРІ:

На допомогу вчителю

Позакласна робота

Серенада Математиці

У НОМЕРІ:

БОНУС! МАТЕМАТИКА В ШКОЛІ. ПОЗАКЛАСНА РОБОТА № 7–8 (91–92)

Електронний додаток на нашому сайті: http:/journal.osnova.com.ua

У розпалі літо — найулюбленіша пора року — пора відпусток, відпочинку, яскравих квітів, соковитих ягід і фруктів. Сподіваємось, що ви, шановні колеги, не гаєте часу — активно відпочиваєте, отримуєте нові враження, яскраві емоції. А ще ми сподіваємось, що коли нарешті ☺ розпочнеться новий навчальний рік, вам стануть у пригоді статті, надруковані в цьому журналі.

Тема номера: Олімпіади.

Майстер-клас

Т. О. Циганок. Стратегія і тактика шкільних олімпіад

Як ефективно організувати і провести шкільну математичну олімпіаду — наймасовішу з усіх олімпіад, адже в ній беруть участь усі охочі? Які основні вимоги до задач шкільної олімпіади? Як оцінювати розв'язання задач? Які існують форми та методи підготовки учнів до олімпіади? Відповіді на ці запитання ви знайдете в цій статті. Крім того, автор пропонує пам'ятку учасникам олімпіади. Поради, наведені в цій пам'ятці, допоможуть не тільки учасниками олімпіад, а й тим, хто бере участь у ЗНО і ДПА.

Т. В. Свєтлова. Інтелектуальні математичні змагання школярів

Однією із форм роботи з обдарованими учнями є участь у інтелектуальних змаганнях. Автор розповідає про різноманітні математичні змагання, що проводяться в Україні, їхню історію, особливості кожного з виду змагань, принципи їхньої організації тощо.

Мистецтво розв'язувати задачі

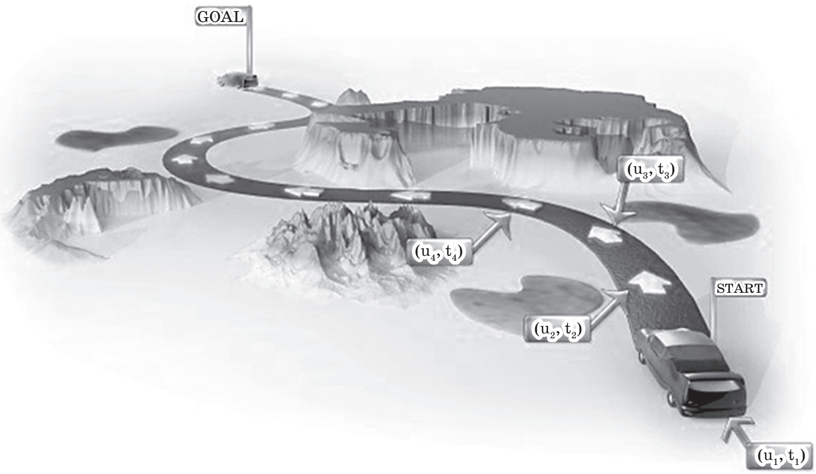
Т. В. Свєтлова. Олімпіади Сумщини з математики: II етап

Пропонуємо варіанти завдань II етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики в Сумській області та їх повні розв'язання. Сподіваємось, що ці матеріали стануть у пригоді як учням — для першого знайомства з нестандартними задачами евристичного характеру, так і вчителям — для проведення позакласних занять із математики, підготовки учнів до участі в математичних олімпіадах.

РОЗВ’ЯЗУВАННЯ АЛГЕБРАЇЧНИХ ЗАДАЧ (НА РУХ, СПІЛЬНУ РОБОТУ, СПЛАВИ ТА СУМІШІ) У 8–9 КЛАСАХ

С. А. Левченко, м. Ніжин, Чернігівська обл.

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ



Уміння розв’язувати задачі — виробничі, навчальні, наукові, організаційні тощо — указують на кваліфікацію та компетентність будь-якого фахівця.

У шкільному курсі математики задачі виконують різні дидактичні функції. Під час розв’язування задач в учнів формується особливий тип мислення, зокрема, лаконізм, чіткість і точність у вираженні думок, аргументація та логічність міркувань. Слід зауважити, що процес розв’язування задач має бути системним і безперервним. Це дає можливість учням накопичувати досвід, виявляти математичні закономірності, формулювати припущення та гіпотези. Лише за умов систематичності та безперервності в навчанні можна забезпечити цілісність знань школярів.

Аналіз науково-методичної літератури свідчить про відсутність чітко розробленої системи в розв’язанні текстових задач алгебраїчним методом.

Зокрема В. Лебедєв указує на те, що в шкільному курсі математики розв'язання текстових завдань є одним із найскладніших матеріалів для сприйняття й засвоєння учнями [10, с. 8].

На думку Г. Левітаса, оволодіння навичками математичного моделювання — це найважливіше, чого має навчити дітей учитель математики [11, с. 13].

Як свідчить практика, під час складання ДПА з математики в 9 класі значна частина школярів узагалі не починають розв'язувати текстові задачі на рух, спільну роботу, сплави та суміші тощо. В інших роботах було відсутнє належне обґрунтування процесу створення математичної моделі (рівняння, система рівнянь) та правильне розв'язання таких типів задач. Лише учні з високим рівнем навчальних досягнень успішно впоралися із завданнями.

Негативна тенденція простежується й під час складання ЗНО із математики.

Так, за статистикою, 2008 року лише 9 % абітурієнтів розв'язали текстову задачу на суміші [16, с. 79]; 2011 року — 4,26 % абітурієнтів впоралися з текстовою задачею на спільну роботу [17, с. 85]; 2017 року — 16,8 % абітурієнтів правильно розв'язали текстову задачу на рух [18, с. 199].

Тому виникла потреба розробити методичні рекомендації з теми «Розв'язування алгебраїчних задач (на рух, спільну роботу, сплави та суміші) у 8–9 класах». По-перше, через недостатню кількість науково-методичної літератури з означеної теми, а по-друге, через труднощі, що виникають в учнів під час розв'язування задач зазначених типів як у поурочний час, так і в ході складання ДПА та ЗНО.

I. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТЕКСТОВИХ ЗАДАЧ У ШКІЛЬНОМУ КУРСІ МАТЕМАТИКИ

Текстові задачі відіграють важливу роль у курсі алгебри основної школи. Вони є дидактичним засобом навчання, виховання та розвитку школярів, а також складають окремий розділ програми, зміст якого учні мають засвоїти. Формування вміння учнів розв'язувати текстові задачі базується на системі математичних знань, формуванні вмінь і навичок математичного моделювання, обчислення, розвитку прийомів розумової діяльності (планування, пошук раціональних шляхів, критичність тощо).

Текстові задачі допомагають розкрити опосередковані зв'язки математики з довкіллям і практичною діяльністю людей, реалізувати пізнавальні й виховні функції навчання. Процес розв'язування текстових задач сприяє формуванню таких розумових дій, як аналіз і синтез, конкретизація й абстрагування, порівняння, узагальнення тощо. Від оволодіння вміннями розв'язувати задачі залежить не лише підготовка школярів із математики на цьому етапі навчання, а й осмислене засвоєння систематичних курсів алгебри, геометрії, фізики, інформатики.

Методисти умовно ділять текстові задачі на декілька типів. С. М. Лук'янова серед них виділяє такі основні, кожний із яких має певні загальні підходи в розв'язанні: задачі на сумісну роботу, задачі на сплави та суміші, задачі на рух.

Серед методистів (В. А. Ярощук, А. Ф. Єсаулов, З. І. Калмикова, Н. О. Менчинська) існує думка, що не слід типізувати текстові задачі та нав'язувати учням конкретну методику розв'язування задач того чи іншого типу. Так, кожен учень має право обирати метод розв'язування, який він краще розуміє.

Отож, основне завдання вчителя — ознайомити учнів із загальними підходами, можливими способами та прийомами розв'язання задач; сформувати базові знання, використовуючи які, учні зможуть розв'язувати текстові задачі за допомогою рівнянь та систем рівнянь.

Загальний прийом розв'язання задач передбачає знання етапів розв'язання, методів (способів) виконання відповідних типів текстових задач, а також володіння предметними знаннями: поняттями, означеннями термінів, правилами, формулами, логічними прийомами й операціями.

До етапів розв'язання можна віднести такі:

- ✓ аналіз тексту задачі;
- ✓ переклад тексту задачі мовою математики;
- ✓ установлення зв'язків між умовою та запитанням задачі;
- ✓ складання плану розв'язання задачі;
- ✓ здійснення плану розв'язання;
- ✓ перевірка та оцінка результатів розв'язання задачі.

Аналіз тексту задачі

Робота над текстом задачі включає семантичний, логічний і математичний аналіз.

1. Семантичний аналіз спрямований на забезпечення розуміння змісту тексту.
2. Логічний аналіз передбачає вміння замінювати терміни їх означеннями; виводити наслідки з наявних в умові задачі даних (поняття, процеси, явища).

3. Математичний аналіз передбачає встановлення зв'язків між умовою і вимогою задачі, переклад тексту мовою математики.

   У результаті аналізу текст задачі записують коротко з використанням умовної символіки. Після того як умова задачі виокремлена в короткому записі, слід перейти до аналізу залежностей і зв'язків між даними. Для цього здійснюється переклад тексту мовою моделей різного виду: таблиця, формула, рівняння, система тощо. Переклад тексту у форму моделі дозволяє виявити в ньому властивості й залежності, які часто важко виявити при читанні тексту.

Установлення зв'язку між даними і запитанням

На основі аналізу умови і питання задачі визначається спосіб розв'язання задачі, вибудовується послідовність конкретних дій.

Алгоритм розв'язання текстової задачі на складання рівняння

1. На основі аналізу тексту задачі визначають окремі значення величин, а також відношення, що їх пов'язують. Передбачається:
   1) поділ задачі на окремі частини, кожна з яких є словесним завданням певного елемента задачі;
   2) визначення ознак, що характеризують відношення між величинами.

   З'ясувати, скільки величин розглядається в задачі та які вони мають значення.
2. Вибирають деяку невідому величину і позначають її буквою (наприклад, x).
3. Інші невідомі величини (якщо вони є) виражають через уведену букву.
4. За умовою задачі встановлюють відношення між невідомими та відомими значеннями величин і складають рівняння.
5. Розв'язують складене рівняння.
6. Знаходять значення невідомого, а якщо треба за умовою задачі, то значення інших невідомих величин.
7. Відповідають на запитання задачі.

Розв'язування текстових задач за допомогою дробово-раціонального рівняння або системи рівнянь є достатньо складним для звичайного середнього учня завданням. Навіть учні з високим рівнем мотивації не з першого разу розуміють, як скласти рівняння або систему до запропонованої задачі. Проте в кожному варіанті державної підсумкової атестації з математики у 9-му класі текстова задача є обов'язково. Тобто, кожен учитель усвідомлює, що повинен навчити учнів розв'язувати текстові задачі, зокрема задачі на рух, спільну роботу, сплави та суміші.

Із метою полегшення засвоєння учнями зазначеного матеріалу, доцільно використовувати технологію «базової таблиці». Як свідчить практика, така технологія ефективна, оскільки більша кількість учнів значно краще засвоює тему.

Спосіб розв'язання задач із використання технології «базової таблиці» ґрунтується на складанні й заповненні опорної таблиці. Зручний вигляд таблиці й алгоритмізація кроків дозволяють відпрацювати навички складати рівняння та їх системи до будь-якої запропонованої задачі.

II. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТЕКСТОВИХ ЗАДАЧ НА РУХ, СПІЛЬНУ РОБОТУ, СУМІШІ ТА СПЛАВИ

2.1. ЗАДАЧІ НА РУХ

Задачі на рух діляться на види залежно від того, скільки рухомих тіл розглядають у задачі і як вони рухаються: рівномірно чи нерівномірно, прямолінійно чи непрямолінійно. Однак у задачах часто не вказується на те, як рухається тіло — прямолінійно чи не прямолінійно, бо це іноді не має істотного значення. Наприклад, коли йде мова про рух автобуса на великі відстані, то не можна стверджувати, що автобус весь час їде прямолінійно. Проте і в таких випадках використовують залежність між швидкістю, часом і відстанню, характерні для прямолінійного руху.

Формула шляху $S = v \cdot t$, яка показує залежність між трьома величинами: відстанню, швидкістю і часом. Швидкість v обчислюється за формулою $v = \frac{S}{t}$, тобто, щоб знайти швидкість, необхідно відстань поділити на час. Час t дорівнює $t = \frac{S}{v}$, тобто, щоб знайти час, необхідно відстань поділити на швидкість.

На уроках алгебри учням найчастіше доводиться розв'язувати задачі на прямолінійний рівномірний рух.

У цих задачах йдеться:

1) про одне рухоме тіло;
2) про два рухомі тіла.

У такій послідовності й розглянемо методику розв'язування цих задач.

2.1.1. Задачі про одне рухоме тіло

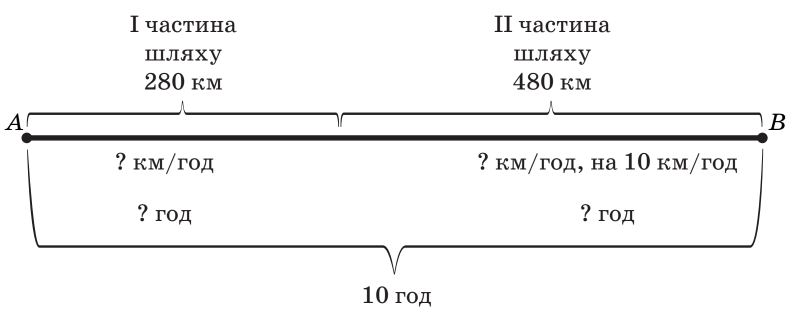
Задачі на одне рухоме тіло досить різноманітні. Рухоме тіло може змінювати швидкість на різних ділянках руху, змінювати напрям руху на протилежний, може затримуватись у дорозі тощо.

Задача 1

Перші 280 км від пункту A до пункту B автобус проїхав із певною швидкістю, а останні 480 км — зі швидкістю на 10 км/год більшою. Знайдіть початкову швидкість автобуса, якщо на весь шлях від пункту A до пункту B він витратив 10 год.

Аналіз задачі

1. Скільки рухомих тіл розглянуто у задачі? (Одне)
2. Як рухається автобус: прямолінійно чи не прямолінійно? (Прямолінійно)
3. Як залежать між собою швидкість, час і відстань? ($S = v \cdot t$)
4. Як знайти час, якщо відомо відстань і швидкість рухомого тіла? ($t = \dfrac{S}{v}$)
5. Як знайти швидкість, якщо відомо відстань і час рухомого тіла? ($v = \dfrac{S}{t}$)
6. Яку відстань подолав автобус на першій частині шляху? (280 км)
7. Яку відстань подолав автобус на другій частині шляху? (480 км)
8. Якою була швидкість автобуса на першій частині шляху? Скільки часу було витрачено?
9. Якою була швидкість автобуса на другій половині шляху? Скільки часу було витрачено?
10. Скільки всього часу був у дорозі автобус? (10 год)



Розв'язання

Спосіб 1

Етапи	Швидкість, км/год	Час, год	Відстань, км
I частина	x	$\frac{280}{x}$	280
II частина	$x+10$	$\frac{480}{x+10}$	480

Нехай перші 280 км автобус рухався зі швидкістю x км/год, тоді останні 480 км він рухався зі швидкістю $(x+10)$ км/год. На першу частину шляху він витратив $\frac{280}{x}$ год, а на другу частину шляху — $\frac{480}{x+10}$ год.

На весь шлях автобус витратив $\left(\frac{280}{x}+\frac{480}{x+10}\right)$ год, що за умовою задачі становить 10 год.

Маємо рівняння:

$$\frac{280}{x}+\frac{480}{x+10}=10,$$

$$\frac{28}{x}+\frac{48}{x+10}-1=0,$$

$$\frac{28x+280+48x-x^2-10x}{x(x+10)}=0,$$

$$\frac{x^2-66x-280}{x(x+10)}=0,$$

$$\begin{cases} x^2-66x-280=0, \\ x\neq 0, \\ x\neq -10. \end{cases}$$

Маємо: $x_1=70$, $x_2=-4$.

Корінь $x_2=-4$ не задовольняє умову задачі, оскільки швидкість не може бути від'ємною.

Отже, початкова швидкість автобуса дорівнює 70 км/год.

Спосіб 2

Етапи	Швидкість, км/год	Час, год	Відстань, км
I частина	$\frac{280}{x}$	x	280
II частина	$\frac{480}{10-x}$	$10-x$	480

Нехай перші 280 км від пункту A до пункту B автобус проїхав за x год, тоді на останні 480 км він витратив $(10-x)$ год. Першу частину шляху автобус рухався зі швидкістю $\frac{280}{x}$ км/год, а на другій частині шляху — $\frac{480}{10-x}$ км/год. За умовою задачі останні 480 км автобус рухався зі швидкістю на 10 км/год більшою, ніж перші 280 км від пункту A до пункту B.

Маємо рівняння:

$$\frac{480}{10-x}-\frac{280}{x}=10,$$

$$\frac{48}{10-x}-\frac{28}{x}=1,$$

$$\frac{48x-280+28x-10x+x^2}{x(10-x)}=0,$$

$$\frac{x^2+66x-280}{x(10-x)}=0,$$

$$\begin{cases} x^2+66x-280=0, \\ x\neq 0, \\ x\neq 10. \end{cases}$$

Маємо: $x_1=4$, $x_2=-70$.

Корінь $x_2=-70$ не задовольняє умову задачі, оскільки час — додатна величина.

Отже, перші 280 км від пункту A до пункту B автобус проїхав за 4 години зі швидкістю $\frac{280}{x}=\frac{280}{4}=70$ (км/год).

Відповідь. 70 км/год.

Задача 2

Мотоцикліст проїхав 40 км з пункту A до пункту B і повернувся назад. На зворотному шляху він зменшив швидкість на 10 км/год порівняно з початковою і витратив на подорож на 20 хв більше, ніж на шлях з пункту A до пункту B. Знайдіть початкову швидкість мотоцикліста.

Розв'язання

Етапи	**Швидкість, км/год**	**Час, год**	**Відстань, км**
$A \to B$	x	$\frac{40}{x}$	40
$B \to A$	$x-10$	$\frac{40}{x-10}$	40

Нехай початкова швидкість мотоцикліста з пункту A до пункту B дорівнює x км/год, тоді його швидкість на зворотному шляху — $(x-10)$ км/год. Час руху мотоцикліста до пункту B становить $\frac{40}{x}$ год, тоді час, витрачений ним на зворотний шлях, становить $\frac{40}{x-10}$ год, що на 20 хв $= \frac{20}{60}$ год $= \frac{1}{3}$ год більше, ніж на шлях від пункту A до пункту B.

Маємо рівняння:

$$\frac{40}{x-10}-\frac{40}{x}=\frac{1}{3},$$

$$\frac{40x-40x+400}{x(x-10)}=\frac{1}{3},$$

$$\frac{400}{x(x-10)}=\frac{1}{3},$$

$$\begin{cases} x^2-10x-1200=0, \\ x\neq 0, \\ x\neq 10, \end{cases}$$

звідки маємо: $x_1=40$, $x_2=-30$.

Корінь $x_2=-30$ не задовольняє умову задачі, оскільки швидкість не може бути від'ємною.

Отже, початкова швидкість мотоцикліста дорівнює 40 км/год.

Відповідь. 40 км/год.

Розглянемо три способи складання порівняльного рівняння.

Спосіб 1

Від більшої величини відняти меншу величину і записати в правій частині число, на скільки більше.

Для задачі № 2:

$$\frac{40}{x-10}-\frac{40}{x}=\frac{1}{3}.$$

Спосіб 2

Від більшої величин відняти число, яке показує, на скільки вона більша, і це дорівнює меншій величині.

Для задачі № 2:

$$\frac{40}{x-10}-\frac{1}{3}=\frac{40}{x}.$$

Спосіб 3

До меншої величини додати число, яке показує, на скільки вона менша, і це дорівнює більшій величині.

Для задачі № 2:

$$\frac{40}{x}+\frac{1}{3}=\frac{40}{x-10}.$$

Задача 3

Автотурист, виїхавши вранці з деякою швидкістю, запланував до 12 год дня подолати 420 км. Перші дві години він їхав із запланованою швидкістю, а потім, збільшивши її на 5 км/год, проїхав до призначеного строку 445 км. О котрій годині виїхав автотурист?

Розв'язання

Нехай до 12 год автотурист повинен бути в дорозі x год. У цей час він мав рухатися зі швидкістю $\frac{420}{x}$ км/год. Із такою швидкістю він їхав 2 год, отже, проїхав усього $2\cdot\frac{420}{x}=\frac{840}{x}$ км. Потім він їхав $(x-2)$ год зі швидкістю $\left(\frac{420}{x}+5\right)$ км/год і проїхав за цей час $(x-2)\left(\frac{420}{x}+5\right)$ км. За умовою задачі всього до 12 год автотурист проїхав 445 км.

Маємо рівняння:

$$\frac{840}{x}+(x-2)\left(\frac{420}{x}+5\right)=445,$$

$$\frac{168}{x}+(x-2)\left(\frac{84}{x}+1\right)=89,$$

$$\frac{168}{x}+84+x-\frac{168}{x}-2=89,$$

$$x=7.$$

Отже, до 12 год турист був у дорозі 7 год. А це означає, що виїхав він о 5 год ранку.

Відповідь. О 5 год ранку.

Задача 4

Швидкий потяг за розкладом мав пройти перегін AB без зупинки за 4 год. Однак на відстані 150 км від станції A його було затримано на 20 хв. Щоб прибути на станцію B за розкладом, він пройшов решту шляху зі швидкістю, більшою за початкову на 15 км/год. Знайдіть довжину перегону.

Розв'язання

Спосіб 1

Рух потяга	v, км/год	t, год	S, км
За планом	x	$\frac{4x-150}{x}=4-\frac{150}{x}$	$4x-150$
Фактично	$x+15$	$\frac{4x-150}{x+15}=\frac{4x+60-210}{x+15}=4-\frac{210}{x+15}$	$4x-150$

Нехай потяг за розкладом мав рухатися зі швидкістю x км/год, тоді перегін AB становить $4x$ км. На шлях $(4x-150)$ км він за розкладом мав витратити $\frac{4x-150}{x}=4-\frac{150}{x}$ год.

Фактично на цьому відрізку шляху він рухався зі швидкістю $(x+15)$ км/год, витративши $\frac{4x-150}{x+15}$ год, що на $\frac{1}{3}$ год менше, ніж було заплановано.

Маємо рівняння:

$$4-\frac{150}{x}-4+\frac{210}{x+15}=\frac{1}{3},$$

$$\frac{210}{x+15}-\frac{150}{x}=\frac{1}{3},$$

$$\frac{210x-150x-2250}{x(x+15)}=\frac{1}{3},$$

$$\begin{cases} x^2-165x+6750=0, \\ x\neq 0, \\ x\neq -15. \end{cases}$$

Корені рівняння: $x_1=75$, $x_2=90$.

Обидві корені задовольняють умову задачі.

✓ Якщо швидкість потяга за розкладом становить 75 км/год, то довжина перегону AB дорівнює $4\cdot 75=300$ км.

✓ Якщо швидкість потяга за розкладом становить 90 км/год, то довжина перегону AB дорівнює 360 км.

Спосіб 2

Нехай довжина перегону становить x км, тоді потяг мав рухатися зі швидкістю $\frac{x}{4}$ км/год. Після зупинки він рухався зі швидкістю $\left(\frac{x}{4}+15\right)$ км/год. Отже, до зупинки він їхав $150:\frac{x}{4}=\frac{600}{x}$ год, а після зупинки — $(x-150):\left(\frac{x}{4}+15\right)=\frac{4(x-150)}{x+60}$ год.

Усього автотурист їхав $\frac{11}{3}$ год.

Маємо рівняння:

$$\frac{600}{x}+\frac{4(x-150)}{x+60}=\frac{11}{3},$$

$$\frac{600}{x}+\frac{4(x-150)}{x+60}-\frac{11}{3}=0,$$

$$\frac{600x+36000+4x^2-600x}{x(x+60)}-\frac{11}{3}=0,$$

$$\frac{108000+12x^2-11x^2-660x}{x(x+60)}=0,$$

$$\begin{cases} x^2-660x+108000=0, \\ x\neq 0, \\ x\neq -60. \end{cases}$$

Обидва корені рівняння $x_1=300$ і $x_2=360$ задовольняють умову задачі.

Отже, довжина перегону AB становить 300 км або 360 км.

Відповідь. 300 км або 360 км.

Задача 5

Шлях між пунктами A і B складається з підйому і спуску. Велосипедист, рухаючись на спуску зі швидкістю на 6 км/год більшою, ніж на підйомі, долає шлях від A до B за 2 год 40 хв, а зворотний шлях від B до A — на 20 хв швидше. Визначте швидкість велосипедиста на підйомі й спуску та довжину підйому в напрямі від A до B, якщо довжина всього шляху дорівнює 36 км.

Розв'язання

Нехай швидкість велосипедиста на підйомі дорівнює x км/год, а довжина підйому від A до B — y км. Тоді його швидкість на спуску дорівнює $(x+6)$ км/год, а довжина спуску — $(36-y)$ км.

Рух велосипедиста		Швидкість, км/год	Час, год	Відстань, км
$A\to B$	підйом	x	$2\frac{2}{3}$	y
	спуск	$x+6$		$36-y$
$B\to A$	підйом	x	$2\frac{1}{3}$	$36-y$
	спуск	$x+6$		y

На шляху від A до B велосипедист витратив на підйом $\frac{y}{x}$ год, а на спуск — $\frac{36-y}{x+6}$ год. За умовою задачі на весь шлях від пункту A до пункту B він витратив 2 год 40 хв $=2\frac{40}{60}$ год $=2\frac{2}{3}$ год.

Маємо рівняння: $\frac{y}{x}+\frac{36-y}{x+6}=2\frac{2}{3}$.

На шляху від B до A велосипедист витратив на підйом $\frac{36-y}{x}$ год, а на спуск — $\frac{y}{x+6}$ год. За умовою задачі на весь шлях від пункту B до пункту A він витратив 2 год 20 хв $= 2\frac{20}{60}$ год $= 2\frac{1}{3}$ год.

Маємо рівняння: $\frac{36-y}{x}+\frac{y}{x+6}=2\frac{1}{3}$.

Оскільки x і y позначають одні й ті самі величини, то складаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{y}{x}+\frac{36-y}{x+6}=2\frac{2}{3}, \\ \frac{36-y}{x}+\frac{y}{x+6}=2\frac{1}{3}. \end{cases}$$

Додамо почленно ліві й праві частини рівняння системи, дістанемо рівняння $\frac{36}{x}+\frac{36}{x+6}=5$,

$$\frac{5x^2-42x-216}{x(x+6)}=0,$$

$$\begin{cases} 5x^2-42x-216=0, \\ x\neq 0, \\ x\neq -6. \end{cases}$$

Розв'яжемо рівняння $5x^2-42x-216=0$.

$$\frac{D}{4}=21^2+5\cdot 216=3^2\left(7^2+5\cdot 24\right)=3^2\cdot 169=\left(3\cdot 13\right)^2=39^2.$$

$$x_1=\frac{21+39}{5}=12,\ x_2=\frac{21-39}{5}=-3{,}6<0$$

(не задовольняє умову задачі).

Отже, швидкість велосипедиста на підйомі дорівнює 12 км/год, на спуску — 18 км/год. Довжину підйому від A до B знайдемо з рівняння $\frac{y}{12}+\frac{36-y}{18}=2\frac{2}{3}$.

$$3y+2(36-y)=96,$$

$$y=96-72=24.$$

Відповідь. 12 км/год, 18 км/год, 24 км.

Задача 6

Потяг мав проїхати 64 км. Коли він проїхав 24 км, то був затриманий біля семафора на 12 хв. Тоді він збільшив швидкість на 10 км/год і прибув до пункту призначення із запізненням на 4 хв. Знайдіть початкову швидкість потяга.

Розв'язання

Спосіб 1

Рух потяга	Швидкість, км/год	Час, год	Відстань, км
За планом	x	$\frac{24}{x}$	24
Фактично	$x+10$	$\frac{40}{x+10}$	$64-24=40$

Нехай початкова швидкість потяга дорівнює x км/год, тоді його швидкість після вимушеної зупинки — $(x+10)$ км/год. 24 км він подолав за $\frac{24}{x}$ год, наступні 40 км — за $\frac{40}{x+10}$ год, а за графіком він повинен був би витратити $\frac{64}{x}$ год. Біля семафора потяг утратив 12 хв $=\frac{12}{60}$ год $=\frac{1}{5}$ год. За умовою задачі потяг запізнився на 4 хв $=\frac{4}{60}$ год $=\frac{1}{15}$ год.

Маємо рівняння:

$$\frac{24}{x}+\frac{40}{x+10}+\frac{1}{5}-\frac{64}{x}=\frac{1}{15},$$

$$\frac{40}{x+10}-\frac{40}{x}+\frac{2}{15}=0,$$

$$\frac{20}{x+10}-\frac{20}{x}+\frac{1}{15}=0,$$

$$\frac{300x-300x-3000+x^2+10x}{x(x+10)}=0,$$

$$\frac{x^2+10x-3000}{x(x+10)}=0,$$

$$\begin{cases} x^2+10x-3000=0, \\ x \neq 0, \\ x \neq -10. \end{cases}$$

Корені рівняння: $x_1=-60$ (не задовольняє умову задачі), $x_2=50$.

Отже, початкова швидкість потяга дорівнює 50 км/год.

Спосіб 2

Зауваження. Міркувати можна було так. Потяг на шлях 40 км фактично витратив на 8 хв менше, ніж планувалося за розкладом. Тому можна скласти таку таблицю.

Рух потяга	**Швидкість, км/год**	**Час, год**	**Відстань, км**
За планом	x	$\frac{40}{x}$	40
Фактично	$x+10$	$\frac{40}{x+10}$	40

Маємо рівняння: $\frac{40}{x}-\frac{40}{x+10}=\frac{2}{15}$, звідки дістанемо, що початкова швидкість потяга дорівнює 50 км/год.

Відповідь. 50 км/год.

Задачі для самостійного розв'язування

1. Велосипедист з'їздив із села на станцію і повернувся назад. На зворотному шляху він збільшив швидкість на 1 км/год порівняно з рухом на станцію і витратив на нього на 8 хв менше. Із якою швидкістю їхав велосипедист на станцію, якщо відстань між селом і станцією становить 32 км?
2. Із пункту A до пункту B автомобіль їхав шосейною дорогою завдовжки 210 км, а повернувся з пункту B до пункту A ґрунтовою дорогою завдовжки 160 км, витративши на зворотний шлях на 1 год більше, ніж на шлях з пункту A до пункту B. Із якою швидкістю рухався автомобіль ґрунтовою дорогою, якщо вона на 30 км/год менша, ніж його швидкість по шосе?
3. Перші 150 км дороги з міста A до міста B автомобіль проїхав із певною швидкістю, а решту — 240 км — зі швидкістю на 5 км/год більшою. Знайдіть початкову швидкість автомобіля, якщо на весь шлях з міста A до міста B він витратив 5 год.

4. Міжміський автобус мав проїхати 72 км. Коли він проїхав 24 км, то був затриманий біля залізничного переїзду на 12 хв. Потім він збільшив швидкість на 12 км/год і прибув до пункту призначення із запізненням на 4 хв. Знайдіть початкову швидкість автобуса.

5. Потяг мав проїхати 300 км. Проїхавши $\frac{1}{3}$ шляху, він зупинився на 1 год, а потім продовжив рух зі швидкістю на 10 км/год меншою від початкової. Знайдіть швидкість потяга, якщо в пункт призначення він прибув через 8 год після виїзду.

2.1.2. Задачі на рух двох тіл у протилежних напрямках

Під час розв'язування задач цього типу слід згадати такі відомості про рух тіла.

1. Якщо тіла одночасно починали рухатися назустріч одне одному, то до моменту зустрічі вони перебували в русі однаковий час.
2. Сума відстаней, пройдених обома тілами до зустрічі, дорівнює загальній відстані між пунктами, із яких вийшли ці тіла.
3. За одиницю часу тіла зближаються на відстань, що чисельно дорівнює сумі їх швидкостей [4].

Задача 1

Відстань між містами A і B дорівнює 93 км. Із міста A до міста B виїхав перший велосипедист. Через годину назустріч йому з міста B виїхав другий велосипедист, швидкість якого на 3 км/год більша за швидкість першого. Велосипедисти зустрілися на відстані 45 км від міста A. Знайдіть швидкість кожного велосипедиста.

Розв'язання

Учасники руху	Швидкість, км/год	Час, год	Відстань, км
I велосипедист	x	$\frac{45}{x}$	45
II велосипедист	$x+3$	$\frac{48}{x+3}$	$93-45=48$

Нехай швидкість першого велосипедиста дорівнює x км/год, тоді швидкість другого велосипедиста — $(x+3)$ км/год. Відстань 45 км до зустрічі перший велосипедист подолав за $\frac{45}{x}$ год, а другий велосипедист подолав $93-45=48$ (км) за $\dfrac{48}{x+3}$ год. За умовою задачі перший велосипедист був у дорозі на 1 год більше, ніж другий, тобто на $\left(\dfrac{45}{x}-\dfrac{48}{x+3}\right)$ год.

Маємо рівняння:

$$\frac{45}{x}-\frac{48}{x+3}=1,$$

$$\frac{45x+135-48x-x^2-3x}{x(x+3)}=0,$$

$$\frac{x^2+6x-135}{x(x+3)}=0,$$

звідки дістанемо корені рівняння: $x_1=9$, $x_2=-15$ (не задовольняє умову задачі, оскільки швидкість не може бути від'ємною).

Отже, швидкість першого велосипедиста дорівнює 9 км/год, тоді швидкість другого — 9+3 = 12 (км/год).

Відповідь. 9 км/год і 12 км/год.

Задача 2

Два автомобілі виїхали одночасно з міст A і B назустріч один одному. Через годину вони зустрілися і, не зупиняючись, продовжили рухатися з тими самими швидкостями. Один із них прибув до міста B на 50 хв пізніше, ніж інший до міста A. Знайдіть швидкість кожного автомобіля, якщо відстань між містами становить 100 км.

Розв'язання

Спосіб 1

Те, що автомобілі зустрілися через 1 годину після одночасного виїзду з міст, свідчить про те, що швидкість їхнього зближення дорівнює 100 км/год.

Учасники руху	**Швидкість, км/год**	**Час, год**	**Відстань, км**
І автомобіль $(A\to B)$	x	$\dfrac{100}{x}$	100
ІІ автомобіль $(B\to A)$	$100-x$	$\dfrac{100}{100-x}$	100

Нехай швидкість автомобіля, який почав рухатися з міста A, дорівнює x км/год, тоді швидкість іншого автомобіля становить $(100-x)$ км/год. Оскільки кожний автомобіль подолав 100 км, то перший автомобіль витратив на увесь шлях $\frac{100}{x}$ год, а другий — $\frac{100}{100-x}$ год, що на 50 хв $=\frac{5}{6}$ год менше, ніж час, витрачений першим автомобілем.

Маємо рівняння:

$$\frac{100}{x}-\frac{100}{100-x}=\frac{5}{6},$$

$$\frac{20}{x}-\frac{20}{100-x}=\frac{1}{6},$$

$$\frac{2000-20x-20x}{x(100-x)}=\frac{1}{6},$$

$$\frac{x^2-340x+12000}{x(100-x)}=0,$$

$$\begin{cases} x^2-340x+12000=0, \\ x\neq 0, \\ x\neq 100. \end{cases}$$

Корені рівняння: $x_1=40$, $x_2=300$ (не задовольняє умову задачі).

Отже, швидкість першого автомобіля дорівнює 40 км/год, а другого — 60 км/год.

Спосіб 2

Учасники руху	Швидкість, км/год	Час, год	Відстань, км
I автомобіль	x	$\frac{100}{x}$	100
II автомобіль	y	$\frac{100}{y}$	100

Нехай швидкість першого автомобіля дорівнює x км/год, а другого — y км/год. До зустрічі перший автомобіль подолав x км, а другий — y км.

Маємо рівняння: $x+y=100$.

Час руху другого автомобіля з міста B до міста A становить $\frac{100}{y}$ год, а час руху першого автомобіля з міста A до міста B становить $\frac{100}{x}$ год, що за умовою задачі на 50 хв = $\frac{50}{60}$ год = $\frac{5}{6}$ год більше за час, витрачений другим автомобілем.

Маємо рівняння: $\frac{100}{x}-\frac{100}{y}=\frac{5}{6}$.

Оскільки x і y позначають одні й ті самі величини, складаємо систему рівнянь: $\begin{cases} x+y=100, \\ \frac{100}{x}-\frac{100}{y}=\frac{5}{6}, \end{cases}$ розв'язавши яку, дістанемо $x=40$, $y=60$.

Отже, швидкість першого автомобіля дорівнює 40 км/год, а швидкість другого автомобіля — 60 км/год.

Відповідь. 40 км/год і 60 км/год.

Задача 3

Із міста A до міста B, відстань між якими дорівнює 320 км, виїхав вантажний автомобіль. Через 3 год після цього з міста B до міста A виїхав легковий автомобіль, який зустрівся з вантажним через 1 год після свого від'їзду. Легковий автомобіль долає відстань між містами A і B на 1 год 20 хв швидше, ніж вантажний. Знайдіть швидкість кожного автомобіля.

Розв'язання

Нехай швидкість легкового автомобіля дорівнює x км/год, а швидкість вантажного автомобіля — y км/год. Легковий автомобіль був у дорозі 1 год, а вантажний автомобіль — 1+3 = 4 (год), і разом вони проїхали 320 км.

Маємо рівняння: $x+4y=320$.

На весь шлях з міста A до міста B легковий автомобіль витратив $\frac{320}{x}$ год, а вантажний автомобіль — $\frac{320}{y}$ год, що за умовою задачі на 1 год 20 хв = $1\frac{20}{60}$ год = $1\frac{1}{3}$ год довше, ніж легковий автомобіль.

Маємо рівняння:

$$\frac{320}{y}-\frac{320}{x}=\frac{4}{3},$$

$$\frac{80}{y}-\frac{80}{x}=\frac{1}{3}.$$

Оскільки x і y позначають одні й ті самі величини, складаємо систему рівнянь.

$$\begin{cases} x+4y=320, \\ \dfrac{80}{y}-\dfrac{80}{x}=\dfrac{1}{3}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=320-4y, \\ \dfrac{80}{y}-\dfrac{80}{320-4y}=\dfrac{1}{3}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=320-4y, \\ \dfrac{80}{y}-\dfrac{20}{80-y}=\dfrac{1}{3}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=320-4y, \\ \dfrac{6400-80y-20y}{y(80-y)}=\dfrac{1}{3}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=320-4y, \\ y^2-380y+19200=0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=320-4y, \\ \left[\begin{array}{l} y=320, \\ y=60; \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=-960, \\ y=320; \end{cases} \\ \begin{cases} x=80, \\ y=60. \end{cases} \end{array}\right.$$

Розв'язок $(-960; 320)$ не задовольняє умову задачі.

Отже, швидкість легкового автомобіля становить 80 км/год, швидкість вантажного автомобіля — 60 км/год.

Відповідь. 80 км/год і 60 км/год.

Задача 4

Із двох міст, відстань між якими дорівнює 24 км, назустріч один одному вирушили два пішоходи і зустрілися на середині шляху, причому один із них вийшов на одну годину раніше за іншого. Якби пішоходи вийшли одночасно, то вони зустрілися б через 2 год 24 хв. Знайдіть швидкість пішоходів.

Розв'язання

Нехай швидкість першого пішохода дорівнює x км/год, а швидкість другого пішохода — y км/год. Перший пішохід витратив на половину шляху $\frac{12}{x}$ год, а другий пішохід — $\frac{12}{y}$ год, що на 1 год менше, ніж витратив перший пішохід.

Маємо рівняння: $\frac{12}{x}-\frac{12}{y}=1.$

За умовою задачі пішоходи разом подолали б усю відстань за 2 год 24 хв = $2\frac{24}{60}$ год = $2\frac{2}{5}$ год.

Маємо рівняння: $2\frac{2}{5}(x+y)=24.$

Оскільки x і y позначають одні й ті самі величини, складаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases}\frac{12}{x}-\frac{12}{y}=1,\\ \frac{12}{5}(x+y)=24;\end{cases}$$

$$\begin{cases}\frac{12}{x}-\frac{12}{y}=1,\\ x+y=10;\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=10-y,\\ \frac{12}{10-y}-\frac{12}{y}=1;\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=10-y,\\ y^2+14y-120=0;\end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 10 - y, \\ \left[\begin{array}{l} y = -20, \\ y = 6; \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 4, \\ y = 6; \end{cases} \\ \left[\begin{array}{l} x = 30, \\ y = -20. \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Розв’язок $(30; -20)$ не задовольняє умову задачі.

Отже, швидкість першого пішохода дорівнює 4 км/год, а швидкість другого пішохода становить 6 км/год.

Відповідь. 4 км/год і 6 км/год.

Задачі для самостійного розв’язування

1. Із двох пунктів, відстань між якими дорівнює 20 км, одночасно назустріч один одному виїхали двоє туристів і зустрілися через 2 год. Визначте, із якою швидкістю рухався кожний турист, якщо одному на подолання всього шляху знадобиться на 1 год 40 хв більше, ніж іншому.
2. Із села A до села B, відстань між якими дорівнює 70 км, виїхав мотоцикліст. За 10 хв до цього назустріч йому із села B виїхав велосипедист, який зустрівся з мотоциклістом через 1 год після свого виїзду. Знайдіть швидкість кожного з них, якщо мотоцикліст за 2 год проїжджає на 104 км більше, ніж велосипедист за 4 год.
3. Із пункту A до пункту B, відстань між якими дорівнює 80 км, одночасно назустріч один одному виїжджають два велосипедисти. Після зустрічі один прибуває до пункту B через 1 год 20 хв, а другий — до пункту A через 3 год. Знайдіть швидкість кожного велосипедиста.
4. Із двох міст одночасно назустріч один одному виїхали легковий та вантажний автомобілі і зустрілись через 5 год. Вантажівка, швидкість якої на 15 км/год менша, ніж швидкість легкового автомобіля, прибула до другого міста на $2\frac{1}{4}$ год пізніше, ніж легковий автомобіль. Яка швидкість легкового автомобіля? Яка відстань між містами?

5. Два автомобілі виїхали одночасно з міст A і B назустріч один одному. Через 2 год вони зустрілися і, не зупиняючись, продовжили рухатися з тими самими швидкостями. Перший автомобіль прибув до міста B на 1 год 10 хв пізніше, ніж другий до міста A. Знайдіть швидкість кожного автомобіля, якщо відстань між містами становить 280 км.

2.1.3. Задачі на рух двох тіл в одному напрямку

Під час розв'язування задач цього типу слід нагадати такі відомості про рух тіла.

1. Якщо два тіла одночасно виїхали з різних пунктів і одне наздоганяє друге, то з часом відстань між ними (до зустрічі) зменшується, а після зустрічі — збільшується.
2. Якщо два тіла одночасно виїхали з різних пунктів і рухалися в одному напрямку і через деякий час зустрілися, то різниця відстаней, пройдених тілами до зустрічі, дорівнює відстані між пунктами, із яких вийшли тіла.
3. Якщо з того самого пункту спочатку виходить одне тіло, а пізніше друге, то до зустрічі обидва тіла пройдуть одну й ту саму відстань.
4. Швидкість зближення двох тіл, які рухаються в одному напрямку, дорівнює різниці їх швидкостей [4].

Задача 1

Рейсовий автобус і маршрутне таксі одночасно вирушили від автобусної станції. На наступну станцію, що розташована на відстані 48 км, маршрутне таксі прибуло на 10 хв раніше. Знайдіть швидкість автобуса, якщо швидкість таксі на 4 км/год більша за швидкість автобуса.

Розв'язання

Учасники руху	Швидкість, км/год	Час, год	Відстань, км
Рейсовий автобус	x	$\frac{48}{x}$	48
Маршрутне таксі	$x+4$	$\frac{48}{x+4}$	48

Нехай швидкість рейсового автобуса дорівнює x км/год, тоді швидкість маршрутного таксі — $(x+4)$ км/год. На наступну станцію рейсовий автобус прибуде через $\frac{48}{x}$ год, а маршрутне таксі —

$\frac{48}{x+4}$ год, що за умовою задачі на 10 хв = $\frac{10}{60}$ год = $\frac{1}{6}$ год раніше, ніж автобус.

Маємо рівняння:

$$\frac{48}{x}-\frac{48}{x+4}=\frac{1}{6},$$

$$\frac{48x+192-48x}{x(x+4)}=\frac{1}{6},$$

$$\begin{cases} x^2+4x-1152=0, \\ x\neq 0, \\ x\neq -4. \end{cases}$$

Із системи маємо: $x_1=32$, $x_2=-36$ (не задовольняє умову задачі, оскільки швидкість не може бути від'ємною).

Отже, швидкість рейсового автобуса дорівнює 32 км/год.

Відповідь. 32 км/год.

Задача 2

Із міста A до міста B виїхав велосипедист. Через 3 години в тому самому напрямку з міста A виїхав мотоцикліст і прибув до міста B одночасно з велосипедистом. Знайдіть швидкість велосипедиста, якщо вона менша від швидкості мотоцикліста на 45 км/год, а відстань між містами дорівнює 60 км.

Розв'язання

Учасники руху	**Швидкість, км/год**	**Час, год**	**Відстань, км**
Велосипедист	x	$\frac{60}{x}$	60
Мотоцикліст	$x+45$	$\frac{60}{x+45}$	60

Нехай швидкість велосипедиста дорівнює x км/год, тоді швидкість мотоцикліста — $(x+45)$ км/год. Велосипедист витратив на шлях $\frac{60}{x}$ год, а мотоцикліст — $\frac{60}{x+45}$ год, що за умовою на 3 год менше, ніж велосипедист.

Маємо рівняння:

$$\frac{60}{x}-\frac{60}{x+45}=3,$$

$$\frac{20}{x}-\frac{20}{x+45}=1,$$

$$\frac{x^2+45x-900}{x(x+45)}=0,$$

$$\begin{cases} x^2+45x-900=0, \\ x\neq 0, \\ x\neq -45. \end{cases}$$

Маємо: $x_1=15$, $x_2=-60$ (не задовольняє умову задачі, оскільки швидкість не може бути від'ємною).

Отже, швидкість велосипедиста дорівнює 15 км/год.

Відповідь. 15 км/год.

Задача 3

Два автомобілі одночасно виїхали з одного міста до іншого. Швидкість першого автомобіля на 10 км/год більша за швидкість другого, і тому він витратив на весь шлях на 1 год менше, ніж другий. Знайдіть швидкість кожного автомобіля, якщо відстань між містами дорівнює 560 км.

Розв'язання

Учасники руху	Швидкість, км/год	Час, год	Відстань, км
I автомобіль	x	$\frac{560}{x}$	560
II автомобіль	$x-10$	$\frac{560}{x-10}$	560

Нехай швидкість першого автомобіля дорівнює x км/год, тоді швидкість другого автомобіля — $(x-10)$ км/год. Перший автомобіль на подорож витратив $\frac{560}{x}$ год, а другий автомобіль — $\frac{560}{x-10}$ год, що за умовою на 1 год більше, ніж перший автомобіль.

Маємо рівняння:

$$\frac{560}{x-10}-\frac{560}{x}=1,$$

$$\frac{x^2-10x-5600}{x(x-10)}=0,$$

$$\begin{cases} x^2-10x-5600=0, \\ x\neq 0, \\ x\neq 10. \end{cases}$$

Маємо: $x_1=80$, $x_2=-70$ (не задовольняє умову задачі, оскільки швидкість не може бути від'ємною).

Отже, швидкість першого автомобіля дорівнює 80 км/год, тоді швидкість другого автомобіля — $80-10=70$ (км/год).

Відповідь. 80 км/год і 70 км/год.

Задача 4

Із пункту A до пункту B, відстань між якими дорівнює 20 км, виїхав велосипедист, через 15 хв слідом за ним виїхав другий велосипедист зі швидкістю 15 км/год. Наздогнавши першого, другий велосипедист повернув назад, і прибув до пункту A за 45 хв до прибуття першого до пункту B. Визначте швидкість першого велосипедиста.

Розв'язання

Нехай швидкість першого велосипедиста дорівнює x км/год. Тоді 20 км він проїхав за $\frac{20}{x}$ год. Другий велосипедист був у дорозі на годину менше, тобто $\left(\frac{20}{x}-1\right)$ год. Отже, до зустрічі він проїхав $\left(\frac{20}{x}-1\right)\cdot 15\cdot\frac{1}{2}$ км. Перший велосипедист цю відстань подолав за $\left(\frac{20}{x}-1\right)\cdot\frac{15}{2}:x$ год, а другий — за $\left(\frac{20}{x}-1\right)\cdot\frac{15}{2}:15$ год. За умовою задачі другий велосипедист виїхав на 15 хв $=\frac{15}{60}$ год $=\frac{1}{4}$ год пізніше від першого.

Маємо рівняння:

$$\left(\frac{20}{x}-1\right)\cdot\frac{15}{2x}-\left(\frac{20}{x}-1\right)\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4},$$

$$\frac{150}{x^2}-\frac{15}{2x}-\frac{10}{x}+\frac{1}{4}=0,$$

$$\frac{x^2-70x+600}{4x^2}=0,$$

маємо: $x_1=10$, $x_2=60$.

Обидва корені додатні, але задачу задовольняє тільки перший, оскільки швидкість першого велосипедиста має бути меншою від 15 км/год.

Отже, швидкість першого велосипедиста дорівнює 10 км/год.

Відповідь. 10 км/год.

Задача 5

Із міста A до міста B, що розташоване на відстані 189 км, вирушив автобус, а через 45 хв у тому самому напрямку виїхав автомобіль, який через годину наздогнав автобус. Після прибуття до міста B і 35-хвилинної стоянки автомобіль вирушив назад до міста A і зустрівся з автобусом через 2 год 55 хв після першої зустрічі. Визначте швидкість автобуса і автомобіля.

Розв'язання

Нехай швидкість автобуса дорівнює x км/год, а швидкість автомобіля — y км/год. До першої зустрічі автомобіль подолав y км, а автобус — $1\frac{45}{60}x$ км або $1\frac{3}{4}x$ км.

Маємо рівняння:

$$1\frac{3}{4}x=y,$$

$$7x-4y=0.$$

Після цього автобус до другої зустрічі з автомобілем був у дорозі 2 год 55 хв = $2\frac{55}{60}$ год = $2\frac{11}{12}$ год і проїхав за цей час $2\frac{11}{12}x$ км. Автомобіль їхав на 35 хв менше, тобто $2\frac{1}{3}$ год, і подолав за цей час $2\frac{1}{3}y$ км. Сума відстаней, які подолали автобус і автомобіль від першої до другої зустрічі, становить $2(189-y)$ км.

Маємо рівняння:

$$2\frac{11}{12}x+2\frac{1}{3}y=2(189-y),$$

$$2\frac{11}{12}x+2\frac{1}{3}y=378-2y,$$

$$2\frac{11}{12}x+4\frac{1}{3}y=378,$$

$$35x+52y=4536.$$

Оскільки x і y позначають одні й ті самі величини, складаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases}7x-4y=0,\\35x+52y=4536;\end{cases}$$

$$\begin{cases}-35x+20y=0,\\35x+52y=4536.\end{cases}$$

Додаємо почленно ліві й праві частини рівнянь системи, дістанемо:

$$72y=4536,$$

$$y=63.$$

$$7x-4\cdot 63=0,$$

$$x=\frac{4\cdot 63}{7}=36.$$

Отже, швидкість автобуса дорівнює 36 км/год, а швидкість автомобіля — 63 км/год.

Відповідь. 36 км/год і 63 км/год.

Задача 6

Автобус вирушив з міста A до міста B, відстань між якими дорівнює 150 км. Через 30 хв з міста A до міста B тією самою дорогою вирушив автомобіль, швидкість якого в $1\frac{1}{5}$ км/год більша, ніж швидкість автобуса. Скільки часу був у дорозі автомобіль, якщо він прибув до міста B одночасно з автобусом?

Розв'язання

Учасники руху	Швидкість, км/год	Час, год	Відстань, км
Автобус	x	$\frac{150}{x}$	150
Автомобіль	$1\frac{1}{5}x=1{,}2x$	$\frac{150}{1{,}2x}$	150

Нехай швидкість автобуса дорівнює x км/год, тоді швидкість автомобіля — $1{,}2x$ км/год. Автомобіль подолав 150 км за $\frac{150}{1{,}2x}$ год, а автобус витратив на цей шлях $\frac{150}{x}$ год, що на 30 хв $=\frac{1}{2}$ год більше, ніж автомобіль.

Маємо рівняння:

$$\frac{150}{x}-\frac{150}{1{,}2x}=\frac{1}{2},$$

$$\frac{30}{1{,}2x}=\frac{1}{2},$$

$$x=50.$$

Отже, швидкість автобуса дорівнює 50 км/год, тоді швидкість автомобіля — $1{,}2\cdot 50=60$ км/год. Автомобіль був у дорозі $\frac{150}{60}=2{,}5$ год.

Відповідь. 2,5 год.

Задачі для самостійного розв'язування

1. Відстань між двома містами дорівнює 480 км. З одного міста до іншого одночасно виїхали два автомобілі. Швидкість першого автомобіля на 20 км/год більша за швидкість другого, через що він приїхав у пункт призначення на 2 год раніше, ніж другий. Знайдіть швидкість кожного автомобіля.
2. Із міста виїхав мікроавтобус. Через 10 хв після цього із цього міста виїхав у тому самому напрямку легковий автомобіль, який наздогнав мікроавтобус на відстані 40 км від міста. Знайдіть швидкість мікроавтобуса, якщо вона на 20 км/год менша від швидкості легкового автомобіля.
3. Із міста A до міста B виїхав велосипедист. Через 3 год з міста A виїхав мотоцикліст, який прибув до міста B одночасно з велосипедистом. Знайдіть швидкість мотоцикліста, якщо вона на 45 км/год більша за швидкість велосипедиста, а відстань між містами A і B становить 60 км.
4. Із пункту A до пункту B, відстань між якими дорівнює 180 км, одночасно виїхали два автомобілі. Через дві години з'ясувалось, що перший проїхав на 20 км більше, ніж другий. Знайдіть швидкість кожного автомобіля, коли відомо, що на весь шлях перший витратив на 15 хв менше, ніж другий.

5. Два автомобілі одночасно виїхали з одного міста до іншого. Швидкість першого автомобіля на 10 км/год більша за швидкість другого, і тому він витратив на весь шлях на 1 годину менше, ніж другий. Знайдіть швидкість кожного автомобіля, якщо відстань між містами дорівнює 560 км.

2.1.4. Задачі на рух тіл річкою

Велику групу становлять задачі на рух тіла за наявності течії (води або вітру). Перед розв'язанням задач цього типу слід звернути увагу учнів на те, що будь-яке тіло рухається за течією річки зі швидкістю, яка дорівнює сумі його власної швидкості та швидкості течії, а проти течії річки — зі швидкістю, яка дорівнює різниці його власної швидкості та швидкості течії.

Задача 1

Човен проплив 5 км за течією річки і 3 км проти течії річки, витративши на весь шлях 40 хв. Швидкість течії становить 3 км/год. Знайдіть швидкість руху човна за течією річки.

Розв'язання

Напрямок руху	Швидкість, км/год	Час, год	Відстань, км
За течією	$x+3$	$\dfrac{5}{x+3}$	5
Проти течії	$x-3$	$\dfrac{3}{x-3}$	3

Нехай власна швидкість човна дорівнює x км/год, тоді швидкість човна за течією річки дорівнює $(x+3)$ км/год, а швидкість човна проти течії річки — $(x-3)$ км/год. 5 км за течією річки човен проплив за $\dfrac{5}{x+3}$ год, а 3 км проти течії — за $\dfrac{3}{x-3}$ год. На весь шлях човен витратив $\left(\dfrac{5}{x+3}+\dfrac{3}{x-3}\right)$ год, що за умовою задачі дорівнює $40 \text{ хв} = \dfrac{40}{60} \text{ год} = \dfrac{2}{3} \text{ год}$.

Маємо рівняння:

$$\frac{5}{x+3}+\frac{3}{x-3}=\frac{2}{3},$$

$$\frac{8x-6}{(x-3)(x+3)}=\frac{2}{3},$$

$$\frac{4x-3}{x^2-9}=\frac{1}{3},$$

$$\begin{cases} x^2-12x=0, \\ x\neq\pm3. \end{cases}$$

$$x_1=0,\ \ x_2=12.$$

Корінь $x=0$ не задовольняє умову задачі.

Отже, власна швидкість човна дорівнює 12 км/год, тоді швидкість човна за течією річки — $12+3=15$ (км/год).

Відповідь. 15 км/год.

Задача 2

Моторний човен пройшов 16 км озером, а потім 15 км річкою, яка впадає в це озеро, за 1 год. Знайдіть власну швидкість човна, якщо швидкість течії річки становить 2 км/год.

Розв'язання

Напрямок руху	**Швидкість, км/год**	**Час, год**	**Відстань, км**
Проти течії	$x-2$	$\frac{15}{x-2}$	15
Озером	x	$\frac{16}{x}$	16

Нехай власна моторного човна дорівнює x км/год, тоді його швидкість проти течії — $(x-2)$ км/год. 16 км озером човен пропливає за $\frac{16}{x}$ год, а 15 км річкою проти течії — $\frac{15}{x-2}$ км. На весь шлях моторний човен витратив $\left(\frac{16}{x}+\frac{15}{x-2}\right)$ год, що за умовою задачі дорівнює 1 год.

Маємо рівняння:

$$\frac{16}{x}+\frac{15}{x-2}=1,$$

$$\frac{31x-32}{x(x-2)}=1,$$

$$\frac{x^2-33x+32}{x(x-2)}=0.$$

Розв'язавши це рівняння, дістанемо: $x_1=1$, $x_2=32$.

Корінь $x=1$ не задовольняє умову задачі, оскільки власна швидкість човна більша за швидкість течії.

Отже, власна швидкість моторного човна дорівнює 32 км/год.

Відповідь. 32 км/год.

Задача 3

Теплохід пройшов 17 км за течією річки на 2 год швидше, ніж 75 км проти течії річки. Знайдіть швидкість течії річки, якщо власна швидкість теплохода дорівнює 32 км/год.

Розв'язання

Напрямок руху	Швидкість, км/год	Час, год	Відстань, км
За течією	$32+x$	$\frac{17}{32+x}$	17
Проти течії	$32-x$	$\frac{75}{32-x}$	75

Нехай швидкість течії річки дорівнює x км/год, тоді швидкість теплохода за течією річки дорівнює $(32+x)$ км/год, тоді його швидкість проти течії — $(32-x)$ км/год. Час руху теплохода проти течії річки дорівнює $\frac{75}{32-x}$ год, а час руху теплохода за течією річки — $\frac{17}{32+x}$ год, що за умовою задачі на 2 год менше, ніж час руху проти течії.

Маємо рівняння:

$$\frac{75}{32-x}-\frac{17}{32+x}=2,$$

$$\frac{75\cdot 32+75x-17\cdot 32+17x}{(32-x)(32+x)}=2,$$

$$\frac{58\cdot 32+92x}{1024-x^2}=2,$$

$$\frac{29\cdot 32+46x}{1024-x^2}=1,$$

$$\frac{x^2+46x-96}{1024-x^2}=0.$$

Рівняння має такі корені: $x_1=2$, $x_2=-48$ (не задовольняє умову задачі).

Отже, швидкість течії річки дорівнює 2 км/год.

Відповідь. 2 км/год.

Задача 4

Турист проплив річкою на човні 90 км і пройшов пішки 10 км. При цьому час, витрачений на рух річкою, на 4 год більше, ніж час, витрачений на рух пішки. Якби турист йшов пішки стільки часу, скільки він плив річкою, а плив річкою стільки часу, скільки йшов пішки, то ці відстані були б рівні. Скільки часу турист йшов пішки і скільки часу плив річкою?

Розв'язання

Етапи	**Напрямок руху**	**Швидкість, км/год**	**Час, год**	**Відстань, км**
Перший	Річкою	$\frac{90}{x}$	x	90
	Пішки	$\frac{10}{x-4}$	$x-4$	10
Другий	Річкою	$\frac{90}{x}$	$x-4$	$\frac{90}{x}\cdot(x-4)$
	Пішки	$\frac{10}{x-4}$	x	$\frac{10}{x-4}\cdot x$

Нехай час руху туриста річкою дорівнює x год, тоді час руху пішки — $(x-4)$ год. Річкою турист рухався зі швидкістю $\frac{90}{x}$ км/год, а пішки він рухався зі швидкістю $\frac{10}{x-4}$ км/год. Якби час руху туриста річкою та пішки змінилися місцями, то він проплив би $\frac{90}{x}\cdot(x-4)$ км, а пройшов би пішки $\frac{10}{x-4}\cdot x$ км.

За умовою задачі ці відстані рівні між собою.

Маємо рівняння:

$$\frac{90}{x}\cdot(x-4)=\frac{10}{x-4}\cdot x,$$

$$\frac{9}{x}\cdot(x-4)=\frac{x}{x-4},$$

$$9(x-4)^2=x^2,$$

$$\left[\begin{array}{l}3(x-4)=x,\\3(x-4)=-x;\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}2x=12,\\4x=12;\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}x=6,\\x=3.\end{array}\right.$$

Корінь $x=3$ не задовольняє умову задачі.

Отже, час руху туриста річкою становить 6 год, тоді час руху туриста пішки дорівнює 2 год.

Відповідь. 6 год та 2 год.

Задача 5

Моторний човен пройшов 28 км за течією річки і 25 км проти течії, витративши на весь шлях стільки часу, скільки його треба було б на проходження 54 км у стоячій воді. Знайдіть швидкість моторного човна в стоячій воді, якщо швидкість течії дорівнює 2 км/год.

Розв'язання

Напрямок руху	**Швидкість, км/год**	**Час, год**	**Відстань, км**
За течією	$x+2$	$\frac{28}{x+2}$	28
Проти течії	$x-2$	$\frac{25}{x-2}$	25
У стоячій воді	x	$\frac{54}{x}$	54

Нехай швидкість моторного човна у стоячій воді дорівнює x км/год, тоді його швидкість за течією — $(x+2)$ км/год, а швидкість проти течії — $(x-2)$ км/год. Човен витратив на рух проти течії річки $\frac{25}{x-2}$ год, за течією річки — $\frac{28}{x+2}$ год. Час, витрачений човном на рух у стоячій воді, дорівнює $\frac{54}{x}$ год. За умовою задачі човен витратив на весь шлях за і проти течії стільки часу, скільки його треба було б на проходження 54 км у стоячій воді. Маємо рівняння:

$$\frac{25}{x-2}+\frac{28}{x+2}=\frac{54}{x},$$

$$\frac{53x-6}{x^2-4}=\frac{54}{x},$$

$$\frac{x^2+6x-216}{x\left(x^2-4\right)}=0.$$

Розв'язавши рівняння, дістанемо: $x_1=12$, $x_2=-18$ (не задовольняє умову задачі, оскільки швидкість — додатна величина).

Отже, швидкість моторного човна у стоячій воді дорівнює 12 км/год.

Відповідь. 12 км/год.

Задача 6

Рибалки на моторному човні пропливли 18 км за течією річки і 16 км проти течії. Проти течії вони пливли на 15 хв довше, ніж за течією. Знайдіть швидкість течії річки, якщо швидкість моторного човна в стоячій воді дорівнює 20 км/год.

Розв'язання

Напрямок руху	**Швидкість, км/год**	**Час, год**	**Відстань, км**
За течією	$20+x$	$\frac{18}{20+x}$	18
Проти течії	$20-x$	$\frac{16}{20-x}$	16
У стоячій воді	20	–	–

Нехай швидкість течії річки дорівнює x км/год, тоді його швидкість за течією — $(20+x)$ км/год, а швидкість проти течії — $(20-x)$ км/год. Час руху човна за течії річки дорівнює $\frac{18}{20+x}$ год, а проти течії річки — $\frac{16}{20-x}$ год, що за умовою задачі на $15\text{ хв}=\frac{15}{60}\text{ год}=\frac{1}{4}$ год довше, ніж за течією річки.

Маємо рівняння:

$$\frac{16}{20-x}-\frac{18}{20+x}=\frac{1}{4},$$

$$\frac{34x-40}{400-x^2}=\frac{1}{4},$$

$$\frac{x^2+136x-560}{400-x^2}=0.$$

Маємо корені рівняння: $x_1=4$, $x_2=-140$ (не задовольняє умову задачі, оскільки швидкість не може бути від'ємною).

Отже, швидкість течії річки дорівнює 4 км/год.

Відповідь. 4 км/год.

Задача 7

Від причалу N униз за течією річки відплив пліт. Через 3 год від пристані B, віддаленої від N на 60 км, проти течії відплив теплохід, який прибув до N через годину після зустрічі з плотом. Визначте швидкість течії річки, якщо відомо, що швидкість теплохода в стоячій воді дорівнює 24 км/год.

Розв'язання

Учасники руху	Напрямок руху	Швидкість, км/год	Час, год	Відстань, км
Пліт	За течією	x	$\frac{24-x}{x}$	$24-x$
Теплохід	Проти течії	$24-x$	$\frac{36+x}{24-x}$	$60-24+x=36+x$

Нехай швидкість течії річки дорівнює x км/год, тоді швидкість теплохода проти течії річки дорівнює $(24-x)$ км/год. Після зустрічі він пройшов $(24-x)$ км. До зустрічі з плотом теплохід пройшов $(60-24+x)$ км або $(36+x)$ км. Пліт витратив на шлях до зустрічі $\frac{24-x}{x}$ год, а теплохід — $\frac{36+x}{24-x}$ год, що за умовою задачі на 3 год менше, ніж витратив пліт.

Маємо рівняння:

$$\frac{24-x}{x}-\frac{36+x}{24-x}=3,$$

$$\frac{24}{x}-1+\frac{36+x}{x-24}=3,$$

$$\frac{24}{x}+\frac{x-24+60}{x-24}=4,$$

$$\frac{24}{x}+1+\frac{60}{x-24}=4,$$

$$\frac{24}{x}+\frac{60}{x-24}=3,$$

$$\frac{8}{x}+\frac{20}{x-24}=1,$$

$$\frac{28x-192}{x^2-24x}=1,$$

$$\frac{x^2-52x+192}{x^2-24x}=0.$$

Розв'яжемо це рівняння, дістанемо: $x_1=48,\ x_2=4.$

Корінь $x=48$ не задовольняє умову задачі. Якби швидкість течії річки була більшою за швидкість теплохода в стоячій воді, то теплохід не зміг би рухатися проти течії річки.

Отже, швидкість течії річки становить 4 км/год.

Відповідь. 4 км/год.

Задача 8

О дев'ятій ранку від пристані відплив пліт, а о вісімнадцятій — човен, який наздогнав пліт на відстані 20 км від пристані. О котрій годині човен наздогнав пліт, якщо власна швидкість човна дорівнює 18 км/год?

Розв'язання

Учасники руху	**Напрямок руху**	**Швидкість, км/год**	**Час, год**	**Відстань, км**
Пліт	За течією	$\frac{20}{x+9}$	$x+9$	20
Човен	За течією	$18+\frac{20}{x+9}$	x	$x\cdot\left(18+\frac{20}{x+9}\right)$

Нехай човен наздожене пліт через x год, після того, як човен відплив. Пліт до зустрічі плив $(x+9)$ год зі швидкістю $\frac{20}{x+9}$ км/год. Тоді швидкість човна за течією річки становить $\left(18+\frac{20}{x+9}\right)$ км/год і він за x год проплив 20 км.

Маємо рівняння:

$$x\left(18+\frac{20}{x+9}\right)=20,$$

$$x\left(9+\frac{10}{x+9}\right)=10,$$

$$\frac{x(9x+91)}{x+9}=10,$$

$$\frac{9x^2+81x-90}{x+9}=0,$$

$$\frac{x^2+9x-10}{x+9}=0,$$

$$\begin{cases} x^2+9x-10=0, \\ x\neq -9; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=1, \\ x=-10, \end{array}\right. \\ x\neq -9. \end{cases}$$

Корінь $x=-10$ не задовольняє умову задачі, оскільки час не може бути від'ємним.

Отже, човен наздожене пліт о $18+1=19$ (год).

Відповідь. О 19 годині.

Задача 9

Човен за 5 год руху за течією і 2 год руху озером долає 123 км. За 5 год руху за течією човен долає відстань у 3 рази більшу, ніж 2 год руху проти течії. Знайдіть власну швидкість човна і швидкість течії річки.

Розв'язання

Напрямок руху	Швидкість, км/год	Час, год	Відстань, км
За течією	$x+y$	5	$5(x+y)$
Проти течії	$x-y$	2	$2(x-y)$
Озером	x	2	$2x$

Нехай власна швидкість човна становить x км/год, а швидкість течії річки — y км/год. Тоді швидкість човна за течією річки дорівнює $(x+y)$ км/год, а його швидкість проти течії річки — $(x-y)$ км/год. За 5 год руху за течією річки човен проплив $5(x+y)$ км, а за 2 год озером — $2x$ км, що разом становить 123 км.

Маємо рівняння: $5(x+y)+2x=123$.

За 2 год руху проти течії човен проплив $2(x-y)$ км, що за умовою задачі в 3 рази менше, ніж за 5 год руху за течії.

Маємо рівняння: $5(x+y)=3\cdot 2(x-y)$.

Оскільки x і y позначають одні й ті самі величини, складаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases}5(x+y)+2x=123,\\5(x+y)=3\cdot 2(x-y);\end{cases}$$

$$\begin{cases}7x+5y=123,\\x=11y;\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=11y,\\82y=123;\end{cases}$$

$$\begin{cases}y=1{,}5,\\x=16{,}5.\end{cases}$$

Отже, власна швидкість човна становить 16,5 км/год, а швидкість течії річки — 1,5 км/год.

Відповідь. 16,5 км/год, 1,5 км/год.

Задача 10

Пароплав проплив 100 км за течією річки і 64 км проти течії за 9 год. Іншим разом, рухаючись із тією самою швидкістю, за той самий час він проплив 80 км за течією і 80 км проти течії. Визначте швидкість пароплава в стоячій воді й швидкість течії річки.

Розв'язання

Учасник руху	**Напрямок руху**	**Швидкість, км/год**	**Час, год**	**Відстань, км**
Пароплав	За течією	$x+y$	$\dfrac{100}{x+y}$	100
	Проти течії	$x-y$	$\dfrac{64}{x-y}$	64
Пароплав	За течією	$x+y$	$\dfrac{80}{x+y}$	80
	Проти течії	$x-y$	$\dfrac{80}{x-y}$	80

Нехай швидкість пароплава в стоячій воді дорівнює x км/год, а швидкість течії річки дорівнює y км/год, тоді швидкість пароплава за течією річки становить $(x+y)$ км/год, а його швидкість проти течії — $(x-y)$ км/год. 100 км за течією річки пароплав долає за $\dfrac{100}{x+y}$ год, а 64 км проти течії — за $\dfrac{64}{x-y}$ год. На весь шлях пароплав витратив $\left(\dfrac{100}{x+y}+\dfrac{64}{x-y}\right)$ год, що за умовою задачі дорівнює 9 год.

Маємо рівняння: $\dfrac{100}{x+y}+\dfrac{64}{x-y}=9.$

Іншим разом, рухаючись із тією самою швидкістю, 80 км за течією він проплив за $\dfrac{80}{x+y}$ год, а 80 км проти течії він долає за $\dfrac{80}{x-y}$ год. На весь шлях пароплав витратив $\left(\dfrac{80}{x+y}+\dfrac{80}{x-y}\right)$ год, що за умовою задачі дорівнює 9 год.

Маємо рівняння: $\dfrac{80}{x+y}+\dfrac{80}{x-y}=9.$

Оскільки x і y позначають одні й ті самі величини, то складаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases}\dfrac{100}{x+y}+\dfrac{64}{x-y}=9,\\[2mm] \dfrac{80}{x+y}+\dfrac{80}{x-y}=9.\end{cases}$$

Нехай $\frac{1}{x+y}=a$, $\frac{1}{x-y}=b$, тоді система набуває вигляду:

$$\begin{cases}100a+64b=9,\\80a+80b=9;\end{cases}$$

$$\begin{cases}20a-16b=0,\\80a+80b=9;\end{cases}$$

$$\begin{cases}a=\frac{4}{5}b,\\b=\frac{1}{16};\end{cases}$$

$$\begin{cases}a=\frac{1}{20},\\b=\frac{1}{16};\end{cases}$$

$$\begin{cases}x+y=20,\\x-y=16;\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=18,\\y=2.\end{cases}$$

Отже, швидкість пароплава у стоячій воді дорівнює 18 км/год, а швидкість течії річки — 2 км/год.

Відповідь. 18 км/год, 2 км/год.

Задачі для самостійного розв'язування

1. Човен пропливає 9 км за течією річки і 1 км проти течії річки за той самий час, який потрібен плоту, щоб проплисти 4 км річкою. Знайдіть швидкість течії річки, якщо власна швидкість човна становить 8 км/год.
2. Моторний човен проплив 6 км проти течії і 8 км за течією, витративши на весь шлях 1 год. Яка швидкість човна в стоячій воді, якщо швидкість течії річки становить 2 км/год?
3. Катер пройшов 15 км за течією річки і 4 км озером, витративши на весь шлях 1 год. Знайдіть власну швидкість катера, якщо швидкість течії річки становить 4 км/год.
4. Турист проплив на моторному човні 25 км проти течії річки і повернувся назад на плоту. Знайдіть швидкість течії річки,

якщо на плоту турист плив на 10 год більше, ніж човном, а власна швидкість човна становить 12 км/год.

5. За течією річки від пристані вирушив пліт. Через 4 год від цієї пристані в тому самому напрямку вирушив човен, який наздогнав пліт на відстані 15 км від пристані. Знайдіть швидкість течії річки, якщо власна швидкість човна становить 12 км/год.

2.2. ЗАДАЧІ НА СПІЛЬНУ РОБОТУ

Задачі на спільну роботу мають свою специфіку розв'язання та зустрічаються в курсі математики з 6-го по 9-й клас. Починаємо ознайомлювати учнів із найпростішими задачами цього типу в курсі математики 6 класу після вивчення дій зі звичайними дробами. У 7 класі подібні задачі зустрічаються серед задач на повторення. Простежується динаміка ускладнення задач на сумісну роботу в 8-му класі, для розв'язання яких використовують квадратні рівняння. У курсі алгебри 9-го класу подібні задачі розв'язуються за допомогою систем рівнянь.

Задачі на сумісну роботу, як правило, мають таке формулювання: Деяку роботу, об'єм якої може бути не вказано і не є шуканим (наприклад, друк рукопису, заповнення резервуара, обробка поля тощо), виконує декілька осіб або механізмів, що працюють рівномірно (тобто зі сталою для кожного продуктивністю).

У цих задачах обсяг усієї роботи, яку треба виконати, умовно приймають за одиницю. Час t, необхідний для виконання всієї роботи, та v — продуктивність праці (швидкість), тобто кількість роботи, виконана за одиницю часу, пов'язані співвідношенням $v=\frac{1}{t}$.

Під час розв'язування подібних задач іноді доцільно умову структурувати за допомогою таблиці 1.

Таблиця 1

Учасники	$t_{\text{окремий}}$	$v_{\text{окрема}}$	$v_{\text{спільна}}$	$t_{\text{спільний}}$
I	x	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x}\pm\frac{1}{y}=\frac{x\pm y}{xy}$	$\frac{xy}{x\pm y}$
II	y	$\frac{1}{y}$		

У виконанні певної роботи беруть участь два об'єкти. Якщо перший об'єкт виконує всю роботу за x годин (хвилин, секунд тощо), то за 1 годину він виконає $\frac{1}{x}$ частину роботи — це є швидкість роботи першого об'єкта. Аналогічно, якщо другий об'єкт виконує всю роботу за y годин, то його швидкість — $\frac{1}{y}$ роб/год. Для знаходження спільної швидкості роботи двох об'єктів треба:

- ✓ додати їхні окремі швидкості, якщо об'єкти допомагають один одному виконувати роботу;
- ✓ відняти, якщо заважають.

Для знаходження часу, за який два об'єкти впораються з роботою разом ($t_{\text{спільний}}$) необхідно об'єм виконаної роботи V поділити на їхню спільну швидкість. Якщо $V=1$, то $1:\frac{x\pm y}{xy}=\frac{xy}{x\pm y}$.

Зручність використання таблиці 1 полягає в тому, що в ході розв'язання тієї чи іншої задачі її можна застосовувати і повністю, і частково, заповнювати зліва направо, справа наліво, з обох кінців до середини залежно від умови.

Однією з класичних задач цього типу вважається задача про басейн, що наповнюється або спустошується через дві труби. Саме з неї і варто розпочинати ознайомлення школярів із цим типом задач. Головне — сформувати розуміння учнями процесу, що відбувається в задачі. Тому слід провести з учнями евристичну бесіду для розуміння динаміки процесу наповнення резервуара, коли працюють дві труби:

1) обидві труби наповнюють басейн водою;
2) одна — наповнює, через другу — спустошується.

Варіанти подій:

1. Через першу трубу вливається більше води за одиницю часу, ніж через другу виливається. Тоді басейн поступово заповнюється.
2. Швидкість роботи обох труб однакова. Тоді початковий рівень води в басейні не змінюється.
3. Швидкість першої труби менша від швидкості другої. Тоді початковий рівень води зменшуватиметься.

Задача 1

Через одну трубу басейн наповнюється на 3 год швидше, ніж через другу спорожнюється. Якщо обидві труби відкрити одночасно, то басейн наповниться за 36 год. За скільки годин самостійної роботи перша труба може наповнити басейн, а друга — спорожнити?

Розв'язання

Учасники	$t_{\text{окремий}}$, **год**	$v_{\text{окрема}}$	$v_{\text{спільна}}$
I труба	x	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x}-\frac{1}{x+3}=\frac{1}{36}$
II труба	$x+3$	$\frac{1}{x+3}$	

Нехай перша труба може заповнити басейн за x год, тоді друга труба може спустошити басейн за $(x+3)$ год. За одну годину перша труба наповнює $\frac{1}{x}$ частину басейну, тоді за одну годину друга труба спустошує $\frac{1}{x+3}$ частину басейну. Якщо одночасно відкрити дві труби, то за одну годину наповнюватиметься $\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+3}\right)$ частина басейну, що становить $\frac{1}{36}$ басейну.

Маємо рівняння:

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{x+3}=\frac{1}{36},$$

$$\frac{3}{x(x+3)}=\frac{1}{36},$$

$$\frac{x^2+3x-108}{x(x+3)}=0.$$

Корені рівняння: $x_1=9$, $x_2=-12$ (не задовольняє умову задачі, оскільки час — додатна величина).

Отже, перша труба може наповнити басейн за 9 год, тоді друга труба може спустошити басейн за $9+3=12$ (год).

Відповідь. 9 год і 12 год.

Задача 2

Перший насос наповнив водою басейн об'ємом 360 м^3, а другий — об'ємом 480 м^3. Перший насос перекачував щогодини на 10 м^3 води менше, ніж другий, і працював на 2 год довше, ніж другий. Який об'єм води перекачує кожен насос за годину?

Розв'язання

Учасники	$t_{\text{окремий}}$, год	$v_{\text{окрема}}$, м^3	V, м^3	$t_{\text{спільний}}$, год
II насос	$\frac{480}{x}$	x	480	$\frac{360}{x-10}-\frac{480}{x}=2$
I насос	$\frac{360}{x-10}$	$x-10$	360	

Нехай за одне годину другий насос перекачує x м^3 води, тоді перший насос перекачує за одну годину $(x-10)$ м^3 води. На наповнення басейну другий насос витратив $\frac{480}{x}$ год, тоді перший басейн на заповнення басейну витратив $\frac{360}{x-10}$ год, що на 2 год більше, ніж другий.

Маємо рівняння:

$$\frac{360}{x-10}-\frac{480}{x}=2,$$

$$\frac{180}{x-10}-\frac{240}{x}=1,$$

$$\frac{2400-60x}{x(x-10)}=1,$$

$$\frac{x^2+50x-2400}{x(x-10)}=0,$$

$$\begin{cases} x^2+50x-2400=0, \\ x\neq 0, \\ x\neq 10. \end{cases}$$

Корені рівняння: $x_1=30$, $x_2=-80$ (не задовольняє умову задачі, оскільки об'єм — додатна величина).

Отже, другий насос перекачує за одну годину 30 м^3, тоді перший насос щогодини перекачує — 30–10= 20 (м^3) води.

Відповідь. 20 м^3 і 30 м^3.

Задача 3

Одна труба може наповнити басейн на 36 хв швидше, ніж друга. Якщо спочатку половину басейну наповнить перша труба, а потім половину басейну — друга, то басейн наповнюватиметься на півгодини довше, ніж за одночасної дії обох труб. За скільки хвилин може наповнити басейн кожна труба окремо?

Розв'язання

Нехай перша труба може наповнити басейн за x хв, тоді друга труба наповнить його за $(x+36)$ хв. Половину басейну перша труба наповнить за $\frac{x}{2}$ хв, а друга — за $\frac{x+36}{2}$ хв. Якщо спочатку половину басейну наповнить перша труба, а потім половину — друга, то на це піде $\left(\frac{x}{2}+\frac{x+36}{2}\right)=(x+18)$ хв. За хвилину перша труба наповнить $\frac{1}{x}$ частину басейну, а друга — наповнить $\frac{1}{x+36}$ частину басейну. Обидві труби разом за хвилину наповнять $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x+36}\right)$ частину басейну, а весь басейн — за

$$1:\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x+36}\right)=1:\frac{2x+36}{x(x+36)}=\frac{x(x+36)}{2x+36} \text{ хв.}$$

Маємо рівняння:

$$x+18-\frac{x(x+36)}{2(x+18)}=30,$$

$$\frac{2(x+18)^2-x(x+36)}{2(x+18)}=30,$$

$$\frac{2x^2+72x+648-x^2-36x}{2(x+18)}=30,$$

$$\frac{x^2-24x-432}{2(x+18)}=0,$$

$$\begin{cases} x^2-24x-432=0, \\ x\neq -18. \end{cases}$$

Корені рівняння: $x_1=36$, $x_2=-12$ — не задовольняє умову задачі, оскільки час — додатна величина.

Отже, перша труба наповнить басейн за 36 хв, тоді друга труба наповнить басейн за 36+36= 72 (хв).

Відповідь. 36 хв, 72 хв.

Задача 4

Для наповнення басейну через першу трубу потрібно стільки само часу, що й для наповнення через другу і третю трубу одночасно. Скільки часу потрібно для наповнення басейну окремо кожною трубою, якщо через першу трубу наповнюють басейн на 2 год швидше, ніж через третю, і на 8 год швидше, ніж через другу?

Розв'язання

Нехай перша труба може наповнити басейн за x год, тоді друга труба зможе його заповнити за $(x+8)$ год, а третя труба — за $(x+2)$ год. За одну годину перша труба наповнить $\frac{1}{x}$ частину басейну, тоді друга труба наповнить $\frac{1}{x+8}$ частину басейну, а третя труба — $\frac{1}{x+2}$ частину басейну. За умовою задачі першій трубі для заповнення басейну потрібно стільки само часу, що й для наповнення через другу і третю трубу одночасно.

Маємо рівняння:

$$\frac{1}{x+8}+\frac{1}{x+2}=\frac{1}{x},$$

$$\frac{2x+10}{(x+8)(x+2)}=\frac{1}{x},$$

$$\frac{x^2-16}{x(x+8)(x+2)}=0.$$

Розв'язавши рівняння, дістанемо його корені: $x_1=4$, $x_2=-4$ (не задовольняє умову задачі, оскільки час — додатна величина).

Отже, перша труба наповнить басейн за 4 год, тоді друга труба наповнить його за 4 +8 = 12 (год), а третя труба — за 4 + 2 = 6 (год).

Відповідь. 4 год, 12 год, 6 год.

Задача 5

Двоє робітників, працюючи разом, можуть пофарбувати фасад будинку за 16 год. За скільки годин може виконати цю роботу кожен із них, працюючи самостійно, якщо одному для цього потрібно на 24 год менше, ніж іншому?

Розв'язання

Учасники	t, **год**	**Продуктивність**	**Спільна продуктивність**
І робітник	x	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+24}=\frac{1}{16}$
ІІ робітник	$x+24$	$\frac{1}{x+24}$	

Нехай перший робітник самостійно може виконати завдання за x год, тоді другий робітник самостійно виконає завдання за $(x+24)$ год. За одну годину перший робітник виконає $\frac{1}{x}$ частину роботи, тоді другий робітник за одну годину — $\frac{1}{x+24}$ частину роботи. Працюючи разом, за одну годину вони виконають $\frac{1}{16}$ частину роботи.

Маємо рівняння:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+24}=\frac{1}{16},$$

$$\frac{2x+24}{x(x+24)}=\frac{1}{16},$$

$$\frac{x^2-8x-384}{x(x+24)}=0.$$

Розв'язавши це рівняння, дістанемо його корені: $x_1=24$, $x_2=-16$ (не задовольняє умову задачі, оскільки час не може бути від'ємним).

Отже, першому робітникові для виконання завдання потрібно 24 год, тоді другому — 24+24=48 (год).

Відповідь. 24 год і 48 год.

Задача 6

Перша бригада працювала на ремонті дороги 9 год, після чого до неї приєдналася друга бригада. Через 6 год спільної роботи виявилося, що відремонтовано половину дороги. За скільки годин може відремонтувати дорогу кожна бригада, працюючи самостійно, якщо першій бригаді на це потрібно на 9 год більше, ніж другій?

Розв'язання

Учасники	$t_{\text{окремий}}$, год	Продуктивність	t, год
I бригада	$x+9$	$\frac{1}{x+9}$	9 +6=15
II бригада	x	$\frac{1}{x}$	6

Нехай друга бригада самостійно відремонтувала дорогу за x год, тоді перша бригада виконає самостійно завдання за $(x+9)$ год. За одну годину друга бригада виконає $\frac{1}{x}$ частину роботи, а перша бригада за одну годину виконає $\frac{1}{x+9}$ частину роботи. Перша бригада працювала 9+6=15 (год) і тому виконала $\frac{15}{x+9}$ частину роботи, а друга бригада працювала 6 год і виконала $\frac{6}{x}$ частину роботи. За умовою задачі за 6 год спільної роботи бригади виконали половину завдання.

Маємо рівняння:

$$\frac{15}{x+9}+\frac{6}{x}=\frac{1}{2},$$

$$\frac{21x+54}{x(x+9)}=\frac{1}{2},$$

$$\frac{x^2-33x-108}{x(x+9)}=0.$$

Маємо корені рівняння: $x_1=36$, $x_2=-3$ (не задовольняє умову задачі, оскільки час не може бути від'ємним).

Отже, друга бригада, працюючи самостійно, може відремонтувати дорогу за 36 год, тоді перша бригада — за 36+9= 45 (год).

Відповідь. 36 год, 45 год.

Задача 7

Двом робітникам потрібно виготовити 300 деталей. Перший робітник може виконати це завдання на 5 год швидше, ніж другий. Працюючи разом, робітники виконують це завдання за 6 год. Скільки деталей виготовить кожний робітник за 1 год?

Розв'язання

Учасники	$t_{\text{окремий}}$, год	Продуктивність	Спільна продуктивність
I робітник	x	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+5}=\frac{1}{6}$
II робітник	$x+5$	$\frac{1}{x+5}$	

Нехай перший робітник самостійно може виконати завдання за x год, тоді другий робітник може самостійно виконати це завдання за $(x+5)$ год. За одну годину перший робітник виконає $\frac{1}{x}$ частину роботи, а другий робітник за одну годину виконає $\frac{1}{x+5}$ частину роботи. За 6 год спільної роботи робітники виконають $\frac{1}{6}$ частину роботи.

Маємо рівняння:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+5}=\frac{1}{6},$$

$$\frac{2x+5}{x(x+5)}=\frac{1}{6},$$

$$\frac{x^2-7x-30}{x(x+5)}=0.$$

Маємо корені рівняння: $x_1=10$, $x_2=-3$ (не задовольняє умову задачі, оскільки час не може бути від'ємним).

Отже, перший робітник самостійно виконає це завдання за 10 год, тоді другий робітник виконає самостійно завдання за $10+5=15$ (год).

За одну годину перший робітник виготовить $\frac{300}{10}=30$ (деталей), тоді за одну годину другий робітник виготовить $\frac{300}{15}=20$ (деталей).

Відповідь. 30 деталей, 20 деталей.

Задача 8

Для будівництва греблі електростанції було потрібно вийняти 40 000 м^2 ґрунту до певного строку. Роботу було завершено на 8 днів раніше строку, оскільки щоденно виймалося на 250 м^2 ґрунту більше, ніж планувалося. За скільки днів було виконано роботу?

Розв'язання

Етапи	t $_{\text{окремий,}}$ днів	Продуктивність	V, м^2
Фактично	x	$\dfrac{40\,000}{x}$	40 000
За планом	$x+8$	$\dfrac{40\,000}{x+8}$	40 000

Нехай фактично виконали всю роботу за x днів, тоді за планом мали виконати всю роботу за $(x+8)$ днів. За один день фактично виймали $\dfrac{40\,000}{x}$ м^2 ґрунту, а за планом мали за один день виймати $\dfrac{40\,000}{x+8}$ м^2 ґрунту, що за умовою задачі на 250 м^2 менше, ніж фактично.

Маємо рівняння:

$$\frac{40\,000}{x}-\frac{40\,000}{x+8}=250,$$

$$\frac{160}{x}-\frac{160}{x+8}=1,$$

$$\frac{1280}{x(x+8)}=1,$$

$$\frac{x^2+8x-1280}{x(x+8)}=0.$$

Розв'язавши це рівняння, дістанемо корені: $x_1=32$, $x_2=-40$ (не задовольняє умову задачі).

Отже, фактично завдання було виконано за 32 дні.

Коментар. Через x можна було позначити продуктивність за планом, тоді фактична продуктивність становила $(x+250)$ м^3. Час, потрібний для виконання роботи за планом, мав становити $\dfrac{40\,000}{x}$ днів. Складаємо рівняння $\dfrac{40\,000}{x}-\dfrac{40\,000}{x+8}=8$.

Але оскільки в задачі вимагається знайти кількість днів, за які було виконане завдання, то краще через невідому позначати те, що потрібно знайти, тобто фактичний час виконання завдання.

Відповідь. 32 дні.

Задача 9

Двоє робітників можуть виконати деяку роботу за 10 днів. Після 6 днів спільної роботи один із них був переведений на іншу роботу, а другий продовжував працювати. Через 2 дні самостійної роботи другого робітника з'ясувалося, що зроблено $\frac{2}{3}$ всієї роботи. За скільки днів кожен робітник може виконати всю роботу?

Розв'язання

Нехай перший робітник може виконати всю роботу за x днів, а другий — за y днів. За один день перший робітник виконує $\frac{1}{x}$ частину роботи, а за 10 днів — $\frac{10}{x}$ частину роботи. Другий робітник за один день виконує $\frac{1}{y}$ частину роботи, а за 10 днів — $\frac{10}{y}$ частину роботи. Оскільки за 10 днів спільної роботи вони виконують всю роботу, то маємо рівняння $\frac{10}{x}+\frac{10}{y}=1$.

Перший робітник працював 6 днів і виконав $\frac{6}{x}$ частину роботи, а другий робітник працював 8 днів і виконав $\frac{8}{y}$ частину роботи. Оскільки внаслідок цього було виконано $\frac{2}{3}$ роботи, то маємо рівняння $\frac{6}{x}+\frac{8}{y}=\frac{2}{3}$.

Оскільки x і y позначають одні й ті самі величини, то складаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{10}{x}+\frac{10}{y}=1, \\ \frac{6}{x}+\frac{8}{y}=\frac{2}{3}; \end{cases}$$

$$\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{10},\\ \frac{3}{x}+\frac{4}{y}=\frac{1}{3};\end{cases}$$

$$\begin{cases}\frac{3}{x}+\frac{3}{y}=\frac{3}{10},\\ \frac{3}{x}+\frac{4}{y}=\frac{1}{3}.\end{cases}$$

Віднімемо від другого рівняння системи перше, дістанемо

$$\frac{4}{y}-\frac{3}{y}=\frac{1}{3}-\frac{3}{10},$$

$$\frac{1}{y}=\frac{1}{30},\ \ y=30.$$

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{10}-\frac{1}{30}=\frac{1}{15},\ \ x=15.$$

Отже, перший робітник може виконати всю роботу за 15 днів, а другий робітник — за 30 днів.

Відповідь. 15 днів і 30 днів.

Задача 10

Одна бригада мала виготовити 120 деталей, а друга — 144 деталі. Перша бригада виготовляла щогодини на 4 деталі більше, ніж друга, і працювала на 3 год менше від другої. Скільки деталей виготовляла кожна бригада за одну годину?

Розв'язання

Учасники	**Продуктивність, год**	**Час, год**	**Обсяг завдання, дет.**
I бригада	x	$\frac{120}{x}$	120
II бригада	$x-4$	$\frac{144}{x-4}$	144

Нехай перша бригада виготовляла щогодини x деталей, тоді друга бригада виготовляла за одну години $(x-4)$ деталі. Перша бригада на виготовлення 120 деталей витратила $\frac{120}{x}$ год, тоді друга бригада на виготовлення 144 деталей витратила $\frac{144}{x-4}$ год. За умовою задачі перша бригада працювала на 3 год менше, ніж друга.

Маємо рівняння:

$$\frac{144}{x-4}-\frac{120}{x}=3,$$

$$\frac{48}{x-4}-\frac{40}{x}=1,$$

$$\frac{8x+160}{x(x-4)}=1,$$

$$\frac{x^2-12x-160}{x(x-4)}=0.$$

Корені цього рівняння: $x_1=20$, $x_2=-8$ (не задовольняє умову задачі, оскільки кількість деталей — додатна величина).

Отже, перша бригада виготовляла щогодини 20 деталей, тоді друга бригада виготовляла щогодини $20-4=16$ (деталей).

Відповідь. 20 деталей, 16 деталей.

Задача 11

Кирило може прочитати 15 сторінок на 15 хв швидше, ніж Олесь. Скільки сторінок за годину читає кожний хлопчик, якщо Кирило прочитає за годину на 10 сторінок більше, ніж Олесь?

Розв'язання

Нехай Олесь за одну годину читає x сторінок, тоді Кирило за одну годину читає $(x+10)$ сторінок. Олесь прочитає 15 сторінок за $\frac{15}{x}$ год, а Кирило прочитає цю кількість сторінок за $\frac{15}{x+10}$ год, що за умовою задачі на 15 хв = $\frac{15}{60}$ год = $\frac{1}{4}$ год менше часу, який витрачає на читання Олесь.

Маємо рівняння:

$$\frac{15}{x}-\frac{15}{x+10}=\frac{1}{4},$$

$$\frac{150}{x(x+10)}=\frac{1}{4},$$

$$\frac{x^2+10x-600}{x(x+10)}=0.$$

Корені цього рівняння: $x_1=20$, $x_2=-30$ (не задовольняє умову задачі, оскільки кількість сторінок — додатна величина).

Отже, Олесь читає щогодини 20 сторінок, тоді Кирило читає щогодини 20+10=30 (сторінок).

Відповідь. 20 сторінок, 30 сторінок.

Задача 12

Слюсар може виконати замовлення за той самий час, що й два учні, які працюють разом. За скільки годин може самостійно виконати замовлення слюсар і скільки кожен із учнів, якщо слюсар може виконати це замовлення на 4 год швидше, ніж перший учень, і на 9 год швидше, ніж другий?

Розв'язання

Нехай слюсар самостійно зможе виконати замовлення за x год, тоді перший учень виконає самостійно дане завдання за $(x+4)$ год, а третій учень — за $(x+9)$ год. За одну годину слюсар виконає $\frac{1}{x}$ частину замовлення, тоді перший учень за одну годину виконає $\frac{1}{x+4}$ частину замовлення, а другий учень за одну годину виконає $\frac{1}{x+9}$ частину замовлення. За умовою задачі слюсар може виконати замовлення за той самий час, що й два учні, які працюють разом.

Маємо рівняння:

$$\frac{1}{x+4}+\frac{1}{x+9}=\frac{1}{x},$$

$$\frac{2x+13}{(x+4)(x+9)}=\frac{1}{x},$$

$$\frac{2x^2+13x-x^2-13x-36}{(x+4)(x+9)}=0,$$

$$\frac{x^2-36}{(x+4)(x+9)}=0.$$

Корені рівняння: $x_1=6$, $x_2=-6$ (не задовольняє умову задачі, оскільки час — додатна величина).

Отже, слюсар самостійно виконає замовлення за 6 год, тоді перший учень самостійно виконає завдання за $6 + 4 = 10$ (год), а другий учень самостійно виконає завдання за $6 + 9 = 15$ (год).

Відповідь. 6 год, 10 год, 15 год.

Задачі для самостійного розв'язування

1. Два екскаватори, працюючи разом, вирили котлован за 8 год. За який час може вирити котлован кожен екскаватор, працюючи окремо, якщо одному з них потрібно на це часу на 12 год більше, ніж іншому?
2. Один оператор може виконати комп'ютерний набір книжки на 6 днів швидше, ніж другий. Якщо перший пропрацює 3 дні, а потім його змінить другий і пропрацює 9 днів, то буде виконано 75 % набору. За скільки днів може виконати цей набір кожний оператор, працюючи самостійно?
3. Двоє трактористів можуть зорати поле, працюючи разом, за 6 год. За скільки годин може зорати це поле кожний тракторист, працюючи самостійно, якщо одному з них для того, щоб зорати $\dfrac{2}{5}$ поля, треба на 4 год більше, ніж другому, щоб зорати $\dfrac{1}{5}$ поля?
4. Перший насос перекачує 90 $м^3$ води на 1 год швидше, ніж другий 100 $м^3$. Скільки води щогодини перекачує кожен насос, якщо перший перекачує за годину на 5 $м^3$ води більше, ніж другий?
5. До басейну підведені дві труби. Через першу трубу басейн наповнюється водою, а через другу спорожнюється, причому для спорожнення басейну треба на 1 год більше, ніж на його наповнення. Якщо ж відкрити обидві труби одночасно, то басейн наповниться водою за 30 год. За скільки годин можна наповнити порожній басейн водою через першу трубу?

2.3. ЗАДАЧІ НА СПЛАВИ ТА СУМІШІ

Відсотки в нашому житті посідають значне місце. Різні сфери діяльності, різноманітні технологічні процеси часто вимагають від нас виконувати відсоткові розрахунки. Розглянуті задачі показують застосування відсоткових розрахунків у галузях хімічної промисловості, металургії, харчової промисловості тощо.

Під час розв'язування задач цього типу слід нагадати учням основні типи задач на відсотки:

1. Знаходження відсотка від числа.

Щоб знайти p % від числа a, потрібно число a помножити на дріб $\frac{p}{100}$.

2. Знаходження числа за його відсотком.

Щоб знайти число, p % якого дорівнює b, потрібно b поділити на дріб $\frac{p}{100}$.

3. Відсоткове відношення двох чисел.

Щоб знайти, скільки відсотків становить число a від числа b, потрібно поділити a на b і записати результат у відсотках.

4. Знаходження числа, яке збільшилось (зменшилось) на p %. Якщо число a зменшилось на p %, то одержимо число $a\left(1-\frac{p}{100}\right)$.

Якщо число a збільшилось на p %, то одержимо число $a\left(1+\frac{p}{100}\right)$.

Задача 1

Маємо два сплави міді й цинку. Перший сплав містить 9 %, а другий — 30 % цинку. Скільки треба взяти кілограмів першого сплаву і скільки кілограмів другого, щоб отримати сплав масою 300 кг, який містить 23 % цинку?

Розв'язання

	Маса, кг	Цинк	
		Уміст, %	Маса, кг
I сплав	x	9	$0{,}09x$
II сплав	$300-x$	30	$0{,}3(300-x)$
III сплав	300	23	$300\cdot 0{,}23=69$

Нехай першого сплаву треба взяти x кг, тоді другого сплаву треба взяти $(300-x)$ кг. У першому сплаві міститься $0{,}09x$ кг цинку, а у другому сплаві — $0{,}3(300-x)$ кг цинку. За умовою задачі у новоутвореному сплаві міститься 69 кг цинку.

Маємо рівняння:

$$0{,}09x+0{,}3(300-x)=69,$$

$$0{,}09x+90-0{,}3x=69,$$
$$-0{,}21x=-21,$$
$$x=100.$$

Отже, першого сплаву треба взяти 100 кг, тоді другого сплаву треба взяти $300-100=200$ (кг).

Відповідь. 100 кг, 200 кг.

Задача 2

Скільки грамів 4-відсоткового і скільки грамів 10-відсоткового розчинів солі треба взяти, щоб отримати 180 г 6-відсоткового розчину?

Розв'язання

	Маса, г	**Сіль**	
		Уміст, %	**Маса, г**
I розчин	x	4	$0{,}04x$
II розчин	$180-x$	10	$0{,}1(80-x)$
III розчин	180	6	$180\cdot 0{,}06=10{,}8$

Нехай першого розчину треба взяти x г, тоді другого розчину треба взяти $(180-x)$ г. У першому розчині міститься $0{,}04x$ г солі, а у другому розчині — $0{,}1(180-x)$ г солі. За умовою задачі у новому розчині міститься 10,8 г солі.

Маємо рівняння:

$$0{,}04x+0{,}1(180-x)=10{,}8,$$
$$0{,}04x+18-0{,}1x=10{,}8,$$
$$-0{,}06x=-7{,}2,$$
$$x=120.$$

Отже, першого розчину треба взяти 120 г, тоді другого розчину треба взяти $180-120=60$ (г).

Відповідь. 120 г, 60 г.

Задача 3

Маємо два сплави золота і срібла. У одному сплаві золото і срібло знаходиться у відношенні 2:3, а у другому — у відношенні 3:7 відповідно. Скільки треба взяти кожного сплаву, щоб дістати 8 кг нового сплаву, до якого золото і срібло входять у відношенні 5:11?

Концентрацію розчину (сплаву) можна виражати не тільки у відсотках, а й у частинах. Наприклад, якщо сказано, що деякий сплав складається з двох металів, які входять у відношенні 1:2, то концентрація першого металу дорівнює $\frac{1}{3}$, а другого — $\frac{2}{3}$.

Розв'язання

	Маса, кг	Золото	
		Концентрація (у частинах)	**Маса, кг**
I сплав	x	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}x$
II сплав	$8-x$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}(8-x)$
Остаточний сплав	8	$\frac{5}{16}$	$8\cdot\frac{5}{16}=2{,}5$

Нехай першого сплаву потрібно взяти x кг, тоді другого сплаву — $(8-x)$ кг. Концентрація золота в першому сплаві дорівнює $\frac{2}{5}$, а в другому сплаві — $\frac{3}{10}$, концентрація золота в остаточному сплаві дорівнює $\frac{5}{16}$. Маса золота в першому сплаві становить $\frac{2}{5}x$ кг, а в другому сплаві — $\frac{3}{10}(8-x)$ кг. У новому сплаві маса золота становить 2,5 кг.

Маємо рівняння:

$$\frac{2}{5}x+\frac{3}{10}(8-x)=2{,}5,$$

$$4x+3(8-x)=25,$$

$$x=1.$$

Отже, першого сплаву треба взяти 1 кг, а другого сплаву — 7 кг.

Відповідь. 1 кг, 7 кг.

Задача 4

Обчисліть масу і пробу сплаву срібла з міддю, якщо в результаті сплавлення його з 3 кг чистого срібла можна одержати сплав 900-ї проби, а в результаті сплавлення його з 2 кг сплаву 900-ї проби — сплав 840-ї проби.

Розв'язання

Нехай сплав містить x кг срібла і y кг міді. У результаті сплавлення цього сплаву з 3 кг чистого срібла маємо $(x+3)$ кг — маса срібла, а загальна кількість сплаву становить $(x+y+3)$ кг. Відношення маси чистого металу до загальної маси сплаву — це проба, яка за умовою задачі є 900-ю, що в частинах дорівнює 0,9.

Маємо рівняння:

$$\frac{x+3}{x+y+3}=0,9,$$

$$10x+30=9x+9y+27,$$

$$x-9y=-3.$$

У результаті сплавлення цього сплаву з 2 кг сплаву 900-ї проби маємо $(x+1,8)$ г — маса срібла, а загальна кількість сплаву становить $(x+y+2)$ кг. Відношення маси чистого металу до загальної маси сплаву — це проба, яка за умовою задачі становить 840-у, що в частинах дорівнює 0,84.

Маємо рівняння:

$$\frac{x+1,8}{x+y+2}=0,84,$$

$$x+1,8=0,84x+0,84y+1,68,$$

$$0,16x=0,84y-0,12,$$

$$4x-21y=-3.$$

Оскільки x і y позначають одні й ті самі величини, то складаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases}x-9y=-3,\\4x-21y=-3;\end{cases}$$

$$\begin{cases}-3x+12y=0,\\x-9y=-3;\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=4y,\\4y-9y=-3;\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=2,4,\\y=0,6.\end{cases}$$

Отже, сплав містить 2,4 кг срібла і 0,6 кг міді.

Тому маса сплаву дорівнює 2,4 + 0,6 = 3 (кг), а проба сплаву становить $\frac{2,4}{3}\cdot 100 = 80$.

Відповідь. 3 кг; 800-ї проби.

Задача 5

До розчину, що містить 39 г солі, додали 1 л води, після чого концентрація солі зменшилася на $10\ \%$. Визначте, яку концентрацію мав розчин спочатку.

1 л води = 1 кг води.

Розв'язання

	Маса води, кг	Маса розчину, кг	Сіль	
			Концентрація, %	Маса, кг
I розчин	x	$x+0,039$	$\frac{0,039}{x+0,039}\cdot 100=\frac{3,9}{x+0,039}$	0,039
II розчин	1	$x+1,039$	$\frac{0,039}{x+1,039}\cdot 100=\frac{3,9}{x+1,039}$	0,039

Нехай перший розчин містить x кг води, тоді його маса становить $(x+0,039)$ кг. Концентрація солі в цьому розчині становить $\frac{3,9}{x+0,039}\ \%$. Коли до цього розчину додали 1 кг води, то маса нового розчину становила $(x+1,039)$ кг. Концентрація солі в другому розчині становить $\frac{3,9}{x+1,039}\ \%$, що за умовою задачі на $10\ \%$ менше, ніж у першому.

Маємо рівняння:

$$\frac{3,9}{x+0,039}=\frac{3,9}{x+1,039}+10,$$

$$\frac{3,9}{x+0,039}=\frac{10x+14,29}{x+1,039},$$

$$3,9x+3,9\cdot 1,039=10x^2+14,29\cdot 0,039+0,39x+14,29x,$$

$$10x^2+10,78x-3,49479=0.$$

Корені рівняння: $x_1=0,261$, $x_2=-1,339$ (не задовольняє умову задачі).

Отже, маса води в першому розчині становить $0,261$ кг, а концентрація солі в першому розчині — $\frac{3,9}{0,261+0,039}=\frac{3,9}{0,3}=13\ \%$.

Відповідь. $13\ \%$.

Задача 6

До сплаву міді й цинку, який містить 10 кг цинку, додали 10 кг міді. Після цього відсотковий уміст міді в сплаві збільшився на $5\ \%$. Скільки кілограмів міді містив початковий сплав?

Розв'язання

	Маса цинку, кг	Маса сплаву, кг	Мідь	
			Уміст, %	Маса, кг
Початковий сплав	10	$x+10$	$\frac{x}{x+10}\cdot 100$	x
Новий сплав	10	$x+10+10=x+20$	$\frac{x+10}{x+20}\cdot 100$	$x+10$

Нехай початковий сплав містить x кг міді, тоді загальна маса цього сплаву становить $(x+10)$ кг. Після того як до початкового сплаву додали 10 кг міді, то новий сплав став містити $(x+10)$ кг міді, а його загальна маса — $(x+20)$ кг. Відсотковий уміст міді в першому сплаві становить $\frac{x}{x+10}\cdot 100\ \%$, а його вміст у новому сплаві — $\frac{x+10}{x+20}\cdot 100\ \%$, що за умовою задачі на $5\ \%$ більше, ніж у початковому.

Маємо рівняння:

$$\frac{x+10}{x+20}\cdot 100-\frac{x}{x+10}\cdot 100=5,$$

$$\frac{20x+200}{x+20}-\frac{20x}{x+10}=1,$$

$$\frac{20x^2+200x+200x+2000-20x^2-400x}{(x+20)(x+10)}=1,$$

$$\frac{x^2+30x-1800}{(x+20)(x+10)}=0.$$

Корені рівняння: $x_1 = 30$, $x_2 = -60$ (не задовольняє умову задачі, оскільки маса — додатна величина).

Отже, початковий сплав містить 30 кг міді.

Відповідь. 30 кг.

Задача 7

Водно-сольовий розчин містить 4 кг солі. Через деякий час 4 кг води випарувалось, унаслідок чого концентрація солі в розчині збільшилась на 5 %. Якою була початкова маса розчину?

Розв'язання

	Маса води, кг	Маса розчину, кг	Сіль	
			Уміст, %	Маса, кг
Початковий розчин	–	x	$\frac{4}{x}\cdot 100$	4
Новий розчин	4	$x-4$	$\frac{4}{x-4}\cdot 100$	4

Нехай початкова маса розчину становить x кг, тоді початковий уміст солі в ньому — $\frac{4}{x}\cdot 100\,\%$. Після того як випарувалося 4 кг води, маса розчину становитиме $(x-4)$ кг, а уміст солі в ньому — $\frac{4}{x-4}\cdot 100\,\%$, що за умовою задачі на 5 % більше, ніж у початковому розчині.

Маємо рівняння:

$$\frac{4}{x-4}\cdot 100 - \frac{4}{x}\cdot 100 = 5,$$

$$\frac{80}{x-4} - \frac{80}{x} = 1,$$

$$\frac{320}{x(x-4)} = 1,$$

$$\frac{x^2 - 4x - 320}{x(x-4)} = 0.$$

Корені рівняння: $x_1 = 20$, $x_2 = -16$ (не задовольняє умову задачі, оскільки маса — додатна величина).

Отже, початкова маса розчину становить 20 кг.

Відповідь. 20 кг.

Задача 8

До розчину, який містить 20 г солі, додали 100 г води, після чого концентрація розчину зменшилась на 10 %. Скільки грамів води містив розчин спочатку?

Розв'язання

	Маса води, кг	Маса розчину, кг	Сіль	
			Концентрація (у частинах)	Маса, кг
Початковий розчин	x	$x+20$	$\frac{20}{x+20}$	20
Новий розчин	100	$x+120$	$\frac{20}{x+120}$	20

Нехай спочатку розчин містив x г води. Тоді його загальна маса дорівнює $(x+20)$ г і сіль становила $\frac{20}{x+20}$ частину маси розчину. Після того як до розчину додали 100 г води, його маса стала $(x+120)$ г, а сіль становитиме $\frac{20}{x+120}$ частину маси розчину, що на $10\,\%=\frac{1}{10}$ менше, ніж було спочатку.

Маємо рівняння:

$$\frac{20}{x+20}-\frac{20}{x+120}=\frac{1}{10},$$

$$\frac{2000}{(x+20)(x+120)}=\frac{1}{10},$$

$$\frac{x^2+140x-17600}{(x+20)(x+120)}=0.$$

Корені рівняння: $x_1=80$, $x_2=-220$ (не задовольняє умову задачі, оскільки маса — додатна величина).

Отже, спочатку розчин містив 80 г води.

Відповідь. 80 г.

Задача 9

Із колби, наповненої 40-відсотковою сірчаною кислотою, взяли 320 г кислоти і долили в колбу 258 г води. У результаті концентрація кислоти в колбі знизилася до $25\,\%$. Визначте, скільки грамів 40-відсоткової кислоти було в колбі спочатку.

Розв'язання

	Маса розчину, г	Уміст, %	Маса чистої кислоти, г
Розчин сірчаної кислоти	$x-320$	40	$0{,}4(x-320)$
Новий розчин сірчаної кислоти	$x-320+258=x-62$	25	$0{,}25(x-62)$

Нехай спочатку в колбі було x г кислоти. Чистої безводної кислоти в ній стало $0{,}4(x-320)$ г. Коли з колби відлили 320 г кислоти і долили 258 г води, то в ній стало $(x-62)$ г розчину, причому чистої безводної кислоти — $0{,}25(x-62)$ г.

Оскільки маса чистої безводної кислоти не змінилась, то складаємо рівняння

$$0{,}4(x-320)=0{,}25(x-62),$$

$$40(x-320)=25(x-62).$$

$$8(x-320)=5(x-62),$$

$$3x=2560-310,$$

$$3x=2250,$$

$$x=750.$$

Отже, спочатку в колбі було 750 г кислоти.

Відповідь. 750 г.

Задача 10

Із бака, наповненого чистим спиртом, узяли 12 л спирту і долили бак водою, потім узяли ще 12 л розбавленого спирту. Після цього в баці залишилось чистого спирту на 22 л менше, ніж було спочатку. Скільки літрів чистого спирту залишилось у баці?

Розв'язання

Нехай спочатку в баці було x л чистого спирту. Якщо з нього відлили 12 л спирту і додали 12 л води, то в ньому стало x л розчину, причому чистого спирту тільки $(x-12)$ л. Отже, концентрація цього розчину дорівнює $\dfrac{x-12}{x}$. Після того, як із цього розчину взяли 12 л, залишилось $(x-12)$ л такої самої концентрації. За умовою чистого спирту в ньому було на 22 л менше, ніж спочатку, тобто $(x-22)$ л. Отже, концентрація цього розчину становить $\frac{x-22}{x-12}$.

Маємо рівняння:

$$\frac{x-22}{x-12}=\frac{x-12}{x},$$
$$\frac{x-12-10}{x-12}=1-\frac{12}{x},$$
$$1-\frac{10}{x-12}=1-\frac{12}{x},$$
$$\frac{10}{x-12}=\frac{12}{x},$$
$$\frac{5}{x-12}=\frac{6}{x},$$
$$x=72.$$

Отже, чистого спирту спочатку в баці було 72 л, залишилось $72-22=50$ л чистого спирту.

Відповідь. 50 л.

Задача 11

Свіжі гриби містять 90 % води, а сушені — 12 %. Скільки сушених грибів вийде з 22 кг свіжих?

Розв'язання

У 22 кг свіжих грибів міститься $22\cdot 0{,}1=2{,}2$ (кг) сухої речовини.

Оскільки сушені гриби містять 12 % води, то сухої речовини в них міститься 88 %.

Отже, 2,2 кг відповідає 88 %. Тоді сушених грибів вийде $\frac{2{,}2}{0{,}88}=2{,}5$ кг сушених.

Відповідь. 2,5 кг.

Задачі для самостійного розв'язування

1. Є сплави двох сортів із умістом нікелю 65 % і 40 %. Скільки треба взяти кожного з цих сплавів, щоб отримати 140 кг сплаву з умістом нікелю 50 %?
2. Скільки золота 600-ї та 900-ї проби потрібно сплавити, щоб одержати 350 г золота 720-ї проби?

3. Сплав містить 20 г золота. Після того як до цього сплаву додали 5 г срібла і 10 г золота, виявилося, що срібла в новому сплаві на 5 % більше, ніж у початковому. Скільки грамів срібла було в сплаві спочатку?

4. У сплаві міді з цинком, що містить 2 кг міді, додали 6 кг міді. При цьому відсотковий уміст міді в новому сплаві збільшився на 30 % порівняно з початковим. Знайдіть масу початкового сплаву.

5. Маємо два сплави золота і срібла. У одному сплаві золото і срібло знаходиться у відношенні 1:2, а у другому — у відношенні 2:3 відповідно. Скільки треба взяти кожного сплаву, щоб дістати 880 г нового сплаву, у якому співвідношення золота і срібла становило б 17:27?

ЛІТЕРАТУРА

1. *Алгебра*. 9 клас. Тренувальні вправи. Самостійні та контрольні роботи / Ю. О. Захарійченко, Л. І. Захарійченко, І. С. Маркова, В. В. Карпік. — Х. : Вид-во «Ранок», 2013. — 128 с.
2. *Алгебра*. 8 клас. Тренувальні вправи. Самостійні та контрольні роботи / Ю. О. Захарійченко, Л. І. Захарійченко, І. С. Маркова, В. В. Карпік. — Х. : Вид-во «Ранок», 2013. — 128 с.
3. *Бевз Г. П.* Методика викладання математики. — К. : Вища школа, 1977. — 376 с.
4. *Бевз Г. П.* Методика розв'язування алгебраїчних задач в 6–8 класах. — К. : «Радянська школа», 1975. — 237 с.

5. *Збірник* завдань для державної підсумкової атестації з математики 9 клас / М. І. Бурда, О. П. Вашуленко, Н. С. Прокопенко. — Х. : Гімназія, 2010. — 256 с.
6. *Збірник* завдань для державної підсумкової атестації з математики : 9-й кл. / О. І. Глобін та ін. — К. : Центр навч.-метод. л-ри, 2013. — 168 с. : іл.
7. *Збірник* завдань для державної підсумкової атестації з математики : 9-й кл. / А. Г. Мерзляк (та ін.); за ред. М. І. Бурди. — К. : Центр навч.-метод. л-ри, 2014. — 256 с.
8. *Каплун О. І.* Алгебра + геометрія 8 клас : Навчально-методичний посібник. — Х. : ФОП Співак В. Л., 2011. — 336 с.
9. *Каплун О. І.* Алгебра + геометрія 9 клас : Навчально-методичний посібник. — Х. : ФОП Співак В. Л., 2010. — 368 с.
10. *Лебедєв В. І.* Аналіз та розв'язування текстових задач // Математика в школі. — 2002. — № 11. — С. 8–10.
11. *Левітас Г. Г.* Алгебраїчний метод розв'язування текстових задач // Математика в школі. — 2000. — № 8 — С. 13–15.
12. *Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Рабінович Ю. М., Якір М. С.* Збірник задач і контрольних робіт з алгебри для 8 класів. — Х. : Гімназія, 2000. — 224 с.
13. *Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Рабінович Ю. М., Якір М. С.* Збірник задач і контрольних робіт з алгебри для 9 класів. — Х. : Гімназія, 2000. — 224 с.
14. *Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С.* Алгебра : Підруч. для 8 кл. з поглибл. вивч. математики. — Х. : Гімназія, 2008. — 368 с.: іл.
15. *Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С.* Алгебра : Підруч. для 9 кл. з поглибл. вивч. математики. — Х. : Гімназія, 2009. — 384 с.: іл.
16. *Офіційний* звіт про проведення зовнішнього незалежного оцінювання знань випускників загальноосвітніх навчальних закладів України в 2008 р. [Електронний ресурс] — Режим доступу: http://testportal.gov.ua/wp-content/uploads/2017/01/Report2008.pdf — Назва з екрану.
17. *Офіційний* звіт про проведення в 2011 році зовнішнього незалежного оцінювання результатів навчання, здобутих на основі повної загальної середньої освіти. Том 2 [Електронний ресурс] — Режим доступу: http://testportal.gov.ua/wp-content/uploads/2017/01/ Report2011.pdf — Назва з екрану.
18. *Офіційний* звіт про проведення в 2017 році зовнішнього незалежного оцінювання результатів навчання, здобутих на основі повної загальної середньої освіти. Том 2 [Електронний ресурс] — Режим доступу: http://testportal.gov.ua/wp-content/uploads/2017/08/ ZVIT_ZNO_2017_Tom_2.pdf. — Назва з екрану.