

ТРИГОНОМЕТРИЧНІ РІВНЯННЯ

Укладач О. О. Старова, м. Харків

У першому номері журналу за цей рік ми анонсували цикл статей і кольорових вкладок, присвячених рівнянням. На продовження цього циклу пропонуємо статтю про тригонометричні рівняння. Тригонометрія — розділ математики, що має надзвичайно багату й цікаву історію, а тому, перш ніж розглядати тригонометричні рівняння, уважаємо за доцільне нагадати читачам коротку історію виникнення та розвитку тригонометрії.

*Корінь рівняння — це число,
яке підставлене в рівняння замість
букви чи виду, які його позначають,
приводить до зникнення
всіх його членів.*

Ісаак Ньютон

ПРО ПОХОДЖЕННЯ ОДИНИЦЬ ВИМІРЮВАННЯ КУТІВ

Градусне вимірювання кутів виникло в Давньому Вавилоні задовго до нової ери. Оскільки у Вавилоні була прийнята шістдесяткова система числення, то для введення менших одиниць вимірювання кутів один градус послідовно ділився на 60 частин.

Прийнята на сьогодні система позначення набула поширення на XVI і XVII, століття, нею користувались такі відомі астрономи як **Ніколай Коперник** і **Тіхо Браге**.

Але ще **К. Птолемей** (II ст. до н. е.) кількість градусів позначав кружечком, мінут — штрихом, а секунд — двома штрихами.

Інша одиниця вимірювання кутів — радіан — уведена зовсім недавно.

Перше видання (це були екзаменаційні білети), що містило термін «радіан», з'явилося 1873 року.

Спочатку в позначеннях наголошувалось, що йдеться саме про радіанну міру (наприклад, $\frac{\pi^R}{2}$ — кут у $\frac{\pi}{2}$ радіан), але незабаром індекс R перестали вживати.

Сам термін «радіан» походить від латинського *radius* (спиця, промінь). Якщо згадати означення кута в один радіан, то вибір кореня «рад» для назви такого кута абсолютно виправданий.

ІСТОРІЯ ТРИГОНОМЕТРІЇ

Слово «тригонометрія» вперше зустрічається (1595 р.) у заголовку книги німецького теолога і математика **Бартоломеуса Пітіскуса** (1561–1613). Хоча сам термін виник порівняно недавно, багато понять і фактів, що стосуються тригонометрії, були відомі ще дві тисячі років тому. Тригонометрія виникла і розвивалась у давнину як один із розділів астрономії, її обчислювальний апарат. Саме астрономія визначила той факт, що сферична тригонометрія виникла раніше за плоску.

Деякі тригонометричні відомості знаходимо ще в давніх вавилонян і єгиптян, але основи цієї науки закладені в Давній Греції. Надалі математика тривалий час найбільш активно розвивалась індійськими вченими. У IV–V століттях з'явилися спеціальні терміни — синус і косинус.

Суттєвого розвитку вчення про тригонометричні величини набуло в IX–XV століттях у країнах середнього і Близького Сходу. Відомий учений **Мухаммад ібн ал-Хорезмі** (IX ст.) уклавав таблиці синусів і котангенсів.

Важливе значення для розвитку тригонометрії мали праці **ал-Баттані** (ок. 850–929) і **Абу-л-Вафі ал-Бузджані** (940–998). Останній вивів теорему синусів сферичної тригонометрії.

Абу Райхан Мухаммад ібн Ахмад-ал Беруні (973–1048) узагальнив і уточнив результати, яких досягли його попередники в галузі тригонометрії.

Насір ад-Дін Мухаммад ат-Тусі (1201–1274) у «Трактаті про повний чотиристоронник» уперше виклав тригонометричні відомості як самостійний розділ математики, а не додаток до астрономії. Його трактат пізніше мав великий вплив на праці Регіомонтана.



Пам'ятник ат-Тусі, установлений біля входу в Гянджинський філіал НАН Азербайджану

Німецький математик і астроном **Іоганн Мюллер**, більше відомий під псевдонімом **Регіомонтан** (1436–1476), зробив значний внесок у розвиток тригонометрії. Він суттєво удосконалив методику викладання тригонометрії, що, зокрема, привело до застосування алгебри до розв'язування тригонометричних питань.

Перший графік синусоїди з'явився в книзі **Альбрехта Дюрера** «Керівництво до вимірювання циркулем і лінійкою» (1525). 1630-ми роками французький учений **Жиль Роберваль** (1602–1675) під час дослідження циклоїди незалежно накреслив синусоїду, він же опублікував формулу тангенса подвійного кута. Англійський математик **Джон Валліс** (1616–1703)

у своїй «Механіці» (1670) правильно визначив знаки синуса в усіх квадрантах і зазначив, що в синусоїди нескінченно багато «обертів». Графік тангенса для першого квадранта вперше 1668 року накреслив шотландський математик і астроном **Джеймс Грегорі** (1638–1675).

Сучасні позначення обернених тригонометричних функцій за допомогою префікса *arc* (від лат. *arcus* — дуга) з'явилися у австрійського математика **Карла Шерфера** (1716–1783) і закріпилися завдяки французькому вченому **Жозефу Лагранжу** (1736–1813), хоча дещо раніше їх уже розглядав **Данііл Бернуллі** (1700–1782), який уживав іншу символіку. Малось на увазі, що, наприклад, звичайний синус дозволяє за дугою кола знайти хорду, що його стягує, а обернена функція розв'язує протилежну задачу. Англійська і німецька математичні школи до кінця XIX століття пропонували інші позначення: $\sin^{-1}x$, $\frac{1}{\sin x}$, але вони не прижились.

На початку XVII століття в розвитку тригонометрії окреслюється новий напрям — аналітичний. Якщо до цього головною метою тригонометрії вважалося розв'язання трикутників, то в XVII–XIX століттях тригонометрія поступово стає одним із розділів математичного аналізу.

Використання тригонометричних функцій виходить за межі задачі «вимірювання трикутників». Тому відомий німецький математик **Фелікс Клейн** (1849–1925) пропонував учення про тригонометричні функції називати гоніометрією (латинське *gonio* означає кут), але ця назва не закріпилась.

Розвитку аналітичної теорії тригонометричних функцій сприяли **Ісаак Ньютон** (1643–1727) і **Леонард Ейлер** (1707–1783). Основоположником цієї теорії вважають Л. Ейлера. Він надав усій тригонометрії сучасного вигляду, а подальшого розвитку теорія зазнала в XIX столітті в працях **М. І. Лобачевського** (1792–1856) та інших учених.

Сьогодні тригонометрію не розглядають як самостійний розділ математики. Найважливіша її частина — учення про тригонометричні функції — є частиною більш загального,

побудованого на однакових позиціях учення про функції, що вивчаються в математичному аналізі; друга ж частина — розв'язання трикутників — розглядається як розділ геометрії (плоскої і сферичної).

ПРО ТРИГОНОМЕТРИЧНІ РІВНЯННЯ

Тригонометричні рівняння — рівняння, алгебраїчні відносно тригонометричних функцій від невідомого аргумента. Зазвичай під знаком тригонометричної функції, що входить до тригонометричного рівняння, аргумент розглядають тільки лінійно залежний від змінної x , тобто виду $qx+k$, при цьому $q \in \mathbb{Q}$, $k \in \mathbb{Z}$. Так, наприклад, рівняння

$$\sin x + \cos x = 1, \quad \sin x + \cos^2 x = 0, \quad \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

є алгебраїчними тригонометричними рівняннями.

Тригонометричні рівняння відносно змінної (невідомого аргумента) x не є алгебраїчними рівняннями. Наприклад, рівняння $\sin x + x = 0$, $2^x = \arccos x$ — трансцендентні рівняння. Як правило, розглядають лише найпростіші тригонометричні трансцендентні рівняння, оскільки прийомів розв'язання, окрім приблизних, загальних для трансцендентних рівнянь не існує.

Розв'язання алгебраїчних тригонометричних рівнянь, як відомо, зводиться до розв'язання найпростіших (основних) рівнянь: $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$, які можна отримати в результаті застосування до заданого рівняння тотожних перетворень чи зведення тригонометричного рівняння до алгебраїчного, що містить одну тригонометричну функцію одного й того ж аргумента. Під час розв'язування тригонометричних рівнянь виду $a \sin x + b \cos x + c = 0$ використовують введення функції допоміжного (невизначеного)

кута $\operatorname{tg} \varphi$ чи $\operatorname{ctg} \varphi$ (покладаючи, наприклад, $\frac{a}{b} = \operatorname{ctg} \varphi$).

Під час вивчення тригонометричних рівнянь і нерівностей доречно пояснювати розв'язання на графіках. Важливим питанням у розв'язанні тригонометричних рівнянь є їхня рівносильність, питання можливої втрати й появи коренів.

Точно невідомо, хто із учених уперше розглянув тригонометричні рівняння та їхні розв'язання. Але є відомості, що в VIII столітті арабський учений Аль-Марвазі запропонував ітераційний метод розв'язання трансцендентного рівняння $t = \theta - k \sin \theta$, що застосовувався в теорії паралакса. Це рівняння пізніше назвали рівнянням Кеплера.

Абу Джафар Ахмад ібн Абдуллах аль-Марвазі, відомий також під іменем Хаббаш аль-Хасіб (бл. 770 — бл. 870), — одна з найважливіших і цікавих фігур у ранній ісламській астрономії й математиці. Аль-Марвазі увів у тригонометрію поняття тангенса і котангенса та уклав таблиці цих функцій, які були першими в історії науки.

ЛІТЕРАТУРА

1. Бородин А. И., Бугай А. С. Биографический словарь деятелей в области математики. — К. : Радянська школа, 1979.
2. Глейзер Г. И. История математики в школе. — М. : Просвещение, 1983.
3. Мантуров О. В., Солнцев Ю. К., Соркин Ю. И., Федин Н. Г. Математика в понятиях, определениях и терминах. — М. : Просвещение, 1982.
4. Математический энциклопедический словарь / под ред. Ю. В. Прохорова — М. : Советская энциклопедия, 1988.
5. Энциклопедический словарь юного математика / составитель А. П. Савин — М. : Педагогика, 1985.
6. <https://ru.wikipedia.org/wiki/>

Від редакції. У електронній частині цього журналу — журналі «Математика в школах України. Позакласна робота» — ми пропонуємо статтю С. О. Барановської, у якій наведено розв'язання нестандартних тригонометричних рівнянь. Ці рівняння можна пропонувати учням на заняттях гуртків і факультативів, для самостійного розв'язування, для підготовки до ДПА і ЗНО.

Потрібні розробки уроків на новий навчальний рік? Обирайте та економте час протягом року!

10 клас за новою програмою!

Серія «Усі уроки»



- Докладні розробки УСІХ уроків класу.
- Багатий додатковий матеріал, методичні рекомендації для вчителя, різноманітність завдань і вправ відрізняють ці посібники від традиційних планів-конспектів.
- УСІ — бренд, визнаний учителями, що користується сталим попитом.

Код	Клас	Стор.	Ціна
Усі уроки математики			
20ПМУ1	6 клас. I семестр	288	40,00
20ПМУ2	6 клас. II семестр	304	40,00
Усі уроки алгебри			
20ПМУ004	7 клас	272	50,00
Усі уроки геометрії			
20ПМУ005	7 клас	288	60,00

Укр. мова, формат А5, м'яка обкладинка

Серія «Збірники»



Код	Клас	Стор.	Ціна
Математика			
20ЗБК005*	10 клас. Рівень стандарту	—	—
Алгебра			
20ЗБК006*	10 клас. Профільний рівень	—	—
Геометрія			
20ЗБК007*	10 клас. Профільний рівень	—	—

* Незабаром у продажу

Серія «Ключові компетентності»



Код	Назва
20КЛК005*	Математика. Завдання із сучасним змістом

* Незабаром у продажу

Серія «Електронний конструктор уроку»



АКЦІЯ! ЗНИЖКА 69% спеціальна ціна

Математика		
Код	Клас	Ціна
20ЕКУ233	5 клас	30,00
20ЕКУ331	6 клас. I семестр	99,00
Алгебра		
Код	Клас	Ціна
20ЕКУ364	7 клас	99,00
20ЕКУ427*	9 клас	—
Геометрія		
Код	Клас	Ціна
20ЕКУ365	7 клас	99,00

* Незабаром у продажу

Укр. мова, формат CD

Будьте забезпечені розробками уроків на весь навчальний рік!

Замовлення можна зробити:

на сайті: <http://book.osnova.com.ua>;
за тел.: 0-800-505-212;

Вартість поштової доставки Укрпоштою — 28,90 грн.
Тарифи інших перевізників дізнавайтесь додатково.

Жодне дерево не постраждало!

ОСНОВА