РОЗВ'ЯЗАННЯ З РІЗНИМИ ОБЛИЧЧЯМИ

Л. М. Гетманенко, м. Київ

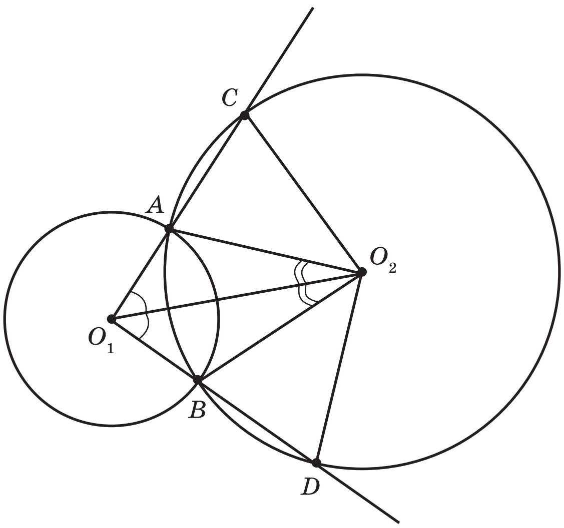
Існує велика кількість красивих задач, емоційних за змістом, із вишуканим розв'язанням. Такі задачі не можна залишити без уваги. Так і сталося із задачею з книги І. Кушніра «Альтернативні способи розв'язання задач», яку я запропонувала учням 8 класу, і отримала неочікувану реакцію з боку учнів. Вони запропонували декілька способів її розв'язання, або, скориставшись влучним виразом автора книги, показали різні її обличчя.

Задача. Два нерівні кола перетинаються в точках A і B. Через центр O_1 меншого кола проведені січні O_1A та O_1B, які перетинають більше коло в точках C і D (див. рисунок). Доведіть, що

$$AC = BD.$$

Доведення

Перше обличчя (спосіб 1)



Оскільки трикутники O_1AO_2 і O_1BO_2 рівні за трьома сторонами, то

$$\angle AO_1O_2 = \angle BO_1O_2, \quad \angle AO_2O_1 = \angle BO_2O_1.$$

Тоді

$$\angle CAO_2 = \angle DBO_2$$

як відповідні зовнішні кути рівних трикутників.

Розглянемо трикутники ACO_2 і BDO_2 — рівнобедрені з рівними кутами при основі, тоді

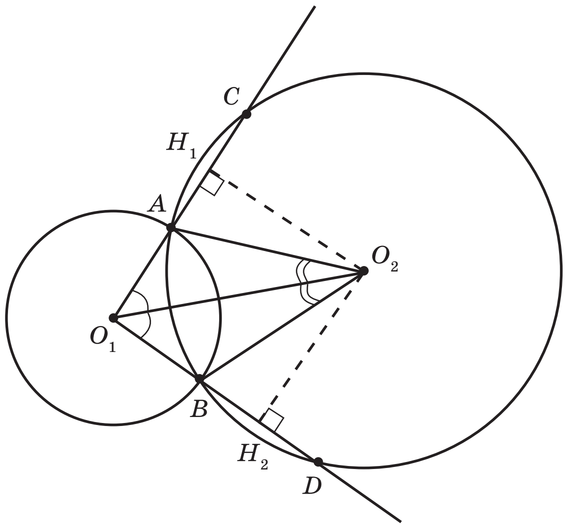
$$\Delta ACO_2 = \Delta BDO_2,$$

звідки матимемо, що

$$AC = BD.$$

Зауважимо, що O_1AO_2B — дельтоїд.

Друге обличчя (спосіб 2)



Виконаємо додаткові побудови. Проведемо

$$H_1O_2 \perp O_1C, \quad H_2O_2 \perp O_1D.$$

Прямокутні трикутники $O_1H_1O_2$ і $O_1H_2O_2$ рівні за гіпотенузою і гострим кутом, звідки випливає, що

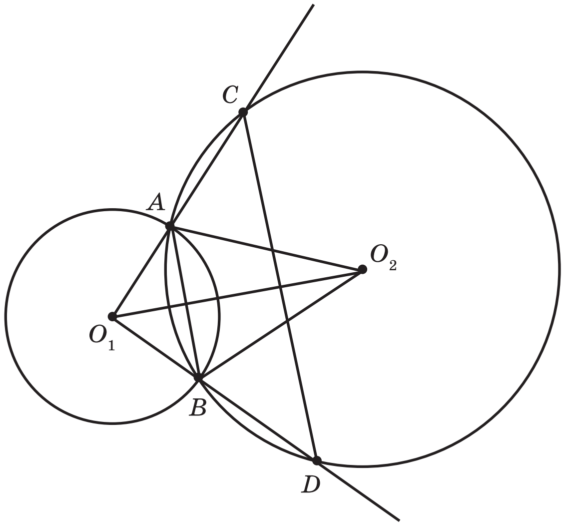
$$H_1O_2 = H_2O_2.$$

Хорди AC і BD рівновіддалені від центра кола O_2, отже,

$$AC = BD.$$

Маємо другий дельтоїд O_1CO_2D.

Третє обличчя (спосіб 3)



$$\angle O_1AB = \angle O_1BA$$

як кути при основі рівнобедреного трикутника O_1AB, тоді $\angle BAC = \angle DBA$ як суміжні рівним кутам.

Оскільки чотирикутник $ABDC$ вписаний у коло з центром O_2 і $\angle BAC = \angle DBA$, то

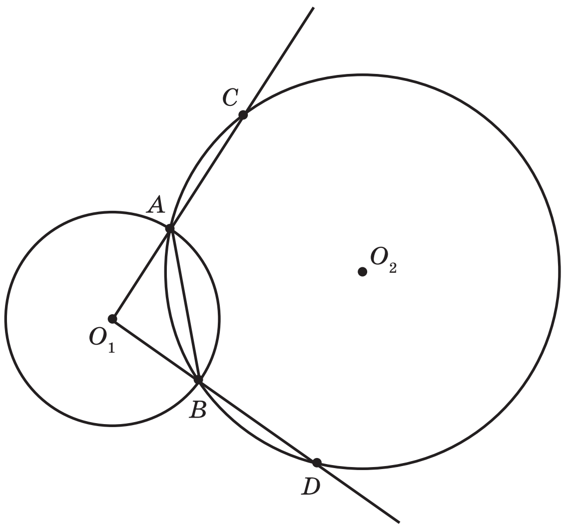
$$\angle ACD = \angle BDC.$$

Отже, трикутник O_1CD — рівнобедрений з основою CD, тобто

$$O_1D = O_1C.$$

Оскільки $O_1A = O_1B$, то $BD = AC$.

Четверте обличчя (спосіб 4)



Оскільки $\angle BAC = \angle DBA$, то

$$\cup BDC = \cup DCA.$$

Із рівностей

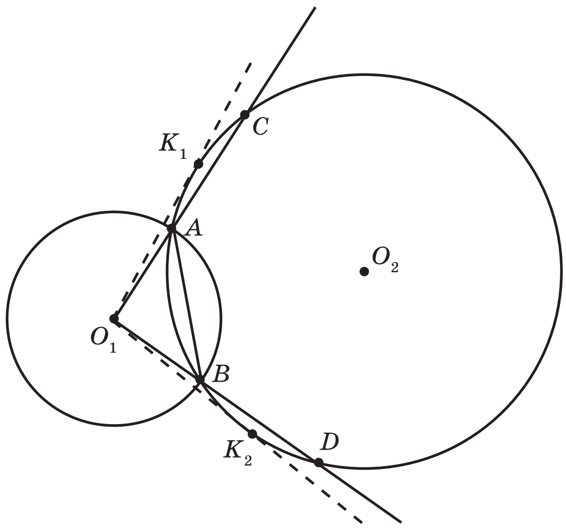
$$\cup BDC = \cup CD + \cup BD, \ \cup DCA = \cup CD + \cup AC$$

випливає рівність дуг BD і AC.

Рівні дуги стягують рівні хорди, отже,

$$AC = BD.$$

П'яте обличчя (спосіб 5)



Виконаємо додаткові побудови: проведемо дотичні O_1K_1 і O_1K_2 до кола з центром O_2.

Оскільки відрізки дотичних, проведених з однієї точки до кола, рівні, то

$$O_1K_1 = O_1K_2.$$

За відомою формулою маємо:

$$O_1K_1^2 = O_1C \cdot O_1A, \ O_1K_2^2 = O_1D \cdot O_1B,$$

причому

$$O_1A = O_1B$$

(радіуси кола з центром O_1), тоді $O_1C = O_1D$, звідки випливає, що

$$AC = BD.$$

Примітка. Погодьтеся — красива задача з точки зору методики викладання математики. Під час розв'язування цієї задачі учні восьмого (і не тільки!) класу можуть повторити основні теоретичні відомості з геометрії. Таку задачу можна запропонувати для розв'язання на шкільній олімпіаді учням 7–9 класів.