ПРО ВИВЧЕННЯ ПОХІДНИХ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ

Я. С. Бродський, доцент, кандидат фізико-математичних наук

Аналіз шкільних підручників з алгебри і початків аналізу свідчить, що виклад диференціювання тригонометричних функцій $y=\sin x$ і $y=\cos x$ відбувається так. Практично в усіх підручниках формули для похідних цих функцій наводяться спочатку в готовому вигляді, без будь-яких роз'яснень і доведень. Фактично це є реалізацією думки про те, що для учня «відкривати» нове в математиці складніше, ніж вивчати вже готові математичні теорії. Але, як вважає автор [1], «із цією думкою навряд чи можна погодитись. Справді, для вчителя цей процес проходить важче. Але учневі за відповідної методики навчання легше діяти як математику, самостійно відкривати істину, ніж заучувати готову систему тверджень і доведень без розуміння їхнього походження, значень і взаємного зв'язку». І далі: «Коли ж викладання націлене не на заучування вже побудованої системи, а на організацію міркувань учнів із тим, щоб вони були в змозі відкрити ті факти, які складають зміст тверджень системи, а потім і логічно впорядкувати їх у систему, це приводить до більш швидкого розвитку мислення учнів».

Наведена думка повністю узгоджується з рекомендацією, висловленою в [2]: «доцільно ... вести викладання так, щоб у деякій мірі учні знову відкривали під керівництвом учителя теореми і правила».

Після введення готових формул похідних синуса і косинуса подальший виклад у різних підручниках дещо відрізняється один від одного.

У [3] після наведення формул похідних синуса і косинуса без доведення автори, звертаючись до учнів, радять: *«Ви можете спробувати довести їх самостійно»*. Чи можуть це зробити учні класів рівня стандарту, які вивчають курс математики за підручником, де дуже стисло викладається питання про границю функції?

У [4] після наведення формул похідних синуса і косинуса без доведення автори повідомляють учням: *«Як доводити ці формули, ви зможете дізнатися в рубриці «Коли зроблено уроки»*. У цій рубриці формула для похідної синуса доводиться за допомогою першої чудової границі $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin t}{t}=1$. Як бачимо, навіть для академічного і профільного рівнів ці формули наводяться без обов'язкового обґрунтування.

У [5] після наведення формул похідних синуса і косинуса без доведення автори пишуть: *«Для обґрунтування формули* $(\sin x)'=\cos x$ *використовуємо те, що при малих значеннях* α *значення* $\sin\alpha\approx\alpha$ *(наприклад,* $\sin 0{,}01\approx 0{,}010$, $\sin 0{,}001\approx 0{,}001$*). Тоді при* $\alpha\to 0$ *відношення* $\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}\to 1$, тобто $\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}=1$». І далі *виноска: «Справедливість цієї формули обґрунтовано на с. 109»*, тобто більше ніж через 50 сторінок. Як кажуть, коментарі зайві.

У [6] формули похідних синуса і косинуса без доведення наводяться при викладі матеріалу на першому рівні, на другому рівні (відразу на наступній сторінці) ці формули доводяться з використанням фізичного змісту похідної. Справа в тому, що і в класах рівня стандарту є учні, які по-різному мотивовані до вивчення математики, мають різну математичну підготовку, тому повністю виправдано наведення в підручнику доведення, яке не виходить за межі програми і доступне принаймні деяким учням.

У [7] формули похідних синуса і косинуса не наводяться в готовому вигляді, а отримують у процесі виведення за допомогою першої чудової границі. Наведемо доведення, яке викладено в цьому підручнику.

«Позначимо $f(x)=\sin x$, *складемо різницеве відношення:*

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}=$$

$$=\frac{2\sin\frac{h}{2}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)}{h}=\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\cdot\cos\left(x+\frac{h}{2}\right). \quad (9)$$

Якщо $h\to 0$, *то*

$$x+\frac{h}{2}\to x,\quad \cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\to\cos x,$$

скористаємося тим, що $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1$. *Це твердження називають першою чудовою границею і зазвичай доводять у курсі вищої математики. Тоді* $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}=1$, *і тому права частина (9) має границю, що дорівнює* $\cos x$. *Отже, ліва частина (9) також має границю, яка за визначенням дорівнює* $f'(x)$. *Таким чином,* $(\sin x)'=\cos x$*»*.

Як бачимо, і тут автори зазнавали певних труднощів під час застосування першої чудової границі.

У [8-9] наводяться формули похідних синуса і косинуса і відразу вони доводяться за допомогою першої чудової границі.

У [8] твердження

$$\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\to\cos x \quad \text{і} \quad \lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}=1$$

обґрунтовуються за допомогою геометричних уявлень.

У [9] границя функції вивчається в досить повному обсязі, тому викладено строге доведення формули похідної синуса.

У [10] формули похідних синуса і косинуса не наводяться в готовому вигляді, а отримують в процесі розгляду фізичного змісту похідної.

Так ідуть справи у підручниках. Безумовно, учителі, які працюють за цими підручниками, як правило, викладають так, як це зроблено в підручнику.

Бесіди з учителями математики, проведені різного часу, опитування про характер уроків, присвячених цьому питанню, показали таке:

- ✓ більшість учителів наводять без доведення формули похідних синуса і косинуса, виводять на підставі правила диференціювання частки від ділення двох функцій формули похідних тангенса і котангенса і починають розв'язувати вправи, присвячені, в основному, техніці диференціювання тригонометричних функцій;
- ✓ менша частина вчителів, в основному в класах профільного рівня, викладають доведення формули похідної синуса за допомогою першої чудової границі;
- ✓ незначна частина вчителів наводять обґрунтування формули похідної синуса або косинуса з використанням фізичного змісту похідної.

Ураховуючи вищевикладене, можна дійти висновку про необхідність надання допомоги вчителям математики в навчанні учнів диференціюванню тригонометричних функцій. Цьому і присвячена ця стаття.

Пропоновані рекомендації засновані на методиці вивчення математичних тверджень — теорем. Процес вивчення теорем, як зазначено в [11], передбачає три етапи: підготовчий, основний і завершальний. Підготовчий етап забезпечує готовність учнів до свідомого засвоєння сутності теореми. Основний етап складається з двох частин — засвоєння змісту теореми та її обґрунтування, зокрема, доведення. Завершальний етап спрямований на осмислення місця теореми в системі знань, її застосування.

Розглянемо кожен із перелічених етапів вивчення похідних синуса і косинуса.

Підготовчий етап передбачає, передусім, мотивацію доцільності вивчення твердження. Уведення математичних понять і фактів у шкільному курсі важливо мотивувати.

Досить часто доцільність вивчення твердження пояснюється її практичним застосуванням. Важливо, щоб учні розуміли, що формули похідних тригонометричних функцій потрібні не просто для поповнення набору формул диференціювання. Річ у тому, що, наприклад, гармонічні коливання описуються за допомогою тригонометричних функцій $y = \sin x$ і $y = \cos x$. А швидкості гармонічних коливань — це їхні похідні. Тому і потрібні похідні синуса і косинуса.

Складовою частиною підготовчого етапу є актуалізація знань учнів, потрібних для свідомого засвоєння теореми. Для усвідомленого засвоєння формул похідних синуса і косинуса необхідно повторити:

- ✓ поняття середньої швидкості зміни функції на деякому проміжку;
- ✓ поняття швидкості зміни функції в точці;
- ✓ означення похідної функції в точці;
- ✓ фізичний зміст похідної;
- ✓ отримані раніше формули похідних;
- ✓ геометричний зміст похідної;
- ✓ поняття похідної другого порядку;
- ✓ похідну складеної функції, або, її окремий випадок, функції $y = f(kx + b)$.

Найскладнішою частиною підготовчого етапу є підведення учнів до формулювання теореми, до «відкриття» відповідного твердження. Як зазначено в [12], «найбільш ефективним методом у відкритті фактів є аналогія». У нашому випадку, повторюючи формули:

$$(C)' = 0,\ (x^n)' = nx^{n-1},\ n \in \mathbb{Z},\ (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1},\ \alpha \in \mathbb{R},$$

можна дійти таких висновків:

- ✓ похідна *константи* дорівнює нульовій *константі*;
- ✓ похідна *степеня з цілим показником* дорівнює *степеню з цілим показником*;
- ✓ похідна *степеня з раціональним показником* дорівнює *степеню з раціональним показником*;
- ✓ похідна *многочлена* дорівнює *многочлену*.

Ґрунтуючись на цих висновках, можна висловити за аналогією гіпотезу: *похідна тригонометричної функції дорівнює тригонометричній функції.*

Виникає запитання: чому дорівнює похідна функції $y = \sin x$ і чому дорівнює похідна функції $y = \cos x$? Можна скористатися чисельним експериментом для пошуку відповідей на ці запитання. Діятимемо за схемою знаходження миттєвої швидкості руху точки, тобто похідної. Обчислення проведемо для двох початкових значень аргумента: $t = 1$ і $t = 2$.

Нехай точка здійснює гармонічне коливання за законом $y = \sin t$. Знаходитимемо середню швидкість її руху на проміжку $[t; t + \Delta t]$ для вказаних значень t. Обчислення, проведені на калькуляторі, подано в таблиці (*див. с. 17*).

На уроці достатньо знайти 1–2 значення середньої швидкості, а всю таблицю підготувати заздалегідь.

Як бачимо, для наведених значень t у результаті стягування проміжку $[t; t + \Delta t]$ у точку t середня швидкість руху точки прямує до значення косинуса в цій точці. Цілком природно припустити, що $(\sin x)' = \cos x$. Тим самим учні підведені до формулювання теореми.

Основний етап вивчення теорем передбачає, передусім, формулювання теореми, оволодіння її змістом, структурою, призначенням.

Висловлену гіпотезу можна сформулювати так:

Для будь-якого $x \in \mathbb{R}$ *справджується формула:* $(\sin x)' = \cos x$.

Для оволодіння її змістом можна запропонувати такі запитання:

1. Матеріальна точка рухається за законом $y = \sin t$. Якою є швидкість її руху в момент часу $t = \frac{\pi}{6}$?
2. Чому дорівнює кутовий коефіцієнт дотичної до графіку функції $y = \sin x$ у точці $x = \frac{\pi}{3}$?
3. У який найменший момент часу швидкість матеріальної точки, що рухається за законом $y = \sin t$, дорівнює 0,5?

t	Δt	$\dfrac{\sin(t+\Delta t)-\sin t}{\Delta t}$
$t=1$ $\sin 1=0{,}841$ $\cos 1=0{,}540$	0,2	$\dfrac{\sin 1{,}2-\sin 1}{0{,}2}=0{,}453$
	0,15	$\dfrac{\sin 1{,}15-\sin 1}{0{,}15}=0{,}475$
	0,1	$\dfrac{\sin 1{,}1-\sin 1}{0{,}1}=0{,}497$
	0,05	$\dfrac{\sin 1{,}05-\sin 1}{0{,}05}=0{,}519$
	0,04	$\dfrac{\sin 1{,}04-\sin 1}{0{,}04}=0{,}523$
	0,03	$\dfrac{\sin 1{,}03-\sin 1}{0{,}03}=0{,}528$
	0,02	$\dfrac{\sin 1{,}02-\sin 1}{0{,}02}=0{,}532$
	0,01	$\dfrac{\sin 1{,}01-\sin 1}{0{,}01}=0{,}536$
	0,001	$\dfrac{\sin 1{,}001-\sin 1}{0{,}001}=0{,}540$

t	Δt	$\dfrac{\sin(t+\Delta t)-\sin t}{\Delta t}$
$t=2$ $\sin 2=0{,}909$ $\cos 2=-0{,}416$	0,2	$\dfrac{\sin 2{,}2-\sin 2}{0{,}2}=-0{,}504$
	0,15	$\dfrac{\sin 2{,}15-\sin 2}{0{,}15}=-0{,}483$
	0,1	$\dfrac{\sin 2{,}1-\sin 2}{0{,}1}=-0{,}461$
	0,05	$\dfrac{\sin 2{,}05-\sin 2}{0{,}05}=-0{,}439$
	0,04	$\dfrac{\sin 2{,}04-\sin 2}{0{,}04}=-0{,}434$
	0,03	$\dfrac{\sin 2{,}03-\sin 2}{0{,}03}=-0{,}430$
	0,02	$\dfrac{\sin 2{,}02-\sin 2}{0{,}02}=-0{,}425$
	0,01	$\dfrac{\sin 2{,}01-\sin 2}{0{,}01}=-0{,}421$
	0,001	$\dfrac{\sin 2{,}001-\sin 2}{0{,}001}=-0{,}417$

Основний етап передбачає формулювання теореми в різних формах: вербальній (похідна синуса деякого аргумента x дорівнює косинусу того самого аргумента), знакосимвольній (наведено вище), образній (кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції $y=\sin x$ у деякій точці дорівнює значенню косинуса в тій самій точці).

Друга частина основного етапу присвячена доведенню теореми.

Доцільно розпочати цю частину основного етапу з мотивації необхідності доведення. Для цього можна звернути увагу учнів на те, що наведений чисельний експеримент практично показав справедливість формули похідної синуса для конкретних значень аргумента $t=1$ і $t=2$.

Щоб переконатися в тому, що вона справджується для будь-якого дійсного значення аргумента, треба провести доведення.

Пошук доведення можна вести різними прийомами. Застосування означення похідної функції в точці призводить до необхідності вміти обчислювати границю відношення синуса деякого аргумента до значення цього аргумента, коли останній прямує до нуля. Цей прийом можна застосувати, якщо вивчення першої чудової границі передбачається програмою і вже реалізоване.

Інший прийом доведення заснований на фізичному змісті похідної. Можна провести таку бесіду з учнями.

1. Що треба довести? ($(\sin x)'=\cos x$)
2. У чому полягає фізичний зміст похідної? (*Якщо функція є законом зміни деякої фізичної величини, то її похідна є миттєвою швидкістю зміни цієї величини.*)
3. Похідну якої функції треба знайти? ($y=\sin t$)
4. Зміну якої фізичної величини задає функція $y=\sin t$? (*Зміну ординати точки, що здійснює обертальний рух колом.*)
5. Де знаходиться центр цього кола? (*На початку координат*)
6. Чому дорівнює радіус цього кола? (*1*)

7. Який геометричний зміст аргумента t? (*Це кут, що дорівнює t радіан, на який обертається точка, яка рухається одиничним колом навколо початку координат.*)

8. У якому напрямі обертається ця точка? (*Проти годинникової стрілки*)

9. Із якою кутовою швидкістю обертається ця точка? (*1 рад./с*)

10. Чому дорівнює лінійна швидкість обертання точки? (*1*)

11. Якою величиною є швидкість — векторною або скалярною? (*Векторною*)

12. Як напрямлений вектор швидкості, якщо траєкторія руху криволінійна? (*По дотичній до цієї траєкторії.*)

13. Як розташовані один відносно одного вектор швидкості і радіус-вектор точки, що рухається? (*Вони взаємно перпендикулярні*)

14. Чому дорівнює довжина вектора швидкості обертання точки? (*1*)

15. На які складові розкладається вектор швидкості по двох взаємно перпендикулярних напрямах, паралельних координатним осям? (*На горизонтальну і вертикальну*)

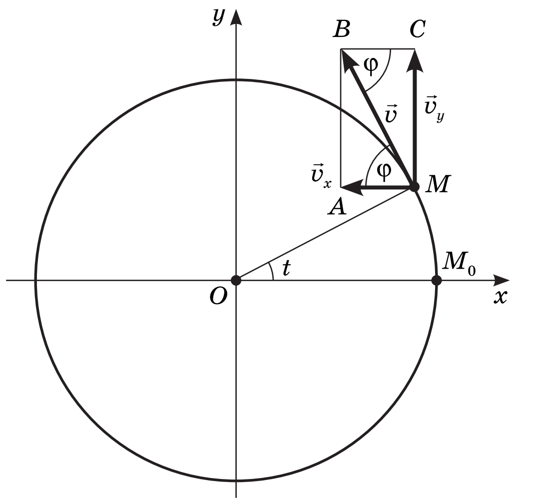
16. Що треба знати, щоб, знаючи довжину вектора, знайти довжини його горизонтальної і вертикальної складових? (*Наприклад, кут нахилу цього вектора до однієї з координатних осей.*)

17. Як пов'язані кут t і кут нахилу вектора-швидкості до осі абсцис, якщо кут t знаходиться в першій чверті (*Їхня сума дорівнює* $\frac{\pi}{2}$)

18. Як знайти довжини складових вектора швидкості? (*За допомогою співвідношень між сторонами і кутами прямокутного трикутника.*)

Після такої бесіди доведення формули похідної синуса труднощів у учнів не повинно викликати.

Нехай матеріальна точка M рухається рівномірно по колу з радіусом 1 з лінійною швидкістю, що дорівнює 1 м/с. Відомо, що вектор швидкості $\vec{v}$ напрямлений по дотичній до кола (див. рис.). Координати точки M у момент часу t за умовою дорівнюють $x=\cos t$ і $y=\sin t$. Знайдемо швидкість зміни ординати точки M, тобто функції $y=\sin t$. Для цього швидкість $\vec{v}$ розкладемо на горизонтальну і вертикальну складові. Вертикальна складова $\vec{v}_y$ і є швидкістю зміни функції $y(t)$.



Із прямокутного трикутника BMC маємо:

$$\left|\vec{v}_y\right| = BM\sin\varphi,\ \ BM=\left|\vec{v}\right|=1,$$

$$\angle AMO=\angle MOM_0=t$$

як різносторонні кути при паралельних прямих і січній;

$\angle OMB=\frac{\pi}{2}$. Тоді $\angle AMB=\varphi=\frac{\pi}{2}-\angle AMO=\frac{\pi}{2}-t$.

Отже, $\left|\overline{v_y}\right|=\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=\cos t$. Тоді $\vec{v}_y=\cos t$. Дістали: $y'(t)=\cos t$ або $(\sin t)'=\cos t$.

Ми розглянули випадок, коли точка M розміщена в першій координатній чверті. Аналогічні міркування можна провести для будь-якого випадку розміщення точки M.

Для закріплення доведення формули можна запропонувати учням такі запитання і завдання.

1. Чому дорівнює довжина горизонтальної складової $\vec{v}_x$?

2. Які координати має точка M?

3. Як напрямлений вектор $\vec{v}_x$?
4. Зробіть рисунок для випадку, коли точка M лежить у другій чверті.
5. Аналогічно доведіть формулу похідної косинуса.
6. Матеріальна точка рухається прямолінійно за законом $x=\cos t$. У якому напрямі (у напрямі координатної осі або в протилежному) рухається точка в моменти часу $t_1=1$, $t_2=3$, $t_3=4$?

Завершальний етап передбачає включення отриманих формул у систему відомих знань, їхнє застосування. На цьому етапі розглядається застосування доведених формул до розв'язування завдань, зокрема прикладних. На цьому етапі слід виконати завдання, які використовувалися для мотивування необхідності вивчення формул похідних.

Зокрема, користуючись правилом знаходження похідної частки від ділення двох функцій, можна вивести формули похідних тангенса і котангенса. Якщо правила диференціювання складених функцій вивчені, то можна запропонувати іншим способом отримати формулу похідної косинуса:

$$(\cos x)'=\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)'=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cdot(-x)'=-\sin x.$$

Корисно розглянути завдання таких типів.

1 Точка здійснює гармонійні коливання за законом $x=\sin t$, де x — координата точки, $t\geq 0$ — час руху. Знайдіть:

1) середню швидкість руху точки на проміжку часу $\left[0;\frac{\pi}{6}\right]$;
2) швидкість руху в момент часу $t=\frac{\pi}{6}$.

1) $v_{ср.}=\dfrac{x\left(\frac{\pi}{6}\right)-x(0)}{\frac{\pi}{6}-0}=\dfrac{\sin\frac{\pi}{6}-\sin 0}{\frac{\pi}{6}}=\dfrac{3}{\pi}\approx 0{,}955.$

2) Необхідно знайти похідну функції $x=\sin t$ у точці $t=\frac{\pi}{6}$: $x'(t)=\cos t$,

$$x'\left(\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}\approx 0{,}866.$$

Відповідь. 1) $\approx 0{,}955$; 2) $\approx 0{,}866$.

2 Знайдіть рівняння дотичної до синусоїди на початку координат. За допомогою знайденого рівняння доведіть, що поблизу нуля $\sin t\approx t$.

Рівняння дотичної до графіка функції $y=f(x)$ у точці з абсцисою x_0 має вигляд: $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$. Оскільки $\sin 0=0$, $(\sin x)'=\cos x$, $\cos 0=1$, то рівняння шуканої дотичної має вигляд: $y=x$.

Замінюючи поблизу початку координат графік синуса відрізком дотичної, отримаємо наближене значення синуса за формулою $\sin t\approx t$.

3 Матеріальна точка виконує гармонічні коливання за законом $x=2\sin\pi t$, де x — координата точки, t — час.

1) Знайдіть швидкість руху в моменти часу: $t_1=\frac{1}{6}$, $t_2=\frac{1}{4}$, $t_3=1$.
2) У які моменти часу змінюється напрям руху точки?
3) У які моменти часу точка має найбільшу швидкість?
4) Доведіть, що прискорення руху пропорційне координаті точки. Чому дорівнює коефіцієнт пропорційності?

Такими є основні рекомендації щодо вивчення диференціювання тригонометричних функцій у школі. Безумовно, для їх реалізації знадобиться досить багато часу. По-перше, учитель може використати не всі рекомендації, а ті, які найбільш доцільні в процесі роботи з його учнями. При цьому доречно в першу чергу скористатися тими рекомендаціями, які спрямовані на розвиток мислення учнів, їхнього математичного мислення. На це орієнтовані рекомендації, пов'язані зі встановленням доцільності вивчення формул похідних тригонометричних функцій, «відкриттям» цих формул, пошуком прийомів їх доведення, їхніми застосуваннями тощо. По-друге, викладені рекомендації фактично можуть бути застосовані до вивчення будь-якої теореми, і вчитель може їх широко використовувати.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Столяр А. А.* Методы обучения математике. — Минск : Высшая школа, 1966.
2. *Репьев В. В.* Общая методика преподавания математики. — М. : Учпедгиз, 1958.
3. *Бевз Г. П.* Математика: 11 клас: підруч. для загальноосвіт. навч. закл.: рівень стандарту / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз. — К. : Генеза, 2011.
4. *Мерзляк А. Г.* Алгебра і початки аналізу: 11 клас: підруч. для загальноосвіт. навч. закл.: акад. рівень, проф. рівень / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір. — Х. : Гімназія, 2011.
5. *Нелін Є. П.* Алгебра і початки аналізу: 11 клас: підруч. для загальноосвіт. навч. закл.: акад. рівень, проф. рівень / Є. П. Нелін, О. Є. Долгова. — Х. : Гімназія, 2011.
6. *Афанасьєва О. М., Бродський Я. С., Павлов О. Л., Сліпенко А. К.* Математика. 11 клас. Рівень стандарту. Підруч. для загальноосвіт. навч. закл. — Тернопіль : Навчальна книга — Богдан, 2011.
7. *Алгебра* и начала математического анализа. 10–11 классы: учеб. для общеобразоват. учреждений: базовый уровень / [Ш. А. Алимов, Ю. М. Колягин, М. В. Ткачёва и др.]. — 18-е изд. — М. : Просвещение, 2012.
8. *Алгебра* и начала математического анализа. Учеб. для 10–11 кл. общеобразоват. учреждений / [А. Н. Колмогоров, А. М. Абрамов, Ю. П. Дудницын и др.]: под ред. А. Н. Колмогорова. — 17-е изд. — М. : Просвещение, 2008.
9. *Алгебра* и начала математического анализа. 11 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений: базовый и профильный уровни / [С. М. Никольский, М. К. Потапов, Н. Н. Решетников, А. В. Шевкин]. — 8-е изд. — М. : Просвещение, 2009.
10. *Башмаков М. И.* Алгебра и начала анализа: Учеб.для 10–11 кл. сред. шк. — 2-е изд. — М. : Просвещение, 1992.
11. *Бродський Я. С., Павлов О. Л.* Дидактика математики. — Донецьк : ДонНУ, 2006.
12. *Саранцев Г. И.* Обучение математическим доказательствам в школе : Кн. для учителя. — М. : Просвещение, 2000.