Математика в школах України
Позакласна робота
№7–8 (91–92) · Липень–серпень 2018 · Заснований у квітні 2010 р. · Виходить один раз на місяць ·
За сприяння Міністерства освіти і науки України · Учасники проекту: ХНПУ ім. Г. С. Сковороди, КМПУ ім. Б. Д. Грінченка

Шукай простоту і не вір їй! А. Н. Уайтхед

У НОМЕРІ:

От і середина красного літа

От і середина красного літа,
Гарно! Чарівно квітує усе.
Квіточка кожна теплом обігріта,
Хмарка нам дощик тепленький несе.
З півдня легенький вітрець повіває,
Росами вранці умита земля.
Збіжжя уже на ланах достигає,
Овочі гарні дарують поля...
Кінчиться літечко. Осінь прилине.
І журавлі закурличуть в журбі.
Літо! Затримайся хоч на годину...
Дякуєм красно за ласку тобі!

Надія Красоткіна

ІНТЕЛЕКТУАЛЬНІ МАТЕМАТИЧНІ ЗМАГАННЯ ШКОЛЯРІВ

Укладач Т. В. Свєтлова, м. Суми

Створення умов, що забезпечують виявлення та розвиток обдарованих дітей і реалізацію їхніх можливостей, є одним із пріоритетних напрямів сучасного суспільства.

Потреба у висококваліфікованих спеціалістах у галузі фізико-математичних наук стимулює розвиток різноманітних форм роботи зі школярами. Однією з них є участь в інтелектуальних математичних змаганнях.

Мета проведення інтелектуальних математичних змагань — виявлення, розвиток обдарованих учнів, підвищення інтересу до поглибленого вивчення математики, стимулювання творчого самовдосконалення дітей, учнівської молоді, сприяння розвитку творчих та інтелектуальних здібностей учнів.

На інтелектуальних математичних змаганнях пропонують завдання, що не виходять за межі чинної програми з математики, але їх умови є нестандартними. Для того щоб виконати такі завдання, учні повинні вміти самостійно, критично мислити, мати гарну просторову уяву, стійкі навички раціональних обчислень та перетворень виразів.

Уміння розв'язувати нестандартні задачі свідчить про високий рівень володіння математичним апаратом. Засвоєння методів розв'язування таких задач вимагає від учнів напруженої активної розумової діяльності, є основою для майбутньої наукової роботи.

Розвиток індивідуальних здібностей і обдарованості дітей, забезпечення умов їхньої самореалізації є одним із завдань кожного вчителя математики.

ВСЕУКРАЇНСЬКА ОЛІМПІАДА З МАТЕМАТИКИ

Учнівські математичні олімпіади в Україні мають давні традиції. Ще 1935 року з ініціативи академіка Михайла Пилиповича Кравчука за участі викладачів фізико-математичного факультету Київського університету були започатковані Київські міські математичні олімпіади.

Перша Республіканська математична олімпіада, на якій було представлено всі регіони України, відбулася 21–23 березня 1961 року в Києві.

Саме з 1961 року починається відлік часу для Всеукраїнських математичних олімпіад як освітянських подій загальнодержавного масштабу. Майже півстоліття олімпіади залишаються однією з найпоширеніших і наймасовіших позакласних і позашкільних форм організації роботи з обдарованими учнями.

Організатором і координатором Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики є Інститут інноваційних технологій і змісту освіти, на який покладається організаційно-методичне забезпечення проведення олімпіади.

Всеукраїнську учнівську олімпіаду з математики проводять у чотири етапи:
- I (*перший*) етап — шкільний (міжшкільний, училищний) на базі загальноосвітніх, професійно-технічних навчальних закладів;
- II (*другий*) етап — районний (міський);
- III (*третій*) етап — обласний;
- IV (*четвертий*) етап — Всеукраїнський.

Всеукраїнська учнівська олімпіада з математики є очною формою змагань.

I етап Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики проводять у жовтні поточного року.

Порядок проведення, персональний склад оргкомітетів та журі, експерти-консультанти I етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики, турнірів, а також рішення відповідних оргкомітетів затверджуються наказами керівника навчального закладу.

Завдання I етапу для учасників Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики готують предметно-методичні комісії, склад яких затверджується наказом керівника навчального закладу.

Звіти про проведення I етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики та заявки на участь команд у наступному етапі оргкомітети

І етапу надсилають до районних (міських) оргкомітетів. У І етапі Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики беруть участь усі охочі учні 5–11 класів. Найважливішим завданням шкільного етапу олімпіади є формування та розвиток інтересу до математики у якомога більшої кількості учнів, виховання самостійності, цілеспрямованості, вольових якостей особистості.

Підготовка та проведення І етапу олімпіади з математики потребують постійного підвищення кваліфікації учителя математики, що реалізується в процесі самоосвітньої діяльності та під час роботи методичних об’єднань, семінарів, курсів підвищення кваліфікації.

ІІ етап Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики проводять щороку в листопаді-грудні. Персональний склад оргкомітетів і журі олімпіади, а також рішення відповідних оргкомітетів затверджуються наказами відділу освіти районної (міської) державної адміністрації.

Звіти про проведення ІІ етапу олімпіади з математики та заявки на участь у ІІІ етапі оргкомітети цих олімпіад надсилають до обласного оргкомітету.

У ІІ етапі Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики беруть участь учні 6–11 класів, які стали переможцями І етапу. Учасники ІІ етапу характеризуються стійкою мотивацією до вивчення математики. Одним з важливих чинників успішного виступу школярів на ІІ етапі олімпіади є сформованість уміння самостійно працювати з навчальною, науково-популярною літературою. ІІ етап олімпіади має творчий цілеспрямований характер, головним його завданням є розвиток творчої ініціативи школярів і залучення їх на цій основі до активної пізнавальної діяльності.

ІІІ етап — обласну олімпіаду з математики — проводять у січні–лютому. Персональний склад оргкомітетів і журі ІІІ етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики, рішення відповідних оргкомітетів затверджуються наказами управління освіти і науки обласної державної адміністрації.

У ІІІ етапі Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики беруть участь учні 7–11 класів, які стали переможцями ІІ етапу згідно з квотою районів (міст). Підготовка до олімпіади здійснюється переважно під керівництвом учителя, значно зростає роль самостійної роботи учня.

Міністерство освіти і науки України надає рекомендації щодо підготовки олімпіадних завдань, для складання завдань створюють предметно-методичну комісію.

Звіти про проведення ІІІ етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики, заявки на участь команди у IV етапі Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики оргкомітет надсилає до Інституту інноваційних технологій і змісту освіти та оргкомітету Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики (за місцем проведення).

Кількісний склад команди, що братиме участь у IV етапі Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики, розраховують відповідно до рейтингу області, який затверджують наказом Міністерства освіти і науки України щорічно.

Порядок проведення IV (фінального) етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики, організаційне, методичне забезпечення визначає Міністерство освіти і науки України.

Персональний склад оргкомітетів, журі та експерти-консультанти Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики затверджуються наказами Міністерства освіти і науки.

У IV етапі Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики беруть участь учні 8–11 класів, які стали переможцями ІІІ етапу відповідно до рейтингу області.

ВСЕУКРАЇНСЬКИЙ КОНКУРС-ЗАХИСТ НАУКОВО-ДОСЛІДНИЦЬКИХ РОБІТ УЧНІВ — ЧЛЕНІВ МАЛОЇ АКАДЕМІЇ НАУК УКРАЇНИ

Всеукраїнський конкурс-захист науково-дослідницьких робіт учнів — членів Малої академії наук України проводять з метою духовного, творчого, інтелектуального розвитку дітей України, створення умов для формування інтелектуального потенціалу нації.

Основними завданнями конкурсу є:

- вияв та підтримка обдарованих дітей, залучення інтелектуально та творчо обдарованої учнівської молоді до науково-дослідницької та експериментальної роботи;

- формування активної громадянської позиції;
- виховання самостійності, наполегливості, вміння формувати і відстоювати власну думку.

Система роботи з учнями включає:

- ознайомлення з особливостями наукової діяльності;
- опанування алгоритму написання наукової роботи;
- вироблення умінь працювати з бібліографічними матеріалами.

У Всеукраїнському конкурсі-захисті науково-дослідницьких робіт учнів — членів Малої академії наук України беруть участь учні 9–11 класів загальноосвітніх навчальних закладів та учні, вихованці, слухачі (відповідного віку) позашкільних, професійно-технічних навчальних закладів, студенти вищих I–II рівня акредитації навчальних закладів, які активно займаються науково-дослідницькою діяльністю.

У конкурсі можуть брати участь учні 7–8 класів за умови виконання ними випробувань із базових дисциплін за програмами 9 класу.

Учасник конкурсу може брати участь у декількох секціях або відділеннях за умови подання такої ж кількості робіт відповідно до напрямів секцій.

Програма Всеукраїнського конкурсу-захисту науково-дослідницьких робіт учнів — членів Малої академії наук України передбачає три етапи.

Перший етап — конкурс науково-дослідницьких робіт.

Оцінюють:

- складність, науковість, повноту розкриття теми;
- аргументованість висновків;
- актуальність та елементи творчості;
- стиль, грамотність;
- якість оформлення роботи.

Максимальна кількість балів — 22.

Другий етап — виконання контрольних завдань із базових дисциплін. Контрольна робота передбачає 9 завдань за трьома рівнями складності.

Максимальна кількість балів — 39.

Третій етап — захист науково-дослідницьких робіт. На захисті мають право бути присутніми інші члени секції як опоненти.

Оцінювання захисту передбачає:

- аргументацію вибору та розкриття теми дослідження з урахуванням власного вкладу дослідника;
- логічність, чіткість, лаконічність викладу матеріалу;
- використання наочних матеріалів;
- повноту, вичерпність відповідей;
- культуру мовлення;
- активну кваліфіковану участь у веденні дискусій.

Максимальна кількість балів — 39.

Максимальна сумарна оцінка за участь у всіх етапах програми конкурсу-захисту становить 100 балів.

Переможців визначають за сумою балів, одержаних на всіх етапах конкурсу-захисту.

Призерів конкурсу нагороджують дипломами I, II, III ступенів.

Результати проведення III етапу конкурсу затверджуються наказом Міністерства освіти і науки України. Кращі роботи учасників конкурсу можуть бути відзначені спеціальними дипломами, відзнаками та призами.

Відповідно до Положення про стипендії Президента України для переможців Всеукраїнського конкурсу-захисту науково-дослідницьких робіт учнів — членів Малої академії наук України, затвердженого Указом Президента України від 16 травня 2006 року № 398, переможці та призери III етапу конкурсу кількістю 120 осіб відзначаються стипендіями Президента України. Розмір стипендії визначається відповідними нормативними актами.

Основні вимоги до написання учнівських науково-дослідницьких робіт

На конкурс подають роботи проблемного (пошукового) характеру, які відповідають віковим інтересам та пізнавальним можливостям учнів, свідчать про обізнаність учасника конкурсу щодо сучасного стану галузі дослідження, опанування ним методики експерименту.

Тематика науково-дослідницьких робіт має відповідати напрямам секцій наукових відділень МАН.

Кожна робота має ґрунтуватись на певній науковій та експериментальній базі, містити власні дані дослідів, спостережень, пошукової роботи; їх обробки, аналізу та узагальнення; посилання на відповідні наукові джерела та відображати власну позицію дослідника.

У роботі мають бути чітко відображені такі аспекти: визначення мети, об’єкта та предмета дослідження, завдання, методика дослідження, відмінність та перевага запропонованих підходів та результатів.

Зміст та результати досліджень викладають стисло, логічно, грамотно та аргументовано, без загальних слів, міркувань, бездоказових тверджень, тавтології.

Назва роботи має бути стислою і відповідати суті наукової проблеми (завдання), що розв’язується.

На наукову роботу обов’язково подають відгуки наукових керівників та рецензії відповідних фахівців (досвідчених педагогів, науковців, спеціалістів певної галузі).

Достовірність наведених у роботі результатів підтверджується науковим керівником у відгуку.

ВСЕУКРАЇНСЬКА УЧНІВСЬКА ІНТЕРНЕТ-ОЛІМПІАДА З МАТЕМАТИКИ

Порядок організації та проведення Всеукраїнської учнівської Інтернет-олімпіади з математики визначає Положення про Всеукраїнські учнівські Інтернет-олімпіади.

Організатором та координатором Інтернет-олімпіади з математики є Інститут інноваційних технологій і змісту освіти, на який покладається організаційно-методичне забезпечення проведення відповідного змагання.

Всеукраїнська учнівська Інтернет-олімпіада з математики проводиться Одеським обласним інститутом удосконалення вчителів спільно з управлінням освіти і науки Одеської облдержадміністрації під керівництвом Міністерства освіти і науки України з використанням передових інформаційних та телекомунікаційних технологій, зокрема шляхом передавання інформації через мережу Інтернет.

Основними завданнями Інтернет-олімпіад є:

- створення умов для рівного доступу до участі в масових інтелектуальних змаганнях учнів загальноосвітніх та професійно-технічних навчальних закладів, які проживають і навчаються у сільській місцевості та населених пунктах, віддалених від навчальних та наукових центрів;
- впровадження нових форм та методів пошуку обдарованих учнів та створення умов для розвитку їх здібностей;
- подальше вдосконалення системи роботи з обдарованими учнями;
- забезпечення системного і безперервного протягом року проведення інтелектуальних змагань для обдарованих учнів.

Інтернет-олімпіаду з математики проводять щороку у два етапи.

Перший (І) етап — відбірний. Проводять у травні–листопаді поточного року в заочній формі з обов’язковим використанням мережі Інтернет.

Другий (ІІ) етап — фінальний. Проводять в очній формі в місцях, визначених базовими організаціями. Фінальний етап Інтернет-олімпіад може проводитися в грудні поточного року або в січні–лютому наступного року.

Завдання обох турів заочних етапів змагань розміщують на сайті базового оргкомітету олімпіади Одеського обласного інституту вдосконалення вчителів: www//osvitaodessa.org.

Учасниками Інтернет-олімпіади з математики є учні 9–11 класів загальноосвітніх та професійно-технічних навчальних закладів усіх типів і форм власності. Обов’язковою умовою участі є доступ до електронної пошти або повний доступ до мережі Інтернет.

Кожен з учасників змагань повинен виконувати всі завдання самостійно.

Школярі, які виявили бажання взяти участь в Інтернет-олімпіаді, зобов’язані в зазначений термін зареєструватись на відповідному веб-сайті (Інтернет-сторінці).

Учасники олімпіад протягом зазначеного терміну надсилають свої роботи для перевірки журі на адресу оргкомітету: odessa-inst@ukr.net.

До II етапу Інтернет-олімпіади з математики допускаються лише учасники Інтернет-олімпіади, які в I етапі набрали прохідну кількість балів, установлену оргкомітетом та журі Інтернет-олімпіади з математики, а також переможці II етапу відповідної Інтернет-олімпіади минулого року, нагороджені дипломами I ступеня.

У II етапі Інтернет-олімпіади з математики учасники входять до складу команд, сформованих відповідно до адміністративно-територіального підпорядкування навчальних закладів, у яких вони навчаються.

Другий (очний) етап змагань проходить у грудні поточного року на базі Одеського обласного інституту вдосконалення вчителів.

Переможців Інтернет-олімпіад нагороджують дипломами I, II, III ступенів.

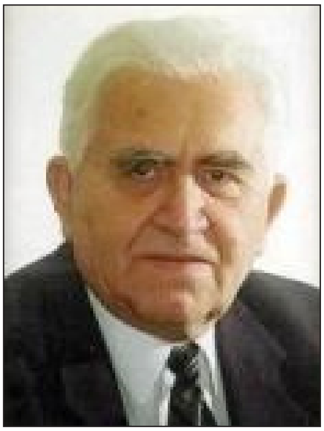
Решті учасників Інтернет-олімпіади з математики вручають дипломи Учасника Інтернет-олімпіади.

Переможцями Інтернет-олімпіади вважають учнів, які набрали найбільшу кількість балів в очному турі. Кращі з-поміж переможців Інтернет-олімпіади з математики, рекомендовані спільним рішенням оргкомітету і журі, за погодженням з Міністерством освіти і науки України можуть бути допущені до участі в IV етапі Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики поточного навчального року.

ВСЕУКРАЇНСЬКИЙ ТУРНІР ЮНИХ МАТЕМАТИКІВ ІМЕНІ ПРОФЕСОРА М. Й. ЯДРЕНКА

Турнір юних математиків проводять відповідно до Положення про Всеукраїнські учнівські олімпіади, турніри, конкурси з навчальних предметів, конкурси-захисти науково-дослідницьких робіт, олімпіади зі спеціальних дисциплін та конкурси фахової майстерності, затвердженого наказом Міністерства освіти і науки України від 22.09.2011 р. № 1099.

Ім'я Ядренка Михайла Йосиповича було присвоєно Всеукраїнському турніру юних математиків з метою увічнити пам'ять видатного українського математика.



Михайло Йосипович Ядренко (1932–2004) — член-кореспондент Національної академії наук України, лауреат Державної премії України, заслужений діяч науки і техніки України, доктор фізико-математичних наук, професор Київського національного університету імені Тараса Шевченка, засновник олімпіадного і турнірного руху юних математиків в Україні.

Головна мета турніру — створення умов для реалізації та розвитку творчих здібностей школярів, формування в учнів інтересу до прикладної математики, пошук учнів, схильних до наукової діяльності та здатних, застосовуючи знання з математики, знаходити оригінальні технічні рішення.

Турнір юних математиків є командним змаганням учнів у їх спроможності розв'язувати складні математичні проблемні завдання, подавати розв'язання в переконливій формі та захищати їх у науковій дискусії (математичному бої).

Хід математичного турніру, функції (права й обов'язки) дійових осіб регламентує Положення про Турнір Юних Математиків (ТЮМ).

Турнір юних математиків проводиться в три етапи:

I етап — заочний;

II етап — регіональний очний (міський, обласний);

III етап — Всеукраїнський очний.

Список задач I етапу формує організаційний комітет і надсилає учасникам не пізніше ніж 1 листопада. Ці завдання використовують для проведення турнірів на обох етапах. Інформація про термін і результати проведення І етапу змагань подається до організаційного комітету Всеукраїнського турніру юних математиків не пізніше ніж за місяць до проведення ІІ етапу.

Умови задач знаходяться на офіційній вебсторінці (www.ukrtym.bkogspot.com), друкуються в журналі «Математика».

На І етапі (заочному) в школах створюють творчі учнівські колективи, до роботи яких долучають учителів, студентів, аспірантів, які працюють над розв’язанням задач. Така співпраця дає змогу школярам успішно проводити науковий пошук, дає можливість самостійно ознайомитися з математичною літературою, принциповими математичними фактами, набути навичок колективної творчої праці.

Запорукою успіху є активна робота над розв’язуванням задач заочного туру. Одержавши відповідний комплект задач, необхідно ознайомити з ним якомога ширше коло учнів, відобразивши ідею турніру, зацікавити та захопити учнів. З цією метою доцільно провести тиждень математики, випустити спеціальну газету, оформити стенд. Учитель, проаналізувавши зміст і рівень задач, можливі напрямки дослідження, збирає всіх охочих випробувати свої сили в розв’язуванні запропонованих завдань.

Команди, які бажають узяти участь у ІІ етапі турніру юних математиків, після проведення першого етапу турніру подають заявки в організаційний комітет турніру, який приймає рішення щодо запрошення команд на змагання.

Турнір юних математиків є спільною діяльністю учнів, учителів, науковців на всіх етапах освітнього процесу з широким застосуванням активних та інтерактивних технологій навчання, що забезпечують максимальну самостійність та активність усіх учасників процесу навчання.

Особливості проведення турніру юних математиків

Турнір проводять за графіком, затвердженим організаційним комітетом турніру юних математиків.

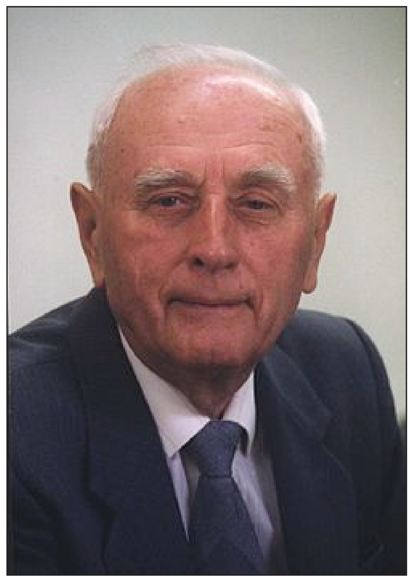
У турнірі юних математиків беруть участь команди, що складаються з 5–6 учнів загальноосвітніх навчальних закладів. Особистий склад команди не повинен змінюватись протягом усього турніру. Кожну команду очолює капітан, який є офіційним представником команди під час проведення змагань.

Команди беруть участь у наукових дискусіях — математичних боях.

Під час турніру проводяться не менш ніж три відбіркові математичні бої, півфінальні та фінальні бої, конкурси капітанів, математична розминка (жеребкування). Також організаційний комітет може передбачити рейтинговий півфінал, особисту та командну олімпіаду учасників турніру, інтелектуальний марафон.

ВСЕУКРАЇНСЬКИЙ ТУРНІР МАТЕМАТИЧНИХ БОЇВ ІМЕНІ АКАДЕМІКА НАН УКРАЇНИ І. І. ЛЯШКА

Починаючи з 2009 року Всеукраїнський турнір математичних боїв носить ім’я відомого українського математика, першого декана факультету кібернетики Київського університету, академіка Івана Івановича Ляшка.



Іван Іванович Ляшко (1922–2008) — академік НАН України, доктор фізико-математичних наук, професор, Заслужений діяч наук України.

Організатором і координатором турніру математичних боїв імені академіка НАН України І. І. Ляшка є Києво-Печерський ліцей № 171

«Лідер» за підтримки Міністерства освіти і науки України.

Мета турніру — залучення юних математиків до творчого змагання, підготовка юних українських математиків до олімпіад найвищих рівнів, сприяння встановленню професійних і дружніх контактів учасників турніру з викладачами, науковцями, найкращими студентами й аспірантами (в минулому переможцями міжнародних та всеукраїнських олімпіад) провідних українських університетів: Київського національного університету ім. Т. Г. Шевченка, Національного технічного університету України.

У турнірі можуть брати участь призери Всеукраїнської олімпіади з математики, учні провідних математичних навчальних закладів країни, а також усі охочі команди від шкіл чи регіонів та окремі учасники.

Змагання проводять у трьох вікових групах:

- молодшій лізі (учні 8-го та молодших класів);
- середній лізі (учні 9-го класу);
- старшій лізі (учні 10–11-х класів).

Під час турніру проводять:

- 4 тури математичних боїв;
- математичну карусель;
- командну олімпіаду;
- усну особисту олімпіаду.

Участь у турнірі беруть команди в складі 6 учнів (у кожній лізі).

З окремих школярів, які бажають брати участь у турнірі, якщо їхня школа чи регіон не можуть відрядити повну команду з 6 учнів, формують збірні команди для участі в змаганнях.

Щоб зареєструвати команду чи індивідуальних учасників, необхідно до 10 жовтня поточного року подати заявку на участь у конкурсі. (Про умови реєстрації можна дізнатися на сайті турніру.)

Заявку на участь можуть подавати викладачі шкіл та вищих навчальних закладів, керівники гуртків та факультативів, батьки та самі школярі.

ЗАОЧНА МАТЕМАТИЧНА ОЛІМПІАДА «МУДРАМАКІТРА»

Мудрамакітра — це організація школярів, студентів та науковців, яка має своєю метою зробити Україну однією з найсильніших країн у науковому світі.

Літня математична школа «Мудрамакітра» заснована 2005 року. Це літній табір, у якому школярі поєднують відпочинок з інтенсивним навчанням. У літній математичній школі панує атмосфера всезагального захоплення наукою — демонстрування цінності інтелектуальної праці, престижності освіти.

Пріоритетними є активні форми навчання: потрібні теоретичні результати учні здобувають «власноруч» через розв'язання ланцюжка доцільно підібраних і розташованих задач.

До літньої математичної школи «Мудрамакітра» приймають учнів, які закінчили 5–10 класи. Набір проводять на конкурсній основі за результатами заочної олімпіади «Мудрамакітра», умову якої можна знайти на сайті (*mudramakitra@ukr.net*). Поза конкурсом приймають призерів III, IV етапів Всеукраїнської олімпіади з математики поточного року та призерів Міжнародної олімпіади з математики, а також учнів, які здобули за результатами навчання в літній школі звання «Володаря задач» або 10–12 балів на іспиті (минулого року).

Час перебування в літній математичній школі «Мудрамакітра» — 18 днів.

Участь у заочній математичній олімпіаді «Мудрамакітра», заняття в літній математичній школі «Мудрамакітра» допомагають школярам досягти високих результатів в олімпіадному русі.

> Тільки завдяки математиці ми можемоповністю зрозуміти, що таке справжнянаука. Лише в математиці ми знаходимо найвищою мірою вираженупростоту й чіткість наукового законуй таку абстракцію, на яку тільки може спромогтись людський розум.
>
> **О. Конт**

■

СТРАТЕГІЯ І ТАКТИКА ШКІЛЬНИХ ОЛІМПІАД

Укладач Т. О. Циганок, м. Буринь, Сумська обл.

Предметні олімпіади — це змагання школярів із загальноосвітніх предметів, що сприяють підвищенню інтересу до вивчення шкільних дисциплін, вияву талановитих учнів. Олімпіада дозволяє учням перевірити і критично оцінити свої можливості, визначитися з вибором подальших шляхів освіти.

ПІДГОТОВКА МАТЕМАТИЧНОЇ ОЛІМПІАДИ В ШКОЛІ

Основні цілі шкільної олімпіади:

- розширення кругозору учнів;
- розвиток інтересу учнів до поглибленого вивчення математики;
- розвиток логічного мислення учнів, інтересу до розв'язування нестандартних задач;
- формування вміння практичного застосовування здобутих знань;
- відбір учнів, які проявили себе в математиці, для участі їх у районних (*міських*) олімпіадах і для організації індивідуальної роботи з ними;
- підбиття підсумків роботи гуртків і факультативів, активізація усіх форм позакласної роботи.

Разом із тим, олімпіади мають велике виховне значення. Вони привчають школярів до організованості, сприяють формуванню самостійності і гнучкості мислення, зміцнюють віру у власні сили, виховують наполегливість у досягненні мети і волю до перемоги.

Математичні олімпіади в школі проводять, як правило, окремо для кожної паралелі класів, починаючи з п'ятого класу.

Для проведення олімпіади в школі створюють оргкомітет. Зазвичай він складається із заступника директора — голови оргкомітету, голови шкільного методичного об'єднання вчителів математики, а також вчителів математики і представників учнівського самоврядування.

Для складання, перевірки й оцінювання робіт учасників олімпіади створюють журі.

ОСНОВНІ ВИМОГИ ДО ТЕКСТУ ШКІЛЬНОЇ ОЛІМПІАДИ

1. Доцільною кількістю задач в олімпіаді є від 4 до 7. Якщо кількість задач менша від 4, то можуть виникнути труднощі під час визначення переможців і призерів олімпіади. Розв'язувати більше ніж 7 задач учням складно.
2. Усі задачі в тексті олімпіади розташовують у порядку зростання їхньої трудності або складності.

Складність — це об'єктивна характеристика задачі, яку визначає її структура.

Складність задачі залежить від:

- обсягу інформації (кількості понять, тверджень), необхідної для розв'язування задачі;
- кількості даних у задачі;
- кількості зв'язків між даними;
- кількості можливих висновків з умови задачі;
- кількості безпосередніх висновків, необхідних для розв'язування задачі;
- загальної кількості кроків розв'язання, використаних аргументів тощо.

Трудність — суб'єктивна характеристика задачі, яка визначає «взаємовідносини» між задачею і учнем, що її розв'язує.

Трудність задачі залежить від:

- складності задачі (складна задача зазвичай є більш трудною для учнів);
- часу, який минув після вивчення матеріалу, що використовується в тексті задачі;
- практики розв'язування задач, подібних до поданої;
- рівня розвитку учня (задача, яка є трудною для середнього учня загальноосвітнього класу, може бути легкою для звичайного учня фізико-математичного класу);
- віку учня (задача, яка є трудною для п'ятикласника, може бути легкою для восьмикласника) тощо.

Існують різні формули для обчислення трудності задачі. Наприклад, $К_т = \frac{n}{p} \cdot 100\%$, де $К_т$ — коефіцієнт трудності, n — кількість учнів, які не розв'язали задачу, p — загальна кількість учасників олімпіади.

3. Серед перших задач тексту олімпіади мають бути 1–2 задачі, доступні більшості учнів, тобто їхня трудність має бути приблизно 10– 30 %. Це є необхідним, оскільки в шкільній олімпіаді беруть участь усі охочі. А учасник, який не розв'язав жодної задачі, втрачає впевненість у своїх силах, а інколи й інтерес до вивчення математики.
4. У середині тексту повинні бути 2–3 задачі підвищеної складності. Їх мають розв'язати приблизно половина учнів, тобто їхня трудність повинна становити 40–60%.
5. Останніми в тексті олімпіади мають бути 1–2 найбільш трудні задачі, такі, щоб їх розв'язали лише декілька учнів. Тобто, їхня трудність повинна становити 80–95%.
6. Завдання для олімпіади мають бути з різних розділів шкільного курсу математики, як правило, на матеріал, вивчений у цьому навчальному році або в другому семестрі попереднього.
7. Із метою зацікавленості учнів у відвідуванні гуртків можна використовувати задачі, аналогічні до розв'язаних на заняттях гуртка.
8. Однією із задач може бути задача, в умові якої фігурує рік проведення олімпіади.
9. З-поміж задач не повинно бути таких, які передбачають використання довгого викладання, громіздких формул, довідкових таблиць.
10. У текстах олімпіад для різних класів можуть бути й однакові задачі.

Остаточні тексти шкільних олімпіад потрібно затвердити на засідання шкільного методичного об'єднання вчителів математики, обговоривши кількість завдань, критерії оцінювання тощо.

ПРОВЕДЕННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ ОЛІМПІАДИ

У шкільних олімпіадах мають право брати участь усі охочі.

У зазначений час усі учасники олімпіади приходять у спеціально відведені класи, сідають по одному за стіл. На столах заздалегідь розкладають аркуші паперу, тексти олімпіад. Один з членів журі ознайомлює учнів із текстом олімпіади, кількістю балів за кожне завдання, часом виконання роботи, правилами оформлення розв'язань завдань. Після цього учасники олімпіади приступають до виконання завдань. Консультуватися з товаришами, використовувати довідникову літературу на олімпіаді заборонено.

За декілька хвилин до закінчення роботи член журі попереджає, що час вичерпано, і учасники олімпіади починають здавати роботи.

Після необхідної перерви (5–10 хв.) учні повертаються до класу, де один з членів журі аналізує розв'язання завдань олімпіади. Недоцільно переносити час аналізу розв'язань на заняття гуртка або на урок.

Після цього журі по кожному класу починає перевірку олімпіадних робіт. Бажано, щоб роботи кожної паралелі перевіряли не менше ніж 3 члени журі.

ОЦІНЮВАННЯ ОЛІМПІАДНИХ РОБІТ, ВИЗНАЧЕННЯ ПЕРЕМОЖЦІВ

Існує декілька підходів до оцінювання робіт. Можна, наприклад, усі завдання оцінювати однаковою кількістю балів або різною — залежно від складності (трудності) завдання.

Нехай деяке завдання оцінено в 5 балів. Тоді якщо завдання виконано бездоганно, учаснику ставлять 5 балів, якщо розв'язання правильне, але є недоліки, — 4 бали; якщо розв'язання неповне — 3 бали; якщо розв'язання неправильне, але є рух у правильному напрямку — 1–2 бали, якщо розв'язання неправильне або відсутнє — 0 балів.

Інколи завдання оцінюють не балами, а позначками: $+$, $\pm$, $\mp$, $-$, 0, які означають:

$+$ — правильне розв'язання;

$\pm$ — правильне розв'язання з недоліками;

$\mp$ — знайдено ідею розв'язання, але розв'язання не закінчено;

$-$ — розв'язання неправильне, але учень шукав його, хоча й не знайшов.

0 — відсутність розв'язання.

Після того як журі перевірить усі роботи, визначають переможців і призерів. Вони мають бути обов'язково, незалежно від того, скільки балів набрали учасники. (Якщо жоден з учасників не набрав максимальної кількості балів, то це означає, що текст олімпіадної роботи складено неправильно, із порушенням вимог.)

Отже, переможцем шкільної олімпіади є учень, який набрав найбільшу кількість балів.

З метою запобігання суб'єктивізму членів журі для визначення призерів олімпіади можна встановити спеціальні межі у відсотках від максимальної кількості балів.

Наприклад:

I місце присуджують усім учасникам олімпіади, які набрали більше 75% від максимальної кількості балів за всі завдання олімпіади.

II місце присуджують учасникам, які набрали від 50 до 75% від максимальної кількості балів.

III місце — учасникам, які набрали від 33 до 50%.

Після визначення переможців складають протоколи, які підписують усі члени журі.

Адміністрація школи разом з оргкомітетом і журі проводить нагородження. Бажано це робити в урочистій обстановці, наприклад, на загальній шкільній лінійці.

ДЕЯКІ РЕКОМЕНДАЦІЇ ЩОДО ФОРМ ПІДГОТОВКИ УЧНІВ ДО УЧАСТІ В ОЛІМПІАДАХ

УРОКИ

Відомо, що найбільших успіхів в олімпіадах досягають учні з нестандартним, творчим мисленням, високими математичними здібностями, математично обдаровані. Навчати і розвивати таких учнів тільки в позаурочний час неможливо. Тому потрібно знаходити можливість на уроці поряд з освітніми задачами розв'язувати і задачі розвитку учнів.

Бажано навчати учнів різним підходам до несподіваних за формулюванням задач, умінню застосовувати евристичні методи. Для роботи з найбільш сильними учнями не бажано пропонувати надто прості й надто складні задачі. Вони не впливають на інтелектуальний розвиток учнів. Більше уваги на уроці доцільно приділяти розвитку окремих якостей мислення, прийомів розумової діяльності, особливо розв'язуванню задач на аналіз.

Домашнє завдання доцільно пропонувати диференційоване. Як домашнє завдання, розраховане на деякий час (наприклад, на тиждень), можна пропонувати домашні олімпіади. Розв'язуючи задачі домашніх олімпіад, учні можуть консультуватися з друзями, батьками, шукати розв'язання в доступній їм літературі.

Але все ж таки робота із сильними учнями — штучна. Тому без індивідуальної роботи в позаурочний час обійтися неможливо.

ГУРТКИ

Гуртки є основною формою роботи з найбільш здібними учнями. Тільки тут можна розглянути особливі типи задач, які інколи називають олімпіадними — на застосування принципу Діріхле, розфарбування, математичної індукції, інваріантів тощо.

Звичайно, не можна всі заняття гуртка присвячувати розв'язуванню таких задач. Більшість занять має відбуватися за планом згідно з програмою. Але форми проведення занять гуртка можуть бути різними, зокрема, інтелектуальні змагання, математичні турніри, конкурси, у тому числі олімпіади.

ПРО ЩО ВАРТО ПАМ'ЯТАТИ, РОЗВ'ЯЗУЮЧИ ОЛІМПІАДНІ ЗАДАЧІ

1. Потрібно уважно прочитати умову задачі й перевірити її на правдоподібність.
2. Під час розв'язування задачі потрібно розглянути всі можливі варіанти постановки задачі.
3. Прочитайте повний запис умови завдання. Скорочений запис умови може призвести до помилки.
4. Необхідно переконатися, що здобуті результати є правдоподібними.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Сарана О. А.* Математичні олімпіади: просте і складне поруч. — Тернопіль : Навчальна книга — Богдан, 2011.
2. *Маланюк М. П., Лукавецький В. І.* Олімпіади юних математиків. — К. : Радянська школа, 1977.

ОЛІМПІАДИ СУМЩИНИ З МАТЕМАТИКИ: II ЕТАП

Укладач Т. В. Свєтлова, методист математики ОІППО, м. Суми

Інтелектуальні математичні змагання, зокрема Всеукраїнська учнівська олімпіада з математики як форма позакласної роботи в умовах сучасної школи є дієвим засобом формування мотивації до навчання, підвищення пізнавальної активності, поглиблення й розширення знань із математики, підтримки й стимулювання творчо обдарованої учнівської молоді, створення умов для збереження й розвитку інтелектуального потенціалу України.

Пропонуємо варіанти завдань II етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики в Сумській області та їх повні розв'язання. Сподіваємось, що ці матеріали стануть у пригоді як учням — для першого ознайомлення з нестандартними задачами евристичного характеру, так і вчителям — для проведення позакласних занять із математики, підготовки учнів до участі в математичних олімпіадах.

Автор висловлює подяку рецензентам: О. С. Чашечниковій, професору кафедри математики СумДПУ імені А. С. Макаренка, доктору педагогічних наук, К. В. Ніколаєвій, кандидату фізико-математичних наук, доценту кафедри методики початкової та природничо-математичної освіти Сумського ОІППО.

ЗАВДАННЯ II ЕТАПУ ВСЕУКРАЇНСЬКОЇ ОЛІМПІАДИ З МАТЕМАТИКИ

ВАРІАНТ 1

6 КЛАС

1. В озері водяться карасі, окуні й щуки. Два рибалки спіймали разом 70 рибин, причому $\frac{5}{9}$ улову першого рибалки становили карасі, а $\frac{7}{17}$ улову другого — окуні. Скільки щук спіймав кожен із рибалок, якщо обидва рибалки спіймали порівну карасів і порівну окунів?
2. На годиннику перша година дня. Знайдіть найближчий момент часу, коли хвилинна й годинникова стрілка збігаються.
3. Обчисліть суму:
$$\frac{1}{10\cdot 11}+\frac{1}{11\cdot 12}+\frac{1}{12\cdot 13}+\ldots+\frac{1}{19\cdot 20}.$$
4. Коли в день народження вчителя математики учні запитали, скільки йому виповнилося років, він відповів, що коли до року його народження додати теперішній рік, потім відняти рік, коли йому виповнилося 20 років, і відняти рік, коли йому виповнилося 30 років, то в результаті буде 16. Скільки років виповнилося вчителеві?
5. В одній із вершин куба сидить муха. Чи може вона проповзти всіма його ребрами рівно по одному разу й повернутися в початкову вершину?
6. На острові Контрастів живуть лицарі й брехуни. Лицарі завжди говорять правду, а брехуни завжди брешуть. Деякі мешканці острова зробили заяву, що на острові парна кількість лицарів, а решта зробили заяву, що на острові непарна кількість брехунів. Чи може кількість мешканців острова дорівнювати 2019?

7 КЛАС

1. Через скільки хвилин після того, як годинник показував 9-ту годин, хвилинна стрілка наздожене годинникову?
2. У давньогрецькому папірусі з-поміж різних повідомлень є розклад дробу на суму дробів із чисельником 1: $\frac{1}{73}=\frac{1}{60}+\frac{1}{219}+\frac{1}{292}+\frac{1}{x}$, де один зі знаменників замінено на x. Знайдіть цей знаменник.
3. Відмінники Леся та Андрійко впродовж семестру одержали з математики лише оцінки «12», «11» і «10». Усього вони одержали

51 оцінку на двох, причому $\frac{4}{9}$ від усіх Лесиних оцінок склали оцінки «12», а $\frac{3}{8}$ усіх Андрійкових оцінок були оцінки «11». Чому дорівнює середнє арифметичне усіх оцінок Лесі, якщо відомо, що оцінок «12» і «11» у Лесі та Андрійка було порівну?

4. Із мішка в контейнер пересипали спочатку 25 % піску, що був у мішку, потім ще 5 кг, а потім ще 10 % від залишку. При цьому кількість піску в контейнері збільшилася на 6 %. Скільки піску було в мішку, якщо в контейнері спочатку було 400 кг піску?
5. Розв'яжіть рівняння $\left||x|-2\right|=x$.
6. Круг розбито на шість секторів, у яких стоять 3 чорних і 3 білих шашки, по одній у кожному секторі. За один хід дозволяється пересунути одну чорну і одну білу шашки на один сектор у протилежних напрямках. Чи можна за декілька ходів зібрати всі шашки в одному секторі?

8 КЛАС

1. Микола і Степан влаштували змагання з бігу навколо стадіону. Кожен із них біжить зі сталою швидкістю. Микола пробігає 5 кругів за 12 хвилин, а Степан — 3 круги за 10 хвилин. Вони стартують одночасно. Яку найменшу кількість кругів хлопцям потрібно пробігти, щоб знову одночасно перетнути стартову лінію?
2. Доведіть, що число $2015\cdot 2016\cdot 2017\cdot 2018+1$ є квадратом натурального числа.
3. В опуклому чотирикутнику *ABCD* діагоналі перетинаються в точці *O*. Відомо, що трикутники *ABC* і *ABD* мають однакові периметри. Також однакові периметри мають трикутники *ACD* і *BCD*. Доведіть, що відрізки *AO* і *BO* рівні.
4. Турист пройшов половину шляху між пунктами *A* і *B* зі швидкістю 4 км / год, а решту шляху до пункту *B* — зі швидкістю 6 км / год. На зворотному шляху від *B* до *A* $\frac{2}{3}$ відстані він подолав зі швидкістю, що дорівнює середній швидкості руху в напрямку від *A* до *B*, а решту відстані — зі швидкістю 5 км / год. Знайдіть відстань між пунктами *A* і *B*, якщо відомо, що на зворотний шлях турист витратив на 2 хвилини менше, ніж на весь шлях від *A* до *B*.
   Підказка. Середня швидкість дорівнює відношенню відстані від *A* до *B* до всього часу руху в напрямку від *A* до *B*.
5. У кожній клітинці дошки розміром 9×9 сидить жук. За сигналом кожний жук переповз в одну із сусідніх клітинок по діагоналі. При цьому може виявитися, що в деяких клітинках буде по кілька жуків, а деякі клітинки будуть порожніми. Знайдіть найменшу кількість порожніх клітинок.
6. Скільки розв'язків має рівняння $\frac{|x+2|}{|x|-2}=|x|+a$ залежно від параметра a?

9 КЛАС

1. Побудуйте графік функції $y=\dfrac{\frac{|x|}{x}-|x|x}{\sqrt{x^2}-|x|^0}$.
2. Наталя пробігає навколо лугу за 10 хвилин, а її молодша сестра Іринка — за 15 хвилин. Вони стартували одночасно з лінії старту й побігли зі сталими швидкостями в протилежних напрямках. Через скільки хвилин вони зустрілися вперше? Через скільки хвилин вони вперше зустрілися на лінії старту?
3. Знайдіть суму
$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}.$$
4. У крузі проведені хорди *AB* і *AC*. Бісектриса кута *BAC* перетинає коло в точці *D*. Із точки *D* проведений перпендикуляр *DE* на пряму *AB*. Доведіть, що $AE=0{,}5(AB+AC)$.
5. Замок має форму рівностороннього трикутника зі стороною завдовжки 36 м. Він розбитий на 16 трикутних залів зі сторонами завдовжки 9 м. Між сусідніми залами є двері. Доведіть, що якщо людина захоче пройти по замку, побувавши в кожній залі не

більше одного разу, то вона зможе оглянути не більше 13 залів.

6. Визначте кількість розв'язків рівняння $\left|1-\sqrt{|x+3|}\right|=a$ залежно від параметра a.

10 КЛАС

1. Розв'яжіть рівняння $\left|\dfrac{x}{x-1}\right|+|x|=\dfrac{x^2}{|x-1|}$.
2. Батько й син катаються на ковзанах по колу зі сталими швидкостями в одному напрямку. Час від часу батько обганяє сина. Після того, як син змінив напрямок руху, вони стали зустрічатися в 5 разів частіше, ніж під час руху в одному напрямку. Знайдіть відношення швидкостей батька й сина.
3. Обчисліть суму:
$$\frac{1}{1\cdot3\cdot5}+\frac{1}{3\cdot5\cdot7}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}.$$
4. Опуклий чотирикутник $ABCD$ вписаний у коло, діаметром якого є відрізок AC. Точки H і K є основами перпендикулярів, проведених із точки B до прямих AC і AD відповідно. Доведіть, що пряма KH ділить відрізок BD навпіл.
5. Мишка гризе куб, складений із 27 одиничних кубиків. З'ївши один кубик, вона переходить до сусіднього з ним через спільну грань. Чи може мишка з'їсти таким способом увесь куб, крім центрального кубика?
6. Відомо, що додатні дійсні числа x, y, z задовольняють нерівність $3x+4y+6z\le 12$. Доведіть, що $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\le 3$.

11 КЛАС

1. Миколка прийшов у парк відпочинку й вирішив подивитися на Суми з оглядового колеса. О 10 годині він сів у кабінку № 22, проїхав кілька обертів, вийшов, з'їв морозиво й о 10 годині 40 хвилин знову сів, але вже в кабінку № 4. Зробивши оберт, вийшов прогулятися й знову повернувся, сівши об 11-й годині в кабінку № 25. Скільки за цих умов могло бути кабінок в оглядовому колесі, якщо вони пронумеровані по колу?
2. При якому найменшому натуральному n вираз $n^3+n^2+337n+337$ ділиться націло на 2018?
3. Розв'яжіть рівняння $2019^x-2018^x=1$.
4. Якого найменшого значення може набувати вираз $\sqrt{x^2-x+1}+\sqrt{x^2-x\sqrt{3}+1}$?
5. При яких значеннях параметра a рівняння $x^3-7x^2+ax-8=0$ має три дійсних корені, що утворюють геометричну прогресію?
6. На столі лежать цукерки. За один хід Петрик може забрати зі столу кілька з них. Першим ходом він забирає рівно одну цукерку, а кожного наступного ходу може забрати або стільки ж цукерок, як під час попереднього ходу, або вдвічі більше. За яку найменшу кількість ходів Петрик зможе забрати зі столу рівно 2011 цукерок?

РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАВДАНЬ ВАРІАНТА 1

6 КЛАС

1. Кількість рибин, що спіймав перший рибалка повинна ділитися на 9, а кількість рибин, що спіймав другий рибалка, — на 17. Оскільки їхня сума дорівнює 70, то це можливо для чисел 36 і 34 відповідно. Тоді дістанемо, що обидва спіймали по 20 карасів і по 14 окунів. Отже, перший рибалка спіймав 2 щуки, а другий не спіймав жодної.
Відповідь. Перший рибалка спіймав 2 щуки, другий не спіймав жодної.
2. На першу годину дня кут між годинниковою та хвилинною стрілками становить 30°. Хвилинна стрілка наближається до годинникової зі швидкістю $360-30=330$ (град / год).
Тому хвилинна стрілка збіжиться з годинниковою через $\dfrac{30}{330}=\dfrac{1}{11}$ (год) $=5\dfrac{5}{11}$ (хв), тобто о 1-ій год 5 хв.
Відповідь. О 1 години 5хв. $27\dfrac{3}{11}$ с.
3. Замінимо кожен із доданків суми рівною йому різницею:
$$\frac{1}{10\cdot11}+\frac{1}{11\cdot12}+\frac{1}{12\cdot13}+\ldots+\frac{1}{19\cdot20}=$$
$$=\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{11}\right)+\left(\frac{1}{11}-\frac{1}{12}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{19}-\frac{1}{20}\right)=$$

$=\frac{1}{10}-\frac{1}{20}=\frac{2-1}{20}=\frac{1}{20}.$

Відповідь: $\frac{1}{20}$.

4. Позначимо через x рік народження вчителя математики, y — вік учителя математики. Тоді за умовою задачі маємо:
$x+(x+y)-(x+20)-(x+30)=16$, звідки $y=66$.
Відповідь. 66 років.

5. Оскільки до кожної вершини підходять 3 різних шляхи, муха не зможе переповзти всіма його ребрами рівно по одному разу й повернутися в початкову вершину.
Відповідь. Ні.

6. Оскільки 2019 — число непарне, то або кількість лицарів парна, а кількість брехунів непарна, або кількість лицарів непарна, а кількість брехунів парна. У першому випадку і всі, хто зробив першу заяву, — лицарі, і всі, хто зробив другу, — також лицарі, що неможливо, бо на острові є хоча б один брехун. Аналогічне протиріччя одержуємо й у другому випадку.
Відповідь. Не може.

7 КЛАС

1. Позначимо довжину кола годинника через 1. Швидкість хвилинної стрілки — 1 коло / год, швидкість годинникової — $\frac{1}{12}$ кола / год. За умовою, відстань між кінцями хвилинної й годинникової стрілок становить $\frac{3}{4}$. Оскільки рух здійснюється в одному напрямку, то різниця швидкостей становить $1-\frac{1}{12}=\frac{11}{12}$ кола / год.

Отже, час $\frac{3}{4}:\frac{11}{12}=\frac{9}{11}$ год = $\frac{540}{11}$ хв = $49\frac{1}{11}$ хв.

Відповідь: $49\frac{1}{11}$ хв.

2. Виконаємо перетворення:
$\frac{1}{x}=\frac{2}{73}-\frac{1}{60}-\frac{1}{219}-\frac{1}{292}=$
$=\frac{2}{73}-\frac{1}{73\cdot 3}-\frac{1}{73\cdot 4}-\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}=$
$=\frac{2\cdot 60-20-15-73}{73\cdot 3\cdot 4\cdot 5}=\frac{1}{365}$, $x=365$.
Відповідь. 365.

3. Із умови випливає, що кількість оцінок у Лесі становить $9n$, а у Андрійка — $8k$, де n і k — цілі невід'ємні числа. Оскільки загальна кількість оцінок становить 51, то маємо рівняння $9n+8k=51$. Шляхом перебору знаходимо, що це рівняння задовольняють лише числа $n=3$, $k=3$. Тобто, у Лесі було 27 відмінних оцінок, а в Андрійка — 24. Тоді в Лесі та Андрійка по $\frac{4}{9}\cdot 27=12$ оцінок «12» та по $\frac{3}{8}\cdot 24=9$ оцінок «11». Таким чином, у Лесі разом 27 оцінок, серед яких 12 оцінок «12» та 9 оцінок «11», тобто оцінок «10» у неї 6. Зазначимо, що в Андрійка кількість оцінок «10» дорівнює 3. Отже, середнє арифметичне всіх оцінок Лесі дорівнює $\frac{12\cdot 12+9\cdot 11+6\cdot 10}{27}=\frac{303}{27}=\frac{101}{9}=11\frac{2}{9}$.

Відповідь. $11\frac{2}{9}$.

4. Нехай у мішку було x кг піску, тоді в контейнер пересипали
$0{,}25x+5+(x-5-0{,}25x)\cdot 0{,}1=0{,}325x+4{,}5$ кг піску.
За умовою це дорівнює $400\cdot 0{,}06=24$ кг.
Із рівняння $0{,}325x+4{,}5=2{,}4$ знаходимо $x=60$.
Відповідь. 60 кг.

5. Із умови $||x|-2|=x$ випливає, що $x\geq 0$, тобто $|x|=x$, $|x-2|=x$. Тоді $x-2=-x$ або $x-2=x$. Із першого рівняння знаходимо $x=1$, а друге рівняння коренів не має.
Відповідь. 1.

6. Пронумеруємо сектори від 1 до 6. Нехай S — сума секторів, у яких стоять шашки з урахуванням кратності.
Спочатку $S=1+2+3+4+5+6=21$. Простежимо за перетвореннями суми після кожного кроку: сума S або не змінюється, або змінюється на 6. Отже, сума була й залишатиметься непарною; інваріантом у такій моделі є непарність суми. Якщо б

удалося зібрати всі фішки в одному секторі, то $S=6k$, де k — номер сектора, тобто сума мала б бути парною. Протиріччя, зібрати всі фішки в одному секторі не можна.

Відповідь. Не можна.

8 КЛАС

1. Нехай Микола й Степан перетнули стартову лінію одночасно через x хвилин після старту. Тоді x — найменше натуральне число, при якому

$x:\frac{12}{5}=\frac{5x}{12}$ і $x:\frac{10}{3}=\frac{3x}{10}$ — цілі числа.

Ураховуючи, що 5 і 12 та 3 і 10 — пари взаємно-простих чисел, доходимо висновку, що $x=\text{НСК}(10;12)=60$.

Тоді загальна кількість кругів дорівнює

$\frac{5\cdot 60}{12}+\frac{3\cdot 60}{10}=25+18=43.$

Відповідь. 43.

2. Нехай $2015=x$.

Тоді

$$x(x+1)(x+2)(x+3)+1=(x^2+3x)(x^2+3x+2)+1=$$

$$=(x^2+3x)^2+2(x^2+3x)+1=(x^2+3x+1)^2.$$

Отже,

$$2015\cdot 2016\cdot 2017\cdot 2018+1=(2015^2+3\cdot 2015+1)^2$$

що й потрібно було довести.

3. Запишемо рівності, що випливають із рівності периметрів трикутників ABC і ABD, ACD і BCD:

$AB+AC+CB=AB+BD+DA$, звідки

$$AC+CB=BD+DA, \qquad (1)$$

$AC+CD+DA=BC+CD+DB$, звідки

$$AC+DA=BC+DB. \qquad (2)$$

Віднявши з рівності (1) рівність (2), дістанемо: $CB-DA=DA-BC$, або $BC=AD$.

Додавши рівності (1) і (2), дістанемо $2AC+CB+DA=2BD+DA+BC$, або $AC=BD$ (*рис. 1*). Отже, $\Delta ACD=\Delta BCD$, $\Delta BDA=\Delta ABC$ (за трьома сторонами), тому $\angle ACB=\angle BDA$, $\angle CAD=\angle CBD$, тобто $\Delta AOD=\Delta BOC$ (за стороною і прилеглими кутами), отже $AO=BO$, що й потрібно було довести.

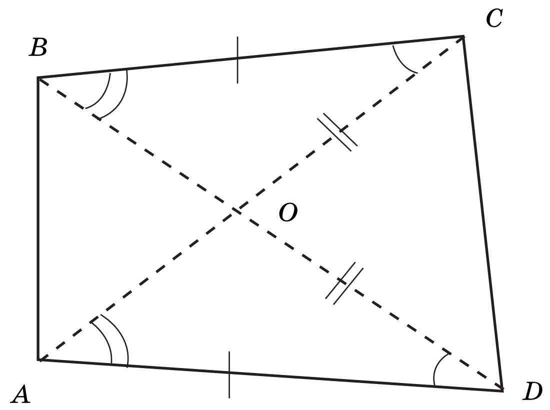


Рис. 1

4. Позначимо половину шляху через x км, тоді час руху від A до B дорівнює

$\frac{x}{4}+\frac{x}{6}=\frac{5x}{12}$ годин.

Середня швидкість становить

$2x:\frac{5x}{12}=4{,}8$ км / год.

Маємо рівняння:

$\frac{2x}{4{,}8}-\frac{\frac{4x}{3}}{4{,}8}-\frac{\frac{2x}{3}}{5}=\frac{1}{30}$, звідки $x=6$.

Тоді $2x=12$.

Відповідь. 12 км.

5. Якщо поданий квадрат поділити на білі та чорні смуги, то утвориться 5 білих смуг (45 клітинок) та 4 чорні (36 клітинок). Кожний жук, який сидить на білих клітинках, переповзе на чорні, і кожний жук, який сидить на чорних клітинках, переповзе на білі. Отже, оскільки є 36 жуків на чорних клітинках, то вони можуть зайняти лише 36 білих клітинок. Залишається незаповненими 9 клітинок.

Відповідь. 9.

6. Побудуємо в одній системі координат графіки функцій $y=\frac{|x+2|}{|x|-2}$, $y=|x|+a$. Областю визначення функції $y=\frac{|x+2|}{|x|-2}$ є множина всіх дійсних чисел, крім 2 та -2. Запишемо функцію $y=\frac{|x+2|}{|x|-2}$ у вигляді:

$$y=\begin{cases}\dfrac{-(x+2)}{-x-2}, & x<-2,\\ \dfrac{x+2}{-x-2}, & -2<x<0, \text{ або}\\ \dfrac{x+2}{x-2}, & x\ge 0,\ x\ne 2;\end{cases}$$

$$y=\begin{cases}1, & x<-2,\\ -1, & -2<x<0,\\ 1+\dfrac{4}{x-2}, & x\ge 0,\ x\ne 2;\end{cases}$$

Графік функції $y=|x|+a$ дістанемо з графіка функції $y=|x|$ шляхом паралельного перенесення на a одиниць уздовж осі Oy.

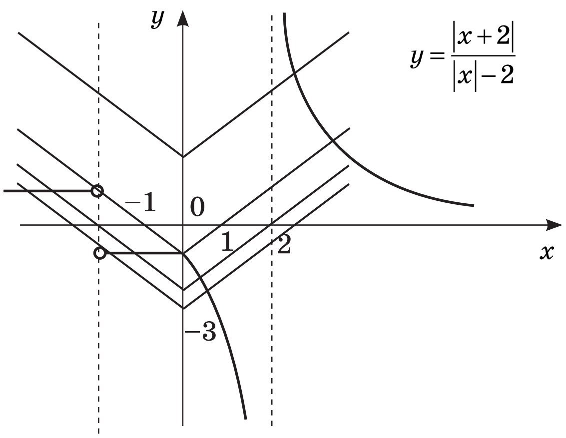


Рис. 2

Скориставшись графіком (*рис. 2*), знаходимо:

1) якщо $a>-1$, графіки функцій $y=\dfrac{|x+2|}{|x|-2}$, $y=|x|+a$ перетинаються в одній точці, при цьому рівняння має один розв'язок;

2) якщо $a=-1$, графіки функцій $y=\dfrac{|x+2|}{|x|-2}$, $y=|x|+a$ мають дві спільні точки і рівняння має два розв'язки;

3) якщо $-3<a<-1$, то графіки функцій $y=\dfrac{|x+2|}{|x|-2}$, $y=|x|+a$ перетинаються в чотирьох точках, рівняння має чотири розв'язки;

4) якщо $a\le -3$, у графіків функцій $y=\dfrac{|x+2|}{|x|-2}$, $y=|x|+a$ є три спільні точки і рівняння має три розв'язки.

Відповідь. При $a>-1$ рівняння має один розв'язок, при $a=-1$ — два розв'язки, при $-3<a<-1$ — чотири розв'язки, при $a\le -3$ — три розв'язки.

9 КЛАС

1. Областю визначення функції є всі дійсні числа, крім -1, 0, 1.

Якщо $x\ge 0$, то $y=\dfrac{\dfrac{|x|}{x}-|x|x}{\sqrt{x^2}-|x|^0}=\dfrac{1-x^2}{x-1}=-x-1.$

Якщо $x<0$, то $y=\dfrac{\dfrac{|x|}{x}-|x|x}{\sqrt{x^2}-|x|^0}=\dfrac{x^2-1}{-x-1}=-x+1.$

Графік функції зображено на рисунку 3.

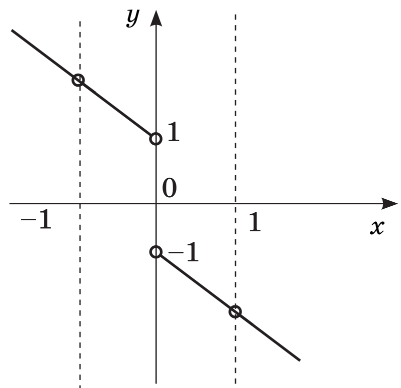


Рис. 3

2. Наталя біжить зі швидкістю $u=\dfrac{1}{10}$ круга / хв, а Іринка — зі швидкістю $v=\dfrac{1}{15}$ круга / хв. Разом вони подолають круг за час $t=\dfrac{1}{u+v}$. Підставивши в цю формулу значення u і v, отримаємо $t=6$ хв. Отже, сестри зустрічатимуться кожні 6 хвилин, а на лінії старту зустрінуться, коли кожна з них на момент зустрічі пробіжить цілу кількість кругів. Отже, відповідь на друге запитання

зводиться до знаходження найменшого натурального числа n, при якому $\frac{6n}{10}=\frac{3n}{5}$ і $\frac{6n}{15}=\frac{2n}{5}$ є цілими числами. Таке $n=5$, а шуканий час — 30 хв.

Відповідь. 6 хв, 30 хв.

3. Кожен із доданків можна подати у вигляді піврізниці двох дробів:

$$\frac{1}{1\cdot2\cdot3}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1\cdot2}-\frac{1}{2\cdot3}\right),$$

$$\frac{1}{2\cdot3\cdot4}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\cdot3}-\frac{1}{3\cdot4}\right),\ \ldots$$

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right).$$

Тоді $\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1\cdot2}-\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3}-\frac{1}{3\cdot4}+\right)\ldots+$$

$$+\left(\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1\cdot2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{(n+1)(n+2)-2}{2(n+1)(n+2)}=$$

$$=\frac{n^2+3n}{4(n+1)(n+2)}.$$

Відповідь. $\frac{n^2+3n}{4(n+1)(n+2)}$.

4. Розглянемо випадки:
   1) точка E збігається з точкою B;
   2) $\angle B$ — гострий;
   3) $\angle B$ — тупий.

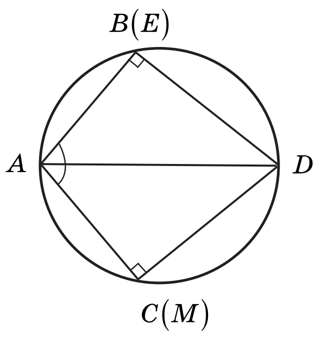


Рис. 4

1) Точка E збігається з точкою B (*рис. 4*). Проведемо перпендикуляр DM до прямої AC. Чотирикутник $ABCD$ — вписаний, тому сума величин протилежних кутів дорівнює 180°. Якщо точка E збігається з точкою B, то $\angle B=90°$, отже, $\angle C=90°$. Тому $\Delta ABD=\Delta CAD$ і $AE=0{,}5(AB+BC)$.

2) Нехай $\angle B$ — гострий. Тоді $\angle ACD$ — тупий, точка M лежить на продовженні сторони AC, а точка E — на стороні AB (*рис. 5*).

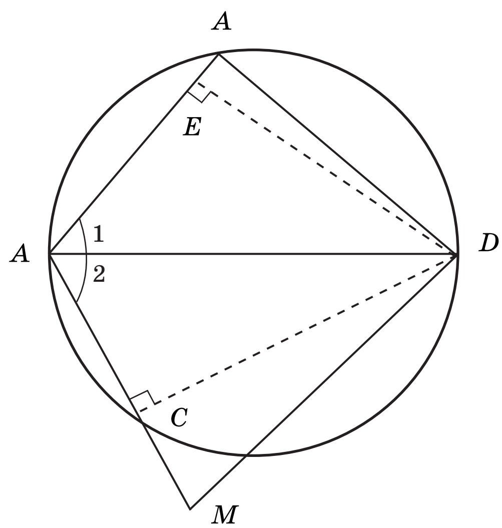


Рис. 5

$\Delta ADE=\Delta ADM$ за гіпотенузою й гострим кутом: AD — спільна, $\angle1<\angle2$, оскільки AD — бісектриса. Тому $AE=AM$, $DE=DM$. AD — бісектриса, отже, $\cup BD=\cup DC$ і $BD=DC$. Тоді $\Delta BED=\Delta CMD$ (за катетом і гіпотенузою), тому $BE=CM$, отже, справедливі співвідношення:

$AE=AB-BE=AB-CM$,

$AE=AM=AC+CM$.

Додавши ці рівності, дістанемо:

$2AE=AB+AC$, звідки $AE=0{,}5(AB+AC)$.

3)Якщо $\angle B$ — тупий, доведення аналогічне.

5. Розфарбуємо зали, як показано на рис. 6. Під час обходу людина почергово переходитиме із зафарбованих до незафарбованих залів, кількість яких відповідно становить 10 і 6. Тому людина може оглянути

не більше ніж 7 зафарбованих, отже, разом не більше ніж $7+6=13$ усіх залів. Обхід 13 залів можливий.

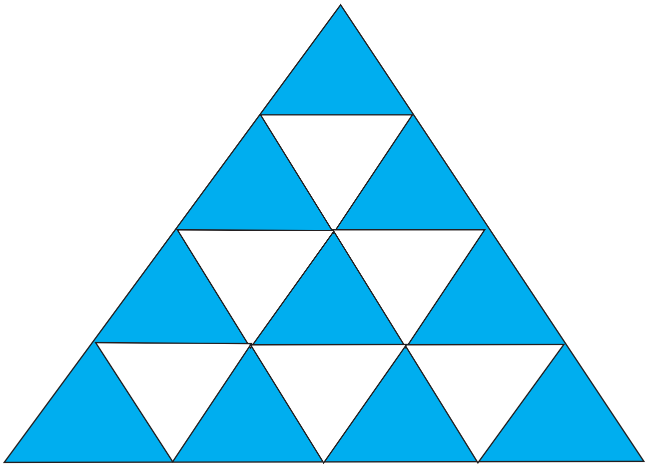


Рис. 6

6. $\left|1-\sqrt{|x+3|}\right|=a.$

1) якщо $a<0$, рівняння розв'язків не має.

2) якщо $a=0$, то $1-\sqrt{|x+3|}=0$, $\sqrt{|x+3|}=1$, $|x+3|=1$, $x_1=-2$, $x_2=-4$.

3) якщо $a>0$, а то:

а) $1-\sqrt{|x+3|}=a$ або б) $1-\sqrt{|x+3|}=-a$.

Розглянемо ці рівняння:

а) рівняння $\sqrt{|x+3|}=1-a$ має корені при $a-1\geq 0$, тобто $0<a\leq 1$, причому, якщо $a=1$, то рівняння має один корінь $x=-3$; якщо $a\in(0;1)$, то рівняння має два корені: $|x+3|=1-2a+a^2$, $x_1=a^2+2a-2$, $x_2=-a^2+2a-4$.

б) рівняння $\sqrt{|x+3|}=1+a$ має два корені при будь-якому $a>0$, причому $x_1=-2+2a+a^2$, $x_2=a^2-2a-4$.

Відповідь. При $a<0$ рівняння розв'язків не має; при $a=0$ — два корені; при $a\in(0;1)$ — чотири корені; при $a=1$ — три корені; при $a\in(1;+\infty)$ — два корені.

10 КЛАС

1. $$\left|\frac{x}{x-1}\right|+|x|=\frac{x^2}{|x-1|}. \qquad (1)$$

Запишемо рівняння (1) у вигляді:

$$\left|\frac{x}{x-1}\right|+|x|=|x|\cdot\frac{|x|}{|x-1|}.$$

Нехай $\left|\frac{x}{x-1}\right|=a$, $|x|=b$.

Тоді рівняння (1) набуває вигляду $a+b=ab$, звідки $a=\frac{b}{b-1}$, тобто $\left|\frac{x}{x-1}\right|=\frac{|x|}{|x|-1}$, або $\frac{|x|}{|x-1|}=\frac{|x|}{|x|-1}$.

Очевидно, що рівняння має корінь $x=0$. Якщо $x\neq 0$, то обидві частини рівняння можна поділити на $|x|$: $\frac{1}{|x-1|}=\frac{1}{|x|-1}$, звідки $|x-1|=|x|-1$.

Це рівняння має корені за умови $|x|>1$.

Піднесемо обидві частини рівняння $|x-1|=|x|-1$ до квадрата, дістанемо $|x|=x$, що виконується при всіх $x\geq 0$. Урахувавши умову $|x|>1$, маємо $x\in(1;+\infty)$.

Відповідь. $\{0\}\cup(1;+\infty)$.

2. Нехай u кругів / хв — швидкість батька, v кругів / хв — швидкість сина. Під час руху в одному напрямку їхня відносна швидкість становить $u-v$, а під час руху в протилежних напрямках — $u+v$. Оскільки вони стали зустрічатися в 5 разів частіше, то $\frac{u+v}{u-v}=5$, $\frac{\frac{u}{v}+1}{\frac{u}{v}-1}=5$, звідки $\frac{u}{v}=\frac{3}{2}$.

Відповідь. $\frac{3}{2}$.

3. Кожен із доданків суми

$$\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5}+\frac{1}{3\cdot 5\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}$$

можна подати у вигляді піврізниці двох дробів:

$$\frac{1}{1\cdot3\cdot5}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1\cdot3}-\frac{1}{3\cdot5}\right),$$

$$\frac{1}{3\cdot5\cdot7}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3\cdot5}-\frac{1}{5\cdot7}\right),\ldots$$

$$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}=$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}-\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}\right).$$

Тоді $\frac{1}{1\cdot3\cdot5}+\frac{1}{3\cdot5\cdot7}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}=$

$$=\frac{1}{4}\left(\begin{array}{l}\frac{1}{1\cdot3}-\frac{1}{3\cdot5}+\frac{1}{3\cdot5}-\frac{1}{5\cdot7}+\ldots+\\+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}-\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}\end{array}\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1\cdot3}-\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}\right)=\frac{1}{4}\cdot\frac{(2n+1)(2n+3)-3}{3(2n+1)(2n+3)}=$$

$$=\frac{4n^2+8n}{12(2n+1)(2n+3)}.$$

Відповідь. $\frac{4n^2+8n}{12(2n+1)(2n+3)}$.

4. Нескладно помітити, що пряма KH обов'язково перетинає півпряму DC. Нехай F — їхня спільна точка. Тоді точки A, B, H, K належать одному колу, при цьому $\angle BAH=\angle BKH=\angle HBC=\angle HFD$. Отже, точки B, H, F, C також належать одному колу, тому $\angle BFD=90°$. Таким чином, чотирикутник $DKBF$ — прямокутник, тому пряма KH ділить відрізок BD навпіл, що й потрібно було довести.

5. Розфарбуємо кубики в два кольори так, щоб кожні два сусідні кубики, що мають спільну грань, були різного кольору. Тоді кубиків, колір яких збігається з кольором центрального кубика, буде 13, а кубиків іншого кольору — 14. Дотримуючись умови задачі, мишка почергово мінятиме кольори з'їдених кубиків, тому серед 26 таких кубиків буде по 13 кубиків кожного кольору, тому центральний кубик залишитися не може.
Відповідь. Ні.

6. Оскільки $3x+4y+6z\le12$, то $\frac{x}{4}+\frac{y}{3}+\frac{z}{2}\le1$.
Скористаємось нерівністю Коші-Буняковського:

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{\frac{x}{4}}\cdot\sqrt{4}+\sqrt{\frac{y}{3}}\cdot\sqrt{3}+\sqrt{\frac{z}{2}}\cdot\sqrt{2}\le$$

$\sqrt{\frac{x}{4}+\frac{y}{3}+\frac{z}{2}}\cdot\sqrt{4+3+2}\le\sqrt{1}\cdot\sqrt{9}=3,$ що й потрібно було довести.

11 КЛАС

1. Нехай оглядове колесо обертається зі сталою кутовою швидкістю проти годинникової стрілки. Через x позначимо кількість кабінок оглядового колеса. Розглянемо два випадки:
1) кабінки пронумеровані проти годинникової стрілки;
2) нумерація кабінок здійснена за годинниковою стрілкою.
1) За 40 хвилин оглядове колесо зробило ціле число повних обертів, яке ми позначимо буквою N, та ще повернулося на $22-4=18$ кабінок. За 60 хвилин воно зробило певне число повних обертів, яке ми позначимо через M, та ще повернулося на $x-3$ кабінок.
Складаємо рівняння:

$$\frac{Mx+(x-3)}{Nx+18}=\frac{60}{40},$$

$$3Nx+54=2(M+1)x-6,$$

$$(2M+2-3N)x=60.$$

Отже, число x є дільником числа 60 і не менше ніж 25, тому x може дорівнювати 30 або 60.
Якщо $x=30$, то, наприклад, $M=45$, $N=30$.
При $x=60$ рівність справджується, наприклад, при $M=46$, $N=31$.
2) За 40 хвилин оглядове колесо зробило ціле число повних обертів, яке ми позначимо буквою N, та ще повернулося на $x-18$ кабінок.
За 60 хвилин воно зробило певне число повних обертів, яке ми позначимо через M, та ще повернулося на 3 кабінки.

Складаємо рівняння:

$$\frac{Mx+3}{Nx+x-18}=\frac{60}{40},\quad 3(N+1)x-54=2Mx+6,$$

$$(2(N+1)-2M)x=60.$$

Отже, число x є дільником числа 60 і не менше ніж 25, тому x може дорівнювати 30 або 60.

У першому випадку було показано, що могло бути і 30, і 60 кабінок.

Відповідь: 30 або 60 кабінок.

2. Оскільки

$$n^3+n^2+337n+337=(n+1)(n^2+337),$$

то для того, щоб цей вираз ділився на 2018, потрібно, щоб хоча б один із множників ділився на 2018. Найменшим натуральним n, при якому вираз $n+1$ ділиться на 2018, є число 2017.

Оскільки при натуральних n значення виразу n^2+1 зростає, то шляхом підбору знаходимо, що при $n=41$ маємо рівність $n^2+337=2018$ — ділиться на 2018.

Відповідь. 41.

3. Очевидно, що $x=1$ — розв'язок рівняння. Доведемо, що інших розв'язків немає. Запишемо рівняння у вигляді:

$$\left(\frac{2019}{2018}\right)^x-1=\left(\frac{1}{2018}\right)^x.$$

Функція в лівій частині рівняння зростає, в правій — спадає. Отже, рівняння має не більше ніж один розв'язок.

Відповідь. 1.

4. Зрозуміло, що найменшого значення поданий вираз набуває при $x\geq 0$. Побудуємо прямокутний трикутник ABC, у якому $AC=BC=1$. Із вершини C проведемо відрізок $CX=x$ під кутами $60°$ і $30°$ до катетів. Тоді за теоремою косинусів знайдемо, що

$$\sqrt{x^2-x+1}+\sqrt{x^2-x\sqrt{3}+1}=AX+BX\geq AB=\sqrt{2},$$

причому рівність досягається тоді і тільки тоді, коли $X\in AB$. Отже, $\sqrt{2}$ найменше значення цього виразу.

Відповідь. $\sqrt{2}$.

5. Нехай x_1, x_2, x_3 — корені поданого рівняння. За теоремою Вієта $x_1\cdot x_2\cdot x_3=8$.

Оскільки корені рівняння утворюють геометричну прогресію,

то $x_2=x_1q$, $x_3=x_1q^2$, де q — знаменник геометричної прогресії.

Тоді $x_1\cdot x_1q\cdot x_1q^2=8$, $(x_1q)^3=8$, $x_1q=2$.

Отже, один із коренів рівняння $x_2=2$.

Підставимо це значення в рівняння: $8-7\cdot 4+2a-8=0$, звідки $a=14$.

При $a=14$ рівняння має вигляд

$$x^3-7x^2+14x-8=0,\ \text{звідки}$$

$$x^3-8-7x(x-2)=0,$$

$$(x-2)(x^2+2x+4-7x)=0,\ (x-2)(x^2-5x+4)=0.$$

Коренями цього рівняння є числа 1, 2, 4; вони утворюють геометричну прогресію.

Відповідь. 14.

6. Зауважимо, що кількість цукерок, яку може забрати Петрик на довільному ході, завжди є степенем двійки. Крім того, якщо Петрик на якомусь ході забрав зі столу 2^n цукерок, то були й ходи, на яких він забирав 2, 4,..., 2^{n-1} цукерок. Звідси випливає, що максимальна кількість цукерок, яку брав Петрик за один хід, не може перевищувати 512, оскільки сума $1+2+4+\ldots+1024>2011$.

Уважатимемо, що Петрик дотримується стратегії, що дозволяє йому забрати зі столу 2011 цукерок якнайшвидше. Помітимо, що кількість ходів, упродовж яких Петрик забирав зі столу рівно 2^n цукерок, не може перевищувати 2, адже в іншому випадку замість того, щоб двічі брати по 2^n цукерок, Петрик міг би взяти додатковий раз 2^{n+1} цукерок і скоротити кількість ходів.

Звідси випливає, що (якщо Петрик дотримується оптимальної стратегії) максимальна кількість цукерок, які брав Петрик за один хід, не може бути меншою за 512, адже навіть подвоєна сума

$$2(1+2+4+\ldots+256)=1022<2011.$$

Отже, під час своїх ходів Петрик брав 1, 2,..., 512 цукерок, причому кожну таку кількість хлопець брав або раз, або двічі. Запишемо це так:

$a_0+2a_1+4a_2+\ldots+512a_9=2011$, де $a_i\in\{1;2\}$ — кількість разів, які хлопець брав по 2^i цукерок. Ця рівність рівносильна такій:

$a_0'+2a_1'+4a_2'+\ldots+512a_9'=$

$=2011-(1+2+4+\ldots+512)=988$, де $a_i'=a_i-1$, $a_i'\in\{0;1\}$.

Але, з огляду на однозначність запису числа в двійковій системі числення, остання рівність можлива лише при таких значеннях a_i' ($i=0,\ldots 9$): 0, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 1, оскільки $988=512+256+128+64+16+8+4$.

Отже, a_i ($i=0,\ldots 9$) мають значення: 1, 1, 2, 2, 2, 1, 2, 2, 2, 2, і загальна кількість ходів, які зробив Петрик, дотримуючись оптимальної стратегії, складає $3\cdot1+7\cdot2=17$.

Відповідь. 17.

ВАРІАНТ 2

6 КЛАС

1. Розставте знаки «+» або «−» (усього не більше 4-х знаків) між цифрами 9, 8, 7, 6, 5,4, 3, 2, 1 так, щоб значення цього виразу дорівнювало 100.
2. Подолавши $\frac{3}{8}$ довжини моста, Андрійко помітив автомобіль, що рухався зі швидкістю 60 км/год. Якщо Андрійко побіжить назад, то зустрінеться з автомобілем на початку моста; якщо — уперед, то автомобіль наздожене його в кінці моста. Із якою швидкістю бігає хлопчик?
3. Відомо, що $\frac{a-4b}{b}=7$. Знайдіть значення виразу $\frac{2a+3b}{a}$.
4. З-поміж 242 монет є одна фальшива й легша ніж інші, а решта — справжні. За яку мінімальну кількість зважувань на терезах без важків із двома чашами можна визначити фальшиву монету?
5. Дитячий садочок придбав картки для навчання дітей читанню, на деяких із них написано «МА», на інших — «НЯ». Кожна дитина взяла три картки і стала складати з них слова. З'ясувалося, що слово «МАМА» можуть скласти зі своїх карток 20 дітей, слово «НЯНЯ» — 30 дітей, а слово «МАНЯ» — 40 дітей. У скількох дітей усі три картки однакові?

7 КЛАС

1. На дошці записано чотири трицифрових числа, сума яких дорівнює 2012. Для їхнього запису було використано лише дві різних цифри. Наведіть усі приклади таких чисел.
2. Бабуся купила стрічки й роздала їх своїм онучкам. Старшій вона дала без півметра половину всіх стрічок, середній — половину остачі й ще півметра, а найменшій — решту: половину нової остачі й ще метр. Скільки метрів стрічок купила бабуся?
3. Цифру 9, із якої починається запис трицифрового числа, перенесли в кінець запису. Отримали число на 216 менше від початкового. Знайдіть початкове число.
4. Пасажир прийшов на залізничний вокзал за 5 хвилин до відправлення потяга. Якби відстань до вокзалу була на 1 км більшою, то, йдучи з такою самою швидкістю, він запізнився б на 5 хвилин. Із якою швидкістю йшов пасажир?
5. Скільки коренів має рівняння $a(x-1)+5a=8(x+a)+1$ залежно від значення параметра a?
6. У деякому царстві живуть маги, чародії й чарівники. Про них відоме таке: по-перше, не всі маги є чародіями, по-друге, якщо чарівник не є чародієм, то він — не маг. Чи правда, що не всі маги — чарівники?

8 КЛАС

1. У шестицифровому числі перша цифра дорівнює четвертій, друга — п'ятій, третя — шостій. Доведіть, що це число ділиться на 7, 11 і 13.
2. Розв'яжіть рівняння $\left|x+5-|x-8|\right|=3-x$.
3. Вологість повітря до полудня знизилася на 12 % порівняно з ранком, а до вечора — ще на 5 % порівняно з полуднем. Скільки відсотків від ранкової вологості становить

вологість повітря ввечері та на скільки відсотків вона знизилася?

4. У трикутнику ABC $AB = AC$. На сторонах AC і BC позначені точки E і D відповідно так, що $AE = AD$, $\angle BAD = 30°$. Знайдіть градусну міру кута CDE.

5. Чи є число $2018^2 + 2019^2 + (2018 \cdot 2019)^2$ точним квадратом?

6. Визначте кількість розв'язків системи рівнянь $\begin{cases} (a+3)x + 4y = 5 - 3a, \\ 2x + (5+a)y = 8 \end{cases}$ залежно від значень параметра a.

9 КЛАС

1. Підряд записано 2011 чисел. Кожне з них, крім першого та останнього, дорівнює сумі двох сусідніх із ним чисел. Чому дорівнює сума всіх чисел, якщо останнім є число 2012?

2. Побудуйте графік функції $y = x + \{x\} + [x] + |x|$.

3. На дошці записані два числа 1 та 2018. Кожного дня, починаючи з 1 вересня, Сашко витирає з дошки числа, що на ній були написані, а натомість записує середнє арифметичне та середнє гармонічне цих чисел. Чому дорівнює добуток двох чисел, які будуть записані на дошці ввечері 30 вересня?
Нагадаємо, що середнім арифметичним двох додатних чисел a і b називають число $\frac{a+b}{2}$, а середнім гармонічним — число $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$.

4. Точка M — середина сторони BC трикутника ABC (*рис. 1*). На відрізку AM позначено точки K і L так, що $AK = 2LM$ і $\angle ALC = 90°$. Доведіть, що $\angle BKM = \angle CAM$.

5. Розв'яжіть рівняння $\sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x - 1 - 2\sqrt{x-2}} = \sqrt{x-1}$.

6. На клітчастій дошці 4×4 грають двоє: Миколка й Петрик. Ходять по черзі, і кожний гравець своїм ходом зафарбовує одну клітинку. Програє той, після ходу якого утворюється квадрат 2×2, складений із зафарбованих клітинок. Першим свій хід робить Миколка. Хто виграє за правильної гри: Миколка чи Петрик? Відповідь обґрунтуйте.

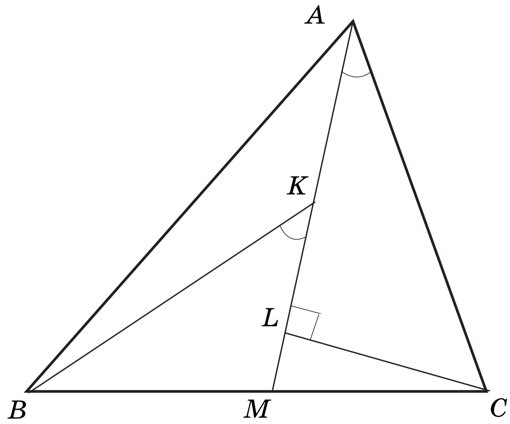


Рис. 1

10 КЛАС

1. Чи існує таке натуральне число n, щоб сума $1 + 2 + \ldots + n$ дорівнювала трицифровому числу з однаковими цифрами?

2. Многочлен $x^4 + x^3 - 3x^2 + x + 2$ піднесли до 2018 степеня й звели подібні доданки. Доведіть, що в здобутому виразі знайдеться одночлен із від'ємним коефіцієнтом.

3. Із посудини з 10 % розчином солі відлили $\frac{1}{3}$ частину й долили води так, що посудина стала заповненою на $\frac{5}{6}$ від початкового об'єму. Яким став відсотковий уміст солі в посудині?

4. В опуклому чотирикутнику $ABCD$ $\angle ABC = 90°$, $AC = CD$ і $\angle BCA = \angle ACD$. Точка F — середина відрізка AD. Відрізки BF і AC перетинаються в точці L. Доведіть, що $BC = CL$.

5. Побудуйте графік рівняння $|y| = [|x| - 1]$.
Нагадаємо, що $[a]$ — ціла частина числа a, тобто найбільше ціле число, що не перевищує a.

6. Маємо дошку з 2019 рядків та 2018 стовпчиків. З'ясуйте, чи можна прибрати дві

клітинки з останнього стовпчика так, щоб дошку, яка вийшла, можна було замостити без накладань фігурками, що наведені на рис. 2, які можна повертати. Відповідь обґрунтуйте.

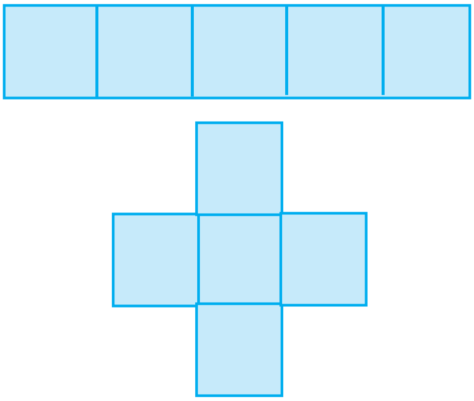


Рис. 2

11 КЛАС

1. Для будь-яких чисел a, b, c знайдіть найменше значення виразу $|2018-a|+|a-b|+|b-c|+|c-8102|$.
2. Дільник натурального числа називають власним, якщо він не дорівнює самому числу та більший за 1. Знайдіть усі такі натуральні числа, у яких найбільший власний дільник на 2018 більше або менше одинадцятого степеня найменшого власного дільника.
3. Знайдіть усі функції $f(x)$, визначені на множині дійсних чисел, що задовольняють рівняння $f(x)-2f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{2-x^2}{x}$.
4. Доведіть нерівність $\sqrt{x^2+(y-1)^2}+\sqrt{(x-1)^2+y^2}\ge\sqrt{2}$.
5. У трикутнику ABC провели висоту AH і бісектрису BE. Відомо, що $\angle BEA=45°$. Знайдіть $\angle EHC$.
6. З'ясуйте, чи існує функція f, областю визначення й множиною значень якої є всі дійсні числа, що не набуває жодного свого значення більше, ніж в одній точці й при всіх дійсних x задовольняє нерівність $\sqrt{f(x^2)-(f(x))^2}\ge\frac{1}{2}$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАВДАНЬ ВАРІАНТА 2

6 КЛАС

1. Відповідь. $98-76+54+3+21$.
2. Андрійко пробігає $\frac{5}{8}-\frac{3}{8}=\frac{1}{4}$ моста за час, упродовж якого автомобіль проїжджає міст. Тоді його швидкість дорівнює $60\cdot\frac{1}{4}=15$ км/год.
   Відповідь. 15 км/год.
3. $\frac{a-4b}{b}=7,\ \frac{a}{b}-4=7,\ \frac{a}{b}=11,\ \frac{b}{a}=\frac{1}{11}.$
   $\frac{2a+3b}{a}=2+3\cdot\frac{b}{a}=2+3\cdot\frac{1}{11}=2\frac{3}{11}.$
   Відповідь. $2\frac{3}{11}$.
4. Розіб'ємо монети на 3 групи по 81, 81, 80 монет. Маси двох груп по 81 монеті порівняємо на терезах. Якщо терези врівноважені, то фальшива серед 80 інших монет. Додамо до 80 одну монету (вона є справжньою) і шукатимемо фальшиву серед 81 монети діленням на 3 групи по 27 у кожній. Далі 27 ділимо на 3 групи по 9, і знову 9 ділимо на 3 групи по 3 монети. П'ятим зважуванням серед останніх трьох знаходимо фальшиву.
   Відповідь. За п'ять зважувань.
5. Оскільки в кожної дитини по три картки, а різних складів, написаних на них усього два, то обов'язково два склади повинні збігатися, тобто кожна дитина може скласти або слово МАМА (таких дітей 20), або слово НЯНЯ (таких дітей 30). Отже, усього дітей 50. Якщо в дитини всі три картки однакові, то вона не зможе скласти слово МАНЯ (а змогли скласти це слово 40 дітей). Отже, три однакових картки у $50-40=10$ дітей.
   Відповідь. У 10-х дітей.

7 КЛАС

1. ***Відповідь.*** $2012=353+553+553+553$,
   $2012=118+118+888+888$,
   $2012=118+188+818+888$,
   $2012=188+188+818+818$.

2. Нехай бабуся купила x м стрічок. Тоді старшій онучці вона дала $\left(\frac{x}{2}-0{,}5\right)$ м, а залишилося $\left(x-\left(\frac{x}{2}-0{,}5\right)=\frac{x}{2}+0{,}5\right)$ м. Середній онучці — $\left(\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}+0{,}5\right)+0{,}5\right)$, тобто $\left(\frac{x}{4}+0{,}75\right)$ м.
Тоді залишок становив
$x-\left(\frac{x}{2}-0{,}5\right)-\left(\frac{x}{4}+0{,}75\right)=\frac{x}{4}-0{,}25$ метрів.
Оскільки наймолодшій онучці бабуся дала половину решти й ще півметра, то ця половина $\frac{1}{2}\left(\frac{x}{4}-0{,}25\right)=\frac{x}{8}-0{,}125$ і становить один метр.
Звідки $\frac{x}{8}-0{,}125=1$, $x=9$.
Відповідь. 9 м.
3. $\overline{9ab}-\overline{ab9}=216$,
$900+10a+b-100a-10b-9=219$,
$90a+9b=675$,
$10a+b=75$.
Відповідь. 975.
4. Нехай s — відстань до вокзалу (у км), v — швидкість пасажира (у км/хв), тоді $\frac{s}{v}=t-5$, $\frac{s+1}{v}=t+5$. Звідси знаходимо $\frac{s}{v}-\frac{s+1}{v}=t-5-t-5=-10$, $-\frac{1}{v}=-10$, $v=0{,}1$
Відповідь. 0,1 км/хв.
5. $ax-a+5a=8x+8a+1$, $ax-8x=4a+1$, $(a-8)x=4a+1$. Отже, якщо $a=8$, $a-8=0$, $4a+1\neq 0$, тобто рівняння коренів не має. Якщо $a\neq 8$, рівняння має один корінь.
Відповідь. При $a=8$ рівняння коренів не має, при $a\neq 8$ рівняння має один корінь.
6. Нам відомі два твердження:
1) Принаймні один маг не є чародієм.
2) Якщо маг — також чарівник, то він є чародієм.
Подивимося тепер на будь-якого мага, що не є чародієм (такий існує за першою умовою). Якби він був ще чарівником, то за другою умовою він був би чародієм, але він не чародій, отже, він не чарівник. Тому не всі маги є чарівниками.
Відповідь. Правда.

8 КЛАС

1. $\overline{abcabc}=a\cdot 10^5+b\cdot 10^4+c\cdot 10^3+a\cdot 10^2+b\cdot 10+c=$
$=a\left(10^5+10^2\right)+b\left(10^4+10\right)+c\left(10^3+1\right)=$
$=a\cdot 100100+b\cdot 10010+c\cdot 1001$ — ділиться на 1001.
Число 1001 розкладається на множники $1001=7\cdot 11\cdot 13$, отже, подане число ділиться на 7, 11, 13, що й потрібно було довести.
2. 1) $x\geq 8$, $|x+5-x+8|=3-x$, $|13|=3-x$, $x=-10$ — не задовольняє умову $x\geq 8$.
2) $x<8$, $|x+5+x-8|=3-x$, $|2x-3|=3-x$. Тоді $2x-3=3-x$, $x=2$ або $-2x+3=3-x$, $x=0$.
Відповідь. 0; 2.
3. Нехай x — вологість повітря вранці, y — удень, z — увечері. Тоді $y=0{,}88x$, $z=0{,}95y=0{,}95\cdot 0{,}88x=0{,}836x$. Отже, вечірня вологість становить 83,6 %; порівняно з ранковою знизилася на 16,4 %.
Відповідь. 83,6 %, 16,4 %.
4. $\angle ABC=\angle ACB$, $\angle ADE=\angle AED$ (кути при основах рівнобедрених трикутників ABC і ADE) (*рис. 3*).

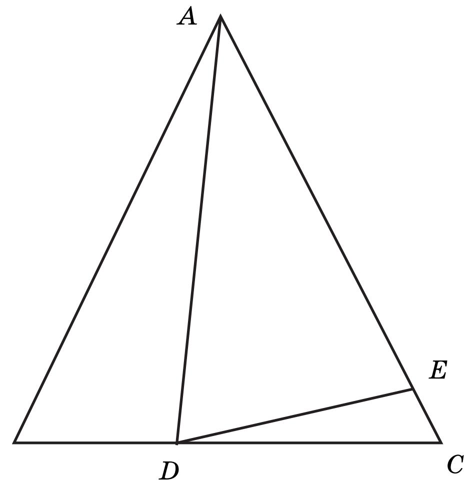


Рис. 3

Нехай $\angle DAE=x$, тоді $\angle ADE=\frac{180^\circ-x}{2}$,

$$\angle ABC = \angle ACB = \frac{180^\circ - (30^\circ + x)}{2}.$$

$$\angle EDC = \angle AED - \angle ACD =$$

$$= \frac{180^\circ - x}{2} - \frac{180^\circ - (30^\circ + x)}{2} = 15^\circ.$$

Відповідь. 15°.

5. Нехай $2018 = n$, тоді $2019 = n+1$.

$$n^2 + (n+1)^2 + (n(n+1))^2 =$$

$$n^2 + n^2 + 2n + 1 + (n^2 + n)^2 =$$

$$(n^2 + n)^2 + 2(n^2 + n) + 1 = (n^2 + n + 1)^2.$$

Відповідь. Так.

6. Графіком кожного з рівнянь системи є пряма. Коефіцієнт при змінній y першого рівняння відмінний від нуля, тому графік рівняння не є паралельним осі ординат. Із першого рівняння виразимо змінну y через змінну x. Після нескладних перетворень маємо: $y = -\frac{a+3}{4}x + \frac{5-3a}{4}$.

Друге рівняння системи при $a = -5$ задає пряму $2x + 0y = 8$, тобто пряму $x = 4$, що паралельна осі ординат і перетинає графік першого рівняння, що дає розв'язок заданої системи, і до того ж єдиний.

Якщо $a \neq -5$, то з другого рівняння системи маємо: $y = -\frac{2}{5+a}x + \frac{8}{5+a}$.

Для дослідження системи лінійних рівнянь із двома невідомими та параметрами розглянемо взаємне розташування двох прямих. Спочатку зручно розглянути випадок, коли коефіцієнти при y дорівнюють нулю (маємо вертикальне розташування прямих), потім кожне з рівнянь системи записуємо у вигляді $y = ax + b$ за умови $a^2 + b^2 \neq 0$. Використовуючи властивості розташування графіків лінійних рівнянь (прямих), дістаємо:

Прямі паралельні, якщо $\begin{cases} -\frac{a+3}{4} = -\frac{2}{5+a}, \\ \frac{5-3a}{4} \neq \frac{8}{5+a}. \end{cases}$ (1)

Прямі збігаються, якщо $\begin{cases} -\frac{a+3}{4} = -\frac{2}{5+a}, \\ \frac{5-3a}{4} = \frac{8}{5+a}. \end{cases}$ (2)

Прямі перетинаються, якщо $-\frac{a+3}{4} \neq -\frac{2}{5+a}$. (3)

Розв'яжемо систему (1): $\begin{cases} (a+3)(a+5) = 8, \\ \frac{5-3a}{4} \neq \frac{8}{5+a}. \end{cases}$

Із першого рівняння системи маємо: $a^2 + 8a + 7 = 0$, звідки $a = -1$ або $a = -7$.

Підставимо в другу умову системи (1) значення $a = -1$ і $a = -7$. Після нескладних перетворень переконуємось, що $a = -7$ є розв'язком системи.

Розв'яжемо систему (2):

$$\begin{cases} -\frac{a+3}{4} = -\frac{2}{5+a}, \\ \frac{5-3a}{4} = \frac{8}{5+a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a = -7, \\ a = -1, \end{array}\right. \\ (5-3a)(5+a) = 32. \end{cases}$$

$-3a^2 - 10a - 7 = 0$, звідки $a = -1$ або $a = -\frac{7}{3}$.

Розв'язком системи (2) є $a = -1$.

З'ясуємо, для яких значень a виконується умова (3). Дістанемо: $a \neq -7$, $a \neq -1$.

Відповідь. При $a \neq -7$, $a \neq -1$ система має один розв'язок; при $a = -1$ — безліч розв'язків; при $a = -7$ система розв'язків не має.

9 КЛАС

1. Нехай a — перше число, b — друге число. Розглянемо ряд, який утворюють ці числа: a, b, $b-a$, $-a$, $-b$, $a-b$, a, b, ... Сума перших шістьох чисел дорівнює нулю. Оскільки $2011 = 6 \cdot 335 + 1$, то останнє число дорівнює $a = 2012$. Тому сума всіх чисел дорівнює 2012.

Відповідь. Сума всіх коефіцієнтів дорівнює значенню виразу при $x = 1$, а саме 2^{2018}. Звідси робимо висновок, що сума першого і останнього коефіцієнтів більша за суму всіх коефіцієнтів. Тому знайдеться одночлен з від'ємним коефіцієнтом, що й потрібно було довести.

2. Ураховуючи, що $\{x\}+[x]=x$, маємо

$y=2x+|x|$, тобто $y=\begin{cases}3x, x\ge 0,\\ x, x<0.\end{cases}$

3. Слід зауважити, що числа, які записує Петрик, завжди додатні. Покажемо, що добуток цих чисел не змінюється: якщо в певний момент на дошці були записані числа a і b, їхній добуток дорівнював ab, то й наступного дня добуток дорівнюватиме

$$\frac{a+b}{2}\cdot\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}=\frac{a+b}{2}\cdot\frac{2ab}{b+a}=ab.$$

Отже, 30-го дня ввечері добуток чисел буде таким самим, як і вранці першого дня, тобто дорівнюватиме 2018.

Відповідь. 2018.

4. Проведемо $BN\perp AM$ (*рис.4*). Оскільки $BM=CM$, то $\Delta BNM=\Delta CLM$ (за гіпотенузою і гострим кутом). Із рівності цих трикутників випливає рівність відповідних сторін: $BN=CL$ і $NM=ML$. Оскільки $AK=2LM$, то $AK=LN$ і $AL=KN$. Оскільки $BN=CL$ і $KN=AL$, то $\Delta BNK=\Delta CLA$ (за двома катетами). Із рівності цих трикутників випливає рівність відповідних кутів: $\angle BKN=\angle CAL$, тобто $\angle BKM=\angle CAM$, що й потрібно було довести.

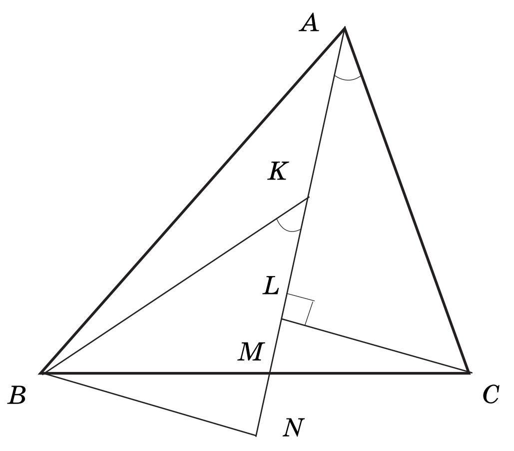


Рис. 4

5. $\sqrt{\left(\sqrt{x-1}-1\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{x-2}-1\right)^2}=\sqrt{x-1},$

$\left|\sqrt{x-1}-1\right|+\left|\sqrt{x-2}-1\right|=\sqrt{x-1}.$

ОДЗ: $x\ge 2$. Тоді $\sqrt{x-1}-1\ge 0$ для всіх x із області допустимих значень, тому:

$\sqrt{x-1}-1+\left|\sqrt{x-2}-1\right|=\sqrt{x-1},\ \left|\sqrt{x-2}-1\right|=1,$

$\left[\begin{array}{l}\sqrt{x-2}-1=1,\\ \sqrt{x-2}-1=-1,\end{array}\right.\ \left[\begin{array}{l}\sqrt{x-2}=2,\\ \sqrt{x-2}=0,\end{array}\right.\ \left[\begin{array}{l}x=6,\\ x=2.\end{array}\right.$

Відповідь. 2; 6.

6. Розіб'ємо клітинки на пари так, як це показано на рис. 5 (клітинкам, що входять до однієї пари, відповідає одна і та сама буква).

a	b	c	d
e	f	g	h
a	b	c	d
e	f	g	h

Рис. 5

Петрик виграє, якщо буде кожним своїм ходом зафарбовувати клітинку з тією буквою, яку, перед його ходом, зафарбував Миколка.

Відповідь. Виграє Петрик.

10 КЛАС

1. За умовою задачі $\frac{n(n+1)}{2}=\overline{aaa},\ 1\le a\le 9.$

$n(n+1)=222a=6a\cdot 37$. Змінюючи a від 1 до 9, знаходимо, що при $a=6$ $n=36$.

Відповідь. Існує, $n=36$.

2. Коефіцієнт перед $x^{4\cdot 2018}$ дорівнює 1. Коефіцієнт перед нульовим степенем дорівнює значенню виразу при $x=0$, а саме 2^{2018}. Сума всіх коефіцієнтів дорівнює значенню виразу при $x=1$, а саме 2^{2018}. Звідси робимо висновок, що сума першого і останнього коефіцієнтів більша за суму всіх коефіцієнтів. Тому знайдеться одночлен з від'ємним коефіцієнтом, що й потрібно було довести.

3. Нехай V — початковий об'єм посудини, тоді $\frac{V}{10}$ — об'єм солі в посудині. Коли відлили $\frac{V}{3}$, то в тому розчині, що залишився, об'єм солі став дорівнювати $\frac{2V}{30}$. Після доливання води об'єм розчину став дорівнювати $\frac{5V}{6}$, при цьому об'єм солі в ньому залишився той самий: $\frac{2V}{30}$, що становить

$$\frac{\frac{2V}{30}}{\frac{5V}{6}}\cdot 100\% = 8\%.$$

Відповідь. 8 %.

4. Оскільки ΔACD — рівнобедрений, то $CF \perp AD$, тоді $\angle CFA + \angle ABC = 180^\circ$ і навколо чотирикутника $ABCF$ можна описати коло (*рис. 6*).

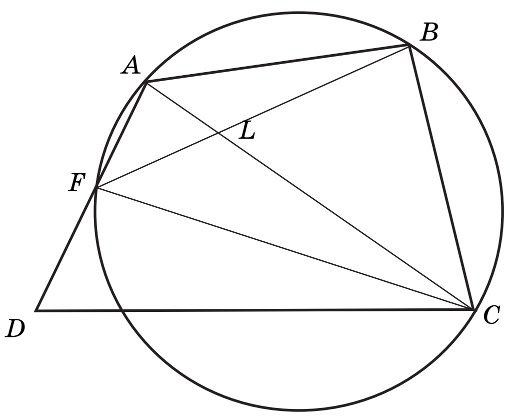


Рис. 6

Кути AFB і ACB рівні, оскільки вони є вписаними і спираються на одну дугу. Нехай $\angle AFB = \angle ACB = \alpha$.

У ΔFLC: $\angle LFC = 90^\circ - \alpha$, $\angle FCL = \frac{\alpha}{2}$,

$$\angle FLC = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}.$$

Оскільки кути FLC і BLC суміжні, то

$$\angle BLC = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}.$$

Кути CFB і CAB рівні, оскільки вони є вписаними і спираються на одну дугу, тоді $\angle CFB = \angle CAB = 90^\circ - \alpha$, тому

$$\angle LBC = 90^\circ - \angle ABL = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}.$$

Отже, $\angle BLC = \angle LBC$, тому ΔLBC — рівнобедрений з основою BL, а $BC = LC$, що й потрібно було довести.

5. Оскільки модулі протилежних чисел рівні, то графік рівняння симетричний відносно координатних осей. Тому побудуємо його спочатку в першій координатній чверті.
Для $x \geq 1$, $y \geq 0$ рівняння набуває вигляду $y = [x] - 1$.
Відобразивши побудований графік симетрично відносно координатних осей, матимемо графік рівняння (*рис. 7*)

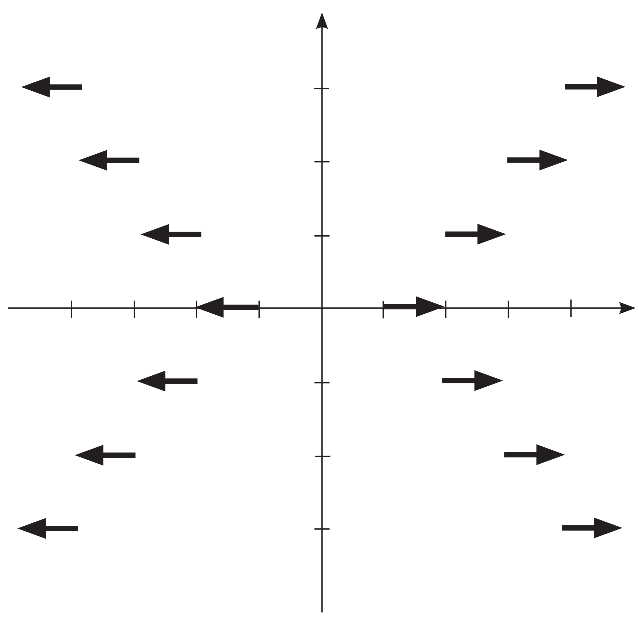


Рис. 7

6. Запишемо в кожному рядку зліва направо числа 1, 2, ..., 2019 по одному в кожну клітинку. Тоді будуть прибрані дві будь-які клітини із записаними в них числами 2019. Будь-яка фігурка покриває п'ять клітинок, сума чисел на яких кратна 5. Але сума всіх чисел таблиці, що залишилася, дорівнює

$\frac{1}{2}\cdot 2020\cdot 2019\cdot 2018-2\cdot 2018=$

$=2018(1010\cdot 2019-2)$ і має останню цифру 4, тобто не кратна 5.

Відповідь. Не можна.

11 КЛАС

1. Згідно з геометричним змістом модуля, числа $|2018-a|$, $|a-b|$, $|b-c|$, $|c-8102|$ — це відстані між поданими числами на координатній прямій. Отже, найменше значення суми дорівнює $8102-2018=6084$.
Відповідь. 6084.

2. Позначимо найменший власний дільник через x, тоді принаймні одне з чисел $x^{11}\pm 2018$ так само є дільником нашого числа. Але вони різної парності й кожне з них є дільником шуканого числа. Тому воно точно ділиться на 2, звідки зрозуміло, що $x=2$. Тоді $x^{11}+2018=4066$, а $x^{11}-2018=30$. Так само очевидно, що саме число є добутком цих двох дільників, тому воно дорівнює 8132 або 60.
Відповідь. 8132 або 60.

3. Нехай $x=\frac{1}{x}$. Тоді $f\left(\frac{1}{x}\right)-2f(x)=\dfrac{2-\left(\frac{1}{x}\right)^2}{\frac{1}{x}}$,

$f\left(\frac{1}{x}\right)-2f(x)=\frac{2x^2-1}{x}$, звідки

$f\left(\frac{1}{x}\right)=2f(x)+\frac{2x^2-1}{x}$.

Підставивши знайдене значення $f\left(\frac{1}{x}\right)$ у подане рівняння, отримаємо

$f(x)-2\left(2f(x)+\frac{2x^2-1}{x}\right)=\frac{2-x^2}{x}$, звідки

$f(x)-4f(x)=\frac{4x^2-2}{x}+\frac{2-x^2}{x}$, $-3f(x)=3x$,

$f(x)=-x$.

Відповідь. $f(x)=-x$.

4. Уведемо вектори: $\vec{a}(x;1-y)$, $\vec{b}(1-x;y)$. Зазначимо, що вектор $\vec{a}+\vec{b}$ має координати $(1;1)$, а його абсолютна величина $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\sqrt{2}$. Тоді

$\sqrt{x^2+(y-1)^2}+\sqrt{(x-1)^2+y^2}=|\vec{a}|+|\vec{b}|\ge\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\sqrt{2}$,

що й потрібно було довести.

5. Відобразимо вершину A симетрично відносно прямої BE. Оскільки BE — бісектриса кута ABC, то образ точки A — точка A_1 лежить на стороні BC. При цьому $\angle BEA=\angle BEA_1$ і $EA=EA_1$ (*рис. 8*).

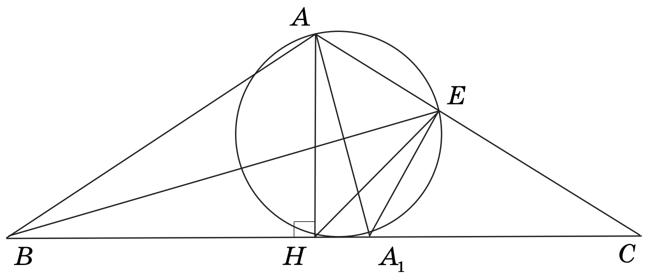


Рис. 8

Оскільки $\angle BEA=45°$, то трикутник AEA_1 — рівнобедрений прямокутний. Отже, $AA_1E=45°$. Оскільки $\angle AHA_1=\angle AEA_1=90°$, то навколо чотирикутника AEA_1H можна описати коло, діаметром якого є відрізок AA_1. У цьому колі кути AA_1E і AHE є вписаними, що спираються на одну дугу. Отже, $\angle AHE=\angle AA_1E=45°$, $\angle EHC=\angle AHC-\angle AHE=90°-45°=45°$.
Відповідь. 45°.

6. Припустимо, що функція, яка відповідає вимогам умови задачі, існує. Тоді $f(x^2)-(f(x))^2\ge\frac{1}{4}$.

Нехай $x=0$. Тоді $f(0)-(f(0))^2\ge\frac{1}{4}$,

$\left(f(0)-\frac{1}{2}\right)^2\le 0$, звідки $f(0)=\frac{1}{2}$.

Нехай $x=1$. Тоді $f(1)-(f(1))^2\ge\frac{1}{4}$,

$\left(f(1)-\frac{1}{2}\right)^2 \le 0$, звідки $f(1)=\frac{1}{2}$.

Отже, $f(0)=f(1)$, тобто значення $\frac{1}{2}$ функція набуває принаймні в двох точках, що суперечить умові.

Відповідь. Не існує.

ВАРІАНТ 3

6 КЛАС

1. Із селища A до селища B виїхав велосипедист, а через 15 хвилин услід за ним виїхав автомобіль (обидва рухаються зі сталими швидкостями). Рівно на половині шляху від A до B автомобіль наздогнав велосипедиста. Коли автомобіль прибув до селища B, велосипедистові залишалося проїхати ще третину шляху. За який час велосипедист проїхав шлях від A до B?
2. Порівняйте дроби $\frac{20192017}{20192019}$ і $\frac{20192018}{20192020}$.
3. У спортивній секції менше ніж 40 учнів. Вони тренуються в стрибках у висоту, довжину, з жердиною та потрійних стрибках. Кожен тренується лише в одному виді стрибків. Десята частина стрибає з жердиною, третя — виконує потрійні стрибки, половина — стрибки в довжину. Скільки учнів тренуються в стрибках у висоту?
4. Андрійко зібрав деяку кількість грибів. Коли його запитали: «Скільки грибів ти знайшов?», хлопчик відповів: «Більше за 100, але менше від 200, і якби їх розклали на купки або по 3, або по 4, або по 7 грибів, то в кожному випадку залишався б один гриб». Скільки грибів знайшов Андрійко?
5. Хлопчик і дівчинка по черзі фарбують клітинки таблиці розміром 2018×2018. За один хід дозволяється зафарбувати будь-які дві не зафарбовані раніше клітинки, що мають спільну сторону. Починає гру хлопчик. Переможцем вважається той, після ходу якого не можна продовжувати гру (у таблиці немає двох сусідніх вільних клітинок). Як слід грати дівчинці, щоб завжди перемагати в цій грі?

7 КЛАС

1. Лижник підрахував, що якщо він рухатиметься зі швидкістю 10 км/год, то прийде до пункту призначення на 1 годину пізніше 12-ої години, а якщо рухатиметься зі швидкістю 15 км/год, то прибуде на одну годину раніше полудня. Із якою швидкістю повинен бігти лижник, щоб прибути на місце рівно о 12-й годині?
2. Скількома нулями закінчується число, що дорівнює добутку всіх натуральних чисел від 1 до 2018 включно?
3. Сестра дала одному своєму брату половину всіх груш, що були в неї, і ще 5 груш, а другому — половину решти і останні 5 груш. Скільки груш було в сестри?
4. Яку фігуру утворюють точки площини, сума відстаней яких від заданих точок A і B дорівнює відстані між цими точками?
5. До деякого двоцифрового числа ліворуч і праворуч дописали цифру 1. У результаті отримали число, що в 21 разів більше за початкове. Знайдіть початкове двоцифрове число.
6. У пустелі зустрілися два мандрівники. Один із них мав наповнену водою 12-літрову посудину, а інший мав дві порожні — 8-літрову та 5-літрову. Перший із мандрівників вирішив поділити воду порівну, але не знав, як це зробити. Як треба діяти мандрівникам, щоб налити шість літрів води у 8-літрову посудину?

8 КЛАС

1. Замініть у рівності
   $*1*2*\ldots*2016=2017*2018*2019*2020$
   кожен знак «*» знаками «+» або «−» так, щоб отримати правильну рівність.
2. На перегоні потяг рухався зі швидкістю на 20 % меншою, ніж мав рухатися за розкладом. На скільки відсотків збільшився час руху на цьому перегоні?
3. Чи ділиться значення виразу 2018^3+3^{2018} націло на 5^{26}?
4. Бісектриса і медіана, проведені з вершини прямого кута трикутника до перетину з гіпотенузою, є сторонами рівнобедреного

трикутника. Знайдіть гострі кути поданого прямокутного трикутника.

5. У дворі школи лежить купка, що містить 2018 камінців. Двоє школярів по черзі беруть із неї камінці. Той, хто починає гру, під час кожного ходу бере 1 або 4 камінці на свій розсуд, другий гравець під час кожного ходу бере 1 або 3 камінці (також на свій розсуд). Програє той, хто не зможе зробити черговий хід. Хто з гравців може забезпечити собі виграш?

6. Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases}|xy|+1=|x|+|y|,\\ x^2+y^2=1.\end{cases}$

9 КЛАС

1. З'ясуйте, простим чи складеним є число $2018^{2016^{2017}}+1$.

2. На сьогодні сім'я складається з батька, матері та сина. Сума років усіх членів сім'ї дорівнює 65. Чотири роки тому батько був старший за сина в 9 разів. Дев'ять років тому сума років усіх членів сім'ї дорівнювала 40. Скільки років батькові на сьогодні?

3. Порівняйте числа $\sqrt{2017^{2019}\cdot 2019^{2017}}$ і 2018^{2018}.

4. На катеті AC прямокутного трикутника ABC ($\angle BAC=90^\circ$) позначено точку D таку, що $\angle CBD=30^\circ$. Доведіть, що $CD\geq 2AD$.

5. Розв'яжіть рівняння $$2\sqrt{x-1}+5x=\sqrt{\left(x^2+4\right)(x+24)}.$$

6. Задано горизонтальну клітчасту смугу розміром 1×1004. Нехай у кожній із п'яти крайніх зліва клітинок розташовано по одній фішці. Двоє гравців почергово беруть одну фішку та пересувають її на декілька клітинок праворуч. Переможеним уважається гравець, який не зможе зробити черговий хід. Доведіть, що гравець, який розпочинає гру, може забезпечити собі перемогу.

10 КЛАС

1. Обчисліть значення виразу $$\sqrt{2019+2\sqrt{2018}}-\sqrt{2019-2\sqrt{2018}}.$$

2. Розв'яжіть систему рівнянь $$\begin{cases}\sqrt{x+y}+2(x+y)^4=3,\\ x^2+y^2=1.\end{cases}$$

3. Відомо, що для додатних чисел a, b, c виконується нерівність $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq a+b+c$. Доведіть, що $a+b+c\geq 3abc$.

4. Діагоналі трапеції $ABCD$ $(AB\parallel CD)$ перетинаються в точці O, точки A_1 і B_1 симетричні точкам A і B відповідно відносно бісектриси кута AOB. Доведіть, що $\angle ACA_1=\angle BDB_1$.

5. При яких значеннях параметра a рівняння $ax^6+1=a^2\sqrt{1-|x|}$ має єдиний корінь?

6. Подано квадратний тричлен $2019x^2+2018x+2017$. Двоє грають у таку гру. Вони ходять по черзі, а за один хід гравець може відняти від наявного многочлена один із таких многочленів: x^2, x, x^2-x+1, x^2+x-1. Програє гравець, після ходу якого вийде многочлен із цілочисельним коренем. Хто може забезпечити собі виграш: той, хто починає гру, чи його суперник?

11 КЛАС

1. Обчисліть значення виразу $$\sqrt[3]{\frac{1\cdot 2\cdot 4+2\cdot 4\cdot 8+\ldots+n\cdot 2n\cdot 4n}{1\cdot 3\cdot 9+2\cdot 6\cdot 18+n\cdot 3n\cdot 6n}},$$ якщо $n=2018$.

2. На дошці записані числа 1, 2, 3, ..., 2012. За один крок дозволено витерти будь-які два числа та замість них записати остачу від ділення на 11 їхньої суми. Після 2010 ходів на дошці залишились записаними два числа: x і 1012. Знайдіть число x.

3. Відомо, що x і y — додатні дійсні числа, для яких $x+y=1$. Доведіть, що $$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\geq 9.$$

4. Розв'яжіть систему рівнянь $$\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=2017,\\ \frac{1}{y}+\frac{1}{z}=2018,\\ \frac{1}{z}+\frac{1}{x}=2019.\end{cases}$$

ВИДАВНИЧА ГРУПА «ОСНОВА»

5. У трапеції $ABCD$ $(AD \parallel BC)$ бісектриси зовнішніх кутів A і B перетинаються в точці M, а бісектриси зовнішніх кутів C і D перетинаються в точці N. Відомо, що $MN = 12$ см. Знайдіть периметр трапеції.
6. З'ясуйте, чи існує така функція $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, що при всіх $x \in \mathbb{R}$ виконується рівність $f(\sin x) = \sin 2020x$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАВДАНЬ ВАРІАНТА 3

6 КЛАС

1. Оскільки автомобіль наздогнав велосипедиста рівно посередині шляху, то в селище B він прибув на 15 хвилин раніше, ніж велосипедист. Отже, останньому на третину шляху потрібно 15 хвилин, а на весь шлях від A до B — 45 хвилин.
Відповідь. 45 хв.
2. Використаємо метод доповнення до одиниці:
$1 - \frac{20192017}{20192019} = \frac{2}{20192019}$,
$1 - \frac{20192018}{20192020} = \frac{2}{20192020}$.
Оскільки $\frac{2}{20192019} > \frac{2}{20192020}$, то
$\frac{20192017}{20192019} < \frac{20192018}{20192020}$.
Відповідь. $\frac{20192017}{20192019} < \frac{20192018}{20192020}$.
3. Кількість учнів секції повинна ділитися на 10, 3, 2. Серед чисел, менших від 40, лише 30 задовольняє цю умову: $30 - (3 + 10 + 15) = 2$ учні.
Відповідь. 2 учні.
4. Кількість грибів під час ділення на 3, на 4 або на 7 дає остачу 1. Якщо кількість грибів була б кратна 3, 4 і 7, то вона дорівнювала б спільному кратному чисел 3, 4, 7, а саме 84, 168, 252, ... Оскільки грибів більше за 100, але менше від 200, то їхня кількість становить 168. Оскільки є остача 1, то кількість грибів становить 169.
Відповідь. 169 грибів.
5. Дівчинка повинна дотримуватися симетрії відносно центра квадрата (точка перетину 1009 по вертикалі й 1009 по горизонталі). На будь-який хід хлопчика вона завжди зможе відповісти, фарбуючи клітинку чи дві, симетричні відносно вказаної точки.

7 КЛАС

1. Нехай відстань, яку потрібно подолати лижнику, дорівнює s км. Тоді, рухаючись зі швидкістю 10 км/год, він витратить $\frac{s}{10}$ год, а рухаючись зі швидкістю 15 км/год, — $\frac{s}{15}$ год. За умовою $\frac{s}{10} - \frac{s}{15} = 2$, звідки $s = 60$ км. Отже, рухаючись зі швидкістю 10 км/год, він витратить 6 год, що на 1 год більше, ніж потрібно. Тобто, для того щоб прибути на місце вчасно, йому потрібно 5 год, а його швидкість має дорівнювати $60 : 5 = 12$ км/год.
Відповідь. 12 км/год.
2. Нулі будуть утворюватися в результаті множення чисел 2 і 5. Очевидно, що чисел, які містять у розкладі на прості множники число 2 більше, ніж чисел, що містять у розкладі на прості множники число 5. Тому кількість нулів дорівнює кількості п'ятірок у розкладі добутку $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 2018$ на прості множники. Їхня кількість дорівнює сумі чисел:
$\left[\frac{2018}{5}\right] + \left[\frac{2018}{25}\right] + \left[\frac{2018}{125}\right] + \left[\frac{2018}{625}\right] =$
$= 403 + 80 + 16 + 3 = 502$.
(Нагадаємо, що позначення $[a]$ означає цілу частину числа a.)
Відповідь. 502.
3. Нехай у сестри було x слив, тоді перший брат отримав $\left(\frac{1}{2}x + 5\right)$ слив, а другий — $\left(\frac{1}{2}\left(x - \left(\frac{1}{2}x + 5\right)\right) + 5\right)$ слив. Складає-

мо рівняння: $\left(\frac{1}{2}x+5\right)+\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}(x+5)\right)+5=x$,

звідки $x=30$.

Відповідь. 30 слив.

4. Нехай X — довільна точка шуканої фігури, тоді $AX+BX=AB$.

Якщо точка X не лежить на прямій AB, то точки A, B, X є вершинами трикутника, а тому, згідно з нерівністю трикутника, $AX+BX>AB$, що суперечить умові задачі. Отже, поза прямою AB не існує точок шуканої фігури.

Нехай точка X лежить на прямій AB. Тоді можливі такі три випадки розміщення точок A, B, X.

1) Точка A лежить між точками X і B (*рис. 1*).

Рис. 1

У цьому випадку

$AX+BX=AX+(AB+AX)=AB+2AX>AB$,

що не задовольняє умову задачі.

2) Точка B лежить між точками X і A (*Рис. 2*).

Рис. 2

У цьому випадку

$AX+BX=(AB+BX)+BX=AB+ABX>AB$,

що також не задовольняє умову задачі.

3) Точка X лежить між точками A і B (*рис. 3*).

Рис. 3

Для кожної точки X відрізка AB умова $AX+BX=AB$ виконується.

Отже, шуканою фігурою є відрізок AB.

Відповідь. Відрізок AB.

5. Нехай $\overline{ab}=10a+b$ — подане число.

За умовою $\overline{1ab1}=21(10a+b)$, тобто

$1000+100a+10b+1=210a+21b$,

$110a+11b=1001$.

Оскільки число $110a$ закінчується цифрою 0, то число $11b$ має закінчуватися цифрою 1, отже $b=1$, тоді $a=9$.

Відповідь. 91.

6. Розв’язання подамо у вигляді таблиці.

Кроки переливання / Кількість (у л) води	1	2	3	4	5	6	7	8
12-літрова посудина	12	4	4	9	9	1	1	6
8-літрова посудина	0	8	3	3	0	8	6	6
5-літрова посудина	0	0	5	0	3	3	5	0

8 КЛАС

1. Поділимо числа в лівій частині на 504 групи по чотири послідовних натуральних числа в кожній. У будь-якій групі виду $*n*(n+1)*(n+2)*(n+3)$ маємо:

$*n*(n+1)*(n+2)*(n+3)=$

$=+n-(n+1)-(n+2)+(n+3)=0$.

Можна завжди досягти рівності числу 0 значень лівої та правої частин:

$+1-2-2+4+5-6-7+8+\ldots$

$+2013-2014-2015+2016=$

$=2017-2018-2019+2020$.

2. Нехай швидкість потяга за розкладом становить 100 %, а час за розкладом — x год, тоді швидкість насправді — 80 %, а час насправді нехай становить y год. Оскільки швидкість і час — величини обернено пропорційні, то складемо пропорцію: $\frac{100}{80}=\frac{y}{x}$,

звідки $y=1{,}25x$, тобто час насправді становить 125 %. Отже, час руху на перегоні збільшився на $125\%-100\%=25\%$.

Відповідь. На 25 %.

3. Для того щоб число A, що є значенням виразу 2018^3+3^{2018}, ділилося на 5^{26}, необхідно, щоб воно ділилося на 5. Доведемо, що число A не ділиться на 5.

Справді, число 2018^3 закінчується цифрою 2, а число 3^{2018} — цифрою 9. Покажемо це.

3^0 закінчується цифрою 1,
3^1 закінчується цифрою 3,
3^2 закінчується цифрою 9,
3^3 закінчується цифрою 7,
3^4 закінчується цифрою 1 тощо.

Отже, остання цифра повторюється через чотири «кроки», тобто числа

$3^0,\ 3^4,\ 3^8,\ \ldots,\ 3^{2016}$ закінчуються цифрою 1,

$3^1,\ 3^5,\ 3^9,\ \ldots,\ 3^{2017}$ закінчуються цифрою 3,

$3^2,\ 3^6,\ 3^{10},\ \ldots,\ 3^{2018}$ закінчуються цифрою 9.

Тому останньою цифрою числа A є цифра 1, отже, ділитися націло на 5 воно не може.

Відповідь. Ні.

4. Нехай у прямокутному трикутнику ABC ($\angle C = 90^\circ$) проведені бісектриса CL і медіана CM (*рис. 4*).

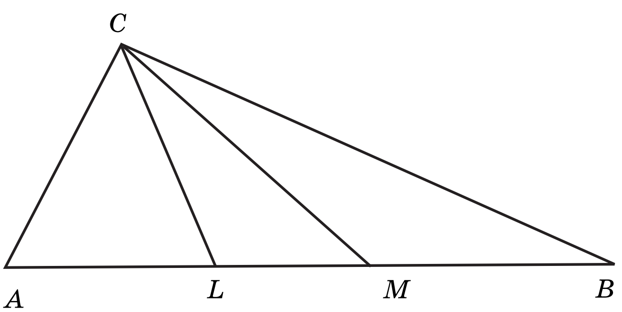


Рис. 4

Вони утворюють трикутник CLM, що за умовою є рівнобедреним. Оскільки в довільному (не рівнобедреному) трикутнику бісектриса менша від медіани, то $CL \neq CM$. Тоді в трикутнику CLM $CL = LM$.

Нехай кути при основі трикутника CLM дорівнюють α. Тоді в трикутнику CMB $\angle CMB = 180^\circ - \alpha$, $\angle MCB = 45^\circ - \alpha$, $\angle MBC = \angle MCB = 45^\circ - \alpha$ (оскільки медіана, проведена до гіпотенузи, дорівнює половині гіпотенузи, то $CM = MB$ і ΔCMB — рівнобедрений).

За теоремою про суму кутів трикутника $180 - \alpha + 45^\circ - \alpha + 45^\circ - \alpha = 180^\circ$, звідки $\alpha = 30^\circ$.

Тоді $\angle MBC = 45^\circ - 30^\circ = 15^\circ$,

$\angle CAB = 90^\circ - 15^\circ = 75^\circ$.

Відповідь. 15° і 75°.

5. Той, хто починає гру, може забезпечити собі виграш, узявши за першим ходом 4 камінці, а за всіма подальшими — по одному. Так парна кількість узятих загалом камінців матиме місце лише після ходів першого, а перемагає гравець, після ходу якого ця величина дорівнюватиме 2018.

Відповідь. Той, хто починає гру.

6. $\begin{cases} |xy| - |x| + 1 - |y| = 0, \\ x^2 + y^2 = 1, \end{cases}$

$\begin{cases} |x|(|y| - 1) - (|y| - 1) = 0, \\ x^2 + y^2 = 1, \end{cases}$

$\begin{cases} (|x| - 1)(|y| - 1) = 0, \\ x^2 + y^2 = 1, \end{cases}$

$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} |x| = 1, \\ |y| = 1, \end{array}\right. \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$

Звідки маємо розв'язки $(1;0)$, $(-1;0)$, $(0;1)$, $(0;-1)$.

Відповідь. $(1;0)$, $(-1;0)$, $(0;1)$, $(0;-1)$.

9 КЛАС

1. $2018^{2018^{2019}} + 1 = 2018^{\underbrace{2018 \cdot 2018 \cdot \ldots \cdot 2018}_{2019\ \text{множників}}} + 1 =$

$= 2018^{2018^{2018} \cdot 673 \cdot 3} + 1 = \left(2018^{2018^{2018} \cdot 673}\right)^3 + 1^3.$

Останній вираз можна розкласти на множники за формулою суми кубів і число $2018^{2018^{2018} \cdot 673} + 1$ буде дільником поданого числа. Отже, подане число є складеним.

Відповідь. Складене.

2. Нехай зараз батькові x років, матері — y років, синові — z років. Тоді за умовою задачі $x + y + z = 65$.

Якби 9 років тому сім'я також складалася з 3 осіб, то на той період сума років усіх членів сім'ї дорівнювала б $65 - 9 \cdot 3 = 38$, а за умовою задачі вона дорівнює 40. Отже, 9 років тому в сім'ї ще не було сина, тому сума років членів сім'ї на той період складалася з років батька і матері, тобто $(x-9)+(x-9)=40$ або $x+y=58$.

Оскільки 4 роки тому батько був старший за сина в 9 разів, то $x-4=9(z-4)$ або $x-9z=-32$.

Маємо систему рівнянь: $\begin{cases} x+y+z=65, \\ x+y=58, \\ x-9z=-32. \end{cases}$

Розв'язуючи цю систему рівнянь, знаходимо $x=31$, $y=27$, $z=7$. Отже, на сьогодні батькові 31 рік.

Відповідь. 31 рік.

3. Нехай $2018=a$. Порівняємо числа

$\sqrt{(a-1)^{a+1}\cdot(a+1)^{a-1}}$ і a^a або $(a-1)^{a+1}\cdot(a+1)^{a-1}$ і a^{2a}.

$$(a-1)^{a+1}\cdot(a+1)^{a-1}=(a-1)^{a-1+2}\cdot(a+1)^{a-1}=$$

$$=(a-1)^{a-1}\cdot(a-1)^2\cdot(a+1)^{a-1}=$$

$$=((a-1)(a+1))^{a-1}\cdot(a-1)^2=(a^2-1)^{a-1}\cdot(a-1)^2.$$

Знайдемо частку: $\dfrac{(a^2-1)^{a-1}\cdot(a-1)^2}{a^{2a}}=$

$$\frac{(a^2-1)^{a-1}\cdot(a-1)^2}{a^{2(a-1)}\cdot a^2}=\left(\frac{a^2-1}{a^2}\right)^{a-1}\cdot\left(\frac{a-1}{a}\right)^2<1,$$

оскільки $\dfrac{a^2-1}{a^2}<1$ і $\dfrac{a-1}{a}<1$.

Отже, $\sqrt{(a-1)^{a+1}\cdot(a+1)^{a-1}}<a^a$.

Відповідь. $\sqrt{2017^{2019}\cdot2019^{2017}}<2018^{2018}$.

4. Продовжимо CA за точку A і позначимо точку E таку, що $AE=AD$ (*рис. 5*).

Прямокутні трикутники BAE і BAD рівні за двома катетами, отже, $BD=BE$. Доведемо, що $DC\ge DE$.

Через точку D проведемо пряму, паралельну BC. Нехай вона перетинає відрізок BE в точці F.

Достатньо довести, що $BF\ge FE$, і, застосувавши теорему Фалеса, одержати, що $DC\ge DE$.

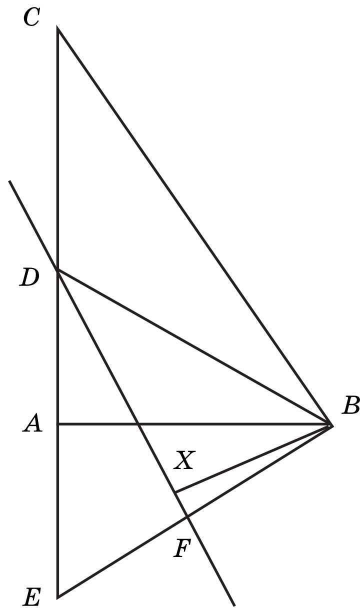


Рис. 5

Або достатньо довести, що $BF\ge\dfrac{1}{2}BE=\dfrac{1}{2}BD$.

Кути FDB і DBC — внутрішні різносторонні при паралельних DF і BC та січній BD, отже, $\angle BDF=30°$.

Тоді в трикутнику BDF сторона BF, що лежить проти кута $30°$, не коротша за половину BD. Щоб це пояснити, проведемо з точки B перпендикуляр на DF. Нехай точка X — основа цього перпендикуляра, тоді $BX=\dfrac{1}{2}BD$, оскільки BX — катет, що лежить проти кута $30°$ у прямокутному трикутнику DBX, а $BF\ge BX$, оскільки похила не коротша за перпендикуляр.

Отже, $BF\ge\dfrac{1}{2}BD$, $CD\ge2AD$, що й потрібно було довести.

5. ОДЗ: $x\ge1$.

Застосуємо нерівність Коші – Буняковського:

$$(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n)^2\le$$

$$\le(a_1{}^2+a_2{}^2+\ldots+a_n{}^2)(b_1{}^2+b_2{}^2+\ldots+b_n{}^2).$$

Нехай $a_1=2$, $a_2=x$, $b_1=\sqrt{x-1}$, $b_2=5$. Тоді

$\left(2\sqrt{x-1}+5x\right)^2\le\left(x^2+4\right)\left(x+24\right)$,

$\sqrt{x-1}+5x\le\sqrt{\left(x^2+4\right)\left(x+24\right)}$.

Відомо, що рівність досягається, якщо

$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}$, тобто $\frac{2}{\sqrt{x-1}}=\frac{x}{5}$, $x\sqrt{x-1}=10$,

$x^3-x^2-100=0$,

$(x-5)\left(x^2+4x+20\right)=0$, $x=5$.

Відповідь. 5.

6. Позначимо фішки зліва направо: A, B, C, D, E. Перший гравець може діяти так: своїм першим ходом фішку E поставить у крайню праву клітинку. Фішки A, B, C, D поділимо на пари: $(A;B)$ і $(C;D)$. Далі першому гравцеві досить дотримуватися такої стратегії: на кожен хід суперника він відповідатиме ходом іншої фішки пари так, щоб дві фішки однієї пари опинилися в сусідніх клітинках. Зрозуміло, що перший гравець завжди матиме можливість зробити свій черговий хід.

10 КЛАС

1. $\sqrt{2019+2\sqrt{2018}}-\sqrt{2019-2\sqrt{2018}}=$

$=\sqrt{\left(\sqrt{2018}\right)^2+2\sqrt{2018}+1}-$

$-\sqrt{\left(\sqrt{2018}\right)^2-2\sqrt{2018}+1}=$

$=\sqrt{\left(\sqrt{2018}+1\right)^2}-\sqrt{\left(\sqrt{2018}-1\right)^2}=$

$=\sqrt{2018}+1-\left(\sqrt{2018}-1\right)=2.$

Відповідь. 2.

2. ОДЗ: $x+y\ge0$.

Нехай $x+y=t$, тоді функція $f(t)=\sqrt{t}+2t^4$ зростає при всіх $t\ge0$. Тому рівняння $\sqrt{t}+2t^4=3$ має не більше одного кореня. Очевидно, що $t=1$ — корінь цього рівняння. Отже,

$\begin{cases}x+y=1,\\x^2+y^2=1,\end{cases}$ $\begin{cases}x+y=1,\\x^2+(1-x)^2=1.\end{cases}$

Із другого рівняння системи знаходимо: $x^2+1-2x+x^2-1=0$, $2x^2-2x=0$, $x=0$ або $x=1$.

Тоді розв'язком системи рівнянь є пари чисел $(0;1)$ і $(1;0)$.

Відповідь. $(0;1)$; $(1;0)$.

3. Помножимо обидві частини нерівності $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge a+b+c$ на abc. Дістанемо рівносильну нерівність $bc+ac+ab\ge(a+b+c)abc$.

Відомо, що $a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ac$. Тоді $a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ac)\ge3(ab+bc+ac)$,

$(a+b+c)^2\ge3(ab+bc+ac)$, звідси

$(a+b+c)^2\ge3(ab+bc+ac)\ge3(a+b+c)abc$.

Отже, $a+b+c\ge3abc$, що й потрібно було довести.

4. Оскільки бісектриса кута є його віссю симетрії, то точка A_1 належить променю OB, а точка B_1 — променю OA, ОА, $OA_1=OA$, $OB_1=OB$ (*рис. 6*).

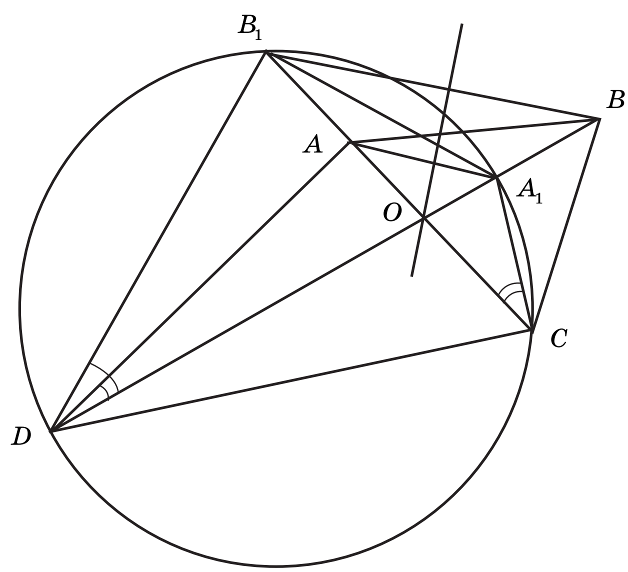


Рис. 6

Із подібності трикутників AOB і COD маємо: $\frac{AO}{OC}=\frac{BO}{OD}$ або $AO\cdot OD=BO\cdot OC$.

Отже, $A_1O \cdot OD = AO \cdot OD = BO \cdot OC = B_1O \cdot OC$. Тому точки D, B_1, A_1 і C лежать на одному колі. Тоді $\angle ACA_1 = \angle B_1CA_1 = \angle B_1DA_1 = \angle B_1DB$. Отже, $\angle ACA_1 = \angle BDB_1$, що й потрібно було довести.

5. Зауважимо, що якщо x_0 є коренем поданого рівняння, то $-x_0$ також є коренем рівняння. Тому, щоб рівняння мало один корінь, необхідно, щоб $x_0 = -x_0$, тобто $x_0 = 0$.

При $x=0$ $a^2=1$, звідки $a=\pm 1$.

1) При $a=1$ рівняння набуває вигляду $x^6+1=\sqrt{1-|x|}$, де $|x|\le 1$.

При будь-яких значеннях x $x^6+1\ge 1$, а при $|x|\le 1$ $\sqrt{1-|x|}\le 1$, тому рівняння рівносильне системі рівнянь $\begin{cases} x^6+1=0, \\ \sqrt{1-|x|}=1, \end{cases}$ єдиним розв'язком якої є $x=0$.

2) При $a=-1$ рівняння набуває вигляду $1-x^6=-\sqrt{1-|x|}$, де $|x|\le 1$, $\sqrt{1-|x|}=x^6-1$.

Рівняння має розв'язки, якщо $x^6-1\ge 0$, тобто $|x|\ge 1$.

Маємо: $\begin{cases} |x|\le 1, \\ |x|\ge 1, \end{cases}$ звідки $|x|=1$, $x=\pm 1$ — два корені.

Отже, рівняння має єдиний корінь при $a=1$.

Відповідь. При $a=1$.

6. Доведемо, що виграє перший гравець. Він може ходити так, щоб після його ходу вільний член здобутого многочлена був непарним, а коефіцієнти при x^2 і x мали однакову парність. Тоді після ходів першого гравця будуть з'являтися квадратні тричлени, які в цілих точках набувають лише непарних значень, а тому не матимуть цілих коренів. Діючи саме так, перший гравець не програє. Зауважимо, що з кожним ходом сума коефіцієнтів отриманого многочлена зменшується на 1. Отже, через декілька ходів ця сума дорівнюватиме 0, тобто отриманий многочлен із такою сумою коефіцієнтів матиме корінь $x=1$. Це означатиме, що саме тоді гра закінчиться й виграє перший гравець. Стратегія для першого гравця може бути такою: за першим ходом віднімає x^2, а далі повторює ходи суперника.

11 КЛАС

1. $\sqrt[3]{\dfrac{1\cdot 2\cdot 4+2\cdot 4\cdot 8+\ldots+n\cdot 2n\cdot 4n}{1\cdot 3\cdot 9+2\cdot 6\cdot 18+n\cdot 3n\cdot 6n}}=$

$=\sqrt[3]{\dfrac{8\cdot\left(1+8+\ldots+n^3\right)}{27\left(1+8+\ldots+n^3\right)}}=\sqrt[3]{\dfrac{8}{3}}=\dfrac{2}{3}$

при будь-яких значеннях n.

Відповідь. $\dfrac{2}{3}$.

2. $1+2+3+\ldots+2012=2013\cdot 1006$ — ділиться на 11. Якщо замінити суму двох чисел остачею від ділення на 11, то не зміниться подільність суми цих чисел на 11. Тому сума чисел x і 1012 кратна 11. Оскільки число 1012 кратне 11, то і число x кратне 11, причому воно менше від 11, тому $x=0$.
Відповідь. $x=0$.

3. Оскільки $x>0$ і $y>0$, то за нерівністю між середнім арифметичним і середнім геометричним двох додатних чисел маємо $\sqrt{xy}\le\dfrac{x+y}{2}$. За умовою $\dfrac{x+y}{2}=\dfrac{1}{2}$, тому $xy\le\dfrac{1}{4}$.

Тоді

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)=\frac{1+x+y+xy}{xy}=\frac{2}{xy}+1\ge\frac{2}{\frac{1}{4}}+1=9,$$

що й потрібно було довести.

4. Для зручності позначимо $\dfrac{1}{x}=a$, $\dfrac{1}{y}=b$, $\dfrac{1}{z}=c$.

Тоді $\begin{cases} a+b=2017, \\ b+c=2018, \\ c+a=2019. \end{cases}$

Додавши всі три рівняння, дістанемо: $2(a+b+c)=6054$, звідки $a+b+c=3027$.
Із першого рівняння системи знаходимо $c=3027-2017=1010$;
із другого рівняння системи знаходимо: $a=3027-2018=1009$;

із третього рівняння системи знаходимо $b = 3027 - 2019 = 1008$.

Тоді $x = \frac{1}{a} = \frac{1}{1009}$, $y = \frac{1}{b} = \frac{1}{1008}$, $z = \frac{1}{c} = \frac{1}{1010}$.

Відповідь. $\frac{1}{1009}$, $\frac{1}{1008}$, $\frac{1}{1010}$.

5. Оскільки бісектриси односторонніх кутів є взаємно перпендикулярними, то $\angle AMB = 90°$ і $\angle CND = 90°$.

Нехай бісектриси зовнішніх кутів A і B перетинають прямі BC і AD у точках E і F відповідно, а бісектриси зовнішніх кутів D і C перетинають прямі BC і AD у точках P і K відповідно (*рис.* 7).

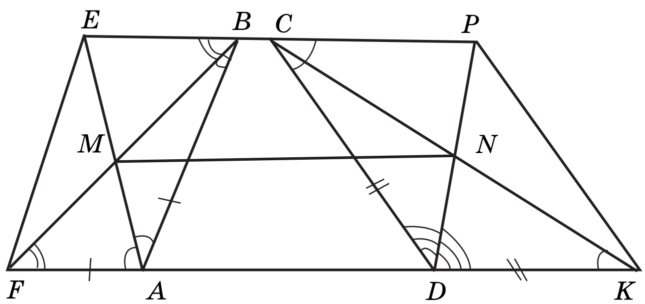


Рис. 7

$AB = AF$, $CD = DK$. Чотирикутники $ABEF$ і $CDKP$ — ромби. Точка M — середина діагоналі BF, точка N — середина діагоналі CK, тоді MN — середня лінія трапеції $FBCK$,

$$MN = \frac{BC + FK}{2} = \frac{BC + FA + AD + DK}{2} =$$

$$\frac{BC + AB + AD + CD}{2} = \frac{P_{ABCD}}{2},$$

звідки $P_{ABCD} = 24$ см.

Відповідь. 24 см.

6. Припустимо, що така функція існує. Тоді при всіх $x \in \mathbb{R}$ має виконуватися рівність $f\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)\right) = \sin\left(2020\left(\frac{\pi}{2} + x\right)\right)$. Звідси $f(\cos x) = \sin(1010\pi + 2020x) = \sin 2020x$.

Але $f(\cos x)$ — парна функція, а $g(x) = \sin 2020x$ — непарна. Тому рівність $f(\sin x) = \sin 2020x$ не виконується при всіх $x \in \mathbb{R}$.

Відповідь. Не існує.

ВАРІАНТ 4

6 КЛАС

1. У запису 9 8 7 6 5 4 3 2 1 0 розставте між цифрами знаки арифметичних дій та дужки так, щоб результат дорівнював 2018.
2. У багатоповерховому будинку до квартир на першому поверсі веде 7 сходинок, а між рештою поверхів однакова кількість сходинок, відмінна від 7. Одного разу хлопці вирішили відмовитися від ліфта і піднятися до своїх квартир пішки. Для того щоб потрапити до своєї квартири, Андрій подолав 95 сходинок, Богдан — 117 сходинок, Володя — 205 сходинок, Григорій — 249, Дмитро — 293 сходинки. Ярослав мешкає на останньому поверсі й подолав аж 535 сходинок. На якому поверсі мешкає кожний із хлопців?
3. Іринка та Оленка пішли по гриби. Разом вони зібрали 70 грибів — лисичок та білих. $\frac{5}{9}$ грибів, зібраних Іринкою, були лисичками, а $\frac{2}{17}$ грибів, зібраних Оленкою, були білими. Скільки серед зібраних обома дівчатками грибів було білих?
4. На дошці записані натуральні числа від 1 до 2018. Петрик спочатку підкреслив усі числа, що діляться на 2, після цього він підкреслив числа, кратні 3, а після цього — числа, кратні 4. Скільки чисел були підкреслені двічі?
5. На столі лежить 2019 цукерок. Сашко, Мишко та Віталик по черзі беруть цукерки зі стола. Першим ходить Сашко, який має право брати лише 1 цукерку за кожний свій хід. Далі хід робить Мишко, який має право за один хід узяти зі стола рівно 1, 3, 5, 7 чи 9 цукерок. Третім ходить Віталик, який своїм ходом може взяти зі стола рівно

2, 4, 6, 8 чи 10 цукерок (якщо на столі залишилась рівно 1 цукерка, то він свій хід пропускає). Далі знову хід робить Сашко, за ним Мишко і так далі. Перемагає той, хто забере зі стола своїм ходом останню цукерку. Хто переможе в цій грі? Відповідь обґрунтуйте.

7 КЛАС

1. Знайдіть останню цифру числа $5^{2018}(1+2+3+\ldots+2018)$.
2. Танго танцюють парами. На танцювальній вечірці, де було менше ніж 50 осіб, $\frac{3}{4}$ усіх присутніх юнаків танцювали танго з $\frac{4}{5}$ усіх дівчат. Скільки людей було на вечірці?
3. Членами футбольного клубу є 200 гравців усіх вікових груп, 10 % яких — українці, а решта — іноземні гравці. Скільки іноземних гравців потрібно виключити з футбольного клубу, щоб українці становили 20 % від усіх членів клубу?
4. Обчисліть значення виразу
$$\frac{1}{2-3}-\frac{4}{5-6}+\frac{7}{8-9}-\frac{10}{11-12}+\ldots+\frac{2011}{2012-2013}-\frac{2014}{2015-2016}+\frac{2017}{2018-2019}.$$
5. Автобус рухався до міста Суми зі швидкістю 60 км/год. Дорогою його обігнав автомобіль, що рухався зі швидкістю 80 км/год. Автомобіль прибув до Сум, через 15 хвилин рушив у зворотному напрямку й на відстані 10 км від міста Суми знову зустрів автобус. На якій відстані від Сум було місце першої зустрічі?
6. Знайдіть усі двоцифрові натуральні числа N, що дорівнюють сумі цифр числа N, збільшеній на куб суми цифр числа N.

8 КЛАС

1. Обчисліть значення виразу
$$\frac{1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\ldots+2016\cdot2017+2017\cdot2018}{1^2+3^2+5^2+\ldots+2015^2+2017^2}.$$
2. На книжковій полиці, щільно одна до одної, розташовані дві книжки, кожна з яких містить по 250 аркушів. Кожна з обкладинок у 10 разів товща за папір, на якому надруковані ці книжки. У кожну книжку вкладена закладка, причому відстань між закладками втричі менша від загальної товщини двох книжок. Між якими аркушами розміщена закладка в другій книжці, якщо в першій книжці вона розташована посередині?
3. Відомо, що $\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a+b)(b+c)(c+a)}=\frac{19}{99}$.

   Знайдіть $\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}$.
4. На сторонах AB, BC, CA трикутника ABC позначені відповідно точки M, N, K так, щоб виконувалися умови $BM=BN$ і $CN=CK$. Знайдіть градусну міру кута BAC, якщо $\angle MNK=40°$.
5. Скільки розв'язків має рівняння $\frac{2}{|1-x|+|x+1|}=a$ залежно від параметра a?
6. Відомо, що додатні числа a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 задовольняють умови:

   $a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2+a_5^2=2019^2$,

   $b_1^2+b_2^2+b_3^2+b_4^2+b_5^2=2018^2$,

   $a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+a_4b_4+a_5b_5=2019\cdot2018$.

   Знайдіть відношення $\frac{a_1}{b_1}$.

9 КЛАС

1. При яких значеннях параметра a параболи $y=x^2+2018x+a$ і $y=-x^2+ax+2018$ мають точку дотику?
2. Автомобіль рухався зі сталою швидкістю. Пасажир побачив кілометровий стовп, на якому було написане деяке двоцифрове число. Через півгодини він побачив кілометровий стовп, на якому було написане двоцифрове число, що записане тими самими цифрами, але в зворотному порядку. Ще через півгодини він побачив стовп, на якому було записане трицифрове число, що складалося з тих самих двох цифр і нуля. Знайдіть швидкість автомобіля (у км/год).

3. До сторін AB і CD ромба $ABCD$ проведені серединні перпендикуляри. Ці перпендикуляри розділили діагональ AC на три рівні частини. Знайдіть висоту ромба, якщо $AB = 1$.
4. Розв'яжіть рівняння $\left[x^2\right] = [2019x - 2018] + \{x + 2017\}$.
(Нагадаємо, що $[a]$ — позначення цілої частини числа a, $\{a\}$ — позначення дробової частини числа a.)
5. На дошці записано число 6039. Двоє гравців по черзі віднімають від записаного на дошці числа будь-який його дільник і отриману різницю записують замість попереднього числа. Програє той гравець, після ходу якого на дошці буде записано число 0. Хто з гравців може забезпечити собі виграш?
6. Побудуйте на координатній площині фігуру, задану системою нерівностей $\begin{cases} |y| - |x| \le 1, \\ |y| \ge x^2 + 1. \end{cases}$

10 КЛАС

1. Знайдіть дві останні цифри числа $1! + 2! + 3! + \ldots + 2018!$.
2. Знайдіть знаменник зростаючої геометричної прогресії, якщо її четвертий, п'ятий і сьомий члени утворюють арифметичну прогресію.
3. Доведіть нерівність $2 \cdot \sqrt[2018]{2018!} < 2019$.
4. П'ятикутник $ABCDEF$ вписаний у коло, причому $AB \| DE$. Доведіть, що якщо $AC^2 = BD^2 + CE^2$, то $\angle ABC = 90°$.
5. Знайдіть значення виразу $x + y$, якщо $\dfrac{x(y+2018)}{x^2 + (y+2018)^2} = -\dfrac{1}{2}$.
6. На крайній ліворуч клітинці смужки розміром 1×2018 стоїть біла фішка, а на останній — чорна. Білою фішкою грає Сашко, а чорною — Марійка. Сашко переміщує свою фішку на одну або на дві клітинки праворуч, а Марійка — на одну або на дві клітинки ліворуч. Гравцям не можна робити два ходи підряд, пропускати свій хід або переставляти свою фішку через фішку суперника. Програє той, хто не зможе зробити свій черговий хід. Хто виграє за правильної гри: Сашко, який починає гру, чи Марійка?

11 КЛАС

1. Скільки існує трикутників, у яких довжини всіх трьох сторін є цілими числами і дві сторони мають довжини 3 і 2018?
2. З'ясуйте, чи існує арифметична прогресія з відмінною від нуля різницею, яка має 2018 елементів, причому сума всіх елементів із непарними номерами дорівнює сумі всіх елементів із парними номерами.
3. Доведіть, що якщо $a^2 + b^2 = 1$, $c^2 + d^2 = 1$, то $|ac - bd| \le 1$.
4. Кілька дуг кола пофарбовано в чорний колір. Сума довжин пофарбованих дуг менша від довжини півкола. Доведіть, що існує діаметр, обидва кінці якого не зафарбовані.
5. Точки A_1 і A_3 лежать по один бік від заданої площини α, а точки A_2 і A_4 — по інший бік. Нехай B_1, B_2, B_3, B_4 — точки перетину відрізків A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_1 із площиною α відповідно. Знайдіть значення добутку $\dfrac{A_1B_1}{B_1A_2} \cdot \dfrac{A_2B_2}{B_2A_3} \cdot \dfrac{A_3B_3}{B_3A_3} \cdot \dfrac{A_4B_4}{B_4A_1}$.
6. Знайдіть найбільше значення параметра a, при якому нерівність $x^2 \ge a[x] \cdot \{x\}$ виконується для всіх дійсних чисел x. ($[x]$ — ціла частина числа x, $\{x\}$ — дробова частина числа x.)
З'ясуйте, чи існує функція f, областю визначення і множиною значень якої є всі дійсні числа, що не набуває жодного свого значення більше, ніж в одній точці й при всіх дійсних x задовольняє нерівність $\sqrt{f(x^2) - (f(x))^2} \ge \dfrac{1}{2}$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ВАРІАНТА 4

6 КЛАС

1. Урахуємо, що $9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$, а $504 \cdot 4 = 2016$. Тоді розв'язання задачі може бути, наприклад, таким: $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot (6 + 5 - 4 - 3) + 2 + 1 \cdot 0$.
Відповідь. Наприклад, $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot (6 + 5 - 4 - 3) + 2 + 1 \cdot 0$.

2. Усі хлопці подолали 7 сходинок, а далі їхній шлях складався з однакових переходів між поверхами. Тому, починаючи з першого поверху, вони подолали таку кількість сходинок:
   - Андрій — 88,
   - Богдан — 110,
   - Володя — 198,
   - Григорій — 242,
   - Дмитро — 286,
   - Ярослав — 528.

   Помічаємо, що всі ці числа мають спільний дільник 22, тому нескладно підрахувати поверх, на якому мешкає кожний із хлопців: Андрій — 5 поверх (він подолає 7 сходинок до першого поверху, а далі — ще 88, тобто підніметься ще на 4 поверхи), Богдан — 6 поверх, Володя — 10 поверх, Григорій — 12 поверх, Дмитро — 14 поверх, Ярослав — 25 поверх.
   Відповідь. Андрій мешкає на 5 поверсі; Богдан — на 6 поверсі, Володя — на 10 поверсі, Григорій — на 12 поверсі, Дмитро — на 14 поверсі, Ярослав — на 25 поверсі.
3. За умовою, кількість грибів, зібраних Іринкою, ділиться на 9, а кількість грибів, зібраних Оленкою,— на 17. Сума цих чисел дорівнює 70. Тобто, якщо Іринка зібрала x грибів, а Оленка — y грибів, то $9x+17y=70$. Шляхом перебору знаходимо, що $x=4$, $y=2$. Отже, Іринка зібрала 36 грибів, а Оленка — 34 гриба. Серед Іринчиних грибів було $36\cdot\frac{4}{9}=16$ білих, а серед Оленчиних — $34\cdot\frac{2}{17}=4$ білих. Разом вони зібрали $16+4=20$ білих грибів.
   Відповідь. 20 грибів.
4. Розглянемо усі числа від 1 до 12, оскільки їхні властивості повторюватимуться для кожних наступних 12 послідовних чисел. Числа 1, 5, 7, 11 не підкреслені; числа 2, 3, 9, 10 підкреслені один раз; числа 4, 6, 8 підкреслені двічі, а число 12 — тричі. Отже, підкресленими двічі є три числа з кожних 12. Оскільки $12\cdot168=2016$, то серед перших 2016 чисел двічі підкресленими є $168\cdot3=504$ числа. Залишається порахувати, скільки двічі підкреслених серед чисел 2017 і 2018. Таких чисел тут немає.
   Відповідь: 504 числа.
5. Після ходу Сашка на столі залишається 2018 цукерок. Мишко перед своїм ходом має парну кількість цукерок, а тому забрати останню не може. Після його ходу на столі залишається непарна кількість цукерок і настає черга ходу Віталика. Він теж не може забрати останню цукерку. Після його ходу на столі — непарна кількість цукерок. Далі Сашко забирає 1 цукерку і перед ходом Мишка знову на столі парна кількість цукерок. Отже, забрати останню цукерку не можуть ні Мишко, ні Віталик. Оскільки після кожного ходу кількість цукерок на столі зменшується, то настане момент, коли перед ходом Сашка на столі буде рівно 1 цукерка.
   Відповідь. Перемагає Сашко.

7 КЛАС

1. Останньою цифрою числа 5^{2018} є цифра 5, тому шукана остання цифра добутку залежить від того, парним чи непарним числом є сума $1+2+3+\ldots+2018$. У цій сумі порівну парних та непарних доданків, тому вона містить 1009 непарних доданків, тобто сума є непарним числом. Остання цифра добутку числа, що закінчується цифрою 5, та непарного числа дорівнює 5.
   Відповідь. 5.
2. Нехай було x юнаків і y дівчат. Тому $\frac{3}{4}x=\frac{4}{5}y$, або $15x=16y$, тобто число x кратне 16, а y кратне 15. Очевидно, що умови задовольняють лише найменші значення, а саме $x=16$, $y=15$. Отже, на вечірці була 31 особа.
   Відповідь. 31 особа.
3. Зараз у команді 20 українців. Якщо виключити x іноземних гравців, то кількість українців становитиме $\frac{20}{200-x}=\frac{1}{5}$ усіх членів клубу. Тоді $100=200-x$, $x=100$.
   Відповідь. 100 іноземних гравців.
4. $\frac{1}{2-3}-\frac{4}{5-6}+\frac{7}{8-9}-\frac{10}{11-12}+\ldots+$

ВИДАВНИЧА ГРУПА «ОСНОВА»

$$\frac{2011}{2012-2013}-\frac{2014}{2015-2016}+\frac{2017}{2018-2019}=$$
$$=(-1+4)+(-7+10)+\ldots+(-2011+2014)-2017=$$
$$=\underbrace{3+3+3+\ldots+3}_{336}-2017=-1009.$$

Відповідь. -1009.

5. Нехай C — місце першої зустрічі, а B — місце другої зустрічі, тоді $AB=10$ км (*рис. 1*).

Рис.1

Позначимо $CB=s$ км. Від першої до другої зустрічі, тобто відстань CB автобус проїхав за $\frac{s}{60}$ год, а автомобіль проїхав відстань CB за $\frac{s}{80}$ год, відстань BA — за $\frac{10}{80}=\frac{1}{8}$ год. Далі: 15 хв $=\frac{1}{4}$ год — стоянка, $\frac{1}{8}$ год — відстань із A у B. Маємо рівняння $\frac{s}{60}=\frac{s}{80}+\frac{1}{2}$, звідки $s=120$ км.

Тоді $CA=120+10=130$ км.

Відповідь. 130 км.

6. Позначимо суму цифр числа N через n. Тоді маємо таку рівність: $N=n+n^3$. Зрозуміло, що куб суми цифр не перевищує число 99, а натуральних чисел, куби яких не перевищують 99, усього чотири: 1, 2, 3, 4. Достатньо їх перебрати, щоб із рівності $N=n+n^3$ знайти можливі значення N.

$N=1+1=2$ — сума цифр дорівнює 2; не задовольняє умову задачі.

$N=2+8=10$ — сума цифр дорівнює 1; не задовольняє умову задачі.

$N=3+27=30$ — сума цифр дорівнює 3; задовольняє умову задачі.

$N=4+64=68$ — сума цифр дорівнює 14; не задовольняє умову задачі.

Відповідь. 30.

8 КЛАС

1. Розглянемо чисельник:

$$1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\ldots+2016\cdot2017+2017\cdot2018=$$
$$=(0\cdot1+1\cdot2)+(2\cdot3+3\cdot4)+\ldots$$
$$+(2016\cdot2017+2017\cdot2018)=$$
$$=1\cdot(0+2)+3\cdot(2+4)+\ldots+2017(2016+2018)=$$
$$=1\cdot2\cdot1+3\cdot2\cdot3+\ldots+2017\cdot2\cdot2017=$$
$$=2\left(1^2+3^2+\ldots+2017^2\right).$$

Отже, чисельник удвічі більший за знаменник, тому значення виразу дорівнює 2.

Відповідь. 2.

2. 1-й спосіб. Замінимо обкладинку кожної книги на десять аркушів. Тоді всього в двох книжках $250\cdot2+10\cdot4=540$ аркушів, а відстань між закладками дорівнює $540:3=180$ аркушів. У першій книжці після закладки $250:2+10=135$ аркушів.

Тоді в другій книжці до закладки $180-135=45$ аркушів, із яких 10 аркушів — це обкладинка. Отже, закладка лежить після аркуша, номер якого дорівнює $45-10=35$, тобто між аркушами 35 і 36.

2-й спосіб. Сумарна кількість аркушів у двох книжках становить $250\cdot2+10\cdot4=540$ аркушів. Отже, товщина кожної обкладинки становить $\frac{1}{54}$ від товщини двох книжок. Між закладками розміщена третина від двох книжок, із яких чверть — це половина першої книжки, а $\frac{1}{54}$ — обкладинка другої книжки. Отже, кількість аркушів у другій книжці від обкладинки до закладки становить $\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{54}=\frac{7}{108}$ від сумарної кількості аркушів у двох книжок.

Це становить $540\cdot\frac{7}{108}=35$. Тобто закладка лежить між аркушами 35 і 36.

Відповідь. Між аркушами 35 і 36.

3. Нехай $a+b=x$, $b+c=y$, $c+a=z$.

Тоді $\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a+b)(b+c)(c+a)}=\frac{(z-y)(x-z)(y-z)}{xyz}$.

Оскільки $a=\frac{1}{2}(x-y+z)$, $b=\frac{1}{2}(y-z+x)$, $c=\frac{1}{2}(z-x+y)$, то

$$\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}=\frac{x-y+z}{2x}+\frac{y-z+x}{2y}+\frac{z-x+y}{2z}=$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{y-z}{2x}+\frac{1}{2}-\frac{z-x}{2y}+\frac{1}{2}-\frac{x-y}{2z}=$$

$$=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{y-z}{x}+\frac{z-x}{y}+\frac{x-y}{z}\right)=$$

$$\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{(y-z)yz+(z-x)zx+(x-y)xy}{xyz}=$$

$$=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{(z-y)(x-z)(y-x)}{xyz}=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{19}{99}=\frac{139}{99}.$$

Відповідь. $\frac{139}{99}$.

4. За побудовою трикутники BMN і CNK рівнобедрені *(рис. 2)*.

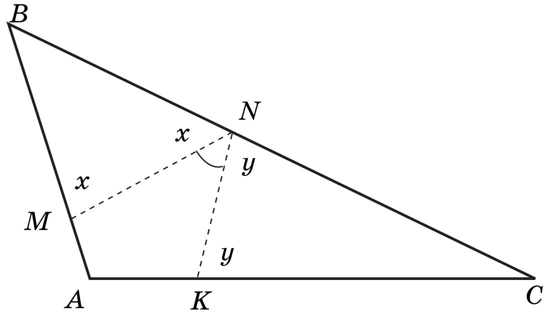


Рис. 2

Нехай $\angle BMN=\angle BNM=x$,

$\angle CNK=\angle CKN=y$. Тоді

$x+y=\angle BNM+\angle CNK=180^\circ-\angle MNK=140^\circ$.

Використовуючи теорему про суму кутів трикутника, можемо записати:

$\angle BAC=180^\circ-\angle CBA-\angle ACB=$

$=180^\circ-(180^\circ-2x)-(180^\circ-2y)=$

$=2(x+y)=180^\circ=280^\circ-180^\circ=100^\circ$.

Відповідь. 100°.

5. **Указівка.** Побудуйте в одній системі координат графіки функцій $f(x)=\frac{2}{|1-x|+|x+1|}$

і $y=a$. $f(x)=\begin{cases}-\frac{1}{x}, & x<-1,\\ 1, & -1\le x\le 1,\\ \frac{1}{x}, & x>1.\end{cases}$

Зрозуміло, що рівняння має стільки розв'язків, скільки спільних точок мають графіки функцій $f(x)$ і a.

Відповідь. При $a\in(-\infty;0)\cup(1;+\infty)$ рівняння розв'язків не має; при $a\in(0;1)$ рівняння має два розв'язки; при $a=1$ рівняння має безліч розв'язків.

6. Виконаємо такі перетворення:

$(2018a_1-2019b_1)^2+(2018a_2-2019b_2)^2+$

$+(2018a_3-2019b_3)^2=$

$=(2018a_4-2019b_4)^2+(2018a_5-2019b_5)^2=$

$=2018^2\left(a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2+a_5^2\right)+$

$+2019^2\left(b_1^2+b_2^2+b_3^2+b_4^2+b_5^2\right)-$

$-2\cdot 2018\cdot 2019(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+a_4b_4+a_5b_5)=$

$=2018^2\cdot 2019^2+2019^2\cdot 2018^2-$

$-2\cdot 2018^2\cdot 2019^2=0$.

Оскільки сума квадратів п'яти виразів може дорівнювати 0 тоді й тільки тоді, коли кожний доданок дорівнює 0, то $2018a_1-2019b_1=0$, звідки $\frac{a_1}{b_1}=\frac{2019}{2018}$.

Відповідь. $\frac{2019}{2018}$.

9 КЛАС

1. Параболи дотикаються, тобто мають рівно одну спільну точку, якщо рівняння $x^2+2018x+a=-x^2+ax+2018$ має один корінь.

$2x^2+(2018-a)x+(a-2018)=0$,

$D=(a-2018)^2-8(a-2018)=0$,

$(a-2018)(a-2018-8)=0$,

$a=2018$ або $a=2026$.

Відповідь. При $a=2018$ або 2026.

2. Позначимо двоцифрове число на першому стовпі через $\overline{ab}$, тоді на другому стовпі було число $\overline{ba}$, звідки очевидно, що $0<a<b$. Тоді на третьому могло бути написане одне з двох чисел: $\overline{a0b}$ або $\overline{ab0}$. Цифра b не може бути першою цифрою числа, оскільки швидкість

автомобіля є сталою й він не міг проїхати за перші півгодини відстань менше 100 км, а за наступні — більше 100 км.

Запишемо рівності для кожного з двох випадків:

1) $\overline{ba}-\overline{ab}=\overline{a0b}-\overline{ba}$, звідки

$10b+a-10a-b=100a+b-10b-a$,

$9b-9a=99a-9b$, $b=6a$.

Оскільки цифри a і b різні й відмінні від нуля, то $a=1$, $b=6$. Тоді числа на стовпах такі: 16, 61, 106.

2) $\overline{ba}-\overline{ab}=\overline{ab0}-\overline{ba}$, звідки

$10b+a-10a-b=100a+10b-10b-a$,

$9b-9a=99a$, $b=12a$, звідки $a=1$, $b=12$, що не задовольняє умову $0<b\le 9$.

Отже, автомобіль за півгодини проїжджав 45 км, тому шукана швидкість дорівнює 90 км/год.

Відповідь. 90 км/год.

3. Нехай CH — висота ромба, MK — серединний перпендикуляр до AB.

За умовою $CK=\frac{1}{3}AC$ (*рис. 3*) або $AK=\frac{1}{2}AC$ (*рис. 4*).

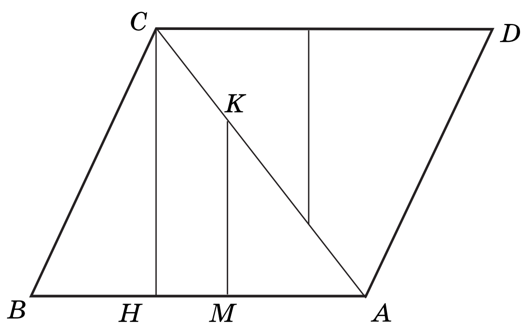


Рис. 3

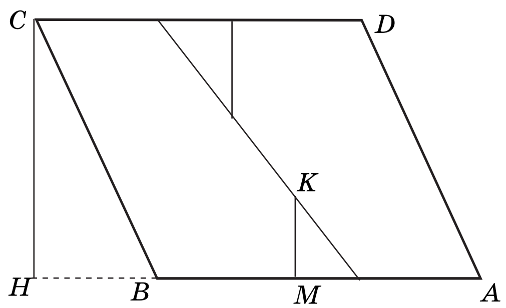


Рис.4

Розглянемо ці випадки окремо.

Нехай $CK=\frac{1}{3}AC$. Оскільки $CH\parallel KM$, то за теоремою про пропорційні відрізки $AM:AH=AK:AC=2:3$.

Оскільки $AM=\frac{1}{2}$, то $AH=\frac{3}{4}$,

$BH=AB-AH=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$.

Із прямокутного трикутника BCH знаходимо $CH=\sqrt{BC^2-BH^2}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{15}}{4}$.

Аналогічно, якщо $AK=\frac{1}{3}AC$,

то $AM:AH=AK:AC=1:3$.

Оскільки $AM=\frac{1}{2}$,

то $AH=\frac{2}{3}$, $BH=AH-AB=\frac{1}{2}$

та $CH=\sqrt{BC^2-BH^2}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Відповідь. $\frac{\sqrt{15}}{4}$ або $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

4. $\left[x^2\right]-\left[2019x-2018\right]=\left\{x+2017\right\}$. Оскільки ліва частина рівняння — ціле число, то $\left\{x+2017\right\}=0$, отже x — ціле число. Тому $\left[x^2\right]=x^2$, $\left[2019x-2018\right]=2019x-2018$.

Маємо рівняння $x^2-2019x+2018=0$, звідки $x=1$ або $x=2018$.

Відповідь. 1; 2018.

5. Відомо, що всі непарні числа мають тільки непарні дільники. Отже, першому гравцеві доведеться записати на дошці парне число — різницю числа 6039 і будь-якого дільника. Звідси маємо стратегію для другого гравця: кожним своїм ходом віднімати від записаного числа 1. Тоді перший гравець завжди буде починати з непарного числа і записувати парне число. Оскільки числа на дошці постійно зменшуються, урешті-решт перший гравець буде змушений записати 0.

Відповідь. Виграє другий гравець.

6. Нескладно помітити, що обидві фігури, кожна з яких визначається однією з заданих нерівностей, симетричні відносно кожної з координатних осей. Тому можна розглянути фігуру, що визначається поданою системою нерівностей і розміщена в першій координатній чверті, тобто фігуру, для якої $x \ge 0$, $y \ge 0$, $\begin{cases} y \le x+1, \\ y \ge x^2+1. \end{cases}$

Шукана фігура складається з чотирьох параболічних сегментів (на рисунку 5 вони заштриховані).

Відповідь. Дивись рисунок 5.

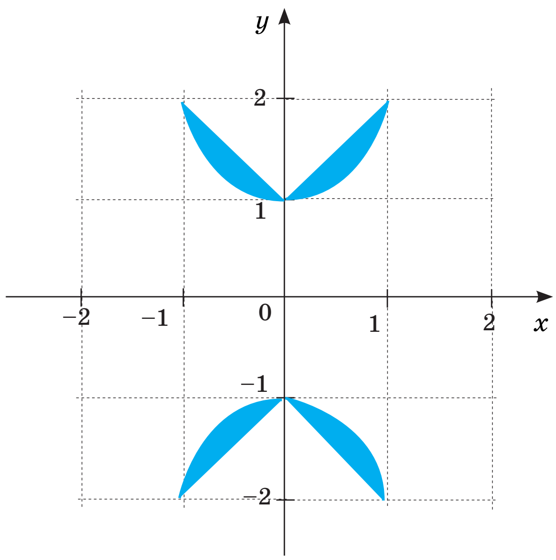


Рис. 5

10 КЛАС

1. Оскільки в усіх числах, більших за $10!$, останніми двома цифрами є нулі, то достатньо знайти суму двох останніх цифр перших 9 доданків.

Число	1!	2!	3!	4!	5!	6!	7!	8!	9!
Дві останні цифри	01	04	06	24	20	20	40	20	80

Отже, останніми двома цифрами поданої суми є цифри 1 і 3.

Відповідь. 1 і 3.

2. Нехай b_1 — перший член, q — знаменник геометричної прогресії. Оскільки прогресія є зростаючою, то $q>1$. Тоді $b_4=b_1q^3$, $b_5=b_1q^4$, $b_7=b_1q^6$ за умовою утворюють арифметичну прогресію. За властивістю арифметичної прогресії: $\frac{b_1q^3+b_1q^6}{2}=b_1q^4$, звідки $q^3+1=2q$, $(q-1)(q^2+q-1)=0$, $q_1=1$ — не задовольняє умову $q>1$, $q_2=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Відповідь. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

3. Застосуємо нерівність Коші для чисел 1, 2, 3,…, 2018:

$$\frac{1+2+3+\ldots+2018}{2018} \ge \sqrt[2018]{2018}.$$

Тобто

$$\sqrt[2018]{2018} \le \frac{(1+2018)+(2+2017)+\ldots+(1009+1010)}{2018} =$$

$$= \frac{2019\cdot 1009}{2018} = \frac{2019}{2}.$$

Тоді $\sqrt[2018]{2018!} \le 2019$. Оскільки рівність досягається при $a_1=a_2=\ldots=a_{2018}$, що неможливо, то $\sqrt[2018]{2018!} < 2019$, що й потрібно було довести.

4. Оскільки $AB \parallel DE$, то $\angle EDB+\angle ABD=180°$ (*рис. 6*).

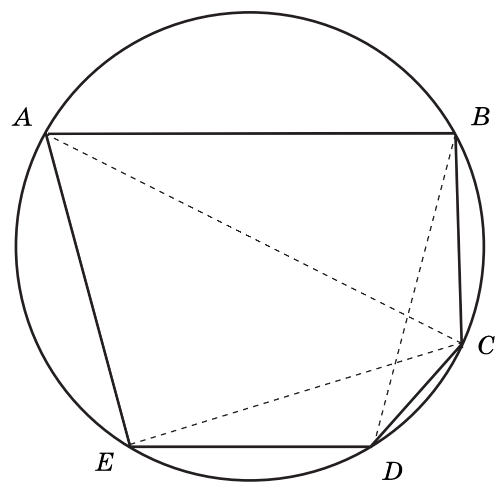


Рис. 6

Оскільки чотирикутник $ABDE$ — вписаний у коло, то $\angle EDB+BAE=180°$.

Отже, $\angle ABD=\angle BAE$. Тоді $ABDE$ — рівнобедрена трапеція або прямокутник.

У будь-якому випадку $BD = AE$. Маємо $AC^2 = BD^2 + CE^3 = AE^3 + CE^2$.

За теоремою, оберненою до теореми Піфагора, ΔAEC — прямокутний, а $\angle AEC$ — прямий. Тоді AC — діаметр кола, $\angle ABC$ спирається на діаметр, тобто $\angle ABC = 90°$, що й потрібно було довести.

5. Оскільки $\dfrac{x(y+2018)}{x^2+(y+2018)^2} = -\dfrac{1}{2}$,

то $2x(y+2018) = -x^2-(y+2108)^2$,

$x^2+2x(y+2018)+(y+2018)^2 = 0$,

$(x+y+2018)^2 = 0$, звідки $x+y=-2018$.

Відповідь. -2018.

6. Виграє Сашко, який починає гру. Своїм першим ходом він пересуває білу фішку на 1 клітинку праворуч, тим самим робить відстань між фішками 2015 клітинок. (Зауважимо, що число 2015 кратне 5). Далі помічаємо, що за кожні два послідовні ходи Сашко може перемістити праворуч свою фішку або на $2=1+1$ або на $3=2+1$ клітинки. Тому, починаючи з відстані 2015 клітинок, Сашко може грати так, щоб за кожні два послідовні ходи пересувати свою фішку на 2 клітинки праворуч, якщо Марійка перемістила за два ходи свою фішку на 3 клітинки ліворуч, або на 3 клітинки праворуч, якщо Марійка перемістила за два ходи свою фішку на 2 клітинки ліворуч. Таким чином, Сашко матиме змогу щоразу зменшувати відстань між фішками на 5. Отже, зробить хід, після якого відстань між фішками дорівнюватиме 0, і Марійка не зможе зробити свій хід.

Відповідь. Виграє Сашко.

11 КЛАС

1. Позначимо сторони можливих трикутників $a=3$, $b=2018$ і c. За нерівністю трикутника $a+c>b$, тобто $3+c>2018$, і $a+b>c$, тобто $3+2018>c$, звідки $2015<c<2021$.

Кількість натуральних чисел, що задовольняють цю нерівність, дорівнює 5: 2016, 2017, 2018, 2019, 2020.

Відповідь. П'ять трикутників.

2. Припустимо, що прогресія, яка відповідає вимогам задачі, існує. Знайдемо суми всіх непарних і всіх парних її членів:

$$a_1+a_3+\ldots+a_{2017} = \frac{a_1+a_{2017}}{2}\cdot 1009 =$$
$$=(a_1+1008d)\cdot 1009 = a_{1009}\cdot 1009.$$

$$a_2+a_4+\ldots+a_{2018} = \frac{a_2+a_{2018}}{2}\cdot 1009 =$$
$$=\frac{a_1+d+a_1+2017d}{2}\cdot 1009 =$$
$$=(a_1+1009d)\cdot 1009 = (a_1+1008d+d)\cdot 1009 =$$
$$=(a_{1009}+d)\cdot 1009.$$

За умовою $a_{1009}\cdot 1009 = (a_{1009}+d)\cdot 1009$, звідки $d=0$, що суперечить умові. Отже, такої прогресії не існує.

Відповідь. Не існує.

3. **1-й спосіб.** Припустимо протилежне, тобто $|ac-bd|>1$.

Тоді $\left[\begin{array}{l} ac-bd>1, \\ ac-bd<-1, \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} 2ac-2bd>a^2+b^2+c^2+d^2, \\ 2ac-2bd<-a^2-b^2-c^2-d^2, \end{array}\right.$

$$\left[\begin{array}{l} (a-c)^2+(b+d)^2<0, \\ (a+c^2)+(b-d)^2<0. \end{array}\right.$$

Дістали сукупність неправильних нерівностей, що свідчить про хибність припущення. Отже, $|ac-bd|\le 1$.

2-й спосіб. Застосуємо властивості модуля і нерівність Коші:

$$|ac-bd|\le|ac|+|bd|\le\frac{a^2+c^2}{2}+\frac{b^2+d^2}{2}=\frac{1+1}{2}=1.$$

4. Пофарбуємо в синій колір дуги, центрально симетричні відносно центра кола чорним дугам (можливо, деякі точки кола будуть пофарбовані в чорний і синій кольори одночасно). При цьому сума довжин пофарбованих дуг менша від довжини кола. Тому на колі знайдеться незафарбована точка.

Центрально симетрична їй відносно центра кола точка також буде незафарбованою. Діаметр, що проходить через ці точки, — шуканий.

5. Позначимо через C_1, C_2, C_3, C_4 основи перпендикулярів, проведених на площину α із точок A_1, A_2, A_3, A_4 відповідно (*рис. 7*).

Із подібності трикутників $A_1C_1B_1$ і $A_2C_2B_1$, $A_2C_2B_2$ і $A_3C_3B_2$, $A_3C_3B_3$ і $A_4C_4B_3$, $A_4C_4B_4$ і $A_1C_1B_4$ маємо:

$$\frac{A_1B_1}{B_1A_2}=\frac{A_1C_1}{A_2C_2}, \qquad (1)$$

$$\frac{A_2B_2}{B_2A_3}=\frac{A_2C_2}{A_3C_3}, \qquad (2)$$

$$\frac{A_3B_3}{B_3A_4}=\frac{A_3C_3}{A_4C_4}, \qquad (3)$$

$$\frac{A_4B_4}{B_4A_1}=\frac{A_4C_4}{A_1C_1}. \qquad (4)$$

Перемножуючи почленно рівності (1), (2), (3) і (4), дістанемо:

$$\frac{A_1B_1}{B_1A_2}\cdot\frac{A_2B_2}{B_2A_3}\cdot\frac{A_3B_3}{B_3A_4}\cdot\frac{A_4B_4}{B_4A_1}=$$

$$=\frac{A_1C_1}{A_2C_2}\cdot\frac{A_2C_2}{A_3C_3}\cdot\frac{A_3C_3}{A_4C_4}\cdot\frac{A_4C_4}{A_1C_1}=1.$$

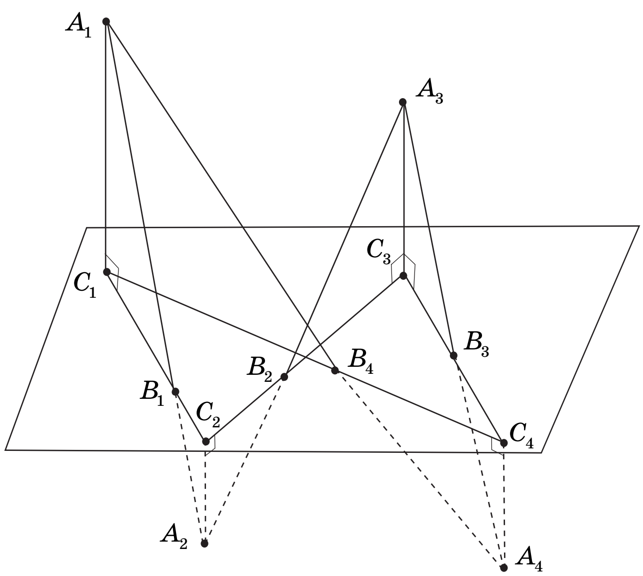


Рис. 7

Відповідь. 1.

6. Із означення дробової частини числа випливає, що

$$\{x\}=x-[x]. \qquad (1)$$

Підставимо (1) у задану нерівність: $x^2 \ge a[x](x-[x])$. Тоді

$$x^2 - a(x)(x-[x]) \ge 0,$$

$$x^2 - a[x]x + a[x]^2 \ge 0. \qquad (2)$$

Розглянемо ліву частину нерівності (2) як квадратний тричлен відносно x. Перший коефіцієнт дорівнює 1, тому квадратний тричлен може набувати невід'ємних значень для всіх дійсних x тільки за умови, що дискримінант квадратного тричлена буде недодатним, тобто

$$D=(a[x])^2-4a[x]^2=[x]^2(a^2-4a)\le 0.$$

Оскільки $[x]^2 \ge 0$ при всіх дійсних x, то $a^2-4a\le 0$, $a\in[0;4]$. Отже, найбільше значення a дорівнює 4.

Відповідь. 4.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Конет І. М.* Обласні олімпіади з математики / І. М. Конет, В. М. Радченко, Ю. В. Теплінський. — Кам'янець-Подільський : Абетка, 2010.
2. *Курченко О.* Задачі на рух / О. Курченко, К. Рабець // Математика в школі. — 2010. — № 11. — С. 38–43.
3. *Лейфура В. М.* Математичні задачі евристичного характеру. — К. : Вища школа, 1982.
4. *Лейфура В. М.* Математичні олімпіади школярів України 1991–2000 / В. М. Лейфура, І. М. Мітельман, В. М. Радченко, В. А. Ясінський. — К. : Техніка, 2003.
5. *Лейфура В. М.* Математичні олімпіади школярів України 2001–2006 / В. М. Лейфура, І. М. Мітельман, В. М. Радченко, В. А. Ясінський. — Львів : Каменяр, 2008.
6. *Мітельман І. М.* Вибрані задачі відкритих математичних олімпіад та фестивалів Рішельєвського ліцею. — Одеса : ТЕС, 2010.
7. *Мітельман І. М.* Розв'язуємо функціональні рівняння. Міркування від супротивного. — Одеса : ТЕС, 2014.
8. *Мітельман І. М.* Розфарбуємо клітчасту дошку. — Львів : Каменяр, 2001.
9. *Рабець К.* Паростки продуктивної освіти: математичний гурток // Математика в школі. — 2009. — № 11. — С.40–45.
10. *Рожков В. И.* Сборник задач математических олимпиад / В. И. Рожков, Г. Д. Курдеванидзе, Н. Г. Панфилов. — М. : Изд-во УДН, 1987.
11. *Федак І. В.* Методи розв'язування олімпіадних завдань з математики і не тільки їх. — Чернівці : Зелена Буковина, 2002.
12. *Ясінський В. А.* Задачі математичних олімпіад та методи їх розв'язування. — Тернопіль : Богдан, 2005.
13. *Ясінський В. А.* Олімпіадні задачі з геометрії. — К. : Шкільний світ, 2008.

«Математика в школах України. Позакласна робота»
один випуск на місяць
Засновник ТОВ «Видавнича група «Основа»»
Свідоцтво серія КВ № 16537-5009Р від 06.04.2010 р.
Головний редактор Ірина Маркова
Редакція може не поділяти точки зору автора. Автори публікацій відповідають за достовірність фактів, цитат, власних назв. Відповідальність за рекламну інформацію несе рекламодавець. Рукописи не рецензуємо і не повертаємо.
Адреса для листування: ВГ «Основа»,
вул. Плеханівська, 66, м. Харків, 61001,
Тел. факс: (057) 731-96-33
E-mail: office@osnova.com.ua
WWW.OSNOVA.COM.UA
редакція журналу «Математика в школах України. Позакласна робота». Тел. (057) 731-96-33
e-mail: math@osnova.com.ua
Якщо не отримуєте журнали, телефонуйте: (057) 731-96-36
З питань замовлення книг:
(057) 731-96-35, pochta2@osnova.com.ua
Рекламний відділ:
(057) 731-96-34, reklama@osnova.com.ua
Адміністратор сайту:
(057) 731-96-33, site@osnova.com.ua
Підписано до друку 02. 07. 2018. Формат 84x108 / 16.