ОДНА ЗАДАЧА З РІЗНИМИ ОБЛИЧЧЯМИ: ЗДИВУВАННЯ ДОВЖИНОЮ В ТИСЯЧУ РОКІВ

І. А. Кушнір, заслужений учитель України, м. Київ

Здивування — мати науки.

Платон

Задача про перпендикулярні хорди відома в Індії (задача Парамадісварі). Після незначних змін вона отримує ім'я Архімеда, потім у наші дні ця задача з'являється як авторська в журналі «Квант», але те, що це ... формула

$$OM_1 = \frac{1}{2} AH_1, \qquad (?!)$$

де O — центр кола, описаного навколо трикутника ABC, M_1 — медіана сторони BC трикутника ABC, H — ортоцентр.

Отже, почнемо послідовно.

Спочатку задача формулювалась як задача про дві перпендикулярні хорди AB і CD (задача Архімеда) (*рис. 1*):

$$AD^2 + BC^2 = 4R^2.$$

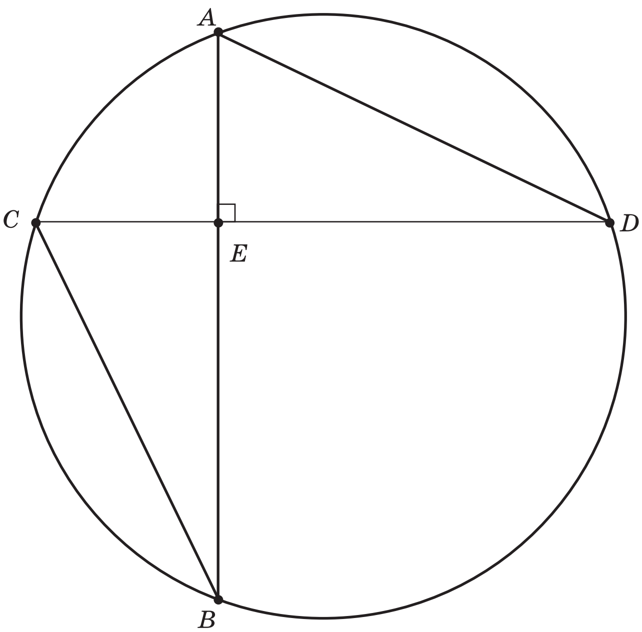

Рис. 1

Далі розглянемо вписаний чотирикутник $ABCD$ із перпендикулярними діагоналями (*рис. 2*).

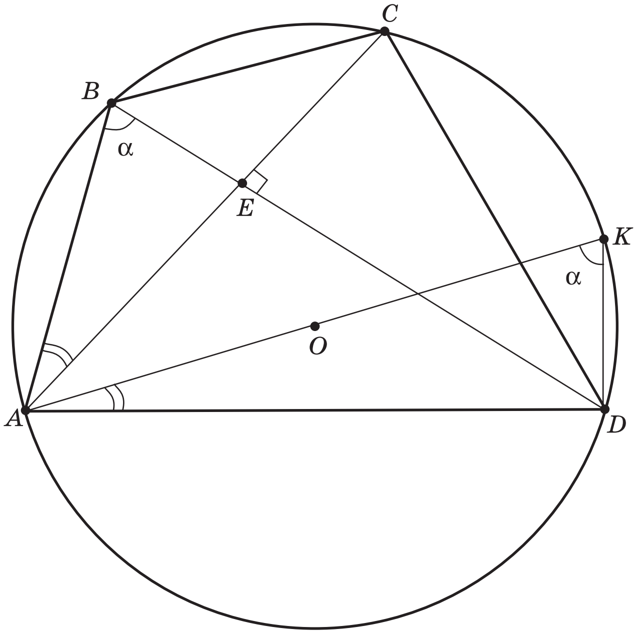

Рис. 2

Довести, що

$$BC^2 + AD^2 = 4R^2,$$

де R — радіус кола.

Проведемо діаметр AK і хорду KD. Із трикутника AKD випливає, що:

$$AK^2 = AD^2 + KD^2. \qquad (1)$$

Доведемо, що

$$KD = BC \text{ або } \cup BC = \cup KD.$$

Справді, нехай

$$\angle AKD = \alpha,$$

тоді

$$\angle KAD = 90^\circ - \alpha \text{ і } \angle BAE = 90^\circ - \alpha$$

(із прямокутного трикутника ABE). Отже,

$$\angle KAD = \angle BAE$$

і дуга $\cup BC$ дорівнює дузі $\cup KD$, тоді рівність (1) набуде вигляду:

$$4R^2 = AD^2 + BC^2.$$

Довели задачу Архімеда. Тепер доведемо задачу із журналу «Квант».

Задача (журнал «Квант»). Доведіть, що

$$OM_1 = \frac{1}{2}BC,$$

де M_1 — середина BC.

Доведення. Справді, у трикутнику AKD відрізок OM_1 — середня лінія:

$$OM_1 = \frac{1}{2}KD.$$

Але

$$KD = BC \text{ і } OM_1 = \frac{1}{2}BC.$$

І все!

> Преподавание геометрии в школе имеет целью не только сообщать учащимся геометрические результаты, но также научить их методу, при помощи которого эти результаты получаются. Как известно, геометрические результаты (теоремы) получаются путем логических рассуждений (доказательств) из некоторых отправных рассуждений (аксиом). Логические рассуждения являются необходимой частью всякого познания. Геометрия отличается ясностью и простотой как в формулировке результата, так и в тех исходных положениях, из которых этот результат должен быть получен. Поэтому геометрия дает нам лучшие возможности для развития логического мышления в школе…
>
> А. В. Погорелов

І, насамкінець, доведемо формулу

$$OM_1 = \frac{1}{2}AH_1$$

(для трикутника ACD):

$$OM_1 = \frac{1}{2}CH_0,$$

де H_0 — ортоцентр трикутника ACD (*рис. 3*).

Проведемо висоту CF. Вона перетне висоту DE в ортоцентрі H_0. За відомою властивістю ортоцентра точки H_0 і B симетричні відносно точки E, тобто

$$BE = EH_0,$$

отже,

$$BC = CH_0.$$

Але $BC = KD$, а

$$OM_1 = \frac{1}{2}KD,$$

звідки маємо

$$OM_1 = \frac{1}{2}CH_0.$$

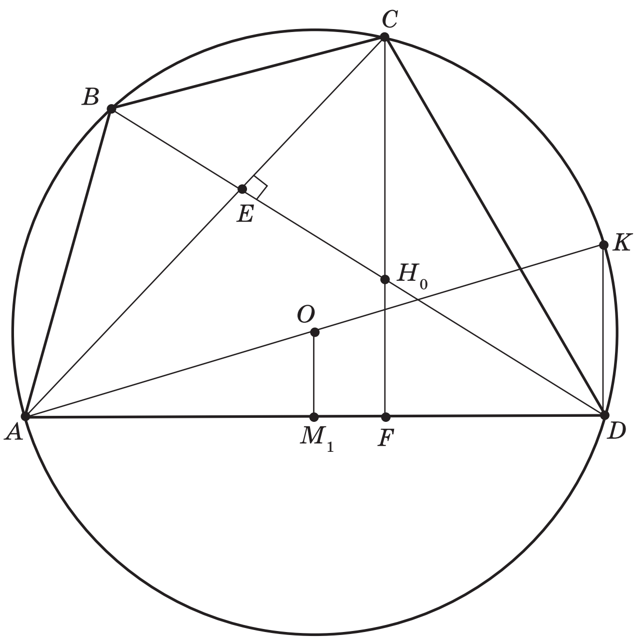

Рис. 3

Тепер усе!