У НОМЕРІ:

Методика та пошук

Позакласна робота

На допомогу вчителю

Методика та пошук

Нестандартний урок

Серенада Математиці

• Журнал «Математика в школах України» — 01650 • журнал і книжковий додаток — 01651 • Фаховий комплект — 08401 •

Математика цікава тоді, коли живить нашу винахідливість і здатність міркувати. Д. Пойа

НАУКОВО-МЕТОДИЧНИЙ ЖУРНАЛ

Математика в школах України

№ 25–26 (577–578) • ВЕРЕСЕНЬ 2018 р. • ЗАСНОВАНИЙ У СЕРПНІ 2002 р. • ВИХОДИТЬ ТРИЧІ НА МІСЯЦЬ •

• За сприяння Міністерства освіти і науки України • Учасники проекту: ХНПУ ім. Г. С. Сковороди •

У НОМЕРІ:

БОНУС! МАТЕМАТИКА В ШКОЛІ. ПОЗАКЛАСНА РОБОТА № 9 (93)
Електроний додаток на нашому сайті: http:/journal.osnova.com.ua

Керівнику гуртка

М. О. Таран. Пам'яті М. В. Остроградського присвячується. Літературно-музична композиція

24 вересня 1801 року народився видатний український математик М. В. Остроградський. На сторінках нашого журналу ми неодноразово зверталися до життя і творчості цього видатного вченого. Наших шановних авторів цікавить ця постать, і вони знаходять нові форми роботи, нові можливості ознайомити учнів із життєвим шляхом і науковими досягненнями знаменитого земляка. Пропонуємо один із таких заходів.

Н. В. Горпинич. Многогранники. Заняття гуртка з використанням інформаційно-комп'ютерних технологій та методу проектів

Заняття гуртка є одним із засобів узагальнення та поглиблення знань учнів, набутих на уроках, сприяння розвитку інтересу до математики та її історії; формування вміння використовувати комп'ютерні технології для здобуття і передачі інформації; виховання вміння працювати в команді. Саме такі цілі ставить автор поданої розробки заняття гуртка.

Мистецтво розв'язувати задачі

С. О. Барановська. Нестандартні тригонометричні рівняння

Відомо, що тригонометрія — це потужне знаряддя для розвитку логічного мислення, пам'яті, уважності, спостережливості, інтуїції, лаконізму думок, для виховання наполегливості, дисципліни праці, прагнення до досконалості. Розглянемо декілька нестандартних тригонометричних рівнянь, які можна запропонувати учням на заняттях гуртків і факультативів, для самостійного розв'язування, для підготовки до ДПА і ЗНО.

Задачі на кожний день

Л. І. Михайленко. Вересень 2018 року. Вивчаємо історію і математику

Цю рубрику ми відкрили в останньому номері журналу за минулий рік. Для читачів, які щойно приєднались до наших передплатників, повідомляємо, що статті цієї рубрики — це своєрідний календар, у якому висвітлюється по одній події, що відбувалися в різні роки цього дня. Крім того, на кожний день пропонуються задачі, розв'язавши які можна дізнатися додаткові відомості, пов'язані з відповідною подією.

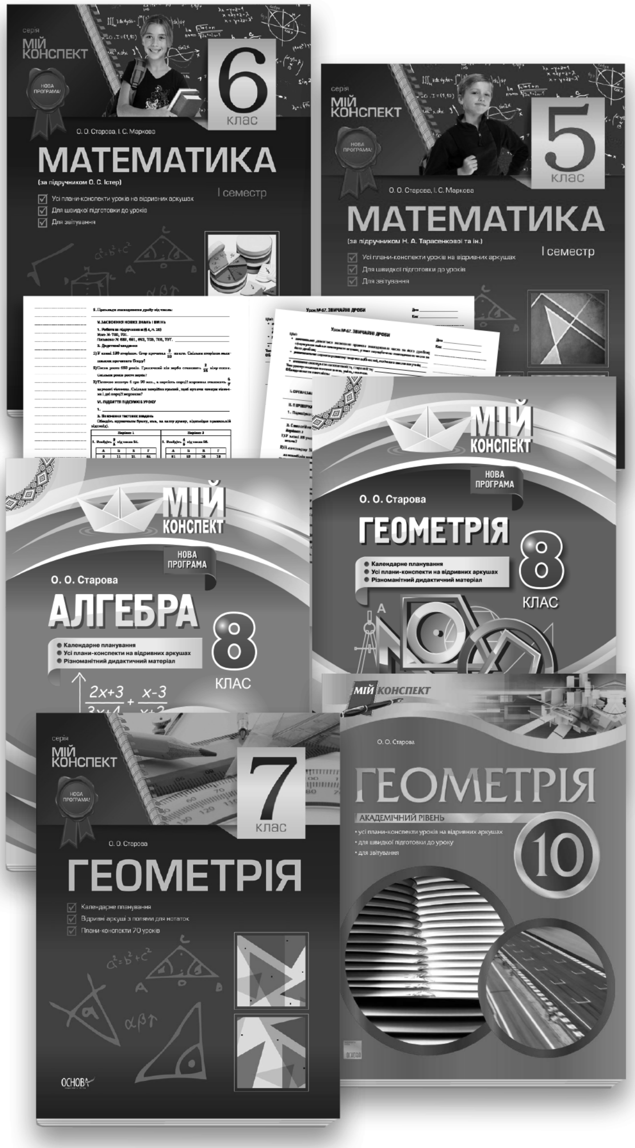
Скарбничка вчителя

Нілабович Н. Ф. «П'ятикласники» vs «Шестикласники». Математичний квест

Квест — командна гра, у якій потрібні не лише витривалість і ерудиція, а й кмітливість, креативність, нестандартне мислення. Ідея гри проста: команди виконують завдання, які отримують у різних місцях приміщення школи — «точках»

Потрібні розробки уроків на новий навчальний рік? Обирайте й економте час протягом року!

10 клас за новою програмою!



• **Готові конспекти уроків** розміщено на окремих аркушах **з перфорацією:** відкриваєте — і готовий конспект у вас перед очима.

• **Є місце для записів** — вам залишилося лише заповнити ту інформацію, що стосується саме вас (клас, підручник, номер вправи та домашнє завдання тощо). Завдяки записам конспект із друкованого перетворюється на рукописний, тобто на ваш власний!

• **Найскладніше** — «шапку уроку» — оформили замість вас фахівці — правильно, методично грамотно.

• **Готові уроки** — це канва, на яку ви нанизуєте свій візерунок. Його створять додаткові завдання, яскраві приклади, спілкування з учнями.

Серія «Мій конспект»

Код	Клас	Стор.	Ціна
Математика			
20ПМ70	5 клас. I семестр (за під. О. С. Істер)	128	25,00
20ПМ71	5 клас. II семестр (за під. О. С. Істер)	152	25,00
20ПМ73	5 клас. I семестр (за під. А. Г. Мерзляка, В. Б. Полонського, М. С. Якіра)	132	25,00
20ПМ74	5 клас. II семестр (за під. А. Г. Мерзляка, В. Б. Полонського, М. С. Якіра)	152	25,00
20ПММ5	5 клас. I семестр (за під. Н. А. Тарасенкова, І. М. Богатирьова, О. П. Бочко)	136	25,00
20ПММ6	5 клас. II семестр (за під. Н. А. Тарасенкова, І. М. Богатирьова, О. П. Бочко)	160	25,00
20ПММ039*	5 клас. I семестр	—	—
20ПММ040*	5 клас. II семестр	—	—
20ПММ041*	6 клас. I семестр	—	—
20ПММ042*	6 клас. II семестр	—	—
20ПММ1	6 клас. I семестр (за під. О. С. Істер)	136	35,00
20ПММ2	6 клас. II семестр (за під. О. С. Істер)	160	40,00
20ПММ3	6 клас. I семестр (за під. А. Г. Мерзляка, В. Б. Полонського, М. С. Якіра)	160	35,00
20ПММ4	6 клас. II семестр (за під. А. Г. Мерзляка, В. Б. Полонського, М. С. Якіра)	160	35,00
20ПММ7	6 клас. I семестр (за під. Н. А. Тарасенкова, І. М.Богатирьова, О. П. Бочко)	136	35,00
20ПММ8	6 клас. II семестр (за під. Н. А. Тарасенкова, І. М. Богатирьова, О. П. Бочко)	136	35,00
Алгебра			
20ПММ012	7 клас	144	45,00
20ПММ029	9 клас	144	60,00
20ПММ014	8 клас	144	40,00
20ПММ031	8 клас	144	60,00
20ПММ035	10 клас. Рівень стандарту	112	60,00
20ПММ037*	10 клас. Профільний рівень. I семестр	—	—
20ПММ038*	10 клас. Профільний рівень. II семестр	—	—
20ПМ67	11 клас. Рівень стандарту	112	25,00
20ПММ022	11 клас. Академічний рівень. I семестр	104	50,00
20ПММ023	11 клас. Академічний рівень. II семестр	120	50,00
Геометрія			
20ПММ013	7 клас	144	45,00
20ПММ032	8 клас (до оновленої програми)	144	60,00
20ПММ015	8 клас	144	40,00
20ПММ030	9 клас	144	60,00
20ПММ036*	10 клас. Рівень стандарту	—	—
20ПММ033	10 клас. Профільний рівень. I семестр	104	75,00
20ПММ034*	10 клас. Профільний рівень. II семестр	—	—
20ПМ68	11 клас. Рівень стандарту	72	20,00
20ПММ026	11 клас. Академічний рівень	144	60,00

Укр. мова, формат А4, м'яка обкладинка *Незабаром у продажу

Будьте забезпечені розробками уроків на весь навчальний рік!

КОНСТРУКТИВНІ ЗАДАЧІ ЯК ЗАСІБ АКТИВІЗАЦІЇ ПІЗНАВАЛЬНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ ПІД ЧАС ВИВЧЕННЯ ГЕОМЕТРІЇ

О. І. Баран, В. М. Дармосюк, Миколаївський національний університет ім. В. О. Сухомлинського

Зростаюча роль математики в розв'язанні задач науково-технічного прогресу ставить перед сучасною освітою завдання ефективної допомоги всім, хто навчається, в оволодінні теоретичними і практичними знаннями і властивим цьому предмету стилем мислення, який є важливим компонентом загальної культури сучасної людини. Особливої уваги, з огляду на сказане, вимагає підготовка до вивчення нових розділів, коли новий зміст математичної освіти пред'являє підвищені вимоги до рівня навчально-пізнавальної діяльності.

Разом із тим, підвищення якості і продуктивності розумової діяльності учнів і студентів пов'язане з нарощуванням інтелектуального потенціалу всього навчально-пізнавального процесу, залежить від рівня самоосвіти, стимулювання і розвитку пізнавальних і творчих інтересів.

Процес навчання учнів або студентів передбачає досягнення двох самостійних, але взаємопов'язаних завдань: оволодіння змістом конкретного розділу або предмета і цілеспрямоване формування прийомів розумової діяльності.

Формування прийомів розумової діяльності, уміння вчитися — завдання, яке необхідно розв'язувати на всіх етапах навчання. Проте особливої уваги в цьому плані вимагають старшокласники і студенти, у яких мислення з переважно емпіричного рівня переходить на теоретичний, і тому сильніше позначаються не тільки прогалини в знаннях, але і відсутність сформованих раціональних прийомів навчання.

У статті подано один із варіантів методики цілеспрямованого формування й систематизації прийомів розумової діяльності засобами конструктивної геометрії. При цьому активізація пізнавальної діяльності досягається засобами проблемного навчання.

Теоретичні основи і проблеми методики викладання конструктивної геометрії ґрунтовно розглядалися в навчально-методичних посібниках [2, 3, 12] тощо, а збірники [1, 4, 5, 9, 10, 11], які структуровані за типами і методами розв'язання таких задач, можна вважати найбільш повними і такими, які відповідають усім вимогам до задачників цього типу.

Питання подальшого вдосконалення і підвищення ефективності вивчення методів геометричних побудов залишається актуальним й на сьогодні.

Рівень математичної культури значною мірою залежить від уміння розв'язувати задачі. Здобути таке вміння допомагає знання прийомів і методів розв'язання задач, засвоєння яких є найважливішою частиною математичної підготовки учнів, абітурієнтів, а також усіх, хто цікавиться математикою.

Специфіка і структура шкільного курсу математики відкривають широкі можливості для розвитку творчих здібностей учнів, формування прийомів розумової діяльності, інтелекту. Вивчення геометрії нерозривно пов'язане з розвитком інтуїції (зокрема геометричної), логічного, образного мислення, із формуванням у школярів конструктивно-геометричних умінь і навичок.

Перед геометрією ставляться важливі завдання щодо формування мислення і практичних навичок та вмінь, необхідних для здобуття середньої і вищої освіти, формування професійних навичок у різних галузях діяльності і розвитку особистості загалом.

Одним із шляхів реалізації цих завдань є певний перерозподіл матеріалу в шкільному курсі математики, зокрема, більш ґрунтовне вивчення ідей і методів конструктивної геометрії в курсі математики основної школи на наочно-оперативному рівні з практичною спрямованістю.

Разом із тим необхідно зазначити, що сучасна школа не приділяє належної уваги конструктивним задачам. Таких задач дуже мало в чинних підручниках. А вчителі, учні й студенти погано розуміють, що таке конструктивна задача, що є її розв'язком і як такі задачі розв'язуються.

Очевидно, що значення і роль конструктивних задач у сучасній школі недооцінюється. Конструктивні задачі зазвичай цікаві за змістом, передбачають творчі підходи до їх розв'язання і найкраще сприяють актуалізації набутих раніше знань і підвищенню інтересу до вивчення геометрії й математики в цілому.

У багатьох практичних застосуваннях геометрії (у кресленні, живопису, архітектурі тощо) необхідно виконувати побудови деяких шуканих фігур: накреслити їх на папері, намалювати на полотні, скласти план місцевості тощо. Ці побудови виконуються за допомогою деяких креслярських інструментів і знарядь, зокрема таких, як олівець і лінійка, циркуль, рейсфедер, косинець тощо. Такі задачі математикам відомі з давніх часів. А нариси з історії конструктивної геометрії можна ефективно використовувати для активізації навчально-пізнавального процесу.

Першим знаряддям для виконання геометричних побудов була вірьовка. Про це свідчать такі факти. Найдавніший індійський геометричний трактат, присвячений правилам побудови вівтарів, називався Sulva-Sutra — «Правила вірьовки», що свідчить про широке застосування в початкових геометричних побудовах саме цього найпростішого знаряддя. Про єгипетських землемірів як про своїх учителів із найвищою повагою писав Демокріт, який називав їх гарпедонаптами, тобто «натягувачами вірьовки». Єгиптяни, які не без підстав уважаються також учителями Піфагора, для побудови прямих кутів використовували вірьовку, поділену на дванадцять рівних частин, за допомогою якої вони будували «єгипетський» прямокутний трикутник зі сторонами 3, 4 і 5.

Стародавні греки приписують винахід циркуля і лінійки, тобто двох основних традиційних інструментів для виконання геометричних побудов, Фалесу Мілетському (VI ст. до н.е.). У всякому разі є підстави вважати, що єгипетські «натягувачі вірьовки», у яких навчався Фалес, не користувалися цими інструментами. Незалежно циркуль і лінійку винайшли також у Китаї: спеціальні ієрогліфи для позначення цих інструментів виникли в китайській писемності в середині II ст. до н.е.

Стародавні греки циркуль разом із лінійкою вважали основними інструментами для геометричних побудов. Задача вважалася розв'язаною, якщо її вдавалося звести до певної послідовності побудов за допомогою циркуля і лінійки.

Про практичне походження основних геометричних фігур і про ті знаряддя, які використовувались для побудови цих фігур на площині, свідчать їх назви. Слово «точка» — основне поняття геометрії — є перекладом латинського слова pungo, що означає «тикаю», «доторкаюся», звідси, до речі, походить і медичний термін «пункція». Слово «лінія» походить від латинського слова linea, що означає «льон», «льняна нитка»; іноді це слово розуміють як «пряма лінія», і звідси походить назва пристрою для креслення прямих ліній — «лінійка». Слово «циркуль» — латинського походження. Латинське circulus означає коло, круг, обвід. Можна вказати ще цілу низку інших геометричних термінів явно практичного походження, які збереглися до нашого часу або знаходились у користуванні раніше.

Конструктивні задачі мають важливе практичне значення для вимірювань на земній поверхні. У XVII ст. голландський учений В. Снелліус (1581–1626) запропонував для вимірювання великих відстаней користуватися ланцюжком трикутників. Цей метод, який було названо методом тріангуляції, виявився надзвичайно цінним для практичного застосування, оскільки не вимагає безпосередньо вимірювати великі відстані на місцевості. Особливо цей метод стає корисним, коли через наявність перешкод безпосередньо певну відстань виміряти неможливо. У цьому випадку побудова ланцюжка трикутників вирішує справу. За цього методу основна робота зводиться до кутових вимірювань і подальших обчислень, що набагато простіше і дешевше порівняно з лінійними: досить ретельно виміряти лише одну зі сторін базисного трикутника.

Уперше тріангуляцію у величезних масштабах було здійснено для визначення дуги Паризького меридіана між паралелями Дюнкерка і Барселони. Усі вимірювання і обчислення були розпочаті 1780 року уславленими математиками Паризької академії наук і продовжувалися близько двадцяти років. Одна сорокамільйонна частина довжини Паризького меридіана одержала назву «метр» і була покладена в основу метричної десяткової системи мір.

У Росії ще більш грандіозні вимірювання здійснив відомий астроном В. Я. Струве (1793–1864) у Фінляндії та Прибалтійських губерніях. Дуга, яку при цьому вимірювали, становила 25°20′. Тріангуляційна мережа складалася з 258 трикутників, для яких у різних пунктах було визначено 10 базисів («зайві» базисні відрізки використовувалися для контролю обчислень). Під час обчислень були зроблені поправки на кривизну поверхні земної кулі.

Задачі на побудову геометричних фігур, які мають наперед визначені властивості, і методи розв'язання таких задач складають розділ геометрії, який називається конструктивною геометрією. Питання цього розділу є також важливою частиною шкільного курсу планіметрії і важливим засобом для глибокого ознайомлення з властивостями геометричних фігур. Ці задачі мають практичну спрямованість і носять творчий характер, і тому вони найкраще підходять для розвитку логічного мислення учнів. Цей розділ геометрії є також важливою складовою частиною професійної підготовки майбутніх учителів математики, конструкторів, архітекторів, художників.

Розглянемо приклади конструктивних задач із практичним змістом і проілюструємо методи їх розв'язання.

Приклад 1

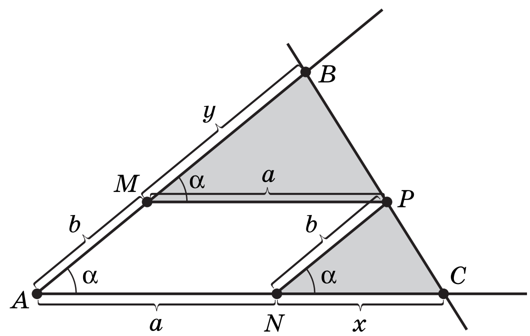
(Перша задача Льюїса Керрола [7])

Земельна ділянка має форму кута. Усередині кута задано точку. Провести через цю точку пряму так, щоб площа утвореного трикутника була найменшою.

Історична довідка. Керролл (Carroll) Льюїс, справжнє ім'я Чарлз Лютвідж (Латуїдж) Доджсон (Dodgson), (1832–1898), англійський письменник, математик і логік. Автор популярних повістей для дітей «Аліса в країні чудес» (1865) і «Аліса в Задзеркаллі» (1871). Наукові роботи Керролла передбачили деякі ідеї математичної логіки.

Дослідження

Розглянемо деякий кут і всередині нього точку P, через яку проходить деяка січна. При цьому січна BC може повертатися навколо заданої точки P, але не може бути паралельною сторонам AB і BC цього кута. Тобто, паралелограм $AMPN$ буде завжди належати шуканому трикутнику ABC і його площа залишатиметься незмінною.



Нехай задача розв'язана і шуканий трикутник ABC побудовано. Тепер зрозуміло, що січна займатиме шукане розташування тоді, коли сума площ подібних трикутників

MBP і NPC буде найменшою. Цю суму площ S знайдемо за такою формулою:

$$S=\frac{1}{2}bx\cdot\sin\alpha+\frac{1}{2}ay\cdot\sin\alpha=\frac{1}{2}(bx+ay)\sin\alpha.$$

З іншого боку, із подібності трикутників MBP і NPC маємо:

$$\frac{y}{a}=\frac{b}{x},\ \ y=\frac{ab}{x}.$$

Підставляємо це співвідношення в попередню формулу і дістаємо:

$$S=\frac{1}{2}b\left(x+\frac{a^2}{x}\right)\cdot\sin\alpha.$$

Отже, для того щоб площа трикутника ABC була найменшою, необхідно знайти таке значення змінної x, щоб вираз $z=x+\frac{a^2}{x}$ був мінімальним з усіх можливих.

Спосіб 1

Скористаємось відомою нерівністю для додатних чисел $m^2+n^2\geq 2m\cdot n$. Тобто, у нашому випадку маємо:

$$z=x+\frac{a^2}{x}=\left(\sqrt{x}\right)^2+\left(\frac{a}{\sqrt{x}}\right)^2\geq 2\cdot\sqrt{x}\cdot\frac{a}{\sqrt{x}}=2a.$$

Причому вираз у правій частині набуватиме мінімального значення при $\sqrt{x}=\frac{a}{\sqrt{x}}$, звідки $x=a$.

Спосіб 2

Знайдемо екстремуми функції $z=x+\frac{a^2}{x}$ за допомогою похідної: $z'=1-\frac{a^2}{x^2}=0$, звідки $x=a$. Похідна цієї функції в точці $x=a$ змінює знак із мінуса на плюс (друга похідна додатна), отже, у цій точці досягається мінімум.

Побудова

З аналізу задачі випливає, що MP і NP — середні лінії шуканого трикутника. Тому спочатку через точку P проводимо пряму, паралельну одній зі сторін кута, і одержимо, наприклад, точку M. Тепер, подвоївши відрізок AM, дістанемо точку B. Точку C визначаємо як точку перетину прямої BP з іншою стороною заданого кута.

Дослідження

Очевидно, що задача має розв'язки для всіх кутів, менших від розгорнутого.

Приклад 2

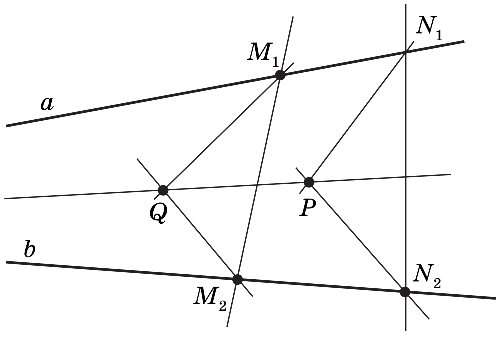
Задано дві прямі, які перетинаються в недоступній точці (за межами креслення). Побудувати бісектрису кута, який утворюють ці прямі (*Задача Евкліда*). (Задачі такого типу зустрічаються в проектуванні реальних споруд.)

Історична довідка

Евклід (бл. 330–275 до н. е.) — уславлений грецький математик. Народився у фінікійському місті Тір, навчався в Афінах у Платона. Під час правління Птолемея I Сотера (Спасителя) Евкліда запросили до Александрії, де він викладав математику в школі при храмі муз (цей храм мав назву «Мусейон», звідси походить сучасне слово «музей»). Александрійська математична школа Евкліда швидко стає головним культурним центром усього елліністичного світу. Перші наукові трактати з математики, які дійшли до нашого часу, написані Евклідом. Його головний твір «Начала» (грецька назва «Στοιχεια», латинізована назва — «Елементи») уміщує відомості з планіметрії, стереометрії, теорії чисел, основи методу обчислення площ і об'ємів із застосуванням елементів границь (метод вичерпування). Спираючись на свої аксіоми і постулати, Евклід доводить 465 тверджень, більшість із цих доведень до нашого часу вважаються класичними. «Начала» Евкліда підсумовують попередні досягнення грецьких математиків і створюють міцний аксіоматичний фундамент для подальшої роботи. Ця книга впродовж багатьох століть служила вченим взірцем для наслідування. Наприклад, за цим взірцем створював свої «Начала натурфілософії» І. Ньютон, а Б. Спіноза писав свою «Етику». Починаючи з 1482 року, «Начала» Евкліда витримали понад 500 видань — жодне з наукових видань не користувалось таким великим і тривалим попитом. За своєю популярністю «Начала» Евкліда посідали друге місце після Біблії. Перше друковане видання «Начал» Евкліда з'явилося у Венеції 1482 року на латині в перекладі з арабської. В «Історії математики» (1883) відомого професора Київського університету М. Є. Ващенко-Захарченка (1825–1912) уміщено список 460 різних видань евклідових «Начал», розташованих у хронологічному порядку. Евкліду належали й інші наукові твори, більшість із яких втрачено. Наприклад, книга «Данні», на думку вчених, була продовженням «Начал» і вміщувала елементи вищої геометрії. Нагадаємо, що до Евкліда було написано декілька фундаментальних творів з елементарної геометрії. Їх авторами були Анаксимандр, Геракліт з Понту, Гіппократ Хіоський, Леон, Ксенократ і Февдій із Магнезії. Але геометричні твори Евкліда вважалися найкращими: коли греки згадували великого Гомера, вони вважали зайвим пригадувати його ім'я і казали просто — «Поет», а Евкліда вони називали так же просто — «Творець геометрії».

Спосіб 1. Аналіз і побудова

Нехай задані прямі a і b перетинаються в недоступній точці A. Для розв'язання задачі скористаємось умовою, що бісектриси трьох внутрішніх кутів трикутника перетинаються в одній точці. Це дає можливість легко виконати шукану побудову. Для цього перетинаємо прямі a і b двома січними: дістанемо трикутники AM_1M_2 і AN_1N_2 (вершина A залишається за межами рисунка). Далі знаходимо точку Q, у якій перетинаються бісектриси першого трикутника при вершинах M_1 і M_2, і точку P, у якій перетинаються бісектриси другого трикутника при вершинах N_1 і N_2. Залишається побудувати частину шуканої бісектриси кута A: це буде пряма QP.

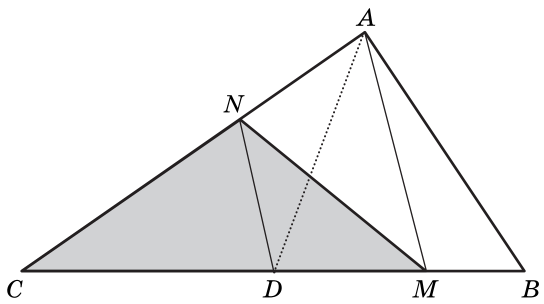


Спосіб 2

Скористаємось методом подібності. Для цього спочатку використовуємо гомотетію з центром у довільній доступній точці так, щоб образом заданих прямих були дві прямі, які перетинаються в доступній точці. Тепер будуємо бісектрису нового кута, а потім шукаємо прообраз тієї її частини, яка лежить у межах креслення.

Приклад 3

Земельна ділянка має форму трикутника. Із заданої точки на стороні цього трикутника треба провести відрізок, який ділить площу цієї ділянки на дві рівновеликі частини.



Аналіз

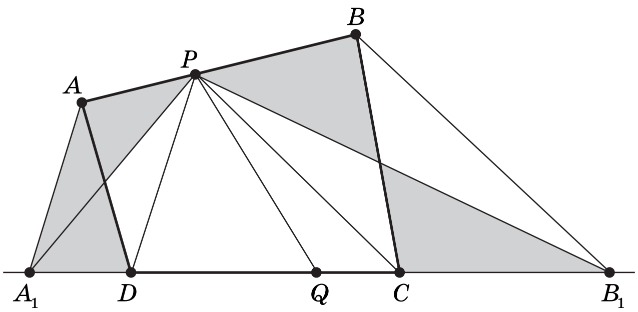
Нехай задано трикутник ABC і на стороні BC позначено точку M. Треба провести відрізок MN, такий, щоб він розбивав площу трикутника на дві рівновеликі частини. Проведемо медіану AD і відрізок AM. AM ділить трикутник на дві нерівні частини. Нехай площа трикутника ABM менша від половини площі заданого трикутника (якщо це не так, то розглянемо трикутник AMC). Нехай MN шуканий відрізок. Тоді зрозуміло, що трикутники ADM і ANM повинні бути рівновеликими. Оскільки ці два трикутники мають також і спільну сторону AM, то їхні вершини N і D повинні лежати на прямій, паралельній цій стороні. Це і є ключ до шуканої побудови.

Побудова

У заданому трикутнику ABC сполучаємо задану точку M із протилежною вершиною трикутника. Дістанемо відрізок AM. Потім проводимо медіану AD. Через точку D проводимо пряму, паралельну AM до перетину зі стороною AC у шуканій точці N. Тепер будуємо шуканий відрізок MN. Доведення нескладно провести на основі попереднього аналізу.

Приклад 4

Земельну ділянку, яка має форму опуклого чотирикутника, поділити на дві рівновеликі частини відрізком, який проходить через задану точку P на його стороні.



Аналіз і побудова

Нехай задано деякий опуклий чотирикутник $ABCD$ і точка P на одній із його сторін. Пригадаємо, що трикутник завжди легко поділити на два рівновеликі трикутники за допомогою медіани, яка виходить із його вершини. Крім того, ми знаємо, що трикутники з рівними основами і з відповідними рівними висотами рівновеликі. Ці дві ідеї дозволяють намітити план відповідної побудови.

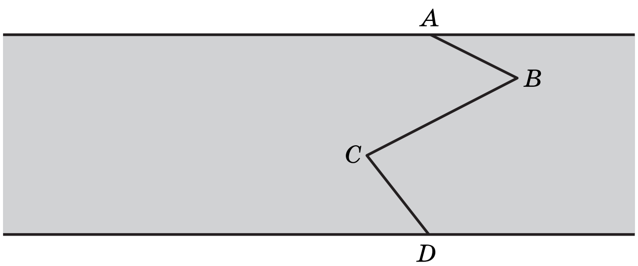
Нехай точка P лежить на стороні AB. Спочатку перетворимо заданий чотирикутник $ABCD$ у рівновеликий із ним трикутник, вершина якого розміщена у заданій точці P. Для цього сполучимо точку P відрізками PC і PD із несуміжними вершинами C і D заданого чотирикутника. Тепер через вершини A і B проведемо прямі AA_1 паралельно PD і BB_1 паралельно PC до перетину зі стороною CD у точках A_1 і B_1. Тоді трикутник A_1PB_1 буде рівновеликим із заданим чотирикутником і медіана PQ ділить цей трикутник на два рівновеликі трикутники. Тепер нескладно довести, що відрізок PQ шуканий і він задовольняє умову задачі.

Зауваження. У випадку, коли точка Q не належить відрізку CD, заданий чотирикутник $ABCD$ необхідно перетворити на рівновеликий трикутник, у якого одна сторона лежить на прямій AD або BC. Це нескладно зробити за допомогою аналогічних побудов. Подальша побудова очевидна.

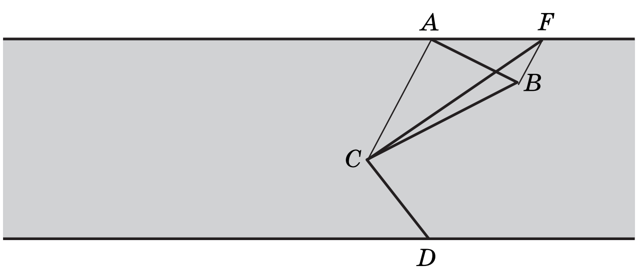
Приклад 5

Межі двох фермерських полів утворені двома паралельними прямими, а їх спільна межа є ламаною лінією. Для зручності фермери домовилися, не змінюючи площу кожного поля, перетворити спільну межу на відрізок, перпендикулярний до заданих паралельних прямих так, щоб площа кожного поля залишилася без зміни [8]. Як це зробити?

Аналіз ґрунтується на міркуваннях, аналогічних до тих, що використані в двох попередніх задачах. Нехай два поля мають спільну межу у вигляді ламаної $ABCD$ так, як це показано на рисунку.



Спочатку зменшимо кількість ланок на одну. Нехай ланку ABC замінено відрізком AF так, щоб площі двох полів не змінилися. Тоді трикутники ABC і AFC рівновеликі і мають спільну сторону AC, тому пряма BF повинна бути паралельною прямій AC.

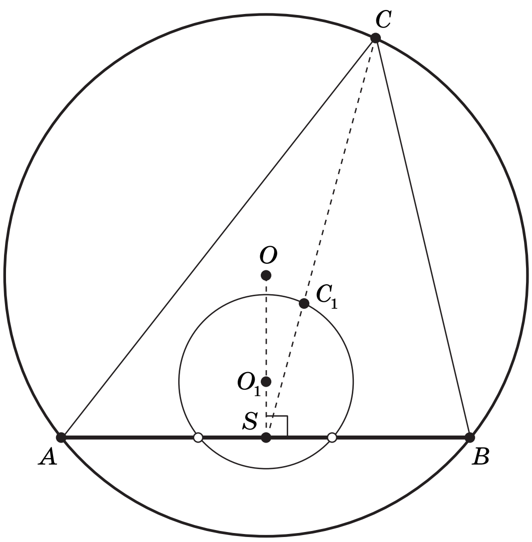


Побудова

Спочатку перетворюємо ланку ABC на відрізок CF. Для цього через точку B проводимо пряму, паралельну AC, у результаті дістанемо шукану точку F. При цьому площа кожного поля залишається незмінною, бо трикутники ABF і CBF рівновеликі. Тепер аналогічно перетворюємо ланку FCD на відповідний відрізок із кінцями на заданих граничних паралельних прямих. Отже, поетапно ми можемо перетворити довільну ламану на деякий відрізок. Тепер досить через середину останнього відрізка провести відрізок, перпендикулярний до граничних горизонтальних прямих.

Приклад 6

Задано коло і в ньому хорда AB. Знайти геометричне місце точок, якому може належати центроїд (центр ваги) трикутника ABC, вписаного в задане коло. (*Миколаївська обласна олімпіада*).



Аналіз

Нехай у задане коло вписано довільний трикутник ABC, у якого основа AB збігається із заданою хордою, а вершина C рухається заданим колом. Тоді центр ваги трикутника ABC розташований у точці перетину його медіан. Нехай це буде точка C_1. Але медіани довільного трикутника в точці перетину діляться у відношенні 1:2, тобто маємо: $SC_1 = \frac{SC}{3}$. При цьому зауважимо, що точка S залишається нерухомою як середина відрізка AB, а відповідне співвідношення виконуватиметься завжди, незалежно від того, у якій точці кола розташована рухома вершина C трикутника ABC. Отже, можна зробити висновок, що всі рухомі точки C_1, які описують шукане ГМТ, гомотетичні до рухомих точок C із центром гомотетії в точці S і коефіцієнтом $\frac{1}{3}$. Тому шукане ГМТ теж є колом, радіус якого втричі менший, ніж радіус заданого кола.

Побудова і дослідження

Із центра O проводимо серединний перпендикуляр OS на хорду AB, далі від центра заданого кола відкладаємо відрізок OO_1, який дорівнює двом третинам OS. Тепер із точки O_1 опишемо коло радіусом утричі меншим, ніж радіус заданого кола — це і буде шукане ГМТ. Крім того, у випадку, коли побудоване коло перетинає хорду AB або дотикається до неї, відповідні точки повинні бути виключені з шуканого ГМТ.

Приклад 8

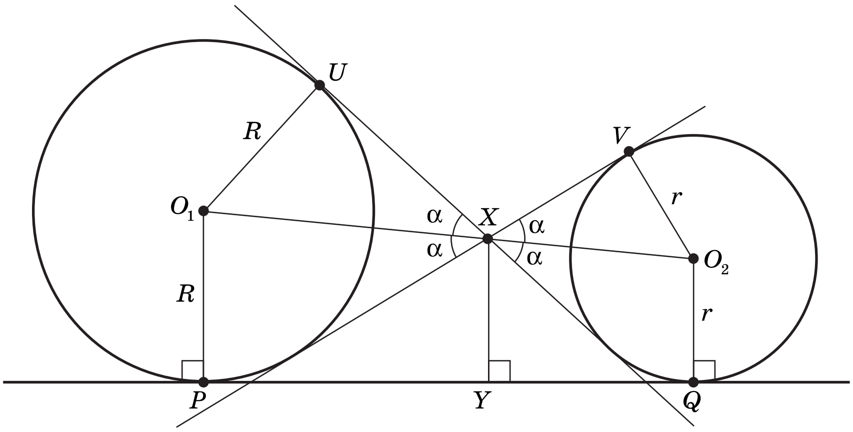
Два кола, радіуси яких дорівнюють R і r, котяться однією прямою. Знайти геометричне місце точок, яке описує точка перетину їхніх спільних внутрішніх дотичних.

Аналіз

Нехай два кола, радіуси яких дорівнюють R і r, котяться заданою прямою і дотикаються до неї в двох довільних точках P і Q. Проведемо їхні внутрішні спільні дотичні, які перетинаються в точці X. Якщо кола котитимуться заданою прямою, то точка X при цьому опише шукане ГМТ.

Покажемо, що шукане ГМТ є пряма, паралельна заданій. До такого висновку можна дійти шляхом деяких попередніх міркувань. Наприклад, помічаємо, що відстань XY точки X не перевищує R і не менша ніж r. Крім того, відповідне ГМТ повинно продовжуватися нескінченно і ліворуч, і праворуч, а також воно повинно бути симетричним відносно прямої XY. Отже, необхідно підтвердити нашу гіпотезу.

Для цього достатньо показати, що довжина відрізка $XY = x$ не залежить від розміщен-



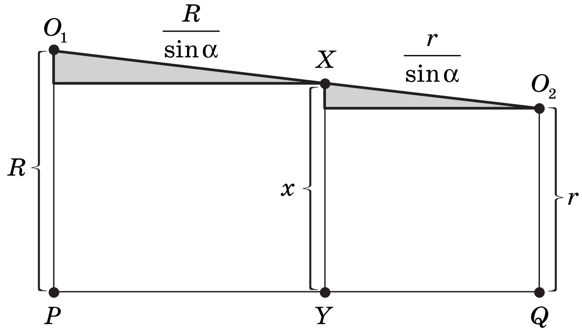
ня кіл O_1 і O_2. Із прямокутних трикутників O_1XU і O_2XV маємо: $O_1X=\dfrac{R}{\sin\alpha}$, $O_2X=\dfrac{r}{\sin\alpha}$.

Тепер розглянемо трапецію PO_1O_2Q. Далі із двох виділених на рисунку подібних прямокутних трикутників дістанемо таке співвідношення:

$$\frac{R}{(R-x)\sin\alpha}=\frac{r}{(x-r)\sin\alpha}.$$

Звідки знаходимо довжину відрізка XY: $x=XY=\dfrac{2Rr}{R+r}$. Отже, справді, точка перетину внутрішніх дотичних до кіл знаходиться весь час на сталій відстані від заданої прямої, тобто точка X рухається прямою.

Тепер побудова цієї прямої труднощів не викликає: досить побудувати відрізок, довжина якого дорівнює $\dfrac{2Rr}{R+r}$, а потім пряму, паралельну заданій, на відповідній відстані.



Приклад 8
(Друга задача
Льюїса Керрола [7])

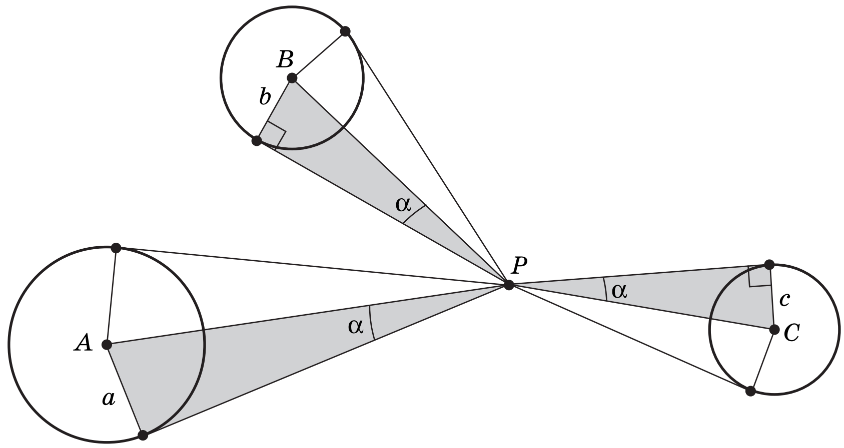
На площині розташовані три циліндричні башти. Знайти точку площини, із якої ширина кожної з башт здаватиметься однаковою.

Аналіз і побудова

Нехай точки A, B, C — центри кругових основ заданих башт, a, b, c — їх радіуси, а P — шукана точка, із якої ширина кожної башти здається однаковою.

Тобто це означає, що всі башти з цієї точки видно під одним і тим же кутом 2α. Тоді маємо три пари подібних прямокутних трикутників, звідки дістаємо співвідношення:

$$AP:BP:CP=a:b:c.$$



Отже, шукана точка P належить першому геометричному місцю точок, відстані яких до заданих точок A і B знаходяться в заданому відношенні $a:b$.

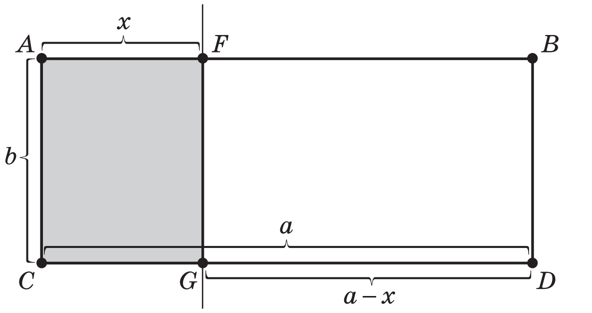
Це перше коло Аполлонія, алгоритм побудови якого вважатимемо вже відомим.

Точка P належить також і другому геометричному місцю точок, відстані яких до заданих точок B і C знаходяться в заданому відношенні $b:c$. Це друге коло Аполлонія.

Тепер шукану точку P ми знайдемо як перетин цих двох кіл.

Приклад 9

Заданий прямокутник розбити на два нерівні подібні прямокутники.



Аналіз

Нехай сторони заданого прямокутника $ABCD$ мають довжини a і b ($a > b$). Нескладно довести, що шуканий поділ можна виконати тільки через більшу сторону заданого прямокутника. Дістанемо два подібні прямокутники $CAFG$ і $FBDG$. Умова подібності цих прямокутників через відношення відповідних сторін має такий вид:

$$\frac{x}{b} = \frac{b}{a-x},$$

або

$$x^2 - ax + b^2 = 0.$$

Тепер з останнього рівняння визначаємо довжину шуканого відрізка x:

$$x_{1,2} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4b^2}}{2}.$$

Побудова

Спочатку будуємо відрізок $z = \sqrt{a^2 - 4b^2}$, а потім — шуканий відрізок x за формулою $x = \frac{a-z}{2}$, або $x = \frac{a+z}{2}$.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Александров И. И.* Сборник геометрических задач на построение. — М. : Учпедгиз, 1950. — 174 с.
2. *Аргунов Б. И.*, *Балк М. Б.* Элементарная геометрия. — М. : Просвещение, 1966. — 366 с.
3. *Астряб О. М.*, *Смогоржевський О. С.* та інші. Методика розв'язування задач на побудову. — К. : Радянська школа, 1960. — 387 с.
4. *Атанасян Л. С.*, *Атанасян В. А.* Сборник задач по геометрии, ч. І. — М. : Просвещение, 1973.
5. *Базылев В. Т.* и др. Сборник задач по геометрии (под редакцией Базылева В. Т.). — М. : Просвещение, 1980. — 238 с.
6. *Баран О. І.*, *Калініченко Г. Л.* Практична спрямованість конструктивної геометрії // Питання удосконалення змісту і методики викладання фізики у середній і вищій школі. Вип. 12. — Миколаїв, 2006. — С. 99–107.
7. *Кэрролл Льюис.* История с узелками. — М. : Мир, 1973. — 408 с.
8. *Лоповок Л. М.* Сборник задач по геометрии для 6–8 кл. — К. : Радянська школа, 1985. — 104 с.
9. *Моденов П. С.* Сборник задач по специальному курсу элементарной математики. — М. : Советская наука, 1957. — 666 с.
10. *Назаретский В. Е.*, *Федин Н. Г.* Задачник-практикум по элементарной геометрии. — М. : Просвещение, 1965. — 163 с.
11. *Тесленко І. Ф.* та інші. Практикум з розв'язування задач. Геометрія. — К. : Вища школа, 1978. — 208 с.
12. *Энциклопедия* элементарной математики. Книга IV. Геометрия. — М. : Физматгиз, 1963. — 567 с.

Преподавание геометрии в школе имеет целью не только сообщать учащимся геометрические результаты, но также научить их методу, при помощи которого эти результаты получаются. Как известно, геометрические результаты (теоремы) получаются путем логических рассуждений (доказательств) из некоторых отправных рассуждений (аксиом). Логические рассуждения являются необходимой частью всякого познания. Геометрия отличается ясностью и простотой как в формулировке результата, так и в тех исходных положениях, из которых этот результат должен быть получен. Поэтому геометрия дает нам лучшие возможности для развития логического мышления в школе…

А. В. Погорелов