

ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ФУНКЦІЇ. ОБЛАСТЬ ВИЗНАЧЕННЯ І МНОЖИНА ЗНАЧЕНЬ

Тренувальні завдання з підказками

В. В. Карпик, с. Грудки, Камінь-Каширський р-н, Волинська обл.

Пропоновані завдання призначені для підготовки учнів до зовнішнього незалежного оцінювання з математики.

Усі завдання побудовано парами: завдання з непарними номерами містять підказки, завдання з парними номерами — подібні до них.

Використовуючи підказки до завдань із непарними номерами, можна легко розв'язати завдання з парними номерами.

ЗАВДАННЯ З ВИБОРОМ ОДНІЄЇ ПРАВИЛЬНОЇ ВІДПОВІДІ

Завдання 1 — 12 мають по п'ять варіантів відповіді, серед яких лише ОДИН ПРАВИЛЬНИЙ. Виберіть правильну, на Вашу думку, відповідь.

- 1 Знайдіть область визначення функції $y = 10 \sin x$.

А	Б	В	Г	Д
$[-1; 1]$	$[-10; 10]$	$\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$	$[0; \pi]$	$(-\infty; +\infty)$

Підказка. Областю визначення функції $y = \sin x$ є множина всіх дійсних чисел.

Відповідь. Д.

- 2 Знайдіть область визначення функції $y = 9 \cos x$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; +\infty)$	$[-1; 1]$	$\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$	$[0; \pi]$	$[-9; 9]$

- 3 Укажіть число, яке НЕ належить області визначення функції $y = \operatorname{tg} x$.

А	Б	В	Г	Д
0	π	1	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$

Підказка. Областю визначення функції $y = \operatorname{tg} x$ є множина всіх дійсних чисел, крім чисел виду $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Відповідь. Г.

- 4 Укажіть число, яке НЕ належить області визначення функції $y = \operatorname{ctg} x$.

А	Б	В	Г	Д
-1	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{3\pi}{2}$	-2π

- 5 Знайдіть множину значень функції $y = \cos 3x$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; +\infty)$	$[-1; 1]$	$[-3; 3]$	$\left[-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right]$	$[0; 3\pi]$

Підказка. Врахуйте, що графік функції $y = \cos 3x$ отримуємо стисненням графіка функції $y = \cos x$ до осі ординат.

Відповідь. Б.

- 6 Знайдіть множину значень функції $y = \sin \frac{x}{4}$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; +\infty)$	$\left[-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right]$	$[-4; 4]$	$[-1; 1]$	$\left[-\frac{\pi}{8}; \frac{\pi}{8}\right]$

- 7 Знайдіть множину значень функції $y = \operatorname{tg} x + 2$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; +\infty)$	$[1; 3]$	$\left(-\frac{\pi}{2} + 2; \frac{\pi}{2} + 2\right)$	$(2; \pi + 2)$	$[-1; 1]$

ГОТУЄМОСЬ ДО ЗОВНІШНЬОГО НЕЗАЛЕЖНОГО ОЦІНЮВАННЯ

Підказка. Множиною значень функції $y = \operatorname{tg} x$ є множина всіх дійсних чисел.

Відповідь. А.

8 Знайдіть множину значень функції $y = \operatorname{ctg} x - 5$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; +\infty)$	$[-1; 1]$	$\left(-\frac{\pi}{2} - 5; \frac{\pi}{2} - 5\right)$	$(-5; \pi - 5)$	$[-6; -4]$

9 Знайдіть множину значень функції $y = \sin^2 6x + \cos^2 6x$.

А	Б	В	Г	Д
$[-6; 6]$	$[-1; 1]$	$\{1\}$	$\{6\}$	$(-\infty; +\infty)$

Підказка. Урахуйте, що $\sin^2 6x + \cos^2 6x = 1$.

Відповідь. В.

10 Знайдіть множину значень функції $y = 7 \sin^2 x + 7 \cos^2 x$.

А	Б	В	Г	Д
$[-7; 7]$	$[-1; 1]$	$\{1\}$	$\{7\}$	$(-\infty; +\infty)$

11 Знайдіть множину значень функції $y = 3 \sin x - 8$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; +\infty)$	$[-11; -5]$	$[-1; 1]$	$[-5; 5]$	$[5; 11]$

Підказка. Оскільки $-1 \leq \sin x \leq 1$, то, помноживши всі частини цієї нерівності на 3, отримаємо: $-3 \leq 3 \sin x \leq 3$. Додайте до всіх частин останньої нерівності -8 .

Відповідь. Б.

12 Знайдіть множину значень функції $y = 9 \cos x + 4$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; +\infty)$	$[-13; 5]$	$[-1; 1]$	$[-13; 13]$	$[-5; 13]$

ЗАВДАННЯ НА ВСТАНОВЛЕННЯ ВІДПОВІДНОСТІ

Завдання 13 і 14 передбачають установлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ.

13 Установіть відповідність між функцією (1–4) та множиною її значень (А–Д).

1 $y = 8 \sin x$	А $(-\infty; +\infty)$
2 $y = \cos x + 8$	Б $[-9; -7]$
3 $y = 8 \operatorname{tg} x$	В $[7; 9]$
4 $y = \sin(x - 8)$	Г $[-1; 1]$
	Д $[-8; 8]$

Підказка.

- Помножте всі частини нерівності $-1 \leq \sin x \leq 1$ на 8.
- Додайте до всіх частин нерівності $-1 \leq \cos x \leq 1$ число 8.
- Множиною значень функції $y = \operatorname{tg} x$ є множина всіх дійсних чисел.
- Урахуйте, що графік функції $y = \sin(x - 8)$ отримуємо паралельним перенесенням графіка функції $y = \sin x$ уздовж осі абсцис.

Відповідь. 1 — Д, 2 — В, 3 — А, 4 — Г.

14 Установіть відповідність між функціями (1 — 4) і множинами їх значень (А — Д).

1 $y = \cos(x + 11)$	А $(-\infty; +\infty)$
2 $y = 11 \operatorname{ctg} x$	Б $[-11; 11]$
3 $y = \sin x - 11$	В $[-12; -10]$
4 $y = 11 \cos x$	Г $[10; 12]$
	Д $[-1; 1]$

ЗАВДАННЯ З КОРОТКОЮ ВІДПОВІДДЮ

Розв'яжіть завдання 15–34 і запишіть відповідь ОДИМ ЧИСЛОМ.

15 Задано функцію $f(x) = 3 \cos x + 22$.

- Знайдіть НАЙБІЛЬШЕ значення функції $y = f(x)$.
- Знайдіть НАЙМЕНШЕ значення функції $g(x) = \frac{19}{f(x)}$.

Підказка.

- Помножте всі частини нерівності $-1 \leq \cos x \leq 1$ на 3 і до всіх частин отриманої нерівності додайте 22.

2. Скористайтесь такою властивістю числової нерівності: якщо $a > b$ ($a > 0, b > 0$), то $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

Відповідь. 1. 25. 2. 0,76.

16 Задано функцію $f(x) = 11 - 5\sin x$.

1. Знайдіть НАЙМЕНШЕ значення функції $y = f(x)$.

2. Знайдіть НАЙБІЛЬШЕ значення функції

$$g(x) = \frac{48}{f(x)}.$$

17 Задано функцію $f(x) = 6\sin x + 1$.

1. Знайдіть СУМУ всіх ЦІЛИХ значень, яких набуває функція $y = f(x)$.

2. Знайдіть СУМУ всіх ЦІЛИХ значень, яких набуває функція $y = |f(x)|$.

Підказка.

1. Помножте всі частини нерівності $-1 \leq \sin x \leq 1$ на 6 і до всіх частин отриманої нерівності додайте 1.

2. Урахуйте, що під час побудови графіка функції $y = |f(x)|$ ту частину графіка функції $y = f(x)$, де $f(x) \geq 0$, потрібно залишити без змін, а ту частину, де $f(x) < 0$, — замінити на симетричну відносно осі абсцис.

Відповідь. 1. 13. 2. 28.

18 Задано функцію $f(x) = 4\cos x - 3$.

1. Знайдіть СУМУ всіх ЦІЛИХ значень, яких набуває функція $y = f(x)$.

2. Знайдіть СУМУ всіх ЦІЛИХ значень, яких набуває функція $y = |f(x)|$.

19 Знайдіть СУМУ всіх ЦІЛИХ значень, яких набуває функція $y = 4\sin x \cos x - 5$.

Підказка. Оскільки

$$y = 4\sin x \cos x - 5 = 2\sin 2x - 5,$$

то знайдіть множину значень функції $y = 2\sin 2x - 5$.

Відповідь. -25.

20 Знайдіть СУМУ всіх ЦІЛИХ значень, яких набуває функція $y = 3\sin^2 x - 3\cos^2 x + 7$.

21 Знайдіть НАЙМЕНШЕ значення функції $y = \frac{9}{2\cos^2 x + 3}$.

Підказка. Урахуйте, що $0 \leq \cos^2 x \leq 1$. Тоді оцініть значення виразу $\frac{9}{2\cos^2 x + 3}$.

Відповідь. 1,8.

22 Знайдіть НАЙБІЛЬШЕ значення функції $y = \frac{21}{5\sin^2 x + 2}$.

23 Знайдіть КІЛЬКІСТЬ усіх ЦІЛИХ значень, яких набуває функція $y = 2\sin^2 x - 7\cos^2 x - 11$.

Підказка. Оскільки $y = 2\sin^2 x - 7\cos^2 x - 11 = 2\sin^2 x - 7(1 - \sin^2 x) - 11 = 9\sin^2 x - 18$, то оцініть значення виразу $9\sin^2 x - 18$.

Відповідь. 10.

24 Знайдіть КІЛЬКІСТЬ усіх ЦІЛИХ значень, яких набуває функція $y = 8\cos^2 x - 4\sin^2 x + 9$.

25 Знайдіть СУМУ всіх ЦІЛИХ значень x , які входять в область визначення функції $y = \sqrt{8 + 2x - x^2} \sin x$.

Підказка. Областю визначення функції є множина розв'язків нерівності $8 + 2x - x^2 \geq 0$.

Відповідь. 7.

26 Знайдіть СУМУ всіх ЦІЛИХ значень x , які входять в область визначення функції $y = \sqrt{18 - 3x - x^2} \cos \frac{x}{3}$.

27 Знайдіть СУМУ всіх ЦІЛИХ значень x , які входять в область визначення функції

$$y = \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}}{\sqrt{8x - x^2}}.$$

Підказка. Область визначення функції зна-

$$\text{йдіть із системи } \begin{cases} 8x - x^2 > 0, \\ \frac{\pi x}{2} \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Відповідь. 12.

28 Знайдіть СУМУ всіх ЦІЛИХ значень x , які входять в область визначення функ-

$$ції \quad y = \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{4}}{\sqrt{16-6x-x^2}}.$$

29 Знайдіть НАЙМЕНШЕ значення функції $y = 6\sin x + 8\cos x - 5$.

Підказка. Оцінимо вираз $6\sin x + 8\cos x$. Нехай $t = 6\sin x + 8\cos x$. Поділимо обидві частини цієї рівності на $\sqrt{6^2 + 8^2} = 10$. Отримаємо: $\frac{t}{10} = \frac{3}{5}\sin x + \frac{4}{5}\cos x$. Маємо: $\frac{3}{5} < 1$, $\frac{4}{5} < 1$,

$\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1$. Тому можна ввести кут $\varphi = \arctg \frac{4}{3}$. Тоді $\cos \varphi = \frac{3}{5}$, $\sin \varphi = \frac{4}{5}$. Отримаємо:

мо: $\frac{t}{10} = \cos \varphi \sin x + \sin \varphi \cos x$, $\frac{t}{10} = \sin(x + \varphi)$, $t = 10\sin(x + \varphi)$. Далі оцініть значення виразу $10\sin(x + \varphi) - 5$.

Відповідь. -15.

30 Знайдіть НАЙБІЛЬШЕ значення функції $y = 5\sin 3x + 12\cos 3x - 1$.

31 Знайдіть НАЙМЕНШЕ значення функції $y = \sin^2 x - \sin x + 2$.

Підказка. Уведіть заміну: $\sin x = t$, $-1 \leq t \leq 1$. Тоді $y = t^2 - t + 2$. Знайдіть найменше значення функції $y = t^2 - t + 2$ на відрізку $[-1; 1]$.

Відповідь. 1,75.

32 Знайдіть НАЙБІЛЬШЕ значення функції $y = 4 - \cos x - \cos^2 x$.

33 Знайдіть НАЙБІЛЬШЕ значення функції $y = \frac{5}{\operatorname{tg}^2 x + 4}$.

Підказка. Урахуйте, що $\operatorname{tg}^2 x \geq 0$. Тоді оцініть значення виразу $\frac{5}{\operatorname{tg}^2 x + 4}$.

Відповідь. 1,25.

34 Знайдіть НАЙБІЛЬШЕ значення функції $y = \frac{21}{\operatorname{ctg}^2 x + 6}$.

ЗАВДАННЯ З РОЗГОРНУТОЮ ВІДПОВІДДЮ

Розв'язання завдань 35–38 повинно мати обґрунтування. Запишіть послідовні логічні дії та пояснення, зробіть посилання на математичні факти, із яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання завдань рисунками, графіками, схемами, таблицями.

35 Задано функцію $f(x) = 3\sqrt{\cos x - 1}$.

1. Знайдіть область визначення функції $y = f(x)$.

2. Побудуйте графік функції $y = f(x)$.

3. Знайдіть множину значень функції $y = f(x)$.

4. Укажіть кількість усіх спільних точок графіків функцій $y = f(x)$ і $y = x^2 - 2\pi x$.

Підказка.

1. Областю визначення функції є множина розв'язків нерівності $\cos x - 1 \geq 0$.

2. Графік функції — множина точок $(x_0; y_0)$, де x_0 — розв'язки рівняння $\cos x = 1$, $y_0 = f(x_0)$.

3. Використовуючи побудований графік, знайдіть множину значень функції.

4. Побудуйте ескіз графіка функції $y = x^2 - 2\pi x$ і знайдіть кількість точок перетину цього графіка із графіком функції $y = f(x)$.

Відповідь.

1. $D(f) = \{2\pi n, n \in \mathbb{Z}\}$.

2. Графік функції зображено на рис. 1.

3. $E(f) = \{0\}$.

4. 2.

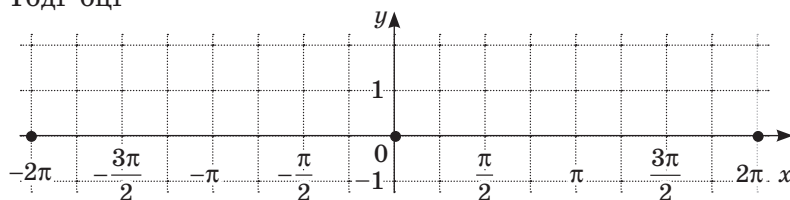


Рис. 1

36 Задано функцію $f(x) = \sqrt{-\sin x - 1} + 2$.

1. Знайдіть область визначення функції $y = f(x)$.
2. Побудуйте графік функції $y = f(x)$.
3. Знайдіть множину значень функції $y = f(x)$.
4. Укажіть кількість усіх спільних точок графіків функцій $y = f(x)$ і $y = x^2 + \pi x + \frac{\pi^2}{4} + 2$.

ВІДПОВІДІ ДО ЗАВДАНЬ
З ПАРНИМИ НОМЕРАМИ

Завдання, №	2	4	6	8	10	12	14
Відповідь	А	Д	Г	А	Г	Д	1 — Д, 2 — А, 3 — В, 4 — Б

Завдання, №	16	18	20	22	24
Відповідь	1. 6. 2. 8	1. -27. 2. 28	49	10,5	13

Завдання, №	26	28	30	32	34
Відповідь	-15	-19	12	4,25	3,5

37 Задано функцію $f(x) = 2(\sin x + |\sin x|)$.

1. Побудуйте графік функції $y = f(x)$.
2. Знайдіть множину значень функції $y = f(x)$.

Підказка.

1. Якщо $\sin x \geq 0$, то

$$f(x) = 2(\sin x + \sin x) = 4 \sin x.$$

Побудуйте графік функції $f(x) = 4 \sin x$ при $x \in [2\pi n; \pi + 2\pi n]$, $n \in \mathbb{Z}$. Якщо $\sin x < 0$, то $f(x) = 2(\sin x - \sin x) = 0$. У цій самій системі координат побудуйте графік функції $f(x) = 0$ при $x \in (-\pi + 2\pi n; 2\pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$.

2. Використовуючи побудований графік, знайдіть множину значень функції.

Відповідь.

1. Графік функції зображено на рис. 2.
2. $E(f) = [0; 4]$.

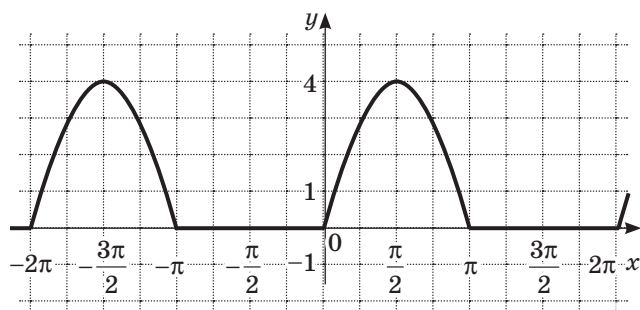


Рис. 2

38 Задано функцію $f(x) = 3 \cos x + 3|\cos x|$.

1. Побудуйте графік функції $y = f(x)$.
2. Знайдіть множину значень функції $y = f(x)$.

Завдання 36

$$1. D(f) = \left\{ -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

2. Графік функції зображено на рис. 3.

$$3. E(f) = \{2\}.$$

4. 1.

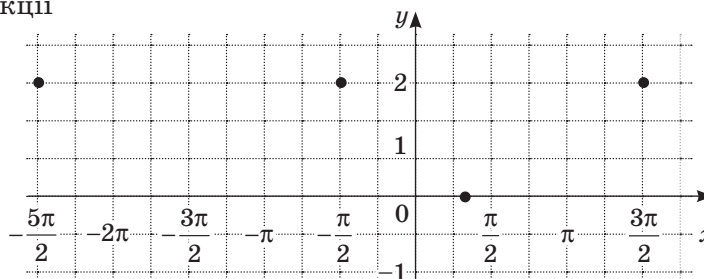


Рис. 3

Завдання 38

1. Графік функції зображено на рис. 4.

$$2. E(f) = [0; 6].$$

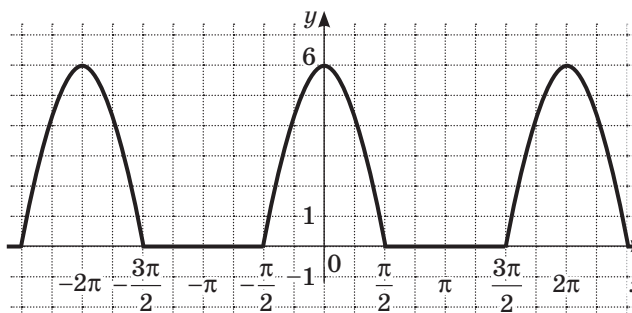


Рис. 4