МЕТОД ВІД СУПРОТИВНОГО ПІД ЧАС ДОВЕДЕННЯ ДЕЯКИХ НЕРІВНОСТЕЙ + + НЕРІВНОСТІ З ВКЛАДЕННЯМИ

С. В. Хавелов, пос. ст. Тополі, Дворічанський р-н, Харківська обл.

Метод від супротивного широко використовується під час доведення багатьох тверджень. Розглянемо застосування цього методу для доведення деяких нерівностей.

Завдання 1

Довести нерівність

$$(3+x)(3+y)(3+z)(3+t)\ge 256,$$

де x, y, z, t — додатні числа і $xyzt=1$.

Доведення

Доведемо від супротивного. Припустимо, що нерівність неправильна, тоді правильна нерівність $(3+x)(3+y)(3+z)(3+t)<256$. Покажемо, що це приведе до протиріччя.

$$xyzt=1.$$

Нехай $x=y=z=t=1$, тоді

$$(3+1)(3+1)(3+1)(3+1)<256,\ 4\cdot4\cdot4\cdot4<256,$$

тобто $256<256$ — неправильна нерівність (протиріччя).

Висновок. Вихідна нерівність правильна.

Завдання 2

Довести нерівність $(2+m)(2+n)(2+k)\ge 27$, де m, n, k — додатні числа і $mnk=1$.

Указівка. Дивись доведення завдання 1.

Завдання 3

Довести нерівність $(7+a)(5+b)\ge 48$, де a, b — додатні числа і $ab=1$.

Указівка. Дивись доведення завдання 1.

Завдання 4

Довести нерівність,

$$\frac{1}{1+a}\cdot\frac{1}{2+b}\cdot\frac{1}{3+c}\cdot\frac{1}{4+d}\le\frac{1}{5!},$$

де a, b, c, d — додатні числа і $abcd=1$.

Доведення

$5!=1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5=120$. Перейдемо до рівносильної нерівності $(1+a)(2+b)(3+d)(4+t)\ge 120$.

Припустимо, що нерівність неправильна, тоді правильна нерівність

$$(1+a)(2+b)(3+d)(4+t)<120,\ abcd=1.$$

Нехай $a=b=c=d=1$, тоді

$$(1+1)(2+1)(3+1)(4+1)<120,\ 2\cdot3\cdot4\cdot5<120,$$

тобто $120<120$ — неправильна нерівність (протиріччя).

Висновок. Вихідна нерівність правильна.

Завдання 5

Розв'язати показникову нерівність $c^{x^2-4x+3}>1$, де $c=\dfrac{5}{(2+a)(1+b)}$, $a>0$, $b>0$ і $ab=1$.

Розв'язання

Як і в завданні 1, маємо, що правильна нерівність $(2+a)(1+b)\ge 6$ при $a>0$, $b>0$ і $ab=1$. Тоді $0<\dfrac{5}{(2+a)(1+b)}\le\dfrac{5}{6}<1$, тобто $0<c<1$ і показникова функція $y=c^t$ — спадна.

Тоді $c^{x^2-4x+3}>1=c^0$ і $x^2-4x+3<0$.

Розв'яжемо квадратну нерівність, дістанемо $x\in(1;3)$.

Відповідь. $(1;3)$.

Завдання 6

Розв'язати логарифмічну нерівність $\log_a^2 x-5\log_a x+4\le 0$, де $a=\dfrac{(2+m)(2+n)(2+k)}{25}$, m, n, k — додатні числа і $mnk=1$.

Розв'язання

Скористаємося завданням 2, маємо $(2+m)(2+n)(2+k)\ge 27$, тоді

$$a=\frac{(2+m)(2+n)(2+k)}{25}\ge\frac{27}{25}>1,$$

отже, логарифмічна функція $y=\log_a x$ — зростаюча.

Нехай $\log_a x = y$, тоді нерівність набуває вигляду $y^2-5y+4\le 0$. Розв'яжемо квадратну нерівність, дістанемо $y\in[1;4]$, тобто $1\le y\le 4$, $1\le \log_a x\le 4$, $\log_a a\le \log_a x\le \log_a a^4$.

Тоді $a\le x\le a^4$, $x\in\left[a;a^4\right]$.

Відповідь. $\left[a;a^4\right]$, де $a=\dfrac{(2+m)(2+n)(2+k)}{25}$, m, n, k — додатні числа і $mnk=1$.

Завдання 7

Довести, що для довільного гострокутного трикутника має місце нерівність

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma\ge\frac{3\sqrt3}{2}.$$

Доведення

Припустимо, що нерівність неправильна, тоді правильна нерівність

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma<\frac{3\sqrt3}{2}.$$

Покажемо, що це приведе до протиріччя. Нехай $\alpha=\beta=\gamma=60^\circ$. Тоді

$$\sin 60^\circ+\sin 60^\circ+\sin 60^\circ<\frac{3\sqrt3}{2},$$

$$\frac{\sqrt3}{2}+\frac{\sqrt3}{2}+\frac{\sqrt3}{2}<\frac{3\sqrt3}{2},$$

тобто $\dfrac{3\sqrt3}{2}<\dfrac{3\sqrt3}{2}$ — неправильна нерівність (протиріччя).

Висновок. Вихідна нерівність

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma\ge\frac{3\sqrt3}{2}$$

правильна.

Завдання 8

Довести, що для довільного гострокутного трикутника має місце нерівність $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma>\dfrac{3\sqrt3}{2}.$

Доведення

α, β, γ — гострі кути, тоді $0<\cos\alpha<1$; $0<\cos\beta<1$; $0<\cos\gamma<1$.

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\sin\beta}{\cos\beta}+\frac{\sin\gamma}{\cos\gamma}>$$

$$>\frac{\sin\alpha}{1}+\frac{\sin\beta}{1}+\frac{\sin\gamma}{1}=\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma\ge\frac{3\sqrt3}{2}.$$

Ми скористалися результатом завдання 7.

Тоді нерівність $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma>\dfrac{3\sqrt3}{2}$ правильна.

Завдання 9

Довести, що в гострокутному трикутнику має місце нерівність $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma\ge 1{,}5.$

Доведення

Припустимо, що нерівність неправильна, тоді правильна нерівність

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma<1{,}5.$$

Покажемо, що це приведе до протиріччя. Нехай $\alpha=\beta=\gamma=60^\circ$. Тоді

$$\cos 60^\circ+\cos 60^\circ+\cos 60^\circ<1{,}5,\quad \frac12+\frac12+\frac12<1{,}5,$$

тобто $1{,}5<1{,}5$ — неправильна нерівність (протиріччя).

Висновок. Вихідна нерівність

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma\ge 1{,}5$$

правильна.

Завдання 10

Довести, що для довільного гострокутного трикутника має місце нерівність $\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\gamma>1{,}5.$

Доведення

α, β, γ — гострі кути, тоді $0<\sin\alpha<1$, $0<\sin\beta<1$, $0<\sin\gamma<1$.

$$\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\gamma=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+\frac{\cos\beta}{\sin\beta}+\frac{\cos\gamma}{\sin\gamma}>$$

$$>\frac{\cos\alpha}{1}+\frac{\cos\beta}{1}+\frac{\cos\gamma}{1}=\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma\ge 1{,}5.$$

Ми скористалися результатом завдання 9.

Тоді нерівність $\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\gamma>1{,}5$ правильна.

Завдання 11

Довести, що для довільного гострокутного трикутника має місце нерівність $\sin\alpha+\cos\beta+\operatorname{tg}\gamma>3.$

Доведення

Припустимо, що нерівність неправильна, тоді правильна нерівність $\sin\alpha + \cos\beta + \operatorname{tg}\gamma \le 3$. Покажемо, що це приведе до протиріччя.

Нехай $\alpha = \beta = \gamma = 60°$. Тоді

$$\sin 60° + \cos 60° + \operatorname{tg} 60° \le 3,\ \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} + \sqrt{3} \le 3,$$

тобто $\frac{3\sqrt{3}+1}{2} \le 3$ — неправильна нерівність (протиріччя), оскільки $\frac{3\sqrt{3}+1}{2} > 3$.

Висновок. Вихідна нерівність

$$\sin\alpha + \cos\beta + \operatorname{tg}\gamma > 3$$

правильна.

Завдання 12

Розв'язати логарифмічну нерівність $\log_a(4x-1) > 0$, де $a = \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma$, α, β, γ — кути гострокутного трикутника.

Розв'язання

Скористаємося завданням 7, маємо

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \ge \frac{3\sqrt{3}}{2},$$

тоді

$$a = \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \ge \frac{3\sqrt{3}}{2} > 1,$$

отже, логарифмічна функція $y = \log_a t$ — зростаюча. $\log_a(4x-1) > 0 = \log_a 1$, $4x-1 > 1$, $4x > 2$, $x > 2$.

Відповідь. $(0,5;+\infty)$.

Завдання 13

Розв'язати показникову нерівність $a^{2x} - 6a^x + 5 < 0$, де $a = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma}$, α, β, γ — кути гострокутного трикутника.

Розв'язання

Скористаємося завданням 8, маємо $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma > \frac{3\sqrt{3}}{2}$, тоді $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma > 1$, $0 < \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma} < 1$, тобто $0 < a < 1$, отже, функція $y = a^t$ — спадна.

Нехай $a^x = y$, тоді нерівність набуває вигляду $y^2 - 6y + 5 < 0$. Розв'яжемо квадратну нерівність, дістанемо $y \in (1;5)$, $1 < y < 5$, $1 < a^x < 5$, $a^0 < a^x < a^{\log_a 5}$, $\log_a 5 < x < 0$, $x \in (\log_a 5;0)$.

Відповідь. $(\log_a 5;0)$, де $a = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma}$, α, β, γ — кути гострокутного трикутника.

Завдання 14

Розв'язати показникову нерівність $a^{2\sin x - 1} < 1$, де $a = \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma$, α, β, γ — кути гострокутного трикутника.

Розв'язання

Скористаємося завданням 9, маємо $a = \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \ge 1,5 > 1$, тоді функція $y = a^t$ — зростаюча. $a^{2\sin x - 1} < 1 = a^0$, $2\sin x - 1 < 0$, $\sin x < \frac{1}{2}$. Розв'яжемо нерівність, дістанемо $x \in \left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi n; \frac{13\pi}{6} + 2\pi n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$.

Відповідь. $\left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi n; \frac{13\pi}{6} + 2\pi n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$.

Завдання 15

Довести, що для довільного гострокутного трикутника має місце нерівність

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma + \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma +$$
$$+ \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma + \operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma > 3\left(\sqrt{3}+1\right).$$

Доведення

Скористаємося нерівностями із завдань 7, 8, 9, 10:

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \ge \frac{3\sqrt{3}}{2},$$

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \ge 1,5,$$

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma > \frac{3\sqrt{3}}{2},$$

$$\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma > 1,5.$$

Додамо почленно ці нерівності й перетворимо праву частину нерівності, дістанемо

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma + \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma +$$
$$+ \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma + \operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma > 3\left(\sqrt{3}+1\right).$$

Нерівність доведено.

Завдання 16

Довести, що для довільного гострокутного трикутника має місце нерівність $P \geq 3R\sqrt{3}$, де P — периметр трикутника, R — радіус описаного кола.

Доведення

Скористаємося завданням 9, маємо

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

За теоремою синусів:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R,$$

тоді

$$P = a + b + c = 2R\sin\alpha + 2R\sin\beta + 2R\sin\gamma =$$

$$= 2R(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma) \geq 2R \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} = 3R\sqrt{3}.$$

Отже, $P \geq 3R\sqrt{3}$. Нерівність доведено.

Завдання 17

Довести, що для довільного гострокутного трикутника має місце нерівність $a(b^2 + c^2) + b(a^2 + c^2) + c(a^2 + b^2) \geq a^3 + b^3 + c^3 + 3abc$, де a, b, c — сторони трикутника.

Доведення

Скористаємося завданням 9: у гострокутному трикутнику $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \geq 1{,}5$.

За наслідком із теореми косинусів маємо:

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \quad \cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac},$$

$$\cos\gamma = \frac{b^2 + a^2 - c^2}{2ab},$$

тоді

$$\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} + \frac{b^2 + a^2 - c^2}{2ab} =$$

$$= \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \geq \frac{3}{2}.$$

Зведемо дроби до спільного знаменника, дістанемо

$$\frac{a(b^2 + c^2 - a^2) + b(a^2 + c^2 - b^2) + c(b^2 + a^2 - c^2)}{2abc} \geq$$

$$\geq \frac{3abc}{2abc}.$$

Отже,

$$a(b^2 + c^2 - a^2) + b(a^2 + c^2 - b^2) + c(b^2 + a^2 - c^2) \geq$$

$$\geq 3abc.$$

Перетворимо ліву частину нерівності, дістанемо

$$a(b^2 + c^2) + b(a^2 + c^2) + c(a^2 + b^2) \geq a^3 + b^3 + c^3 + 3abc.$$

Нерівність доведено.

Завдання 18

Довести, що для довільного гострокутного трикутника має місце нерівність $S \geq \frac{3abc\sqrt{3}}{4P}$, де a, b, c — сторони трикутника, S — його площа, P — периметр.

Доведення

Скористаємося завданням 16. У гострокутному трикутнику $P \geq 3R\sqrt{3}$.

Відомо, що радіус описаного кола

$$R = \frac{abc}{4S},$$

тоді

$$P \geq \frac{3abc\sqrt{3}}{4S},$$

звідси

$$S \geq \frac{3abc\sqrt{3}}{4P}.$$

Нерівність доведено.

Запропоновані в статті авторські задачі — гарний матеріал для організації творчої пошукової роботи з учнями, для підготовки до олімпіад з математики, роботи математичного гуртка, факультативу. Матеріал стане у пригоді під час підготовки до ЗНО.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Беккенбах Э., Беллман Р.* Неравенства. — М. : Мир, 1965.
2. *Коваленко В. Г., Гельфанд М. Б., Ушаков Р. П.* Доведення нерівностей. — К. : Вища школа, 1979.
3. *Алексеев Р. Б., Курляндчик Л. Д.* Нетрадиционные способы доказательства традиционных неравенств // Математика в школе. — 1991. — № 4.