МАТЕМАТИКА КАК НАУКА И КАК ИСКУССТВО

Ведущая рубрики А. А. Агафонова, г. Харьков

Можно ли считать математику искусством? Этот вопрос волновал умы математиков (и не только) во все времена. Об этом рассуждает автор с лаконичной подписью Ш. на страницах журнала «Вестник опытной физики и элементарной математики» № 26 за 1887 год. В статье «Математика как наука и как искусство» он высказывает свою точку зрения на то, что же можно считать искусством в математике.


Математика какъ наука и какъ искусство.

Много было написано серьезных книг и статей о значении математики в ряду других наук, о благотворном влиянии ее изучения на развитие наших способностей, о необходимости улучшить ее преподавание в школах, о математическом анализе и синтезе и т. д., но, не смотря на все это, не только в нашем обществе, но даже в среде специалистов как-то плохо понимается двоякая роль математики как науки и как искусства. Признавая лишь первую из них, неизбежно приходят к заключению, что математика вообще полезна, скучна и безрадостна — как машина, и почти не догадываются, что она, как и всякое искусство вообще, имеет свои идеалы, свой умозрительный материал и специальные средства для их воспроизведения, свои, наконец, восторги и увлечения. В действительности же склонность ума к математическим абстракциям представляет собой лишь частный случай склонности к творчеству вообще, и индивидуальные особенности математических способностей, подобно способностям к творчеству во всякой иной области, характеризуются не столько быстротою выполнения, сколько объемом и глубиною замысла, степенью врожденной склонности к изящному.

Нельзя забывать, что каждая, даже наиболее элементарная, математическая выкладка имеет свой стиль, подобно всякому другому произведению искусства. Одна и та же теорема или задача различно доказывается или решается двумя лицами, и это индивидуальное различие обуславливается эстетико-математическим развитием каждого.

К сожалению, на эту сторону математического развития математики-педагоги обращают слишком мало внимания и нередко сами приучают детей относиться к математике как к ремеслу. Причины этого нужно искать, возможно, в том, что, как было сказано выше, сами преподаватели и составители учебников математики не вполне ясно понимают различие между тем, что в математике можно знать, и тем, что в ней относится уже к области искусства.

Сплошь и рядом упускается из виду, что знать математику — еще не значит владеть ею. ***Отсюда не трудно вывести объяснение, почему у нас в школах до сих пор не выработан критерий математических способностей и мы постоянно ошибаемся в их оценке.***

В виду столь важного значения этого вопроса в педагогическом отношении, я решаюсь посвятить этому статью, в том предположении, что читатель, обдумавший этот трудный вопрос лучше и глубже, не откажется в интересах истины исправить мои ошибки, неточности и т. д.

СХЕМА ИЗУЧЕНИЯ ЧИСТОЙ МАТЕМАТИКИ

Не выходя за пределы элементарной математики, попробуем дать такую классификацию, которая позволила бы нам провести наглядную границу между знанием в математике и искусством. Рассмотрим чистую математику, то есть тот ее раздел, в котором рассматривают только количественные отношения величин.

Обозначим буквами a, b, $c, \ldots$ ряд каких-нибудь данных количеств и буквами x, y, $z, \ldots$ — ряд искомых количеств. Кроме того, пусть F обозначает некоторый известный ряд известных математических действий над количествами, а X — некоторый неизвестный ряд известных математических действий. И, наконец, пусть R обозначает известный результат действий.

Тогда становится очевидным, что всё изучение чистой математики состоит только из четырех отделов, которые, согласно нашему обозначению, символично представляются следующими типами:

I. $F(a,b,c,\ldots)=R.$

II. $F(a,b,c,\ldots)=x.$

III. $F(a,b,\ldots,x,y,\ldots)=R.$

IV. $X(a,b,c,\ldots)=R.$

В первом отделе нам всё известно: и действия, и их объекты, и результаты, следовательно, это отдел тождественных количественных соотношений. Сюда относятся: аксиомы, простые элементарные равенства, которые при изучении предлагаются как доказываемые теоремы.

Таким образом, первый отдел, как видим, составляет учебную часть, во-первых, потому, что в нем заучиваются наизусть количественные соотношения, изображенные посредством условной математической символистики, и, во-вторых, потому, что при выводе следствий из данного равенства мы знакомимся впервые с методами математического синтеза, а при доказательстве заданного равенства — с методом математического анализа.

Ко второму отделу относятся все те вопросы, в которых требуется найти результат известных действий над известными величинами. Следовательно, это отдел выполнения математических действий. Сюда относятся теория действий и правила их выполнения. При изучении этого учебного отдела его обычно развивают параллельно с первым, так как знакомство с методами синтеза и анализа невозможно без предварительного ознакомления с теорией действий.

К третьему отделу относится решение уравнений, то есть все те вопросы, которые приводят к задаче: по данным действиям над известными и неизвестными количествами и данному результату этих действий найти все неизвестные количества. Отдел этот, как мы знаем, распадается на две резко различные группы:

$$\text{III}\ \begin{cases} 1)\ F(a,b,c,\ldots,x)=R. \\ 2)\ F(a,b,c,\ldots,x,y,z,\ldots)=R. \end{cases}$$

В первой из них по одной данной зависимости требуется определить одно неизвестное, во втором — более одного. Первая объединяет собою решение определенных уравнений, вторая — решение неопределенных уравнений.

В свою очередь, первая группа сама делится на два класса:

$$F(a,b,c,\ldots,x)=R:\begin{cases} \alpha)\ x=\Phi(a,b,c,\ldots). \\ \beta)\ x=X(a,b,c,\ldots). \end{cases}$$

Первый из них (класс α) рассматривает те случаи, когда из данного уравнения

$$F(a,b,c,\ldots,x)=R$$

мы можем путем преобразований получить ту же зависимость в другом виде:

$$x=\Phi(a,b,c,\ldots),$$

где символом Φ обозначен известный ряд действий.

Второй класс (β) рассматривает те случаи, когда такого преобразования мы делать не умеем, то есть приходим к заключению, что для определения неизвестного x нужно было бы совершить над количествами a, b, $c, \ldots$ какой-то неизвестный нам ряд действий X.

В первом случае решение уравнения возможно, во втором — невозможно посредством знакомых нам действий, повторенных конечное число раз. Этот второй случай относится к так называемой трансцендентной математике, и рассматриваемые в нем уравнения допускают в частных случаях лишь решение по приближению.

Итак, к третьему отделу относятся: теория и решение определенных уравнений, трансцендентных уравнений и решение их по приближению, неопределенные уравнения и их решения, удовлетворяющие заданным условиям.

Наконец, четвертый отдел, обыкновенно не выделяемый в курсах математики в особую рубрику и наименее в педагогическом отношении разработанный, рассматривает все те многочисленные вопросы, в которых по данным количествам a, b, c, ... и данному результату R некоторых над ними действий требуется найти этот неизвестный ряд действий X.

Этот отдел, состоя только из таких задач, для решения которых не существует определенных правил, очевидно, должен быть отнесен к области математического искусства, а не знания. На мой взгляд, удобнее всего назвать его отделом восстановления математических действий.

Таким образом, придерживаясь этой классификации, можем дать общую схему изучения чистой математики:

<table>
<tr><th colspan="3">Знание</th><th>Искусство</th></tr>
<tr><th colspan="3">Условные обозначения</th><td></td></tr>
<tr><td rowspan="3">I. Факты:</td><td colspan="2">Аксиомы</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Равенства</td><td>Преобразование</td></tr>
<tr><td colspan="2">Теоремы</td><td>Доказательства</td></tr>
<tr><td>II. Действия:</td><td colspan="2">Теория</td><td>Выполнение</td></tr>
<tr><td rowspan="3">III. Уравнения:</td><td rowspan="3">Теория:</td><td>определенные уравнения</td><td rowspan="3">Решение</td></tr>
<tr><td>неопределенные уравнения</td></tr>
<tr><td>трансцендентные уравнения</td></tr>
<tr><td>IV.</td><td colspan="2"></td><td>Восстановление действий</td></tr>
</table>

Такое разделение математического знания и математического искусства просто и известно, тем не менее, оно постоянно упускается из виду при изучении математики, хотя и осознается почти всеми.

Сделаем еще одно замечание. Некоторые предпочитают употреблять понятие «математический навык» вместо употребляемого здесь термина «математическое искусство». Строго говоря, это не одно и то же, потому что не всё в области искусства может быть приобретено упражнением, то есть не всё в искусстве есть только навык. Подобно тому, например, как быстрота и правильность передачи нашей воли от центров к периферии для каждого из нас ограничена пределом, перейти за который не помогут нам никакие упражнения, точно также быстрота и правильность математических рассуждений зависит не только от степени приобретенного навыка и объема знаний, но еще и от индивидуальных способностей ума к анализу и синтезу.

Согласившись с этим, математик-педагог ни на минуту не должен забывать, что, во-первых, можно требовать много лишь от того, кому многое дано. И потому, во-первых, первой заботой преподавателя должно быть правильное выделение учеников более способных от средних и — из числа последних — наименее способных. И, во-вторых, преподаватель должен помнить, что кроме гражданской обязанности удержать общий уровень математических знаний в классе не ниже установленной нормы, на нем лежит еще нравственная обязанность развивать в учениках (по крайней мере, более способных) любовь к математике как к искусству и помочь им (хотя бы вне класса) пойти в овладении этим искусством по правильному пути.

Едва ли кто-нибудь из нематематиков в состоянии освоиться с мыслью, что цифры могут представлять собой культурную или эстетическую ценность или иметь какое-нибудь отношение к таким понятиям, как красота, сила, вдохновение. Я решительно протестую против этого косного представления о математике.

Норберт Винер