КРАЩЕ МЕНШЕ, ТА КРАЩЕ

З. І. Боренкова, м. Енергодар, Запорізька обл.

В умовах реформування та модернізації математичної освіти в Україні все частіше стали говорити про парадокс: програми з математики стають більш об'ємними, але це не призводить, на жаль, до покращення якості математичної освіти. З кожним роком навчання учні отримують величезний обсяг інформації, який потрібно переробити, усвідомити, навчитися застосовувати на практиці, і до того ж за менший ніж раніше час. Перевантаження матеріалу великою кількістю правил, формул, теорем і означень не дає можливості учням міцно їх засвоїти і призводить до механічного запам'ятовування без достатніх логічних зв'язків. Але без міцного збереження набутих знань, без уміння відтворити в необхідний момент раніше засвоєний матеріал, вивчення нового матеріалу завжди буде пов'язане з великими труднощами і не дає належного ефекту. Відома приказка «Краще менше, та краще». Видатний німецький педагог А. Дистервег звертався до вчителів із відповідним правилом викладання: «Навчай якомога менше! Тоді ти навчатимеш учня лише найсуттєвішому, лише найголовнішому, тоді ти зможеш ґрунтовно взятися за цей матеріал, закарбувати його міцно у свідомості учня». Тому майстерність вчителя полягає в умінні виділити головний зміст навчального матеріалу, встановити якомога міцніші внутрішньопредметні зв'язки, не нав'язувати учневі все нові і нові формули і методи, а вчити креативно і творчо застосовувати вже здобуті знання під час вивчення нових тем. Я. А. Каменський у «Великій дидактиці» писав: «Якщо буде з'ясоване основне, другорядне випливатиме з нього саме собою...».

У шкільному курсі математики для себе я виділила ряд провідних тем, глибоке й свідоме вивчення яких допомагають і вчителеві, і учням у подальшому засвоєнні нових знань. Разом зі своїми учнями ми створили банк необхідних означень, формул, теорем для кожного класу. Але глибоке засвоєння матеріалу вимагає неодноразового повернення до нього і розгляду в різних зв'язках і контекстах. Я переконана: неважливо скільки годин відводиться на вивчення тієї чи іншої теми за програмою, важливо, як часто ви звертатиметеся до цієї теми протягом наступних занять.

Наведу приклади, мета яких звернути увагу читачів на те, що звичайні завдання з математики мають широкі методичні можливості, по-перше, для повторення та застосування раніше набутих учнями знань, по-друге, для формування в учнів ключових компетентностей, таких потрібних у подальшому житті.

У 8-му класі учні вивчають властивості степеня з цілим показником. Як свідчить досвід, перетворення виразів, що містять степені з цілим показником, викликають в учнів значні труднощі. Продемонструємо, як, спираючись на раніше набуті знання, сформувати вміння спрощувати такі вирази.

Задача 1. Спростіть вираз

$$\frac{a^{-2}-10a^{-1}b^{-1}+25b^{-2}}{a^{-1}-5b^{-1}}.$$

Розв'язання

Зрозуміло, що спрощення цього виразу за означенням степеня з цілим показником, призведе до «чотириповерхового» виразу

$$\frac{\frac{1}{a^2}-\frac{10}{ab}+\frac{25}{b^2}}{\frac{1}{a}-\frac{5}{b}}.$$

Отже, потрібно шукати інші шляхи.

Виконана заміна

$$a^{-1}=x,\ a^{-2}=x^2,\ b^{-1}=y,\ b^{-2}=y^2$$

дозволяє «побачити» структуру виразу, який при цьому набуває звичного для учнів вигляду:

$$\frac{x^2-10xy+25y^2}{x-5y}.$$

Отже,

$$\frac{x^2-10xy+25y^2}{x-5y}=\frac{(x-5y)^2}{x-5y}=$$

$$=x-5y=a^{-1}-5b^{-1}=\frac{1}{a}-\frac{5}{b}=\frac{b-5a}{ab}.$$

Зауваження. Під час перетворення цього виразу є нагода продемонструвати учням використання заміни не тільки для розв'язування рівнянь (як звикли учні), а й для спрощення виразів. Для того щоб увести заміну, учні мають проаналізувати вираз, дійти висновку, чи доречна вона (тобто формуємо в учнів ключові компетентності).

Задача 2. Спростіть вираз

$$\frac{5c^{-3}}{c^{-3}-3}-\frac{c^{-3}+6}{2c^{-3}-6}\cdot\frac{90}{c^{-6}+6c^{-3}}$$

і запишіть результат у вигляді раціонального виразу, який не містить степеня з від'ємним показником.

Розв'язання

$$\frac{5c^{-3}}{c^{-3}-3}-\frac{c^{-3}+6}{2c^{-3}-6}\cdot\frac{90}{c^{-6}+6c^{-3}}=\frac{5}{1-3c^{3}}-\frac{1+6c^{3}}{2-6c^{3}}\cdot\frac{90c^{6}}{1+6c^{3}}=$$

$$=\frac{5}{1-3c^{3}}-\frac{45c^{6}}{1-3c^{3}}=\frac{5\left(1-3c^{3}\right)\left(1+3c^{3}\right)}{1-3c^{3}}=5+15c^{3}.$$

Зауваження. Основна властивість дробу красиво «працює» під час перетворення виразів, що містять степені з від'ємним показником. А в учителя є чудова нагода ще раз повторити з учнями властивість дробу та показати зв'язок між раніше засвоєним матеріалом та матеріалом, який вивчається.

Задача 3. Спростіть вираз

$$\frac{5m^{-2}+n^{-2}}{4m^{-3}+4m^{-1}n^{-2}}-\frac{m^{-1}}{m^{-2}+n^{-2}}$$

і запишіть результат у вигляді раціонального виразу, який не містить степеня з від'ємним показником.

Розв'язання

$$\frac{5m^{-2}+n^{-2}}{4m^{-3}+4m^{-1}n^{-2}}-\frac{m^{-1}}{m^{-2}+n^{-2}}=$$

$$=\frac{m^{-2}n^{-2}\left(5n^{2}+m^{2}\right)}{4m^{-3}n^{-2}\left(n^{2}+m^{2}\right)}-\frac{m^{-1}}{m^{-2}n^{-2}\left(n^{2}+m^{2}\right)}=$$

$$=\frac{m\left(5n^{2}+m^{2}\right)}{4\left(n^{2}+m^{2}\right)}-\frac{mn^{2}}{n^{2}+m^{2}}=\frac{5n^{2}m+m^{3}-4mn^{2}}{4\left(n^{2}+m^{2}\right)}=$$

$$=\frac{n^{2}m+m^{3}}{4\left(n^{2}+m^{2}\right)}=\frac{m\left(n^{2}+m^{2}\right)}{4\left(n^{2}+m^{2}\right)}=\frac{m}{4}.$$

Зауваження. Аналізуючи виконання цього завдання, доречно з учнями провести бесіду, у ході якої учні дійдуть висновку, що можна ввести заміну та скористатися основною властивістю дробу, але ці способи розв'язання не будуть раціональними. Отже, потрібно шукати інший спосіб.

Під час спрощення цього виразу ми скористалися відомим учням із 7 класу способом розкладання на множники — винесенням множника за дужки. Майстерність учителя полягає в тому, щоб «зламати» в учнів стереотип, що виносити за дужки можна тільки спільний множник.

У 8-му класі учні вивчають властивості прямокутного трикутника, співвідношення між сторонами, доводять теорему Піфагора. Ці знання стануть їм у пригоді під час вивчення тригонометрії в 10 класі.

Задача 1. Дано:

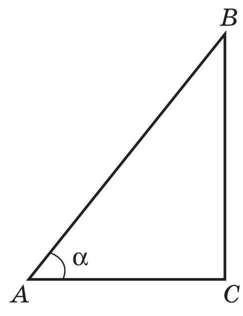
$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{3}{4},\ \ 0<\alpha<\frac{\pi}{2}.$$

Знайти: $\cos\alpha$.

Розв'язання

1. Розглянемо прямокутний трикутник із катетами $AC=3$, $BC=4$, тоді
$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{AC}{BC}=\frac{3}{5}.$$
2. За теоремою Піфагора $AB=5$.
3. $\cos\alpha=\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{3}{5}.$

Відповідь. $\frac{3}{5}$.

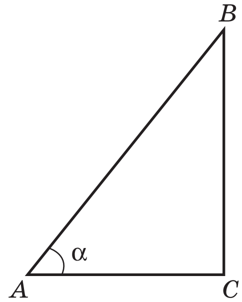


Зауваження

1) Це завдання можна було розв'язати за допомогою основних тригонометричних тотожностей, але тоді спочатку треба було

знайти $\sin\alpha$, а потім вже $\cos\alpha$, тобто застосувати тотожності:

$$1+\operatorname{ctg}^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha};\ \sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1.$$



2) У випадку, коли кут α належить II, III або IV чверті, усе одно знаходимо тригонометричні функції гострого кута, а далі беремо знак тригонометричної функції залежно від чверті, де знаходиться відповідний кут. Наприклад, якщо

$$\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi,$$

тоді

$$\cos\alpha=-\cos A=-\frac{3}{5}.$$

3) На ЗНО з математики 2009 року завдання: «Знайти $\cos\alpha$, якщо $\sin\alpha=0{,}8$, $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$» виконало тільки 14 % учнів.

Задача 2. Обчисліть: $\operatorname{ctg}\left(\arccos\frac{5}{13}\right)$.

Розв'язання

За означенням $\arccos\frac{5}{13}$, це гострий кут, косинус якого дорівнює $\frac{5}{13}$.

Позначимо $\arccos\frac{5}{13}=\alpha$, отже, $\cos\alpha=\frac{5}{13}$.

Задача зводиться до знаходження $\operatorname{ctg}\alpha$.

1) Розглянемо прямокутний трикутник ABC із прямим кутом C, у якому $AC=5$, $AB=13$, тоді $\cos\alpha=\frac{AC}{AB}=\frac{5}{13}$.

2) За теоремою Піфагора:

$$BC=\sqrt{AB^2-AC^2}=\sqrt{169-25}=\sqrt{144}=12.$$

3) $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{AC}{BC}=\frac{5}{12}$.

Відповідь. $\frac{5}{12}$.

Задача 3 (ЗНО-2008). Знайдіть

$$2\sqrt{13}\cos\left(\operatorname{arctg}\frac{2}{3}\right)$$

(наразі, це завдання правильно виконали менше 6 % учнів).

Розв'язання

За означенням $\operatorname{arctg}\frac{2}{3}$, це гострий кут, тангенс якого дорівнює $\frac{2}{3}$.

Позначимо, $\operatorname{arctg}\frac{2}{3}=\alpha$, тоді $\operatorname{tg}\alpha=\frac{2}{3}$.

Задача зводиться до знаходження $\cos\alpha$.

1) Розглянемо прямокутний трикутник ABC із прямим кутом C, у якому $BC=2$, $AC=3$ і $\operatorname{tg}\alpha=\frac{BC}{AC}=\frac{2}{3}$.

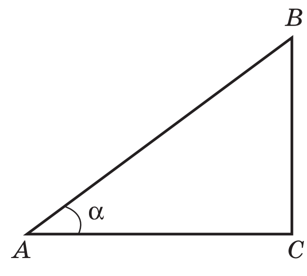
2) За теоремою Піфагора:

$$AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}.$$

3) $\cos\alpha=\frac{AC}{AB}=\frac{3}{\sqrt{13}}$.

4) $2\sqrt{13}\cos\left(\operatorname{arctg}\frac{2}{3}\right)=2\sqrt{13}\cdot\frac{3}{\sqrt{13}}=6$.

Відповідь. 6.



Зауваження

1) Цю задачу можна було розв'язати за допомогою формул обчислення тригонометричних функцій від обернених тригонометричних функцій:

$$\operatorname{ctg}(\arccos x)=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}},\ \cos(\operatorname{arctg} x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}},$$

але ці формули більш ґрунтовно вивчаються у профільних класах або в класах із поглибленим вивченням математики.

2) Виконуючи завдання, учні більш свідомо повторюють означення

$$\arcsin x,\ \arccos x,\ \operatorname{arctg} x,\ \operatorname{arcctg} x,$$

де x — додатний аргумент (10 клас), а також співвідношення між сторонами в прямокутному трикутнику, теорему Піфагора (8 клас).

3) З учнями обов'язково треба обговорювати, що розглянуті обернені функції залежать від додатного аргумента. Тоді областю значень кожної з обернених тригонометричних функцій є інтервал $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$, тобто множина значень гострих кутів деяких прямокутних трикутників, отже, для кожної оберненої тригонометричної функції додатного аргумента можна побудувати прямокутний трикутник, гострим кутом якого є ця обернена тригонометрична функція.

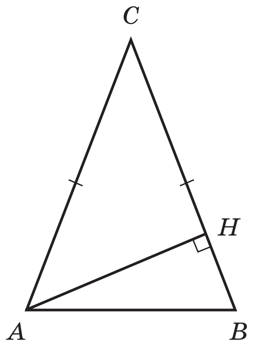
Задача 4. Обчисліть: $\operatorname{tg}15°$.

Розв'язання

Звичайно, у 10 класі $\operatorname{tg}15°$ можна обчислити, застосовуючи формулу

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\operatorname{tg}(45°-30°),$$

але якщо учні цю формулу пам'ятають. Розв'яжемо задачу в інший спосіб.



1) Побудуємо рівнобедрений трикутник, у якому кут при вершині дорівнює $30°$, тобто $\angle ACB=30°$. Тоді $\angle CAB=\angle CBA=75°$.
2) Проведемо з вершини A висоту AH. Трикутник AHC — прямокутний. Катет AH лежить проти кута $30°$, отже, він дорівнює половині гіпотенузи. Нехай $AH=1$, тоді $AC=2$.

   За теоремою Піфагора

$$HC=\sqrt{AC^2-AH^2}=\sqrt{4-1}=\sqrt{3}.$$

3) $AC=CB=2$, тоді $HB=2-\sqrt{3}$.
4) Трикутник AHB — прямокутний,

$$\angle HAB=15°.$$

$$\operatorname{tg}15°=\operatorname{tg}\angle HAB=\frac{HB}{AH}=\frac{2-\sqrt{3}}{1}=2-\sqrt{3}.$$

Відповідь. $2-\sqrt{3}$.

Зауваження

1) Завдання 10 класу з тригонометрії було розв'язано за допомогою лише тих відомостей, які вивчаються у 8 класі.
2) Виконуючи завдання, учні повторили властивості кутів у рівнобедреному і прямокутному трикутнику, співвідношення між сторонами в прямокутному трикутнику, теорему Піфагора.

Я в жодному разі не заперечую необхідність вивчення основних тригонометричних тотожностей. Але це повинно бути не старанне заучування формул, а осмислене їх розуміння і застосування.

Отже, для того щоб успішно розв'язувати задачі з математики, в учня повинна бути база необхідних означень, формул, теорем, які він пам'ятає, розуміє і постійно застосовує на практиці. І задача вчителя — допомогти учневі створити цю базу і встановити міцні зв'язки між її елементами, сформувати вміння аналізувати, систематизувати, оцінювати, узагальнювати інформацію, тобто сформувати ключові компетентності.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Дистервег А.* Керівництво до освіти німецьких вчителів / А. Дістервег // Хрестоматія з історії зарубіжної педагогіки / упоряд. проф. А. І. Піскунов. — М. : Просвещение, 1971.
2. *Щербаков П. М.* Теоретичні основи і практичні розробки спрощених методів обчислення тригонометричних виразів з оберненими тригонометричними функціями: навч. посіб. / П. М. Щербаков, Л. І. Шелест, К. Ю. Шелест. — Д. : Національний гірничий університет, 2012.