

УГОЛ МЕЖДУ ЧАСОВОЙ И МИНУТНОЙ СТРЕЛКАМИ

Истории барона Мюнхгаузена

Г. Б. Филипповский, г. Киев

Как вы понимаете, Друзья, угол — это одно из основных геометрических и жизненных понятий. Вспомните древнегреческую поговорку: «Без угла не вытащишь и рыбку из пруда!» Греки загибали кусочек проволоки углом (получалось нечто вроде крючка) и вытаскивали разнообразную рыбку из пруда, как они тогда называли Эгейское море. По прошествии ряда веков поговорку слегка изменили, но и теперь она в своей сущности — правильная!

Помню, в школе меня то и дело ставили в угол. Уже и не скажу вам, где я чаще находился: в углу или за ученическим столом.

А когда мы познакомились с Мэри и она обронила: «Был бы угол — жених найдётся!», я сразу воспыпал к ней симпатией. Общая страсть к углам сильно сблизила нас!..

Футбол я люблю прежде всего за то, что там то и дело подают «угловые». Ещё постоянно спорят: «угловой» — «не угловой».

В последние годы многочисленные неприятели постоянно пытаются загнать меня в угол. Правда, никому из них это не удаётся. Дело в том, что все свои углы я уже отстоял в школьные годы. А они, неприятели, не знают об этом — вот и не прекращают попыток...

Как только я в начале XVII века понял, что одной часовой стрелки будет маловато для точного определения Времени, то сразу же изобрёл минутную стрелку и стал активно внедрять её в жизнь часов, а заодно и людей. Между стрелками мгновенно возник угол взаимной симпатии, изменяющийся от нуля до 180 градусов! Так вот, об этом угле мы с вами, Друзья мои, как раз и поведём обстоятельный разговор. Итак, истории от барона Мюнхгаузена о всевозможных углах между часовой и минутной стрелками!..



ИСТОРИЯ 1

К углу 90° я неравнодушен со школьной скамьи. Поэтому после установления минутной стрелки я сразу же задался вопросом: сколько раз в сутки часовая и минутная стрелки образуют прямой угол?



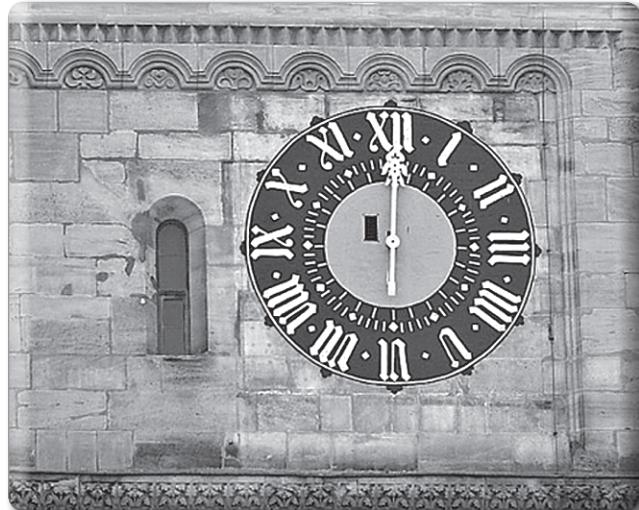
Решение

Понятно, что минутная стрелка за сутки делает 24 оборота, а часовая — 2 оборота. То есть, минутная стрелка обгоняет часовую 22 раза. Замечу вам, что при каждом таком «обгоне» стрелки образуют угол 90° ровно 2 раза (проверьте!). Значит, за сутки часовая

и минутная стрелки образуют прямой угол 44 раза!..

ІСТОРИЯ 2

Только что стрелки на башенных часах сошли. «Любопытно! — подумал я. — А через сколько минут они будут «смотреть» в противоположные стороны, то есть угол между ними составит 180° ?»



Решение

Пусть это произойдёт через x минут. Ясно, что минутная стрелка пройдёт за это время x минутных делений циферблата. А часовая стрелка за это время успеет пройти $\frac{x}{12}$ минутных делений. При этом стрелки «смотрят» в противоположные стороны. Тогда их разделяет промежуток времени в 6 часов или в 30 минутных делений циферблата ($6 \times 5 = 30$). Таким образом,

$$x - \frac{x}{12} = 30, \text{ откуда } x = 32\frac{8}{11} \text{ (минуты).}$$

Через $32\frac{8}{11}$ минуты после совпадения стрелки будут «смотреть» в противоположные стороны.

ІСТОРИЯ 3

Сосчитайте-ка, Друзья мои, чему равен угол между стрелками часов в 12:30; в 14:20. А в 13:50, которые наступят через пару минут?



Решение

- Если бы часовая стрелка показывала точно на «12», то очевидно, угол был бы равен 180° . Но за 30 минут (половину расстояния от «12» до «1»). Угол от одного числа на циферблете до следующего равен 30° ($360^\circ : 12 = 30^\circ$). Понятно, что за половину часа часовая стрелка повернётся на угол, равный 15° . Значит, угол между стрелками часов в 12:30 равен $180^\circ - 15^\circ = 165^\circ$.
- Если бы часовая стрелка стояла у цифры «2», то угол был бы равен $30^\circ + 30^\circ = 60^\circ$. Но за 20 минут она подвинется к цифре «3» на угол, равный $\frac{1}{3} \cdot 30^\circ = 10^\circ$. Поэтому

ЗРОБИМО УРОК ЦІКАВІШИМ

угол между стрелками часов в 14:20 равен $60^\circ - 10^\circ = 50^\circ$.

- в) Если бы часовая стрелка стояла точно на цифре «1», то угол был бы равен 90° . Но за 50 минут она повернётся к цифре «2» на угол, равный $\frac{5}{6} \cdot 30^\circ = 25^\circ$. Следовательно, ответ такой: $90^\circ + 25^\circ = 115^\circ$.



ИСТОРИЯ 4

Как вы знаете, в полночь стрелки часов совпадают. Сколько раз после полуночи до 12 часов дня (включительно) часовая и минутная стрелки снова будут совпадать? И в какие моменты времени?

Решение



За 1 час минутная стрелка делает 1 оборот, а часовая — $\frac{1}{12}$ оборота. Тогда отстава-

ние часовой стрелки от минутной составляет $1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}$ оборота. А чтобы отставание стало равным 1 обороту, потребуется времени $1 : \frac{11}{12} = \frac{12}{11}$ часа после полуночи. Или $1 \frac{1}{11}$ часа = $1 \frac{60}{11}$ минут = 1 час $5 \frac{5}{11}$ минут. Таким образом, первая встреча стрелок состоится в 1 час $5 \frac{5}{11}$ минуты. Дальше всё точно так же — через каждые 1 час и $5 \frac{5}{11}$ минут: вторая встреча — в 2 часа $10 \frac{10}{11}$ минуты, третья — в 3 часа $16 \frac{4}{11}$ минуты, четвёртая — в 4 часа $21 \frac{9}{11}$ минуты, пятая — в 5 часов $27 \frac{3}{11}$ минуты, шестая — в 6 часов $32 \frac{8}{11}$ минуты, седьмая — в 7 часов $38 \frac{2}{11}$ минуты, восьмая — в 8 часов $43 \frac{7}{11}$ минуты, девятая — в 9 часов $49 \frac{1}{11}$ минуты, десятая — в 10 часов $54 \frac{6}{11}$ минуты, одиннадцатая — ровно в 12 часов дня.

ИСТОРИЯ 5

Однажды на листе бумаги я нарисовал красивые часы, где были как минутная, так и часовая стрелки.

— Томас, — попросил я своего слугу, — сосчитай, пожалуйста, угол между стрелками часов.

А надо сказать, Томас весьма наловчился учитывать движение стрелок часов. Подумав немного, он сообщил, что угол равен 100° .

— Молодец, Томас! — похвалил я его.

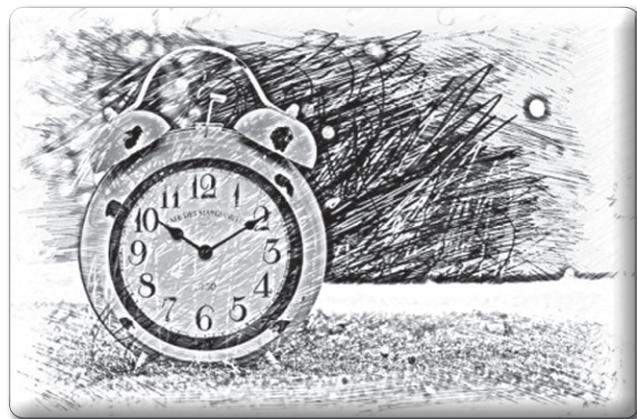
Тут же я показал этот листок моей верной собаке Матильде. Дело в том, что и её я обучил считать правильно угол между стрелками часов.

— Гав-гав-гав! — пролаяла Матильда 15 раз, сигнализируя этим, что угол равен 15° .

— Матильда, ты у меня просто умница! — похвалил я её и угостил внеочередным кусочком сахара.

Кто же прав: Томас или Матильда?

Решение



Оба правы!

Томасу я показал часы на одной стороне листа, где угол был равен 100° , а Матильде — часы на другой стороне листа, где стрелки составляли угол 15° . ☺

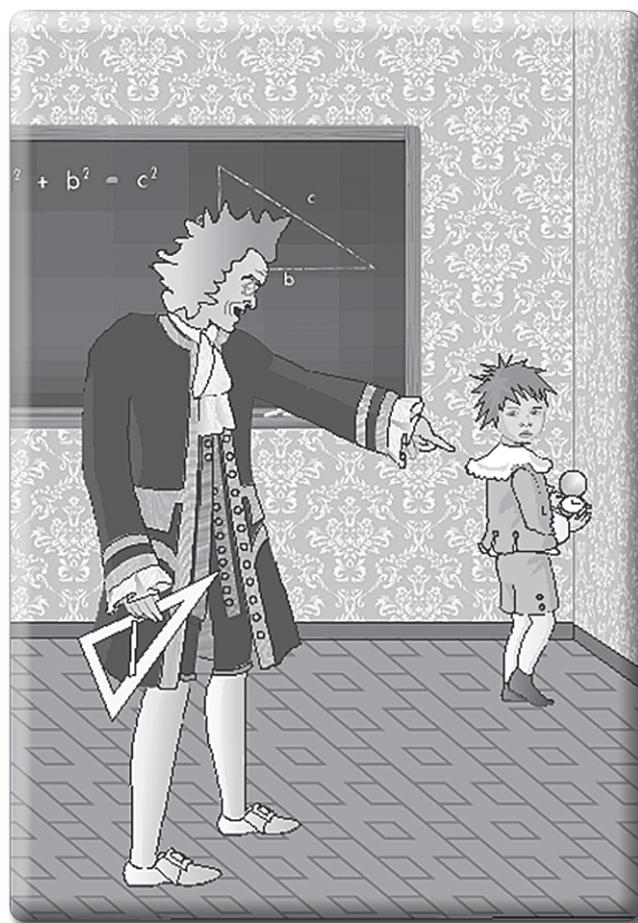
ІСТОРИЯ 6

О прямом угле, Друзья, я готов говорить вновь и вновь! Помню, первый раз меня поставили в школе в угол, когда впервые после 12 часов дня часовая и минутная стрелки составили угол 90° . Назовите точное время моей первой постановки в угол!

Решение

Впервые после 12 часов угол между стрелками часов будет прямым тогда, когда минутная стрелка обгонит часовую на 90° . За 1 час минутная стрелка проходит 360° , а часовая — 30° . То есть за час минутная стрелка обгоняет часовую на 330° . А на 90° она обгонит её за $90:330 = \frac{3}{11}$ часа или за $16\frac{4}{11}$ минуты.

Следовательно, впервые после 12 часов угол между стрелками будет прямым в 12 часов $16\frac{4}{11}$ минуты.

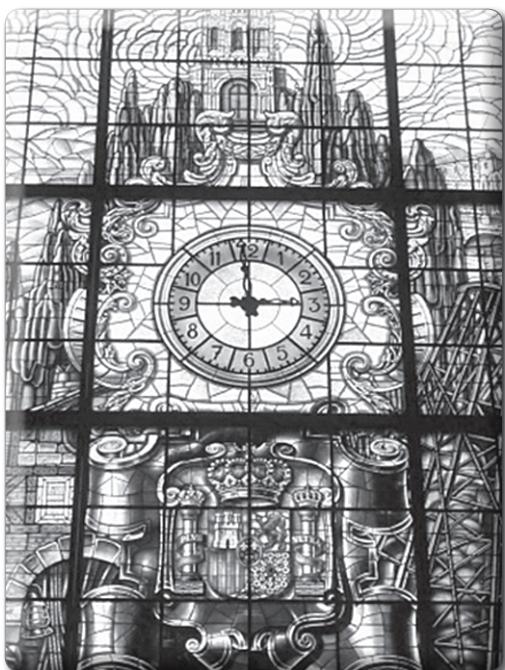


ІСТОРИЯ 7

А что, Друзья мои, попробуем найти более сложные углы между часовой и минутной стрелками?

- 17:38;
- без 1 минуты 3 часа.

ЗРОБИМО УРОК ЦІКАВІШИМ



Решение

- а) Если бы часовая стрелка стояла ровно на цифре «5», то угол был бы таким: $30^\circ + 30^\circ + 3 \cdot 6^\circ = 78^\circ$.

Но за 38 минут она повернется в сторону цифры «6» на угол $\frac{38}{60} \cdot 30^\circ = 19^\circ$. Стало быть, правильный ответ: $78^\circ - 19^\circ = 59^\circ$.

- б) Если бы часовая стрелка была ровно на цифре «3», то нетрудно сосчитать угол: $30^\circ + 30^\circ + 30^\circ + 6^\circ = 96^\circ$.

Но она не дойдёт до цифры «3» на $\frac{1}{60} \cdot 30^\circ = 0,5^\circ$. Поэтому угол между стрелками часов равен $95,5^\circ$.

ІСТОРИЯ 8

Однажды, подсчитав угол между часовой и минутной стрелками, я заметил, что по истечении получаса этот угол оказался точно таким же! Каким он мог быть?



Решение

Первый вариант ответа. Любым! Потому что часы стояли! ☺

Второй вариант ответа. Понятно, что за полчаса минутная стрелка поворачивается на угол 180° , то есть остаётся на той же прямой. Так как результат вычислений не изменился, то оба положения часовой стрелки должны быть симметричными относительно перпендикуляра к этой прямой. Однако ча-

совая стрелка за полчаса поворачивается на угол 15° . Вот и получается: $90^\circ + 7,5^\circ$ или $90^\circ - 7,5^\circ$.

Ответ. $97,5^\circ$ или $82,5^\circ$.



ІСТОРИЯ 9



Мои настенные часы «убегают» вперёд менее чем на полчаса в сутки. Вчера в 10 часов вечера я выставил их по башенным часам, которые видны из окна моего дома. Башенные часы идут точно и показывают 6 часов утра

сегодняшнего дня. Угол между стрелками моих настенных часов в этот момент равен 136° . На сколько минут в сутки спешат мои часы?

Решение

Прошло 8 часов или $\frac{1}{3}$ часть суток. Часы «убежали» вперёд меньше, чем на 10 минут. Пусть минутная стрелка моих часов «пробежала» x градусов после 6 утра. Тогда часовая стрелка пробежала $\frac{x}{12}$ градусов. Следовательно,

$$180^\circ - x + \frac{x}{12} = 136^\circ,$$

или

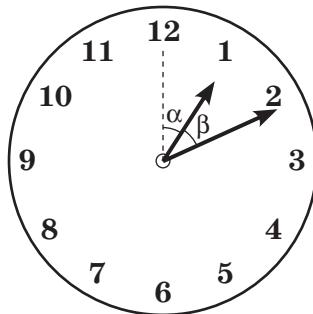
$$\frac{11}{12}x = 44^\circ, \text{ откуда } x = 48^\circ.$$

Значит, на моих часах сейчас 6 часов 8 минут. Так как за $\frac{1}{3}$ часть суток они «убежали» вперёд на 8 минут, то в сутки они спешат на 24 минуты.

ІСТОРИЯ 10

Замечу, Друзья мои, что являюсь весьма пунктуальным человеком. Когда я жил в Праге, то всякий раз заходил пообедать в кафе на площади городской ратуши в начале второго часа дня, когда минутная стрелка на башенных часах опережала часовую на столько же, на сколько часовая стрелка находилась впереди числа «12» на циферблате. Когда точно я заходил в кафе в Праге?

Решение



Согласно рисунку углы α и β равны. Пусть минутная стрелка после часа дня пройдёт x градусов (от числа «12»). Часовая

ЗРОБИМО УРОК ЦІКАВІШИМ

стрелка при этом повернётся от цифры «1» к цифре «2» на $\frac{x}{12}$ градусов. Так как $\alpha = \beta$, то

$$30^\circ + \frac{x}{12} = \frac{x}{2}, \text{ откуда } 5x = 360^\circ, x = 72^\circ.$$

От «12» до «2» — 60° . И ещё 12° — это два минутных деления (по 6°). Значит, я заходил в кафе на площади ратуши в 13 часов 12 минут.



ІСТОРИЯ 11

Как мы знаем, существуют моменты времени, когда часовая и минутная стрелки часов лежат на одной прямой, образуя угол 180° . Интересно, а найдутся ли среди таких прямых две взаимно перпендикулярные?



Решение

Предположим, что найдутся. Значит, в эти моменты времени часовые стрелки будут перпендикулярны друг другу. В таком случае положение минутных стрелок одинаково, поскольку время от начала часа (в минутах) прошло одно и то же. А значит, они никак не могут образовывать угол, равный 90° . Теперь понятно, что взаимно перпендикулярных прямых не найдётся!

ІСТОРИЯ 12



Однажды в полночь, когда наступало 1 апреля, мои настенные часы решили «попутить»: часовая стрелка стала двигаться так, как минутная, а минутная — как часовая. «Ну, ребята, вы даёте! — улыбнулся я. — Когда же вы в таком случае впервые покажете точное время?»

Решение

Очевидно, на протяжении первого часа мои «попутившие» часы не покажут точного времени, поскольку часовая стрелка «убежит» вперёд. А вот после часа ночи это произойдёт, когда часовая стрелка догонит минутную... Ведь часовая стрелка находится на «12», а в час ночи минутная — на «1». Так-так, но ведь это та же ситуация, что в истории 4 — просто стрелки поменялись местами! Тогда и считать не надо, а следует вернуться к истории 4: первая встреча стрелок произойдёт в 1 час $5\frac{5}{11}$ минуты. Вот...

ИСТОРИЯ 13



А ещё был случай... На минутной стрелке башенных часов отломался кусочек, и она

перестала отличаться от часовой. Горожане были весьма обеспокоены: если не наблюдать некоторое время за ходом таких часов, то можно всерьёз ошибиться со временем. Через несколько суток мастер нарастил минутную стрелку, и всё пошло своим чередом. Я же задался целью сосчитать: сколько раз в сутки можно ошибиться со временем на таких часах с неразличимыми стрелками. Сколько?

Решение

Я сосчитал, сколько раз можно ошибиться за 1 час, начиная с 12 часов. Это примерно в 12:06; 12:11; 12:16; 12:21 и так далее. За час таких положений 11. За 12 часов 132 (11×12). За сутки таких положений часов будет 264.

ИСТОРИЯ 14



Помню, как-то один часовий мастер-шутник разместил на циферблатах дополнительную стрелку, которая в любой момент времени образовывала равные углы с часовой и минутной стрелками. Как сказали бы математики, — двигалась по биссектрисе угла между стрелками. Сколько же тогда полных оборотов делает такая стрелка за сутки?

Решение

Скорость часовой стрелки составляет $\frac{1}{12}$ оборота за 1 час. Скорость минутной стрелки — 1 оборот за час. Тогда скорость биссектрисы составит

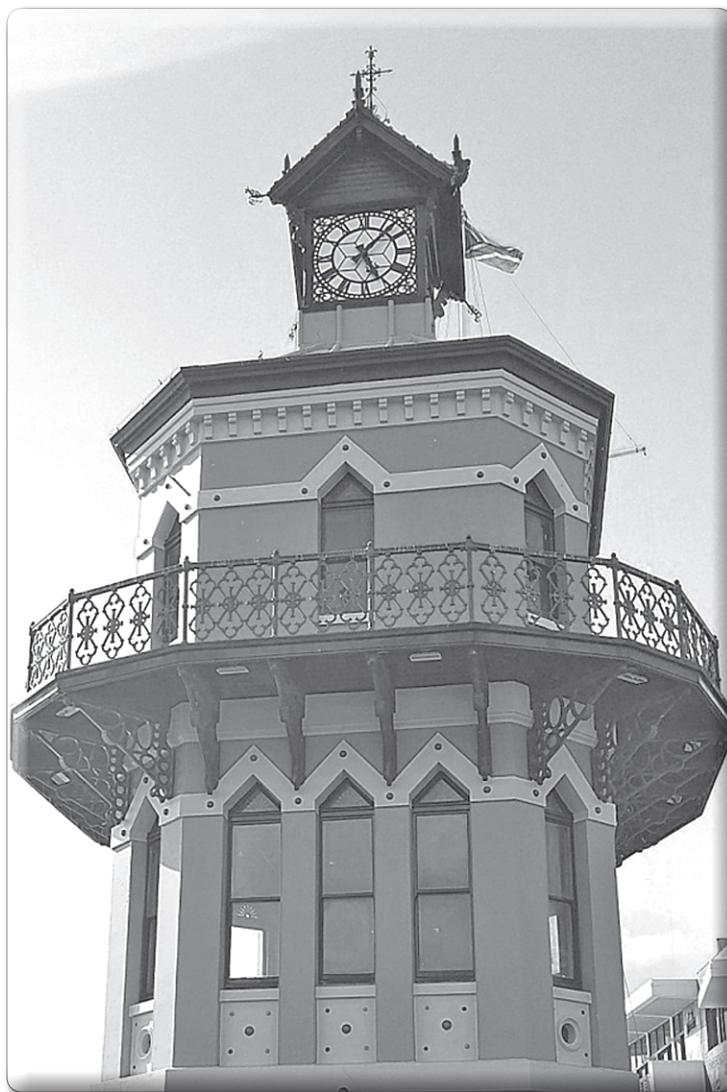
ЗРОБИМО УРОК ЦІКАВІШИМ

$$\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{12} \right) = \frac{13}{24}$$

оборота за час. Значит, за сутки эта самая биссектриса мастера-шутника сделает 13 оборотов.

ІСТОРИЯ 15

Наше свидание с Мэри под башенными часами началось между 13 и 14. Мы никак не могли наговориться!.. А расстались (условившись о новой встрече) между 17 и 18. Причём я заметил, что за время свидания стрелки поменялись местами. В котором часу завершилось наше свидание?



Решение

Очевидно, в начале свидания часовая стрелка была между цифрами «1» и «2», а минутная — между «5» и «6». За условный начальный момент отсчёта я взял 12 часов, а условную единицу пути — путь часовой стрелки за 1 час, то есть $\frac{1}{12}$ часть окружности циферблата.

Пусть свидание началось в момент времени x . Тогда часовая стрелка прошла от 12 часов x единиц. Точно так же, если свидание завершилось в момент времени y (между 17 и 18), то часовая стрелка от 12 часов прошла y единиц.

Этот же путь y минутная стрелка прошла от 13 часов (когда она была на «12») до начала свидания.

Тогда часовая стрелка за это время прошла путь $\frac{y}{12}$ (в 12 раз меньше).

Получается:

$$1 + \frac{y}{12} = x.$$

Аналогично для завершения свидания:

$$5 + \frac{y}{12} = y.$$

Тогда

$$y + 12 = 12x \text{ и } x + 60 = 12y,$$

откуда

$$143y = 732, \quad y = 5 \frac{17}{143} \text{ (часа),}$$

или $y = 5$ часов $7 \frac{19}{143}$ минут.

Наше с Мэри свидание завершилось в 17 часов $7 \frac{19}{143}$ минут...

* * *

Несколько «угловых» историй со стрелками часов останутся вам, Друзья мои, для самостоятельного решения.

ИСТОРИЯ 16

Друзья мои, а сколько раз в сутки угол между стрелками часов равен 120 градусов?

**ИСТОРИЯ 17**

Наш математический поединок с голландским математиком Ван Роуменом длился чуть более получаса.

Сколько же длилась наша математическая дуэль, если я заметил, что в момент её начала и в момент её окончания стрелки моих часов находились под углом 90° друг к другу.

И, пожалуйста, не подумайте, что мои часы стояли... ☺

ИСТОРИЯ 18

Вы знаете, как мне дорог угол 90 градусов!

Поэтому давайте-ка найдём ближайший после полудня момент времени, когда именно этот угол установится между стрелками часов.

ИСТОРИЯ 19

Мы с Мэри встретились возле знаменитого Биг Бена вскоре после часа дня, когда угол между стрелками часов (согласно моим расчётом) оказался равным $52,5$ градуса.

Назовите, друзья, точное время нашей встречи.

**ИСТОРИЯ 20**

Чашечку ароматного кофе мой слуга Томас подаёт всегда между часом дня и двумя часами дня. Причём он стучит в дверь в тот момент, когда биссектриса угла, образованного стрелками моих часов, точно указывает на «12». В какой момент времени Томас подаёт мне кофе?

ОТВЕТЫ

История 16. 44 раза.

История 17. 32 и $\frac{8}{11}$ минуты.

История 18. 12 часов 16 и $\frac{4}{11}$ минуты.

История 19. 13 часов 15 минут.

История 20. В 13 часов 50 и $\frac{10}{13}$ минуты.