ПОКАЗНИКОВІ ТА ЛОГАРИФМІЧНІ РІВНЯННЯ

О. О. Старова, м. Харків

Світ рівнянь багатий і різноманітний. На жаль, формат журналу не дозволяє розглянути всі існуючі різновиди рівнянь, тому в останній статті цієї серії ми розглянемо показникові та логарифмічні рівняння, що мають цікаву історію та широке застосування в сучасній науці, техніці, житті загалом.

Алгебра, по суті, — це аналіз рівнянь, усі складові частини її теорії більш чи менш пов'язані з цим основним питанням.

Жозеф Альфред Серре,
французький математик

ПОКАЗНИКОВІ РІВНЯННЯ

Показникові рівняння — це рівняння, у яких невідоме (змінна) міститься в показникові степеня. Іноді розглядають рівняння, що містять не лише показникові, але й інші функції, наприклад: $3^{\mathrm{tg}\,x}=1$ чи $\log_{\frac{1}{16}} = \left(\frac{1}{16}\right)^x$. Такі рівняння не можна віднести до показникових; перше з них називають показниково-тригонометричним, а друге — показниково-логарифмічним.

Показникові рівняння є окремим випадком трансцендентних рівнянь. У школі зазвичай розглядають показникові рівняння тільки в області дійсних чисел.

Для розв'язання показникових рівнянь може застосовуватися логарифмування обох частин рівняння, зрівнювання степенів із рівними основами, графічне розв'язання та інші способи. Основою всіх способів розв'язання показникових рівнянь є властивості показникової функції. У свою чергу, вивчення процесів, описуваних за допомогою показникових функцій, підводить до розв'язання показникових рівнянь.

ЧУДОВА ВЛАСТИВІСТЬ ПОКАЗНИКОВИХ ФУНКЦІЙ

Показникові (чи експоненціальні) функції наділені чудовою властивістю: швидкість їх зростання пропорційна значенню самої функції. Вони як вогнище: чим більше розгорається, тим більше в нього потрібно підкидати дров. Іншими словами, похідна (швидкість зміни) показникової функції сама є показниковою функцією. У ширшому смислі функція зі швидкістю зміни, що пропорційна самій функції (а не дорівнює їй), виражається через показникову функцію.

Аргументом показникової функції може бути будь-яке дійсне чи комплексне число або навіть зовсім інший математичний об'єкт (наприклад, матриця).

Необхідність вивчення функцій, у яких похідна пропорційна самій функції, виникла з відкриттям різних законів природознавства, таких, як закони розмноження, закони радіоактивного випромінювання, закони руху в гальмівному середовищі тощо.

Застосування показникової функції в чистій і прикладній математиці сприяло тому, що американський математик, почесний професор математики Вісконсинського університету в Мадисоні **Уолтер Рудін (1921–2010)** припустив, що ця функція є «найважливішою функцією математики». На практиці показникові функції моделюють відношення, де постійна зміна незалежної змінної дає таку ж пропорційну змінну (тобто процентне збільшення чи зменшення) залежної змінної. Ця властивість має місце в природничих і соціальних науках; таким чином, показникова функція з'являється в різних контекстах у фізиці, хімії, техніці, математичній біології, економіці.

Вивчення властивостей показникової функції привело **Якоба Бернуллі** в 1683 році до числа $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, відомого на сьогодні як число e.

Дещо з історії

- Термін «показник» (буквальний переклад із німецького Exponent) увів німецький математик **Михаель Штіфель (1486–1567)**, який установив зв'язок між арифметичною та геометричною прогресіями (якщо показники степенів заданого числа утворюють арифметичну прогресію, то самі степені утворюють геометричну прогресію).
- Голландський учений **Симон Стевін (1548–1620)** уклав таблиці складних процентів, що по суті були таблицями показникової функції.
- Степені з довільним дійсним показником започаткував **Ісаак Ньютон (1642–1727)**, після чого швейцарський математик **Іоганн Бернуллі (1667–1748)** увів загальне поняття показникової функції.

ПРИКЛАДИ ПРОЦЕСІВ, ОПИСАНИХ ЗА ДОПОМОГОЮ ПОКАЗНИКОВИХ ФУНКЦІЙ

1. Радіоактивний розпад

Зміна маси радіоактивної речовини відбувається за законом $m=m_0\cdot 2^{-\frac{1}{T}}$, де m_0 — маса речовини на початковий момент $t=0$, m — маса речовини на момент часу t, T — деяка константа, зміст якої полягає в такому.

Обчислимо значення m при $t=T$. Так,

$$m(T)=m_0\cdot 2^{-1}=\frac{m_0}{2}.$$

Це означає, що через час T після початкового моменту маса радіоактивної речовини зменшиться вдвічі. Тому число T називають періодом напіврозпаду. Період напіврозпаду радію дорівнює 1600 рокам, урану-238 — 4,5 млрд років, цезію-137 — 31 рік, йоду — 8 діб.

Закон радіоактивного розпаду часто записують у стандартному вигляді $m=m_0e^{-\frac{t}{\tau}}$. Зв'язок константи τ з періодом напіврозпаду нескладно знайти:

$$e^{-\frac{t}{\tau}}=2^{-\frac{t}{\tau}},$$

відповідно

$$-\frac{t}{\tau}=-\frac{t}{T}\ln 2,$$

звідки

$$\tau=\frac{T}{\ln 2}\approx 1{,}45T.$$

2. Барометрична формула

Тиск повітря з висотою зменшується (за сталої температури) за законом $p=p_0e^{-\frac{h}{H}}$, де p_0 — тиск на рівні моря $(h=0)$, p — тиск на висоті h, H — деяка константа, яка залежить від температури. Для температури 20°С величина $H\approx 7{,}7$ км.

ЛОГАРИФМІЧНІ РІВНЯННЯ

Логарифмічні рівняння — це рівняння, що містять змінну (невідоме) під знаком логарифма чи в основі логарифма. Для розв'язання логарифмічних рівнянь використовують різні способи, що ґрунтуються на властивостях логарифма і логарифмічної функції, зведенні рівняння до виду $\log_a A=\log_a B$ та інші. Методи розв'язання логарифмічних рівнянь і нерівностей достатньо глибоко описані в шкільних підручниках.

УТРАТА Й НАБУТТЯ СТОРОННІХ КОРЕНІВ ПІД ЧАС РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЛОГАРИФМІЧНИХ РІВНЯНЬ

Під час перетворення логарифмічних виразів часто використовують формули:

$$a^{\log_a x}=x, \qquad (1)$$

$$\log_a(xy)=\log_a x+\log_a y, \qquad (2)$$

$$\log_a\frac{x}{y}=\log_a x-\log_a y, \qquad (3)$$

$$\log_a x^{\alpha}=\alpha\log_a x, \qquad (4)$$

де $a>0$, $a\neq 1$.

Особливість формул (1)–(4) полягає ось у чому: якщо їхню ліву й праву частини розглядати незалежно одну від одної, то помічаємо, що вони визначені на різних множинах значень змінної. Так, у формулі (1) ліва частина визначена при $x>0$, а права — при будь-якому $x\in\mathbb{R}$. У формулах (2) і (3) ліві частини визначені для всіх пар чисел x і y одного знака, а праві — лише для $x>0$, $y>0$. У формулі (4) при $\alpha=2k$, $k\in\mathbb{Z}$, $k\neq 0$ ліва частина визначена при всіх $x\neq 0$, а права — тільки при $x>0$.

Тому застосування цих формул може змінити область визначення рівняння, тобто спричинити нерівносильні рівняння.

Так, заміна виразу $a^{\log_a f(x)}$ виразом $f(x)$, так само як і застосування формул потенціювання:

$$\log_a f(x)+\log_a g(x)=\log_a\left(f(x)\cdot g(x)\right),$$

$$\log_a f(x)-\log_a g(x)=\log_a\frac{f(x)}{g(x)},$$

$$2k\log_a f(x)=\log_a\left(f(x)\right)^{2k},\ (k\in\mathbb{Z},\ k\neq 0),$$

розширює область визначення, що може призвести до появи сторонніх коренів. Сторонні корені, що з'являються під час потенціювання, зазвичай визначають за допомогою перевірки (через підстановку у вихідне рівняння). За умови, що така перевірка заскладна, доречно замінити вихідне рівняння системою, яка включає це рівняння та необхідні нерівності.

На відміну від рівнянь, під час розв'язування нерівностей перевірка, як правило, неможлива, тому необхідно виконувати лише рівносильні перетворення.

Застосування формул логарифмування:

$$\log_a\left(f(x)\cdot g(x)\right)=\log_a f(x)+\log_a g(x),$$

$$\log_a\frac{f(x)}{g(x)}=\log_a f(x)-\log_a g(x),$$

$$\log_a\left(f(x)\right)^{2k}=2k\log_a f(x),\ (k\in\mathbb{Z},\ k\neq 0)$$

може призвести до втрати коренів через можливе звуження області визначення. Щоб формули логарифмування не спричиняли втрату коренів, ними користуються у вигляді:

$$\log_a\left(f(x)\cdot g(x)\right)=\log_a\left|f(x)\right|+\log_a\left|g(x)\right|,$$

$$\log_a\frac{f(x)}{g(x)}=\log_a\left|f(x)\right|-\log_a\left|g(x)\right|,$$

$$\log_a\left(f(x)\right)^{2k}=2k\log_a\left|f(x)\right|.$$

Зауважимо, що перші дві формули цієї групи також не є універсальними, оскільки вони можуть призвести до розширення області визначення рівняння і, відповідно, до появи сторонніх коренів. Але це не так «жахливо», як звуження області визначення. Як уже зазначалось, сторонні корені можуть бути визначені шляхом перевірки.

Наголосимо, що існує таке перетворення рівняння, при якому формули логарифмування не призводять ні до втрати коренів, ні до набуття сторонніх. Воно полягає в переході від рівняння виду $\log_a\left(f(x)\cdot g(x)\right)=h(x)$ до сукупності рівнянь

$$\left[\begin{array}{l}\log_a f(x)+\log_a g(x)=h(x),\\ \log_a\left(-f(x)\right)+\log\left(-g(x)\right)=h(x),\end{array}\right.$$

рівносильної цьому рівнянню.

Прикладом перетворень, які можуть призвести як до втрати коренів, так і до появи сторонніх коренів, може служити також перехід до нової основи логарифма, що містить змінну. Якщо під час розв'язування рівняння застосовується формула

$$\log_{g(x)} f(x)=\frac{\log_{h(x)} f(x)}{\log_{h(x)} g(x)},$$

то можуть бути втрачені корені, при яких $h(x)\le 0$ чи $h(x)=1$. Застосування цієї формули справа наліво може викликати розширення області визначення. При цьому сторонніми коренями можуть виявитися ті значення x, при яких основа логарифмів $h(x)$ не задовольняє умови $0<h(x)\neq 1$.

КОРОТКА ІСТОРІЯ ЛОГАРИФМІВ

Логарифми відкрили незалежно один від одного двоє вчених — англійський математик **Джон Непер (1550–1617)** і швейцарський учений **Йост Бюргі (1552–1632)**. Непер розвинув теорію логарифмів, указав способи їх обчислення і уклав перші таблиці логарифмів. Основа неперових логарифмів майже збіглася з числом e. Десяткові логарифми були введені англійським математиком **Генрі Брігсом**

(1561–1631). Більше ніж три століття десяткові логарифми були потужною зброєю обчислювальної математики. Але місце логарифмів не обмежується розрахунковими зручностями.

Поява логарифмів мала сильний вплив на багато математичних концепцій, у тому числі такі:

- ✓ формування і визнання загального поняття ірраціональних і трансцендентних чисел;
- ✓ поява показникової функції й загального поняття числової функції;
- ✓ загальні методи розв'язання диференціальних рівнянь різних типів;
- ✓ розвиток теорії численних методів, потрібних для обчислення точних логарифмічних таблиць.

Властивості логарифмів сформулював англійський математик **Вільям Оутред** 1648 року. Лише 1748 року **Леонард Ейлер** визначив логарифмування як дію, обернену піднесенню до степеня, й тим самим логарифм як деякий показник степеня.

ПРИКЛАДИ ПРОЦЕСІВ, ОПИСАНИХ ЗА ДОПОМОГОЮ ЛОГАРИФМІЧНИХ ФУНКЦІЙ

1 *Формула Ціолковського.* Ця формула, що пов'язує швидкість ракети v з її масою m, має вигляд: $v = v_r \ln\frac{m_0}{m}$, де v_r — швидкість газів, що вилітають, m_0 — стартова маса ракети. Швидкість v_r витікання газу в результаті згоряння палива невелика (на сьогодні вона не перевищує 2 км/с). Логарифм росте дуже повільно, і для того щоб досягти космічної швидкості, необхідно зробити більшим відношення $\frac{m_0}{m}$, тобто майже всю стартову масу віддати під паливо.

2 Коефіцієнт звукоізоляції стін вимірюється за формулою $D = A\lg\frac{p_0}{p}$, де p_0 — тиск звука до поглинання, p — тиск звука, що проходить через стіну, A — деяка константа, яка в розрахунках дорівнює 20 дБ. Якщо коефіцієнт звукоізоляції D дорівнює, наприклад, 20 дБ, то це означає, що $\lg\frac{p_0}{p} = 1$ і $p_0 = 10p$, тобто стіна знижує тиск звуку в 10 разів (таку звукоізоляцію мають дерев'яні двері).

ЛІТЕРАТУРА

1. *Башмаков М. И.* Алгебра и начала анализа. Учебник для 10–11 классов средней школы. — М. : Просвещение, 1993.
2. *Бородин А. И., Бугай А. С.* Биографический словарь деятелей в области математики. — К. : Радянська школа, 1979.
3. *Виленкин Н. Я., Мордкович А. Г., Смышляев В. К.* Алгебра и начала анализа. Пробный учебник для 10–11 классов. — М. : Просвещение, 1981.
4. *Галицкий М. Л., Мошкович М. М., Шварцбурд С. И.* Углублённое изучение курса алгебры и математического анализа. — М. : Просвещение, 1990.
5. *Глейзер Г. И.* История математики в школе. — М. : Просвещение, 1983.
6. *Мантуров О. В., Солнцев Ю. К., Соркин Ю. И., Федин Н. Г.* Математика в понятиях, определениях и терминах. — М. : Просвещение, 1982.
7. *Математический* энциклопедический словарь / под ред. Ю. В. Прохорова — М. : Советская энциклопедия, 1988.
8. *Энциклопедический* словарь юного математика / составитель А. П. Савин — М. : Педагогика, 1985.

Винайшовши логарифми, Непер увів у математику нову функцію, узагальнивши поняття «відношення», але це — ніщо в порівнянні з тим глибоким переворотом, який здійснили логарифми в методах обчислень.

Р. С. Гутер, Ю. Л. Полунов