РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ІЗ ТЕМИ «ПІРАМІДА»

Л. О. Демусенко, м. Волноваха, Донецька обл.

Мета:

- ✓ *навчальна:* узагальнити теоретичні знання з теми і відпрацьовувати навички їх застосування під час розв'язування задач; продовжувати формувати вміння будувати рисунок за умовою задачі;
- ✓ *розвивальна:* розвивати логічне мислення, просторову уяву, зорове і слухове сприйняття образів; сприяти набуттю навичок швидкої адаптації в умовах зміни ситуації;
- ✓ *виховна:* прищеплювати навички культури поведінки в громадських місцях; привчати до акуратності під час побудови рисунків до задачі, записів розв'язання.

Обладнання: моделі пірамід із різними основами, настінні таблиці із зображенням пірамід (*додаток 1*, *додаток 3*), текст вірша про піраміду на плакаті. (За наявності замість таблиць і плакатів можна використати проектор, інтерактивну дошку.)

Орієнтовний хронометраж уроку

I. Організаційний момент — *1 хв*.

II. Повторення теоретичного матеріалу з використанням моделей пірамід (комп'ютерних моделей) — *5 хв*.

III. Застосування знань, умінь та навичок

Група елементарних задач (самостійна робота) — 10 *хв*.

IV. Аналіз самостійної роботи

Вибір основної задачі для уроку (виходячи з результатів самостійної роботи, розбір завдання на дошці) — *15 хв*.

Домашнє завдання: виконати обчислення до розібраної задачі — *0,5 хв*.

V. Удосконалення вмінь та навичок

Практична робота з використанням моделей пірамід (у групах по 2 учні) — *8 хв*.

Визначення висоти піраміди Хеопса з використанням історичного матеріалу — *4 хв*.

VI. Домашнє завдання: обчислити висоту піраміди Хеопса (обов'язкове це завдання чи ні, учитель вирішує сам) — *1 хв*.

VII. Підсумок уроку — 0,5 хв.

ХІД УРОКУ

I. ОРГАНІЗАЦІЙНИЙ МОМЕНТ

Учитель. Сьогодні наш урок присвячений уже вивченій вами, унікальній у своїй різноманітності і застосуванні геометричній фігурі.

Її досконалості меж немає.
У різних формах, різного виду,
У задачах, історії, зодчестві сяє
Прекрасна, велична, струнка ПІРАМІДА!

До речі, про «задачі». Саме над ними сьогодні на уроці ми і працюватимемо. А для історії й для того, щоб під час виконання домашнього завдання ви могли скористатися матеріалами розглянутих сьогодні задач, — запишемо в зошитах дату і тему уроку.

II. ПОВТОРЕННЯ ТЕОРЕТИЧНОГО МАТЕРІАЛУ З ВИКОРИСТАННЯМ МОДЕЛЕЙ ПІРАМІД (КОМП'ЮТЕРНИХ МОДЕЛЕЙ)

Учитель. Розв'язування будь-якої задачі передбачає знання певних елементів геометричних фігур та їх взаємного розташування. Зараз ми коротко згадаємо **основні елементи піраміди**. Називатимемо їх, показуючи на моделях та рисунках (*додаток 1*).

- ✓ вершина піраміди;
- ✓ бічні ребра піраміди;
- ✓ основа піраміди;
- ✓ бічні грані піраміди;
- ✓ висота піраміди;
- ✓ апофема піраміди;
- ✓ кут нахилу бічного ребра до площини основи;
- ✓ кут нахилу бічної грані до площини основи (тут доцільно згадати теорему про три перпендикуляри);
- ✓ яка точка є основою висоти піраміди, якщо всі її бічні ребра нахилені до площини основи під одним і тим самим кутом?

(*Відповідь*. Центр описаного кола навколо основи заданої піраміди);

✓ яка точка є основою висоти піраміди, якщо всі її бічні грані мають однакові кути нахилу до площини основи заданої піраміди? (*Відповідь*. Центр вписаного кола в основу заданої піраміди).

III. ЗАСТОСУВАННЯ ЗНАНЬ, УМІНЬ ТА НАВИЧОК

Учитель. Будь-яку складну задачу можна розчленувати на ряд елементарних задач. Тобто, складні задачі — це різноманітні комбінації обмеженої кількості елементарних задач. Із них ми і почнемо. У кожного з вас на робочому місці картка із задачами (розкладаються безпосередньо перед уроком, *додаток 2*). Працюємо самостійно над першими двома задачами за готовими рисунками (позначення зробіть на рисунку самостійно). Записи розв'язань мають бути стислими.

(*Відповіді.* Задача 1. $2\sqrt{3}$ см.

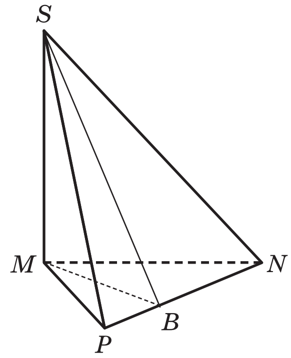
Задача 2. $\frac{7\sqrt{6}}{2}$ см).

IV. АНАЛІЗ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Після закінчення роботи учні озвучують відповіді та за необхідності коментують розв'язання. Потім пропонуємо прочитати умови останніх двох завдань (задачі 3 і 4) і кожному учневі вибрати таке, яке він міг би розв'язати без особливих труднощів. Таким чином, учитель визначає моменти, де учні відчувають невпевненість. Саме ту задачу, яку не обрали більшість учнів, пропонуємо для колективної роботи на уроці. Завдання біля дошки розв'язує учень, використовуючи готовий рисунок із варіантів пірамід, розміщених на дошці (*додаток 1*). Обов'язково коментуємо рисунок. Звертаємо увагу учнів на відповідність рисунка умові задачі. Пояснюємо кут нахилу бічної грані до площини основи із застосуванням теореми про три перпендикуляри, якщо обрана задача 3, або кут нахилу бічного ребра до площини основи в задачі 4. За необхідності виконати додаткові побудови на готових рисунках (на плакаті маркером, а за наявності обладнання — із використанням сучасних технологій). Записи на дошці містять етапи розв'язання задачі з параметрами без підстановки значень параметрів і обчислень. Орієнтовно це має виглядати так:

Варіанти розв'язання задач 3 і 4.

Задача 3

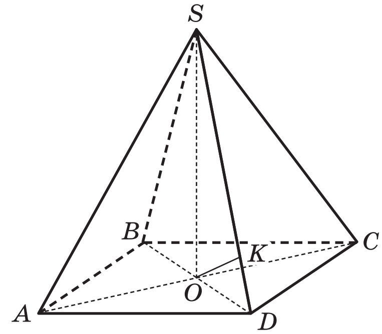


Основа піраміди трикутник PMN, де $MP \perp MN$, $MP = b$, $\angle MPN = \beta$. Тоді $PN = \frac{b}{\cos\beta}$, $MN = b\,\mathrm{tg}\,\beta$. Із формул площі трикутника $S = 0{,}5MP \cdot MN$ та $S = 0{,}5PN \cdot MB$ знайдемо, що $MB = b\sin\beta$. Розглянемо трикутник SMB ($\angle SMB = 90°$, $\angle MBS = \alpha$).

$$SB = \frac{MB}{\cos\alpha} = \frac{b\sin\beta}{\cos\alpha},$$

$$SM = MB \cdot \mathrm{tg}\,\alpha = b\sin\beta\,\mathrm{tg}\,\alpha.$$

Задача 4



В основі піраміди лежить квадрат. SO — висота піраміди. Відстань від точки O до ребра піраміди дорівнює p, $\angle SDO = \beta$. Із прямокутного трикутника OKD знайдемо, що $OD = \frac{p}{\sin\beta}$. Із прямокутного трикутника SOD

маємо $SO = \frac{p \cdot \text{tg}\beta}{\sin\beta} = \frac{p}{\cos\beta}$. Із прямокутного трикутника COD, у якого (за властивостями квадрата) $DO = OC$, $\angle COD = 90^\circ$ за теоремою Піфагора $CD = \frac{p\sqrt{2}}{\sin\beta}$. Діагональ основи дорівнює $\frac{2p}{\sin\beta}$. Піраміда має два діагональні перерізи (учні показують їх і пояснюють, як знайти їх площу).

Учитель. Нам залишилося скористатися формулами для знаходження площ і підставити дані в умові задачі значення параметрів. Це і буде ваше домашнє завдання. Залиште в зошиті одну сторінку для записів розв'язання.

(*Відповідь до задачі 3.*

$S_{\Delta SMP} = 0{,}5b^2 \cdot \sin\beta \cdot \text{tg}\,\alpha = 12\sqrt{3}$ см^2,

$S_{\Delta SPN} = \frac{0{,}5b^2\,\text{tg}\,\beta}{\cos\alpha} = 16\sqrt{3}$ см^2,

$S_{\Delta SMN} = 0{,}5b^2\,\text{tg}^2\beta \cdot \cos\beta\,\text{tg}\,\alpha = 12$ см^2.

Відповідь до задачі 4.

$S_{\Delta ASC} = 0{,}5 \cdot \frac{2p}{\sin\beta} \cdot \frac{p\,\text{tg}\beta}{\sin\beta} = \frac{p^2\,\text{tg}\beta}{\sin^2\beta} = 24\sqrt{3}$ см^2.)

V. УДОСКОНАЛЕННЯ ВМІНЬ ТА НАВИЧОК

Учитель. Зараз ми працюватимемо з моделями пірамід. На кожній парті є модель правильної піраміди. Ті, хто сидять поруч, удвох виконують практичну роботу. Запишіть у зошити завдання для виконання практичної роботи: знайдіть бічну поверхню правильної піраміди, виконавши необхідні вимірювання з точністю до 0,1 см.

Після виконання роботи учні коментують свої дії, озвучують отримані результати (їх учитель обчислив заздалегідь під час підготовки до уроку).

Практична робота

Учитель. Математика допомагає розкривати багатовікові таємниці, розв'язувати історичні суперечки. До однієї з найменших таємниць однієї з найбільших пірамід докладемо і ми зараз свої знання. У різні часи по-різному оцінювали висоту піраміди Хеопса. Зараз піраміда Хеопса має вигляд зрізаної піраміди з верхнім майданчиком розмірами 10 м × 10 м, а століття тому розміри були такими 6 м × 6 м. Згодом вершина піраміди руйнувалася, розбиралася і зараз її висота не відповідає початковій. Яка ж вона була, якщо (запишіть) довжина сторони основи піраміди становить 500 ліктів. Саме ця одиниця вимірювання застосовувалася на той час у єгиптян (1 лк ≈ 466 мм). Кут нахилу граней піраміди дорівнює 51° 51′. Його визначив англійський полковник Говард Вайз 1837 року.

Це завдання пропоную вам виконати вдома. Відповідь запишіть у ліктях і звичних нам одиницях вимірювання (додаток 3). Вивчений раніше теоретичний матеріал із теми ви знайдете в підручнику (§ 22).

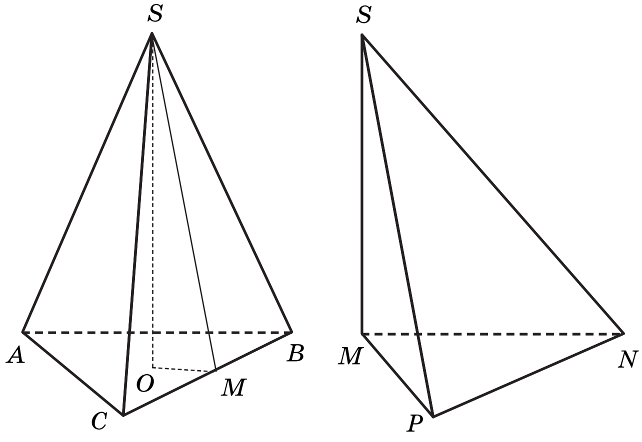
VII. ПІДСУМОК УРОКУ

Учитель. Наостанок давайте ще раз зупинимося на основних моментах розв'язання задач:

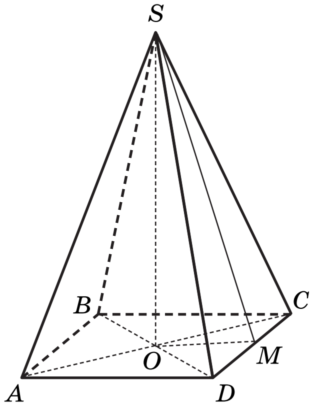
- ✓ необхідно стежити за відповідністю рисунка умові задачі (яка фігура в основі піраміди, яка точка є основою висоти, кути нахилу граней або ребер до площини основи);
- ✓ чітко усвідомити, що необхідно знайти;
- ✓ розбити задачу на елементарні задачі;
- ✓ виконати обчислення.

ДОДАТОК 1

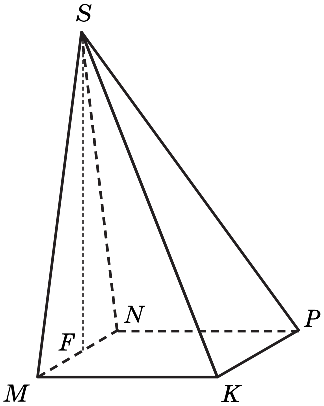
1. $SO \perp (ABC)$, $SM \perp CB$. **2.** $SM \perp MN$, $SM \perp MP$.



3. $SO \perp OM$, $SO \perp AC$, $SM \perp DC$.

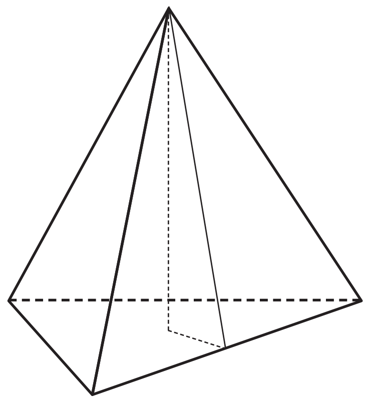


4. $SF \perp (MNP)$.

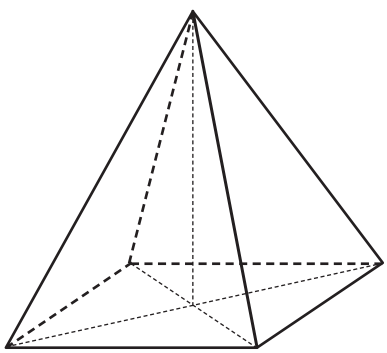


ДОДАТОК 2

1. Висота правильної трикутної піраміди *SABC* дорівнює 6 см. Двогранний кут при основі дорівнює 60°. Знайдіть радіус вписаного в основу трикутника кола.

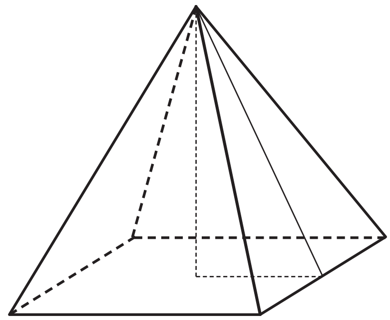


2. Бічне ребро правильної чотирикутної піраміди *SABCD* дорівнює 7 см і становить із площиною основи кут 30°. Знайдіть сторони основи піраміди.



3. Основою піраміди є прямокутний трикутник із катетом b і прилеглим до нього гострим кутом β. Дві бічні грані, що містять катети цього трикутника, перпендикулярні до площини основи, а третя нахилена до неї під кутом α. Визначте площу кожної бічної грані. Обчисліть, якщо $b = 4\sqrt{3}$ см, $\alpha = 60°$, $\beta = 30°$.

4. Відстань від основи висоти правильної чотирикутної піраміди до її бічного ребра дорівнює p, а бічне ребро утворює з площиною основи кут β. Знайдіть площу основи та площу діагонального перерізу піраміди. Обчисліть, якщо $p = 3\sqrt{2}$ см, $\beta = 60°$.



ДОДАТОК 3

500 ліктів (1 лк ≈ 466 мм), 51°51′

ЛІТЕРАТУРА

1. *Державний* стандарт базової і повної загальної середньої освіти.
2. *Навчальна* програма з математики для учнів 10–11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Профільний рівень.
3. *Бевз Г. П.* Геометрія. Академічний рівень, профільний рівень. Підручник для 11 класу. — К. : Генеза, 2011.
4. *Васютинский Н. А.* Золотая пропорция. — М. : Молодая гвардия, 1990.
5. *Гольдберг Я. Е.* С чего начинается решение стереометрической задачи. — К. : Радянська школа, 1990.
6. *Лоповок Л. М.* Збірник задач з геометрії. — К. : Освіта, 1993.
7. *Лоповок Л. М.* Факультативные занятия по геометри для 7–11 классов. — К. : Радянська школа, 1990.
8. *Роганін О. М.* Геометрія. Готуємось до ЗНО та ДПА за 50 тижнів. — Х. : Веста, 2011.