

ОБЕРНЕНІ ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ФУНКЦІЇ ТА ПРЯМОКУТНИЙ ТРИКУТНИК

Р. Гусейнов, м. Дніпро

Для успішного розв'язування задач із застосуванням обернених тригонометричних функцій передусім необхідно повторити означення функцій $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \arctg x$, $y = \operatorname{arctg} x$

З означення цих функцій випливають такі тотожності:

$$\sin(\arcsin a) = a \quad (-1 \leq a \leq 1);$$

$$\cos(\arccos a) = a \quad (-1 \leq a \leq 1);$$

$$\operatorname{tg}(\arctg a) = a \quad (a \in \mathbb{R});$$

$$\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} a) = a \quad (a \in \mathbb{R}).$$

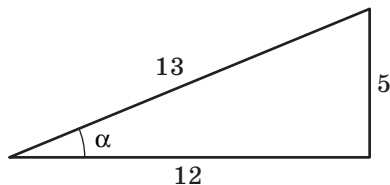
Приклад 1. Обчисліть: $\sin\left(\arccos \frac{12}{13}\right)$.

Розв'язання

Відомо, що $\arccos \frac{12}{13}$ — кут, косинус якого дорівнює $\frac{12}{13}$, тому побудуємо прямокутний трикутник з прилеглим катетом — 12 і гіпотенузою — 13, тоді другий катет дорівнює 5.

За означенням синуса гострого кута прямокутного трикутника маємо:

$$\sin\left(\arccos \frac{12}{13}\right) = \frac{5}{13}.$$



Відповідь. $\frac{5}{13}$.

Приклад 2. Обчисліть:

$$\cos\left(\arcsin \frac{1}{3} - \arctg 2\right).$$

Розв'язання

За відомою формулою

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

маємо:

$$\cos\left(\arcsin \frac{1}{3} - \arctg 2\right) = \cos\left(\arcsin \frac{1}{3}\right) \cos(\arctg 2) + \sin\left(\arcsin \frac{1}{3}\right) \sin(\arctg 2).$$

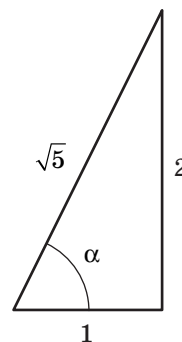
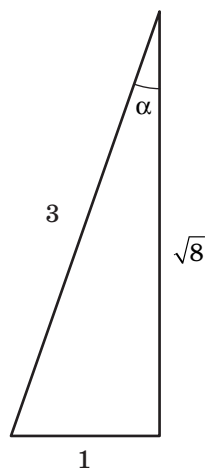
Оскільки

$$\cos\left(\arcsin \frac{1}{3}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{3}, \quad \cos(\arctg 2) = \frac{1}{\sqrt{5}},$$

$$\sin(\arctg 2) = \frac{2}{\sqrt{5}} \quad (\text{див. рис.}),$$

то маємо:

$$\begin{aligned} \cos\left(\arcsin \frac{1}{3} - \arctg 2\right) &= \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2}{3\sqrt{5}}(\sqrt{2} + 1). \end{aligned}$$



Відповідь. $\frac{2\sqrt{5}}{15}(\sqrt{2} + 1)$.

ПОГЛИБЛЕНЕ ВИВЧЕННЯ

Приклад 3. Доведіть, що

$$\sin\left(\arccos\frac{7}{8}-2\arcsin\frac{1}{4}\right)=0.$$

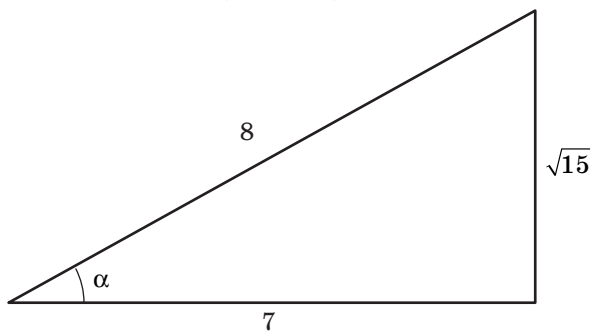
Доведення

Під час доведення скористаємося такими формулами: $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha$, $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$, $\cos^2 2\alpha=1-2\sin^2\alpha$.

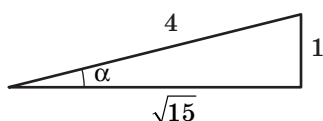
$$\begin{aligned} \sin\left(\arccos\frac{7}{8}-2\arcsin\frac{1}{4}\right) &= \\ &= \sin\left(\arccos\frac{7}{8}\right)\cos\left(2\arcsin\frac{1}{4}\right)- \\ & - \sin\left(2\arcsin\frac{1}{4}\right)\cos\left(\arccos\frac{7}{8}\right)= \\ &= \frac{\sqrt{15}}{8}\cdot\left(1-2\sin^2\left(\arcsin\frac{1}{4}\right)\right)- \\ & - 2\cdot\frac{1}{4}\cdot\cos\left(\arcsin\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{7}{8}= \\ &= \frac{\sqrt{15}}{8}\cdot\left(1-2\cdot\frac{1}{16}\right)-\frac{7}{16}\cdot\frac{\sqrt{15}}{4}= \\ &= \frac{\sqrt{15}}{8}-\frac{\sqrt{15}}{64}-\frac{7\sqrt{15}}{64}=0, \end{aligned}$$

що потрібно було довести.

$$\sin\left(\arccos\frac{7}{8}\right)=\frac{\sqrt{15}}{8}$$



$$\cos\left(\arcsin\frac{1}{4}\right)=\frac{\sqrt{15}}{4}$$

**Приклад 4.** Обчисліть:

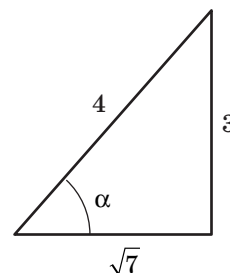
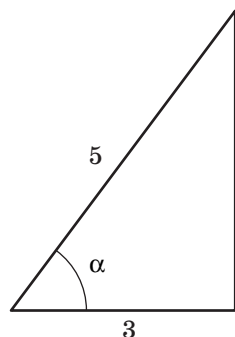
$$\operatorname{tg}\left(\arcsin\left(\operatorname{ctg}\left(\arccos\frac{3}{5}\right)\right)\right).$$

Розв'язання

Оскільки

$$\operatorname{ctg}\left(\arccos\frac{3}{5}\right)=\frac{3}{4} \text{ і } \operatorname{tg}\left(\arcsin\frac{3}{4}\right)=\frac{3}{\sqrt{7}} \text{ (див. рис.)},$$

$$\text{то } \operatorname{tg}\left(\arcsin\left(\operatorname{ctg}\left(\arccos\frac{3}{5}\right)\right)\right)=\frac{3}{\sqrt{7}}.$$



$$\text{Відповідь. } \frac{3\sqrt{7}}{7}.$$

Приклад 5. Розв'яжіть рівняння

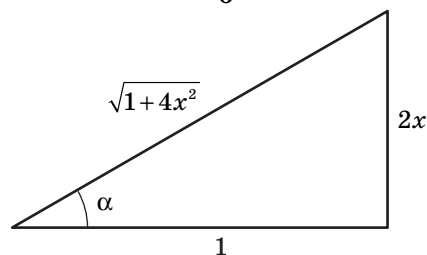
$$\sin(\operatorname{arctg} 2x)=\frac{1}{2}, \quad x>0.$$

Розв'язання

$$\text{Оскільки } \sin(\operatorname{arctg} 2x)=\frac{2x}{\sqrt{1+4x^2}} \text{ (див. рис.)},$$

$$\text{то маємо рівняння } \frac{2x}{\sqrt{1+4x^2}}=\frac{1}{2}, \text{ за умови } x>0.$$

$$\text{Звідки маємо } x=\frac{\sqrt{3}}{6}.$$



$$\text{Відповідь. } \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

Приклад 6. Розв'яжіть рівняння

$$\cos(\arccos 2x + \arcsin \sqrt{1-x^2}) = -\frac{1}{2} \text{ при } x > 0.$$

Розв'язання

Знайдемо ОДЗ рівняння із системи нерівностей $\begin{cases} -1 \leq 2x \leq 1, \\ -1 \leq \sqrt{1-x^2} \leq 1, \end{cases}$ звідки $x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$.

Ураховуючи умову, маємо: $x \in \left(0; \frac{1}{2}\right]$.

$$\begin{aligned} \cos(\arccos 2x + \arcsin \sqrt{1-x^2}) &= \\ &= \cos(\arccos 2x) \cos(\arcsin \sqrt{1-x^2}) - \\ &- \sin(\arccos 2x) \sin(\arcsin \sqrt{1-x^2}) = \\ &= 2x \cdot x - \sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{1-4x^2} = 2x^2 - \sqrt{(1-x^2)(1-4x^2)}. \end{aligned}$$

$$\text{Маємо рівняння } 2x^2 - \sqrt{4x^4 - 5x^2 + 1} = -\frac{1}{2},$$

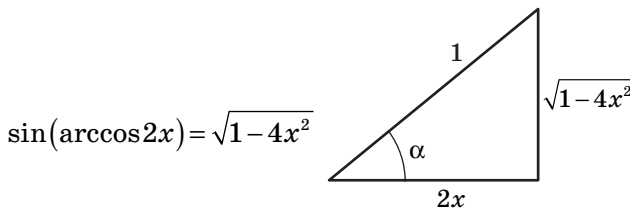
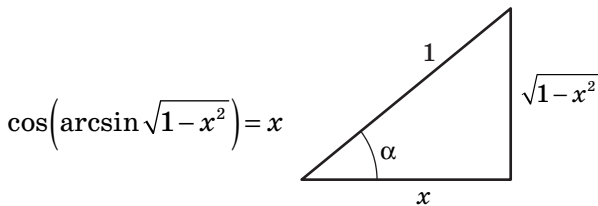
$$\sqrt{4x^4 - 5x^2 + 1} = 2x^2 + \frac{1}{2},$$

$$4x^4 - 5x^2 + 1 = 4x^4 + 2x^2 + \frac{1}{4},$$

$$7x^2 = \frac{3}{4},$$

$$x^2 = \frac{3}{28},$$

звідки, ураховуючи, що $x > 0$, маємо $x = \frac{\sqrt{21}}{14}$.



$$\text{Відповідь. } \frac{\sqrt{21}}{14}.$$

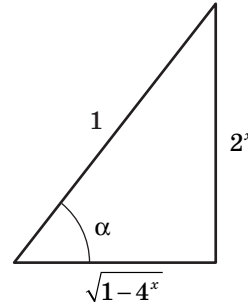
Приклад 7. Знайдіть похідну

$$y = \operatorname{tg}(\arcsin 2^x).$$

Розв'язання

$$y' = \frac{(\arcsin 2^x)'}{\cos^2(\arcsin 2^x)} = \frac{\frac{2^x \ln 2}{\sqrt{1-4^x}}}{\cos^2(\arcsin 2^x)} = \frac{2^x \ln 2}{(1-4^x)^{\frac{3}{2}}},$$

де $\cos^2(\arcsin 2^x) = \sqrt{1-4^x}$ (див. рис.).

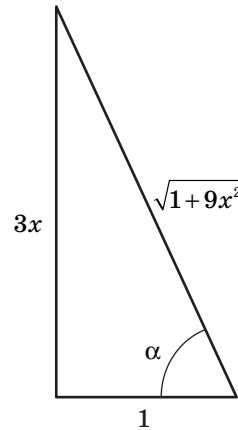


$$\text{Відповідь. } y' = \frac{2^x \ln 2}{(1-4^x)^{\frac{3}{2}}}.$$

Приклад 8. Обчисліть інтеграл:

$$\int_0^1 \sin(\operatorname{arctg} 3x) dx.$$

Розв'язання



Спочатку з прямокутного трикутника з катетами 1 і $3x$ знайдемо $\sin(\operatorname{arctg} 3x)$.

$$\text{Маємо: } \sin(\operatorname{arctg} 3x) = \frac{3x}{\sqrt{1+9x^2}}.$$

ПОГЛИБЛЕНЕ ВИВЧЕННЯ

$$\int_0^1 \sin(\operatorname{arctg} 3x) dx = \int_0^1 \frac{3x}{\sqrt{1+9x^2}} dx =$$

$$= \frac{1}{3} \sqrt{1+9x^2} \Big|_0^1 = \frac{1}{3} (\sqrt{10} - 1).$$

Відповідь. $\frac{1}{3} (\sqrt{10} - 1).$

Завдання для самостійного розв'язування

1. Обчисліть:

1) $\sin\left(\arccos \frac{17}{18} - 2\arcsin \frac{1}{6}\right);$

2) $\cos\left(\arccos \frac{7}{9} - 2\arcsin \frac{1}{3}\right);$

3) $\operatorname{tg}(\arcsin(\cos(\operatorname{arctg} 2)))$.

2. Розв'яжіть рівняння:

1) $\cos(\operatorname{arctg} 5x) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad x > 0;$

2) $\sin\left(\operatorname{arctg} \frac{x^2}{x^2+1}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}.$

3. Знайдіть похідну

$$y = \operatorname{tg}(\arccos e^{x^2}).$$

4. Обчисліть інтеграл:

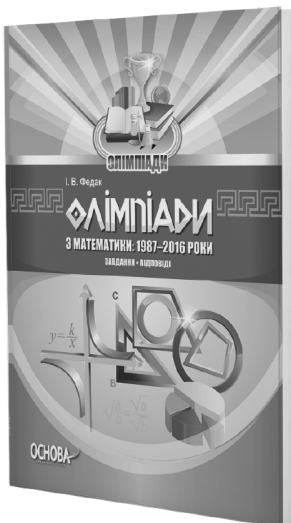
$$\int_1^2 e^x \operatorname{tg}(\arccos e^{-x}) dx.$$

ЛІТЕРАТУРА

1. Литвиненко В. Н., Мордкович А. Г. Практикум по элементарной математике. — М. : Просвещение — 1991.

Якісна підготовка до олімпіад з математики!

Завдання та відповіді всіх етапів олімпіад за 1987–2016 роки!



ОЛІМПІАДИ З МАТЕМАТИКИ: 1987–2016 РОКИ

Код: **100ЛМ012** Ціна: **65,00**

Укр. мова; формат А5; 240 стор.

Посібник допоможе комплексно підготувати учнів 7–11-х класів до Всеукраїнських олімпіад з математики.

На сторінках посібника:

- приклади завдань з відповідями;
- рекомендації та алгоритми розв'язування задач;
- критерії оцінювання.

Матеріали, зібрані впродовж 30 років проведення олімпіад, сприяють ефективній підготовці на найвищому рівні!

Замовляйте посібник та готуйте учнів до олімпіади на найвищому рівні!

Замовлення можна зробити:

на сайті <http://book.osnova.com.ua>;
або за тел.: 0-800-505-212;

Вартість поштової доставки Укрпоштою — 28,90 грн.
Тарифи інших перевізників дізнавайтесь додатково.

ОСНОВА