

ДІЇ НАД МНОГОЧЛЕНАМИ

Урок алгебри та початків аналізу. 10 клас

Д. П. Карпенко, м. Херсон

У нашому фізико-технічному ліцеї запроваджена лекційно-практична система навчання. Пара триває 1 год 20 хв. Математика вивчається на профільному рівні. Після лекційного блоку зі зразками розв'язання завдань, проводять практичні заняття, на яких клас об'єднується в групи. Вашій увазі пропонуємо конспект третього уроку в системі з трьох за цією темою (1 лекція і 2 практики).

Учні сидять по одному за партою. На парті лежать друковані аркуші-картки із завданнями на урок. Кожен учень працює індивідуально. У разі потреби кожний учень отримує індивідуальну консультацію або розв'язання завдання обговорюється і записується на дошці. Наприкінці уроку учням пропонуємо виконати самостійну роботу в процесі заключного повторення з аналізом на наступному уроці.

ДІЇ НАД МНОГОЧЛЕНАМИ

Мета:

- ✓ повторити: дії над многочленами: додавання, віднімання, множення, ділення «куточком», розкладання многочленів на множники; теорему Безу, схему Горнера;
- ✓ закріпити навички знаходити остачу від ділення многочлена на многочлен, знаходити корені многочлена; розвивати увагу.

Тип уроку: застосування знань, умінь та навичок.

Обладнання: роздавальний матеріал-картки, ноутбук, переносний екран.

ХІД УРОКУ

I. ОРГАНІЗАЦІЙНИЙ ЕТАП

II. МОТИВАЦІЯ НАВЧАЛЬНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ

(2 хв)

— Сьогодні у нас останнє заняття з теми «Дії над многочленами». Тема написана на дошці. (Ознайомлення з метою уроку). На початку уроку проведемо усне опитування, потім ми працюємо індивідуально над завданнями, які роздруковані на картках і лежать на ваших партах. На зворотному боці картки є відповіді до завдань, за допомогою яких ви зможете перевірити правильність свого розв'язання. Якщо у вас відповідь не збігається із запропонованою або виникають

труднощі з розв'язанням, ви піднімаєте руку, тоді вам допомагає вчитель або ви звіряєте своє розв'язання з розв'язанням учителя. Якщо питання щодо розв'язання якогось завдання виникають у декількох дітей, розв'язання завдання обговорюємо і записуємо на дошці. Цей етап уроку є підготовчим до написання наприкінці уроку самостійної роботи, аналіз якої проведемо на наступному уроці. Після цього ця тема буде винесена на аудиторну контрольну роботу.

III. АКТУАЛІЗАЦІЯ ОПОРНИХ ЗНАНЬ (4 хв)

» Фронтальне опитування

1. Які дії ми вміємо виконувати над многочленами?
(Додавати, віднімати, множити та ділити.)
2. Назвіть компоненти дії: $A(x) : B(x) = Q(x)$.
(Ділене, дільник, частка)
3. У якому вигляді можна подати многочлен $A(x)$, якщо в результаті його ділення на многочлен $B(x)$ утворилась неповна частка $Q(x)$ та остача $R(x)$.
 $(A(x) = B(x) \cdot Q(x) + R(x))$
4. Якою повинна бути степінь многочлена $R(x)$?
(Степінь $R(x)$ повинна бути меншою від степеня многочлена $B(x)$.)

5. Яке число називають коренем многочлена $A(x)$?
(Число α називають коренем многочлена $A(x)$, якщо $A(\alpha)=0$.)

6. Яке число α називають коренем k -ої кратності многочлена $A(x)$?
(Якщо многочлен $A(x)$ ділиться без остачі на $(x-\alpha)^k$, але не ділиться без остачі на $(x-\alpha)^{k+1}$, то кажуть, що число α є коренем кратності k многочлена $A(x)$.)

7. Яку найбільшу кількість елементів може містити множина коренів многочлена n -го степеня?
(Множина коренів многочлена степеня n містить не більше ніж n елементів.)

8. Що можна сказати про многочлен степеня n , якщо множина його коренів містить більше ніж n елементів?
(Якщо множина коренів многочлена

$$A(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

містить більше ніж n елементів, то $a_n = a_{n-1} = \dots = a_1 = a_0 = 0$, тобто цей многочлен тотожно дорівнює нулю.)

9. Сформулюйте теорему Безу.
(Остача від ділення многочлена $A(x)$ на двочлен $x-\alpha$ дорівнює $A(\alpha)$.)

10. Якщо многочлен має раціональні корені, то як їх треба шукати?
(Якщо многочлен має раціональні корені виду $\frac{p}{q}$, то значення p треба шукати серед дільників вільного члена, а значення q — серед дільників старшого коефіцієнта.)

11. Якщо многочлен не має раціональних коренів, як знайти ірраціональні?
(Якщо многочлен не має раціональних коренів, то можна його розкласти на множники, які є квадратними тричленами, за допомогою методу невизначених коефіцієнтів та знайти ірраціональні корені квадратних тричленів.)

IV. ВИКОНАННЯ ВПРАВ (52 хв)

► Індивідуальна робота з використанням роздавального матеріалу — карток, які лежать на партах

Завдання на урок

1 (4 хв) Виконайте додавання, віднімання і множення многочленів

$$P(x) = x^5 - x^3 + 2x^2 + x + 1 \text{ і } Q(x) = x^2 + 2x + 3.$$

$$\text{Відповідь. } x^5 - x^3 + 3x^2 + 3x + 4;$$

$$x^5 - x^3 + x^2 - x - 2;$$

$$x^7 + 2x^6 + 2x^5 + 2x^3 + 9x^2 + 5x + 3.$$

2 (6 хв) Поділіть «куточком»:

$$1) P(x) = x^5 - x^3 + 2x^2 + x + 1 \text{ на } B(x) = x^2 + 2x + 3.$$

$$\text{Відповідь. Частка } Q(x) = x^3 - 2x^2 + 8,$$

$$\text{остача } R(x) = -15x - 23.$$

$$2) P(x) = x^6 - 3x^5 - 4x^3 + x - 1 \text{ на } B(x) = x^2 + x + 1.$$

$$\text{Відповідь. Частка } Q(x) = x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 3x,$$

$$\text{остача } R(x) = 4x - 1.$$

Додатково

$$3) P(x) = x^7 - x^6 - 3x^3 + x + 1 \text{ на } B(x) = x^2 - x + 1.$$

$$\text{Відповідь. } Q(x) = x^5 - x^3 - x^2 - 3x - 2,$$

$$\text{остача } R(x) = 2x + 3.$$

3 (10 хв) Знайдіть корені многочлена та розкладіть на множники за допомогою теореми Безу:

$$1) P(x) = 3x^3 - x^2 - 27x + 9.$$

Розв'язання

Якщо ціле раціональне рівняння з цілими коефіцієнтами $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$ має раціональний корінь $x_0 = \frac{p}{q}$, де $\frac{p}{q}$ — не-

скоротний дріб, то p — дільник вільного члена a_0 , q — дільник старшого коефіцієнта a_n .

Випишемо всі можливі корені многочлена: $1; -1; 3; -3; 9; -9; \frac{1}{3}; -\frac{1}{3}$.

Перевіркою визначаємо корені.

$$P(3) = 3 \cdot 3^3 - 3^2 - 27 \cdot 3 + 9 = 0;$$

$$P(-3) = 3(-3)^3 - (-3)^2 - 27 \cdot (-3) + 9 = 0;$$

$$P\left(\frac{1}{3}\right) = 3\left(\frac{1}{3}\right)^3 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 - 27 \cdot \frac{1}{3} + 9 = 0.$$

Відповідь.

$$\begin{aligned} P(x) &= 3x^3 - x^2 - 27x + 9 = \\ &= 3(x-3)(x+3)\left(x - \frac{1}{3}\right) = (x-3)(x+3)(3x-1). \end{aligned}$$

2) $P(x) = 3x^3 + 8x^2 - x - 10.$

Відповідь.

$$P(x) = 3x^3 + 8x^2 - x - 10 = (3x+5)(x-1)(x+2).$$

Додатково

3) $P(x) = 2x^3 - x^2 - 2x + 1.$

Відповідь.

$$P(x) = 2x^3 - x^2 - 2x + 1 = (x-1)(x+1)(2x-1).$$

4 (8 хв) Знайдіть корені многочлена та розкладіть на множники за допомогою схеми Горнера:

1) $P(x) = 2x^5 - 9x^4 + 8x^3 + 15x^2 - 28x + 12.$

Розв'язання

Випишемо всі можливі корені многочлена: 1; -1; 2; -2; 3; -3; 4; -4; 6; -6; 12; -12;

$$\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; \frac{3}{2}; -\frac{3}{2}.$$

Перевіркою визначаємо корені.

	2	-9	8	15	-28	12
1	2	-7	1	16	-12	0
1	2	-5	-4	12	0	
2	2	-1	-6	0		
2	2	3	0			

Відповідь. $(x-1)^2(x-2)^2(2x+3).$

Додатково

2) $P(x) = 4x^5 - 5x^4 - 11x^3 + 23x^2 - 13x + 2.$

Розв'язання

	4	-5	-11	23	-13	2
1	4	-1	-12	11	-2	0
1	4	3	-9	2	0	
1	4	7	-2	0		
-2	4	-1	0			

Відповідь. $(x-1)^3(x+2)(4x-1).$

5 (8 хв) Розкладіть на множники многочлен методом невизначених коефіцієнтів $P(x) = x^4 + x^3 - x^2 + 6.$

Розв'язання

Визначаємо, що заданий многочлен не має раціональних коренів. Але многочлен n -го степеня, якщо він має парну степінь, завжди можна розкласти на добуток квадратних тричленів. Розкладатимемо многочлен на множники за допомогою методу невизначених коефіцієнтів.

$$x^4 + x^3 - x^2 + 6 = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d);$$

$$x^4 + x^3 - x^2 + 6 =$$

$$= x^4 + (a+c)x^3 + (ac+b+d)x^2 + (bc+ad)x + bd.$$

$$\text{Маємо систему рівнянь} \begin{cases} 1 = a + c, \\ ac + b + d = -1, \\ bc + ad = 0, \\ bd = 6. \end{cases}$$

Спробуємо розв'язати цю систему в цілих числах.

Із рівняння $6 = bd$ маємо, що b і d повинні бути дільниками числа 6. Цю умову задовольняють пари:

1 і 6; -1 і -6; 2 і 3; -2 і -3. Коефіцієнти b і d рівноправні, тому інші випадки не розглядаємо. Систему задовольняє набір цілих чисел $a = -2$, $b = 2$, $c = 3$, $d = 3$.

$$x^4 + x^3 - x^2 + 6 = (x^2 - 2x + 2)(x^2 + 3x + 3).$$

Отримані квадратні тричлени не мають дійсних коренів.

Відповідь.

$$x^4 + x^3 - x^2 + 6 = (x^2 - 2x + 2)(x^2 + 3x + 3).$$

6 (16 хв)

1) Многочлен від ділення на $2x-1$ дає остачу -3, а від ділення на $x+2$ дає остачу 2. Знайдіть остачу від ділення цього многочлена на тричлен $2x^2 + 3x - 2$.

Розв'язання

Оскільки $2x^2 + 3x - 2$ многочлен другого степеня, то степінь остачі не більше за 1 або

остача — нульовий многочлен. Отже, остачу можна подати у вигляді $R(x) = ax + b$.

Якщо позначити многочлен через $P(x)$, то

$$P(x) = (2x^2 + 3x - 2)Q(x) + ax + b,$$

або

$$P(x) = (2x - 1)(x + 2)Q(x) + ax + b.$$

За теоремою Безу маємо:

$$\begin{cases} P\left(\frac{1}{2}\right) = -3, \\ P(-2) = 2; \end{cases} \begin{cases} ax + b = -3, \\ ax + b = 2; \end{cases} \begin{cases} -\frac{1}{2}a + b = -3, \\ -2a + b = 2. \end{cases}$$

Розв'яжемо систему способом додавання.

$$\text{Маємо: } \begin{cases} a = -5 \\ b = -2 \end{cases}$$

Остача дорівнює $R(x) = -2x - 2$.

Відповідь. $-2x - 2$.

- 2) Многочлен $P(x)$ від ділення на $x + 1$, $x + 2$, $x + 3$ дає в остачі відповідно 1, 4 та -45 . Знайдіть остачу від ділення цього многочлена на $Q(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$.

Розв'язання

Оскільки $Q(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$ многочлен третього степеня, то степінь остачі не більший за 2. Звідси остачу можна подати у вигляді $R(x) = ax^2 + bx + c$.

Тоді за теоремою Безу складемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} P(-1) = a - b + c = 1, \\ P(-2) = 4a - 2b + c = 4, \\ P(-3) = 9a - 3b + c = -45; \end{cases} \begin{cases} a = -26, \\ b = -81, \\ c = -54. \end{cases}$$

Остача $R(x) = -26x^2 - 81x - 54$.

Відповідь. $R(x) = -26x^2 - 81x - 54$.

Додатково

- 3) Многочлен $P(x)$ ділиться націло на $x - 1$, а від ділення на $x + 2$ дає в остачі 3. Знайдіть остачу від ділення цього многочлена $P(x)$ на тричлен $x^2 + x - 2$.

Відповідь. $R(x) = -x + 1$.

- 4) Многочлен $P(x)$ від ділення на $x - 1$, $x + 1$, $x - 2$ дає в остачі відповідно 4, 2, 8. Знайдіть остачу від ділення цього многочлена $P(x)$ на $Q(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$.

Відповідь. $R(x) = x^2 + x + 2$.

V. ПІДСУМОК УРОКУ (2 хв)

Звернути увагу дітей на завдання, у яких виникали труднощі. Виділити дітей, які працювали старанно.

VI. ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

Видається кожному учневі в роздрукованому вигляді.

- 1 При яких значеннях параметрів a , b , c , $x = -2$ є трикратним коренем многочлена $x^5 + ax^3 + bx^2 - 12x + c$?

- 2 Многочлен $P(x)$ від ділення на $x - 3$, $x + 1$, $x + 2$ дає в остачі відповідно -2 , 3 і 0 . Знайдіть остачу від ділення $P(x)$ на $Q(x) = x^3 - 7x - 6$.

- 3 Скоротіть дріб $\frac{x^4 - 16}{x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 16x + 16}$.

- 4 Знайдіть остачу від ділення многочлена $P(x)$ на двочлен $B(x)$:

- 1) $P(x) = x^5 + x^4 - 3x^3 - 4x^2 + 5x + 6$, $B(x) = x + 1$;
2) $P(x) = 2x^4 + x^3 - 3x^2 + 7x - 5$, $B(x) = x - 2$.

VII. САМОСТІЙНА РОБОТА (20 хв)

Роботу учні виконують на заздалегідь підготовлених подвійних аркушах із зошитів, які здають наприкінці уроку на перевірку. Робочі зошити залишаються в учнів. Умова роботи проектується за допомогою ноутбука на екран.

- 1 Виконайте додавання, віднімання, множення та ділення многочленів «куточком»:
 $P(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + 1$ і $Q(x) = x^2 - x - 2$.

Відповідь. $x^5 + x^4 + x^3 + 2x^2 - x - 1$;
 $x^5 + x^4 + x^3 + x + 3$;
 $x^7 - 2x^5 - 2x^4 - 3x^3 - x^2 - x - 2$;
 $x^3 + 2x^2 + 5x + 10$
(остача $R(x) = 20x + 21$).

ПРОФІЛЬНЕ НАВЧАННЯ

2 Знайдіть корені многочлена

$$P(x) = 3x^4 + 5x^3 - 5x^2 - 5x + 2$$

та розкладіть його на множники за допомогою теореми Безу.

Відповідь. $(x+1)(x-1)(3x-1)$.

3 Розкладіть на множники многочлен

$$P(x) = x^4 - x^3 - 3x^2 + 8x - 6$$

за допомогою методу невизначених коефіцієнтів.

Відповідь. $(x^2 - 2x + 2)(x^2 + x - 3)$.

Додатково

4 Остачі від ділення многочлена $A(x)$ на двочлени $x-3$ і $x-1$ відповідно дорівнюють 6 і 4. Знайдіть остачу від ділення многочлена $A(x)$ на многочлен $x^2 - 4x + 3$.

Відповідь. $x+3$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Державний стандарт базової і повної загальної середньої освіти.
2. Навчальна програма з математики для учнів 10–11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Профільний рівень.
3. Галицкий М. Л., Мошкович М. М., Шварцбург С. И. Углубленное изучение курса алгебры и математического анализа : Метод. рекомендации и дидактические материалы : Пособие для учителя. — 2-е изд., дораб. — М. : Просвещение, 1990. — 352 с.
4. Бевз Г. П. Алгебра і початки аналізу. Профільний рівень: підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз, Н. Г. Владімірова. — К. : Видавничий дім «Освіта», 2018.
5. Крамор В. С. Повторяем и систематизируем школьный курс алгебры и начал анализа. — М. : Просвещение, 1990.
6. Мерзляк А. Г. Алгебра і початки аналізу. Профільний рівень : підруч. для 10 кл. загальноосвітніх навчальних закладів / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір. — Х. : Гімназія, 2018.
7. Сборник задач по математике для поступающих во втузы / В. К. Егеров, Б. А. Кордемский, В. В. Зайцев и др. / Под ред. М. И. Сканави. — М. : Высшая школа, 1988.

КОМПЛЕКТ СУЧАСНИХ ПЛАКАТІВ
ДО НОВОГО НАВЧАЛЬНОГО РОКУ!

Сучасні інформативні плакати створені для оформлення кабінетів, учительської, інформаційних шкільних кутків, а також як наочний матеріал під час проведення занять з різних навчальних дисциплін і виховних заходів. Комплект містить три плакати, кожен із яких освітлює окрему, важливу для кожного громадянина України, тему:

«Україна, якою я пишаюсь!» Плакат містить інфографіку, що висвітлює видатні досягнення українського народу, широко відомі в усьому світі!

«Європейські цінності!» Плакат створений з метою навчання, ознайомлення і формування в учнів основних європейських цінностей.

«Можливості – обмежені, таланти – безмежні!» Досягнення людей з особливими потребами, висвітлені на плакаті, мають за мету сформувані в учнів толерантне ставлення до оточуючих з обмеженими фізичними чи психологічними можливостями.

Код: 20K226

Ціна 140,00

укр. мова, формат А1

**ЗАМОВЛЯЙТЕ КОМПЛЕКТ З ТРЬОХ ПЛАКАТІВ ЗА
НАЙВИГІДНІШОЮ ЦІНОЮ!**

Замовлення можна зробити:

за телефоном:
0-800-505-212;



на сайті:
<http://book.osnova.com.ua>

Вартість поштової доставки Укрпоштою — 28,90 грн.
Тарифи інших перевізників дізнавайтесь додатково.

OSNOVA