РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ПЛАНІМЕТРИЧНИХ ЗАДАЧ: БЕЗ РИСУНКА, ЛИШЕ ЗА РИСУНКОМ

О. П. Зеленяк, заслужений учитель України, кандидат педагогічних наук, м. Олександрія

Зайве говорити, що під час розв'язування геометричних задач рисунки корисні або й необхідні. Демонструючи учням красу рисунків і силу допоміжних побудов, варто звернути увагу на «крайні випадки» — розв'язування без рисунка, розв'язування лише за рисунком.

Перший метод називають аналітичним (алгебраїчним), а другий стародавні греки називали «Дивись!». Обома цими методами усно та письмово розв'язуються переважно тренувальні й тестові вправи на відпрацювання формул, повторення тощо. У статті розглянемо й складніші задачі, під час розв'язування яких знадобляться відповідно до нашої класифікації техніка алгебраїчних перетворень або спеціальні наочні рисунки.

І. АНАЛІТИЧНИЙ МЕТОД

Один із колишніх випускників уразив нас фразою: «Я розв'язував окремі домашні задачі з геометрії під час тренування в басейні». З'ясувалось, що він запам'ятовував умову задачі й рисунок до неї, який робив удома. Ідея й алгоритм розв'язання народжувалися у воді. Дякуючи йому, ми продовжуємо часто обмірковувати задачу не за робочим столом. Уміння, безумовно, тренуються і розвиваються. Чи можна взагалі відмовитись від рисунка? Так. Чимало задач можна розв'язувати без нього, розвиваючи відповідні вміння учнів.

В умовах багатьох вибраних задач фігуруватиме *прямокутний трикутник*. Цю базисну фігуру і формули, пов'язані з нею, учням потрібно вивчати ***досконало***. По-перше, у ньому виконується теорема Піфагора, по-друге, — це половина рівнобедреного трикутника або четверта частина ромба, можлива частина трапеції, паралелограма, узагалі, будь-якого многокутника.

Принагідно нагадаємо, що у 2009 році 30 % юнаків і дівчат, які починають доросле життя, дозволили собі з'явитися на ЗНО без уміння формулювати теорему Піфагора. Співвідношення 70 : 30 змінилось би, напевно, на 30 : 70, якби умова була, наприклад, такою: обчислити гіпотенузу прямокутного трикутника, якщо його катети дорівнюють $\frac{1}{3}$ і $\sqrt{7}$. «Розвинена» техніка алгебраїчних перетворень сучасних учнів вражає. Ми запропонували першу вправу ЗНО-2018 чотирьом учням 8 класу, спеціалізація якого вивчення іноземних мов. Правильно скоротив дріб $\frac{2a+2}{2}$ лише один з них (!).

Один із напрямків реформ освіти В'єтнаму передбачає поглиблене вивчення іноземних мов. Побажаємо їм організувати навчання так, щоб воно не зашкодило рівню математичної підготовки, як відбулося в Україні. Уважаємо, що цю проблему не помічають реформатори освіти. У нашому закладі працює 6 учителів математики і 23 вчителі іноземних мов (державі не потрібно розвивати новітні технології, економіку?). Не помічають також повсюдне завищення оцінок, щорічне зменшення кількості випускників, які обирають ЗНО з математики, корупційне «штампування медалістів», надлишковий друк підручників (переконані, що досить одного стабільного підручника відповідного профілю з кожного предмета — сучасного, наукового, апробованого), абсолютно неприпустимий друк розв'язників тощо.

Уважаємо, що на часі проводити ЗНО «чесно», без гри у «піддавки», що сприятиме підготовці учнів, а не орієнтації на вгадування. Напевно, лише українське ЗНО містить подібні наведеним вище примітивні тестові вправи, які спотворюють валідність усього тесту.

Нині ЗНО довело фахівцям і суспільству свою життєздатність. На нашу думку, система тестування є необхідною, як і дискусія про подальше її реформування та вдосконалення.

Які переваги і недоліки системи ЗНО? Чи краще ЗНО за екзамен? Висловимо нашу думку.

До переваг віднесемо: вихід на світові стандарти діагностики рівня знань; більшу об'єктивність оцінювання знань через стандартизацію і виключення суб'єктивізму; зменшення поля для корупції (можливість упровадження ефективного громадського контролю слабо реалізується); спрощення системи вступу до вишів; часткову автоматизацію системи визначення результатів; транспарентність системи; проведення ДПА за результатами ЗНО.

До недоліків: недосконалий підхід до визначення результатів (наприклад, поріг в 124 бали не гарантує відсікання бала «сліпого вгадування»); наявність завдань низького рівня складності, що спотворюють валідність тесту; передбачуваність завдань (орієнтація на вимоги ЗНО уже докорінно змінила роботу вчителів математики випускних класів не на користь математики), невиправдано тривалий термін між складанням тесту й оприлюдненням результатів (майже місяць для ЗНО з математики в поточному навчальному році); зниження загального рівня ерудиції випускників (причиною цього, зрозуміло, є не лише ЗНО з орієнтацією на обрані тести).

Переваги дають однозначну відповідь: ЗНО краще за екзамен.

Перейдемо до задач, використовуючи в розв'язаннях стандартні позначення: a, b, c — сторони трикутника (c — гіпотенуза, якщо він прямокутний), h — висота, r, R — радіуси вписаного і описаного кіл, S, P — відповідно площа і периметр. Радимо звернути увагу на формулу-наслідок із метричних співвідношень у прямокутному трикутнику $h=\dfrac{ab}{c}$ і на запам'ятовування чотирьох основних піфагорових трійок: 3, 4, 5; 5, 12, 13; 8, 15, 17; 7, 24, 25.

1 Довести, що в будь-якому прямокутному трикутнику сума діаметрів вписаного і описаного кіл дорівнює сумі його катетів [1; №10.265].

Доведення

$$2r+2R=2\cdot\frac{a+b-c}{2}+2\cdot\frac{c}{2}=a+b.$$

2 У прямокутному трикутнику висота, проведена до гіпотенузи, дорівнює h; радіус вписаного кола дорівнює r. Знайти гіпотенузу [1; №10.262].

Розв'язання

$$r=\frac{a+b-c}{2},\ \ 2r+c=a+b$$

або

$$4r^2+4rc+c^2=a^2+2ab+b^2.$$

Ураховуючи, що $c^2=a^2+b^2$ і $h=\dfrac{ab}{c}$, маємо: $4r^2+4rc=2ch$, $c(h-2r)=2r^2$, $c=\dfrac{2r^2}{h-2r}$.

3 Для трикутника зі сторонами 26, 28 і 30 обчислити добуток радіусів вписаного і описаного кіл [1; №10.253].

Розв'язання

$$r\cdot R=\frac{abc}{4S}\cdot\frac{S}{p}=\frac{abc}{4p}=\frac{26\cdot 28\cdot 30}{4\cdot 42}=130.$$

Відповідь. 130.

4 Усередині правильного трикутника позначено точку M, яка віддалена від його сторін на b, c, d. Знайти висоту трикутника [1; №10.227].

Розв'язання

Уявимо, що точка M сполучена відрізками з вершинами заданого трикутника, і виразимо площу правильного трикутника як суму площ його трьох частин: $\frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}ac+\frac{1}{2}ad=\frac{1}{2}ah.$

Звідси $h=b+c+d$.

Відповідь. $b+c+d$.

5 У трикутнику довжини двох сторін дорівнюють 6 і 3. Знайти довжину третьої сторони, якщо півсума висот, проведених до цих сторін, дорівнює третій висоті [1; №10.032].

Розв'язання

$$\frac{2S}{6}+\frac{2S}{3}=2\cdot\frac{2S}{x},\quad \frac{1}{6}+\frac{1}{3}=\frac{2}{x}.\quad x=4.$$

Відповідь. 4.

6 На відрізку AB позначено точку C, і на його частинах AC і CB як на діаметрах побудовані півкола. Довести, що сума довжин цих півкіл не залежить від розташування точки C на відрізку AB [1; №10.267].

Доведення

Нехай l — довжина всього відрізка, d — довжина однієї з його частин.

Тоді $\frac{\pi d}{2}+\frac{\pi(l-d)}{2}=\frac{\pi l}{2}$ — стала величина, що й потрібно було довести.

7 Радіус кола, вписаного в рівнобічну трапецію з бічною стороною 18, дорівнює 8. Обчислити площу трапеції.

Розв'язання

Площа трапеції — добуток подвоєної середньої лінії на половину висоти.

Перший множник дорівнює сумі основ або сумі бічних сторін (трапеція — описана), а другий — радіусу вписаного кола. Маємо: $2\cdot18\cdot8=288$.

Відповідь. 288.

8 Висоти трикутника дорівнюють 12, 15, 20. Довести, що він прямокутний [1; №10.269].

Доведення

Із формули для площі трикутника маємо: $c=\frac{2S}{12},\ a=\frac{2S}{15},\ b=\frac{2S}{20}.$

Переконаємось, що $c^2=a^2+b^2$.

Справді,

$$\frac{4S^2}{144}=\frac{4S^2}{225}+\frac{4S^2}{400},\quad \frac{1}{144}=\frac{1}{9\cdot25}+\frac{1}{16\cdot25},$$

$$\frac{1}{144}=\frac{16+9}{9\cdot16\cdot25}$$ — правильна рівність.

Отже, трикутник — прямокутний за теоремою, оберненою до теореми Піфагора.

9 Периметр прямокутного трикутника дорівнює 60. Знайти його сторони, якщо висота, проведена до гіпотенузи, дорівнює 12 [1; № 10.223].

Розв'язання

За умовою задачі складемо систему рівнянь

$$\begin{cases}c^2=a^2+b^2,\\ a+b+c=60,\\ \dfrac{ab}{c}=12;\end{cases}\quad \begin{cases}c^2=a^2+b^2,\\ (a+b)^2=(60-c)^2,\\ 2ab=24c.\end{cases}$$

Маємо:

$$a^2+b^2+2ab=60^2-2c\cdot60+c^2,\ 24c=60^2-2c\cdot60,$$
$$c=30\cdot5-c\cdot5,\ c=25.$$

Отже, $ab=300,\ a+b=35.$

Очевидними коренями рівняння $a^2+(35-a)^2=25^2$ є числа 15 і 20.

Відповідь. 15 і 20.

10 Якими цілими числами виражаються сторони рівнобедреного трикутника, якщо радіус вписаного кола дорівнює $\frac{3}{2}$, а описаного — $\frac{25}{8}$ [1; №10.206]?

Розв'язання

Нехай a — половина основи заданого трикутника, c — бічна сторона, b — висота. Тоді a, b, c — сторони прямокутного трикутника з гіпотенузою c, ab — його площа, $a+c$ — його півпериметр.

Маємо:

$$\begin{cases}c^2=a^2+b^2,\\ \dfrac{ab}{a+c}=\dfrac{3}{2},\\ \dfrac{2ac^2}{4ab}=\dfrac{25}{8};\end{cases}\quad \begin{cases}c^2=a^2+b^2,\\ 2ab=3(a+c),\\ 4c^2=25b;\end{cases}$$

$$\begin{cases}2ab=3(a+c),\\ 4(a^2+b^2)=25b;\end{cases}\quad \begin{cases}2ab=3(a+c),\\ a^2=\dfrac{25b}{4}-b^2.\end{cases}$$

Розглянемо рівняння $4b^2-25b+4a^2=0$ як квадратне відносно b.

$D\geq0$, якщо $625-64a^2\geq0$. Тому цілі допустимі значення a від 1 до 3.

Якщо в другому рівнянні останньої системи $b=4$, то $a^2=25-16=9,\ a=3\ (a>0)$;

якщо $b=8$, то $a^2=50-64<0$ — хиба.

Отже, сторони прямокутного трикутника дорівнюють 3, 4, 5, основа заданого рівнобедреного трикутника — $2\cdot 3=6$, висота — 4. Перше рівняння системи також істинне.

Окрім того, $r=\dfrac{12}{3+5}=\dfrac{3}{2}$, $R=\dfrac{6\cdot 25}{4\cdot 12}=\dfrac{25}{8}$.

Відповідь. 5, 5 і 6.

11 Сума синусів гострих кутів прямокутного трикутника з гіпотенузою c дорівнює m. Знайти площу трикутника.

Розв'язання

Нехай a і b — катети трикутника. Тоді

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=m,\ a+b=mc,\ a^2+b^2+2ab=m^2c^2,$$

$$2ab=m^2c^2-c^2.$$

Звідси $\dfrac{ab}{2}=\dfrac{m^2c^2-c^2}{4}$.

Відповідь. $\dfrac{c^2\left(m^2-1\right)}{4}$.

12 Довести, що $ac=6rR$, якщо сторони трикутника a, b, c $(a<b<c)$ утворюють арифметичну прогресію.

Доведення

Припустимо, що твердження істинне. Тоді

$$ac=\frac{6\cdot 2S}{a+b+c}\cdot\frac{acb}{4S},\ 3b=a+b+c.$$

Звідси $b=\dfrac{a+c}{2}$.

Отримана рівність — характеристична властивість арифметичної прогресії, і всі перетворення можна провести у зворотному порядку. Отже, співвідношення доведено.

13 Знайти гострі кути прямокутного трикутника, якщо синуси його кутів утворюють геометричну прогресію.

Розв'язання

Нехай шукані кути α і $90°-\alpha$. Тоді маємо синуси: $\sin\alpha$, $\sin(90°-\alpha)$, $\sin 90°$ або $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, 1. Отже, 1 — найбільший член прогресії, а два інші члени — взаємозамінні.

Маємо:

$$\cos^2\alpha=1\cdot\sin\alpha,\ \sin^2\alpha+\sin\alpha-1=0,$$

$$\sin\alpha=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2},\ \sin\alpha=\frac{\sqrt{5}-1}{2},\ \sin\alpha>0.$$

Відповідь.

$$\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}(\approx 38°),\ 90°-\frac{\sqrt{5}-1}{2}(\approx 52°).$$

14 Довжина кола, описаного навколо рівнобедреного трикутника, у три рази більша за довжину кола, вписаного в цей трикутник. Знайти кути трикутника.

Розв'язання

За умовою $2\pi R=3\cdot 2\pi r$, звідси $R=3r$ або $\dfrac{2a\cdot b\cdot b}{4S}=\dfrac{3S}{a+b}$, де $2a$ — основа, b — бічна сторона.

Нехай $\dfrac{a}{b}=\cos x$, де x — кут при основі.

Маємо:

$$\frac{a\cdot b^2}{2S}=\frac{3S}{a+b},\ 6S^2=(a+b)ab^2,$$

$$6a^2\left(b^2-a^2\right)=(a+b)ab^2,$$

$$6a(b-a)=b^2,\ 6a^2-6ab+b^2=0,$$

$$6\left(\frac{a}{b}\right)^2-6\frac{a}{b}+1=0,\ \frac{a}{b}=\frac{3\pm\sqrt{3}}{6}=\cos x.$$

Обидва значення належать відрізку $[-1;1]$, існує два трикутники, які задовольняють умову задачі.

Відповідь.

$$\arccos\frac{3\pm\sqrt{3}}{6},\ \arccos\frac{3\pm\sqrt{3}}{6},\ 2\pi-2\arccos\frac{3\pm\sqrt{3}}{6}.$$

15 Довести, що $h_a+h_b+h_c\geq 9r$, h_a, h_b, h_c — висоти трикутника, r — радіус вписаного кола.

Доведення

Скористаємось формулами $h_a=\dfrac{2S}{a}$, $r=\dfrac{2S}{P}$ (P — периметр, S — площа трикутника).

Тоді $\dfrac{2S}{a}+\dfrac{2S}{b}+\dfrac{2S}{c}\geq 9\dfrac{2S}{P}$

або $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\geq\dfrac{9}{a+b+c}$, $2S\neq 0$.

a, b, c — довжини сторін, $a+b+c>0$.

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)(a+b+c)\geq 9,$$

$$1+\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+1+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}+1\geq 9.$$

$\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)\geq 6$ — істинно, оскільки $x+\frac{1}{x}\geq 2$ при $x>0$.

Окрім наведеної відомої нерівності, обмежимось ще одним прикладом нової нерівності в геометрії трикутника.

16 Довести, що $S\leq\frac{3\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{abc}{a+b+c}$ (*Д. Мавло, 2015 р.*)

Доведення

Із рівностей

$$S=\frac{1}{2}ab\sin\gamma,\ S=\frac{1}{2}ac\sin\beta,\ S=\frac{1}{2}bc\sin\alpha$$

маємо: $\sin\alpha=\frac{2S}{bc}$, $\sin\beta=\frac{2S}{ac}$, $\sin\gamma=\frac{2S}{ab}$.

Скористаємось відомою нерівністю $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma\leq\frac{3\sqrt{3}}{2}$, яка є наслідком із нерівності Єнсена для опуклої вгору на $[0;\pi]$ функції $y=\sin x$.

Маємо:

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=2S\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{ac}+\frac{1}{bc}\right)=$$

$$=2S\frac{a+b+c}{abc}\leq\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Звідси $S\leq\frac{3\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{abc}{a+b+c}$, що й потрібно було довести.

II. ДИВИСЬ!

У задачах цього розділу буквенні позначення на рисунках використовуються вимушено через чорно-білий друк. Наочніше позначати рівні відрізки, кути, площі тощо одним і тим самим кольором.

17 **(Див. умову задачі 1).**

Доведення

Іншим способом доведемо твердження лише за допомогою рисунка, використовуючи рівність відрізків дотичних, проведених до кола з однієї точки.

Справді, сума катетів складається з відрізків x, r, r, y (рис. 1). Сума діаметрів — є сумою гіпотенузи і двох радіусів, тобто складається з тих самих відрізків: x, y, r, r.

Аналогічно доводиться і відома властивість описаного чотирикутника про рівність сум довжин його протилежних сторін.

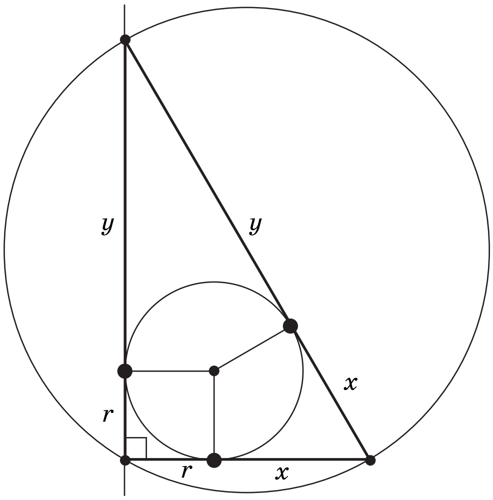

Рис. 1

18 На меншій основі рівнобічної трапеції побудований правильний трикутник. Його висота дорівнює висоті трапеції, а площа — у 5 разів менша за її площу. Знайти кут при більшій основі трапеції [1; №12.038].

Розв'язання

Утворимо розбиття трапеції (*рис. 2*). Тоді всі п'ять трикутників — рівновеликі, оскільки мають одну й ту саму основу a і висоту h, а шуканий кут дорівнює 30°.

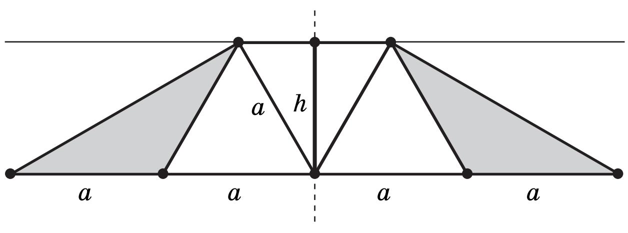

Рис. 2

19 Довести, що $S \le \dfrac{ac+bd}{2}$, де a, b, c, d — довжини послідовних сторін опуклого чотирикутника.

Доведення

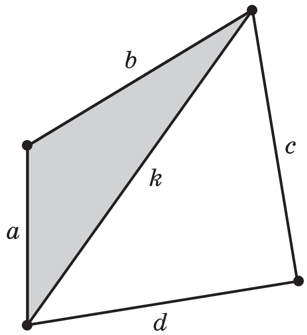

Рис. 3

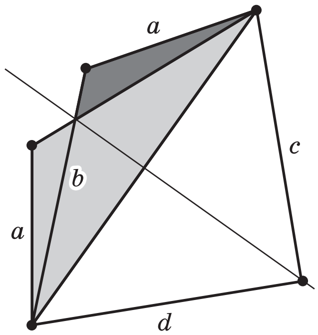

Рис. 4

Осьова симетрія відносно серединного перпендикуляра до діагоналі k змінює послідовність сторін у трикутнику зі сторонами a, b, k (*рис. 3*) на b, a, k і не змінює площу чотирикутника (*рис. 4*).

Отже, $S = \dfrac{1}{2}ac\sin\alpha + \dfrac{1}{2}bd\sin\beta \le \dfrac{ac+bd}{2}$ (α і β — кути між парами сторін a і c, b і d), що й потрібно було довести.

20 Знайти площу трапеції, висота якої дорівнює 12, а діагоналі — 13 і 15.

Розв'язання

13 і 15 — гіпотенузи прямокутних трикутників із катетами 5, 12 і 9, 12. У цих трикутників катет довжиною 12 — спільний (*рис. 5*).

Прямокутні трикутники

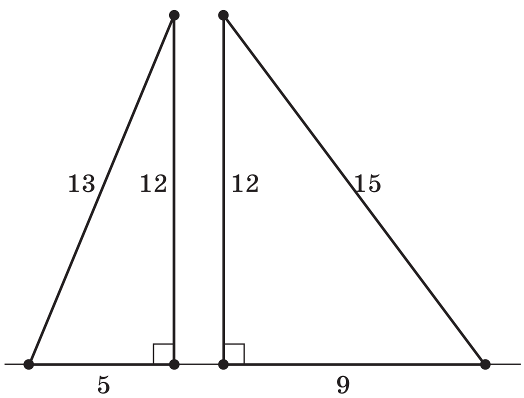

Рис. 5

Виконаємо злиття спільних сторін, утворивши різносторонній трикутник ABC (*рис. 6*) зі сторонами 13, 14, 15.

Злиття сторін

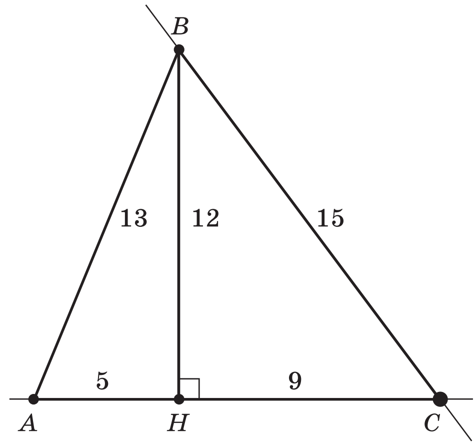

Рис. 6

Далі розщепимо вершини B і C (*рис. 7*) так, щоб їх образи K і D рухались паралельними прямими з однаковою швидкістю ($DCBK$ — паралелограм, $DC = BK$).

Розщеплення вершин

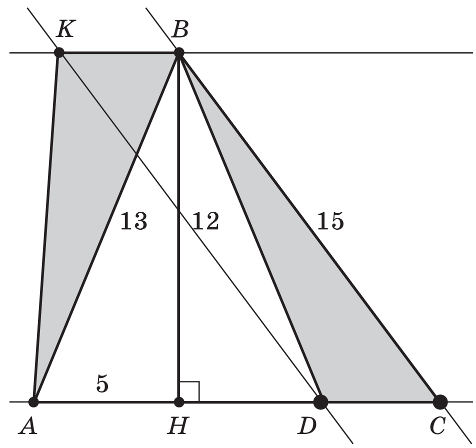

Рис. 7

Утвориться трапеція $ADBK$, яка відповідає умові задачі. Вона рівновелика трикутнику ABC тому, що рівновеликими є трикутники ABK і DCB. $S = \dfrac{1}{2} \cdot 12 \cdot (5+9) = 84$.

Відповідь. 84.

Примітка. Ми наполегливо і систематично пропагуємо застосування середовищ динамічної геометрії (СДГ), наприклад, GeoGebra, у процесі навчання математики. Моделювання і динамізація геометричних об'єктів сприяють всебічному дослідженню їхніх властивостей, розвиткові пізнавального інтересу та додаткових здібностей учнів.

21 Софізм: 30 = 32. Прямокутник 3×10, площа якого дорівнює 30, розрізали на чотири частини (*рис. 8*). Із частин утворили фігуру, що складається з двох прямокутників, сума площ яких дорівнює 32 $(2\cdot6+4\cdot5)$.

Приклад, як і попередній, агітує використовувати GeoGebra. Якщо точний рисунок виконаний у СДГ, то задачі на перекроювання [2], у яких відбувається «приріст» або «втрата» площі, залишаються актуальними лише в сенсі доведення. Адже GeoGebra здійснює довільне масштабування! Навіть за невеликого збільшення виявляються шпарини, ламані тощо. Помітні вони й на *рис. 8*.

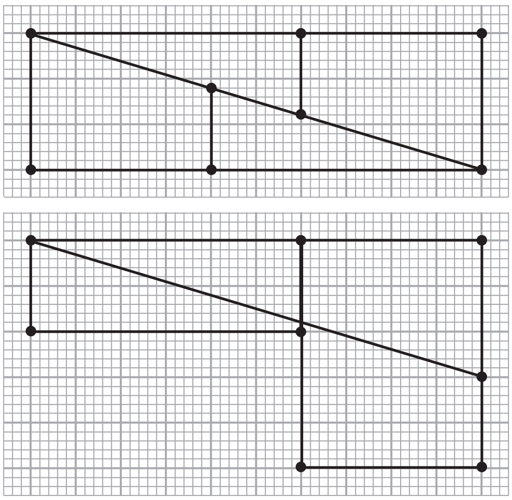

Рис. 8

22 Обчислити периметр фігури (*рис. 9*).

Розв'язання подібних цікавих задач також наочно ілюструються в GeoGebra. Виділена вершина шестикутника — динамічна. Периметр не залежить від поточних координат цієї точки (на *рис. 10* – крайній випадок). Статичні й динамічні довжини сторін і координати вершин для кожного її розташування програма виводить у частині вікна Алгебра. На скріншоті: $D(5.27453{,}15.28792)$, $P=64$.

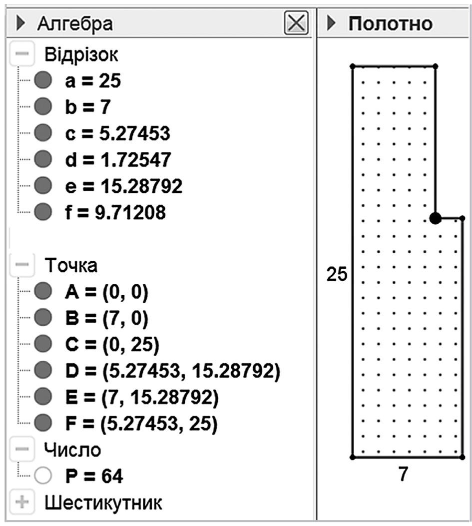

Рис. 9

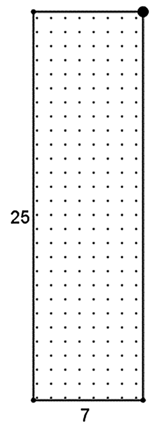

Рис. 10

23 Обчислити: $\operatorname{tg}15^\circ$.

Дивись! (*рис. 11*).

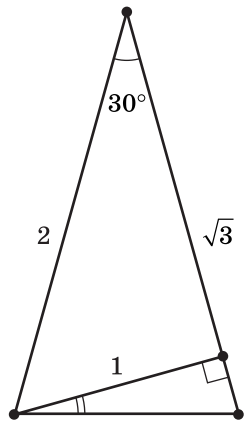

Рис. 11

Відповідь. $2-\sqrt{3}$.

24 Довести, що

$$S_{ABC}=\frac{1}{4}\left(a^2\sin2B+b^2\sin2A\right),$$

де a і b — сторони, A і B — протилежні їм кути трикутника.

Доведення

Достатньо відобразити трикутник ABC симетрично відносно прямої AB (*рис. 12*).

Справді, $2S_{ABC}=\frac{1}{2}a\cdot a\cdot\sin2B+\frac{1}{2}b\cdot b\cdot\sin2A$.

Звідси $S_{ABC}=\frac{1}{4}\cdot\left(a^2\sin2B+b^2\sin2A\right)$.

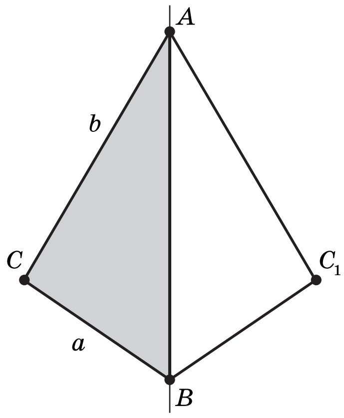

Рис. 12

25 $ABCD$ — квадрат. На стороні AB і на діагоналі AC позначені відповідно точки P і Q так, що $AP:PB=3:2$, $AQ:QC=4:1$. Знайти кути трикутника PQD.

Розв'язання

Заданий квадрат розбиваємо на 25 малих квадратів (*рис. 13*).

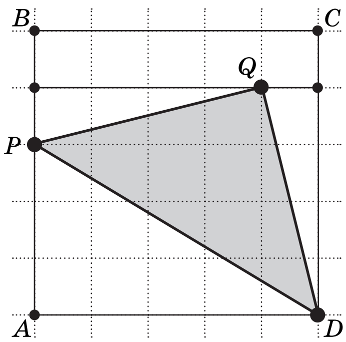

Рис. 13

Відповідь. $45°$, $45°$, $90°$.

26 Задано прямокутник $ABCD$. Коло, вписане в трикутник BCD, дотикається до сторони BD у точці N. Коло, вписане в трикутник ABD, дотикається до сторони AD у точці M, а точка S, центр цього кола, належить відрізку MN. Довести, що $AD=MN$.

(*Польська матура з математики, поглиблений рівень, 2016 р.*)

Ми пропонували цю задачу своїм випускникам. Вона виявилась для них цікавою, але непростою.

Головне в доведенні — рівність двох заштрихованих прямокутних трикутників. Щоб її відшукати, потрібно знайти відповідні допоміжні побудови.

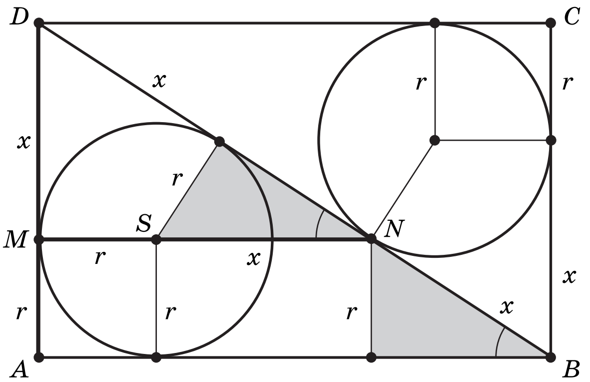

Рис. 14

Напевно, «найзамаскованіший» допоміжний відрізок — перпендикуляр-радіус, опущений із точки N на пряму AB.

Коли ж рисунок створений, — дивись!

У статті лише окреслене коло задач відповідно до її теми. Пропонуємо вчителям розширювати його, накопичувати серії задач і активно використовувати їх на уроках.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Єгерев В. К., Зайцев В. В., Кордемський Б. А. та ін.*; під ред. М. І. Сканаві. Збірник задач з математики для вступників до втузів / Навч. посібник. — К. : Вища школа, 1992. — 445 с. : іл.
2. *Конфорович А. Г.* Математичні софізми і парадокси / — К. : Радянська школа, 1983. — 208 с. : іл.
3. *Зеленяк О. П.* Решение задач по планиметрии. Технология алгоритмического подхода на основе задач-теорем. Моделирование в среде Turbo Pascal. — СПб. : ДиаСофтЮП, М. : ДМК Пресс, 2008. — 330 с.
4. *Зеленяк О. П.* Применения симметрии при решении планиметрических задач // Математика в школах України. — 2012. — № 5 (341). — С. 21–28; — № 8 (344). — С. 21–28.
5. *Зеленяк О. П.* Динаміка геометричних конфігурацій // У світі математики. Національний університет ім. Т. Шевченка. Том 18, випуск 1. — К. : ТВіМС, 2012. — С. 18–27.
6. *Зеленяк О. П.* Технології застосування середовищ динамічної геометрії // Інформаційні технології і засоби навчання. — 2012. — № 4 (30). — С. 40–56. Режим доступу до журналу: http://www.journal.iitta.gov.ua