НАУКОВО-МЕТОДИЧНИЙ ЖУРНАЛ

Шукай простоту і не вір їй! А. Н. Уайтхед

Математика в школах України

Позакласна робота

№ 8 (80) · СЕРПЕНЬ 2017 р. · ЗАСНОВАНИЙ У КВІТНІ 2010 р. · ВИХОДИТЬ ОДИН РАЗ НА МІСЯЦЬ ·

За сприяння Міністерства освіти і науки України · Учасник проекту: ХНПУ ім. Г. С. Сковороди

У НОМЕРІ:

Я ЛЮБЛЮ УКРАЇНУ І МАТЕМАТИКУ

Інтелектуальна гра для учнів 10–11 класів

Г. С. Кулага, с. Роздольне, Каланчацький р-н, Херсонська обл.

Моя любов — Україна і математика.

М. П. Кравчук

Бути патріотом — це більше, ніж бути українцем.

Л. В. Костенко

Учитеся, брати мої, думайте, читайте...

Т. Г. Шевченко

Цілі:

- ✓ розширити знання учнів про роль і значення математики в житті нашого народу, нашої країни;
- ✓ ознайомити з особистостями видатних українців;
- ✓ розвивати логічне мислення, інтуїцію;
- ✓ формувати вміння працювати в групах, використовувати знання з інших предметів, узагальнювати власний життєвий досвід;
- ✓ формувати вміння працювати з додатковою літературою, мережею Інтернет;
- ✓ виховувати любов до рідного народу, повагу до його традицій, взаємоповагу, толерантність, уміння вислуховувати думку товаришів.

Підготовча робота

1. Визначити склад команди. Провести з гравцями тренування. Навчити правильно користуватись апаратурою. Допомогти команді обрати капітана.
2. Ознайомити членів команди з темою гри, порадити літературу, яку слід опрацювати.
3. Доручити групі учнів-художників прикрасити актову залу, де проходитиме гра. (Учні прикріплюють портрети українських учених-математиків, вислови про математику тощо.)
4. Доручити групі учнів-словесників підготувати художнє читання віршів.
5. Доручити групі учнів-техніків підготувати технічне оснащення вечора.

Правила гри

1. Роботу команди координує капітан. Він керує ходом обговорення відповіді, визначає, хто відповідатиме на поставлене запитання.
2. На обговорення запитання відведено 1 хв. На обговорення кожного запитання «бліц» — 20 с. Якщо відповідь дається без обговорення, то заощаджену хвилину капітан може використати під час обговорення іншого запитання.
3. Команді не зараховують правильну відповідь, якщо була підказка.
4. Гравець, який дав правильну відповідь, отримує приз.
5. У кінці гри нагороджується учень, який дав найбільшу кількість правильних відповідей.
6. Гра закінчується, якщо команда гравців чи інтелектуальний клуб школи дасть шість правильних відповідей.

Хід заходу

(Звучить пісня з репертуару Наталії Бучинської «Моя Україна».)

Ведучий. Добрий день, шанувальники гри «Що? Де? Коли?». Запрошуємо вас на інтелектуальну гру «Я люблю Україну і математику». Назва нашої гри співзвучна з відомим висловом видатного українського вченого-математика Михайла Кравчука. Український народ здавна відрізняється надзвичайною кмітливістю, працьовитістю, любов'ю до порядку. А талантів скільки! Чи посадити садок вишневий, чи побудувати дім, чи заспівати, чи розв'язати складні математичні завдання, чи створити мистецький твір! Усьому світові відомі імена українців Соломії Крушельницької, Тараса Шевченка, Лесі Українки, Каземіра Малевича, Михайла Кравчука, Михайла Остроградського, Марини В'язовської, Андрія Шевченка, Руслани, Джамали та багатьох інших наших співвітчизників. Геніїв народжує народ. Пишаймось тим, що ми — українці!

Любити свою Батьківщину в усі часи означало дотримуватись чеснот і шляхетності у відстоюванні її права на свободу та незалежність. Сини і дочки України за свої ідеали зазнавали неволі, позбувалися життя. Силу і натхнення вони черпали з любові до рідної землі, її морів і річок, неозорого неба.

Пропоную послухати вірш Миколи Бакая «У рідному краї».

Одна Батьківщина, і двох не буває,
Місця, де родилися, завжди святі.
Хто рідну оселю свою забуває,
Той долі не знайде в житті.

У рідному краї і серце співає,
Лелеки здалека нам весни несуть.
У рідному краї і небо безкрає,
Потоки, потоки, мов струни, течуть.

Тут мамина пісня лунає і нині,
Її підхопили поля і гаї.
Її вечорами по всій Україні
Співають в садах солов'ї.

І я припадаю до неї устами,
І серцем вбираю, мов спраглий, води.
Без рідної мови, без пісні, без мами
Збідніє, збідніє земля назавжди.

Ведучий. Сьогодні ми поговоримо про те, яку шану талановитий український народ віддає математиці. Крім обговорення цікавих математичних і народознавчих запитань, ми оцінимо читацький хист наших учнів.

Запрошуємо гравців до ігрового столу.

(Звучить музика. Ведучий називає кожного гравця, починаючи з гравця під номером 6. Останнім відрекомендовує капітана команди. Гравці по черзі займають свої місця за ігровим столом. Ведучий нагадує правила гри.)

Ведучий. Команда готова до гри. Привітаймо команду! Гра починається!

Запитання 1. Син Неба. Поет німого числа. Лицар математики. Творець музики чисел. Корифей математики. Титан математичної думки. Учений з обличчям Христа. Усе це сказано про відомого українського вченого-математика. Про кого саме?

Відповідь. Михайло Пилипович Кравчук.

(На екран проектують портрет М. П. Кравчука і роки його життя.)

Ведучий. Довго не знали ми, земляки, про цю надзвичайно талановиту людину — видатного науковця, який так щиро любив Україну, мріяв про її утвердження у світовій цивілізації. Адже ім'я Михайла Кравчука було занесене до списку «ворогів народу», а сам він, повний енергії, сил, творчих задумів, був жорстоко покараний і пішов із життя в неповних 50 років.

Пропоную послухати вірш «Михайла Кравчука нема». Автором вірша є учитель, методист, автор шкільних підручників Григорій Петрович Бевз.

Михайла Кравчука нема.
Людину мудру і святу
Жорстокість дика і німа
Звалила у вічну мерзлоту.

Таких — один на сотню літ,
І на мільйони душ — один,
Його ж ви — за колючий дріт,
До голих нар і баланди.

Його теорій і відкрить
Очікував весь білий світ.
А ви його — породу рить,
Щоб згинув український цвіт.

За віщо? За які гріхи?
Мовчить пихатий самодур;
Мовчать бездушні і глухі
Прислужники номенклатур.

Негідники! Хто ви йому?
Він стільки знав і так умів!
А ви йому — на Колиму,
Щоб там породу мерзлу мив.

Радіють деспоти-кати,
Верховному мережать звіт
Про те, що досягли мети:
На генія поменшав світ.

Радійте! Все ж настане суд,
Недовго вже його чекати,
Узнає світ і вашу суть,
І справжню велич Кравчука.

Ведучий. 15 вересня 1956 року за низкою раніше безуспішних клопотань дружини М. Кравчука Есфіри Йосипівни (1894–1957) ученого було реабілітовано «за відсутністю злочину», а 1992 року поновлено в складі дійсних членів Академії наук України. Михайло Кравчук — математик широкого масштабу. Його ім'я добре відоме у світовій математичній науці. «Світ не знав лише, що він українець», — говорив про нього Сенета (Австралія). Пишаємось тим, що українець!

Запитання 2. Цей українець розфарбовував геометричну фігуру то в чорний, то в червоний, то в білий кольори і став відомий на весь світ. Хто він, як назвав свої твори, яку геометричну фігуру зобразив?

Відповідь. Каземір Малевич. Художні полотна «Чорний квадрат» «Червоний квадрат», «Біле на білому», геометрична фігура — квадрат.

(На екран проектують зображення полотен художника та його портрет.)

Ведучий. Найбільшого розголосу серед усіх творів Малевича набув «Чорний квадрат», який уперше був показаний на «Останній футуристичній виставці картин 0,10 (нуль десять) 19 грудня 1915 року в Петрограді. Творчість Малевича оцінювали неоднозначно, а «Чорний квадрат» взагалі став викликом суспільству. «Там немає нічого, крім порожнечі, заповненої чорнотою», — вважали одні. «Навпаки, там є все», — заперечували інші. У чорний квадрат на білому тлі Малевич умістив увесь світ, умовно вклавши туди всі форми і барви, звів їх до пластичної формули, де домінують полюсність чорного (повна відсутність кольору і світла) та білого (одночасна присутність усіх кольорів і світла). Художник звертається до підсвідомості глядачів, пропонує їм самим обрати бажані образи та емоції. «Чорний квадрат» багато хто вважає символом XX століття, наприкінці якого картина оцінювалась приблизно у 20 млн дол. Сьогодні полотно експонується в Ермітажі. Інші його роботи експонуються в музеях Нью–Йорка, Амстердама, Парижа, Москви. Український художник посідає одне з найвищих місць у культурі людства. Пишаймось тим, що українець!

Запитання 3. Увага! Картинки. Подивіться на екран. Ви бачите зображення пам'ятників числу π, установлених у різних країнах світу. Який із них розташований в Україні?

№ 1

№ 2

№ 3

№ 4

Відповідь. Пам'ятник, зображений на рисунку № 3. Він розташований у Криму, поблизу м. Кацивелі.

Запитання 4. У Харкові встановлено пам'ятник, який, жартуючи, називають «Закохані, що обнімаються», або «Пам'ятник сантехніку».

(На екран проектується зображення пам'ятника.)

Його справжня назва містить у собі розділ математики, у якій відзначився німецький математик Георг Ріман. Як називають цей розділ математики?

Відповідь. Геометрія Рімана, або еліптична геометрія.

Ведучий. Геометрія Рімана, або еліптична геометрія, — одна з трьох «великих геометрій» (Евкліда, Лобачевського і Рімана). Геометрія Евкліда реалізується на площині, а геометрія Рімана — на сферах. Історично геометрія Рімана з'явилася пізніше ніж дві інші геометрії (1854 року).

Запитання 5. Геометричні орнаменти притаманні всій слов'янській міфології.

(*На екран проектують зображення рушників та вишиванок із геометричними орнаментами*). Вишитий рушник, вишиванка для українців мають сакральне значення. Квадрат у вишиванці трактують як досконалість, гармонію, порядок; ромб розшифровують як чоловіче і жіноче начало, його пов'язують з плодючістю людини і землі; ромб у квадраті — символ засіяного поля; трикутник — символ вузької брами, яка веде до вічного життя, символ єдності трьох світів: земного, підземного і небесного. А як розшифровують зображення кола?

Відповідь. Коло — це символ сонця.

Ведучий. Рушник — прямокутний шмат лляного чи конопляного полотна, що має на кінцях, а нерідко і по всьому полю різноманітні вишиті або виткані композиції, що відображають світогляд та звичаї предків, несуть інформацію про добро, достаток, здоров'я. Рушники є символом матеріальної культури слов'ян, важливою складовою обрядів та ритуалів. Вишивати рушники — давній український народний звичай. Вишиваний рушник і донині не втратив свого значення в побуті. І тепер ним прикрашають інтер'єри помешкань, вівтарі та ікони в церквах. І надалі він залишається атрибутом народних звичаїв та обрядів. На рушнику новонароджену дитину несуть на хрещення, на ньому проводжали людину в останню дорогу.

Послухайте вірш Олени Стасюк «Український рушник».

Із роси живої, із води стрімкої,
Із проміння сонця, із небес ясних,
Із хмаринок білих, із землі святої
Мати-Україна вишила рушник.
Той рушник безкрайній візерунком
вкритий,
Пурпуром калини, зеленню лісів.
Золотом колосся стиглого розшитий,
Щедрим урожаєм молодих садів.
В рушникові тому ниткою до нитки,
Ніби рідні діти сплетені в одне:
Льону із Полісся синьоока квітка
Й Вінничини поле соняха ясне.
Над Дніпром-рікою тут веселка грає,
І трембіти голос чути з полонин.
Тут степів Донецьких широчінь без краю
Й древнього Херсону сонячні лани.
Стиглим виноградом Закарпаття й Криму,
Посміхом дитяти, що прийшло у світ,
Дивиться нам в очі ненька-Україна
Із благанням щирим: «Діти, захистіть!»
І орда ворожа нізащо не зможе
Розірвать на клапті той рушник святий,
Бо народ — це сила, предки допоможуть
Захистить навіки край коханий свій!

Ведучий

З народного напившись джерела,
Як із Дніпра, бере веселка воду,
О рідна пісне, знову ти прийшла
До матері й до батька — до народу.

М. Рильський

Українська пісня — це бездонна душа українського народу, це частинка його духовного життя. Вона не залишає народ ні в радості, ні в горі, крок за кроком слідує за ним від дитинства до старості. Не можна згадати жодної родини, де б не співали українські пісні. Кожне своє враження, кожне переживання людина виливає у пісні. Народні традиції передавались через пісню і зберігалися впродовж віків. Оспіваний народом і рушник як оберіг українців.

Заспіваймо разом «Пісню про рушник». (*На екран проектують слова пісні.*)

Пісня про рушник

(Слова Андрія Малишка, музика Платона Майбороди)

Рідна мати моя, ти ночей недоспала,
Ти водила мене у поля край села,
І в дорогу далеку ти мене на зорі проводжала,
І рушник вишиваний на щастя дала.

І в дорогу далеку ти мене на зорі проводжала,
І рушник вишиваний на щастя, на долю дала.

Хай на ньому цвіте росяниста доріжка,
І зелені луги, й солов'їні гаї,
І твоя незрадлива материнська ласкава усмішка,
І засмучені очі хороші твої.

І твоя незрадлива материнська ласкава усмішка,
І засмучені очі хороші, блакитні твої.

Я візьму той рушник, простелю, наче долю,
В тихім шелесті трав, в щебетанні дібров.
І на тім рушничкові оживе все знайоме до болю:
І дитинство, й розлука, й твоя материнська любов.

І на тім рушничкові оживе все знайоме до болю:
І дитинство, й розлука, й твоя материнська любов.

Запитання 6 (бліц)

1) Український орнамент, літера «Ш», метелик, парабола. Що з математичної точки зору об'єднує ці поняття?
   Відповідь. Симетрія.
2) Що є в українській мові, біології, математиці?
   Відповідь. Корінь.
3) Хто написав картину «Чорний квадрат»?
   Відповідь. Казимір Малевич.

Ведучий. Відпочинемо та подивимось сценку «Випадок на екзамені»

Екзаменатор. Добувати корені вмієш?

Учень. Звичайно. Треба потягнути за стебло рослину сильніше і корінь добудемо з ґрунту.

Екзаменатор. Ні, я маю на увазі інший корінь, наприклад, із дев'яти.

Учень. Це буде «дев'я-», тому що в слові «дев'ять» суфікс — «ть».

Екзаменатор. Ти мене зовсім не зрозумів, я кажу про корінь квадратний.

Учень. Квадратних коренів не буває, бувають тільки мичкуваті та стрижневі.

Екзаменатор. Та арифметичний квадратний корінь із дев'яти!

Учень. А! Нарешті зрозумів! Буде 3, тому що 3 в квадраті дорівнює 9.

Запитання 7. Чорний ящик!

(Помічники виносять під музику чорний ящик, демонструють його глядачам, гравцям і ставлять на стіл.)

Видатний математик Михайло Остроградський приятелював із С. Гулаком–Артемовським, мав сердечні стосунки з родинами Лисенків та Старицьких. А 1837 року в Петербурзі поет В. А. Жуковський познайомив Остроградського з Тарасом Шевченком.

(На екран проектують портрети названих відомих українців.)

Відтоді їх єднала щира дружба. Про Остроградського Шевченко згадує у своїй повісті «Художник». Остроградський допоміг Т. Шевченку видати свою нині відому всім книгу. Увага, запитання! Яка книга Т. Г. Шевченка лежить в чорному ящику?

Відповідь. «Кобзар».

Запитання 8. Майбутній видатний учений народився на Полтавщині, навчався в Харківському університеті. Доля не була до нього ласкавою:

його за обмовою виключили з університету, деякий час, навчаючись у Парижі, він жив за межею бідності, навіть сидів у в'язниці через те, що заборгував за квартиру, він втратив праве око, від нього пішла дружина, образившись, що весь свій час він приділяв математиці, а не їй. Та попри все до цього українця прийшло всесвітнє визнання й слава. Він був академіком Петербурзької академії наук, член-кореспондентом Паризької Академії наук, дійсним членом Римської, Туринської, Американської академій, почесним членом Київського та Московського університетів. Назвіть цього видатного математика.

Відповідь. Михайло Васильович Остроградський.

(На екран проектують портрет М. В. Остроградського та роки його життя.)

Ведучий. Послухайте вірш Г. П. Бевза про М. В. Остроградського.

Талантами багата Україна.
Хай навіть відбиваючись від орд,
Долаючи неволю і руїни,
Все ж геніїв народжує народ.
Один із них — Михайло Остроградський —
Великий тілом, духом і умом,
Найперший вчений у краю козацькім,
Властитель теорем і аксіом.
Нью-Йоркський академік і туринський,
Паризький, римський — між усіх широт
Відомий математик український
Славетний український патріот.
Ген-ген аж де від батьківської хати
Полтавець за морями побував,
Чужого научався плідно і багато,
А мови земляків не забував.
Як брата, обіймав він Кобзаря Тараса,
З ним — українства молодий порив;
Науку вивів на найвищу трасу,
Потрібне, вічне і святе творив.
Чудовий дав інтегрування метод —
На всі часи, для всіх земель і рас;
Явився, наче ясно сяюча комета,
Що за віки з'являється лиш раз.
Його творіння в світі добре знані:
Десятки теорем і формул, і думки…
Давно немає генія між нами,
Та в пам'яті він житиме віки!

Ведучий. Запам'ятаймо слова, що сказав М. В. Остроградський: «Щоб у математиці прийшло прозріння, треба багато працювати. День крізь день, роками…»

Запитання 9. Цей учений-математик із України визнаний у всьому світі. Йому з Америки прийшов лист, у якому компанія «Вестінгауз», Стенфордський університет запрошували до себе на роботу й гарантували найсприятливіші умови праці. На що американці отримали відповідь: «…америк на світі багато, а Батьківщина одна і проміняти її — ні на що не проміняю. Лишити народ у тяжку годину — бездонне моральне звиродіяння. Що ж до умов праці, то народ, який взяв владу в свої руки, невдовзі створить умови не гірші заморських». Назвіть ім'я вченого-математика і патріота.

Відповідь. Михайло Пилипович Кравчук.

(На екран проектують портрет М. Кравчука.)

Ведучий. Не випадково сьогодні ми вже вдруге згадуємо ім'я цієї славетної людини, адже незабаром — 30 вересня (12 жовтня) 2017 року весь світ святкуватиме його 125-річчя. Він — справжній син свого народу. Його любов до Батьківщини, звитяжний труд та непохитна віра у свій народ зворушує, дивує, захоплює, є прикладом для нинішніх і прийдешніх поколінь українців. Пропоную послухати та подивитись відеофрагмент «Синові». Музика Анатолія Пашкевича, слова Василя Симоненка. Виконує Черкаський державний заслужений український народний хор. Солістка Раїса Кириченко.

(Перегляд відеофрагмента. Його можна знайти за посиланням https://www.youtube.com/watch?v=7aJT0OlJtv8)

Запитання 10. Учений, конструктор, підполковник. Він створював радянську ракетно-космічну техніку, основоположник радянської космонавтики. Двічі Герой Соціалістичної праці, Лауреат Ленінської премії, академік АН СРСР. Він був головним конструктором «Востока–1» і 12 квітня 1961 року особисто давав настанови Юрію Гагаріну перед першим польотом у космос на сконструйованій ним ракеті. Йдеться про учня вченого-математика М. П. Кравчука. Назвіть його.

Відповідь. Сергій Павлович Корольов.

(На екран проектують портрет С. П. Корольова та роки його життя.)

Ведучий. Сергій Корольов народився в Житомирі в родині звичайного вчителя.

Небом почав марити з 6 років, коли над Ніжином, де він тоді жив у бабусі, виконував фігури вищого пілотажу, а потім приземлився на Базарній площі льотчик Уточкін. Уже в 17 років він розробив повноцінний проект планера. А до цього прочитав купу книг, частину яких опанував в оригіналі — німецькою мовою.

Завдяки праці Корольова в космосі побували перша тварина і перший екіпаж, а ще — відбувся перший радіозв'язок між двома пілотованими кораблями. Саме завдяки науковому та організаторському таланту Корольова став можливим знаменитий політ у космос Юрія Гагаріна.

Сергій Корольов — українець, який відкрив людству шлях у космос. Мрією всього життя його була висадка космонавтом на Червоній планеті Марс.

Улюблені пісні Корольова — «Дивлюсь я на небо…» і «Реве та стогне Дніпр широкий». До речі, саме пісня «Дивлюсь я на небо…» була одним із стимулів, що привели Корольова до захоплення космосом. А український космонавт Павло Попович (*на екран проектують портрет Павла Поповича*) зробив своєму головному конструкторові справді неземний подарунок: заспівав Корольову його улюблену пісню «Дивлюсь я на небо…» із космосу!

Послухаємо пісню «Дивлюсь я на небо…».

Запитання 11. Один любитель математики у власному садку викопав ставок у формі квадрата і в кожному кутку ставка посадив верби. Пройшов час, верби виросли і стали надзвичайно гарними. А чоловікові закортіло збільшити розмір ставка вдвічі так, щоб він залишився у формі квадрата, але дуже не хотілося корчувати верби. Чи може він збільшити розмір ставка вдвічі, залишивши його квадратним і не знищуючи верби?

Відповідь. Так, якщо через кожну вершину він проведе прямі, паралельні діагоналям квадрата і сполучить точки їхнього перетину.

Запитання 12. У дитинстві Михайло Остроградський (на екран проектують портрет М. Остроградського) мріяв стати гусаром. І не дивно, адже рід майбутнього вченого походив від запорізьких козаків і був відомий на Полтавщині з XVII століття. За материнською лінією він був нащадком гетьмана Данила Апостола. (На екран проектують поряд із портретом М. Остроградського портрет гетьмана Данила Апостола.) Але військовим він не став за браком коштів. Яким чином Михайло Остроградський віддав належне своїй дитячий мрії — військовій справі?

Відповідь. Написав низку робіт, присвячених військовій справі, був викладачем математики в чотирьох військових навчальних закладах Петербурга.

Запитання 13 (зеро)

Ведучий. Із вами грає особисто вчитель математики.

(Учитель виходить до гравців, сідає на приготовлений для нього стілець, вітається з гравцями, бажає гравцям успішно пройти випробування.)

Учитель. Чи любите ви казки? Які народні українські казки вам найбільше запам'яталися? (*Відповіді учнів.*) Отже, любите і знаєте казки. Наш народ має багато повчальних казок та легенд. Уявіть собі, що казковому гному щоночі потрібна нова свічка, якою він світить, бродячи містом. Він може зробити одну свічку з п'яти недогарків. Якщо в нього набереться 25 недогарків, то на скільки ночей йому вистачить запасу нових свічок?

Відповідь. На шість ночей. Він може зробити 5 свічок із 25 недогарків, а, коли вони згорять, то шосту він зробить із 5 нових недогарків.

Ведучий. Гра закінчилася. Підіб'ємо її підсумки.

(Технологія «Мікрофон»: глядачі та гравці діляться враженнями від гри.)

Ведучий. Слухаємо висновок журі.

(Журі оголошують та нагороджують найкращого гравця та найкращого виконавця художніх творів.)

Ведучий. Завершити свято пропоную колективним виконанням пісні «На добро» (сл. Ю. Рибчинського, муз. І. Карабиця).

Гей, на видноколі —
Клени і тополі,
Там вишнева ніч згора.
Там, в прозорій тиші,
Квітень вірші пише,
Травень на сопілці гра.
Там дитинства весни,
Райдуг перевесла,
Там початок всіх шляхів.
Там мене співати

Вчила рідна мати,
Бути щедрим батько вчив.
Приспів:
Яблунева, солов'їна
В моїм серці Україна,
В моїм серці сонячний Дніпро.
Щира, світла, промениста
Хай усіх єднає пісня,
Хай лунає людям на добро!
Гей на видноколі —
Ранки ясночолі,
Гори, ріки і поля.
Роки там яснітоть,
Там сади рясніють,
Там співа моя земля.
Я дарую людям,
Щирим, добрим людям
В радісний, щасливий день
Зорі України, квіти України,
Буйний сад її пісень!

ЛІТЕРАТУРА

1. *Національно-патріотичне* виховання у загальноосвітніх навчальних закладах. Наказ Міністерства освіти і науки України №641 від 16 червня 2015 року.
2. *Опалько А. М.* Квадратні корені. Дійсні числа // Математика в школах України. — 2017. — № 4–5.
3. *Василенко О. О.* Між аксіом і теорем. Календар від «Серенади математиці» // Математика в школах України. — 2011. — № 27.
4. *Серветник В. Г.* Остроградському – 215! // Математика в школах України. Позакласна робота. — 2016. — № 9.
5. *Немировська Н. Г.* Найдорожча в світі рідна Україна! — Х. : Видавнича група «Основа», 2012.
6. *Інтернет-ресурси:* www.dailymotion.com, www.poetrclub.com.ua, uk.wikipedia.org, www.alladolls.ru, folkmoda.net, barvinok.ukoz.net www.youtube.com dovidka.biz.ua

У БЛОКНОТ ВИКЛАДАЧА МАТЕМАТИКИ В 9 КЛАСІ

ПРАВИЛЬНІ МНОГОКУТНИКИ

***

Зображення правильних чотирикутників, шестикутників і восьмикутників зустрічаються в єгипетських і вавилонських стародавніх пам'ятках. Їх можна знайти на стінах і прикрасах, висічених із каменю.

***

Учення про правильні многокутники, розпочате в школі Піфагора, продовжене і розвинене в V–IV ст. до н. е., було систематизоване Евклідом і викладене в IV книзі «Начал».

***

Крім побудови правильних трикутника, чотирикутника, п'ятикутника і шестикутника, Евклід розв'язав і задачу побудови правильного п'ятнадцятикутника за допомогою тільки циркуля і лінійки. Ця фігура привертала увагу стародавніх учених, оскільки було помічено, що дуга кута нахилу екліптики до екватора дорівнює $\frac{1}{15}$ усього кола, тобто стягується стороною правильного п'ятнадцятикутника.

***

Давньогрецькі математики (Антіфон, Брісон, Архімед та ін.) використовували правильні многокутники для обчислення числа π. Вони обчислювали площі вписаних в коло і описаних навколо нього многокутників, поступово збільшуючи кількість їхніх сторін і отримуючи таким чином оцінку площі кола.

***

Наприкінці XVIII ст. 19-річний К. Ф. Гаусс, видатний німецький математик, довів, що за допомогою циркуля і лінійки можна розділити коло на таке просте число N рівних частин, яке виражається формулою $N=2^{2^n}+1$, де n — натуральне число або нуль.

***

У таблиці наведені радіус описаного кола (R), радіус вписаного кола (r) і площа (S) деяких правильних n-кутників зі стороною a.

n	R	r	S
5	$\frac{a}{10}\sqrt{10\left(5+\sqrt{5}\right)}$	$\frac{a}{10}\sqrt{5\left(5+2\sqrt{5}\right)}$	$\frac{a^2}{4}\sqrt{5\left(5+2\sqrt{5}\right)}$
8	$\frac{a}{2}\sqrt{2\left(2+\sqrt{2}\right)}$	$\frac{a}{2}\left(1+\sqrt{2}\right)$	$2a^2\left(1+\sqrt{2}\right)$
10	$\frac{a}{2}\left(1+\sqrt{5}\right)$	$\frac{a}{2}\sqrt{5+2\sqrt{5}}$	$\frac{5}{2}a^2\sqrt{5+2\sqrt{5}}$

ПРОГРАМА КУРСУ З МАТЕМАТИКИ «ДОСЛІДНИК» (10 КЛАС)

Л. Г. Чорнобай, м. Кремінна, Луганська обл.

Від редакції. Звертаємо увагу читачів, що наведена програма є власною розробкою автора. Тому ви можете скористатися окремими ідеями автора і створити оригінальну програму, урахувавши свої можливості, рівень підготовленості учнів, технічне оснащення школи тощо.

ПОЯСНЮВАЛЬНА ЗАПИСКА

Основною метою роботи факультативного курсу є поглиблення і розширення математичних знань учнів, формування в учнів уявлень про математику як форму відображення та метод пізнання дійсності, розуміння ролі математики в сучасному житті, підвищення інтересу до математики, удосконалення практичних навичок роботи в мультимедійних середовищах Microsoft Office, формування соціальної компетентності учнів, виховання творчої особистості.

Групове навчання має виконати такі основні завдання: поєднання навчання з продуктивною працею, створення умов для науково-дослідницької діяльності, формування творчого ставлення до роботи.

У процесі вивчення математичних тем, що не передбачені шкільною програмою, учні зможуть ознайомитися з елементами науково-дослідницької діяльності. Для цього до програми включені заняття, метою яких є ознайомлення зі складовими наукового апарату дослідження, де учні зможуть проводити власні спостереження та дослідження з конкретних обраних тем.

Цей курс також має на меті розвинути в учнів уміння логічно, доступно й ефективно подавати інформацію, структурувати її, застосовувати різні способи її зображення.

До теоретичних знань, що їх мають набути учні, належать: складові наукового апарату дослідження; сучасні програмні засоби, необхідні для ефективного подання інформації; поняття та класифікація комп'ютерних презентацій; методи і способи організації презентацій.

Виконавши вимоги програми курсу, учні мають набути таких практичних навичок і умінь:

- ✓ розв'язування математичних завдань підвищеного рівня складності;
- ✓ дослідження матеріалу з різнопланових інформаційних джерел;
- ✓ організація власних досліджень;
- ✓ аналіз результатів власних досліджень та їх вибірка згідно з поставленою метою;
- ✓ уміння добирати найбільш вдалий спосіб подання матеріалу;
- ✓ створення комп'ютерних презентацій;
- ✓ керування показом презентації.

ОСОБЛИВОСТІ ОРГАНІЗАЦІЇ НАВЧАЛЬНО-ВИХОВНОГО ПРОЦЕСУ

Програма курсу розрахована на 9 навчальних місяців (32 години, по 1 год на тиждень, І семестр — 15 год, ІІ семестр — 17 год).

Навчання передбачає групову, індивідуальну та консультативну форму і має завершуватися формуванням в учнів власного бачення складових наукового апарату дослідження з обраних тем.

ЗМІСТ ПРОГРАМИ

І. ВСТУП. ВИВЧЕННЯ НАУКОВОГО АПАРАТУ ДОСЛІДЖЕННЯ (4 ГОД)

1. Ознайомлення з розкладом роботи гуртка. Вирішення організаційних питань. Планування роботи. Обрання тем дослідження (1 год).
2. Вивчення складових наукового апарату дослідження (актуальність, проблема, тема, мета, об'єкт, предмет дослідження, гіпотеза, завдання, методи) щодо обраної теми (2 год).
3. Сучасні програмні засоби, необхідні для ефективного подання інформації, поняття та класифікація комп'ютерних презентацій, методи і способи організації презентацій (1 год).

II. ДОСЛІДЖЕННЯ З ТЕМИ «МАТЕМАТИЧНІ ЗАКОНИ КРАСИ ТА КРАСА МАТЕМАТИЧНИХ ЗАКОНІВ» (11 ГОД)

1. Математичні закони краси (5 год)

Теоретичні основи дослідження. Опрацювання інформаційних джерел із метою вивчення математичних понять із тем «Числа Фібоначчі», «Золотий переріз».

Практичні заняття:

Дослідження наявності золотого перерізу і чисел Фібоначчі в живій природі. Дослідження окремих пропорцій у тілі людини.

Спостереження математичних закономірностей у світі рослин. Створення презентацій власних досліджень.

2. Краса математичних законів (6 год)

Опрацювання інформаційних джерел із метою дослідження естетичного аспекту унікальних математичних властивостей золотого перерізу (подання у вигляді ланцюгового дробу, подання в радикалах, властивість адитивності золотої пропорції, системи числення з ірраціональними основами, «золота» теорія чисел).

Практичні заняття:

Перевірка подання перших чисел натурального ряду у вигляді суми степенів золотої пропорції.

Висновки щодо проведених досліджень. Підсумки роботи.

III. ДОСЛІДЖЕННЯ З ТЕМИ «ЛАНЦЮГОВІ ДРОБИ» (16 ГОД)

1. Вступ (2 год)

Планування роботи. Обрання теми дослідження: «Ланцюгові дроби». Складові наукового апарату дослідження обраної теми.

2. Вивчення та дослідження математичного апарату ланцюгових дробів (8 год)

Введення поняття ланцюгового дробу. Історичні відомості щодо виникнення та застосування ланцюгових дробів.

Практичні заняття:

Згортання ланцюгового дробу «знизу вгору». Згортання дробу «згори вниз» та алгоритм знаходження підхідних дробів ланцюгового дробу. Власні дослідження можливості розкладання коренів зведеного квадратного рівняння в ланцюговий дріб.

3. Дослідження практичного застосування ланцюгових дробів (6 год)

Дослідження використання ланцюгових дробів в астрономії. Знаходження періоду повторення сонячних та місячних затемнень. Східний календар. Задача Гюйгенса про планетарій.

Практичні заняття:

Дослідження практичного значення ланцюгових дробів:

- ✓ у фізиці — розв'язування задач на складання електричних схем;
- ✓ у ботаніці — опис явища філотаксису за допомогою ланцюгових дробів.

Висновки проведених досліджень. Підсумки роботи.

IV. ЗАКЛЮЧНЕ ЗАНЯТТЯ (1 ГОД)

Аналіз та підсумки роботи за рік.

***

Справжнє знання полягає не в ознайомленні з фактами, що робить людину лише педантом, а в застосуванні фактів, що робить її філософом.

Генрі Томас Букль

***

Без звички працювати, без уміння долати труднощі, без дисципліни праці немає людини. А саме до цього й привчає математика.

М. І. Кодак

***

Діяльність — єдиний шлях до знань.

Бернард Шоу

***

Хто вважає, що опанував усе, той нічого не знає.

Лао-Цзи

ОРІЄНТОВНИЙ ТЕМАТИЧНИЙ ПЛАН

№ з/п	Тема заняття	Кількість годин	Характер заняття	
			Теоретичне	Практичне
	І семестр	15		
I	Вступ. Вивчення наукового апарату дослідження	4		
1	Планування роботи. Обрання теми дослідження: «Математичні закони краси та краса математичних законів»	1	1	–
2	Складові наукового апарату дослідження (актуальність, проблема, тема, мета, об'єкт, предмет дослідження) щодо обраної теми	1	1	–
3	Складові наукового апарату дослідження (гіпотеза, завдання, методи) щодо обраної теми	1	1	–
4	Сучасні програмні засоби, необхідні для ефективного подання інформації, поняття та класифікація комп'ютерних презентацій, методи і способи організації презентацій	1	1	–
II	Дослідження з теми «Математичні закони краси та краса математичних законів»	11		
	Математичні закони краси	5		
5	Теоретичні основи дослідження. Опрацювання інформаційних джерел із метою вивчення математичних понять із теми «Числа Фібоначчі»	1	1	–
6	Теоретичні основи дослідження. Опрацювання інформаційних джерел із метою вивчення математичних понять із теми «Золотий переріз»	1	1	–
7	Дослідження наявності золотого перерізу і чисел Фібоначчі в живій природі. Дослідження окремих пропорцій у тілі людини	1	–	1
8, 9	Дослідження наявності золотого перерізу і чисел Фібоначчі в живій природі. Спостереження математичних закономірностей у світі рослин. Створення презентацій власних досліджень	2	–	2
	Краса математичних законів	6		
10	Опрацювання інформаційних джерел із метою дослідження естетичного аспекту унікальних математичних властивостей золотого перерізу (подання у вигляді ланцюгового дробу, подання в радикалах)	1	1	–
11, 12	Опрацювання інформаційних джерел з метою дослідження естетичного аспекту унікальних математичних властивостей золотого перерізу (властивість адитивності золотої пропорції, системи числення з ірраціональними основами, «золота» теорія чисел)	2	2	–

№ з/п	Тема заняття	Кількість годин	Характер заняття	
			Теоретичне	Практичне
13, 14	Перевірка подання перших чисел натурального ряду у вигляді суми степенів золотої пропорції	2	–	2
15	Висновки проведених досліджень. Підсумки роботи	1	–	1
	II семестр	17		
III	Дослідження з теми «Ланцюгові дроби»	16		
	Вступ	2		
16	Вступне заняття. Планування роботи. Обрання теми дослідження: «Ланцюгові дроби»	1	1	–
17	Складові наукового апарату дослідження обраної теми	1	1	–
	Вивчення та дослідження математичного апарату ланцюгових дробів	8		
18	Введення поняття ланцюгового дробу	1	1	–
19	Історичні відомості про виникнення та застосування ланцюгових дробів (дослідження інформаційних джерел)	1	–	1
20	Згортання ланцюгового дробу «знизу вгору»	1	1	–
22, 23	Згортання дробу «згори вниз» та алгоритм знаходження підхідних дробів ланцюгового дробу	3	2	1
24, 25	Дослідження можливості розкладання коренів зведеного квадратного рівняння в ланцюговий дріб	2	–	2
	Дослідження практичного застосування ланцюгових дробів	6		
26	Дослідження використання ланцюгових дробів в астрономії. Знаходження періоду повторення сонячних та місячних затемнень	1	1	–
27	Дослідження використання ланцюгових дробів в астрономії. Східний календар	1	1	–
28	Дослідження використання ланцюгових дробів в астрономії. Задача Гюйгенса про планетарій	1	1	–
29	Дослідження практичного значення ланцюгових дробів у фізиці (розв'язування задач на складання електричних схем)	1	–	1
30	Дослідження практичного значення ланцюгових дробів у ботаніці (опис явища філотаксису за допомогою ланцюгових дробів)	1	–	1
31	Висновки проведених досліджень. Підсумки роботи	1	–	1
IV	Заключне заняття	1		
32	Аналіз та підсумки роботи за рік	1	–	1

ДОСЛІДЖЕННЯ З ТЕМИ «МАТЕМАТИЧНІ ЗАКОНИ КРАСИ ТА КРАСА МАТЕМАТИЧНИХ ЗАКОНІВ» (І СЕМЕСТР)

Вступ

Актуальність теми дослідження

Чи існують закони краси? Чи можна знайти математичні закономірності в прекрасному? Чи є математична закономірність у візерунках, створених природою?

Промінці сніжинки поділяються знову і знову, утворюючи промінчики менших розмірів. Від стовбура дерева відходять великі гілки, від них гілочки менших розмірів тощо (*рис. 1*).

Рис. 1. Приклади властивості самоподібності в природі

Ще один вид конфігурації — розділена на камери раковина Наутілуса. Зростаючи, Наутілус будує нові, більші за розмірами камери, відділяючи їх від непотрібних. Подібні спіралі утворюють і хмари під час урагану, і зірки в галактиках, і насіння соняшника (*рис. 2*).

Що лежить в основі цих спіральних структур? У будові соняшника відіграє велику роль один кут. Він дорівнює приблизно $137{,}5^\circ$. Іноді його називають золотим кутом. Завдяки йому створюється максимально компактна структура зі спіральним малюнком.

Можна помітити залежність між золотим кутом і числами Фібоначчі. У цьому ряду кожне число дорівнює сумі двох попередніх: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144,...

Рис. 2. Приклади спіральних утворень у природі

Ця залежність свідчить про те, що візерунки, які існують у природі, з'явилися не випадково. Вони підкоряються єдиним законам, які водночас мають свою власну красу.

Отже, для дослідження обрано саме цю тему з метою дослідити математичні закономірності гармонії і краси в живій природі та можливу естетику в самій математиці гармонії.

Наукова новизна

Уся природа підпорядкована законам гармонії, отже, вимагає математики гармонії, для якої традиційна аналітична математика є лише окремим випадком. Золотий переріз посідає значне місце в сучасних дослідженнях кількісних співвідношень живої і неживої природи. Математика гармонії — це математика майбутнього, математика зрілого, а не початкового етапу природознавства і суспільства. Яскраві відкриття сучасної науки — нова геометрична теорія філотаксису українського архітектора Олега Ярославовича Боднара та українського математика гармонії Олексія Петровича Стахова мають «стратегічне» значення для розвитку сучасної науки. Сьогодні є підстави стверджувати, що теорія гармонії та золотого перерізу вже робить і робитиме вплив на формування наукової свідомості, на поворот головного вектора науки в бік гуманізації та зближення з природою.

Об'єктом дослідження постає математичний опис основоположних принципів, на яких ґрунтується гармонія і порядок у природі; естетична досконалість деяких аспектів математики гармонії.

Предмет дослідження — питання наявності золотого перерізу і чисел Фібоначчі в живій природі та вивчення унікальних властивостей золотої пропорції з позиції їхньої власної естетичної краси.

Використані такі методи дослідження, як аналіз, опис, узагальнення, дослід, спостереження.

Теоретична база дослідження — праці вітчизняних та зарубіжних науковців: О. П. Стахова, О. Я. Боднара, В. І. Коробка, І. Ш. Шевельова, Dr. Ron Knott та інших.

Інформаційна база дослідження сформована на основі літературних та Інтернет-джерел.

Практичне значення розглянутого матеріалу полягає в якісно новому підході до вивчення живої матерії, а також у виявленні існування унікальної системи числення, основою якої є класична золота пропорція.

Розділ 1. МАТЕМАТИЧНІ ЗАКОНИ КРАСИ

1. Теоретичні основи дослідження. Результати опрацювання інформаційних джерел із метою вивчення математичних понять із теми «Числа Фібоначчі».

На початку XIII століття в місті Піза (Італія) жив великий знавець усіляких співвідношень між числами і вельми майстерний обчислювач Леонардо (із додаванням до його імені Пізанський). Його звали ще Фібоначчі, що означає син Боначчі. 1202 року він видав книгу латинською мовою під назвою «Книга абаку» (Incipit Liber, Abbaci compositus a Leonardo filius Bonacci Pisano), яка містила всю сукупність знань того часу з арифметики і алгебри. Це була одна з перших книг у Європі, яка вчила вживати десяткову систему числення.

Ряд Фібоначчі

Фібоначчі склав такий ряд із натуральних чисел, який згодом виявився корисним у науці: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...

Закон створення членів цього ряду дуже простий: перші два члени — одиниці, а потім кожен наступний член одержують шляхом додавання двох членів, що безпосередньо йому передують. Наприклад, $2=1+1$, $3=1+2$, $5=2+3$, $8=3+5$ тощо.

Прямокутники і спіралі Фібоначчі

Зобразимо два квадрати зі стороною 1, що стоять поруч один з одним. До цих двох квадратів дорисуємо квадрат зі стороною $2(1+1)$. Тепер можемо зобразити ще один квадрат зі стороною 3, далі — зі стороною 5. Ми можемо продовжувати дорисовувати квадрати навколо зображення так, щоб кожен новий квадрат мав сторони, що дорівнюють сумі двох останніх сторін квадрата. Дістанемо набір прямокутників, сторонами яких є два послідовних числа Фібоначчі і які складаються з квадратів зі сторонами, що є числами Фібоначчі. Такі прямокутники називають прямокутниками Фібоначчі.

Скориставшись прямокутниками Фібоначчі, можна утворити спіраль, виокремивши по чверті кола в кожному квадраті (*рис. 3.1*).

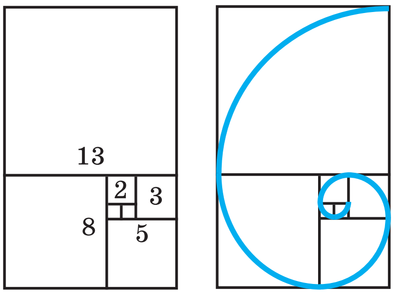


Рис. 3. Утворення спіралі

Золотий переріз

Людина розрізняє навколишні предмети за формою. Інтерес до форми будь-якого предмета може бути продиктований життєвою необхідністю, а може бути викликаний красою форми. Форма, в основі побудови якої лежать поєднання симетрії і золотого перерізу, сприяє найкращому зоровому сприйняттю і появі відчуття краси і гармонії. Ціле завжди складається з частин, частини різної величини перебувають у певному відношенні одна до одної і до цілого.

Золотий переріз — це такий пропорційний поділ відрізка на нерівні частини (*рис. 4*), при якому весь відрізок так відноситься до більшої частини, як більша частина відноситься до меншої; або, іншими словами, менший відрізок так відноситься до більшого, як більший до всього відрізка:

$$a:b=b:c \text{ або } c:b=b:a.$$

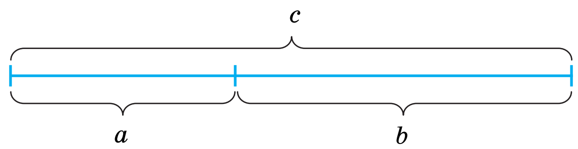


Рис. 4. Пропорційний поділ відрізка на нерівні частини

У цій пропорції відношення більшої до меншої частини, описується квадратичною ірраціональністю, що виражається формулою

$$\varphi=\frac{\sqrt{5}+1}{2}\approx 1{,}6180339887\ldots,$$

і, відповідно, меншої до більшої частини:

$$\varphi=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx 0{,}6180339887\ldots$$

Якщо в ряду чисел Фібоначчі взяти відношення наступного члена до попереднього або навпаки, то отримаємо вже знайомі нам числа: 1,618 і 0,618.

В епоху італійського Відродження золота пропорція $\varphi=1{,}618$ набуває рангу основного естетичного принципу. 1509 року вийшов твір Луки Пачіолі «Divina Propoprtione», у якому властивості золотої пропорції порівнюються з властивостями Самого Бога, а сама пропорція називається «божественною». Платон розглядав це число як найбільш обов'язкове з усіх математичних відношень і називав його ключем до розуміння фізики космосу. Йоганн Кеплер своє захоплення золотим перерізом висловив у таких словах: «У геометрії є два скарби: теорема Піфагора і поділ відрізка в крайньому і середньому відношенні: перше можна порівняти з цінністю золота, друге можна назвати коштовним каменем».

2. Дослідження наявності золотого перерізу і чисел Фібоначчі в живій природі

✓ Дослідження окремих пропорцій у тілі людини.

Мета: дослідити наявність золотого перерізу й чисел Фібоначчі в тілі людини.

Хід роботи

Проведемо необхідні вимірювання у знайомих людей різного віку. Знімемо мірки двох видів: від верхньої точки голови до талії і від талії до підлоги. Знайдемо їхнє відношення і порівняємо його з числом φ золотого перерізу. Результати дослідження подамо у вигляді таблиці.

Вік людини	Відстань (у см) від верхньої точки голови до талії (b)	Відстань (у см) від талії до підлоги (a)	$a:b$
11 років	58	87	1,5
19 років	62	100	1,613
40 років	61	97	1,590

Висновок. Відношення відстані від верхньої точки голови людини до талії і від талії до підлоги приблизно дорівнює числу $\varphi=1{,}618$.

✓ Дослідження наявності золотого перерізу і чисел Фібоначчі в будові рослин.

Мета: дослідити наявність золотого перерізу й чисел Фібоначчі в будові рослин.

Хід роботи

1) Перевіримо наявність чисел Фібоначчі в кількості пелюсток квітів (*рис. 5*).

Рис. 5. Кали, ірис, шипшина, жоржина, чорнобривці, троянда, волошка, ромашка

Підрахуємо кількість пелюсток деяких квітів і подамо результати у вигляді таблиці.

Квіти	Кількість пелюсток
Кали	1
Ірис	3
Шипшина, гвоздики	5
Жоржина	8
Чорнобривці	13
Троянди	21
Волошки	34
Ромашки	55

Висновок. Існують квіти, кількість пелюсток яких є числами Фібоначчі.

2) Перевіримо наявність чисел Фібоначчі і золотої пропорції в кількості «правих» і «лівих» спіралей, за якими розміщено насіння деяких рослин (*рис. 6*).

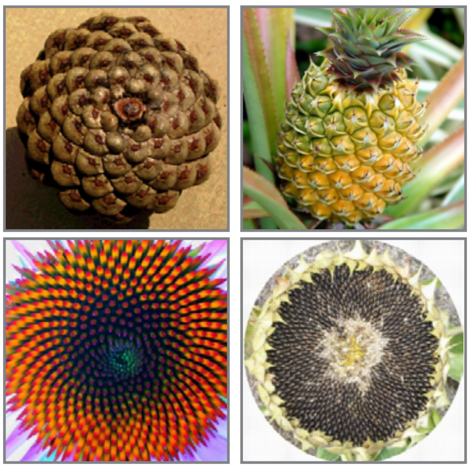


Рис. 6. Хвойна шишка, ананас, ехінацея пурпурна, соняшник

Підрахуємо кількість «правих» і «лівих» спіралей у розміщенні насіння деяких рослин і подамо результати у вигляді таблиці.

Рослини	Кількість спіралей	
	«Правих»	«Лівих»
Хвойна шишка	8	13
Ананас	8	13
Ехінацея пурпурна	34	55
Соняшник	55	89

Висновки. Лусочки хвойних шишок і плодів ананаса, насіння ехінацеї пурпурної і соняшника «упаковані» за логарифмічними спіралями, що завиті назустріч одна одній. При цьому кількості «правих» і «лівих» спіралей завжди відносяться, як сусідні числа Фібоначчі ($8:13$, $34:55$, $55:89$ тощо).

3) Перевіримо наявність чисел Фібоначчі і золотої пропорції в розташуванні листя на стеблинах рослин.

Розглянувши листя на стеблині рослини, помічаємо, що листя розташоване на різних висотах стебла вздовж гвинтової лінії, що обвивається навколо його поверхні. Дроби, що характеризують гвинтові осі рослин, утворюють строгу математичну послідовність:

$$\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{5},\ \frac{5}{8},\ \frac{8}{13}.$$

Виміряємо відстані між листям на стеблині герані (*див. рис. 7*).

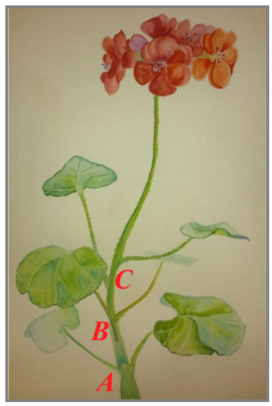


Рис. 7

$$AB = 1{,}5,\quad BC = 2{,}5,\quad AC = 4.$$

Обчисливши відповідні відношення, дістанемо:

$$AB : BC = 0{,}6,\quad BC : AC = 0{,}625.$$

Висновки. Дроби, що характеризують гвинтові осі рослин, — це відношення сусідніх чисел Фібоначчі. Між кожними двома парами листя (A і C) третя пара (B) розташована в місці золотого перерізу.

***

Проведені дослідження та спостереження переконують у тому, що краса творінь природи — це мова, якою природа повідомляє нам про доцільність. А остання вже підвладна математичному опису.

Розділ 2. КРАСА МАТЕМАТИЧНИХ ЗАКОНІВ

У природі існує багато такого, що не може бути ні досить глибоко зрозуміле, ні достатньо переконливо доведене, ні достатньо вміло і надійно використане на практиці без втручання математики.

Ф. Бекон

Математика є прообразом краси світу.

В. Гейзенберг

1. Результати опрацювання інформаційних джерел із метою дослідження естетичного аспекту унікальних математичних властивостей золотого перерізу.

Математика — це символ мудрості. Це не тільки струнка система законів, теорем і задач, але і унікальний засіб пізнання краси.

Звичайно, усі закони краси неможливо вмістити в декілька формул. Але, вивчаючи математику, ми відкриваємо все нові й нові складові прекрасного, наближаючись до розуміння, а в подальшому і до створення краси і гармонії. Математика гармонії є справжньою математикою природи. Вона виявляється в багатьох явищах природи. З іншого боку, математика гармонії володіє естетичною досконалістю.

Англійський фізик, Нобелівський лауреат Поль Дірак сформулював тезу: «Краса є критерієм істинності фізичної теорії». Дірак не тільки усвідомлював красу виразів математичних формулювань теорії, але і розумів евристичну, регулятивну роль краси як методологічного принципу побудови наукового знання.

Практично всі основні математичні результати і геометричні фігури, що належать до математики гармонії і до теорії чисел Фібоначчі, володіють естетичною досконалістю і викликають почуття краси і естетичної насолоди. Розглянемо деякі з них.

Унікальні математичні властивості золотої пропорції

1) Подання у вигляді ланцюгового дробу

Відомо, що число золотої пропорції

$$\varphi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

є додатним коренем квадратного рівняння

$$x^2=x+1.$$

Якщо в це рівняння замість x підставити φ, то дістанемо тотожність

$$\varphi^2=\varphi+1. \qquad (1)$$

Поділивши всі члени цієї тотожності на φ, дістанемо вираз $\varphi=1+\frac{1}{\varphi}$.

Якщо в праву частину цього виразу замість φ підставимо його значення, що задане тим же виразом, то дістанемо подання φ у вигляді «багатоповерхового» дробу: $\varphi=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\varphi}}$.

Здійснюючи таку підстановку безліч разів, отримаємо «багатоповерховий» дріб із нескінченною кількістю «поверхів»:

$$\varphi=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ldots}}}. \qquad (2)$$

Таке подання в математиці називають безперервним або ланцюговим дробом.

2) Подання в радикалах

Розглянемо тотожність (1). Якщо добути квадратний корінь із правої і лівої частин цієї тотожності, то отримаємо такий вираз для φ:

$$\varphi=\sqrt{\varphi+1}. \qquad (3)$$

Якщо тепер у правій частині виразу (3) замість φ підставимо його значення (3), то дістанемо такий вираз для φ: $\varphi=\sqrt{1+\sqrt{1+\varphi}}$.

Здійснюючи таку підстановку безліч разів, дістанемо ще одне подання золотої пропорції:

$$\varphi=\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}}. \qquad (4)$$

Кожен математик інтуїтивно прагне виразити свої математичні результати в найбільш простій, компактній формі. І якщо таку форму вдається знайти, то це приносить математику «естетичну насолоду». Формули (2) і (4) викликають неусвідомлене почуття ритму і гармонії, коли ми починаємо замислюватися над нескінченною повторюваністю одних і тих самих простих математичних елементів у здобутих формулах для φ.

3) Властивість адитивності золотої пропорції

Помноживши (або поділивши) багаторазово члени тотожності (1) на φ, дістанемо тотожність, що пов'язує степені золотої пропорції:

$$\varphi^n = \varphi^{n-1} + \varphi^{n-2}, \qquad (5)$$

де n — будь-яке ціле число.

Тотожність (5) можна словесно сформулювати так:

Будь-який цілий степінь золотої пропорції дорівнює сумі двох попередніх степенів.

4) Узагальнені золоті перерізи. Системи числення з ірраціональними основами

Задача Евкліда про поділ відрізка в крайньому і середньому відношенні має таке узагальнення.

Нехай p — ціле невід'ємне число ($p = 0$, 1, 2, 3, ...). Розділимо відрізок AB точкою C (рис. 8) у такому відношенні, щоб

$$\frac{CB}{AC} = \left(\frac{AB}{CB}\right)^p. \qquad (6)$$

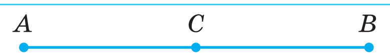
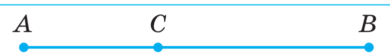
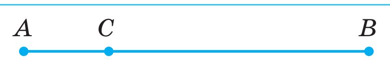
$p=0$		$\varphi_0 = 2$
$p=1$		$\varphi_1 = 1{,}618$
$p=2$		$\varphi_2 = 1{,}465$
$p=3$		$\varphi_3 = 1{,}380$
$p=4$		$\varphi_4 = 1{,}324$

Рис. 8. Золоті p-перерізи

Позначимо відношення $AB : CB = x$. Тоді $CB : AC = x^p$. З іншого боку, $AB = AC + CB$, звідки випливає рівняння

$$x^{p+1} = x^p + 1. \qquad (7)$$

Позначимо через φ_p додатний корінь алгебраїчного рівняння (7). Рівняння (7) задає безліч пропорційних поділів відрізка AB у відношенні (6).

При $p = 1$ $\varphi_p = \varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ — золота пропорція, а поділ відрізка збігається з класичним золотим перерізом. Тому поділ відрізка у відношенні (6) назвали узагальненим золотим перерізом, або золотим p-перерізом, а числа φ_p — узагальненими золотими пропорціями, або золотими p-пропорціями.

Із рівняння (7) безпосередньо випливає тотожність, що пов'язує степені золотих p-пропорцій:

$$\varphi_p^n = \varphi_p^{n-1} + \varphi_p^{n-p-1} = \varphi_p \cdot \varphi_p^{n-1}. \qquad (8)$$

Розглянемо нескінченну множину геометричних відрізків, що є степенями золотої p-пропорції φ_p:

$$G_p = \left\{\varphi_p^n\right\}, \qquad (9)$$

де $p = 0$, 1, 2, 3, ..., $n = 0$, ±1, ±2, ±3, ..., при цьому всі степені φ_p^n пов'язані між собою математичною тотожністю (8).

Використовуючи множину (9), можна «сконструювати» такий метод позиційного подання дійсних чисел:

$$A = \sum_i a_i \varphi_p^i, \qquad (10)$$

де $a_i \in \{0;1\}$, $i = 0$, ±1, ±2, ±3, ...

Зауважимо, що вираз (10) «генерує» безліч позиційних способів подання чисел (систем числення), оскільки кожному p ($p = 0$, 1, 2, 3, ...,) відповідає своя система числення виду (10). Так, при $p = 0$ основою є $\varphi_p = \varphi_0 = 2$, тобто система числення є двійковою.

Розглянемо окремий випадок $p = 1$. Для цього випадку основою системи числення (10) є класичний золотий переріз

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

1957 року таку систему числення запропонував американський математик Джордж Бергман і назвав її системою числення з ірраціональною основою.

(Цікаво знати, що статтю про цю систему числення Дж. Бергман написав у віці 12 років!)

Розглянемо тепер подання натуральних чисел у системах числення (10), тобто розглянемо всі можливі суми виду

$$N = \sum_i a_i \varphi_p^i, , \qquad (11)$$

де N — деяке натуральне число, φ_p — основа системи числення (10),

$$a_i \in \{0;1\}, \; i = 0, \; \pm1, \; \pm2, \; \pm3, \; ...$$

Доведено, що всі подання виду (11) є скінченними, тобто будь-яка сума такого виду складається зі скінченної кількості степенів золотої p-пропорції. Наприклад, для випадку $p=1$ (система числення Бергмана) мають місце такі подання перших натуральних чисел:

$$1=1,0;\quad 2=10,01;\quad 3=100,01;\quad 4=100,01;$$

$$5=1000,1001;\quad 6=1010,0001;\quad 7=10000,0001.$$

2. Перевірка подання перших чисел натурального ряду у вигляді суми степенів золотої пропорції

Виконаємо перевірку справедливості формули (11) для перших п'яти натуральних чисел. Результати оформимо у вигляді таблиці.

Подання чисел	Код Бергмана
$1=1\cdot\varphi^0+0\cdot\varphi^{-1}=1$	1 = 1,0
$2=1\cdot\varphi^1+0\cdot\varphi^0+0\cdot\varphi^{-1}+1\cdot\varphi^{-2}=1\cdot\varphi^1+1\cdot\varphi^{-2}=\frac{1+\sqrt5}{2}+\left(\frac{2}{1+\sqrt5}\right)^2=$ $=\frac{1+\sqrt5}{2}+\frac{4}{\left(1+\sqrt5\right)^2}=\frac{\left(1+\sqrt5\right)\left(1+\sqrt5\right)^2+8}{2\left(1+\sqrt5\right)^2}=\frac{\left(1+\sqrt5\right)\left(6+2\sqrt5\right)+8}{2\left(6+2\sqrt5\right)}=\frac{24+8\sqrt5}{12+4\sqrt5}=2$	2 = 10,01
$3=1\cdot\varphi^2+0\cdot\varphi^1+0\cdot\varphi^0+0\cdot\varphi^{-1}+1\cdot\varphi^{-2}=1\cdot\varphi^2+1\cdot\varphi^{-2}=$ $\frac{\left(1+\sqrt5\right)^2}{4}+\frac{4}{\left(1+\sqrt5\right)^2}==\frac{\left(6+2\sqrt5\right)^2+16}{4\left(6+2\sqrt5\right)}=\frac{36+24\sqrt5+20+16}{24+8\sqrt5}=\frac{72+24\sqrt5}{24+8\sqrt5}=3$	3 = 100,01
$4=1\cdot\varphi^2+0\cdot\varphi^1+1\cdot\varphi^0+0\cdot\varphi^{-1}+1\cdot\varphi^{-2}=1\cdot\varphi^2+1\cdot\varphi^{-2}+1=3+1=4$	4 = 101,01
$5=1\cdot\varphi^3+0\cdot\varphi^2+0\cdot\varphi^1+0\cdot\varphi^0+1\cdot\varphi^{-1}+0\cdot\varphi^{-2}+0\cdot\varphi^{-3}+1\cdot\varphi^{-4}=1\cdot\varphi^3+1\cdot\varphi^{-1}+1\cdot\varphi^{-4}=$ $=\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^3+\frac{2}{1+\sqrt5}+\left(\frac{2}{1+\sqrt5}\right)^4=\frac{1+3\sqrt5+15+5\sqrt5}{8}+\frac{2\left(16+8\sqrt5\right)+16}{\left(1+\sqrt5\right)^4}=$ $=2+\sqrt5+\frac{48+16\sqrt5}{\left(6+2\sqrt5\right)^2}=2+\sqrt5+\frac{48+16\sqrt5}{56+24\sqrt5}=2+\sqrt5+\frac{6+2\sqrt5}{7+3\sqrt5}=\frac{\left(2+\sqrt5\right)\left(6+2\sqrt5\right)}{7+3\sqrt5}=\frac{35+15\sqrt5}{7+3\sqrt5}=5$	5= 1000,1001

Висновок. Ми ознайомились із унікальною системою числення з ірраціональною основою. Як відомо, історично першими виникли натуральні числа, за ними — раціональні числа, як відношення натуральних, і потім, після відкриття «несумірних відрізків», — ірраціональні числа, які не можуть бути подані у вигляді відношення двох натуральних чисел. Але в такій системі числення все виходить мовби навпаки. Вихідним числом системи числення, її основою є класична золота пропорція

$$\varphi=\frac{1+\sqrt5}{2},$$

що випливає з геометричних співвідношень. А потім із цього числа, згідно з позиційним принципом, можуть бути сконструйовані всі дійсні числа (включаючи натуральні). Тобто можна сказати: «Усе є золота пропорція»!

Література

1. *Боднар О. Я.* Золотий переріз і неевклідова геометрія в науці та мистецтві. — Львів : Українські технології, 2005.
2. *Коробко В. І., Примак Г. М.* Золота пропорція і людина. — Ставрополь : Кавказька бібліотека, 1992.
3. *Стахов О. П.* Доповідь на пленарному засіданні міжнародної конференції «Проблеми гармонії, симетрії і Золотого перерізу в природі, науці та мистецтві». — Вінниця : Тов. ІТІ, 2003.
4. *Шевелев И. Ш.* Золотое сечение: Три взгляда на природу гармонии. — М. : Стройиздат, 1990.
5. http://dk-alterego.livejournal.com/18651.html
6. http://www.obretenie.info/author/stahov.htm
7. http://golden-museum.com

Далі буде.

ВЕКТОРНІ СУМИ, ЩО ВИЗНАЧАЮТЬ РІВНОСТОРОННІЙ ТРИКУТНИК

Г. Філіпповський, О. Карлюченко, м. Київ

На сторінках нашого журналу ми вже пропонували фрагменти книги «Радість співпраці», що незабаром вийде в серії «Бібліотека журналу „Математика в школах України"». Продовжуємо ознайомлювати читачів із деякими розділами цієї книги. Сподіваємось, що задачі, наведені в статті, будуть цікавими для дев'ятикласників, які захоплюються математикою і бажають поглибити знання і вдосконалити вміння розв'язувати задачі з теми «Вектори на площині» і не тільки з цієї теми.

Назва статті обумовлена тим, що під час виконання певних векторних рівностей трикутник ABC є рівностороннім. Майже всі наведені задачі мають олімпіадний рівень. Вони викликають позитивні емоції, неабиякий інтерес, показують необхідність у досконалому володінні мовою векторів.

Деякі із запропонованих задач мають оригінальне розв'язання, а задачі з 5-ої по 7-му є авторськими.

СЕРІЯ 1

П'ять задач цієї серії мають такий загальний вигляд. Чевіани* AQ_1, BQ_2 і CQ_3 перетинаються в одній точці Q всередині трикутника ABC, причому

$$\overrightarrow{AQ_1}+\overrightarrow{BQ_2}+\overrightarrow{CQ_3}=\vec{0}.$$

Доведіть або спростуйте, що трикутник ABC є рівностороннім.

Задача 1

У трикутнику ABC проведені висоти AH_1, BH_2, CH_3. Відомо, що

$$\overrightarrow{AH_1}+\overrightarrow{BH_2}+\overrightarrow{CH_3}=\vec{0}.$$

Чи є трикутник ABC рівностороннім?

* Чевіана — будь-який відрізок, що сполучає вершину трикутника та одну з точок на протилежній їй стороні. Окремими випадками є медіана, бісектриса і висота трикутника. Назва походить від імені італійського інженера Джованні Чеви (1647–1734). (Прим. ред.)

Розв'язання

Нехай висоти трикутника ABC перетинаються в точці H (*рис. 1*).

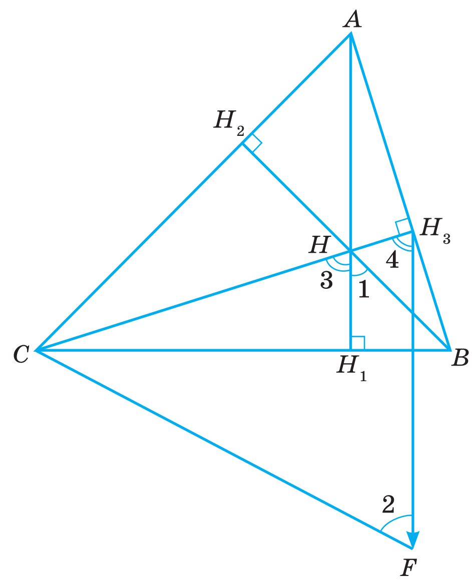


Рис. 1

Проведемо $\overrightarrow{H_3F}=\overrightarrow{AH_1}$ і сполучимо точки F і C.

$$\overrightarrow{H_3F}+\overrightarrow{FC}+\overrightarrow{CH}=\vec{0}$$

(замкнений контур) і $\overrightarrow{H_3F}+\overrightarrow{BH_2}+\overrightarrow{CH_3}=\vec{0}$ (за умовою). Отже, $\overrightarrow{FC}=\overrightarrow{BH_2}$. Тоді $\angle 2=\angle 1=\angle C$, оскільки $\angle HBH_1=90^\circ-\angle C$.

Аналогічно $\angle 4=\angle 3=\angle B$. Тоді

$$\Delta CH_3F\sim\Delta ABC \text{ і } \frac{a}{h_a}=\frac{b}{h_b} \text{ або } ah_b=bh_a. \quad (1)$$

Але

$$ah_a=bh_b=2S. \quad (2)$$

Помноживши ліві і праві частини рівностей (1) і (2), дістанемо $a^2h_ah_b = b^2h_ah_b$, звідки $a = b$. Аналогічно покажемо, що $b = c$, тобто ΔABC — рівносторонній.

Задача 2

У трикутнику ABC проведені бісектриси AL_1, BL_2, CL_3. Відомо, що

$$\overrightarrow{AL_1} + \overrightarrow{BL_2} + \overrightarrow{CL_3} = \vec{0}.$$

Чи є трикутник ABC рівностороннім?

Розв'язання

Нехай I — інцентр (точка перетину бісектрис) трикутника ABC (*рис. 2*).

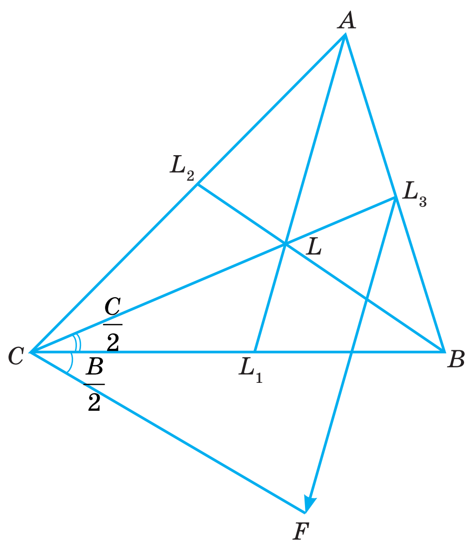


Рис. 2

Проведемо $\overrightarrow{L_3F} = \overrightarrow{AL_1}$. Як і в задачі 1, нескладно показати, що $\overrightarrow{FC} = \overrightarrow{BL_2}$.

Оскільки $\angle L_3CB = \dfrac{\angle C}{2}$, а

$$\angle BCF = \angle L_2BC = \frac{\angle B}{2}$$

як внутрішні різносторонні, то

$$\angle L_3CF = \frac{\angle B + \angle C}{2}.$$

Аналогічно

$$\angle CL_3F = \frac{\angle A + \angle C}{2} \quad \text{і} \quad \angle CFL_3 = \frac{\angle A + \angle B}{2}.$$

Застосуємо теорему синусів для трикутника CL_3F:

$$\frac{l_a}{\sin\dfrac{\angle B + \angle C}{2}} = \frac{l_b}{\sin\dfrac{\angle A + \angle C}{2}}$$

або

$$\frac{l_a}{\cos\dfrac{\angle A}{2}} = \frac{l_b}{\cos\dfrac{\angle B}{2}}.$$

За формулою бісектриси

$$l_a = \frac{2bc}{b+c}\cdot\cos\frac{\angle A}{2}, \quad l_b = \frac{2ac}{a+c}\cdot\cos\frac{\angle B}{2}.$$

Тоді маємо

$$\frac{2bc}{b+c} = \frac{2ac}{a+c} \quad \text{або} \quad abc + bc^2 = abc + ac^2,$$

звідки

$$c^2(a-b) = 0 \quad \text{і} \quad a = b.$$

Аналогічно $b = c$. Тобто ΔABC — рівносторонній.

Задача 3

У трикутнику ABC проведені медіани AM_1, BM_2, CM_3. Відомо, що

$$\overrightarrow{AM_1} + \overrightarrow{BM_2} + \overrightarrow{CM_3} = \vec{0}.$$

Чи є трикутник ABC рівностороннім?

Розв'язання

Нехай M — центроїд (точка перетину медіан) трикутника ABC. Оскільки відома векторна формула

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$$

(доведіть!) і

$$\overrightarrow{AM_1} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{MA}, \quad \overrightarrow{BM_2} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{MB}, \quad \overrightarrow{CM_3} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{MC},$$

то і сума векторів $\overrightarrow{AM_1}$, $\overrightarrow{BM_2}$, $\overrightarrow{CM_3}$ дорівнює нуль-вектору (замкнений контур). Отже, у будь-якому трикутнику ABC виконується векторна рівність

$$\overrightarrow{AM_1} + \overrightarrow{BM_2} + \overrightarrow{CM_3} = \vec{0}.$$

Задача 4

Вписане в трикутник ABC коло дотикається до його сторін BC, AC і AB у точках K_1, K_2, K_3 відповідно, причому

$$\overrightarrow{AK_1} + \overrightarrow{BK_2} + \overrightarrow{CK_3} = \vec{0}.$$

Доведіть, що трикутник ABC — рівносторонній.

Розв'язання

Прямі AK_1, BK_2, CK_3 перетинаються в одній точці (так званій точці Жергона).

Нехай

$$AK_2 = AK_3 = x, \quad BK_1 = BK_3 = y, \quad CK_1 = CK_2 = z$$

(*рис. 3*).

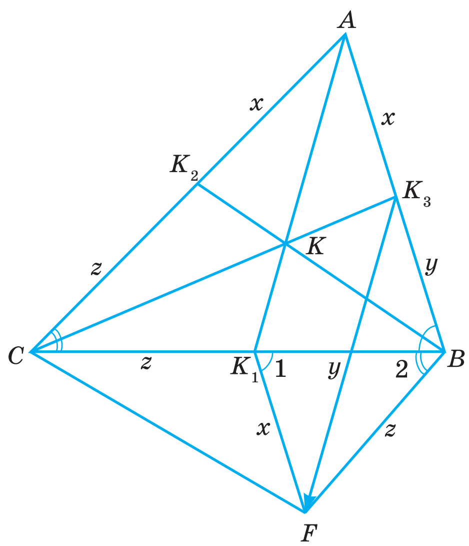


Рис. 3

Проведемо $\overrightarrow{K_3F} = \overrightarrow{AK_1}$. Тоді $\overrightarrow{FC} = \overrightarrow{BK_2}$. Оскільки AK_3FK_1 — паралелограм, то

$$K_1F = AK_3 = x.$$

Аналогічно BK_2CF — паралелограм і $FB = CK_2 = z$. Оскільки $\angle 1 = \angle ABC$ і $\angle 2 = \angle ACB$ (внутрішні різносторонні), то $\Delta FK_1B \sim \Delta ABC$. Тоді

$$\frac{a}{y} = \frac{b}{z} = \frac{c}{x}, \text{ або } \frac{z+y}{y} = \frac{z+x}{z} = \frac{x+y}{x},$$

або

$$\frac{z}{y} = \frac{x}{z} = \frac{y}{x} = k.$$

Отже, $z = ky$, $x = kz = k^2y$ і $y = kx = k^3y$. Звідси $k^3 = 1$, $k = 1$. Тобто $x = y = z$. А це означає, що $a = b = c$ і ΔABC — рівносторонній.

Задача 5

Зовні вписані кола дотикаються до сторін BC, AC і AB трикутника ABC відповідно в точках T_1, T_2 і T_3 (*рис. 4*), причому

$$\overrightarrow{AT_1} + \overrightarrow{BT_2} + \overrightarrow{CT_3} = \vec{0}.$$

Доведіть, що трикутник ABC — рівносторонній.

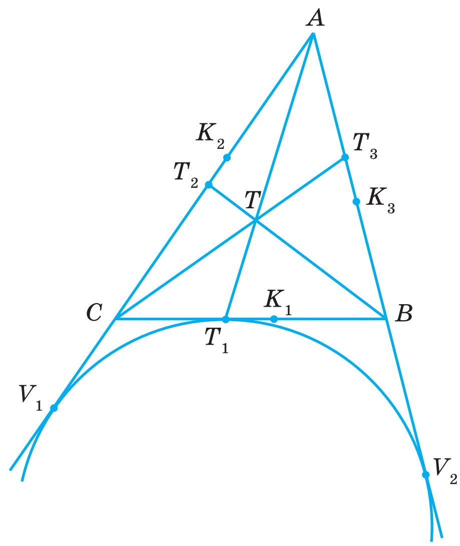


Рис. 4

Розв'язання

Прямі AT_1, BT_2 і CT_3 перетинаються в точці T (так званій точці Нагеля). Доведемо, що $CT_1 = p - b$. Справді, $AV_1 = AV_2 = p$ (доведіть!). Тоді $CV_1 = p - AC = p - b$. Але $CT_1 = CV_1$ (дотичні, проведені з однієї точки), отже, $CT_1 = p - b$.

Аналогічно $AT_2 = p - c$ і $BT_3 = p - a$. Крім того,

$$AK_2 = AK_3 = p - a, \quad BK_1 = BK_3 = p - b,$$

$$CK_1 = CK_2 = p - c$$

(відомий факт геометрії трикутника).

Отже,

$$CT_1 = BK_1 = p - b, \quad AT_2 = CK_2 = p - c,$$
$$BT_3 = AK_3 = p - a.$$

За правилом додавання векторів:

$$\overrightarrow{AT_1} + \overrightarrow{T_1C} = \overrightarrow{AC}, \quad \overrightarrow{BT_2} + \overrightarrow{T_2A} = \overrightarrow{BA}, \quad \overrightarrow{CT_3} + \overrightarrow{T_3B} = \overrightarrow{CB}.$$

Оскільки $\overrightarrow{AT_1} + \overrightarrow{BT_2} + \overrightarrow{CT_3} = \vec{0}$ (за умовою) і $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB} = -\left(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) = \vec{0}$ (замкнений контур), то $\overrightarrow{T_1C} + \overrightarrow{T_2A} + \overrightarrow{T_3B} = 0$.

Але $\overrightarrow{T_1C} = \overrightarrow{BK_1}$, $\overrightarrow{T_2A} = \overrightarrow{CK_2}$ і $\overrightarrow{T_3B} = \overrightarrow{AK_3}$, тобто

$$\overrightarrow{BK_1}+\overrightarrow{CK_2}+\overrightarrow{AK_3}=\vec{0},$$

або

$$\left(\overrightarrow{AK_1}-\overrightarrow{AB}\right)+\left(\overrightarrow{BK_2}-\overrightarrow{BC}\right)+\left(\overrightarrow{CK_3}-\overrightarrow{CA}\right)=\vec{0},$$

або

$$\overrightarrow{AK_1}+\overrightarrow{BK_2}+\overrightarrow{CK_3}-\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}\right)=\vec{0}.$$

Оскільки $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\vec{0}$ (замкнений контур), то $\overrightarrow{AK_1}+\overrightarrow{BK_2}+\overrightarrow{CK_3}=\vec{0}$. А це умова задачі 4. Отже, ΔABC — рівносторонній.

СЕРІЯ 2

П'ять задач цієї серії мають такий загальний вигляд. Чевіани* AQ_1, BQ_2 і CQ_3 перетинаються в одній точці Q всередині трикутника ABC. Вони продовжені до перетину з колом, описаним навколо трикутника, у точках Q_1', Q_2', Q_3', причому $\overrightarrow{AQ_1'}+\overrightarrow{BQ_2'}+\overrightarrow{CQ_3'}=\vec{0}$. Визначте вид трикутника ABC.

Задача 6

Висоти AH_1, BH_2, CH_3 трикутника ABC продовжені до перетину з колом, описаним навколо трикутника, у точках N_1, N_2, N_3 відповідно, причому $\overrightarrow{AN_1}+\overrightarrow{BN_2}+\overrightarrow{CN_3}=\vec{0}$. Чи є трикутник ABC рівностороннім?

Розв'язання

Нехай M — центроїд трикутника ABC (*рис. 5*).

Очевидно, що

$$\overrightarrow{AN_1}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MN_1},\quad \overrightarrow{BN_2}=\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{MN_2},$$

$$\overrightarrow{CN_3}=\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{MN_3}.$$

Оскільки

$$\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CM}=-\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)=\vec{0},$$

а також $\overrightarrow{AN_1}+\overrightarrow{BN_2}+\overrightarrow{CN_3}=\vec{0}$ (за умовою), то

$$\overrightarrow{MN_1}+\overrightarrow{MN_2}+\overrightarrow{MN_3}=\vec{0}$$

і M — центроїд трикутника $N_1N_2N_3$. (Це випливає з векторної формули центроїда: для будь-якої точки X виконується рівність

$$\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XB}+\overrightarrow{XC}=3\overrightarrow{XM} \text{ і } \overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XB}+\overrightarrow{XC}=\vec{0}$$

у тому випадку, якщо $X\equiv M$).

Отже, у трикутниках ABC і $N_1N_2N_3$ збігаються точки O (центр описаного кола) і M. Тоді, ураховуючи що точки O, M, H належать одній прямій, причому $2OM=MH$ (пряма Ейлера), точки H (ортоцентри цих трикутників) також збігаються. А точка H є ще й точкою перетину бісектрис трикутника $N_1N_2N_3$. (Справді, наприклад,

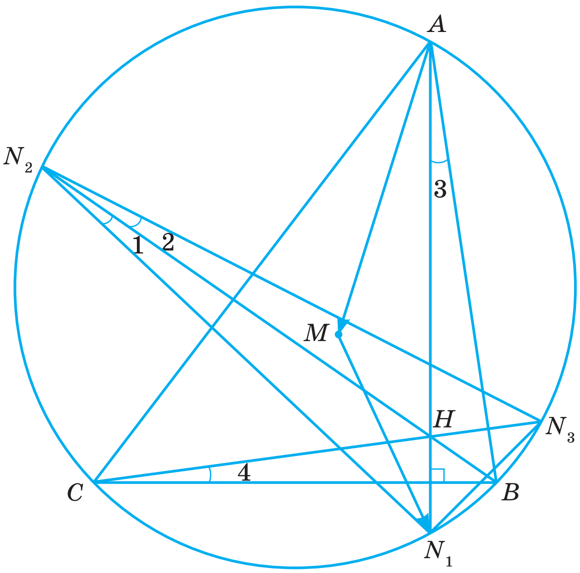


Рис. 5

$$\angle 1=\angle 2=90^\circ-\angle B,$$

оскільки вони вписані і спираються на ті самі дуги, що й $\angle 3$ і $\angle 4$.)

Отже, трикутник $N_1N_2N_3$ — рівносторонній і в ньому $M\equiv H$. Оскільки в трикутнику ABC точки M і H також є центроїдами і ортоцентрами, то і трикутник ABC є рівностороннім.

Задача 7

Бісектриси AL_1, AL_2, AL_3 трикутника ABC продовжені до перетину з колом, описаним навколо трикутника, у точках W_1, W_2, W_3 відповідно, причому $\overrightarrow{AW_1}+\overrightarrow{BW_2}+\overrightarrow{CW_3}=\vec{0}$. Визначте вид трикутника ABC.

Розв'язання

Сполучимо точки W_1, W_2, W_3 (*рис. 6*).

Тоді $\angle 1=\angle 2=\dfrac{\angle A}{2}$ (вписані).

$$\angle BIC=90^\circ+\frac{\angle A}{2}$$

(відомий факт геометрії трикутника). Суміжний із ним

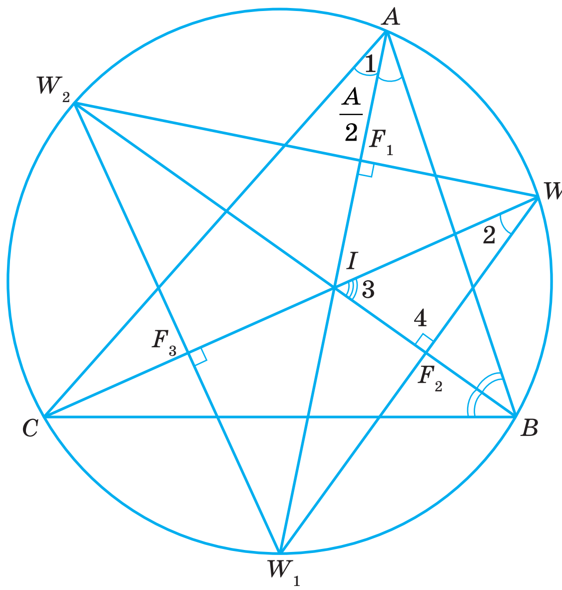


Рис. 6

$$\angle 3 = 90^\circ - \frac{\angle A}{2}.$$

Отже, у трикутнику IW_3F_2 $\angle 4 = 90^\circ$.

Аналогічно

$$\angle IF_1W_3 = \angle IF_3W_1 = 90^\circ.$$

Тому точка I є ортоцентром трикутника $W_1W_2W_3$, а вершини A, B, C виконують ролі точок N_1, N_2, N_3 задачі 6. Отже, умова

$$\overrightarrow{AW_1} + \overrightarrow{BW_2} + \overrightarrow{CW_3} = \vec{0} \text{ або } \overrightarrow{W_1A} + \overrightarrow{W_2B} + \overrightarrow{W_3C} = \vec{0}$$

рівносильна умові $\overrightarrow{AN_1} + \overrightarrow{BN_2} + \overrightarrow{CN_3} = \vec{0}$ із попередньої задачі. Оскільки в задачі 6 трикутник $N_1N_2N_3$ був рівностороннім, то і в цій задачі трикутник ABC є рівностороннім.

Задача 8

Точки D_1, D_2, D_3 є діаметрально протилежними відповідно вершинам A, B, C трикутника ABC, причому $\overrightarrow{AD_1} + \overrightarrow{BD_2} + \overrightarrow{CD_3} = \vec{0}$. Доведіть, що трикутник ABC — рівносторонній.

Розв'язання

Побудуємо $\overrightarrow{D_3F} = \overrightarrow{AD_1}$ (*рис. 7*).

Тоді нескладно показати, що $\overrightarrow{FC} = \overrightarrow{BD_2}$. Але

$$\left|\overrightarrow{AD_1}\right| = \left|\overrightarrow{BD_2}\right| = \left|\overrightarrow{CD_3}\right| = 2R,$$

тобто ΔCD_3F — рівносторонній і всі його кути дорівнюють по 60°.

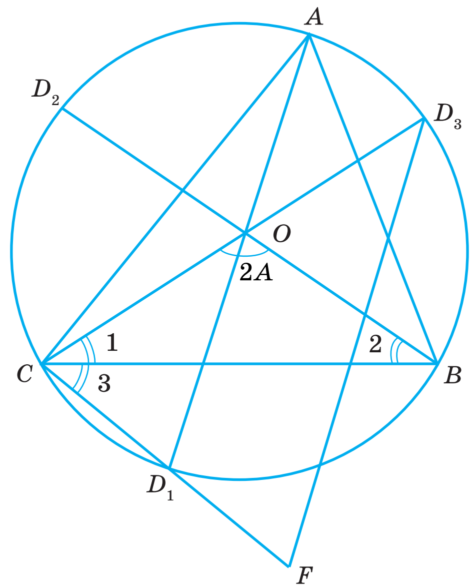


Рис. 7

Із трикутника BOC $\angle 1 = \angle 2 = 90^\circ - \angle A$. Але $\angle 3 = \angle 2$ як внутрішні різносторонні при паралельних прямих FC і BD_2. Отже,

$$\angle 1 + \angle 3 = 2(90^\circ - \angle A) = 180^\circ - 2\angle A = 60^\circ,$$

звідки $\angle A = 60^\circ$. Аналогічно

$$\angle B = \angle C = 60^\circ$$

і трикутник ABC є рівностороннім.

Задача 9

Медіани AM_1, BM_2, CM_3 трикутника ABC продовжені до перетину з колом, описаним навколо трикутника, у точках G_1, G_2, G_3 відповідно, причому $\overrightarrow{AG_1} + \overrightarrow{BG_2} + \overrightarrow{CG_3} = \vec{0}$. Визначте вид трикутника ABC.

Розв'язання

Згідно з умовою,

$$\left(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MG_1}\right) + \left(\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MG_2}\right) + \left(\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{MG_3}\right) = \vec{0}$$

(*рис. 8*).

Оскільки $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM} = \vec{0}$, то

$$\overrightarrow{MG_1} + \overrightarrow{MG_2} + \overrightarrow{MG_3} = \vec{0}.$$

Це означає, що точка M є центроїдом також трикутника $G_1G_2G_3$.

$$\Delta BMC \sim G_2MG_3$$

($\angle 1 = \angle 2$ і $\angle 3 = \angle 4$ як вписані, що спираються на одні й ті самі дуги). Отже, відповідні частини трикутників ABC і $G_1G_2G_3$ подібні, тому подібні й самі трикутники ABC і $G_1G_2G_3$. Подібні трикутники, вписані в одне коло, рівні. Отже,

$$\Delta ABC = \Delta G_1G_2G_3 \text{ і } AM = G_1M, \quad BM = G_2M.$$

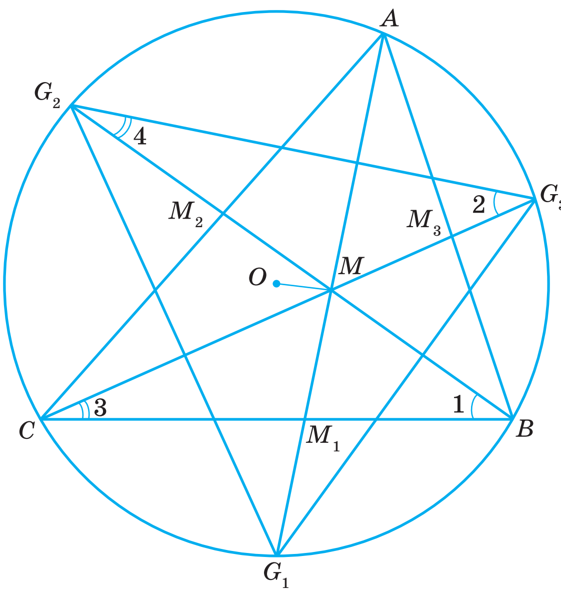


Рис. 8

Дістали, що відрізок OM (O — центр кола, описаного навколо трикутника ABC) ділить хорди AG_1 і BG_2 навпіл, тобто відрізок OM перпендикулярний до цих хорд. Оскільки AG_1 і BG_2 перетинаються в точці M, то така перпендикулярність можлива тільки за умови, коли $O \equiv M$. А це означає, що трикутник ABC — рівносторонній.

Узагальнимо розв'язання задач 1–5 у вигляді такої задачі.

Задача 10

Чевіани AQ_1, BQ_2, CQ_3 трикутника ABC перетинаються в точці Q, причому

$$\overrightarrow{AQ_1} + \overrightarrow{BQ_2} + \overrightarrow{CQ_3} = \vec{0}.$$

Доведіть, що точка Q збігається з центроїдом M трикутника ABC.

Розв'язання

За правилом «трикутника»

$\overrightarrow{CQ_1} = \overrightarrow{AQ_1} - \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AQ_2} = \overrightarrow{BQ_2} - \overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BQ_3} = \overrightarrow{CQ_3} - \overrightarrow{CB}$ (*рис. 9*).

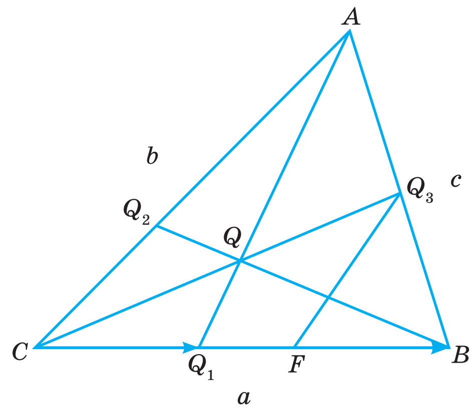


Рис. 9

Оскільки

$$\overrightarrow{AQ_1} + \overrightarrow{BQ_2} + \overrightarrow{CQ_3} = \vec{0}$$

за умовою і

$$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB} = -\left(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) = \vec{0}$$

(замкнений контур), то очевидно

$$\overrightarrow{CQ_1} + \overrightarrow{AQ_2} + \overrightarrow{BQ_3} = \vec{0}. \qquad (1)$$

Побудуємо $\overrightarrow{FB} = \overrightarrow{CQ_1}$. За правилом додавання векторів

$$\overrightarrow{FB} + \overrightarrow{BQ_3} = \overrightarrow{FQ_3}. \qquad (2)$$

Порівнявши рівності (1) і (2), дістанемо:

$$\overrightarrow{FQ_3} = -\overrightarrow{AQ_2} = \overrightarrow{Q_2A}.$$

Отже, $FQ_3 \parallel AC$ і $\Delta FQ_3B \sim \Delta CAB$.

Із подібності цих трикутників випливає:

$$\frac{c}{BQ_3} = \frac{a}{BF} = \frac{b}{FQ_3}.$$

Віднявши від кожної частини рівняння по одиниці і врахувавши, що $BF = CQ_1$, $FQ_3 = Q_2A$, дістанемо:

$$\frac{c - BQ_3}{BQ_3} = \frac{a - CQ_1}{CQ_1} = \frac{b - Q_2A}{Q_2A} \text{ або } \frac{AQ_3}{BQ_3} = \frac{BQ_1}{CQ_1} = \frac{CQ_2}{Q_2A}.$$

Але за теоремою Чеви

$$\frac{AQ_3}{BQ_3} \cdot \frac{BQ_1}{CQ_1} \cdot \frac{CQ_2}{Q_2A} = 1.$$

Отже,

$$\frac{AQ_3}{BQ_3} = \frac{BQ_1}{CQ_1} = \frac{CQ_2}{Q_2A} = 1$$

і точки Q_1, Q_2, Q_3 збігаються із серединами сторін BC, AC і AB відповідно, а $Q \equiv M$.

ГЕОМЕТРИЧНІ ГОЛОВОЛОМКИ ЯК ЗАСІБ ПІДВИЩЕННЯ ПІЗНАВАЛЬНОЇ АКТИВНОСТІ УЧНІВ, ФОРМУВАННЯ МАТЕМАТИЧНИХ ЗДІБНОСТЕЙ ТА РОЗВИТКУ КРЕАТИВНОГО МИСЛЕННЯ

Н. Ф. Козачук, м. Чернівці

Знання тільки тоді є справжніми знаннями,
коли вони здобуті напруженням власної думки,
а не пам'яттю.

Л. Толстой

Сьогодні показником якісної роботи вчителя є вміння учнів дискутувати, доводити власне твердження, володіти достатнім словниковим запасом, переносити свої знання, уміння і навички в нові ситуації, проявляти критичність і незалежність суджень, здатність фантазувати, бути допитливими, винахідливими, працювати з різними словниками та довідковою літературою, уміти висувати гіпотези, знаходити несподівані асоціації.

Формуванню цих умінь сприяє математика. Вона відточує розум дитини, розвиває гнучкість мислення, навчає логіці. Математичний розвиток дитини не зводиться тільки до того, щоб навчити її вимірювати величини і розв'язувати арифметичні завдання. Головне — створити умови для самостійного пошуку учнями розв'язання задач, а не пропонувати готові способи, зразки розв'язання для відтворення.

Для успішного засвоєння програми шкільного навчання дитині необхідно не тільки багато знати, а й послідовно і доказово мислити, здогадуватися, напружувати розум. Інтелектуальна діяльність, заснована на активному мисленні, пошуку способів дій має стати звичною для учнів.

Одним із засобів такого навчання є використання на уроках математики та в позакласній роботі геометричних головоломок.

У ході виконання завдань із головоломками діти вчаться планувати свої дії, обдумувати їх, здогадуватися в пошуках результату, проявляючи при цьому творчість. Ця робота активізує не тільки розумову діяльність дитини, але і розвиває якості, необхідні для професійної майстерності, у якій би сфері потім людина не працювала.

ЩО ТАКЕ ГЕОМЕТРИЧНІ ГОЛОВОЛОМКИ?

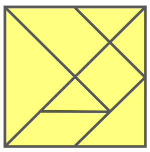
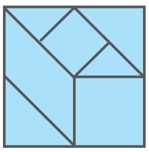
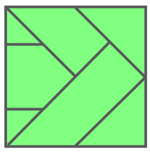
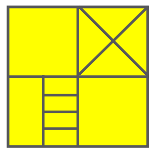
Геометричні головоломки — це невеликі, але складні вправи для розуму із розділу «Цікава математика» Це розрізані певним чином фігури. Основний принцип у таких головоломках полягає в тому, що з одних і тих самих деталей потрібно зібрати фігуру певної форми, тобто сконструювати на площині різноманітні предметні силуети. При цьому для виконання завдання повинні бути використані всі наявні деталі.

Слово «головоломка» походить від виразу «голову ламати», тобто щоб знайти розв'язання, потрібно добре подумати, застосувати логіку та кмітливість. Таким чином, задачі-головоломки геометричного характеру формують у дітей математичні уявлення, активізують думку, розвивають уяву, логічне і просторове мислення, увагу і зорову пам'ять, точність вимірювань, комбінаторні здібності, кмітливість, винахідливість, сенсорні здібності, уміння аналізувати, здогадуватися, а це необхідно кожній людині для життя, трудової діяльності.

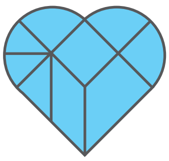
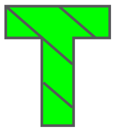
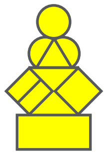
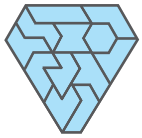
Існує багато класичних геометричних головоломок: «Танграм», «Квадрат Піфагора», «Пентаміно» («П'ять квадратів»), «Колумбове яйце», «Листочок», «Монгольська гра», «Магічний круг», «Т-подібна головоломка», «В'єтнамська гра», «Стомахіон» («Гра Архімеда»), «Гексатріон». Серед них є головоломки, яким понад 4 000 років, а є такі, що придумані порівняно недавно, але вже стали популярними серед дітей і дорослих.

Геометричні головоломки можна згрупувати за тим, яку фігуру розрізають для складання: квадрат, прямокутник, круг, овал тощо.

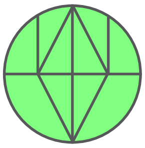
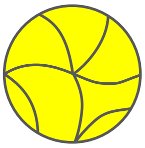
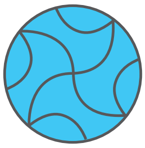
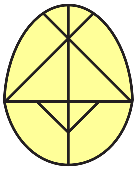
Квадрат

			
Танграм	*Головоломка Піфагара*	*Магічний квадрат*	*Монгольська гра*

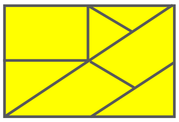
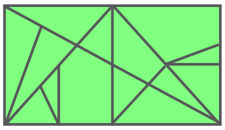
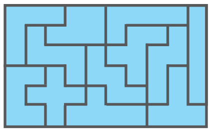
Фігури

			
Листок	*Т-подібна головоломка*	*Абрис*	*Гексатріон*

Круг або овал

			
Магічний круг	*В'єтнамська гра*	*Чудовий круг*	*Колумбове яйце*

Прямокутник

		
Сфінкс	*Стомахіон (Гра Архімеда)*	*Пентаміно*

Щоб навчити учнів розгадувати головоломки, потрібно діяти у кілька етапів. На першому етапі дії повинні бути спрямовані на навчання складати геометричні фігури (із двох трикутників скласти квадрат, прямокутник тощо). На другому етапі запропонувати складати фігури за зразком-підказкою. Третій етап — складання фігури за силуетом.

Звичайно, для розгадування і складання класичних геометричних головоломок потрібно багато часу. Як правило, учителі звертаються до цих задач у позакласних заходах, коли немає суворих обмежень у часі і темі заняття.

Крім класичних, існує чимало головоломок на підрахунок геометричних фігур, зображених на рисунках, на розрізання і складання геометричних фігур, на доведення теорем і формул тощо. Наведемо приклади таких задач.

ЗАДАЧІ НА ПІДРАХУНОК ГЕОМЕТРИЧНИХ ФІГУР

1. Скільки прямокутників зображено на рисунку 1?

Рис. 1

2. Скільки кутів зображено на рисунку 2?

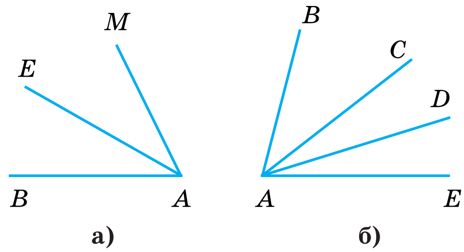


Рис. 2

3. Скільки квадратів зображено на рисунку 3?

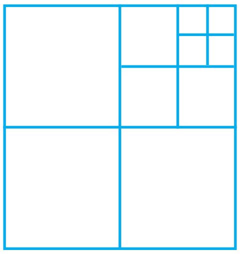


Рис. 3

4. Скільки трикутників зображено на рисунку 4?

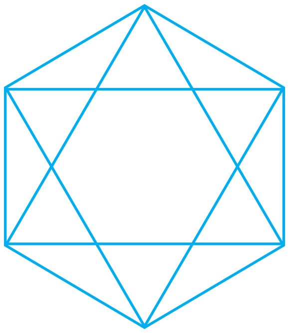
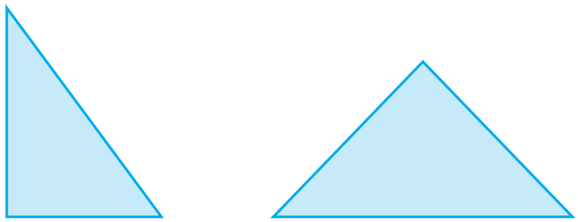


Рис. 4

ЗАДАЧІ НА РОЗРІЗАННЯ І СКЛАДАННЯ ГЕОМЕТРИЧНИХ ФІГУР

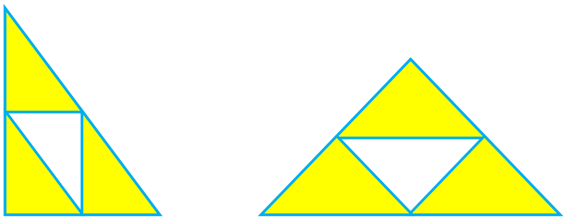
1. Розріжте трикутник, зображений на рисунку 1, на чотири рівні трикутники.



а) б)

Рис. 1

Відповіді. Див. рис. 2.



а) б)

Рис. 2

2. Розріжте фігуру, зображену на рисунку 3, на чотири рівні частини.

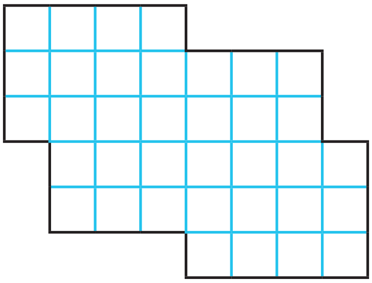


Рис. 3

Відповідь. Див. рис. 4.

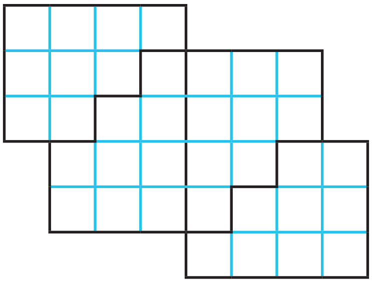


Рис. 4

3. Розріжте прямокутник, зображений на рисунку 5, на дві частини так, щоб із них можна було скласти квадрат.

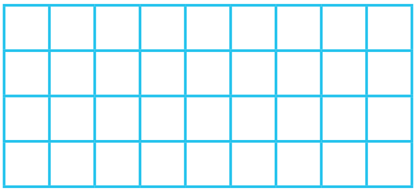


Рис. 5

Відповідь. Див. рис. 6.

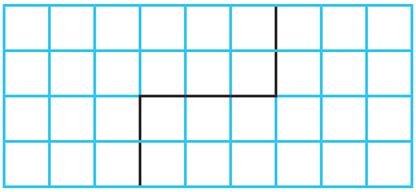


Рис. 6

4. Розріжте фігуру, зображену на рисунку 7 (центр дуги розміщений у вершині, позначеній жирною точкою), на три рівних частини.

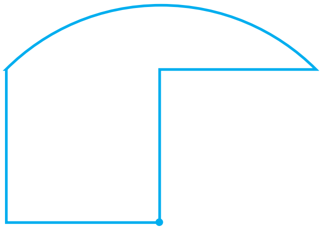


Рис. 7

Відповідь. Таку фігуру можна розрізати на скільки завгодно рівних частин, причому одним і тим самим способом (див. рис. 8).

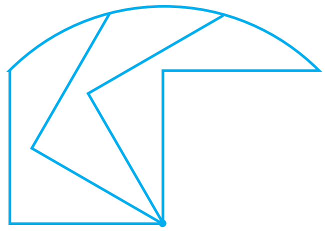
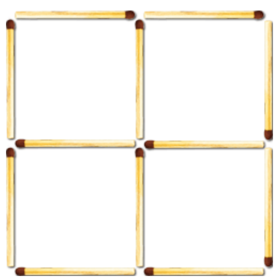


Рис. 8

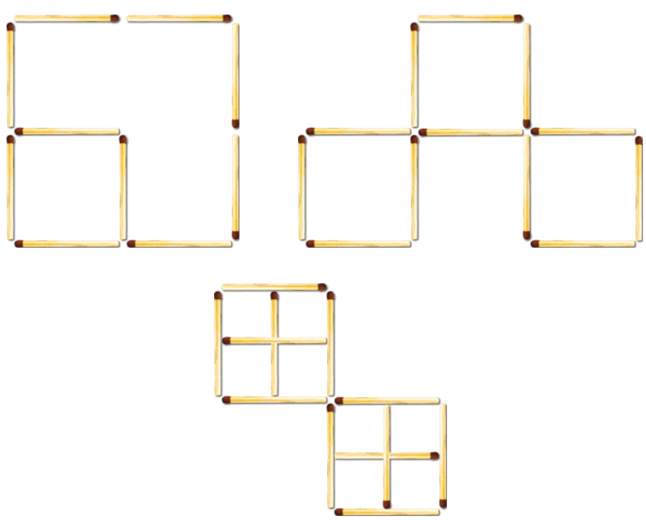
«СІРНИКОВА» ГЕОМЕТРІЯ ЯК ОДИН ІЗ ВИДІВ ГОЛОВОЛОМОК ГЕОМЕТРИЧНОГО ЗМІСТУ

Дванадцять сірників лежать так, як показано на рисунку.



1. Підрахуйте кількість утворених при цьому квадратів.
2. Заберіть два сірники так, щоб утворилося два нерівних квадрати.
3. Перекладіть три сірники так, щоб утворилося три рівних квадрати.
4. Перекладіть чотири сірники так, щоб утворилося 10 квадратів.

Відповіді до завдань 2–4



ЗАДАЧІ НА ЗОБРАЖЕННЯ ФІГУР

1. Розташуйте 6 кружечків у 3 ряди так, щоб у кожному ряду було по 3 кружечки.
Відповідь. Кружечки потрібно розташувати у формі трикутника (*рис. 1*).

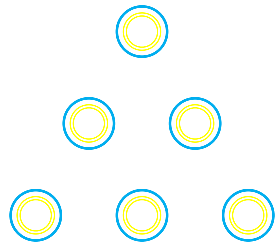


Рис. 1

2. Розділіть зображення Місяця (*рис. 2*) на 6 частин, провівши лише 2 прямі лінії.

Рис. 2

Відповідь. Див. рис. 3.

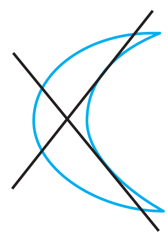


Рис. 3

3. Нарисуйте замкнену ламану, що складається з шести ланок, кожна ланка якої рівно один раз перетинається з іншою ланкою цієї ламаної.
Відповідь. Див. рис. 4.

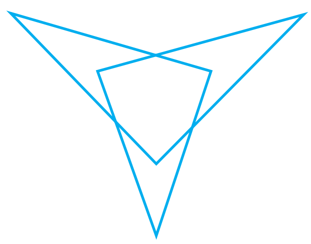


Рис. 4

ГЕОМЕТРИЧНІ ДОВЕДЕННЯ ФОРМУЛ І ТЕОРЕМ

Для більш наочного доведення наведених формул, бажано розрізати відповідні фігури на частини і запропонувати учням скласти їх так, щоб вони ілюстрували доведення.

1. Доведення формул скороченого множення.

1) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ (*рис. 1*)

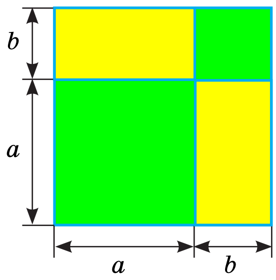


Рис. 1

2) $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$ (*рис. 2*).

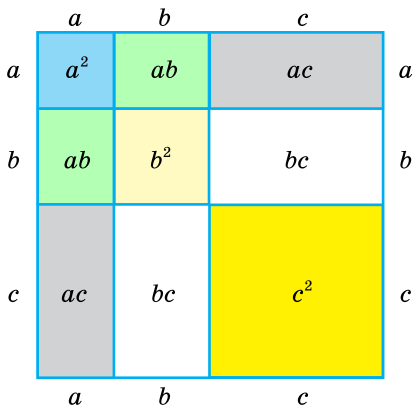


Рис. 2

2. Доведення формули площі трапеції.

1) «Класичне» доведення формули площі трапеції:

$$S_{ABCD} = S_{ABN} = \frac{1}{2}AN \cdot BH = \frac{1}{2}(AD + BC) \cdot BH$$

(*рис. 3*).

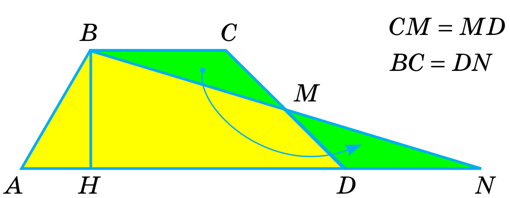


Рис. 3

2) Доведення формули площі трапеції шляхом розрізання трапеції на два трикутники: $S_{ABCD} = S_{ABD} + S_{BCD}$ (*рис. 4*).

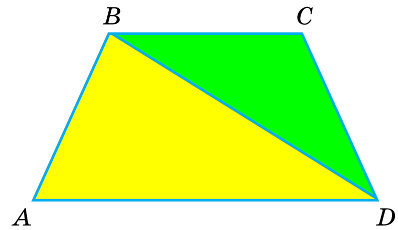


Рис. 4

3) Доведення формули площі трапеції шляхом розрізання трапеції на паралелограм і трикутник: $S_{ABCD} = S_{ABCM} + S_{CMD}$ (*рис. 5*).

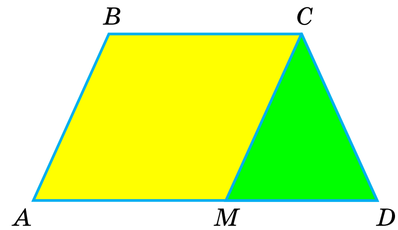


Рис. 5

4) Доведення формули площі трапеції шляхом розрізання трапеції на прямокутник і два трикутники: $S_{ABCD} = S_{ABH} + S_{HBCE} + S_{ECD}$ (*рис. 6*).

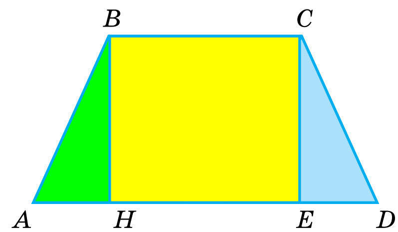
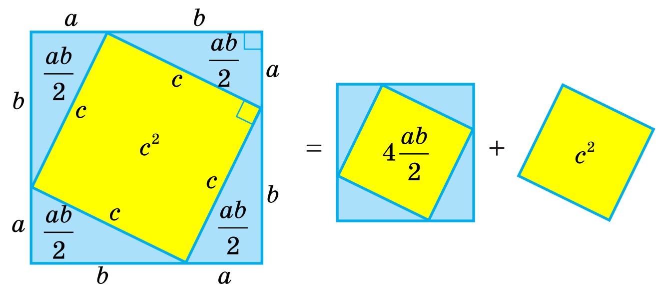


Рис. 6

3. Доведення теореми Піфагора



$$(a+b)^2 = 2ab + c^2,$$

$$a^2 + \cancel{2ab} + b^2 = \cancel{2ab} + c^2,$$

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

ГЕОМЕТРИЧНІ ГОЛОВОЛОМКИ ПРАКТИЧНОГО ЗМІСТУ

1. На площині розташовано 11 шестерень, сполучених одна з одною, як показано на рисунку 1. Чи можуть усі шестерні обертатися одночасно?

Рис. 1

Відповідь. Ні. Припустимо, що перша шестерня обертається за годинниковою стрілкою. Тоді друга має обертатися проти годинникової стрілки. Зрозуміло, що всі «непарні» шестерні мають обертатися за годинниковою стрілкою, а «парні» — проти. Тоді перша і одинадцята шестерні обидві обертаються за годинниковою стрілкою, що неможливо.

2. Навколо прямокутного поля викопаний рів, ширина якого повсюди однакова (див. рис. 2). Як за допомогою двох дошок, ширина кожної з яких точно дорівнює ширині рову, облаштувати перехід через цей рів?

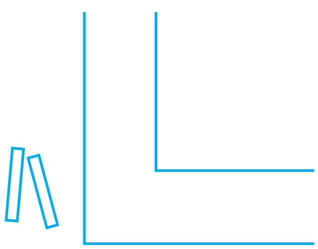


Рис. 2

Відповідь. Дошки потрібно розташувати так, як показано на рисунку 3.

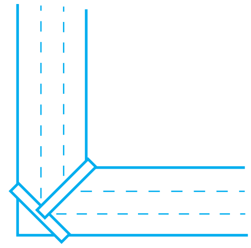


Рис. 3

3. На рисунку 4 зображено план яблуневого саду (яблуні позначено точками). Садівник обробив усі яблуні підряд. Розпочав він із клітинки, позначеної зірочкою, і обійшов одну за одною всі клітинки: і ті, де ростуть яблуні, і вільні, жодного разу не повертаючись на пройдену клітинку. За діагоналлю він не ходив і на заштрихованих клітинках не був, оскільки там розміщені будівлі. Закінчивши обхід, садівник опинився на тій клітинці, із якої почав свій шлях. Відновіть маршрут садівника.

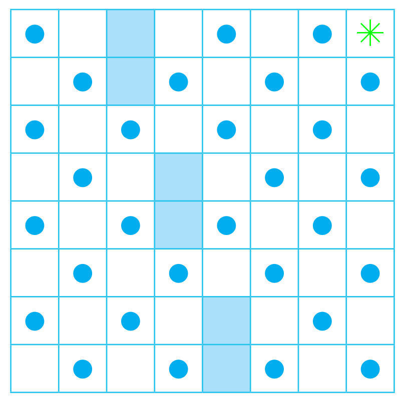


Рис. 4

Відповідь. Один із можливих маршрутів садівника показано на рисунку 5.

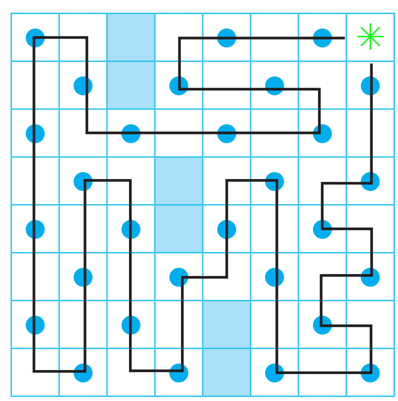


Рис. 5

4. У однієї господині був прямокутний килимок розміром 120 см × 90 см. Два протилежних його кути обтріпалися і їх довелося відрізати. (На рисунку 6 ці трикутні шматки заштриховані.) Але господині хотілося мати килимок прямокутної форми. Вона доручила майстру розрізати килимок на частини так, щоб із них можна було зшити прямокутник, звичайно, не втративши ні клаптика тканини. Майстер виконав бажання господині. Як йому вдалося це зробити?

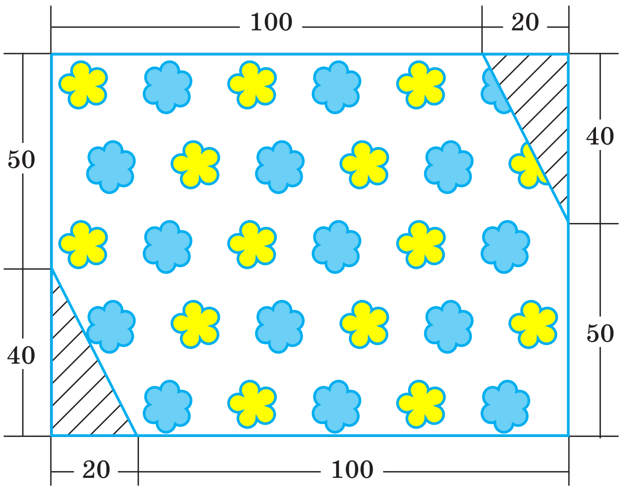


Рис. 6

Відповідь. Розв'язання задачі показано на рисунку 7.

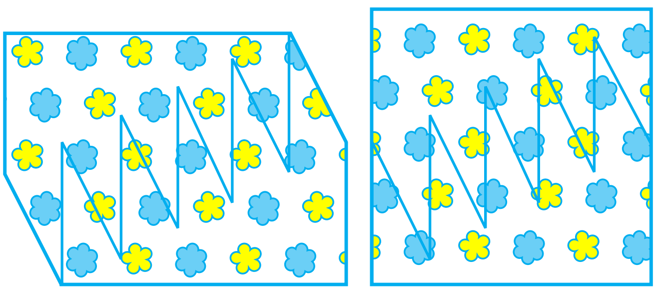


Рис. 7

Якщо верхню зубчасту частину витягнути з нижньої і потім знову вставити її між зубцями нижньої частини, здвинувши на один зубець праворуч, то дістанемо прямокутник і навіть квадрат. Щоправда, не кожний візерунок, зображений на килимку, після такої операції збереже свою цілісність.

5. Як можна розрізати плоский круглий торт на 8 рівних частин лише трьома прямолінійними розрізами ножа? При цьому перекладати куски торта не можна.
Відповідь. Див. рис. 8.

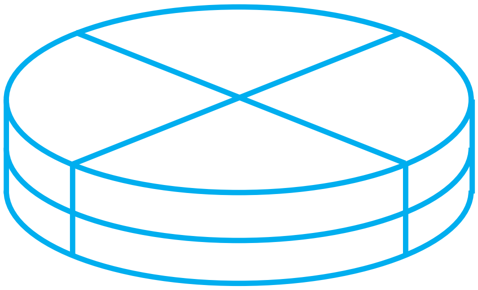


Рис. 8

***

Математика сприяє розвитку особливого виду пам'яті, спрямованої на узагальнення, створення логічних схем, формуванню здатності до просторових уявлень.

Творчі здібності, як і решта здібностей людини, вимагають постійного тренування. Завдання вчителя — активізувати здібності своїх учнів, виховувати в них сміливість думки і впевненість у тому, що вони розв'яжуть кожну задачу, у тому числі і творчого характеру.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Бурачевская О. В.* Геометрические игры-головоломки как средство развития пространственных функций у детей с нарушением речевого развития // Вопросы дошкольной педагогики. — 2016. — № 2. — С. 61–63.
2. *Чувасова Ю.* Розвиток природних обдарувань та творчих здібностей дітей // Психолог. — 2007. — № 47. — С. 10–16.
3. *Кобзєва Л. О.* Розвиток творчих здібностей учнів на уроках математики // Таврійський вісник освіти. — 2012.— № 3 (39).
4. http://smart-kids.su/golovolomki/geometria
5. http://svitppt.com.ua/algebra/ponyattya-proformuli-skorochenogo-mnozhennya.html
6. http://movaformul.blogspot.com/
7. http://shkola.ostriv.in.ua/publication/code-9c2ba74814d8/list-af5f8cb326

МАТЕМАТИКА НА БУДІВНИЦТВІ

Екскурсія для учнів 9 класу

М. П. Коваль, с. Нова Гребля, Каминівський р-н, Вінницька обл.

Мета: повторити означення прикладної задачі, математичної моделі задачі; формувати вміння застосовувати набуті знання на практиці; ознайомити учнів із професіями, пов'язаними з будівництвом, з технікою та інструментами, які використовують на будівництві, з будівельними матеріалами; виховувати повагу до праці, шанобливе ставлення до людей робочих професій.

Хід екскурсії

I. ОРГАНІЗАЦІЙНИЙ ЕТАП

Учитель оголошує тему і мету екскурсії, проводить інструктаж із техніки безпеки, роз'яснює правила поведінки на об'єкті.

II. ВІДВІДУВАННЯ ОБ'ЄКТА. РОЗПОВІДЬ БУДІВЕЛЬНИКА ПРО СПОРУДЖЕННЯ БУДИНКУ

Перш ніж побудувати будинок, необхідно підібрати місце для будівництва. Після цього за допомогою землерийних машин (бульдозерів, грейдерів, скреперів) проводять планування поверхні будівельного майданчика, проривають траншеї для укладання в них зовнішніх мереж каналізації, водопроводу, газу, електрики і телефону. Архітектори розробляють креслення майбутнього будинку.

Потім екскаватор риє котловани і траншеї — під підвальні приміщення і фундаменти. Якщо ґрунт слабкий, будівлю встановлюють на залізобетонні палі, які забивають із допомогою сваєбойної машини — копра. У траншеї укладають збірні фундаментні блоки і зводять стіни підвалів. На стіни підвалів укладають залізобетонні плити перекриттів. У цій роботі допомагає підйомний кран. Керує цією машиною кранівник, а вантаж готують для підйому стропальники. Зварювальники скріплюють між собою блоки і панелі, зварюють арматуру для бетонних робіт. По закінченні підземних будівельних робіт переходять до зведення наземної частини будівлі. Залежно від типу будівлі, встановлюють великі блоки або панелі зовнішніх і внутрішніх стін, перегородки, віконні та дверні блоки, укладають плити або панелі перекриттів, збірні сходові марші, дах. Будівлі також можуть зводити з цегли чи іншого будівельного матеріалу.

Поряд із загальними будівельними роботами ведуть спеціальні роботи з улаштування та монтажу мережі водопроводу і каналізації, системи опалення, монтують газопроводи, прокладають лінії електроосвітлення, радіо, телефону.

Завершальний етап будівництва — це оздоблювальні роботи: штукатурні, малярні, плиточні, скляні, шпалерні, пристрій підлоги та її обробка.

Усі трудомісткі види робіт на будівництві механізовано. Операції з підйому збірних будівельних конструкцій здійснюють за допомогою баштових і автомобільних кранів та інших підіймальних машин і механізмів. Більшість інших будівельних робіт також механізовано. Таким чином, технологія будівельного виробництва складається з низки виробничих процесів. До них належать: земляні, бурові, підривні, пальові, кам'яні, дерев'яні, бетонні і залізобетонні роботи, монтаж будівельних конструкцій, покрівельні, гідроізоляційні, теплоізоляційні, оздоблювальні роботи.

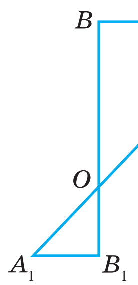
III. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Задачі пропонує виконроб (скорочення від «виконавець робіт» — посада керівника середньої ланки на будівництві).

Задача 1

В'їзд на будівництво перекриває шлагбаум, коротке плече якого дорівнює 1,5 м, а довге — 4,5 м. Для того щоб машина могла заїхати на територію будівництва, довге плече потрібно підняти на висоту 2,25 м. На яку висоту потрібно для цього опустити коротке плече?

Розв'язання



Нехай OA — довге плече шлагбаума, OA_1 — коротке плече шлагбаума. Тоді за умовою

$$OA = 4{,}5 \text{ м}, \ OA_1 = 1{,}5 \text{ м}, \ OB = 2{,}25 \text{ м}.$$

Оскільки $\Delta AOB \sim \Delta A_1OB_1$, то

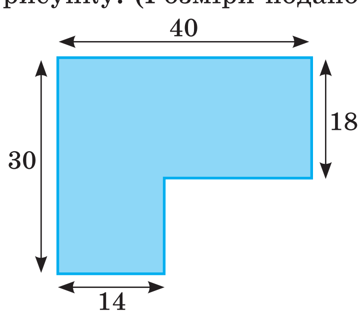
$$\frac{AO}{A_1O} = \frac{OB}{OB_1},$$

тобто $\frac{4{,}5}{1{,}5} = \frac{2{,}25}{OB_1}$, звідки $OB_1 = 0{,}75$.

Відповідь. 0,75 м.

Задача 2

Будинок разом з прибудинковою територією займає площу 2960 м². Скільки відсотків площі виділено під будинок? План будинку дивись на рисунку. (Розміри подано в метрах).



Розв'язання

Згідно із планом, площа будинку дорівнює

$$30 \cdot 40 - 12 \cdot 26 = 1200 - 312 = 888 \ (\text{м}^2).$$

Тоді

$$\frac{888}{2960} \cdot 100\% = 30\%.$$

Відповідь. 30 %.

Задача 3

План будинку зображено на рисунку (див. задачу 2). Під будинком потрібно викопати котлован завглибшки 2,5 м. Для вивезення вийнятої з котловану землі виділили 10 вантажівок, у кузов кожної з яких поміщається 6 м³ землі. Скільки рейсів повинна зробити кожна вантажівка?

Розв'язання

Площа будинку дорівнює 888 м². Тоді об'єм котловану дорівнює

$$888 \cdot 2{,}5 = 2220 \ (\text{м}^3).$$

10 вантажівок за один рейс можуть перевести

$$10 \cdot 6 = 60 \ (\text{м}^3) \text{ землі.}$$

Тоді для того, щоб перевести 2220 м³ землі, їм потрібно зробити

$$2220 : 60 = 37 \ (\text{рейсів}).$$

Відповідь. 37 рейсів.

Задача 4

Для виготовлення бетону на 1 частину цементу беруть 3 частини піску і 4 частини щебеня. Скільки кубічних метрів кожного з цих будівельних матеріалів потрібно для виготовлення 192 кубометрів бетону?

Розв'язання

Нехай коефіцієнт пропорційності дорівнює x. Тоді

$$x + 3x + 4x = 192, \quad 8x = 192, \quad x = 24.$$

Отже, цементу потрібно 24 м³, піску —

$$3 \cdot 24 = 72 \ (\text{м}^3),$$

щебеня — $4 \cdot 24 = 96$ (м³).

Відповідь. 24 м³ цементу, 72 м³ піску, 96 м³ щебеня.

Задача 5

У кузов вантажівки поміщається 12 м³ щебеня. Скільки пального потрібно, щоб привезти на будівництво 96 м³ щебеня, якщо на один рейс потрібно 0,8 л пального?

Розв'язання

Для того щоб перевезти 96 м³ щебеня, потрібно зробити $96 : 12 = 8$ (рейсів). Отже, потрібно $8 \cdot 0{,}8 = 6{,}4$ (л) пального.

Відповідь. 6,4 л.

Задача 6

На відстані 144 км від будівництва водій цементовоза зрозумів, що якщо він буде рухатись зі швидкістю 72 км/год, то запізниться до початку зміни на 12 хв. На скільки водію потрібно збільшити швидкість, щоб привести цемент на будівництво вчасно?

Розв'язання

Нехай водію потрібно збільшити швидкість на x км/год. Тоді за умовою задачі, ураховуючи, що 12 хв $= \frac{1}{5}$ год, дістанемо рівняння

$$\frac{144}{72}-\frac{144}{72+x}=\frac{1}{5},\quad 2-\frac{144}{72+x}=\frac{1}{5},$$

$$2\cdot 5(72+x)-5\cdot 144=72+x,$$

$$720+10x-720=72+x,\quad 9x=72,\quad x=8.$$

Відповідь. На 8 км/год.

Задача 7

Витрата цегли на 1 м^2 кладки з урахуванням швів для розчину становить 155 штук. Висота одного поверху будинку дорівнює 3 м. На кожному поверсі передбачено 15 вікон розміром 1,2 м × 1,5 м і 5 балконних дверей розміром 0,9 м × 2,1 м. Чи вистачить 60 000 штук цегли для зведення одного поверху будинку (див рис. до задачі 2)?

Розв'язання

Згідно з рисунком, периметр одного поверху будинку дорівнює 140 м. Тоді площа кладки

$$S=140\cdot 3-15\cdot 1{,}2\cdot 1{,}5-5\cdot 0{,}9\cdot 2{,}1=383{,}55\ (\text{м}^2).$$

Витрати цегли становлять

$$383{,}55\cdot 155=59450{,}25\ (\text{штук}).$$

Відповідь. Вистачить.

Задача 8

Віконне скло упаковане в коробки у формі прямокутного паралелепіпеда розмірами 60 см × 40 см × 150 см. Чи можливо за один рейс перевести 65 коробок зі склом вантажівкою, кузов якої має розміри 2,1 м × 4 м × 2,8 м?

Розв'язання

Об'єм коробки, у яку упаковане скло, дорівнює

$$0{,}6\cdot 0{,}4\cdot 1{,}5=0{,}36\ (\text{м}^3).$$

Об'єм кузова вантажівки дорівнює

$$2{,}1\cdot 4\cdot 2{,}8=23{,}52\ (\text{м}^3).$$

Тоді в кузов вантажівки поміститься

$$23{,}52:0{,}36=65{,}(3)\ \text{коробки}.$$

Відповідь. Неможливо.

Задача 9

Малярі Іван Петрович і Олексій Степанович, працюючи разом, мали пофарбувати фасад будинку за дві робочі зміни, тобто за 16 год, але через хворобу Іван Петрович не вийшов на роботу. Чи встигне Олексій Степанович, працюючи самостійно, пофарбувати фасад будинку за один робочий тиждень, тобто за 5 робочих змін, якщо відомо, що, працюючи самостійно, Олексій Степанович витрачає на цю роботу на 24 год більше, ніж Іван Петрович?

Розв'язання

Нехай Іван Петрович сам може виконати всю роботу за x год, виконуючи за 1 год $\frac{1}{x}$ частину роботи. Тоді Олексій Степанович сам може виконати всю роботу за $(x+24)$ год, виконуючи за 1 год $\frac{1}{x+24}$ частину роботи. Працюючи разом, вони за 1 год виконують $\frac{1}{16}$ частину роботи. Дістали рівняння

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+24}=\frac{1}{16},\quad \frac{16(x+24)+16x-x(x+24)}{16x(x+24)}=0,$$

$$\frac{x^2-8x-384}{16x(x+24)}=0,\quad \begin{cases}x^2-8x-384=0,\\ x\neq 0,\ x\neq -24,\end{cases}$$

$$\begin{cases}x_1=-16,\ x_2=24,\\ x\neq 0,\ x\neq -24.\end{cases}\quad x=-16$$

не задовольняє умову задачі.

Отже, Олексій Степанович, працюючи самостійно, може пофарбувати фасад будинку за

$$24+24=48\ (\text{год}),$$

тобто за 6 робочих змін.

Відповідь. Не встигне.

Задача 10

На кожному поверсі будинку потрібно прокласти по 60 м електрокабелю. Бригада, що працює на першому поверсі, прокладає щогодини на 2 м кабелю більше, ніж бригада, що працює на другому поверсі, і закінчить роботу на 1,5 год раніше від неї. Чи встигнуть ці бригади прокласти електрокабель за одну робочу зміну, тривалість якої становить 8 год?

Розв'язання

Нехай бригада, що працює на другому поверсі, щогодини прокладає по x м кабелю, тоді бригада, що працює на першому поверсі, щогодини прокладає по $(x+2)$ м кабелю. Бригада з першого поверху витратить на всю роботу $\frac{60}{x+2}$ год, а бригада з другого поверху — $\frac{60}{x}$ год. За умовою задачі

$$\frac{60}{x}-\frac{60}{x+2}=1{,}5,\quad \frac{40}{x}=\frac{40}{x+2}=1,$$

$$\frac{40(x+2)-40x-x(x+2)}{x(x+2)}=0,\quad \frac{x^2+2x-80}{x(x+2)}=0,$$

$$\begin{cases}x^2+2x-80=0,\\ x\neq 0,\ x\neq -2,\end{cases}\quad \begin{cases}x_1=-10,\ x_2=8,\\ x\neq 0,\ x\neq -2.\end{cases}\quad x=-10$$

не задовольняє умову задачі.

Отже, бригаді, що працює на першому поверсі, потрібно $\frac{60}{10}=6$ (год), а бригаді, що працює на другому поверсі, — $\frac{60}{8}=7{,}5$ (год), тобто обидві бригади встигнуть прокласти електрокабель за одну робочу зміну.

Відповідь. Встигнуть.

IV. ПІДБИТТЯ ПІДСУМКІВ

Учитель проводить бесіду, у ході якої з'ясовує:

- ✓ що нового дізналися учні, побувавши на будівництві;
- ✓ який етап будівництва їм найбільше сподобався;
- ✓ чи виникло в кого-небудь бажання обрати професію будівельника;
- ✓ чи переконалися учні, що на будівництві неможливо обійтися без математики.

У БЛОКНОТ ВИКЛАДАЧА МАТЕМАТИКИ В 9 КЛАСІ

ВЕКТОРИ

***

Термін «вектор» запропонував ірландський математик Вільям Гамільтон (1806–1865), позначення $\vec{a}$ — французький математик Жан Арган (1768–1822), $\overrightarrow{AB}$ — німецький математик Август Мебіус (1790–1868).

***

У фізиці існує чимало важливих величин, що є векторами. Наприклад, сила, швидкість, переміщення, прискорення, кутовий момент, імпульс, напруженість електричного і магнітного полів.

***

1587 року фламандський учений С. Стевін опублікував трактат «Початки статики», у якому дійшов висновку, що для знаходження суми сил, що діють під кутом 90°, потрібно скористатися «паралелограмом сил». При цьому для позначення сил Стевін уперше застосував стрілки. Тобто Стевін уперше ввів додавання перпендикулярних векторів.

Значно пізніше (1803 року) французький математик Луї Пуансо розробив теорію векторів, якою користувався, розглядаючи сили, що діють у різних напрямках.

***

Упродовж тривалого часу вектор розглядали тільки як напрямлений відрізок, один із кінців якого називали початком, а другий — його кінцем. Згодом вектор стали розглядати не тільки як напрямлений відрізок, але і як паралельне перенесення, задане парою точок — точкою O та її образом O'.

***

У сучасній математиці розділ, у якому викладають учення про дії з векторами, називають векторною алгеброю, оскільки дії з векторами мають багато спільних властивостей з алгебраїчними діями.

***

Термін «вектор» використовують не тільки в математиці. Наприклад, у біології вектор — це організм, клітина, вірус, плазміда або інший біологічний об'єкт, що несе потенційно активний елемент; в інформатиці — одномірний масив; у геополітиці — напрямок спрямування своїх геополітичних амбіцій певної держави, наприклад «Європейський вектор України».

ВЛАСТИВОСТІ ТА ГРАФІКИ ФУНКЦІЙ В ЛОГІЧНИХ ВПРАВАХ

Н. М. Сушко, м. Охтирка, Сумська обл.

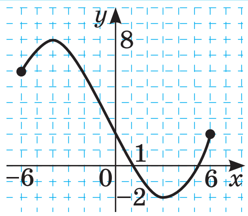
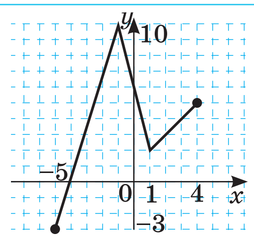
Завдання 1

Знайдіть невідомий проміжок.

$y=\sqrt{2-x}$	$(-\infty;2]$
$y=\sqrt{2x+5}$	?

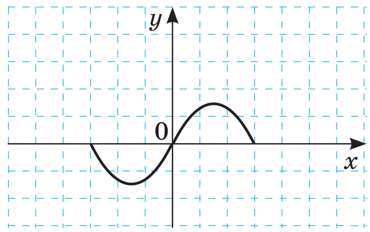
Завдання 2

Знайдіть невідомий проміжок.

	$-6\le x\le 6$	$[-2;8]$
	$-5\le x\le 4$	?

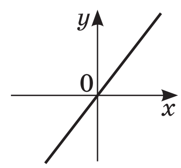
Завдання 3

Знайдіть невідомий проміжок.

	$\left[-\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right]$
$y=-x^2+3x-2$	?

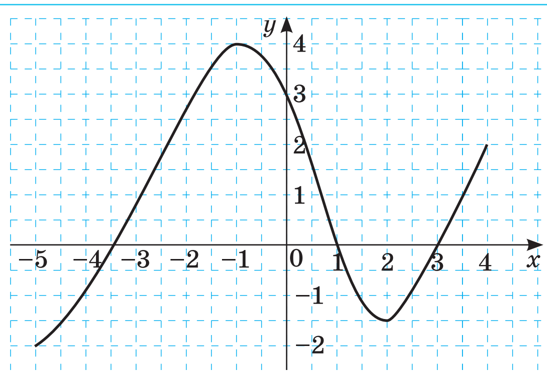
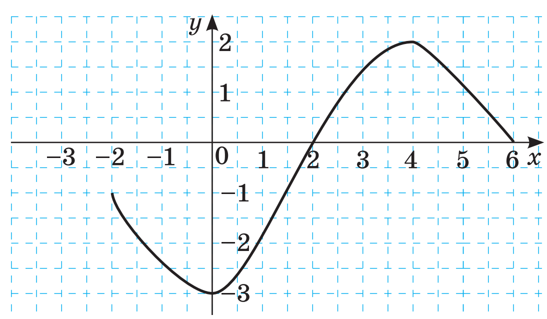
Завдання 4

Знайдіть невідомий рисунок.

$y=x$	
$y=\sqrt{x^2}$	?

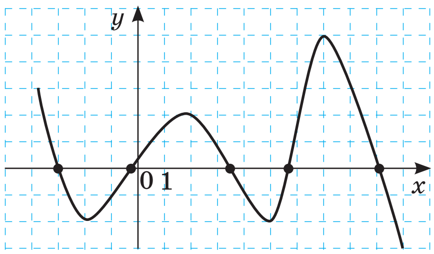
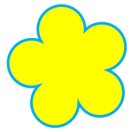
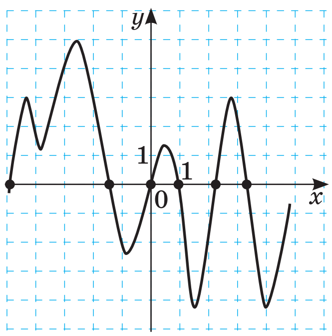
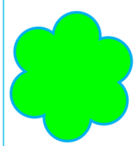
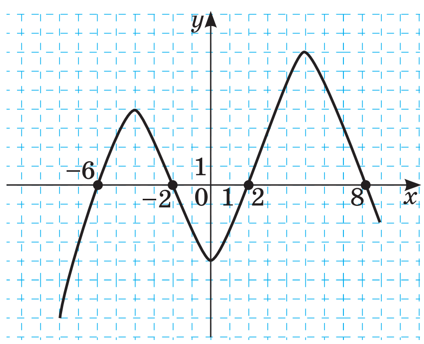
Завдання 5

Знайдіть невідомі нерівності.

	
$x<-1,\ x>2$	?

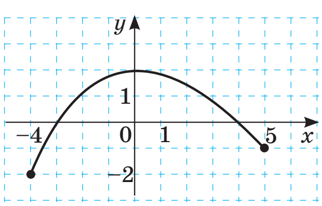
Завдання 6

Знайдіть невідомий рисунок.

	
	
	?

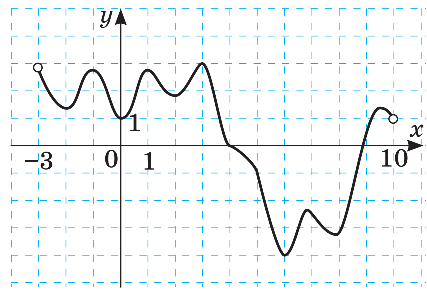
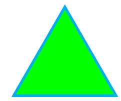
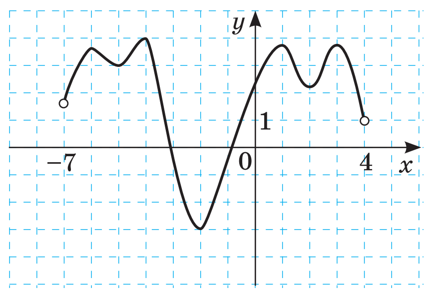
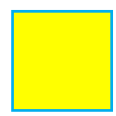
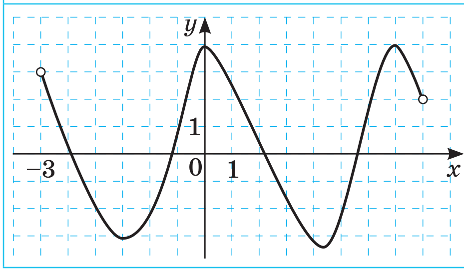
Завдання 7

Знайдіть невідомий проміжок.

	$-3 \le x \le 0$	$[0;2]$
$y = x^2 - 3x + 2$	$2 \le x \le 4$	?

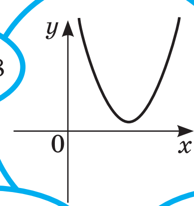
Завдання 8

Знайдіть невідомий рисунок.

	
	
	?

Завдання 9

Яку з наведених формул потрібно вибрати?



$y = x^2 - 4x + 4$

$y = 3x^2 + 4x + 8$

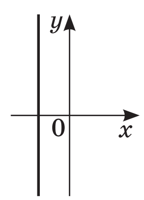
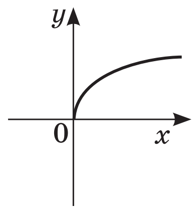
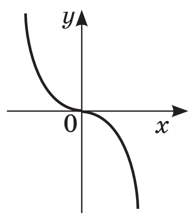
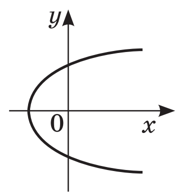
$y = 2x^2 - 3x - 4$

$y = -5x^2 + 2x - 8$

$y = -x^2 + 3x + 2$

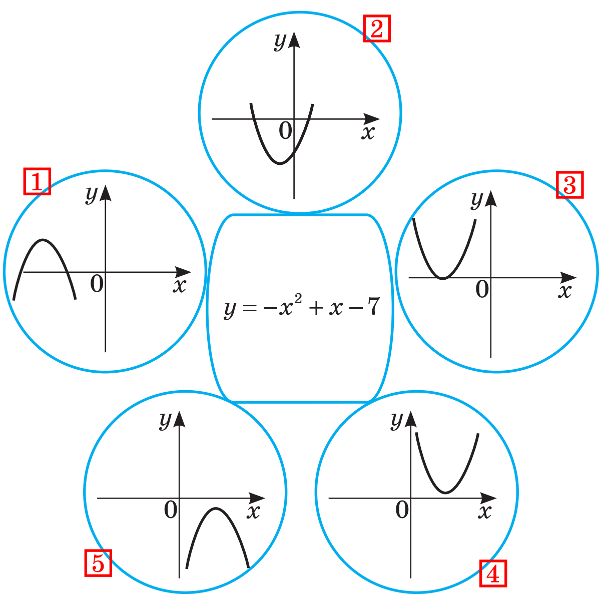
Завдання 10

Знайдіть невідому букву.

	
Н	Ф
	
Ф	?

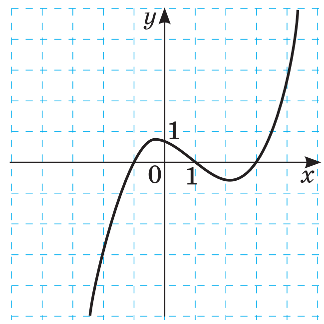
Завдання 11

Який з наведених рисунків потрібно вибрати?



Завдання 12

Знайдіть невідомі нерівності.

	$\left[\begin{array}{l}-1<x<1\\ x>3\end{array}\right.$
$y=x^2+x-6$	?

Відповіді

Завдання 1. $[-2{,}5;+\infty)$. (Область визначення наведеної функції.)

Завдання 2. $[-3;10]$. (Область значень функції, графік якої зображено на рисунку.)

Завдання 3. $\left(-\infty;\frac{3}{2}\right]$. (Проміжок зростання функції.)

Завдання 4. Графік функції $y=|x|$.

Завдання 5. $0<x<4$. (Проміжок зростання функції, графік якої зображено на рисунку.)

Завдання 6. Квітка з чотирма пелюстками. (Кількість пелюстків квітки відповідає кількості нулів функції.)

Завдання 7. $[0;6]$. (Значення функції, що відповідають поданим значенням аргумента.)

Завдання 8. Квадрат. Кількість вершин многокутника дорівнює найбільшому значенню функції.)

Завдання 9. $y=3x^2+4x+8$. (Формула, що задає функцію, ескіз графіка якої зображено на рисунку.)

Завдання 10. Н. (Крива, зображена на рисунку, не є графіком функції.)

Завдання 11. Рисунок 5. (Рисунок, на якому зображено ескіз графіка наведеної функції.)

Завдання 12. $x<-3$, $x>2$. (Проміжки, де функція набуває додатних значень.)

Література

Гайштут А. Г. Математика в логических упражнениях. — К. : Радянська школа, 1985.

ГАЛОПОМ ПО ЄВРОПАХ

Задачі для тих, хто хоче розширити свій кругозір і поглибити знання з математики

В. І. Ансімова, Т. І. Бабенко, М. Г. Карамян, м. Павлоград, Дніпропетровська обл.

«ЄВРОПА — ЦЕ ДОСВІД БАГАТЬОХ ВІКІВ» (МИКОЛА ХВИЛЬОВИЙ)

✓ *Європа* — частина світу в Північній півкулі. Європа (за іншим варіантом правопису — Европа) названа за ім'ям героїні давньогрецької міфології Європи, фінікійської царівни, яку викрав Зевс і відвіз на Крит. Найбільшою за площею країною Європи є Україна, найменшою — Ватикан. Європа є третьою за кількістю населення частиною світу після Азії та Африки (729 млн осіб, 11 % населення Землі).

Термін «Європа» в Україні використовують також у значеннях і як «Європейський Союз», і як «Європейська цивілізація», і як «Європейська культурна спільнота».

Європейський Союз — це економічний та політичний союз 28 держав, що розташовані здебільшого в Європі.

Задача 1

Площа України дорівнює 603 628 км^2, що становить 5,9 % площі Європи. Знайдіть площу Європи.

Задача 2

Площа Європи дорівнює приблизно 10,2 млн км^2, а площа Греції — 132 тис. км^2. Яку частину площі Європи становить площа Греції? (Відповідь округліть до десятих.)

Задача 3

Площа Угорщини дорівнює 93 028 км^2, а площа Швейцарії — 41 277 км^2. У скільки разів площа Угорщини більша за площу Швейцарії? (Відповідь округліть до сотих.)

Задача 4

Площа Німеччини дорівнює 357 022 км^2, що на 193 978 км^2 менше від площі Франції і в 138 разів більше за площу Люксембурга. Знайдіть площу Франції і площу Люксембурга.

Задача 5

✓ *Польща* розташована в Центральній Європі. На заході Польща межує з Німеччиною (довжина кордону становить 467 км), на півдні — із Чехією (790 км), на сході — із Україною (529 км), Білоруссю (416 км), Литвою (103 км) і Росією (210 км), на півночі — омивається Балтійським морем.

1) Знайдіть загальну довжину сухопутних кордонів Польщі.
2) Розташуйте довжини кордонів Польщі з усіма країнами в порядку зростання.
3) Побудуйте стовпчасту діаграму, що відображає довжину кордонів Польщі з усіма країнами.
4) Скільки часу знадобиться туристам, щоб проїхати вздовж усього сухопутного кордону Польщі, якщо середня швидкість автомобіля дорівнює 90 км/год?

«ВЕЛИКІ СПОРУДИ, ЯК І ВИСОКІ ГОРИ, — ТВОРІННЯ ВІКІВ» (ВІКТОР ГЮГО)

Задача 6

✓ *Ейфелева вежа*

Ейфелева вежа споруджена 1889 року за проектом французького інженера О. Г. Ейфеля в Парижі як символ досягнень техніки XIX ст. Сьогодні її використовують як оглядову і радіотелевізійну вежу.

Висота вежі разом із телевізійною антеною дорівнює 322 м. Маса металевої конструкції становить приблизно 10 000 т. Ейфелева вежа складається з 3-х платформ, що є квадратами, обмеженими 4-ма колонами. На третій платформі розміщений маяк із куполом, а над ним на висоті 274 м — оглядовий майданчик. На вежу можна піднятися двома способами: скористатись ліфтом або пішки, подолавши 1792 сходинки.

Нижній поверх вежі є пірамідою, основою якої є квадрат зі стороною 129,2 м. Бічними ребрами піраміди є колони, що з'єднуються на висоті 57,63 м. Нижній поверх вежі вінчає арочне склепіння. Тут розташована перша платформа Ейфелевої вежі. Ця платформа є квадратом зі стороною 46 м.

На першій платформі встановлена ще одна піраміда, на якій (на висоті 115,73 м) розташована друга квадратна платформа. Її сторона дорівнює 21,2 м.

Чотири колони, установлені на другій платформі, утворюють пірамідальну колону висотою 190 м, на якій (на висоті 276,13 м) розміщена третя платформа, що також є квадратом зі стороною 11,7 м. На ній споруджений маяк із куполом, над яким на висоті 300 м є ще один квадратний майданчик зі стороною 0,99 м.

1) Прочитайте текст, виберіть числа, що зустрічаються в тексті, і визначте, до множини яких чисел вони належать.
2) Знайдіть площу основи нижнього поверху Ейфелевої вежі.
3) Знайдіть площу кожної із платформ Ейфелевої вежі.
4) У скільки разів площа нижнього поверху більша за площу третьої платформи?
5) Скільки часу знадобиться, щоб піднятися на Ейфелеву вежу пішки, якщо щохвилини долати по 40 сходинок?
6) Щоб піднятися на 5-й поверх житлового будинку, потрібно подолати 78 сходинок. Скільки поверхів мав би будинок, якщо його висота дорівнювала б висоті Ейфелевої вежі?

Задача 7

✓ *Пізанська вежа*

Пізанська вежа (або вежа, що падає) збудована в XII–XIV ст. у місті Піза, що розміщене в Центральній Італії.

Висота вежі дорівнює 55 м, у ній 8 поверхів і вона має масу близько 14,5 т. Фундамент під вежею має площу 285 м^2. Усередині вежі є спіральні сходи, що налічують 294 сходинки.

У дзвіниці сім дзвонів, які налаштовані на звучання музичних нот.

1) Яку частину висоти Ейфелевої вежі становить висота Пізанської вежі?
2) Скільки відсотків становить маса Пізанської вежі від маси Ейфелевої?
3) Складіть задачі, використовуючи числові дані про Пізанську вежу.

«МОСТИ — НАЙДОБРІШИЙ ВИНАХІД ЛЮДСТВА: ВОНИ ЗАВЖДИ ПОЄДНУЮТЬ» (О. ІВАНОВ)

Задача 8

✓ *Найдовший міст у Європі*

Найдовшим у Європі є міст Васко да Гама через річку Тежу в північно-східній частині міста Лісабон, Португалія.

Рух мостом було відкрито 29 березня 1998 року. У тому ж році відзначалося 500-річчя відкриття Васко да Гама морського шляху з Європи до Індії.

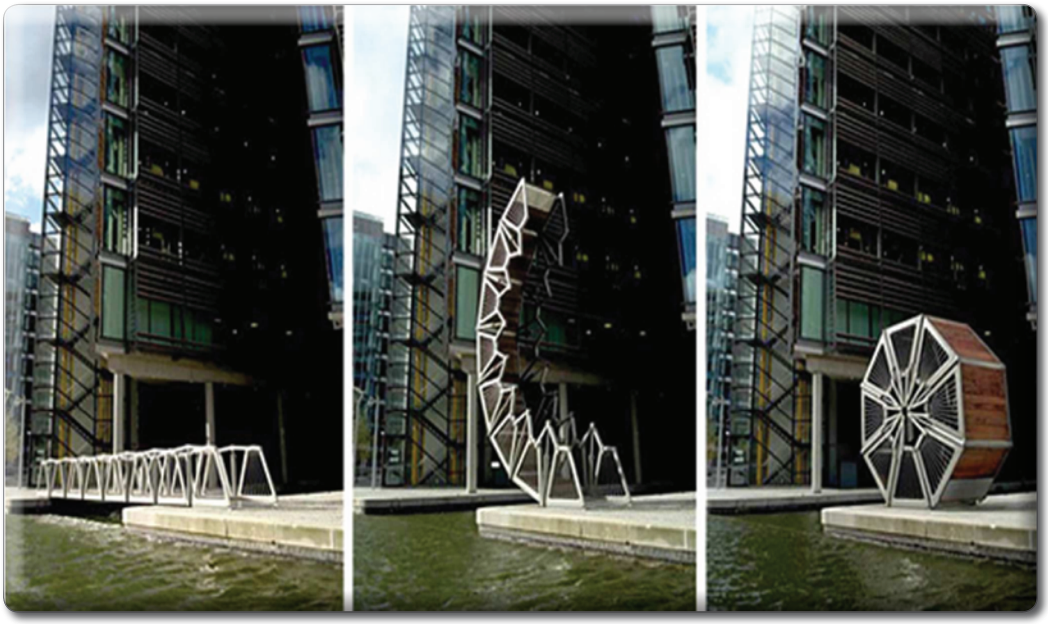
По мосту проходить шестисмугова автомагістраль із обмеженням швидкості до 120 км/год протягом більшої його частини і 100 км/год — на одній його секції.

Міст складається із таких секцій: північна під’їзна дорога (1,961 км), північний віадук (0,488 км), віадук Expo (12 секцій по 0,56 км), основний міст — 0,829 км, центральний віадук (80 секцій по 0,079 км), південний віадук (84 секції по 0,046 км), південні під’їзні шляхи (3,895 км).

1) Знайдіть загальну довжину найдовшого мосту в Європі.
2) Із якою швидкістю (у км/год) потрібно їхати, щоб подолати цей міст за 12 хв?

Задача 9

✓ *Незвичайний міст у Лондоні*



Цей міст ще називають мостом, що скручується (Rolling Bridge). Його довжина становить всього 12 м, але цікавий він не розмірами, а своєю конструкцією. Міст, зроблений зі сталі і дерева, зазвичай сполучає береги річки, а під час наближення човна швидко згортається і перетворюється на «колесо» — правильний восьмикутник, розташований на одному з берегів. (Правильним називають многокутник, що має рівні сторони і рівні кути.)

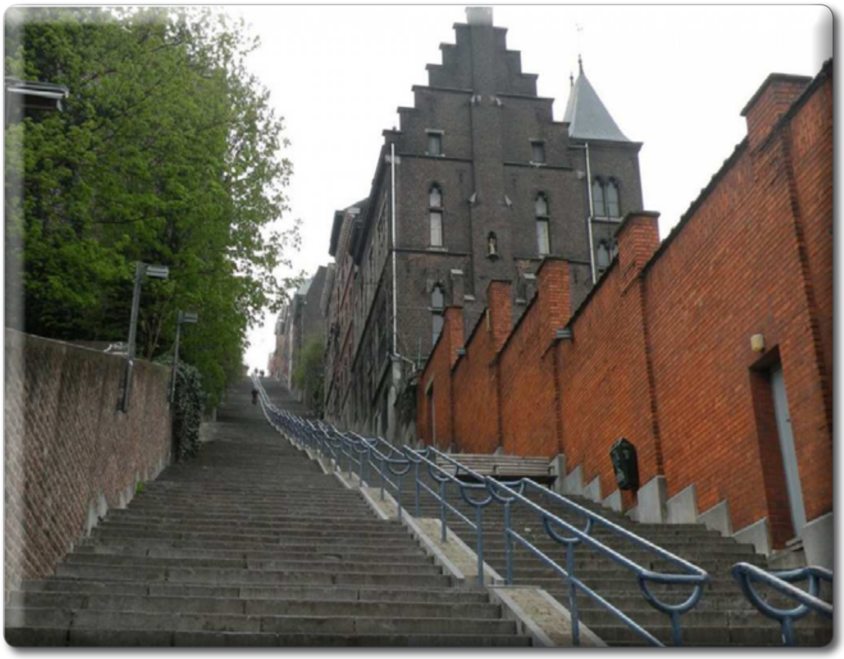
1) Знайдіть довжину сторони восьмикутника, на який перетворюється міст.
2) Скільки відсотків довжини моста становить довжина кожної сторони восьмикутника?

Задача 10

✓ *Найдовша набережна в Європі* — це набережна міста Дніпро (Україна). Її довжина дорівнює 30 км.

1) Для того, щоб прогулятися вздовж всієї набережної Дмитрові знадобилося 8 год 48 хв. Із якою швидкістю рухався Дмитро, якщо він чотири рази зупинявся на відпочинок на 33 хв, 28 хв, 35 хв і 32 хв?
2) На скільки менше часу витратив би Дмитро, якщо б він проїхав усю набережну на велосипеді зі швидкістю 12 км/год, зробивши дві зупинки для відпочинку на 20 хв і 25 хв?

«ХТО БАЖАЄ ПІДНЯТИСЯ ВГОРУ, ТОЙ ПРИДУМАЄ СХОДИ» (ЯПОНСЬКЕ ПРИСЛІВ'Я)



Люди нерідко уникають ходіння сходами, надаючи перевагу ліфтам, але не кожного разу. Дизайн деяких сходів буває просто унікальним, а вид на довкілля таким красивим, що приваблює і туристів, і місцевих мешканців.

Задача 11

✓ *Гора Бюрена в Бельгії*

Гора Бюрена — не справжня гора; таку назву мають сходи в місті Льєж. Вони складаються з 374 сходинок. Сходи побудовані 1881 року і названі на ім'я аристократа Вінсена Бюрена.

На сходах через рівні інтервали є майданчики з лавочками, де можна відпочити під час сходження.

Щороку в перші вихідні жовтня тут відбувається захід «Нічні пагорби», під час якого на сходах розміщують тисячі свічок. Сходи, прикрашені вогниками від свічок, — незабутнє видовище.

1) Скільки металевих поручнів на бетонній основі встановлено на сходах, якщо кожна бетонна плита сполучає 8 сходинок?
2) Скільки разів туристи зможуть відпочити на майданчиках із лавочками, якщо такі майданчики розташовані через кожні чотири прогони (один прогін — 8 сходинок)?

Задача 12

✓ *Потьомкінські сходи*

Потьомкінські сходи (до 1955 року — Бульварні сходи, раніше — Рішельєвські сходи, у XIX ст. — Гігантські сходи) — відомі сходи в Одесі, що поєднують центр міста з гаванню та Морським вокзалом.

Гігантські сходи були спроектовані 1825 року архітекторами Франческо Боффо, Аврамом Мельниковим і Потьє, а побудовані в 1837–1841 інженерами Уоптоном і Ю. Морозовим. Князь Воронцов розпорядився побудувати сходи в подарунок своїй дружині Єлизаветі.

На сьогодні сходи складаються з 192 сходинок (спочатку їх було рівно двісті, проте при розширенні порту вісім сходинок було засипано) і десяти прогонів. Довжина сходів — 142 метри, вони побудовані перспективно — їхня нижня частина (довжиною 21,7 м) значно ширша за верхню частину (12,5 м), завдяки чому при погляді з верхівки сходів складається враження їхньої однакової ширини. Парапети сходів здаються паралельними та видно тільки майданчики (окрім верхнього маршу). При погляді знизу сходи здаються довшими і видно тільки суцільний каскад сходинок.

За результатами дослідження, проведеного під егідою компанії Marketing tv, Потьомкінські сходи увійшли в десятку найкрасивіших сходів у Європі.

Щорічно проводиться забіг «Угору Потьомкінськими сходами». Рекорд змагання становить 22,8 с.

1) Із скількох сходинок складався кожний прогін Потьомкінських сходів до розширення порту?
2) Скільки відсотків ширини нижньої частини сходів становить ширина верхньої частини? (Відповідь округліть до цілих.)
3) Туристи, піднімаючись Потьомкінськими сходами, подолали $\frac{3}{5}$ їхньої довжини. Скільки метрів подолали туристи?
4) Скільки сходинок було подолано за 1 с під час установлення рекорду забігу «Угору Потьомкінськими сходами»?

«ПОДОРОЖ — ЄДИНА РІЧ, КУПУЮЧИ ЯКУ, СТАЄШ БАГАТШИМ» (АВТОР НЕВІДОМИЙ)

✓ *«Сонячний берег»* — найбільший морський курорт на сході Болгарії, біля затоки в Чорному морі. Пляж, довжиною 10 км і шириною в центральній частині до 100 м, покритий дрібним жовтим піском. Курорт, розташований між містами Варна (90 км) і Бургас (36 км), є частиною міста Несебр,

стара частина якого включена в список об'єктів Всесвітньої спадщини ЮНЕСКО в Болгарії.

Курортний комплекс «Сонячний берег» нагороджений Блакитним прапором (сертифікат якості пляжів, заснований Європейською комісією з навколишнього середовища і щорічно присуджується районам на основі результатів тестування чистоти води і піску).

Задача 13

Родина Василенків вирішила відпочити на курорті «Сонячний берег». Путівка для одного дорослого на 7 днів коштує 113 євро, а на 10 днів — 142 євро. Вартість путівки для дитини становить 50 % вартості будь-якої дорослої путівки. Скільки грошей потрібно родині Василенків, щоб відпочити на курорті «Сонячний берег»: а) 7 днів; б) 10 днів?

Задача 14

Туристи вирушили пішки з міста Бургас до курорта «Сонячний берег». Першого дня вони подолали 20 % всієї відстані, другого — 35 % відстані, а третього — решту 9 км. Знайдіть відстань від міста Бургас до курорту «Сонячний берег».

✓ *Боровець* — болгарський гірськолижний курорт, розташований в передмісті Софії на північних схилах гори Рила на висоті 1350 м. Відстань від Боровця до Самокова — 10 км, до Софії — 73 км, до Пловдива — 125 км.

Сьогодні курорт є сучасним центром зимового спорту з багатьма готелями і різноманітними курсами з навчання їзди на гірських лижах і сноуборді.

Задача 15

Чому дорівнює довжина відрізка, що зображує відстань між Боровцем і Софією на карті, якщо масштаб карти 1 : 5000000?

Задача 16

Знайдіть масштаб карти, на якій довжина відрізка, що зображує відстань між Боровцем і Пловдивом, дорівнює 1,26 см.

✓ *Діснейленд (Париж)*

Паризький Діснейленд (Disneyland Paris) — комплекс парків розваг компанії «Волт Дісней» у місті Марн-ла-Валле у східному передмісті Парижа. Розташований за 32 км від центру Парижа.

Паризький Діснейленд було відкрито 12 квітня 1992 року. Він розміщений на площі, що дорівнює 1945 га. Паризький Діснейленд складається з двох тематичних парків: Disneyland Park і Walt Disney Studios Park, розважального парку Disney Village, поля для гольфу (Golf Disneyland), а також крамниць, ресторанів і готелів.

12 серпня 2008 року парк привітав свого 200 мільйонного відвідувача. 2009 року Паризький Діснейленд був визнаний найбільш відвідуваним туристичним об'єктом Франції та Європи.

Задача 17

Усі відвідувачі, старші за 3 роки, мають придбати квитки для відвідування парку Діснейленд.

Квиток для відвідування і Disneyland Park, і Walt Disney Studios Park для дітей віком 3–11 років коштує €61, для всіх осіб, вік яких становить 12 років і більше — €68. Якщо ви бажаєте відвідати тільки один (будь-який) парк, то для дітей віком 3–11 маєте придбати квиток за €49, а для тих, чий вік перевищує 11 років, — за €54.

Дмитро і Дарія, вік яких відповідно становить 26 і 25 років, вирішили відвідати Діснейленд у Парижі. Із собою вони взяли дітей: Мирона, вік якого 1 рік і 3 місяці, і Ярославу, вік якої 3 роки і 2 місяці, а також племінників Володимира і Микиту відповідно віком 8 і 14 років.

Скільки гривень їм знадобиться, якщо:

а) вони відвідають тільки Disneyland Park;

б) вони відвідають і Disneyland Park, і Walt Disney Studios Park;

в) Дмитро, Володимир і Микита відвідають тільки Disneyland Park, а Дарія, Ярослава і Мирон — Disneyland Park, і Walt Disney Studios Park?

(У день відвідування курс євро до гривни становить 1 : 29.)

Задача 18

«Гусениця» — атракціон для всієї родини. Це поїзд, що мчить звивистим шляхом до ве-

личезного яблука и, пройшовши крізь нього, іде на новий виток. Довжини одного витка дорівнює 140 м, максимальна швидкість поїзда — 60 км/год. Скільки хвилин триває ця захоплива поїздка, якщо поїзд здійснює 50 витків із максимальною швидкістю?

✓ *Європа-парк (Німеччина)*

Європа-парк — другий за кількістю відвідувачів парк розваг після Діснейленду в Парижі. Парк розташований у федеральній землі Баден-Вюртемберг на південному заході Німеччині, у місті Руст. Тут «усю Європу» можна обійти за один день. «Уся Європа» розташована на площі 90 га і поділена на 16 тематичних частин, 13 із яких присвячені європейським країнам. Європа-парк є унікальним парком, відвідавши який можна відразу побувати в таких європейських країнах, як Австрія, Велика Британія, Німеччина, Голландія, Іспанія, Італія, Росія, Франція, Швейцарія, країни Скандинавії, Греція, Португалія, Ісландія, а також можна відвідати Шоколадну Землю, дивовижну Країну вікінгів і чудовий Палацовий парк. Кожна країна в парку має свої особливості.

Парк було відкрито 12 липня 1975 року. У перший рік парк відвідало 250 000 людей, у наступний — 700 000, а 2011 року його відвідало близько 4,5 мільйонів.

Задача 19

Скільки відсотків становить площа Європа-парку від площі Діснейленда в Парижі?

(Відповідь округліть до цілих.)

Задача 20

У скільки разів збільшилась кількість відвідувачів парку 2011 року порівняно з першим роком його роботи?

ЛІТЕРАТУРА

1. *Державний* стандарт базової і повної загальної середньої освіти.
2. *Навчальна* програма з математики для учнів 5–9 класів загальноосвітніх навчальних закладів.

ІНТЕРНЕТ-РЕСУРСИ

3. http://www.poezdnik.kiev.ua/reki/big_rivers.html
4. http://www.guidebook.ua/nature/guides/vodohranilischa-ukraini.html
5. http://moregeo.com/index/post/id/47
6. http://pustunchik.ua/online-school/biology/botany/dyvovyzhna-victorija-regija
7. http://ua.wikipedia.org/wiki

«Математика в школах України. Позакласна робота»
один випуск на місяць
Засновник ТОВ «Видавнича група "Основа"»
Свідоцтво серія КВ № 16537-5009Р від 06.04.2010 р.
Головний редактор Ірина Маркова
Редакція може не поділяти точки зору автора. Автори публікацій відповідають за достовірність фактів, цитат, власних назв. Відповідальність за рекламу інформацію несе рекламодавець. Рукописи не рецензуємо і не повертаємо.
Адреса для листування: ВГ «Основа», вул. Плеханівська, 66, м. Харків, 61001,
Тел. факс: (057) 731-96-33
E-mail: office@osnova.com.ua
WWW.OSNOVA.COM.UA
редакція журналу «Математика в школах України. Позакласна робота». Тел. (057) 731-96-33
e-mail: math@osnova.com.ua
Якщо не отримуєте журнали, телефонуйте: (057) 731-96-36
З питань замовлення книг:
(057) 731-96-35, pochta2@osnova.com.ua
Рекламний відділ:
(057) 731-96-34, reklama@osnova.com.ua
Адміністратор сайту:
(057) 731-96-33, site@osnova.com.ua

Підписано до друку 04.08.17. Формат 84x108/16.