ПОБУДУВАТИ КУТ 15 ГРАДУСІВ

О. Мандражи, О. Богомолова, м. Харків

Іноді ми не замислюємось над тим, що багато, на перший погляд, дуже простеньких задач, мають величезний потенціал для цікавих роздумів.

Розглянемо, наприклад, таку задачу: побудувати кут $15°$.

Учні 7 класу могли б розв'язати її, побудувавши рівносторонній трикутник зі стороною a і провівши дві бісектриси кута A (*рис. 1*).

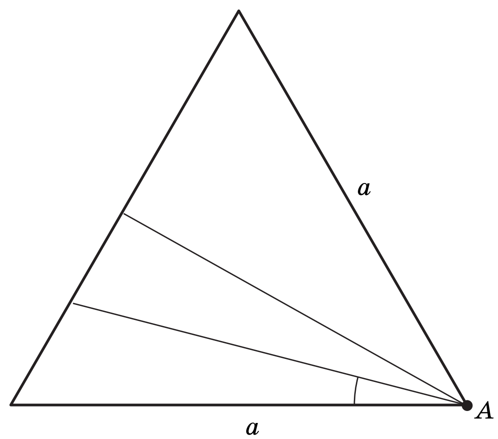

Рис. 1

Також семикласники могли б запропонувати і розв'язання, яке спирається на відомий для них факт: сторона прямокутного трикутника, що розташована напроти кута $30°$, дорівнює половині гіпотенузи. Отже, будуємо прямокутний трикутник за двома сторонами: катетом $\frac{a}{2}$ і гіпотенузою a, після чого бісектриса кута B ділить його на два рівні кути, кожен із яких дорівнює $15°$ (*рис. 2*).

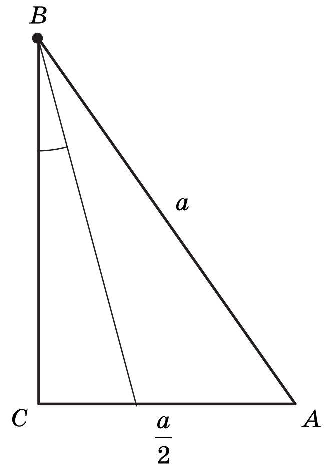

Рис. 2

У 8 класі розв'язання цієї задачі може доповнитись і такою побудовою. Пригадуючи взаємозв'язок між центральним і відповідним йому внутрішнім кутами (центральний кут удвічі більший за відповідний йому внутрішній кут), можна побудувати коло довільного радіуса, рівносторонній трикутник OAB зі стороною, що дорівнює радіусу, і внутрішній кут, що спирається на хорду AB і лежить в одній півплощині з кутом AOB. Тоді бісектриса кута ACB і утворює необхідну нам фігуру (*рис. 3*).

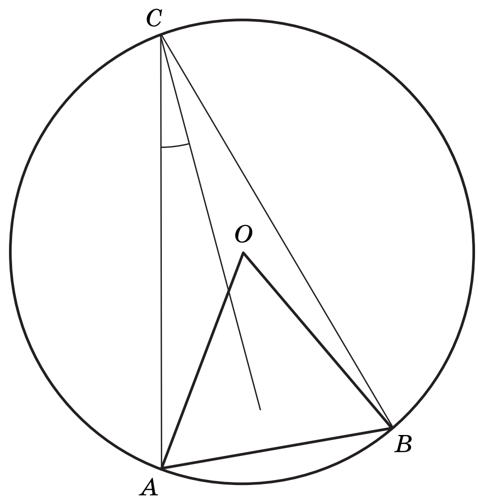

Рис. 3

Дев'ятикласники могли б порадувати побудовою через вписаний у коло правильний шестикутник, знаючи, що радіус кола дорівнює стороні вписаного шестикутника. Маючи шестикутник, легко отримаємо правильний трикутник, а далі побудова нічим не відрізняється від першого способу (*рис. 4*).

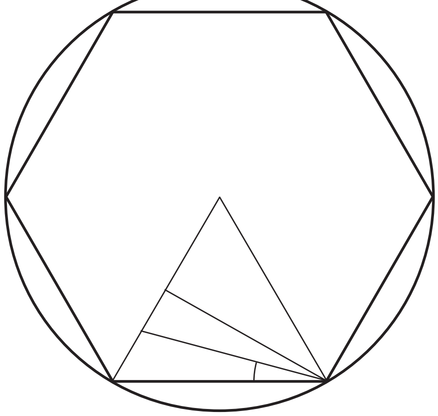

Рис. 4

Правильні многокутники можуть підказати й інше розв'язання через правильний 24-кутник, у якого зовнішній кут дорівнює $15°$. Таким чином будується правильний шестикутник, 12-кутник, урешті, 24-кутник та його зовнішній кут — задача розв'язана (*рис. 5*).

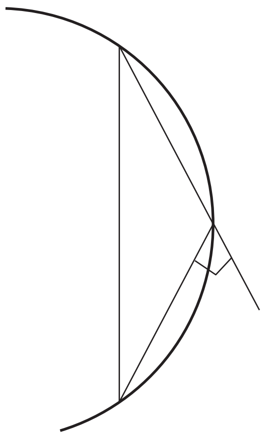

Рис. 5

Цікавим для дев'ятикласників є розв'язання через одиничне коло, адже $\sin 30° = \frac{1}{2}$, тому на осі Oy знаходимо середину радіуса. Із цієї точки проводимо промінь паралельно осі Ox у додатному напрямку, точку перетину з колом позначимо через A, сполучимо початок системи координат із точкою A. Кут, що утворився променями OA і додатним напрямком осі Ox, дорівнює $30°$, а його бісектриса утворить кут $15°$ (*рис. 6*).

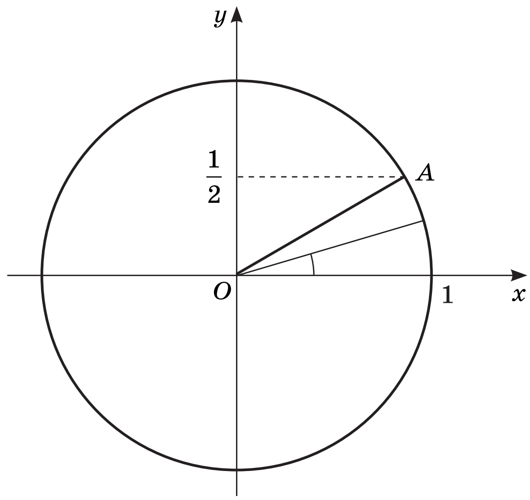

Рис. 6

Наведемо **розв'язання Леонардо да Вінчі**.

Леонардо да Вінчі показав, як кут 15 градусів можна побудувати за допомогою заіржавілого циркуля, який не здатен змінювати свій розхил. Запропонований Леонардом спосіб побудови базується на теоремі про те, що центральний кут (із вершиною в центрі кола) удвічі більший за будь-який вписаний кут (із вершиною, що лежить на колі), який спирається на ту саму дугу кола. Рисунок пояснює знайдене Леонардо застосування цієї теореми. Опишемо нашим фіксованим радіусом коло з центром у точці D і, вибравши на ньому довільну точку A, зробимо за допомогою циркуля засічки B і C по обидва боки від точки A. Трикутник ABD — рівносторонній, і пряма BC перпендикулярна до сторони AD та ділить її навпіл. Коло з центром у точці B проходить через точки A і D, і, якщо E — точка перетину цього кола з прямою BC, то кут ADE — це і є той кут у 15 градусів, який необхідно було побудувати. Доводиться це твердження зовсім просто. Кут DBA дорівнює $60°$, а пряма BC ділить його навпіл, тому кут ABE дорівнює $30°$. Коло з центром у точці B проходить через точки D, E і A, і дугу AE видно з точки D під удвічі меншим кутом, ніж із центра B. Отже, кут ADE дорівнює $15°$.

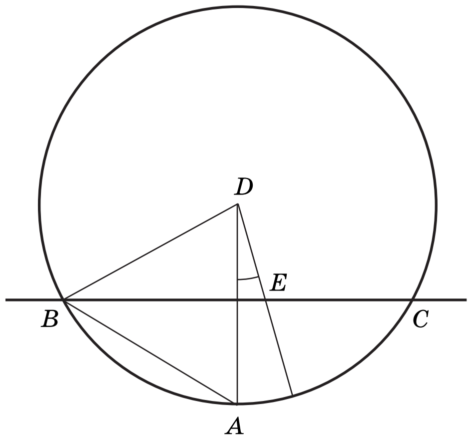

Рис. 7

Напевно, є ще багато цікавих розв'язань цієї задачі, ми впевнені, що на цьому розмаїття способів не закінчується.

Цікаві ідеї учнів можуть нас дивувати на кожному кроці.

Коли в школі вивчають теорему Піфагора, то обов'язково звертають увагу на єгипетський трикутник. Пізніше до нього часто звертаються, особливо після вивчення теми про подібність трикутників, прямокутних у тому числі. Знаючи про подібність прямокутних трикутників, доволі зручно і швидко шукати невідомі сторони прямокутного трикутника, якщо він є подібним до єгипетського, наприклад, скориставшись пропорційністю катетів подібних трикутників, знайти гіпотенузу. І більшість учителів й учнів саме так і роблять.

А ось учень 9 класу Гордієнко Святослав розглядає не пропорційність, а суму. Тобто, маючи катети прямокутного трикутника подібного до єгипетського, наприклад, 6 см і 8 см, знаходить між ними різницю, а потім до більшого катета додає отриману різницю й одержує гіпотенузу. Чи це правильно? Питання виникло тому, що проведене опитування серед студентів і власний досвід свідчать про те, що з таким міркуванням опитані раніше не стикалися. Тому перевіримо правильність цих міркувань, адже іноді нам доводилось чути відторгнення цієї думки одразу як такої, про яку не знаємо, а отже, вона не може бути правильною.

Зазначеним способом справді можна знаходити гіпотенузу, адже в єгипетському трикутнику різниця між сусідніми сторонами від меншої до більшої дорівнює 1, отже, якщо коефіцієнт подібності дорівнюватиме, наприклад, k, тобто сторони подібного трикутника дорівнюватимуть $3k$, $4k$, $5k$, то різниця між ними дорівнюватиме саме $1 \cdot k$ (*рис. 8*).

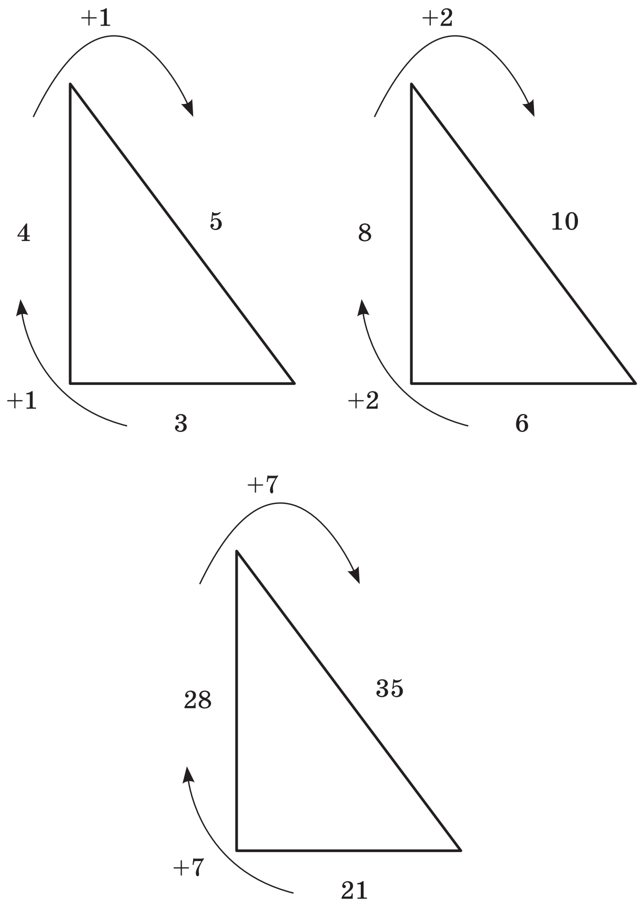

Рис. 8

Можливо, це просто дрібнички, але для когось це ідеї для скарбнички, адже так приємно, коли учні дивують, радують, захоплюють розмаїттям думок.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Пидоу Д.* Геометрия и искусство. Пер. с англ. Ю. А. Данилова под. ред. и с предисл. И. М. Яглома. — М. : Мир, 1979.