ТРИЛИСНИК У XXI СТОЛІТТІ

І. А. Кушнір, заслужений учитель України, м. Київ

Трикутник ABC вписаний у коло з центром у точці O. Точка I — інцентр, центр вписаного кола. Упевнений, що в Давній Греції була відома залежність $IW_1 = BW_1 = CW_1$, де W_1, W_2 — середини дуг BC, AC (*рис. 1*).

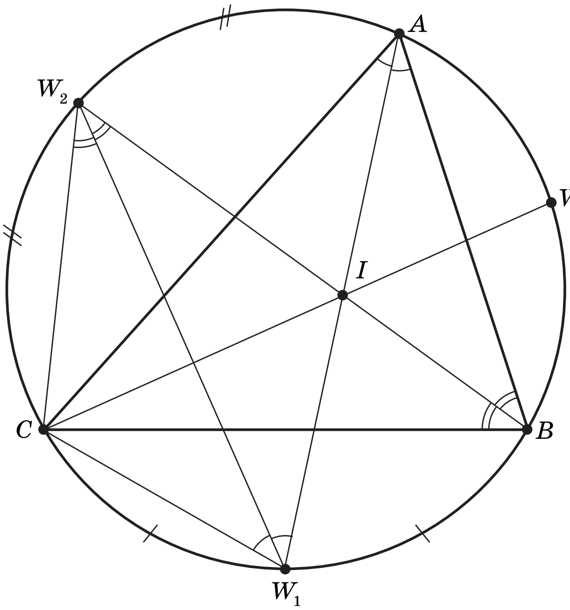

Рис. 1

Тільки зараз цю залежність я запропонував піднести до рівня теореми і назвав її «теорема трилисника». Іноді її називають «теоремою тризуба».

Разом із назвою було запропоновано нове доведення.

Побудуємо точку W_2. Трикутники W_1IW_2 і W_1CW_2 рівні, а отже, теорема доведена.

Відрізки IW_1, BW_1, CW_1 назвемо листами трилисника і доведемо їхні властивості.

Властивість 1

$CW_1^{\,2} = 2R \cdot M_1W_1$, де M_1 — середина BC, R — радіус описаного кола.

Доведення випливає з прямокутного трикутника CDW_1 (W_1D — діаметр).

Властивість 2

$$CW_1^{\,2} = AW_1 \cdot W_1L_1.$$

Справді, трикутники CW_1L_1 і CW_1A подібні, BC — радіус описаного кола (*рис. 2*):

$$\frac{CW_1}{W_1L_1} = \frac{AW_1}{CW_1}.$$

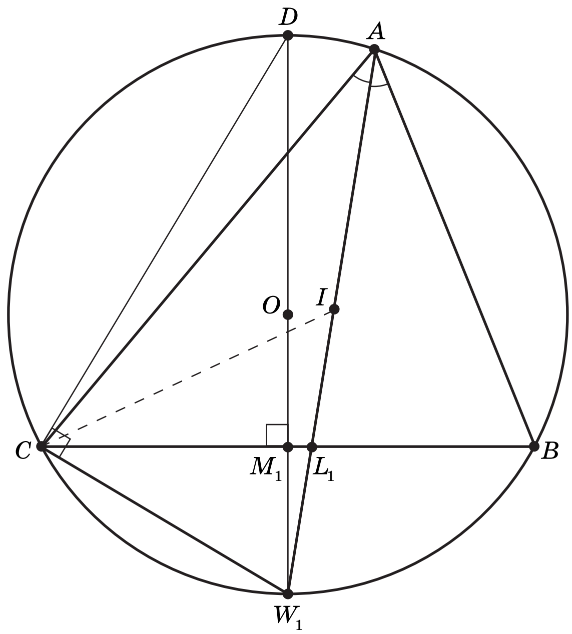

Рис. 2

Властивість 3

$IW_1 \cdot AI = 2Rr$, де r — радіус вписаного кола.

Доведення

Очевидно, що $AI = \dfrac{r}{\sin\dfrac{A}{2}}$ (із трикутника AIK_3) (*рис. 3, див. с. 22*).

$IW_1 = CW_1 = 2R \cdot \sin\dfrac{A}{2}$ (із трикутника CDW_1).

Отже, $IW_1 \cdot AI = 2R \cdot \sin\dfrac{A}{2} \cdot \dfrac{r}{\sin\dfrac{A}{2}} = 2Rr$.

Теорема трилисника зустрічатиметься неодноразово, а з уведенням центра I_a — центра зовнівписаного кола, що дотикається до сторони BC, і теореми Мансіона ($IW_1 = W_1I_a$) (*рис. 4, див. с. 22*).

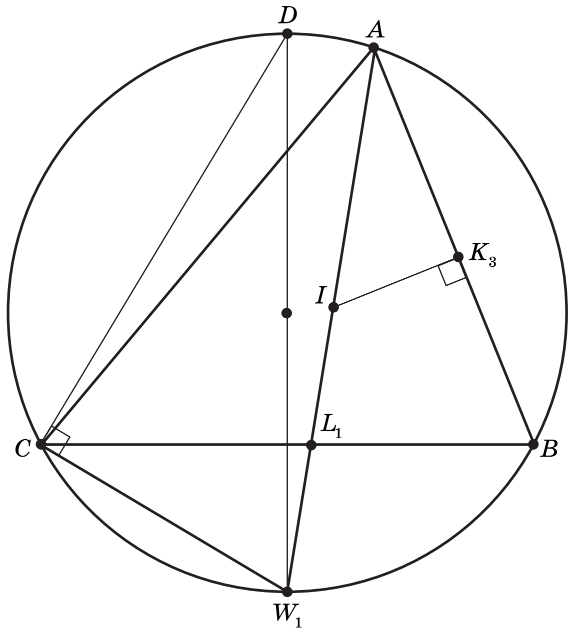

Рис. 3

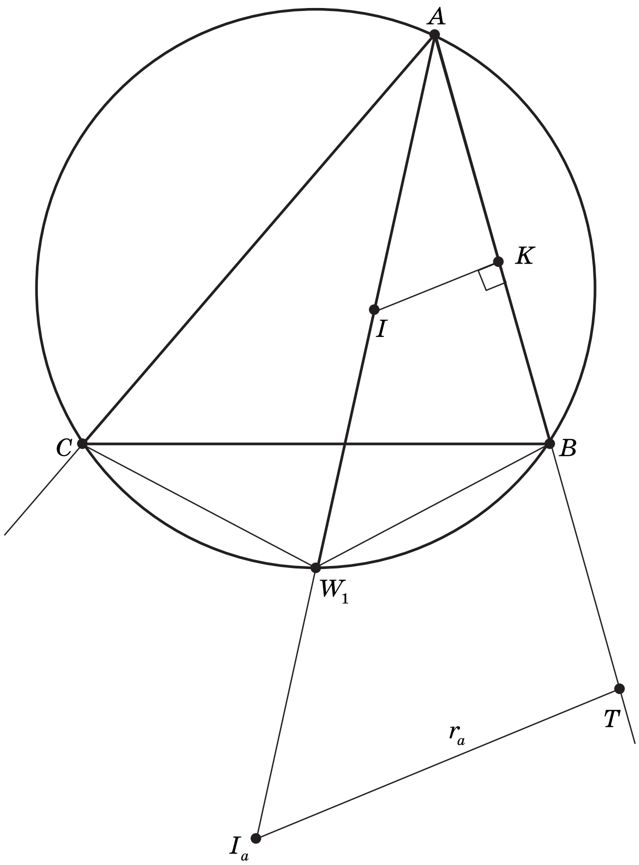

Рис. 4

Трилисник перетворюється на «чотирилисник»:

$$IW_1 = BW_1 = CW_1 = W_1 I_a.$$

Сьогодні отримане «сенсаційне» повідомлення — три формули Ейлера:

$$OI^2 = R^2 - 2Rr, \qquad (1)$$

$$OI_a^{\ 2} = R^2 + 2Rr_a, \qquad (2)$$

$$II_a^{\ 2} = 4R(r_a - r) \qquad (3)$$

доводяться простіше завдяки формулам листків трилисника.

Переконайтесь у цьому самостійно!

Доведемо формулу Ейлера $OI^2 = R^2 - 2Rr$ за допомогою першої властивості листка трилисника і залежності $IW_1 = CW_1$.

У трикутнику OIW_1 за теоремою косинусів (*рис. 5*):

$$OI^2 = R^2 - 2R \cdot IW_1 \cos\varphi + IW_1^{\ 2} \quad (\varphi = \angle OW_1 I).$$

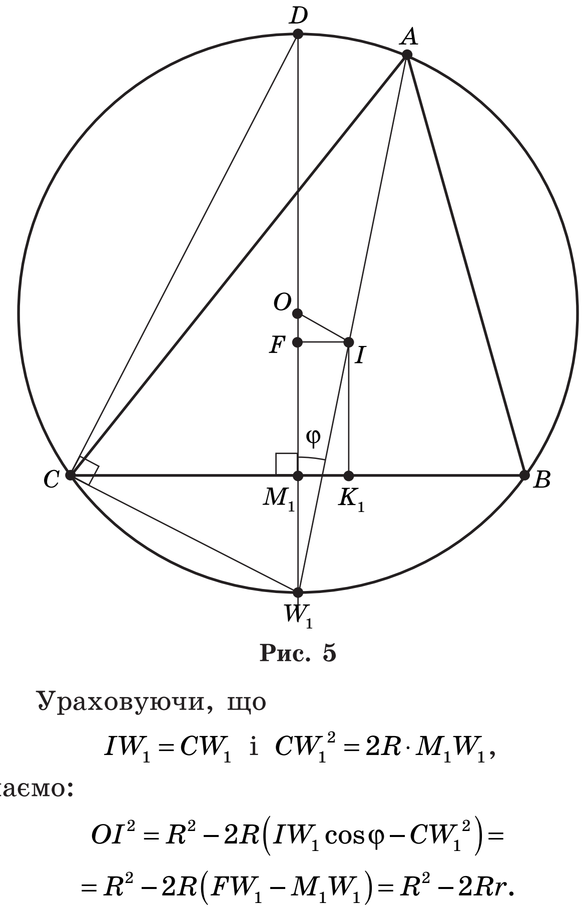

Рис. 5

Ураховуючи, що

$$IW_1 = CW_1 \text{ і } CW_1^{\ 2} = 2R \cdot M_1 W_1,$$

маємо:

$$OI^2 = R^2 - 2R\left(IW_1 \cos\varphi - CW_1^{\ 2}\right) =$$

$$= R^2 - 2R\left(FW_1 - M_1 W_1\right) = R^2 - 2Rr.$$

Доведемо формулу (1) за допомогою третьої властивості $AI \cdot IW_1 = 2Rr$.

Із трикутника OIW_1 (*рис. 5*) маємо:

$$OI^2 = OW_1^{\,2} + IW_1^{\,2} - 2OW_1 \cdot IW_1 \cos\varphi$$

або

$$OI^2 = R^2 - IW_1\left(R\cos\varphi - IW\right).$$

Оскільки $2R \cdot \cos\varphi = AW_1$ (із трикутника ADW_1), то

$$OI^2 = R^2 - 2IW_1\left(AW_1 - IW_1\right) =$$

$$= R^2 - IW_1 \cdot AI = R^2 - 2Rr.$$

Доведемо другу формулу Ейлера

$$OI_a^{\,2} = R^2 + 2Rr_a.$$

Розглянемо властивість, аналогічну до третьої:

$$AI_a \cdot I_aW_1 = 2R \cdot r_a.$$

За теоремою Мансіона $IW_1 = I_aW_1$ (*рис. 6*), отже,

$$I_aW_1 = CW_1 = 2R\sin\frac{A}{2}.$$

Оскільки $AI_a = \dfrac{2R}{\sin\frac{A}{2}}$, то

$$AI_a \cdot I_aW_1 = 2Rr_a, \qquad (1^0)$$

Перейдемо до доведення формули (2):

$$OI_a^{\,2} = R^2 + 2Rr_a.$$

Із трикутника OW_1I_a:

$$OI_a^{\,2} = R^2 + I_aW_1^{\,2} + 2R \cdot I_aW_1 \cdot \cos\varphi =$$

$$= R^2 + I_aW_1\left(\underbrace{I_aW_1 + AW_1}_{AI_a}\right) = R^2 + 2Rr_a.$$

Доведемо формулу (3):

$$II_a^{\,2} = 4R\left(r_a - r\right).$$

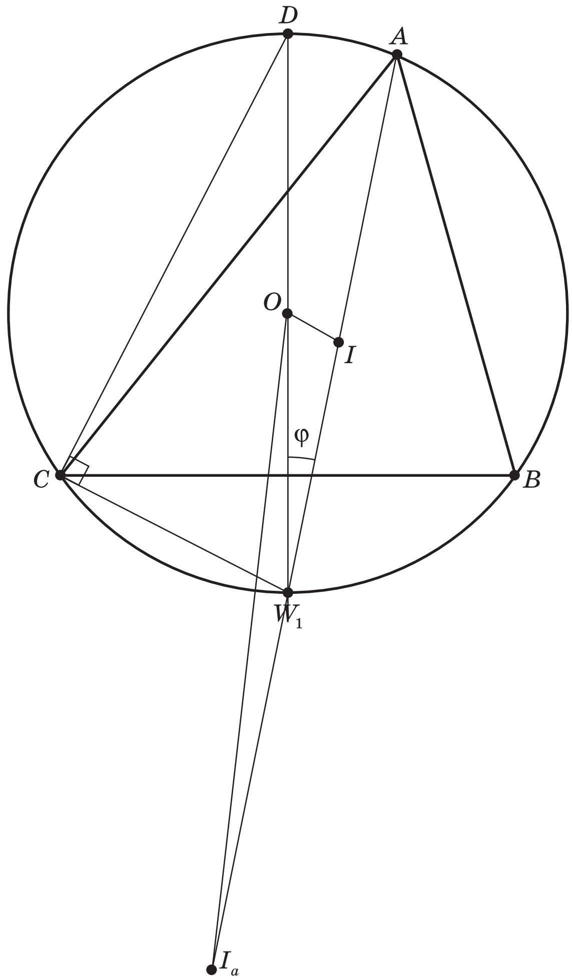

Рис. 6

За теоремою Мансіона:

$$II_a = 2IW_1.$$

Оскільки $IW_1 = CW_1$ і $CW_1^{\,2} = 2R \cdot M_1W_1$, а $M_1W_1 = \dfrac{r_a - r}{2}$ (доведіть!), то:

$$II_a^{\,2} = 4IW_1^{\,2}, \text{ або } II_a^{\,2} = 4R\left(r_a - r\right).$$

Авторські думки

Геометрія — головний предмет у школі, оскільки створений для тренування мозку.

* * *

Дошка, крейда і… серце — це урок!

* * *

Основа уроку — навчання задачею.

І. Кушнір