Laborator 5: Transformata Fourier și transformata Fourier discretă

Cuprins

Considerații generale

Obiectiv: prezentarea transformatei Fourier și a transformatei Fourier discrete.

Transformata Fourier

Transformata Fourier a unei secvențe aperiodice *x*(*n*) este

$$X(\omega) = \mathscr{F}\{x(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$$

Proprietăți

1) **Linearitate**:

dacă $x_1(n) \overset{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow} X_1(\omega)$ și $x_2(n) \overset{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow} X_2(\omega)$, atunci $\forall a_1, a_2 \in \mathbb{C}/\mathbb{R}$: $a_1x_1(n) + a_2x_2(n) \overset{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow} a_1X_1(\omega) + a_2X_2(\omega)$

2) **Translația în timp**:

dacă $x(n) \overset{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow} X(\omega)$, atunci $x(n-k) \overset{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow} X(\omega)e^{-j\omega k}$

3) **Reflexia în timp**:

dacă $x(n) \overset{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow} X(\omega)$, atunci $x(-n) \overset{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow} X(-\omega) = X^*(\omega)$

4) **Translația în frecvență**:

dacă $x(n) \overset{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow} X(\omega)$, atunci $x(n)e^{j\omega_0 n} \overset{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow} X(\omega - \omega_0)$

Transformata Fourier discretă (DFT - Discrete Fourier Tranform)

Transformata Fourier discretă a unei secvențe *x*(*n*), de durată finită *L*, este

$$X(k) = X\left(\frac{2\pi k}{N}\right) = \mathrm{DFT}_N\{x(n)\} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn}, \quad k = \overline{0, N-1}, \qquad W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}} \quad (L \leq N)$$

- Simetrie: $W_N^{k+\frac{N}{2}} = -W_N^k$
- Periodicitate: $W_N^{k+N} = W_N^k$

Secvența *x*(*n*) poate fi reconstituită din eșantioanele spectrului utilizând transformata Fourier discretă inversă (IDFT)

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-kn}, \quad n = \overline{0, N-1}$$

- $\text{Dacă } X(k) \in \mathbb{C} \implies X(k) = |X(k)| e^{j\angle X(k)}$

Proprietăți

1) **Periodicitate**:

$$\text{dacă } x(n) \overset{\mathrm{DFT}_N}{\longleftrightarrow} X(k) \text{, atunci } \begin{cases} x(n) = x(n+N), & \forall n, \\ X(k) = X(k+N), & \forall k. \end{cases}$$

2) **Linearitate**:

$$\text{dacă } x_1(n) \overset{\mathrm{DFT}_N}{\longleftrightarrow} X_1(k) \text{ și } x_2(n) \overset{\mathrm{DFT}_N}{\longleftrightarrow} X_2(k) \text{, atunci } \forall a_1, a_2 \in \mathbb{C}/\mathbb{R}:\ a_1 x_1(n) + a_2 x_2(n) \overset{\mathrm{DFT}_N}{\longleftrightarrow} a_1 X_1(k) + a_2 X_2(k)$$

3) **Simetria circulară**:

$$\text{dacă } x(n) \overset{\mathrm{DFT}_N}{\longleftrightarrow} X(k) \text{, atunci } x((-n))_N = x(n-N) \overset{\mathrm{DFT}_N}{\longleftrightarrow} X((-k))_N = X(N-k)$$

4) **Translația circulară în timp**:

$$\text{dacă } x(n) \overset{\mathrm{DFT}_N}{\longleftrightarrow} X(k) \text{, atunci } x((n-l))_N \overset{\mathrm{DFT}_N}{\longleftrightarrow} X(k) e^{-\frac{j2\pi kl}{N}}$$

5) **Translația circulară în frecvență**:

$$\text{dacă } x(n) \overset{\mathrm{DFT}_N}{\longleftrightarrow} X(k) \text{, atunci } x(n) e^{\frac{j2\pi kl}{N}} \overset{\mathrm{DFT}_N}{\longleftrightarrow} X((k-l))_N$$

6) **Teorema lui Parseval**:

$$\text{dacă } x(n) \overset{\mathrm{DFT}_N}{\longleftrightarrow} X(k) \text{ și } y(n) \overset{\mathrm{DFT}_N}{\longleftrightarrow} Y(k) \text{, atunci } \sum_{n=0}^{N-1} x(n) y^*(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) Y^*(k)$$

- dacă $x(n) = y(n)$, atunci $\sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X(k)|^2$

Resurse MATLAB

Cautați în Help-ul MATLAB funcțiile:

- `fft`
- `abs`
- `angle`
- `fftshift`
- `freqz`
- `mag2db`
- `sum`

Desfășurarea lucrării

Exemplul 1. Evaluarea transformatei Fourier discrete

Acest exemplu ilustrează evaluarea DFT-ului într-un număr diferit de puncte, pentru secvența

$$x(n) = \{\underset{\uparrow}{1}, 2, 3, 4\}.$$

- Secvența și DFT-urile

```
% Ex5_1
clear variables;
x = [1 2 3 4]; L = length(x);
% DFT-4
X4 = fft(x) % fft(x, 4)
```

```
X4 = 1×4 complex
  10.0000 + 0.0000i  -2.0000 + 2.0000i  -2.0000 + 0.0000i  -2.0000 - 2.0000i
```

```
% DFT-8
X8 = fft(x, 8)
```

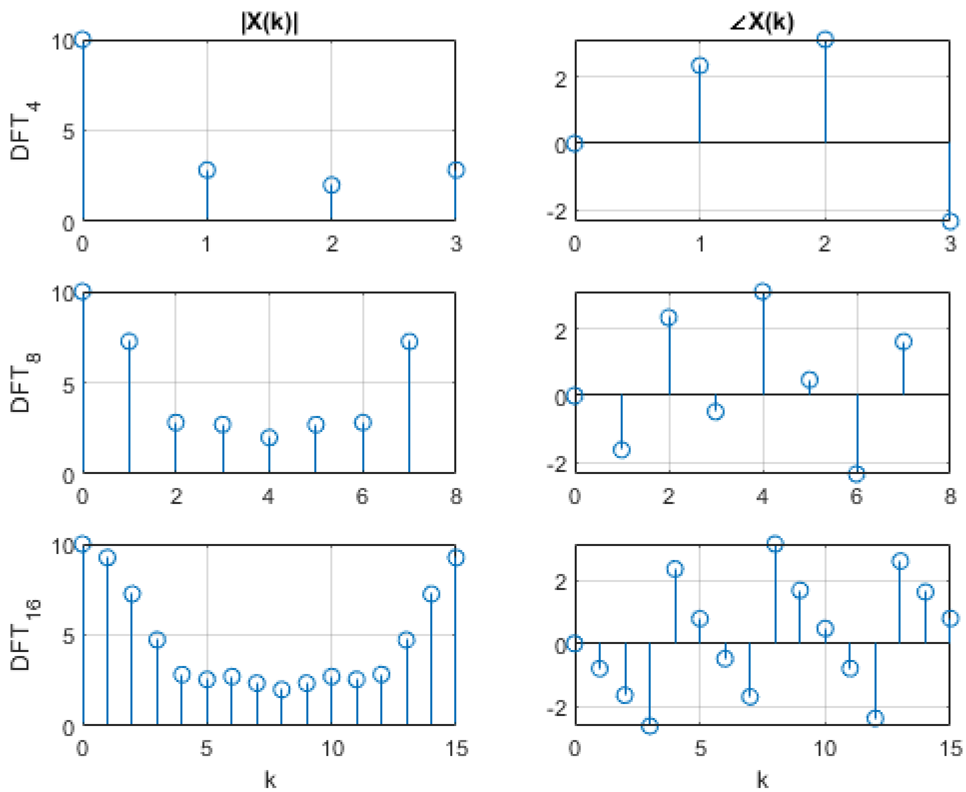
```
X8 = 1×8 complex
  10.0000 + 0.0000i  -0.4142 - 7.2426i  -2.0000 + 2.0000i   2.4142 - 1.2426i ⋯
```

```
% DFT-16
X16 = fft(x, 16)
```

```
X16 = 1×16 complex
  10.0000 + 0.0000i   6.4998 - 6.5822i  -0.4142 - 7.2426i  -4.0515 - 2.4383i ⋯
```

- DFT-ul are valori complexe, ca atare reprezentăm grafic spectrul de amplitudine și cel de fază

```
figure,
subplot(321); stem(0:length(X4)-1, abs(X4)); grid; ylabel('DFT_4'); title('|X(k)|');
subplot(322); stem(0:length(X4)-1, angle(X4)); grid; title('\angle{X(k)}');

subplot(323); stem(0:length(X8)-1, abs(X8)); grid; ylabel('DFT_8');
subplot(324); stem(0:length(X8)-1, angle(X8)); grid;

subplot(325); stem(0:length(X16)-1, abs(X16)); grid; ylabel('DFT_{16}'); xlabel('k');
subplot(326); stem(0:length(X16)-1, angle(X16)); grid; xlabel('k');
```



Exemplul 2. Partea reală, imaginară, modulul și faza DFT-ului

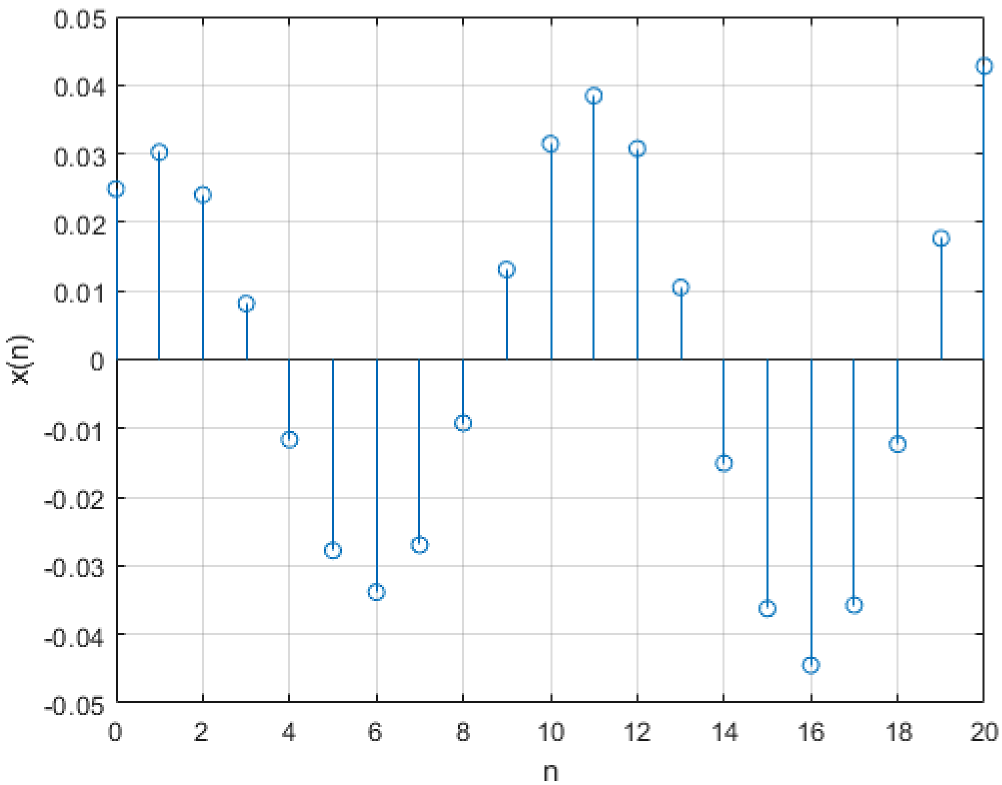
Se consideră secvența

$$x(n) = \frac{8}{9}\frac{\cos(2\pi 0.1n - 10)}{2\pi 0.1n - 30}, \quad n = \overline{0, 20}.$$

Inițial se va evalua DFT-ul într-un număr de puncte egal cu lungimea secvenței, iar apoi, pentru o mai bună reprezentare în domeniul frecvență, DFT-ul va fi evaluat în 1024 puncte.

```
% Ex5_2
clear variables;
n = 0:20;
```

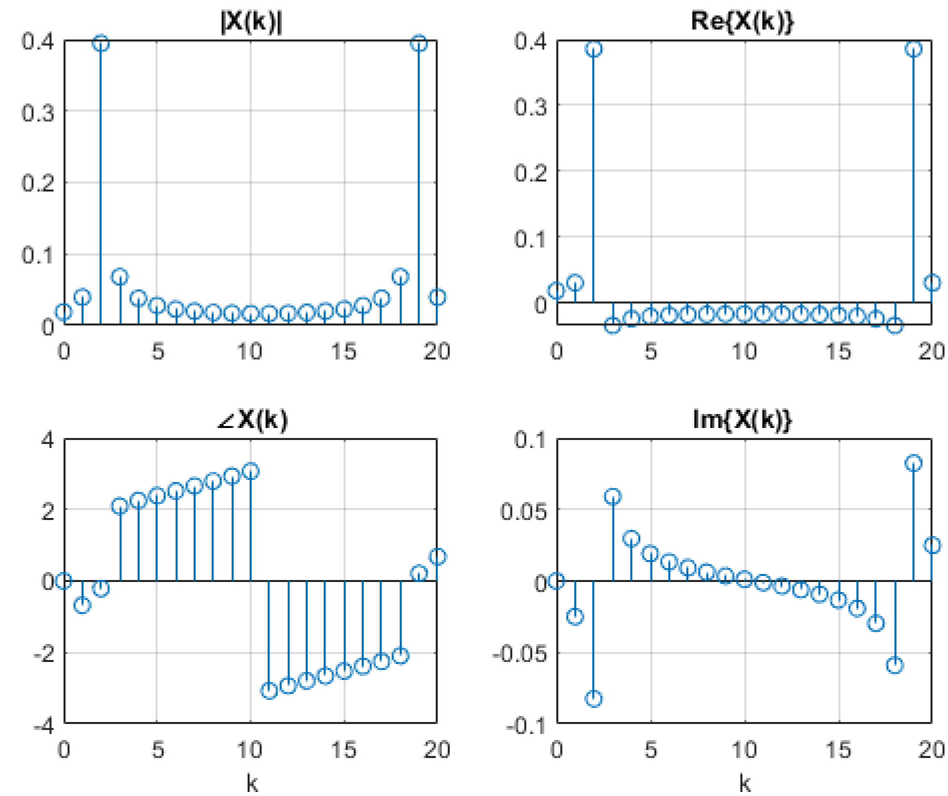
```
x = 8/9 * (cos(2*pi*0.1*n-10)) ./ (2*pi*0.1*n-30);

figure, stem(n, x), grid, xlabel('n'), ylabel('x(n)')
```




```
% DFT - lungime secventa
X = fft(x) % lungime 21
```

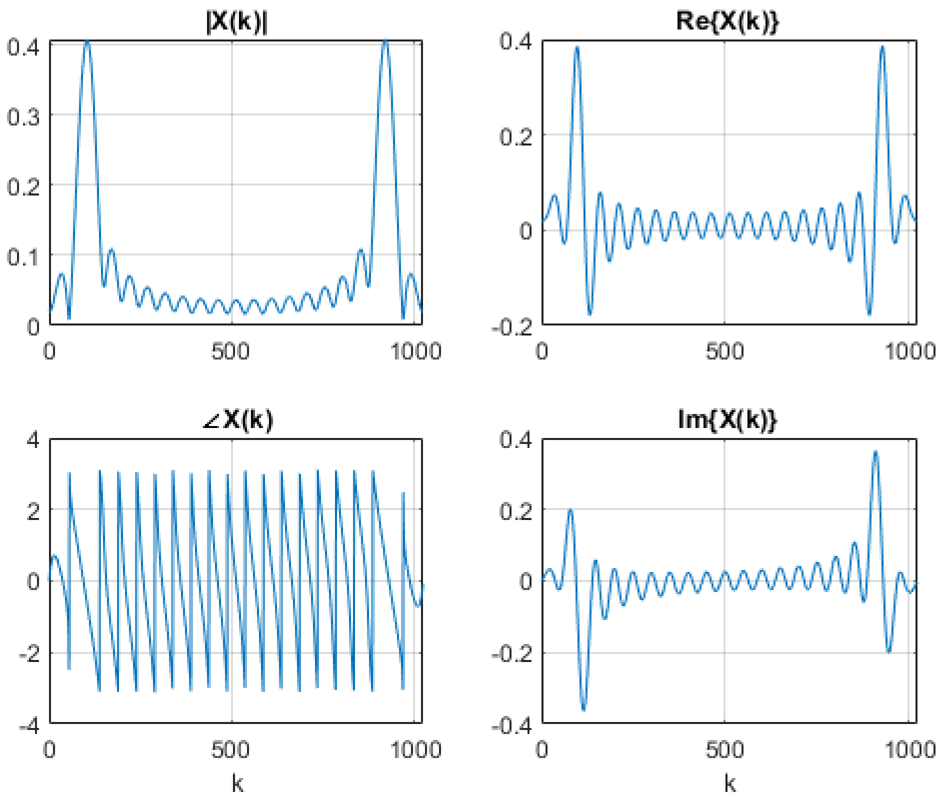
```
X = 1×21 complex
   0.0188 + 0.0000i   0.0308 - 0.0249i   0.3859 - 0.0824i  -0.0341 + 0.0590i ···
```

```
figure,
subplot(221); stem(0:length(X)-1, abs(X)); grid; title('|X(k)|')

subplot(223); stem(0:length(X)-1, angle(X)); grid; title('\angle{X(k)}'), xlabel('k'),

subplot(222); stem(0:length(X)-1, real(X)); grid; title('Re\{X(k)\}')

subplot(224); stem(0:length(X)-1, imag(X)); grid; title('Im\{X(k)\}'), xlabel('k'),
```

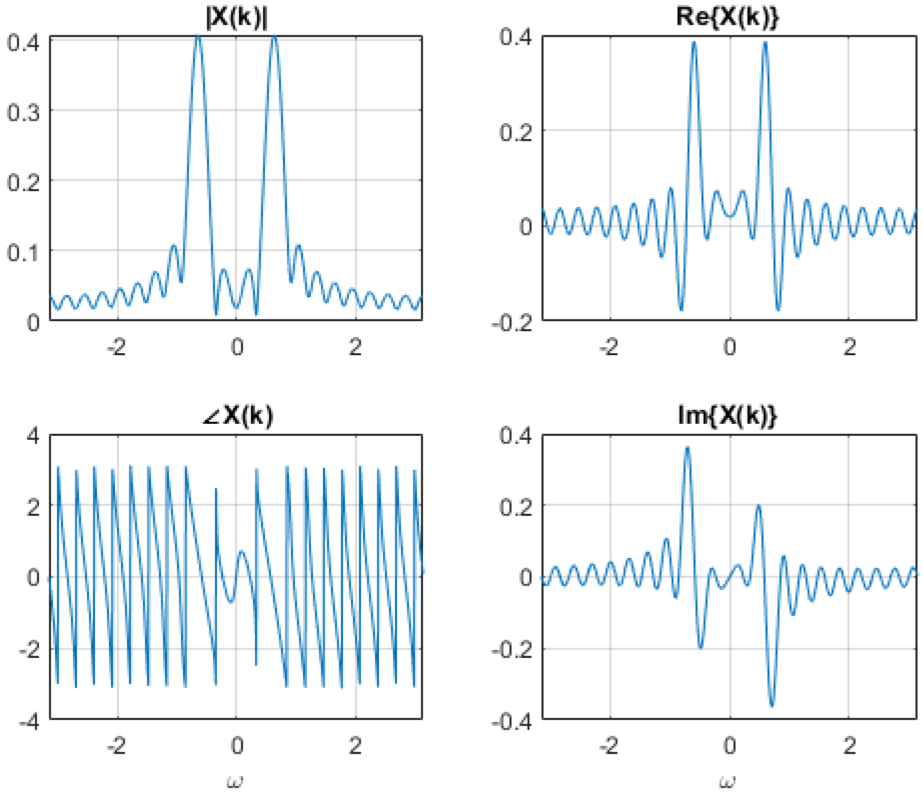


- Pentru o mai bună reprezentare/rezoluție în frecvență, folosim un numar mai mare de puncte la evaluarea DFT-ului (o putere a lui 2)

```
N = 2^10; XN = fft(x, N);

figure;
subplot(221); plot(0:length(XN)-1, abs(XN)); grid; title('|X(k)|')

subplot(223); plot(0:length(XN)-1, angle(XN)); grid; title('\angle{X(k)}'), xlabel('k'),

subplot(222); plot(0:length(XN)-1, real(XN)); grid; title('Re\{X(k)\}')

subplot(224); plot(0:length(XN)-1, imag(XN)); grid; title('Im\{X(k)\}'), xlabel('k'),
```




```
% reprezentarea trebuie sa fie in intervalul fundamental [-pi, pi) =>
% inversam cele doua jumatati ale vectorului XN folosind 'fftshift'

% vectorul frecventa in functie de care facem reprezentarea grafica
w = -pi:2*pi/N:pi-2*pi/N;

figure;
subplot(221); plot(w, fftshift(abs(XN))); grid; xlim([-pi pi-2*pi/N]),
title('|X(k)|')

subplot(223); plot(w, fftshift(angle(XN))); grid; xlim([-pi pi-2*pi/N]),
title('\angle{X(k)}'), xlabel('\omega'),

subplot(222); plot(w, fftshift(real(XN))); grid; xlim([-pi pi-2*pi/N]),
title('Re\{X(k)\}')

subplot(224); plot(w, fftshift(imag(XN))); grid; xlim([-pi pi-2*pi/N]),
title('Im\{X(k)\}'), xlabel('\omega'),
```



Exemplul 3. Evaluarea transformatei Fourier pentru un sistem descris prin funcția de transfer

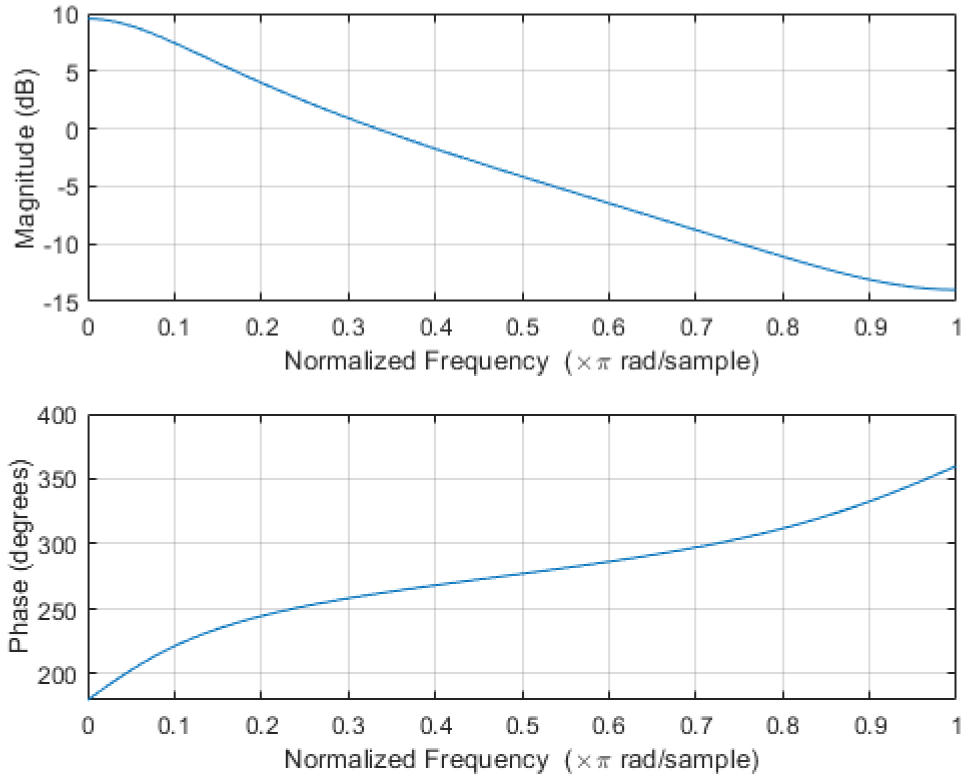
Se consideră sistemul descris prin funcția de transfer

$$H(z) = \frac{1 + 0.5z^{-1}}{1 - 1.5z^{-1}}.$$

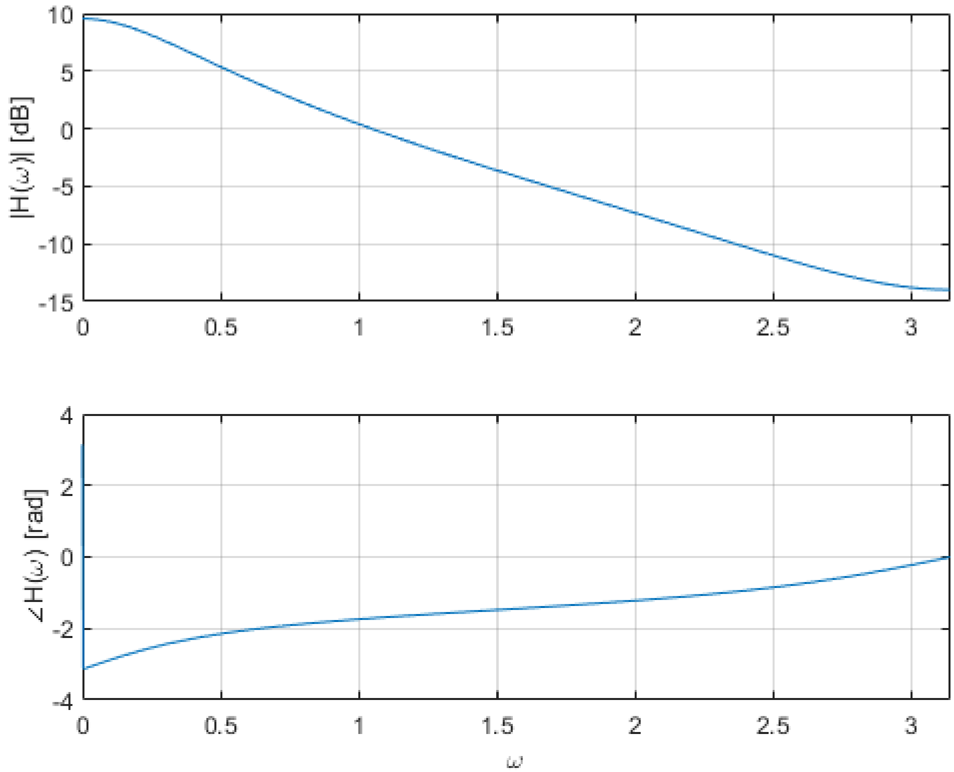
Să se reprezinte grafic modulul și faza corespunzătoare funcției răspuns la frecvență.

$$H(\omega) = H(z)\big|_{z=e^{j\omega}} = \frac{1 + 0.5e^{-j\omega}}{1 - 1.5e^{-j\omega}}$$

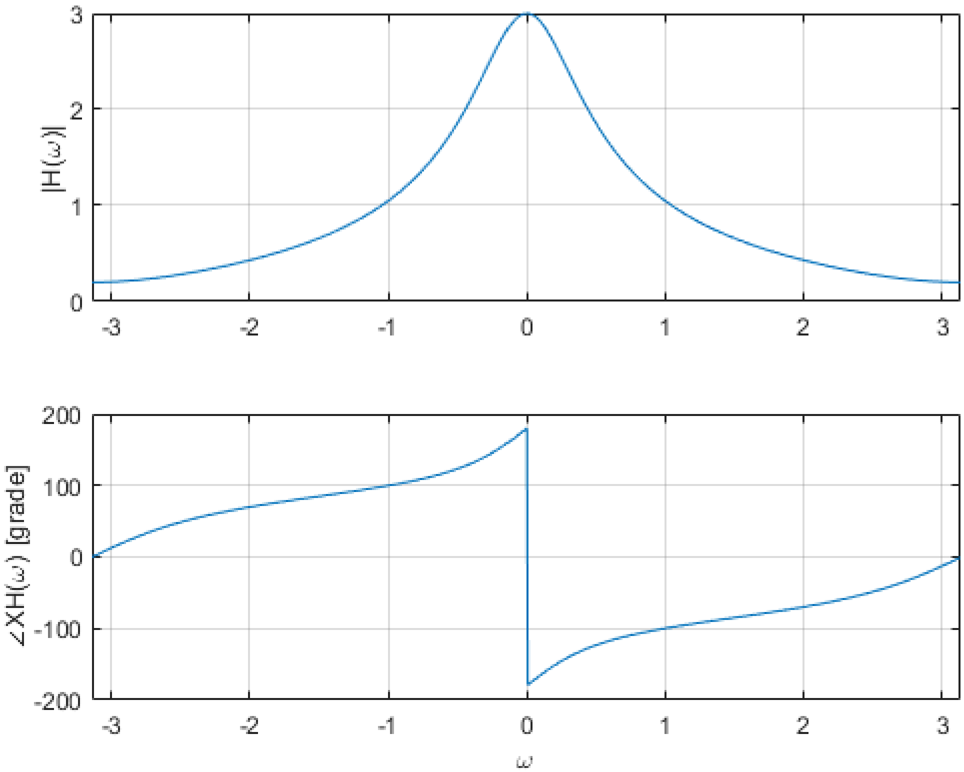
```
% Ex5_3
clear variables;
num = [1 0.5]; den = [1 -1.5]; % functia de transfer
N = 2^10;
[H, w] = freqz(num, den, N); % functia raspuns la frecventa

figure, freqz(num, den, N)
```




```
figure,
subplot(211); plot(w, mag2db(abs(H))); grid; xlim([0 pi])
ylabel('|H(\omega)| [dB]')

subplot(212); plot(w, angle(H)); grid; xlim([0 pi])
ylabel('\angle{H(\omega)} [rad]'), xlabel('\omega')
```




```
% pentru a avea reprezentarea in intervalul fundamental [-pi, pi) =>
% generam frecventele in acest interval si apoi evaluam functia raspuns la
% frecventa in frecventele respective
w1 = -pi:2*pi/N:pi-2*pi/N; % vectorul frecventa
H1 = freqz(num, den, w1);

figure,
subplot(211); plot(w1, abs(H1)); grid; xlim([-pi pi-2*pi/N]),
ylabel('|H(\omega)|')

subplot(212); plot(w1, angle(H1)*180/pi); grid; xlim([-pi pi-2*pi/N]),
ylabel('\angle{XH(\omega)} [grade]'), xlabel('\omega'),
```



Exemplul 4. Translația în domeniul timp

”Dacă un semnal este translatat în domeniul timp cu *k* eșantioane, spectrul de amplitudini rămâne nemodificat, în schimb spectrul de fază este modificat cu

$$-\omega\, k".$$

- $\text{dacă } h(n) \overset{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow} H(\omega)$ atunci $h(n-k) \overset{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow} e^{-j\omega k}H(\omega)$

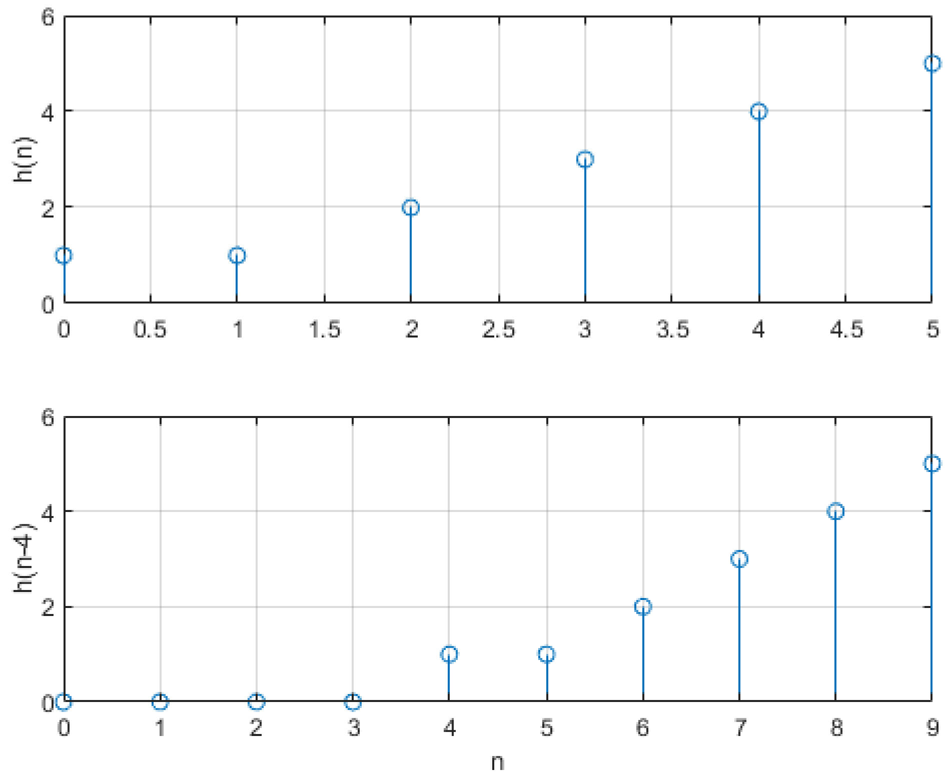
Se consideră sistemul descris prin funcția de transfer

$$H(z) = 1 + z^{-1} + 2z^{-2} + 3z^{-3} + 4z^{-4} + 5z^{-5}.$$

Se va reprezenta grafic modulul si faza funcției răspuns la frecvență corespunzătoare sistemului, precum și modulul și faza funcției răspuns la frecvență corespunzătoare secvenței răspuns la impul întârziate cu 4 eșantioane.

```
% Ex5_4
clear variables;
% raspunsul la impuls = coeficientii fdt
h = [1 1 2 3 4 5];

% raspuns la impuls intarziat cu k esantioane hk(n) = h(n-k)
k = 4; hk = [zeros(1, k) h];
```

```
figure,
subplot(211); stem(0:length(h)-1, h), grid, ylabel('h(n)')

subplot(212); stem(0:length(hk)-1, hk), grid, ylabel(['h(n-',num2str(k),')']), xlabel('n')
```

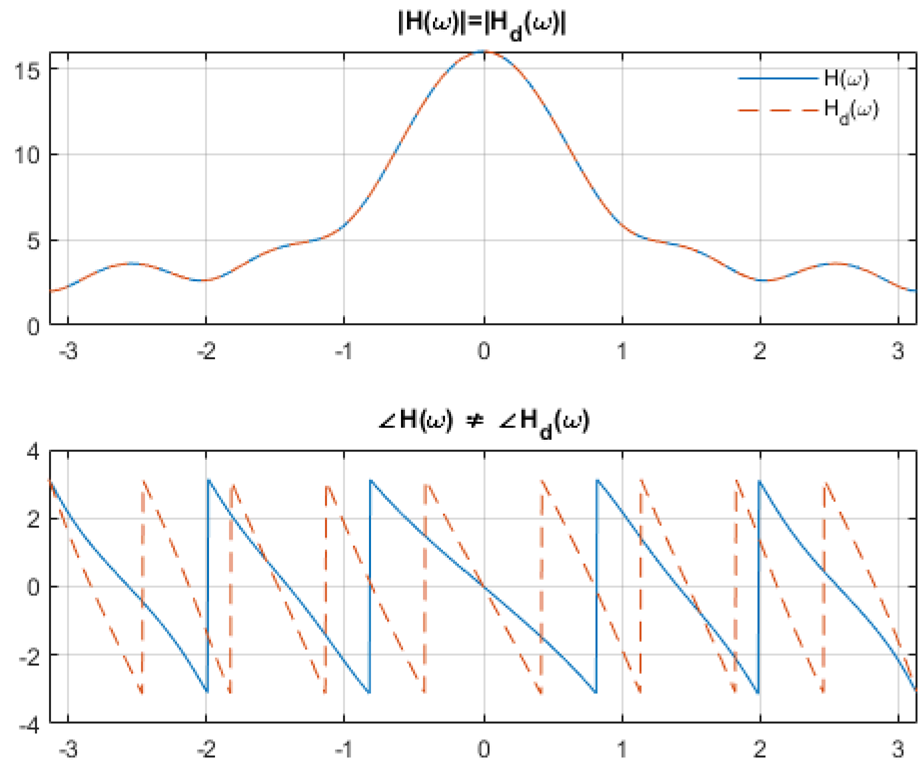


- $H(\omega) = \mathscr{F}\{h(n)\}$

```
N = 2^10; w = -pi:2*pi/N:pi-2*pi/N;
H = freqz(h, 1, w);
```

- $\mathscr{F}\{h(n-k)\} = e^{-j\omega k}H(\omega) = H_d(\omega)$

```
Hk = freqz(hk, 1, w);

figure,
subplot(211); plot(w, abs(H)), hold all,
plot(w, abs(Hk), '--'), hold off; grid, xlim([-pi pi]),
legend('H(\omega)', 'H_d(\omega)', 'Location', 'best'), legend boxoff,
title('|H(\omega)|=|H_d(\omega)|'),

subplot(212); plot(w, angle(H)), hold all,
plot(w, angle(Hk), '--'), hold off; grid, xlim([-pi pi]),
title('\angle{H(\omega)} \neq \angle{H_d(\omega)}'),
```



Dacă secvența este translatată în domeniul timp cu k eșantioane, atunci

- *Spectrul de amplitudini rămâne nemodificat*
- *Spectrul de fază se modifică cu* $-\omega k$

Exemplul 5. Translația în domeniul frecvență

”Multiplicarea unei secvențe cu o exponențială complexă

$$e^{j\omega_0 n}$$

este echivalentă cu o translație în frecvență a spectrului cu frecvența exponențialei

$$\omega_0 \text{ ”.}$$

- $\text{dacă } h(n) \stackrel{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow} H(\omega)$ atunci $h(n)e^{j\omega_0 n} \stackrel{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow} H(\omega - \omega_0)$

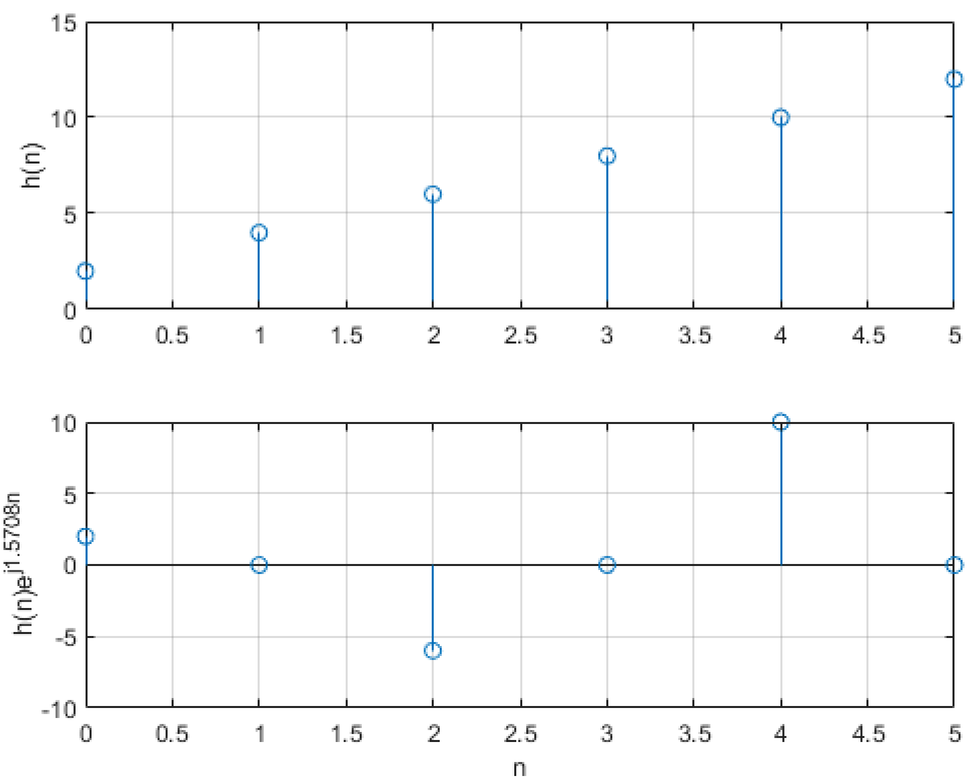
Se consideră sistemul descris prin funcția de transfer

$$H(z) = 2 + 4z^{-1} + 6z^{-2} + 8z^{-3} + 10z^{-4} + 12z^{-5}.$$

Se va reprezenta grafic modulul si faza funcției răspuns la frecvență corespunzătoare sistemului, precum și modulul și faza funcției răspuns la frecvență corespunzătoare secvenței răspuns la impuls multiplicată cu exponențiala

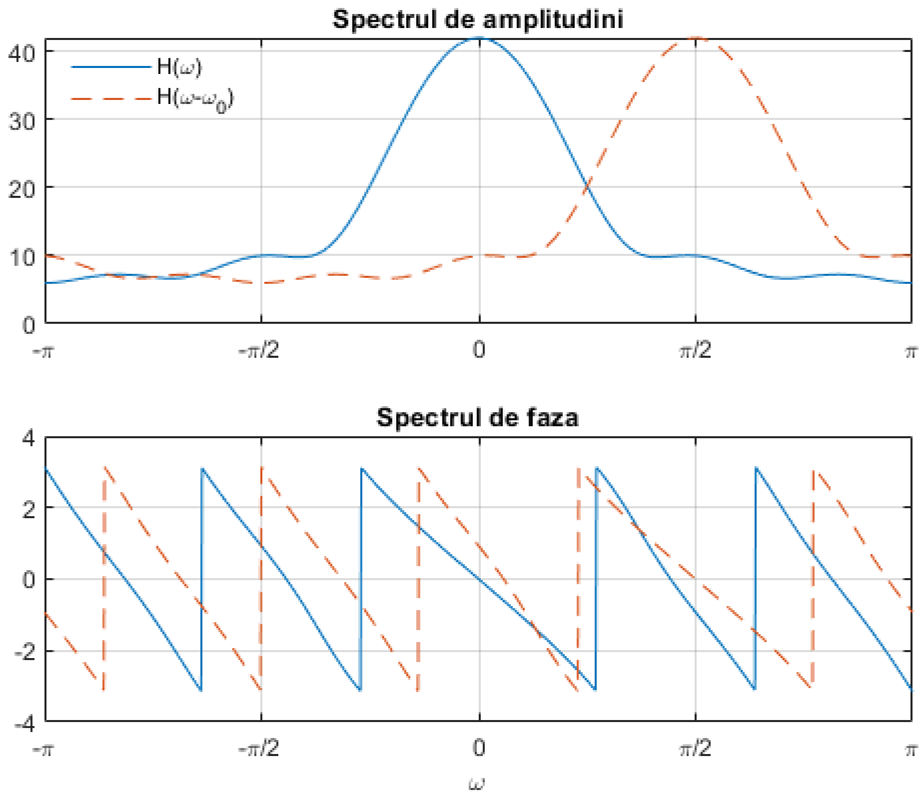
$e^{j\omega_0 n}$, unde $\omega_0 = 2\pi 0.25$.

```
% Ex5_5
clear variables;
% raspunsul la impuls = coeficientii fdt
h = [2 4 6 8 10 12];

% exponentiala cu care este multiplicat h(n)
n = 0:length(h)-1; w0 = 2*pi*0.25; e = exp(1j*w0*n);

% exp * h(n)
he = e .* h;

figure,
subplot(211), stem(n, h), grid, ylabel('h(n)')

subplot(212), stem(n, real(he)), grid,
xlabel('n'), ylabel(['h(n)e^{j', num2str(w0), 'n}']),
```




```
N = 2^10; w = -pi:2*pi/N:pi;
H = freqz(h, 1, w); He = freqz(he, 1, w);

figure,
subplot(211), plot(w, abs(H)), hold all,
plot(w, abs(He), '--'), hold off; grid, xlim([-pi pi]),
xticks([-pi:pi/2:pi]), xticklabels({'-\pi', '-\pi/2', '0', '\pi/2', '\pi'})
legend('H(\omega)', 'H(\omega-\omega_0)', 'Location', 'best'), legend boxoff,
```

```
title('Spectrul de amplitudini');

subplot(212), plot(w, angle(H)), hold all,
plot(w, angle(He), '--'), hold off; grid, xlim([-pi pi]),
xticks([-pi:pi/2:pi]), xticklabels({'-\pi', '-\pi/2', '0', '\pi/2', '\pi'})
title('Spectrul de faza'), xlabel('\omega')
```



Dacă secvența este multiplicată cu o exponențială complexă, atunci

- *Spectrul de amplitudini se deplasează cu*

$$\omega_0 \ (2\pi 0.25 = \frac{\pi}{2})$$

- *Spectrul de faza se deplasează cu*

$$\omega_0 \ (2\pi 0.25)$$

Exemplul 6. Teorema lui Parseval

Se consideră secvența

$$x(n) = y(n)\begin{cases} n, & n = \overline{0, 63}, \\ -n, & n = \overline{64, 127} \end{cases}$$

Se va demonstra Teorema lui Parseval.

```
% Ex5_6
clear variables;
x = [0:63 -(64:127)];

% partea stanga
LS = sum(abs(x).^2)
```

```
LS = 690880
```

```
% partea sdreapta
X = fft(x); N = length(X);
RS = sum(abs(X).^2)/N
```

```
RS = 6.9088e+05
```

```
if round(LS-RS, 8) == 0
    disp('Cele doua sume sunt egale');
else
    disp('Cele doua sume sunt diferite');
end
```

```
Cele doua sume sunt egale
```

Exerciții

1) Să se verifice teorema lui Parseval pentru secvențele

$$x(n) = \begin{cases} n + 2j, & n = \overline{0, 63}, \\ 0, & \text{altfel.} \end{cases} \text{ si } y(n) = \begin{cases} -n + 3j, & n = \overline{0, 63}, \\ 0, & \text{altfel.} \end{cases}$$

```
%% Ex. 1
clear variables;
```

2) Să se reprezinte grafic modulul și faza DFT-ului corespunzător secvenței

$$x(n) = \begin{cases} 1, & n = \overline{0, 5}, \\ 0, & n = \overline{6, 10}. \end{cases}$$

```
%% Ex. 2
clear variables;
```

3) Să se adauge 117 zerouri secvenței de la exercițiul anterior și să se reprezinte modulul și faza DFT-ului noii secvențe. Ce observați?

```
%% Ex. 3
clear variables;
```

4) Se consideră un semnal modulat în amplitudine, cu purtătoarea la 100 kHz și modulatoarea la 10 kHz. Pentru o frecvență de eșantionare de 1 MHz și un indice de modulație de 0.7, să se reprezinte grafic

- Purtătoarea, modulatoarea și secvența modulată în amplitudine, cu purtătoare, precum și spectrele de amplitudine corespunzătoare. Considerați secvențele de lungime 100. Câte componente se regăsesc în spectrul secvenței modulate în amplitudine și la ce frecvențe? Care sunt indicii *k* la care se regăsesc aceste componente?
- Repetați subpunctul anterior pentru secvențe de lungime 200.

```
%% Ex. 4
clear variables;
```

5) Să se evalueze DFT-urile în *N* puncte corespunzătoare secvențelor

$$x_1(n) = u(n) - u(n-20), \quad n = \overline{0,30} \text{ si } x_2(n) = \begin{cases} n-1, & n = \overline{0,5}, \\ (-1)^n, & n = \overline{6,10}. \end{cases}$$

Să se reprezinte grafic secvențele și DFT-urile obținute (partea reală, partea imaginară, modulul și faza), pentru

$$N = \{16, 256, 1024\} \text{ si } \omega \in [-\pi, \pi].$$

```
%% Ex. 5
clear variables;
```

6) Se consideră secvențele

$$x_1(n) = 0.2 \sin\left(2\pi 0.1 n + \frac{\pi}{8}\right) \text{ si } x_2(n) = 2e^{-0.2n}, \quad n = \overline{0,49}.$$

Să se reprezinte grafic cele două secvențe, precum și produsul acestora. Să se evalueze și să se reprezinte grafic modulul și faza DFT-urilor pentru

$$x_1(n), \; x_2(n) \text{ si } x_1(n)x_2(n).$$

```
%% Ex. 6
clear variables;
```

Lăcrimioara Grama
Signal Processing Group
Technical University of Cluj – Napoca
October 2020