Laborator 2: Semnale discrete în timp

Cuprins

Considerații generale

Obiectiv: definirea, clasificarea și prezentarea proprietăților semnalelor discrete în timp. Un semnal discret în timp (secvență) *x*(*n*) este definit doar pentru valori întregi ale lui *n*.

Semnale sinusoidale discrete în timp

Diagrama bloc a unui sistem de prelucare digitală de semnal

$$x(n) = A\cos(\omega n + \varphi) = A\cos(2\pi f n + \varphi), \quad -\infty < n < \infty, \ \ n \in \mathbb{Z}$$

- n – numărul eșantionului, A – amplitudinea, ω – pulsația discretă $[\text{rad/eșant}]$, f – frecvența discretă $[\text{cicluri/eșant}]$, φ – faza $[\text{rad}]$

Proprietăți

1) O sinusoidă discretă în timp este periodică doar dacă frecvența sa *f* este un număr rațional.

- O secvență este periodică cu perioada $N \in \mathbb{N}^* \Longleftrightarrow x(n) = x(n+N), \forall n \in \mathbb{Z}$
- $\min\{N\}$ – perioadă fundamentală

$$A\cos[2\pi f_0(n+N)+\varphi] = A\cos(2\pi f_0 n+\varphi) \Longleftrightarrow 2\pi f_0 N = 2\pi k,\ \ k\in\mathbb{Z}^* \Longleftrightarrow f_0 = \frac{k}{N}\in\mathbb{Q}$$

$$k, N \in \mathbb{Z} \text{ si } \mathrm{cmmdc}\{k, N\} = 1$$

2) Sinusoidele discrete în timp a căror frecvență diferă printr-un multiplu întreg de '2 pi' sunt identice

$$A\cos[(\omega_0+2\pi k)n+\varphi] = A\cos(\omega_0 n+\varphi)$$

- Toate secvențele sinusoidale

$$x_k(n) = A\cos(\omega_k n+\varphi) = A\cos(2\pi f_k n+\varphi),\ k = 0, 1, 2, \ldots,$$

unde $\omega_k = \omega_0 + 2\pi k,\ \left|\omega_0\right| \le \pi\ \left(f_k = f_0 + k,\ \left|f_0\right| \le \frac{1}{2}\right)$ sunt identice

- $-\frac{1}{2} < f \le \frac{1}{2}\ \ -\text{plajă fundamentală de frecvențe}$
- Oricare două secvențe sinusoidale sunt disctincte. dacă au frecvențe diferite din intervalul

$$\left|\omega\right| \le \pi\ \left(\left|f\right| \le \frac{1}{2}\right)$$

3) Frecvența maximă de oscilație se atinge atunci când

$$\omega = \pm\pi\ \left(f = \pm\frac{1}{2}\right)$$

Resurse MATLAB

Cautați în Help-ul MATLAB funcțiile:

- `zeros`
- `repmat`
- `ones`
- `power`
- `exp`
- `real`
- `imag`
- `sin`
- `cos`
- `square`
- `sawtooth`
- `rand`
- `randn`

Desfășurarea lucrării

Exemplul 1. Secvența impuls unitate

Se dorește reprezentarea secvenței impuls unitate în intervalul temporal dintre -5 și 15.

$$\delta(n) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$

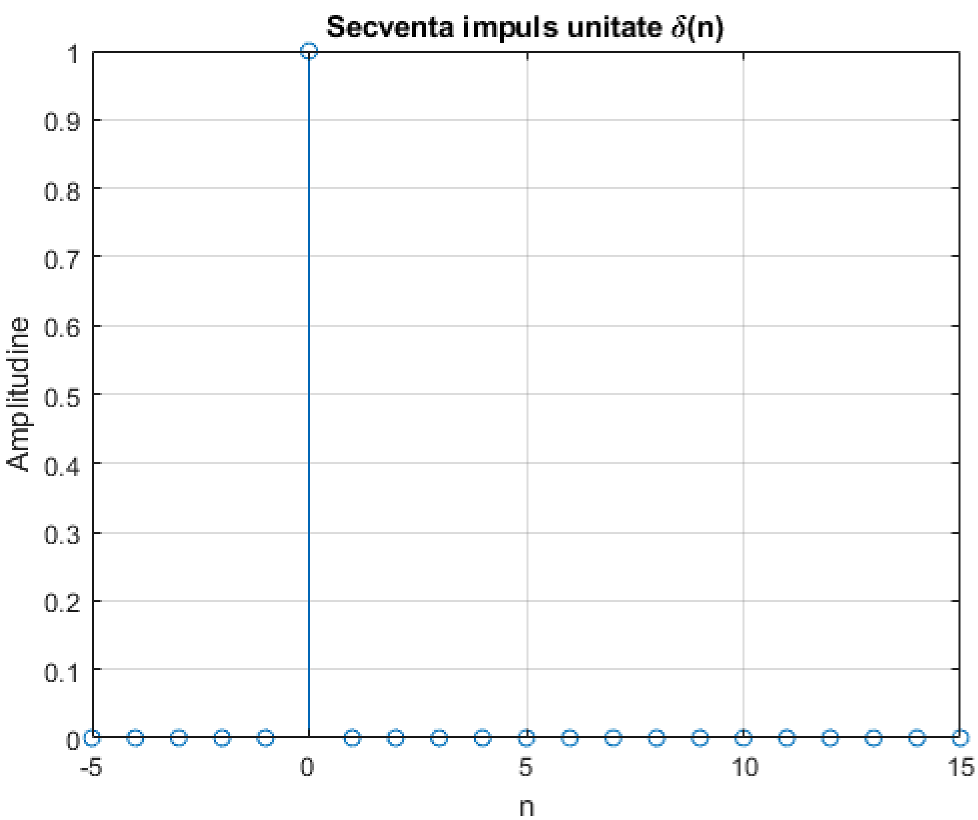
```
% Ex2_1
clear variables;
n = -5:15;
d1 = [zeros(1, 5) 1 zeros(1, 15)]
```

```
d1 = 1×21
     0     0     0     0     0     1     0     0     0     0     0     0     0⋯
```

```
d2 = 1.*(n==0)
```

```
d2 = 1×21
     0     0     0     0     0     1     0     0     0     0     0     0     0⋯
```

```
figure, stem(n, d2), grid,
xlabel('n'), ylabel('Amplitudine'), title('Secventa impuls unitate \delta(n)'),
```



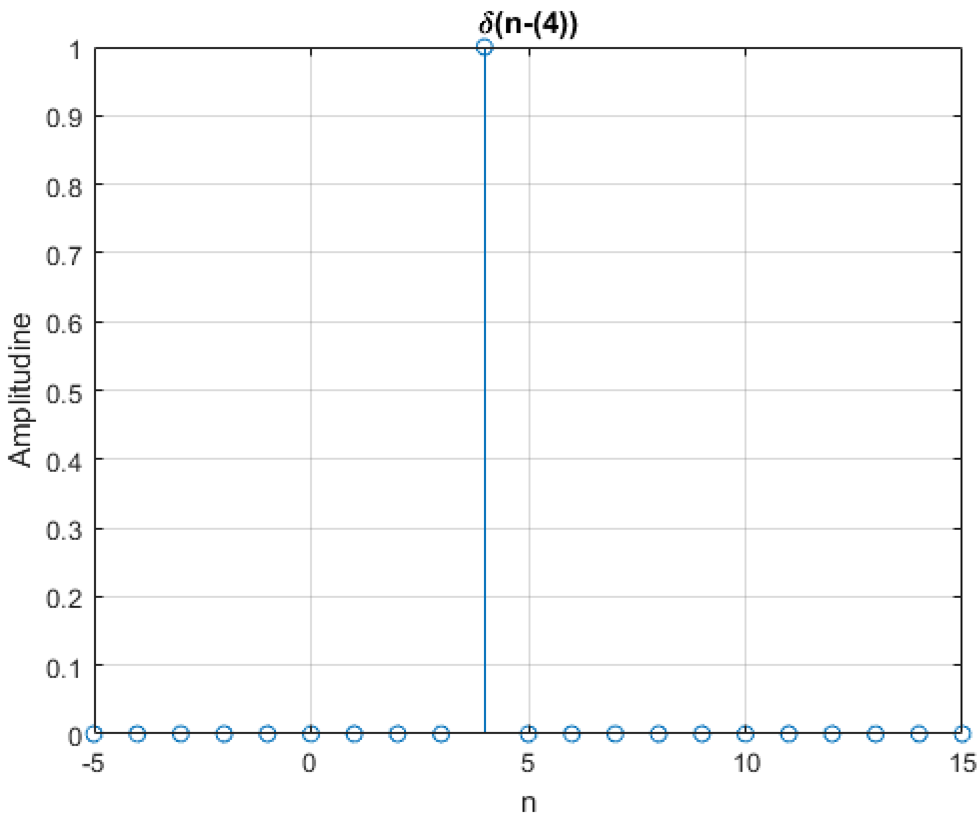
Exemplul 2. Funcție care să genereze secvența impuls unitate

Se dorește crearea unei funcții '`ImpulsUnitate`' care să genereze secvența impuls unitate translatată, între două limite date.

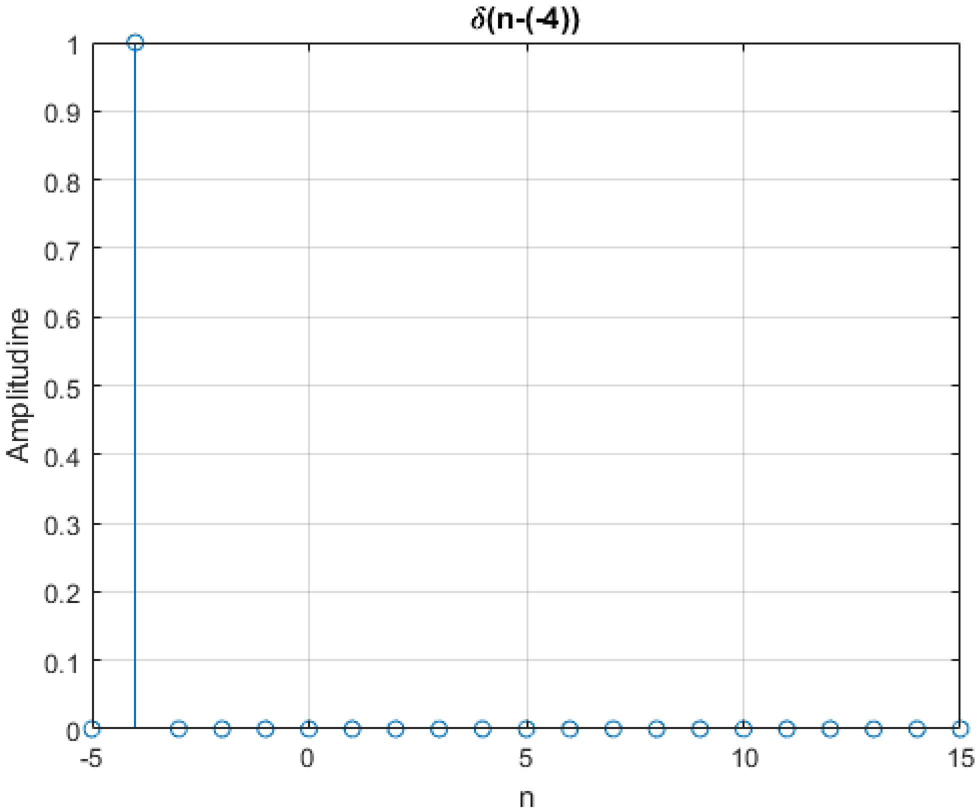
$$\delta(n-n_0) = \begin{cases} 1, & n = n_0 \\ 0, & n \neq n_0 \end{cases}$$

- În cazul unui Live Script funcțiile trebuie să apară după ce sunt apelate, sau pot fi scrise într-un fișier de tip Live Function. În cadrul acestui laborator se utilizează fișiere de tip Live Function
- Funcția poate fi apelată astfel

```
% Ex2_2
clear variables;
[d1, n1] = ImpulsUnitate(-5, 15, 4);
```




```
[d2, n2] = ImpulsUnitate(-5, 15, -4);
```

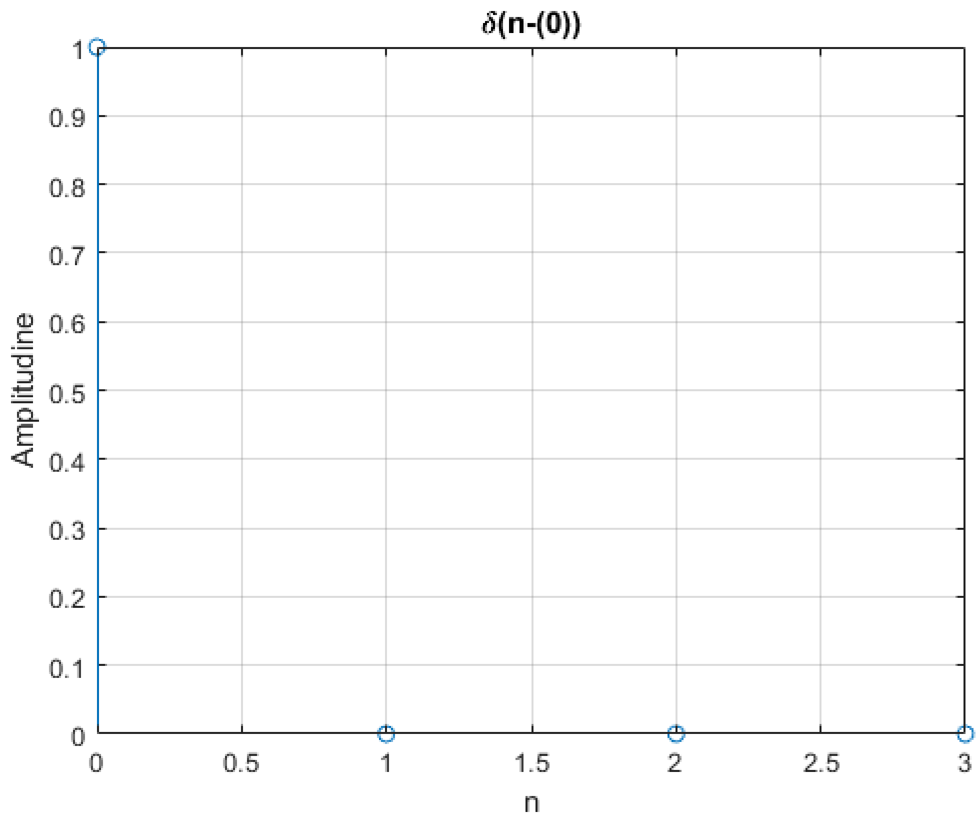


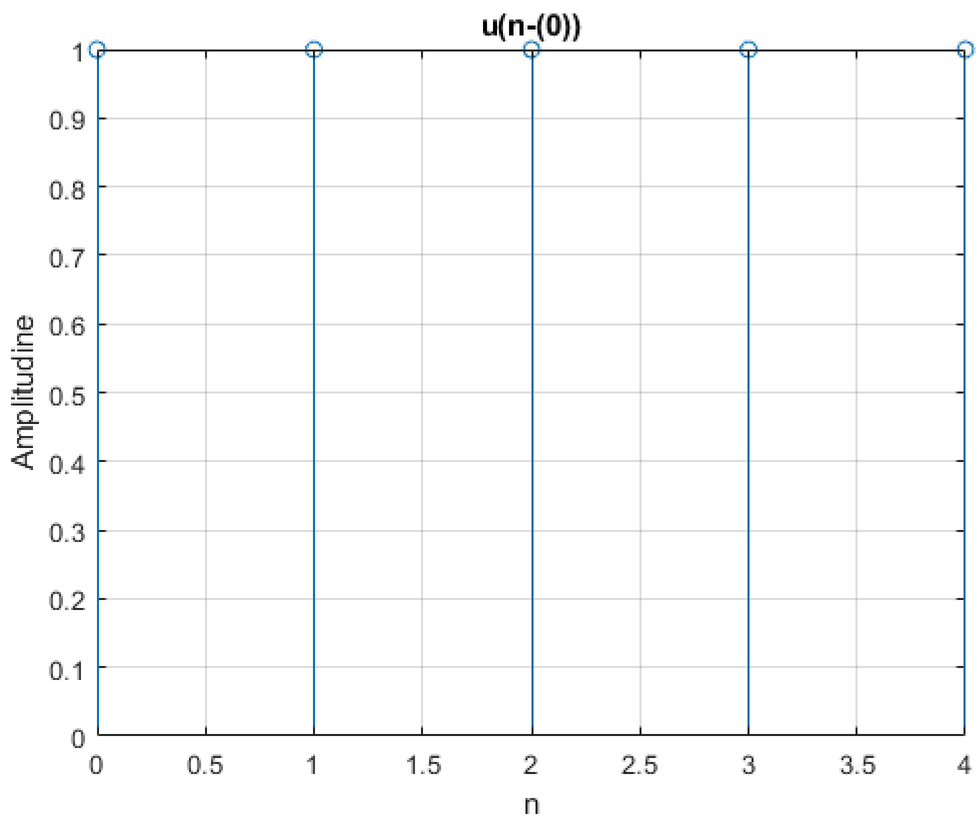
Exemplul 3. Tren de impulsuri periodice

Se dorește generarea unui tren de impulsuri periodice (5 perioade) cu perioada 4.

$$s(n) = \sum_{l=0}^{L-1} A_l \delta(n - lN) \ \text{ – periodă } N, \text{ lungime } N \cdot L$$

```
% Ex2_3
clear variables;
N = 4; L = 5; n = 0:N*L-1;
d = ImpulsUnitate(0, N-1, 0); u = TreaptaUnitate(0, L-1, 0);
```






```
s1 = d'*u; s1 = s1(:)
```

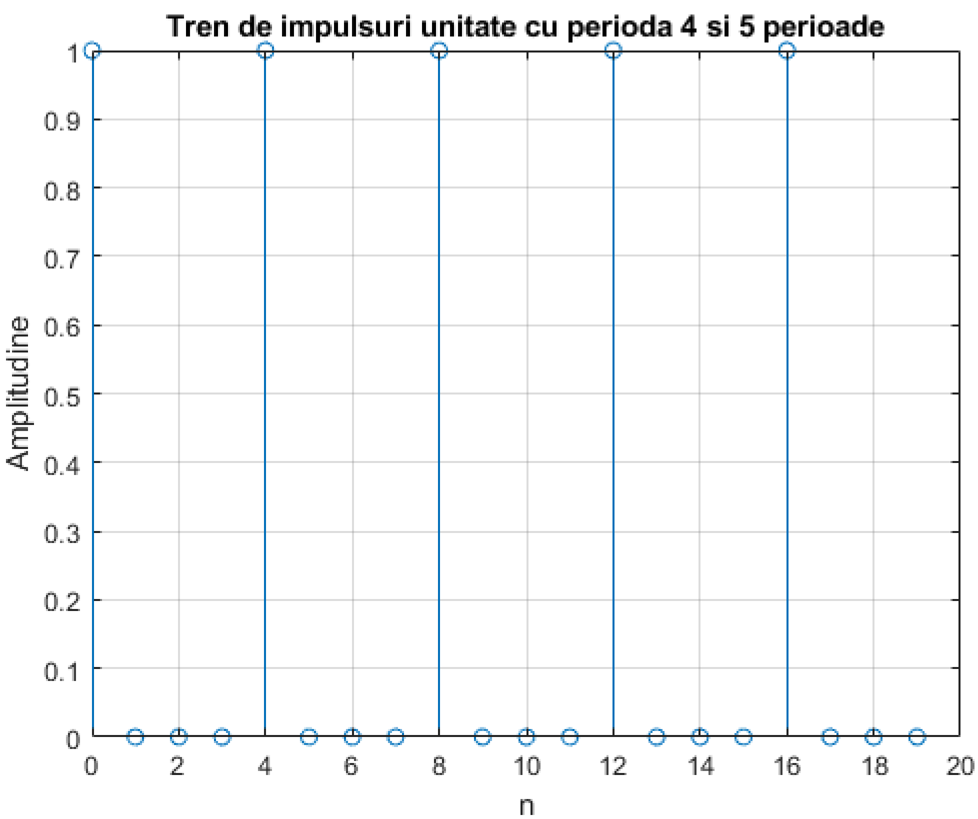
```
s1 = 20×1
     1
```

```
0
0
0
1
0
0
0
1
0
⋮
```

```
s2 = repmat(d, 1, L)
```

```
s2 = 1×20
     1     0     0     0     1     0     0     0     1     0     0     0     1⋯
```

```
figure, stem(n, s2), grid, xlabel('n'), ylabel('Amplitudine'),
title(['Tren de impulsuri unitate cu perioda ' num2str(N) ' si ' num2str(L) ' perioade'])
```



Exemplul 4. Secvența treaptă unitate

Se dorește reprezentarea secvenței treaptă unitate în intervalul temporal dintre -5 și 15.

$$u(n) = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

```
% Ex2_4
clear variables;
```

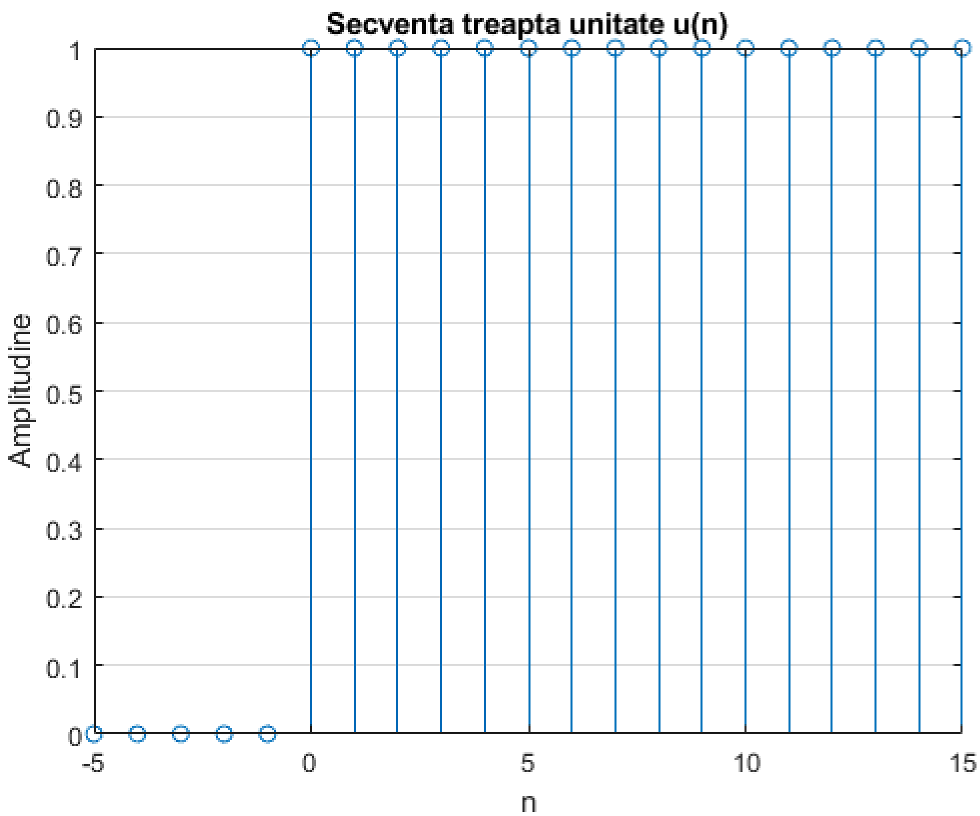
```
n = -5:15;
u1 = [zeros(1, 5) ones(1, 16)]
```

```
u1 = 1×21
     0     0     0     0     0     1     1     1     1     1     1     1     1···
```

```
u2 = 1.*(n>=0)
```

```
u2 = 1×21
     0     0     0     0     0     1     1     1     1     1     1     1     1···
```

```
figure, stem(n, u2), grid,
xlabel('n'), ylabel('Amplitudine'), title('Secventa treapta unitate u(n)'),
```



Exemplul 5. Funcție care să genereze secvența treaptă unitate

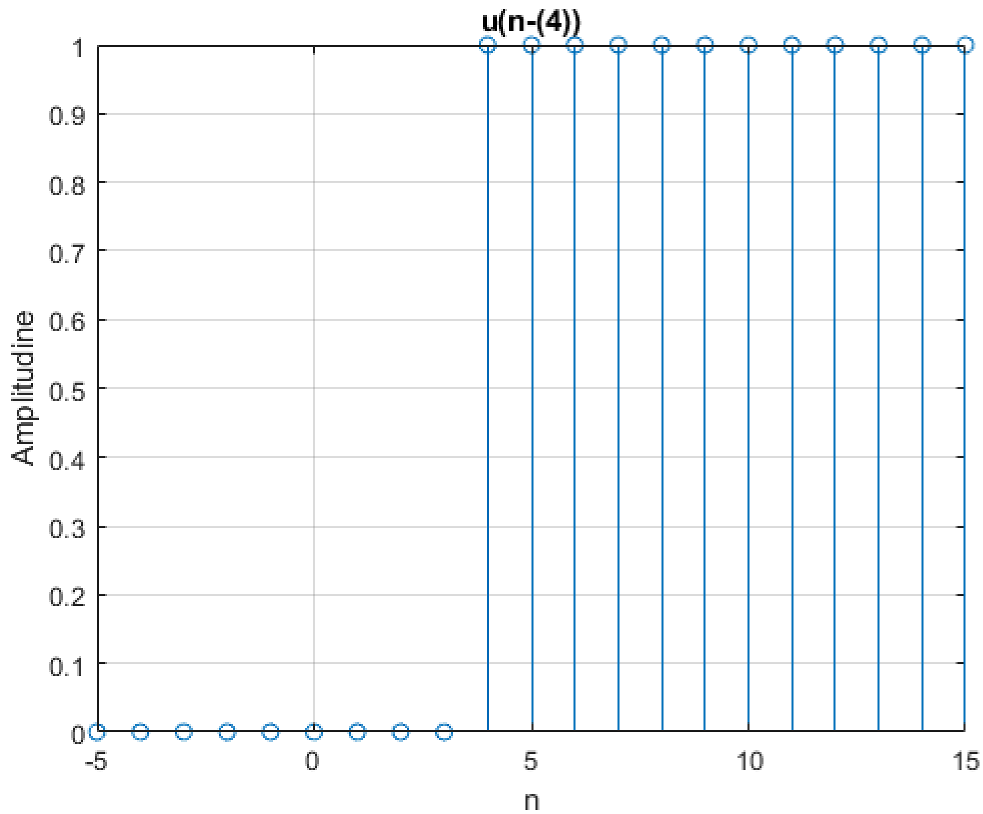
Se dorește crearea unei funcții '`TreaptaUnitate`' care să genereze secvența treaptă unitate translatată, între două limite date.

$$u(n-n_0) = \begin{cases} 1, & n \geq n_0 \\ 0, & n < n_0 \end{cases}$$

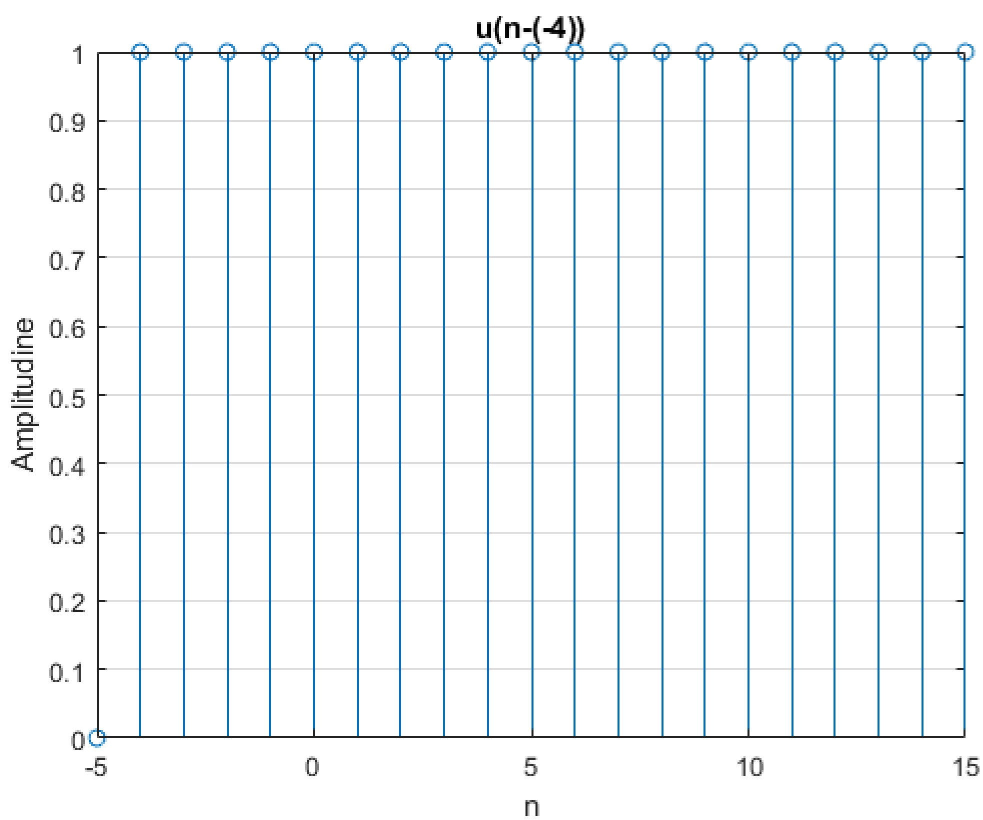
- Funcția poate fi apelată astfel

```
% Ex2_5
clear variables;
```

```
[u1, n1] = TreaptaUnitate(-5, 15, 4);
```




```
[u2, n2] = TreaptaUnitate(-5, 15, -4);
```



Exemplul 6. Secvență exponențială reală

Se dorește generarea și reprezentarea grafică a exponențialei reale

$$x(n) = 0.5 \cdot 1.5^n,\ n = \overline{0,20}$$

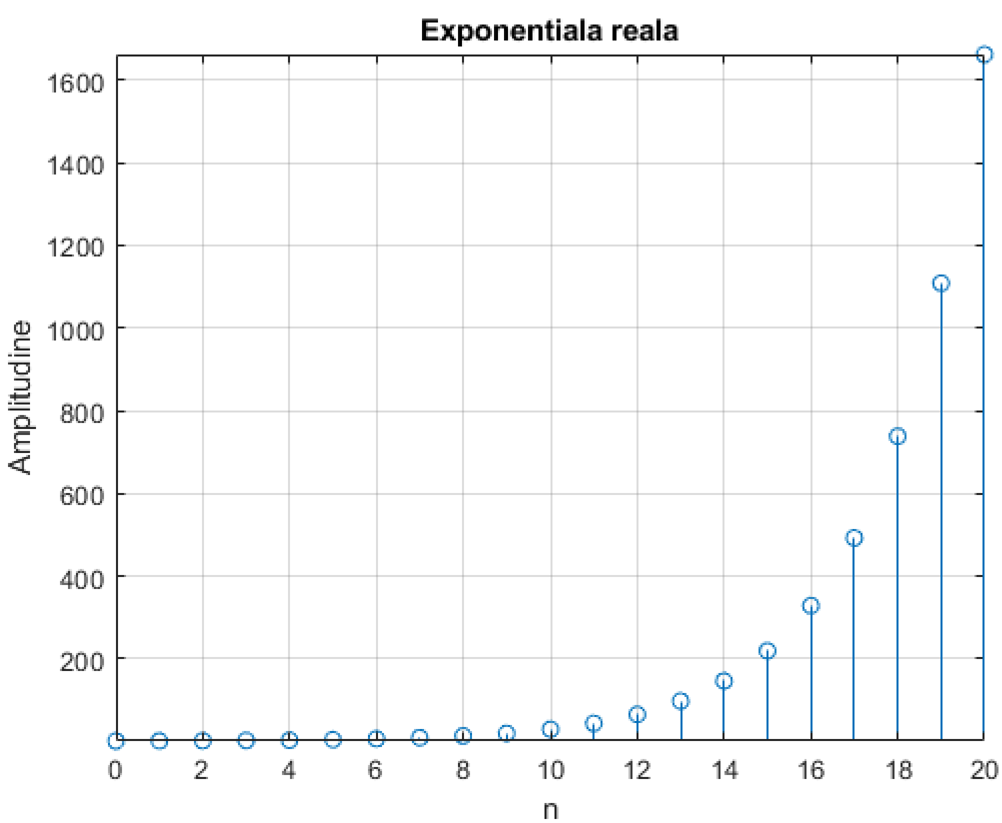
```
% Ex2_6
clear variables;
n = 0:20;
x1 = 0.5*1.5.^n
```

```
x1 = 1×21
     5.000000000000000e-01     7.500000000000000e-01     1.125000000000000e+00 ···
```

```
x2 = 0.5*power(1.5, n)
```

```
x2 = 1×21
     5.000000000000000e-01     7.500000000000000e-01     1.125000000000000e+00 ···
```

```
figure, stem(n, x2), grid, axis([0 n(end) min(x2) max(x2)]),
xlabel('n'), ylabel('Amplitudine'), title('Exponentiala reala')
```



Exemplul 7. Secvență exponențială complexă

Se dorește generarea și reprezentarea grafică a exponențialei complexe

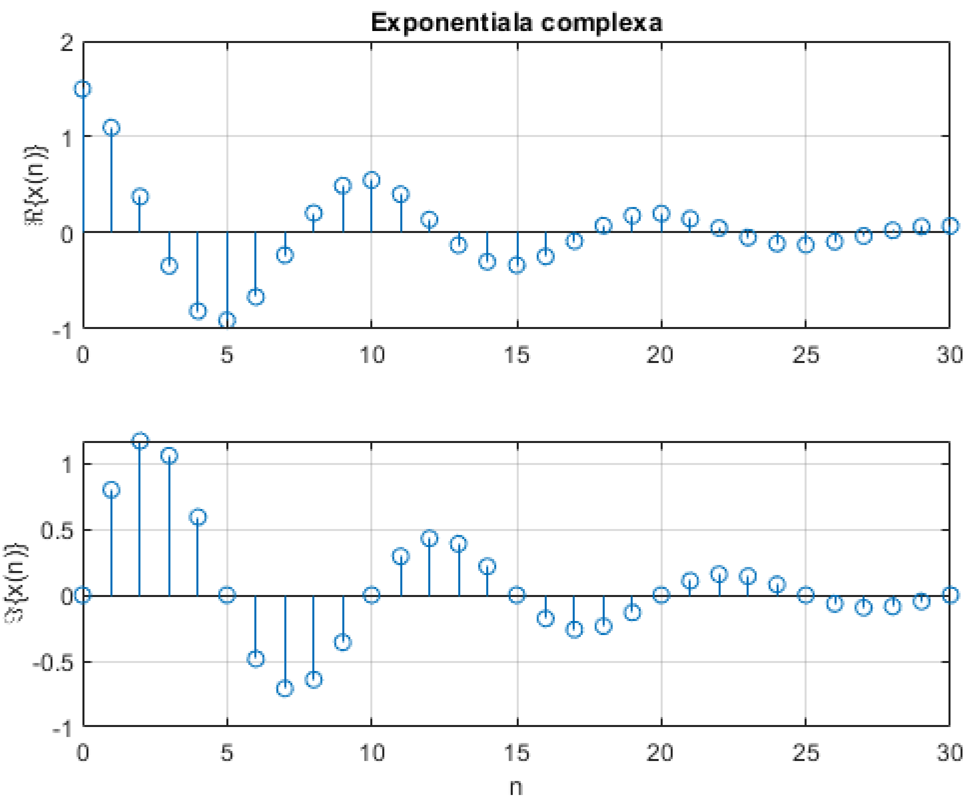
$$x(n) = 1.5 \cdot \exp\left[\left(-\frac{1}{10} + j\frac{\pi}{5}\right)n\right],\ \ n = \overline{0, 30}$$

- Deoarece secvența considerată are valori complexe, se vor putea ilustra grafic doar partea reală, respectiv partea imaginară a exponențialei

$$x(n) = 1.5e^{-\frac{1}{10}n} e^{j\frac{\pi}{5}n} = 1.5e^{-\frac{1}{10}n}\left(\cos\frac{\pi n}{5} + j\sin\frac{\pi n}{5}\right)$$

$$\Longrightarrow \Re\{x(n)\} = 1.5e^{-\frac{n}{10}}\cos\frac{\pi n}{5},\quad \Im\{x(n)\} = 1.5e^{-\frac{n}{10}}\sin\frac{\pi n}{5}$$

```
% Ex2_7
clear variables;
n = 0:30;
x = 1.5*exp((-1/10+1j*pi/5)*n);
figure,
subplot(211), stem(n, real(x)), grid,
title('Exponentiala complexa'), ylabel('\Re\{x(n)\}'),
subplot(212), stem(n, imag(x)), grid,
xlabel('n'), ylabel('\Im\{x(n)\}'),
```

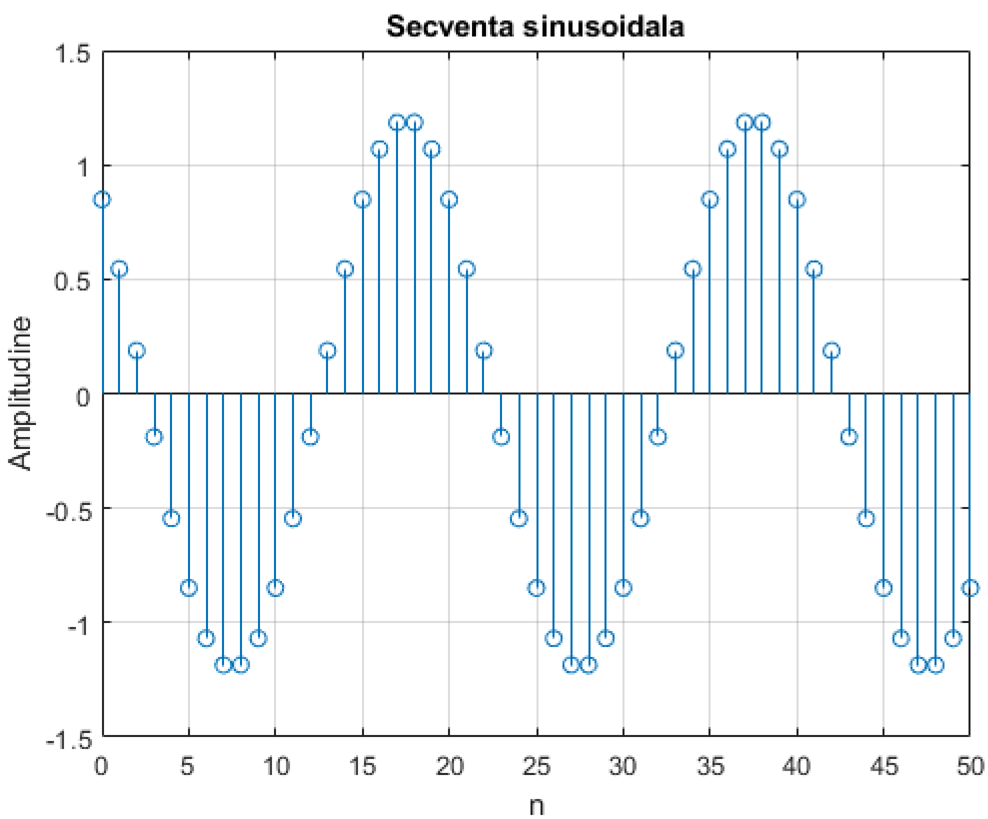


Exemplul 8. Secvență sinusoidală

Să se genereze și să se reprezinte grafic o secvență sinusoidală cu amplitudine 1.2, frecvență 0.05 și defazaj de 45 grade, de lungime 51.

$$x(n) = 1.2\cos\left(2\pi 0.05n + \frac{\pi}{4}\right),\ n = \overline{0,50}$$

```
% Ex2_8
clear variables;
n = 0:50;
x = 1.2*cos(2*pi*0.05*n+pi/4);
figure, stem(n, x), grid,
title('Secventa sinusoidala'), ylabel('Amplitudine'), xlabel('n'),
```



Exemplul 9. Secvență modulată în amplitudine

Primul semnal modulat în amplitudine a fost transmis în 1901 de către inginerul canadian Reginald Fessenden. El a folosit o transmisie cu scântei continuă și a plasat un microfon de carbon pe linia de alimentare a antenei. La impactul cu microfonul, undele sonore i-au variat rezistența și acest lucru a dus la variația intensității transmisiei. Deși "nefinisate", semnalele au putut fi auzite la o distanță de câteva sute de metri (era un "sunet enervant" cauzat de scânteie).

Se dorește generarea și reprezentarea grafică a unei secvențe modulate în amplitudine (cu și fără purtătoare). Pentru semnalul purtător amplitudinea este 1.5, frecvența 0.1 și faza 0. Pentru semnalul modulator amplitudinea este 1.1, frecvența 0.01 și faza 0. Se consideră un indice de modulație *m* = 0.3.

- Secvența modulată în amplitudine cu purtătoare

$$y_{\mathrm{MA}}(n) = [1 + m\,x_m(n)]x_p(n)$$

- Secvența modulată în amplitudine cu purtătoare suprimată

$$y_{\mathrm{MA,PS}}(n) = m\,x_m(n)x_p(n)$$

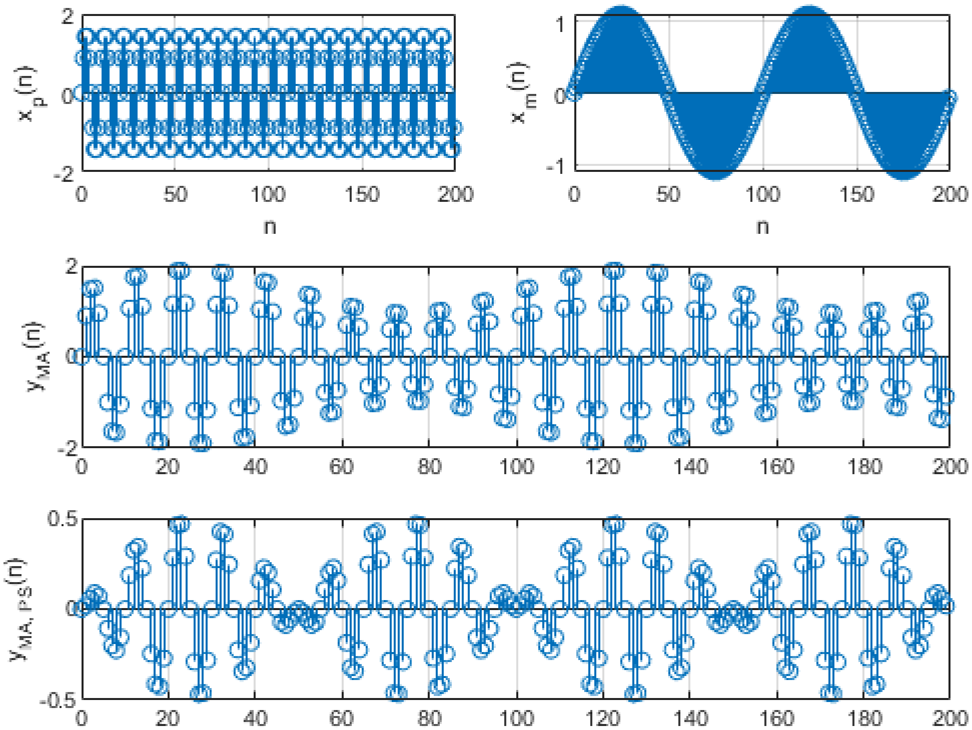
```
% Ex2_9
clear variables;
n = 0:199; m = 0.3
```

```
m = 
     3.000000000000000e-01
```

```
xp = 1.5*sin(2*pi*0.1*n); % secventa purtatoare
xm = 1.1*sin(2*pi*0.01*n); % secventa modulatoare

yma = (1+m*xm).*xp; % secventa modulata in amplitudine cu purtatoare
ymaps = m*xm.*xp; % secventa modulata in amplitudine cu purtatoare suprimata

figure,
subplot(321), stem(n, xp), grid, xlabel('n'), ylabel('x_p(n)'),
subplot(322), stem(n, xm), grid, xlabel('n'), ylabel('x_m(n)'),
subplot(312), stem(n, yma), grid, ylabel('y_{MA}(n)'),
subplot(313), stem(n, ymaps), grid, ylabel('y_{MA, PS}(n)'),
```



Exerciții

1) Să se genereze și să se reprezinte grafic o secvență rampă, de lungime 20, cu valoare inițială 0 și valoare finală 100.

```
%% Ex. 1
clear variables;
```

2) Să se reprezinte grafic secvențele

$$x_1(n) = e^{-0.1n}\sin\left(2\pi 0.1n + \frac{\pi}{4}\right) \text{ si } x_2(n) = e^{-0.1n}\cos\left(2\pi 0.1n + \frac{\pi}{4}\right),$$

generându-se doar secvența

$$x(n) = e^{-0.1n + j\left(2\pi 0.1n + \frac{\pi}{4}\right)}.$$

```
%% Ex. 2
clear variables;
```

3) Să se reprezinte grafic secvența

$$x(n) = 3\sin(4\pi n) + 2\cos(0.72\pi n),\ n = \overline{0, 100}.$$

Este această secvență periodică? Dacă da, care este perioada?

```
%% Ex. 3
clear variables;
```

4) Să se reprezinte grafic secvența de lungime 20

$$x(n) = \begin{cases} \sin(0.2n), & n > 10 \\ 0, & n \le 10 \end{cases},\ n \in \mathbb{N}.$$

```
%% Ex. 4
clear variables;
```

5) Să se reprezinte grafic secvența de lungime 100

$$x(n) = \begin{cases} \dfrac{\sin(0.1n)}{0.1n}, & n \ne 0 \\ 1, & n = 10 \end{cases},\ n \in \mathbb{N}.$$

```
%% Ex. 5
clear variables;
```

6) Să se genereze 16 perioade ale unei secvențe periodice, acărei perioadă conține 5 eșantioane de 1 urmate de 8 eșantioane de 0.

```
%% Ex. 6
clear variables;
```

7) Să se genereze 3 secvențe sinusoidale cu amplitudini, frecvențe și faze diferite, și să se reprezinte grafic simultan pe ecran (minim o perioadă).

```
%% Ex. 7
clear variables;
```

8) Să se genereze și să se reprezinte grafic 5 perioade corespunzătoare unei secvențe rectangulare ('`square`') și, respectiv, dinte de fierăstrău ('`sawtooth`'), având 15 eșantioane pe perioadă.

```
%% Ex. 8
clear variables;
```

9) Să se genereze o secvență rampă, de lungime 101, cu valoare inițială 0 și increment 0.01. Să se reprezinte secvența pentru

$$20 \le n \le 30.$$

```
%% Ex. 9
clear variables;
```

10) Să se reprezinte grafic secvența obținută prin însumarea unei sinusoide cu un zgomot uniform, cu amplitudinea de 10 ori mai mică.

```
%% Ex. 10
clear variables;
```

11) Să se genereze și să se reprezinte grafic următoarele secvențe

$$x_1(n) = \begin{cases} n(n-2), & n = \overline{-5, 10} \\ 10, & \text{în rest} \end{cases}, \quad n = \overline{-10, 20}$$

$$x_2(n) = \begin{cases} \sum_{i=0}^{8} a(n-2i), & n = \overline{0, 10} \\ 50, & \text{în rest} \end{cases}, \quad n = \overline{0, 15}; \qquad a = \begin{cases} n+3, & n = \overline{0, 5} \\ 0.5, & \text{în rest} \end{cases}$$

```
%% Ex. 11
clear variables;
```

12) Să se scrie o funcție MATLAB pentru a genera valorile corespunzătoare unei secvențe sinusoidale de lungime finită. Funcția trebuie să aibă 5 argumente de intrare: 3 pentru parametrii sinusoidei și 2 pentru a specifica domeniul temporal. Sinusoida trebuie și afișată grafic.

- `function x = Sinusoida(A, f, fi, nl, nu)`

Să se apeleze funcția, considerând parametrii:

- $A = 2, f = \frac{1}{15}, \varphi = \frac{\pi}{5}, n = \overline{0, 60}$

```
%% Ex. 12
clear variables;
```

13) Să se modifce funcția anterioară, astfel încât să returneze și un vector care conține indecșii sinusoidei.

- `function [x, n] = Sinusoida1(A, f, fi, nl, nu)`

Să se apeleze funcția, considerând parametrii:

- $A = 7, f = \frac{1}{17}, \varphi = \frac{\pi}{7}, n = \overline{0, 90}$.

```
%% Ex. 13
clear variables;
```

14) Să se genereze și să se reprezinte grafic secvențele de lungime 100:

$x_1(n) = \delta(n) - \delta(n-5);$ $x_2(n) = u(n-5);$ $x_3(n) = n[u(n) - u(n-10)];$ $x_4(n) = \exp[(-0.2 + j0.3)n];$
$x_5(n) = n[u(n) - u(n-10)] + \exp[(-0.2 + j0.3)n];$ $x_6(n) = n[u(n) - u(n-10)] + \exp(0.3n)[u(n-10) - u(n-20)]$

```
%% Ex. 14
clear variables;
```

15) Să se adauge un zgomot uniform cu medie 0 și amplitudine maximă 0.2, secvențelor de la exercițiul 16.

```
%% Ex. 15
clear variables;
```

16) Să se adauge un zgomot Gaussian cu medie 0 și varianță 0.1, secvențelor de la exercițiul 16.

```
%% Ex. 16
clear variables;
```

17) Să se genereze și să se reprezinte grafic următoarele secvențe. Abscisa *n* trebuie să includă doar domeniul indicat.

$x_1(n) = 0.5\delta(n),\ n = \overline{-5, 10};$ $x_2(n) = 1.5\delta(n-5),\ n = \overline{-5, 10};$ $x_3(n) = 2.5\delta(n+5),\ n = \overline{-5, 10};$

$x_4(n) = 0.5u(n),\ n = \overline{-4, 14};$ $x_5(n) = 1.5u(n-2),\ n = \overline{-4, 14};$ $x_6(n) = 2.5u(n+2),\ n = \overline{-4, 14};$

$x_7(n) = 1.2\sin\left(2\pi 0.11n + \frac{\pi}{11}\right)u(n),\ n = \overline{-4, 140};$ $x_8(n) = 1.1\sin\left(\frac{\pi n}{3} - \frac{\pi}{7}\right)u(n-2),\ n = \overline{-4, 140};$

$x_9(n) = 2\cos\left(\frac{\pi n}{\sqrt{5}} + \frac{\pi}{5}\right)u(n+2),\ n = \overline{-4, 140};$ $x_{10}(n) = \ln\left|\sin\left(\frac{\pi n}{10}\right) - \cos\left(\frac{\pi n}{10}\right)\right|,\ n = \overline{-10, 90};$

$x_{11}(n) = \ln\left|\sin\left(\frac{\pi n}{10}\right) - \cos\left(\frac{\pi n}{10}\right)\right|u(n-2),\ n = \overline{-10, 90};$ $x_{12}(n) = \ln\left|\sin\left(\frac{\pi n}{10}\right) - \cos\left(\frac{\pi n}{10}\right)\right|u(n+2),\ n = \overline{-10, 90}$

```
%% Ex. 17
clear variables;
```

Lăcrimioara Grama
Signal Processing Group
Technical University of Cluj – Napoca
October 2020