Laborator 4: Sisteme discrete liniare și invariante în timp

Cuprins

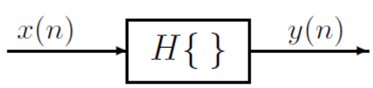
Considerații generale.. 1
Sisteme discrete LTI 1
Clasificarea sistemelor LTI..2
Răspunsul sistemelor LTI 3
Resurse MATLAB.. 3
Desfășurarea lucrării.. 4
Exemplul 1. Liniaritatea sistemelor discrete în timp.. 4
Exemplul 2. Invarianța în timp a sistemelor discrete..5
Exemplul 3. Evaluarea răspunsului la impuls..7
Exemplul 4. Analiza sistemelor discrete LTI descrise prin ecuații cu diferențe finite și coeficienți constanți.. 9
Exemplul 5. Caracteristicile răspunsului la frecvență.. 12
Exemplul 6. Răspunsul unui sistem LTI la o excitație sinusoidală.. 15
Exerciții.. 17

Considerații generale

Obiectiv: prezentarea sistemelor discrete liniare și invariante în timp (LTI - Linear Time Invariant).

Sisteme discrete LTI

Un sistem discret în timp este un dispozitiv, sau un algoritm, care operează asupra unui semnal discret în timp, numit intrare sau excitație, pe baza unei reguli bine dfinite, pentru a produce la ieșire un alt semnal discret în timp, numit ieșire sau răspuns al sistemului.



$$y(n) = H\{x(n)\}; \quad x(n) \overset{H}{\longleftrightarrow} y(n)$$

- H – transformarea (operatorul); $x(n)$ – excitația; $y(n)$ – ieșirea

Un sistem LTI este descris printr-o ecuație cu diferențe finite și coeficienți constanți de ordin *N*

$$y(n) = -\sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k)$$

- În domeniul-*z*: funcția de sistem/transfer

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}$$

- În domeniul frecvență: funcția de răspuns la frecvență

$$H(\omega) = H(z)\big|_{z=e^{j\omega}} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k e^{-j\omega k}}{1 + \sum_{k=1}^{N} a_k e^{-j\omega k}}$$

Clasificarea sistemelor LTI

1) Sistem **static** (fără memorie):

$$y(n) = F\{x(n)\}$$

2) Sistem **dinamic**:

$$y(n) = F\{x(n), x(n-1), \ldots, x(n-N)\}$$

3) Sistem **invariant în timp**:

$$\text{dacă } y(n) = H\{x(n)\} \Longrightarrow y(n-k) = H\{x(n-k)\}, \ \forall k \in \mathbb{Z}$$

- Se excită sistemul cu o intrare arbitrară $x(n)$ care produce răspunsul $y(n)$
- Se întârzie semnalul de intrare cu k unități și se recalculează ieșirea: $y(n, k) = H\{x(n-k)\}$
- Dacă $y(n,\ k) = y(n-k), \forall\, k \Longrightarrow$ sistem invariant în timp

4) Sistem **variant în timp**:

$$\text{dacă } y(n-k) \neq y(n-k), \text{ chiar și pentru un singur } k \Longrightarrow \text{sistem variant în timp}$$

5) Sistem **liniar**: respectă principiul superpoziției

$$H\{a_1x_1(n) + a_2x_2(n)\} = a_1H\{x_1(n)\} + a_2H\{x_2(n)\}, \ \forall a_1, a_2 \in \mathbb{R}/\mathbb{C}$$

6) Sistem **neliniar**: nu respectă principiul superpoziției

7) Sistem **cauzal**:

$$\text{dacă } x(n) = 0, \forall n < n_0 \Longrightarrow y(n) = H\{x(n)\} = 0, \forall n < n_0$$

8) Sistem **necauzal**: ieșirea depinde și de intrările viitoare

9) Sistem BIBO **stabil**:

$$\text{dacă } |x(n)| \leq M_x < \infty \ \Longrightarrow |y(n)| = H\{x(n)\} \leq M_y < \infty$$

10) Sistem **instabil**: pentru o secvență de intrare mărginită ieșirea este nemărginită

Răspunsul sistemelor LTI

- Răspuns la impuls:

$$h(n) = H\{\delta(n)\}$$

- Răspuns la treaptă unitate:

$$H\{u(n)\} = \sum_{n=0}^{\infty} h(n-k)$$

- Răspuns la exponențială complexă:

$$x(n) = \mathrm{A}e^{j\omega_0 n} \implies y(n) = AH(\omega_0)e^{j\omega_0 n}$$

- Răspuns la secvențe periodice:

$$x(n) = x(n+N) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \implies y(n) = y(n+N) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k H\left(\frac{2\pi k}{N}\right) e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

Resurse MATLAB

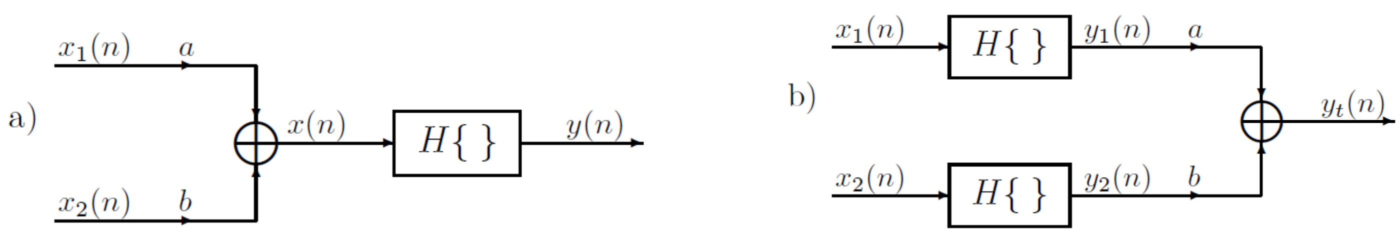
Cautați în Help-ul MATLAB funcțiile:

- `filter`
- `residuez`
- `impz`
- `filtic`
- `isstable`
- `poly`
- `filt`
- `freqz`
- `mag2db`
- `rad2deg`
- `seqperiod`
- `find`
- `zplane`
- `isstable`

Desfășurarea lucrării

Exemplul 1. Liniaritatea sistemelor discrete în timp

Liniaritatea unui sistem poate fi evaluată pe baza următoarelor diagrame:



a) $y(n) = H\{x(n)\} = H\{ax_1(n) + bx_2(n)\}$

b) $y_t(n) = ay_1(n) + by_2(n) = aH\{x_1(n)\} + bH\{x_2(n)\}$

H este liniar $\Longleftrightarrow$ $y(n) = y_t(n)$

Se va demosntra liniaritatea sistemului descris prin funcția de transfer

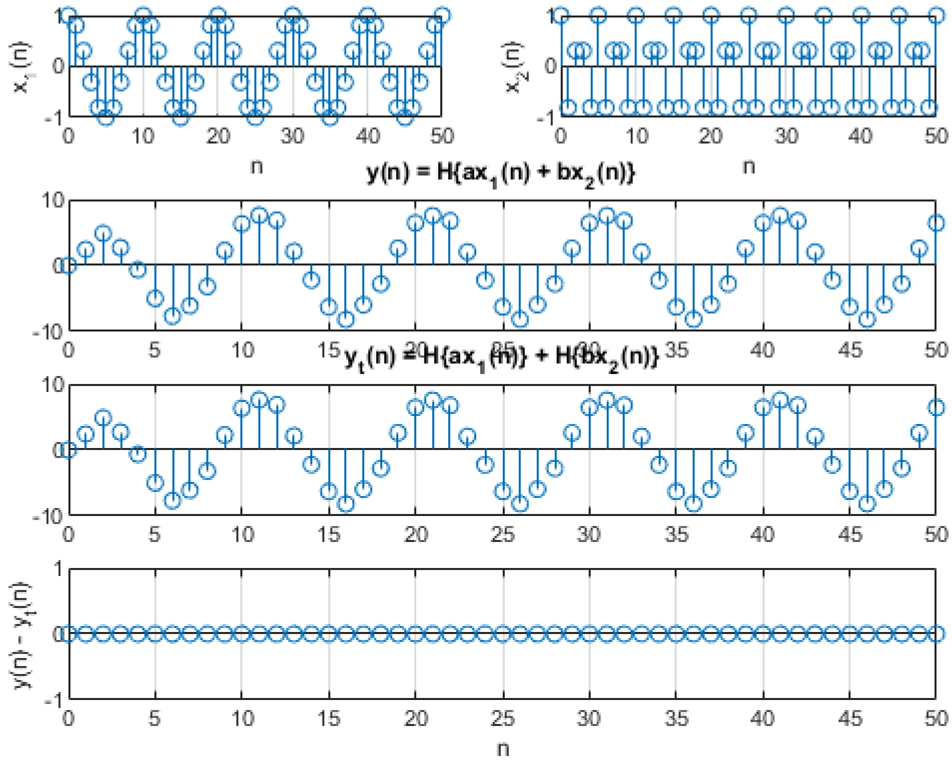
$$H(z) = \frac{0.5 + 0.5z^{-1}}{1 - z^{-1} + 0.5z^{-2}},$$

considerând secvențele

$$x_1(n) = \cos(2\pi 0.1 n) \text{ si } x_1(n) = \cos(2\pi 0.4 n), \text{ unde } n = \overline{0, 50}$$

și constantele a = 3 și b = -3.

```
% Ex4_1
clear variables;
n = 0:50; a = 3; b = -3;
x1 = cos(2*pi*0.1*n); x2 = cos(2*pi*0.4*n);
num = 0.5*[1 1]; den = [1 -1 0.5];
% a)
x = a*x1 + b*x2; y = filter(num, den, x);
% b)
y1 = filter(num, den, x1); y2 = filter(num, den, x2);
yt = a*y1 + b*y2;
% y(n) - y_t(n)
d = round(y - yt, 10);

% Metoda 1 - grafic
figure,
subplot(421), stem(n, x1), grid, xlabel('n'), ylabel('x_1(n)'),
subplot(422), stem(n, x2), grid, xlabel('n'), ylabel('x_2(n)'),

subplot(412), stem(n, y), grid, title('y(n) = H\{ax_1(n) + bx_2(n)\}'),

subplot(413), stem(n, yt), grid, title('y_t(n) = H\{ax_1(n)\} + H\{bx_2(n)\}'),

subplot(414), stem(n, d), grid, xlabel('n'), ylabel('y(n) - y_t(n)'),
```



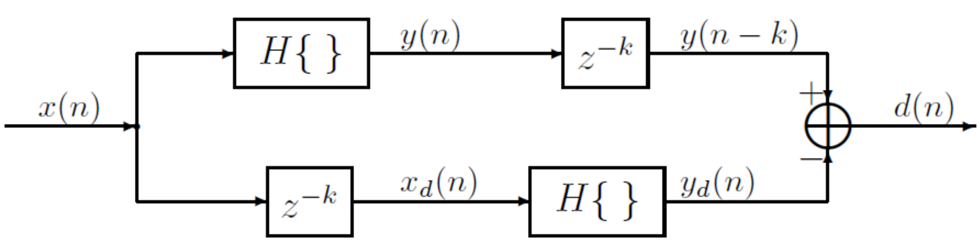
- Din ultimul grafic se observă că sistemul este liniar

```
% Metoda 2
if d == 0
    disp('Sistemul este liniar')
else
    disp('Sistemul este neliniar')
end
```

```
Sistemul este liniar
```

Exemplul 2. Invarianța în timp a sistemelor discrete

Modul de evaluare a invarianței în timp a unui sistem este descris în figura următoare.



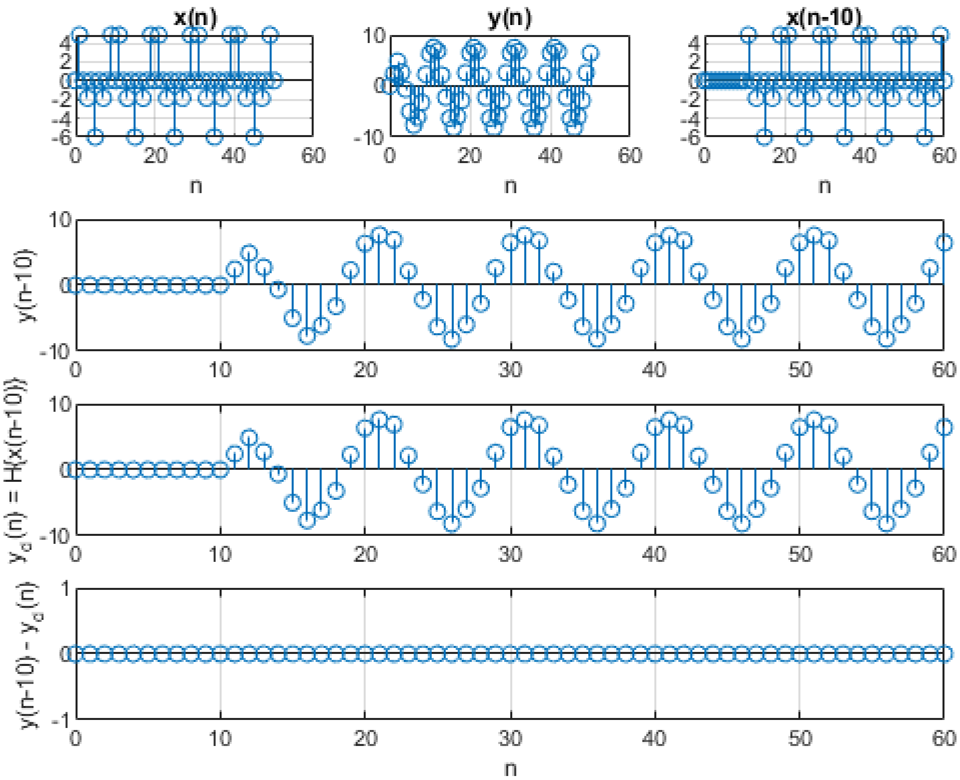
H este invariant în timp $\Longleftrightarrow$ $y(n-k) = H\{x(n-k)\}$, unde $y(n) = H\{x(n)\}$

Se va demosntra Iinvarianța în timp a sistemului descris prin funcția de transfer

$$H(z) = \frac{0.5 + 0.5z^{-1}}{1 - z^{-1} + 0.5z^{-2}},$$

considerând intarea $x(n) = a\cos(2\pi 0.1n) + b\cos(2\pi 0.4n)$, unde $n = \overline{0, 50}$, $a = 3, b = -3$ și $k = 10$.

```
% Ex4_2
clear variables;
n = 0:50; a = 3; b = -3; k=10;
x = a*cos(2*pi*0.1*n) + b*cos(2*pi*0.4*n);
num = 0.5*[1 1]; den = [1 -1 0.5];
% y(n-k)
y = filter(num, den, x); yk = [zeros(1, k) y];
% y_d(n)
xk = [zeros(1, k) x]; yd = filter(num, den, xk);
% y(n-k) - y_d(n)
d = round(yk - yd, 10);

% Metoda 1 - grafic
figure,
subplot(431), stem(n, x), grid, xlabel('n'), title('x(n)'),
subplot(432), stem(n, y), grid, xlabel('n'), title('y(n)'),
subplot(433), stem(0:length(xk)-1, xk), grid, xlabel('n'),
title(['x(n-', num2str(k), ')']),

subplot(412), stem(0:length(yk)-1, yk), grid, ylabel(['y(n-', num2str(k), ')']),

subplot(413), stem(0:length(yd)-1, yd), grid,
ylabel(['y_d(n) = H\{x(n-', num2str(k), ')\}']),

subplot(414), stem(0:length(d)-1, d), grid, ylim([-1 1])
xlabel('n'), ylabel(['y(n-', num2str(k), ') - y_d(n)']),
```



- Din ultimul grafic se observă că sistemul este invariant în timp

```
% Metoda 2
if d == 0
    disp('Sistemul este invariant in timp')
else
    disp('Sistemul este variant in timp')
end
```

```
Sistemul este invariant in timp
```

Exemplul 3. Evaluarea răspunsului la impuls

Se consideră sistemul descris prin funcția de transfer

$$H(z) = \frac{1 - z^{-1} + z^{-2}}{1 - 0.6z^{-1} + 0.1z^{-2}}.$$

Se vor evalua evalua primele 30 de eșantioane ale răspunsului la impuls, în două moduri:

- Folosind funcția `'residuez'` și știind că

$$h(n) = \sum_{k=1}^{N} A_k (p_k)^n u(n) + \sum_{i=1}^{I} k_i \delta(i-1)$$

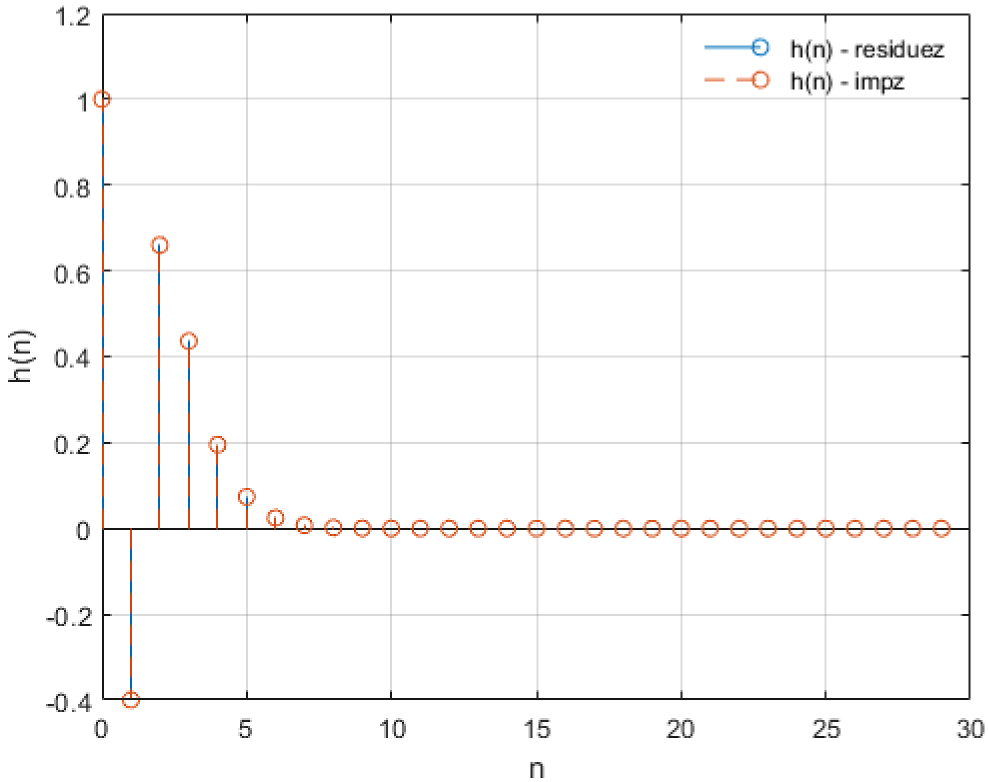
- Folosind funcția 'impz'

```
% Ex4_3
clear variables;
format rat;
num = [1 -1 1]; den = [1 -0.6 0.1];

% a) residuez - descompunere in fractii simple
[A, p, k] = residuez(num, den)
```

```
A =
      -9/2      -    23/2i
      -9/2      +    23/2i
p =
       3/10     +     1/10i
       3/10     -     1/10i
k =
      10
```

$$H(z) = \frac{-\frac{9+23j}{2}}{1-\frac{3+j}{10}z^{-1}} + \frac{-\frac{9-23j}{2}}{1-\frac{3-j}{10}z^{-1}} + 10$$

```
n = 0:29;
hrez = A(1)*p(1).^n + A(2)*p(2).^n; hrez(1) = hrez(1) + k;

% b) impz
h = impz(num, den, length(n));

figure,
stem(n, hrez), hold all,
stem(n, h, '--'), hold off; grid,
legend('h(n) - residuez', 'h(n) - impz', 'Location', 'best'), legend('boxoff'),
xlabel('n'), ylabel('h(n)')
```



Exemplul 4. Analiza sistemelor discrete LTI descrise prin ecuații cu diferențe finite și coeficienți constanți

Se consideră sistemul LTI descris prin ecuația cu diferențe finite

$$y(n) = 5y(n-1) - 4y(n-2) + x(n) + x(n-1).$$

Să se determine

- Ieșirea sistemului la secvența de intrare

$$x(n) = \left(\frac{1}{4}\right)^n u(n), \text{ când } y(-2) = y(-1) = 1;$$

- Secvența răspuns la impuls;
- Stabilitatea sistemului.

```
% Ex4_4
clear variables;
format short;
num = [1 1]; den = [1 -5 4];
% a)
n = 0:99; x = power(1/4, n);
```

- Ecuația cu diferențe finite este de gradul 2, ca atare trebuie determinate 2 condiții inițiale pentru '`filter`'

```
yi = [1 1]; ic = filtic(num, den, yi)
```

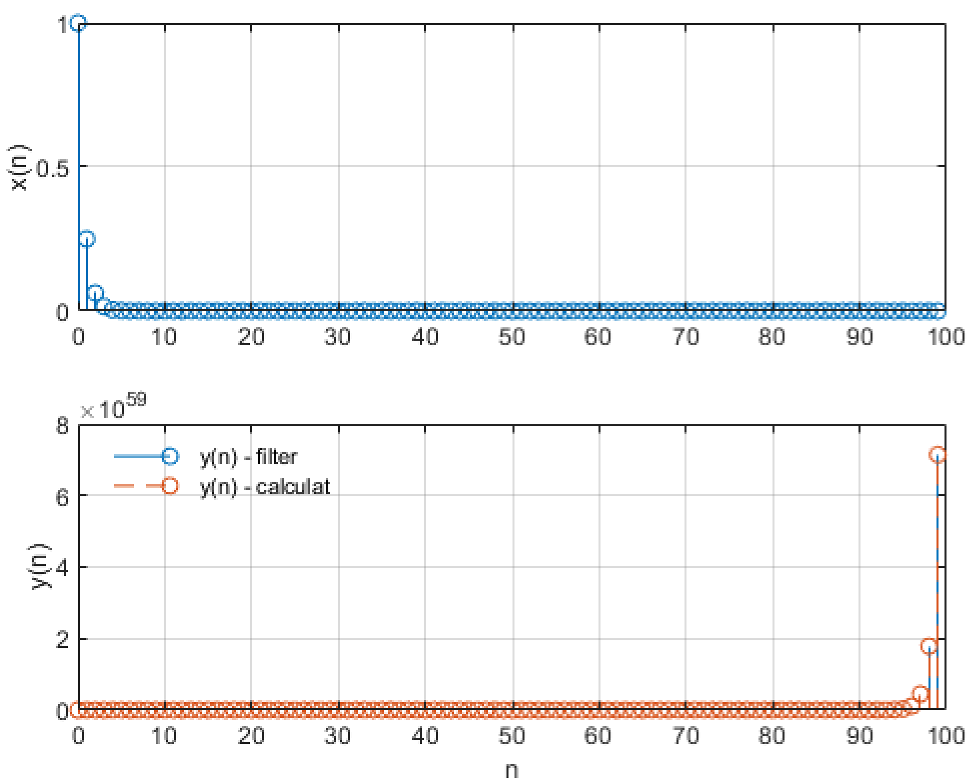
```
ic = 1×2
     1    -4
```

```
y = filter(num, den, x, ic);
```

- Dacă rezolvați problema ar trebui să obțineți

$$y(n) = \left[\frac{1}{9} + \frac{16}{9}4^n + \frac{1}{9}\left(\frac{1}{4}\right)^n\right]u(n)$$

```
ycalc = 1/9 + 16/9*4.^n + 1/9*(1/4).^n;

figure,
subplot(211), stem(n, x), grid, ylabel('x(n)'),

subplot(212), stem(n, y), hold all,
stem(n, ycalc, '--'), hold off; grid, xlabel('n'), ylabel('y(n)')
legend('y(n) - filter', 'y(n) - calculat', 'Location', 'best'), legend boxoff,
```

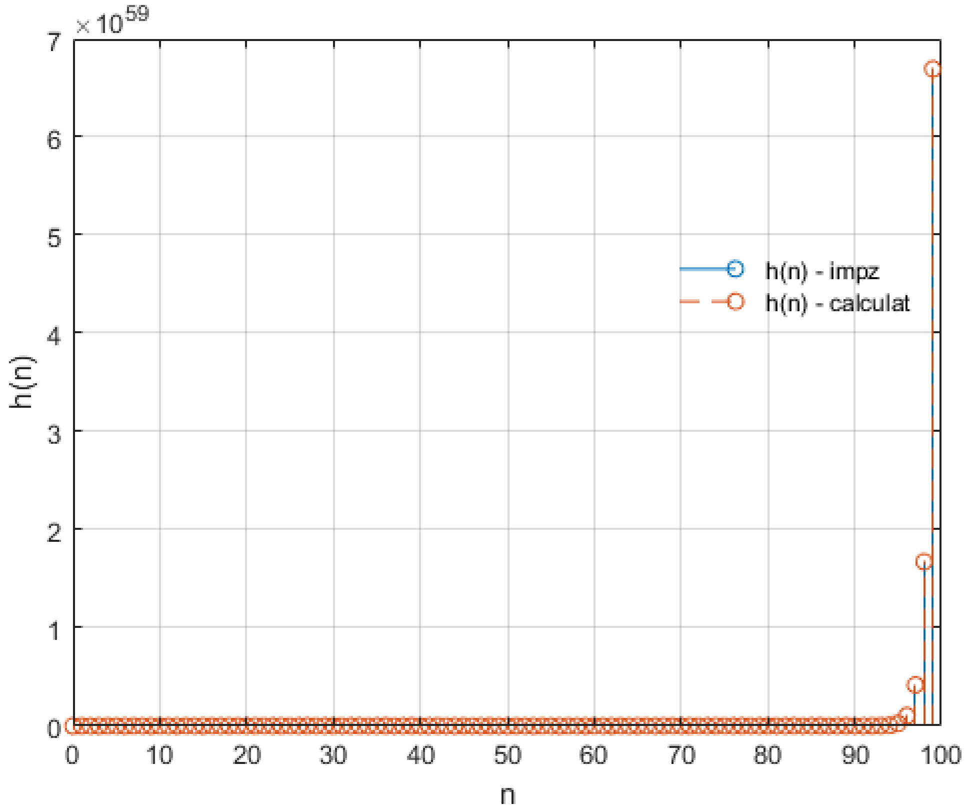



```
% b)
h = impz(num, den, length(n));
```

- Dacă rezolvați problema ar trebui să obțineți

$$h(n) = \left[-\frac{2}{3} + \frac{5}{3}4^n\right]u(n)$$

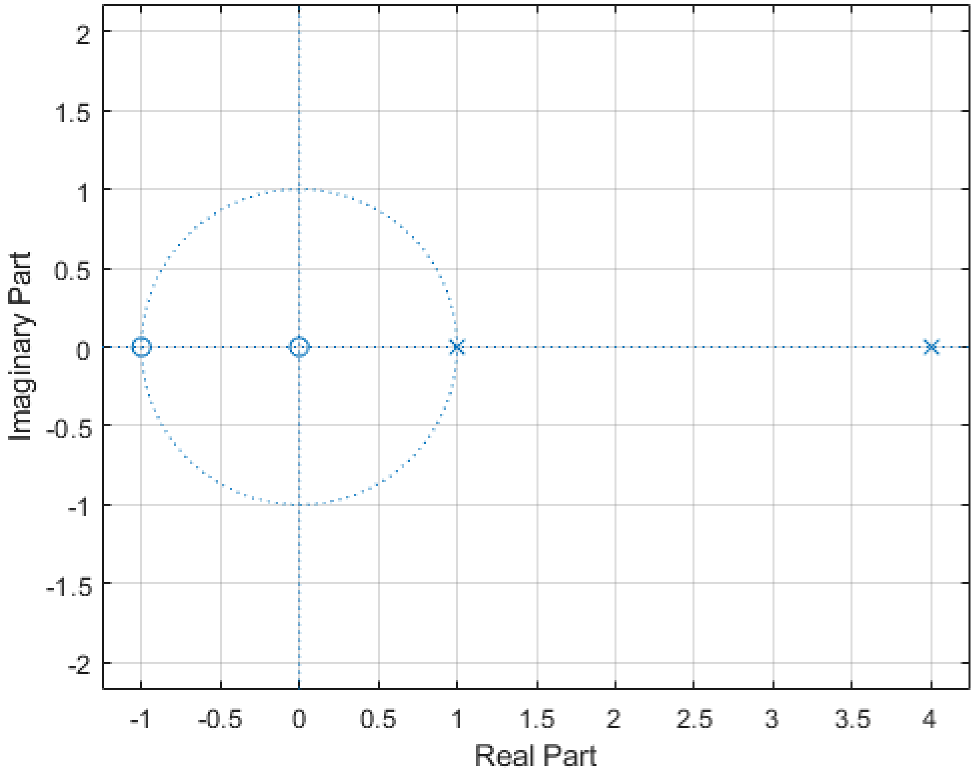
```
hcalc = -2/3 + 5/3*4.^n;

figure,
stem(n, h), hold all,
stem(n, hcalc, '--'), hold off; grid, xlabel('n'), ylabel('h(n)')
legend('h(n) - impz', 'h(n) - calculat', 'Location', 'best'), legend boxoff,
```




```
% c) Metoda 1
if isstable(num, den) == 1
    disp('Sistemul este stabil')
else
    disp('Sistemul este instabil')
end
```

```
Sistemul este instabil
```

```
% Metoda 2
figure, zplane(num, den), grid
```



- Sistemul are 2 poli: un pol pe cercul unitate (sistem instabil) și un pol înafara cercului unitate (sistem instabil)

Exemplul 5. Caracteristicile răspunsului la frecvență

Se consideră sistemul cu două zerouri și doi poli

$$z_{1,2} = e^{\pm j\frac{\pi}{3}}; \quad p_{1,2} = 0.3 z_{1,2}$$

Se dorește evaluarea caracteristicilor răspunsului la frecvență (modul și fază).

```
% Ex4_5
clear variables;
z = [exp(1j*pi/3); exp(-1j*pi/3)]; num = poly(z);
p = 0.3*z; den = poly(p);
```

- Expresia funcției de transfer

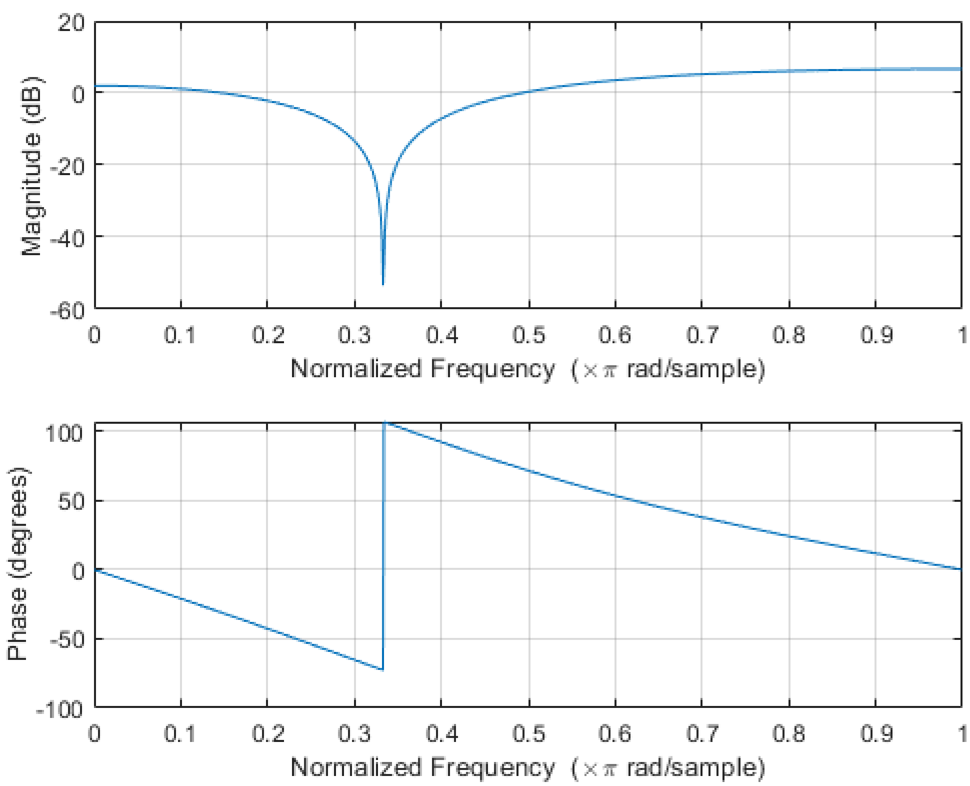
```
Hz = filt(num, den)
```

```
Hz =

      1 - z^-1 + z^-2
  ------------------------
```

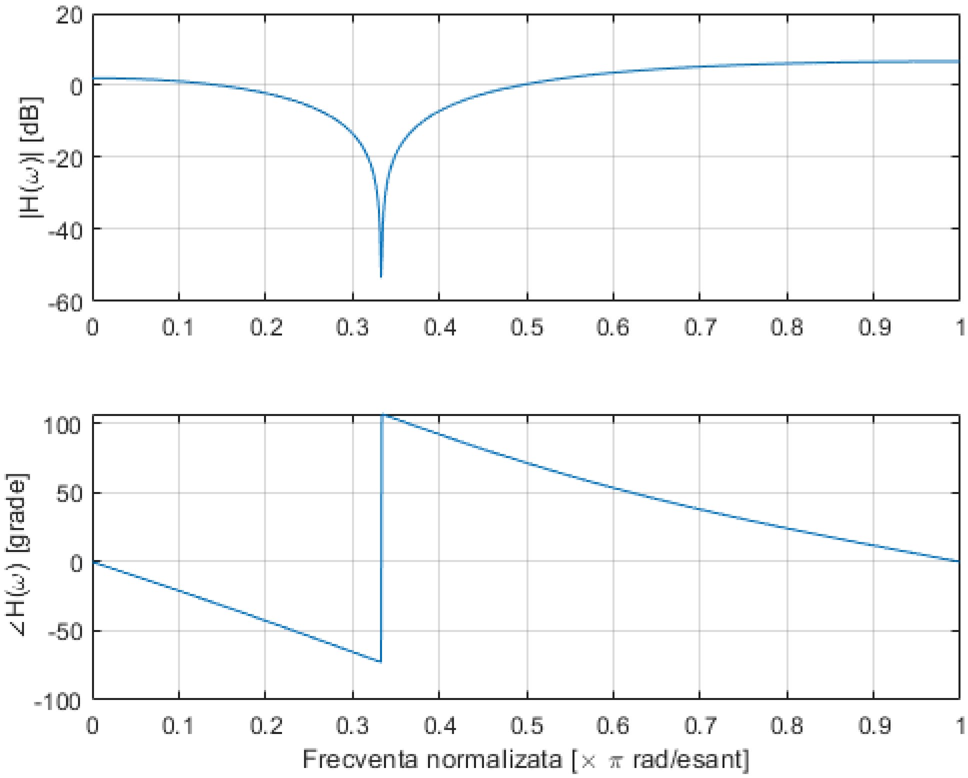
```
  1 - 0.3 z^-1 + 0.09 z^-2

Sample time: unspecified
Discrete-time transfer function.
```

- Funcția răspuns la frecvență

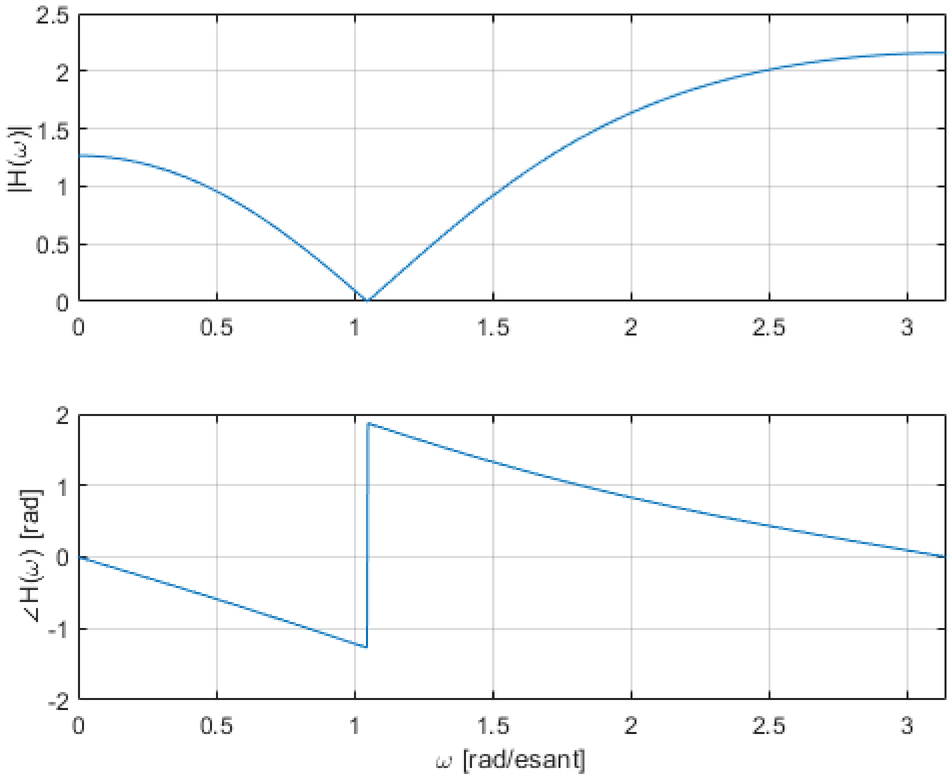
```
figure, freqz(num, den, 2^10)
```




```
% SAU
[H, w] = freqz(num, den, 2^10);
figure,
subplot(211), plot(w/pi, mag2db(abs(H))), grid, ylabel('|H(\omega)| [dB]'),

subplot(212), plot(w/pi, rad2deg(angle(H))), grid, ylabel('\angle{H(\omega)} [grade]')
xlabel('Frecventa normalizata [\times \pi rad/esant]'),
```




```
% SAU
figure,
subplot(211), plot(w, abs(H)), grid, ylabel('|H(\omega)|'), xlim([0 pi]),

subplot(212), plot(w, angle(H)), grid, xlim([0 pi]),
xlabel('\omega [rad/esant]'), ylabel('\angle{H(\omega)} [rad]')
```



- *Ce tip de sistem/filtru este cel proiectat?*

Exemplul 6. Răspunsul unui sistem LTI la o excitație sinusoidală

Se consideră sistemul descris prin funcția de sistem

$$H(z) = \frac{1 + 0.5z^{-1}}{1 + 0.7z^{-2}}.$$

Se dorește evaluarea ieșirii acestui sistem la secvența de intrare

$$x(n) = A\cos(2\pi f n + \varphi), \text{ unde } n = \overline{0, 100},\ A = 3,\ f = \frac{1}{15} \text{ si } \varphi = \frac{\pi}{3}.$$

Răspunsul va fi evaluat în două moduri:

- Folosind funcția `'filter'`
- Folosind relația

$$y(n) = \sum_i A_i |H(\omega_i)| \cos[\omega_i n + \varphi_i + \angle H(\omega_i)]$$

```
% Ex4_6
clear variables;
num = [1 0.5]; den = [1 0 0.7];
```

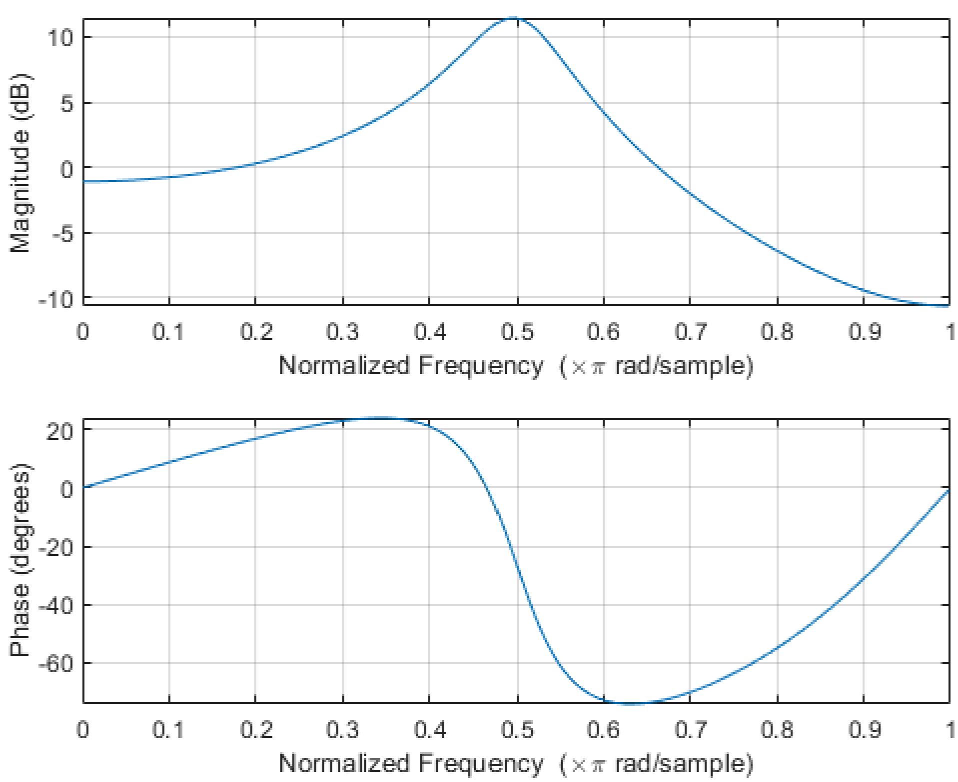
```
n = 0:100; A = 3; f = 1/10; varphi = pi/3;
x = A*cos(2*pi*f*n + varphi);
N = seqperiod(x, 1e-10) % perioada secventei de la intrare
```

```
N = 10
```

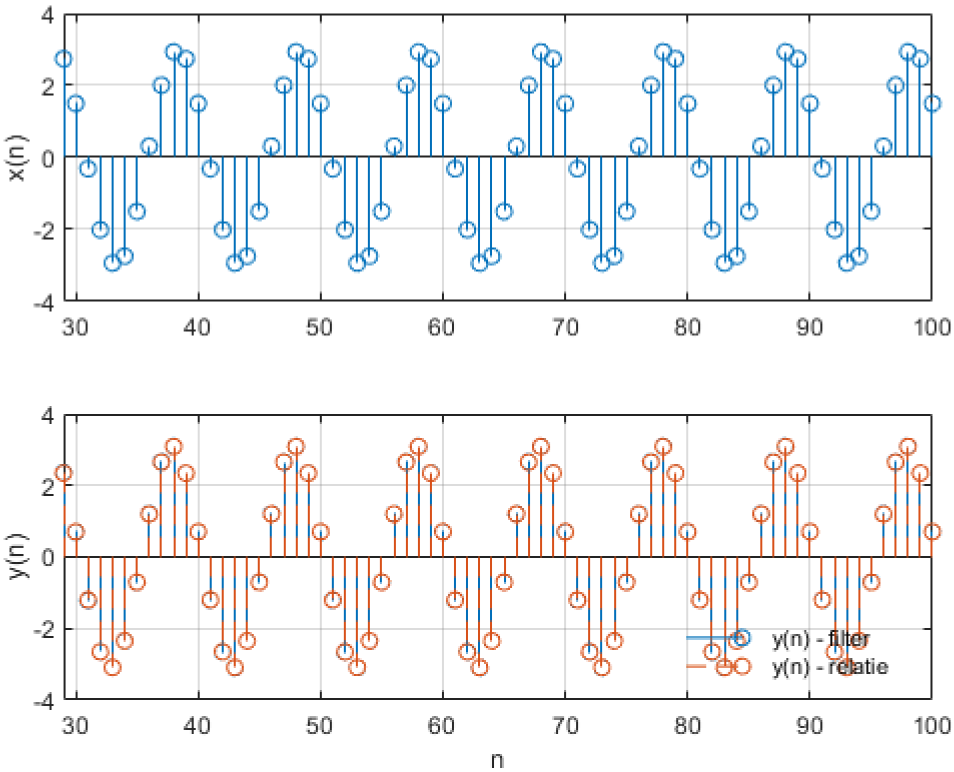
```
% a) filter
y = filter(num, den, x);

% b) relatia data
[H, w] = freqz(num, den, 2^10);
ind = find(w <= 2*pi*f, 1, 'last')
```

```
ind = 205
```

```
Hw = abs(H(ind)); Hp = angle(H(ind));
ycalc = A*Hw*cos(2*pi*f*n + varphi + Hp);

figure, freqz(num, den)
```




```
figure,
subplot(211), stem(n(3*N-1:end), x(3*N-1:end)), grid,
ylabel('x(n)'), xlim([3*N-1 n(end)])

subplot(212), stem(n(3*N-1:end), y(3*N-1:end)), hold all,
stem(n(3*N-1:end), ycalc(3*N-1:end), '--'), hold off; grid,
legend('y(n) - filter', 'y(n) - relatie', 'Location', 'best'), legend boxoff,
xlabel('n'), ylabel('y(n)'), xlim([3*N-1 n(end)])
```



- *Cum sunt afectate amplitudiinea și faza sinusoidei la trecerea prin filtru?*

Exerciții

1) Pe baza digramei de la exemplul 1, demontrați că sistemul

$$H\{x(n)\} = x^2(n)$$

este neliniar. Se consideră

$$a = 3,\ b = -3,\ x_1(n) = \sin(2\pi 0.1n) \text{ si } x_2(n) = \sin(2\pi 0.15n).$$

Variabila timp se va considera a.î. să fie reprezentate 4 perioade corespunzătoare celei de-a doua secvențe.

```
%% Ex. 1
clear variables;
```

2) Să se evalueze răspunsul la impuls al sistemului descris prin funcția de transfer

$$H(z) = \frac{0.5z^2 + 0.5z}{z^2 - z - 0.5}.$$

```
%% Ex. 2
```

```
clear variables;
```

3) Să se evalueze primele 100 de eșantioane ale secvenței răspuns la impuls, pentru sistemul descris prin funcția de transfer

$$H(z) = \frac{1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3}}{1 - 0.5z^{-1} - 4z^{-2} + 2z^{-3}}.$$

```
%% Ex. 3
clear variables;
```

4) Să se evalueze primele 200 de eșantioane ale secvenței răspuns la impuls, pentru sistemul descris prin funcția de transfer

$$H(z) = \frac{z}{z - 1}.$$

Ce secvență se obține?

```
%% Ex. 4
clear variables;
```

5) Să se evalueze primele 50 de eșantioane ale răspunsului la impuls corespunzător sistemului

$$H(z) = \frac{z^2 + 1}{z^3 - 1.9z^2 + 1.55z - 0.425}.$$

```
%% Ex. 5
clear variables;
```

6) Un sistem LTI este caracterizat prin relația de intrare-ieșire

$$y(n) = 1.5\cos\frac{\pi}{8}\,y(n-1) - 0.95y(n-2) + x(n) + 0.4x(n-1).$$

- Conform ecuației cu diferențe finite, secvența răspuns la impuls corespunzătoare sistemului este

$$h(n) = \left[A_1(p_1)^n + A_2(p_2)^n\right]u(n).$$

Reprezentați, pe același grafic, secvența răspuns la impuls obținută cu ajutorul funcție '`impz`' și cea obținută cu relația anterioară (secvența răspuns la impuls trebuie să aibă 300 de valori).

- Să se determine și să se ilustreze grafic răspunsul permanent al sistemului la excitația

$$x(n) = e^{j\omega_0 n}, \text{ unde } n = \overline{0, 260},\ \ \omega_0 = \frac{\pi}{6}$$

```
%% Ex. 6
clear variables;
```

7) Un sistem LTI este caracterizat prin funcția de sistem

$$H(z) = \frac{(z+0.2)(z^2+5)}{(z-0.7)(z^2-z+0.49)}.$$

- Să se reprezinte polii și zerourile în planul-z folosind funcția '`zplane`'
- Să se reprezinte grafic caracteristicile funcției răspuns la frecvență

```
%% Ex. 7
clear variables;
num1 = [1 0.2]; num2 = [1 0 5]; num = conv(num1, num2);
```

8) Să se analizeze efectul polilor și zerourilor asupra modulului funcției răspuns la frecvență, pentru sistemele

- $H_1(z) = \left(1 - z_1 z^{-1}\right)\left(1 - z_2 z^{-1}\right)$, unde

(a) $z_{1,2} = 1$;   (b) $z_{1,2} = e^{\pm j\frac{\pi}{6}}$;   (c) $z_{1,2} = e^{\pm j\frac{\pi}{3}}$;   (d) $z_{1,2} = e^{\pm j\frac{\pi}{2}}$;   (e) $z_{1,2} = e^{\pm j\frac{2\pi}{3}}$;   (f) $z_{1,2} = e^{\pm j\frac{5\pi}{6}}$;   (g) $z_{1,2} = -1$

- $H_2(z) = \dfrac{0.3}{\left(1 - p_1 z^{-1}\right)\left(1 - p_2 z^{-1}\right)}$, unde

(a) $p_{1,2} = 0.3$;   (b) $p_{1,2} = e^{\pm j\frac{\pi}{4}}$;   (c) $p_{1,2} = e^{\pm j\frac{\pi}{2}}$;   (d) $p_{1,2} = e^{\pm j\frac{3\pi}{4}}$;   (e) $p_{1,2} = -0.3$

Reprezentați grafic diagramele poli-zerouri și modulul funcțiilor răspuns la frecvență. Comentați rezultatele.

```
%% Ex. 8
clear variables;
```

9) Se consideră următoarele sisteme LTI caracterizate prin funcțiile de transfer

$$H_1(z) = 1 - 4z^{-1} + 4z^{-2}, \qquad H_2(z) = 1 + 4z^{-1} + 4z^{-2}, \qquad H_3(z) = 1 - z^{-1} + 0.25z^{-2},$$
$$H_4(z) = \frac{(1+z^{-1})^2}{1 - z^{-1} + 0.25z^{-2}}, \qquad H_5(z) = \frac{(1-z^{-1})^2}{1 - z^{-1} + 0.25z^{-2}}, \qquad H_6(z) = \frac{1}{1 - z^{-1} + 0.25z^{-2}}$$

- Reprezentați grafic diagramele poli-zerouri
- Reprezentați grafic caracteriticile funcțiilor răspuns la frecvență. Să se specifice ce tip de sistem este descris prin fiecare funcție de transfer
- Să se eveluaze și să se reprezinte grafic răspunsul la impuls și răspunsul la secvența treaptă unitate, pentru fiecare dintre sistemele considerate

```
%% Ex. 9
clear variables;
```

10) Se consideră două sisteme cauzale. Să se specifice care dintre acestea este stabil. Justificați răspunsul.

$$H_1(z) = \frac{1 - 0.6z^{-1} + 1.15z^{-2} - 0.98z^{-3} + 0.98z^{-4}}{1 + 1.27z^{-1} + 2.02z^{-2} + 1.54z^{-3} + 0.98z^{-4}}$$

$$H_2(z) = \frac{2 - 2.54z^{-1} + 5z^{-2} - 4.3z^{-3} + 3.27z^{-4}}{1 - 0.77z^{-1} + 0.82z^{-2} + 0.41z^{-3} + 0.51z^{-4}}$$

- Stabilitatea se poate evalua folosind diagrama poli-zerouri, folosind funcțiile '`roots`' și '`abs`', folosind funcția '`isstable`' etc.

Lăcrimioara Grama
Signal Processing Group
Technical University of Cluj – Napoca
October 2020

```
%% Ex. 10
clear variables;
```