Laborator 3: Eșantionarea semnalelor analogice și intercorelația

Cuprins

Considerații generale

Obiectiv: prezentarea semnalelor analogice, a modului de obținere a unui semnal discret în timp dintr-un semnal analogic (eșantionarea semnalelor analogice) și a procedeului de reconstituire a semnalelor analogice din eșantioane, precum și determinarea periodicității unui semnal înecat în zgomot cu ajutorul corelației.

Conversia analog-digitală și digital-analogică

Componentele de bază ale unui CADs

Eșantionare: conversia unui semnal analogic continuu în timp într-un semnal discret în timp (luând eșantioane din semnalul continuu la momente discrete de timp).

Dacă $x_a(t)$ este semnalul de la intrarea blocului de eșantionare, ieșirea este $x(n) \equiv x_a(nT)$ (T – perioada de eșantionare).

Cuantizare: conversia unui semnal discret în timp, cu valori continue, într-un semnal digital (discret în timp cu valori discrete). Fiecărui eșantion îi este alocată o valoare selectată dintr-o mulțime finită de valori posibile.

Diferența dintre eșantionul necuantizat $x(n)$ și ieșirea cuantizată $x_q(n)$ se numește eroare de cuantizare.

Codare: procesul de reprezentare a fiecărei valori discrete (cuantizate) printr-o secvență binară pe *b* biți.

În general este necesară conversia semnalelor digitale procesate din nou în formă analogică. Toate CDAs "conectează punctele" din semnalul digital printr-o interpolare, a cărei acuratețe depinde de calitatea CDA. Teorema eșantionării specifică forma optimă a funcției de interpolare pentru un semnal de bandă limitată (este prea complicat pentru a fi implementat în practică). Cel mai simplu CDAs este cel de ordinul zero -

realizează o aproximare în scară (*staircase approximation*). Pentru a îmbunătății caracteristica semnalului analogic reconstituit se poate utiliza un convertor ce realizează o interpolare liniară (eșantioanele succesive sunt conectate prin linii).

Deoarece există mai mult semnale analogice cărora le pot aparține anumite eșantioane date, alegerea semnalului analogic depinde de ipotezele asupra reconstrucției. În alegerea metodei de reconstrucție trebuie să decidem dacă aproximarea este polinomială, spline, cu funcții sinusoidale, interpolare ideală, prin filtrare trece jos sau orice altă metodă.

Semnale analogice sinusoidale

$$x_a(t) = \mathrm{A}\cos(\Omega t + \varphi) = \mathrm{A}\cos(2\pi F t + \varphi), \quad -\infty < t < \infty,\ t \in \mathbb{R}$$

- Indicele a – indică un semnal analogic, A – amplitudinea, Ω – pulsația analogică $[\mathrm{rad/sec}]$, F – frecvența analogică $[\mathrm{cicluri/sec}] = [\mathrm{Hz}]$, φ – faza $[\mathrm{rad}]$

Proprietăți

1) Pentru orice valoare fixă *F* semnalul analogic este periodic cu perioada *T*

$$x_a(t) = x_a(t+T),\ T = \frac{1}{F} - \text{perioada fundamentală a semnalului sinusoidal}$$

2) Semnalele sinusoidale continue în timp cu frecvențe diferite sunt, la rândul lor, distincte.

3) Crescând frecvența *F*, rata de oscilație a semnalului crește (într-un interval de timp dat vor fi incluse mai multe perioade).

Eșantionarea semnalelor analogice

$$x(n) \equiv x_a(nT), \quad -\infty < n < \infty - \text{eșantionare uniformă (periodică)}$$

- $x(n)$ – semnal discret în timp, obținut luând eșantioane din semnalul analogic $x_a(t)$ la fiecare T secunde

Eșantionarea periodică implică existența unei relații între variabila timp analogică (*t*) și cea discretă (*n*)

$$t = nT = \frac{n}{F_s} \Longleftrightarrow n = \frac{t}{T} = tF_s.$$

Va exista o relație și între frecvența (pulsația) analogică și frecvența (pulsația) discretă.

$$x(n) \equiv x_a(nT) = \mathrm{A}\cos(2\pi F nT + \varphi) = \mathrm{A}\cos\left(2\pi \frac{F}{F_s} n + \varphi\right) = \mathrm{A}\cos(2\pi f n + \varphi) \Longrightarrow f = \frac{F}{F_s} \quad \left(\omega = \frac{\Omega}{F_s}\right)$$

Teorema eșantionării

Dacă semalul analogic este de bandă limitată

$$X_a(F) = 0, |F| < B,$$

atunci acesta este unic determinat de setul eșantioanelor:

$$\{x(n) \equiv x_a(nT), n \in \mathbb{Z}\}; \quad F_s = \frac{1}{T} \leq 2F_{\max} = 2B \text{ (teoretic)}$$

- În practică, frecvența de eșantionare se consideră cel puțin de 10 ori mai mare decât frecvența maximă a semnalului analogic.

Semnalul analogic poate fi reconstituit din eșantioane folosind o funcție de interpolare de forma

$$g(t) = \frac{\sin(2\pi Bt)}{2\pi Bt} \Longrightarrow \widetilde{x_a}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a\left(\frac{n}{F_s}\right) g(t - F_s)$$

Evaluarea eventualei periodicități a unui semnal înecat în zgomot

Presupunem că o secvență *x*(*n*) (probabil periodică cu perioada *N*) este afectată de o perturbație aleatoare de tip aditiv *w*(*n*). Secvența observabilă este

$$y(n) = x(n) + w(n), \; n = \overline{0, M-1}, M \gg N \; (y(n) = 0, \; n < 0 \,\&\, n \geq M).$$

Evaluând autocorelația secvenței *y*(*n*) putem determina eventuala periodicitate a secvenței afectate de zgomot.

$$\begin{aligned} r_{yy}(l) &= \frac{1}{M}\sum_{n=0}^{M} y(n)y(n-l) = \frac{1}{M}\sum_{n=0}^{M}[x(n)+w(n)][x(n-l)+w(n-l)] \\ &= \frac{1}{M}\sum_{n=0}^{M}[x(n)x(n-l) + x(n)w(n-l) + w(n)x(n-l) + w(n)w(n-l)] \\ &= r_{xx}(l) + r_{xw}(l) + r_{wx}(l) + r_{ww}(l) \end{aligned}$$

- $r_{xx}(l) = r_{xx}(l+N)$ - va avea maxime la $l = 0, \pm N, \pm 2N, \ldots$. Cu cât l se apropie de M, maximele se reduc în amplitudine deoarece avem memorate doar un set finit de M esantioane $\Longrightarrow$ multe dintre produsele $x(n)x(n-l)$ vor fi zero $\Longrightarrow$ se va evita evaluarea lui $r_{xx}(l)$ pentru $l > \frac{M}{2}$
- $r_{xw}(l) \simeq 0, r_{wx}(l) \simeq 0$ – pornind de la premisa că un semnal periodic și unul aleator sunt total necorelate
- $r_{ww}(l)$ – conține un vârf la $l = 0$ și descrește rapid către 0 pentru $l \neq 0$

Ca atare, în autocorelația lui *y*(*n*) se regăsește aproape identic autocorelația lui *x*(*n*), pentru valori ale lui *l* mult mai mari decât 1.

$$\text{Dacă } x(n) = x(n+N) \Longrightarrow r_{xx}(l) = r_{xx}(l+N) \Longrightarrow r_{yy}(l) = r_{yy}(l+N)$$

Acest lucru ne permite detectarea prezenței unui semnal periodic perturbat de un zgomot aditiv, precum și estimarea perioadei. În multe situații practice această informație este suficientă.

Resurse MATLAB

Cautați în Help-ul MATLAB funcțiile:

- `seqperiod`
- `repmat`
- `sinc`
- `lcm`
- `ceil`
- `fft`
- `xcorr`

Desfășurarea lucrării

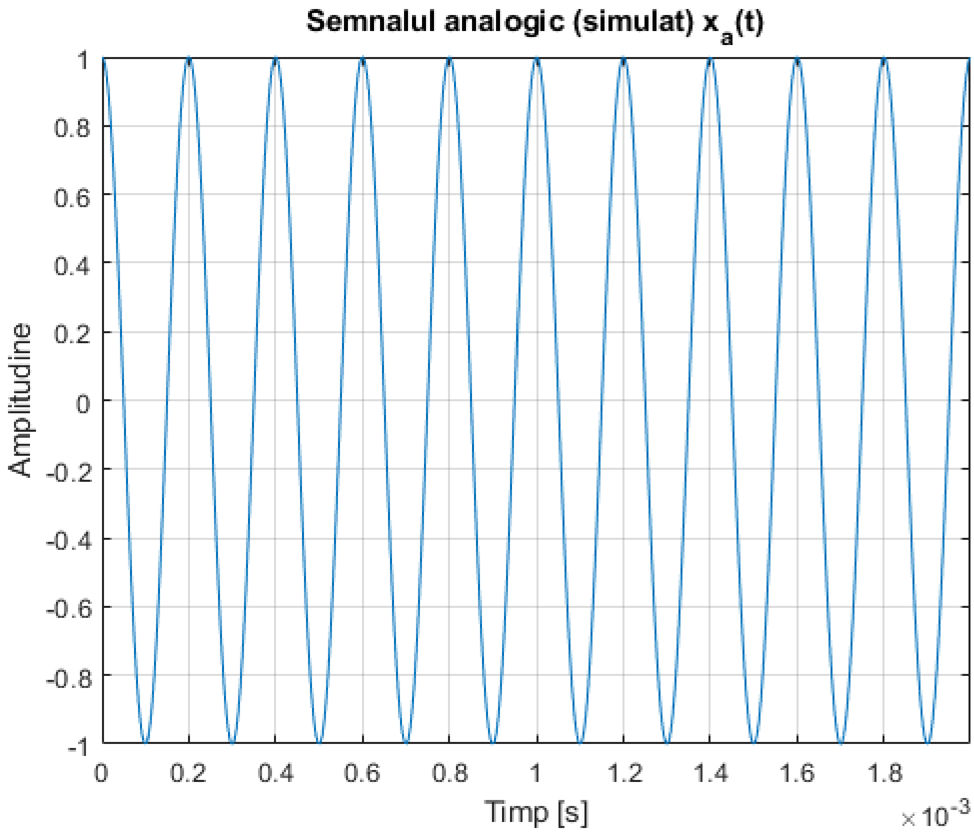
Exemplul 1. Eșantionarea și reconstituirea semnalelor analogice

Se consideră un semnal analogic sinusoidal cu frecvența *F* = 5 kHz, amplitudine unitară și fază nulă, eșantionat cu 100 kHz. Se dorește reprezentarea semnalului analogic, a secvenței discrete obținute în urma eșantionării și a semnalului analogic reconstituit din eșantioane.

- Deoarece în MATLAB nu există posibilitatea reprezentării semnalelor analogice, trebuie simulată axa timpului
- Semnalul analogic

$$x_a(t) = \cos(2 \cdot \pi \cdot 5 \cdot 10^3 \cdot t) \Longrightarrow x_a(t) = x_a(t + 2 \cdot 10^{-4})$$

```
% Ex3_1
clear variables;
Fa = 5*10^3; % frecventa semnalului analogic
Fs = 1*10^5; % frecventa de esantionare
L = 10; % raportul dintre frecventa de simulare si esantionare
P = 10; % nr de perioade pentru semnalul analogic

% semnalul analogic x_a(t)
t = 0:1/(L*Fs):P/Fa-1/(L*Fs); % intervalul de timp analogic
xa = cos(2*pi*Fa*t);

figure, plot(t, xa), grid, axis([0 max(t) -1 1]),
xlabel('Timp [s]'), ylabel('Amplitudine'), title('Semnalul analogic (simulat) x_a(t)'),
```



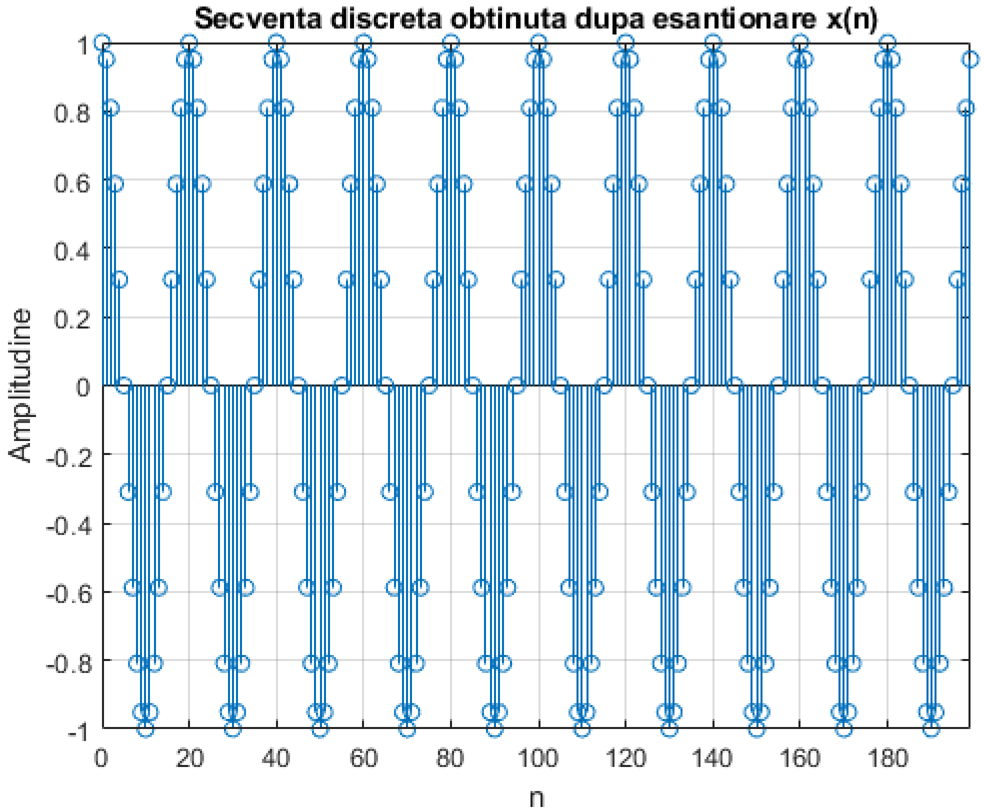
- Semnalul dicret în timp $x(n)$ se obține în urma CAD (se iau eșantioane din semnalul analogic la fiecare T secunde)

$$x(n) \equiv x_a(nT) = \cos\left(2 \cdot \pi \cdot \frac{5 \cdot 10^3}{10^5} \cdot n\right) = \cos\left(2 \cdot \pi \cdot \frac{1}{20} \cdot n\right) \Longrightarrow x(n) = x(n+20)$$

```
xn = xa(1:L:length(xa));
n = 0:length(xn)-1; % timpul discret
N = seqperiod(xn, 1e-10) % perioada
```

```
N = 20
```

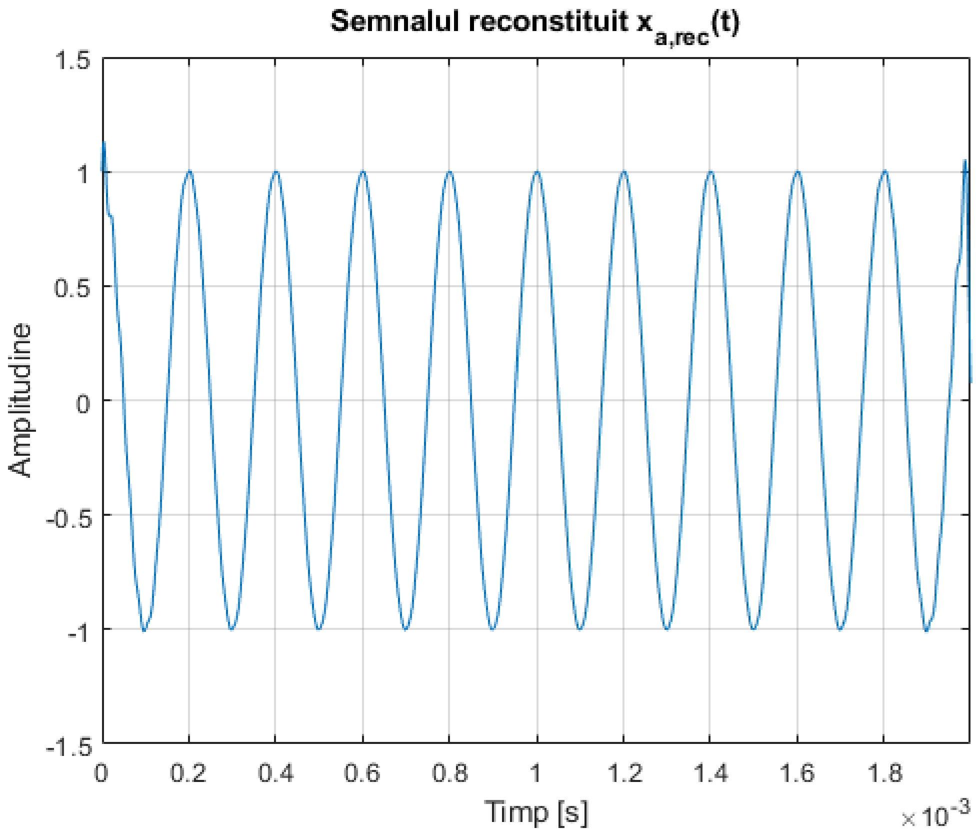
```
figure, stem(n, xn), grid, axis([0 max(n) -1 1]),
xlabel('n'), ylabel('Amplitudine'),
title('Secventa discreta obtinuta dupa esantionare x(n)'),
```



- Semnalul analogic care poate fi reconstituit din eșantioane este obținut după CDA

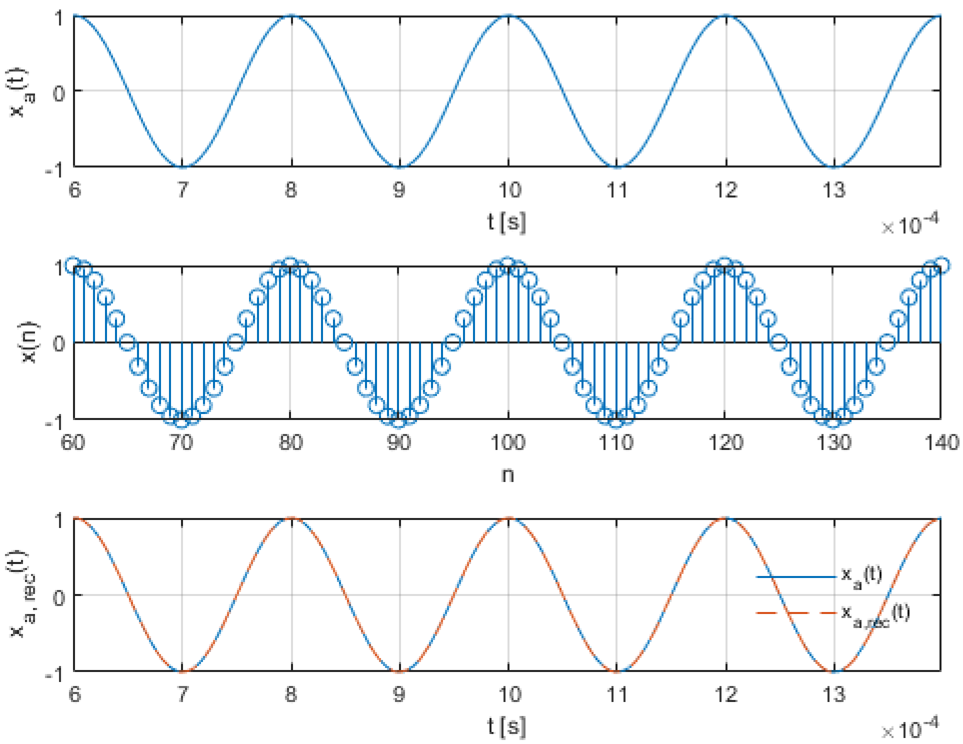
$$\tilde{x}_a(t) \equiv x(nF_s) = \cos\left(2 \cdot \pi \cdot \frac{1}{20} \cdot 10^5 \cdot t\right) = \cos(2 \cdot \pi \cdot 5 \cdot 10^3 \cdot t) = x_a(t)$$

```
% xa_rec(t) = sum[x(n)*sinc(Fs*(t-n/Fs))]; sinc(x)=sin(pi*x)/(pi*x)
% matricele de timp pentru reconstituire length(n) x lenght(t) (40 x 400)
% t = n/Fs
tr = repmat(t, length(xn), 1); % matricea de timp (analogic)
nr = repmat(n', 1, length(t)); % matricea de timp (discret)
xa_rec = xn*sinc(Fs*(tr - nr/Fs));

figure, plot(t, xa_rec), grid, xlim([0 max(t)]),
title('Semnalul reconstituit x_{a,rec}(t)'), xlabel('Timp [s]'), ylabel('Amplitudine'),
```



- Semnalul analogic inițial, secvența discretă obținută în urma eșantionării, semnalul analogic reconstituit

```
te = 3*(length(t)/P):(P-3)*(length(t)/P);
ne = 3*N+1:(P-3)*N+1;

figure,
subplot(311), plot(t(te), xa(te)), grid, xlim([t(te(1)) t(te(end))]),
xlabel('t [s]'), ylabel('x_a(t)')

subplot(312), stem(n(ne), xn(ne)), grid, xlabel('n'), ylabel('x(n)')

subplot(313), plot(t(te), xa(te)), hold all,
plot(t(te), xa_rec(te), '--'), hold off; grid, xlim([t(te(1)) t(te(end))]),
xlabel('t [s]'), ylabel('x_{a, rec}(t)'),
legend('x_a(t)', 'x_{a,rec}(t)', 'Location', "best"), legend boxoff,
```



Exemplul 2. Efectul alias datorat eșantionării

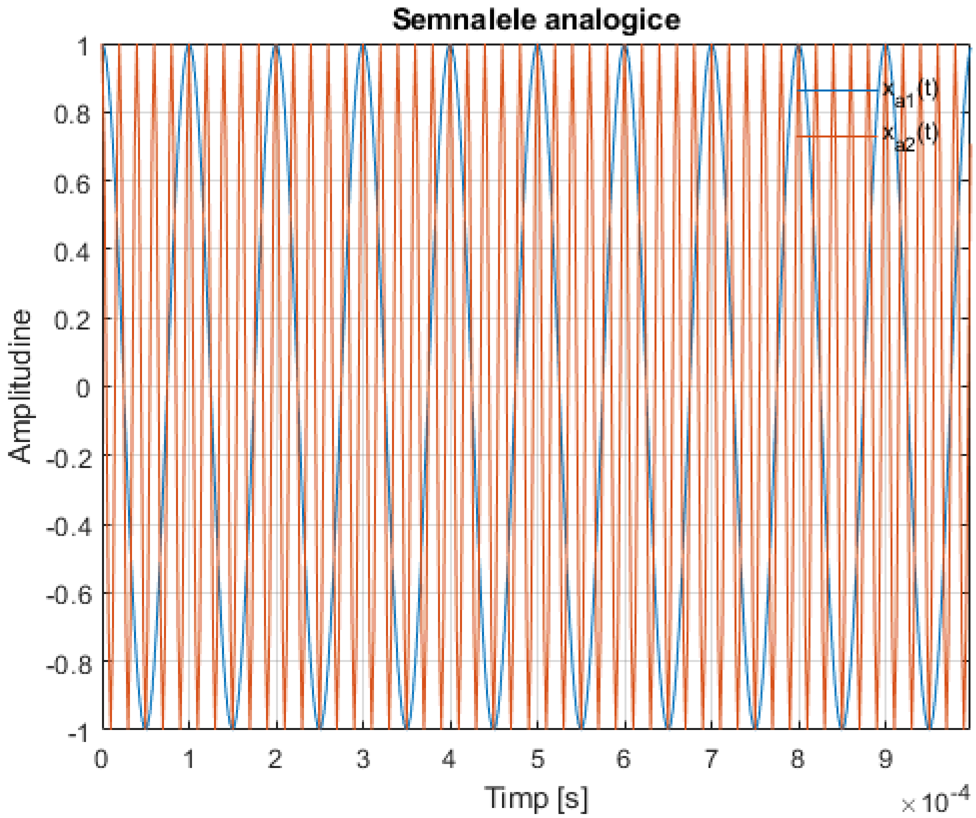
Se consideră două semnale analogice cu amplitudine unitară și fază nulă. Frecvența primului semnal analogic este 10 kHz, iar frecvența celui de-al doilea este 50 kHz. Ambele semnale se eșantionează cu 40 kHz. Se dorește reprezentarea grafică a semnalelor analogice, a secvențelor discrete obținute în urma eșantionării și a semnaleor analogice reconstituite. De asemenea, se vor reprezenta grafic spectrele de amplitudine pentru fiecare semnal.

$$x_{a1}(t) = \cos(2 \cdot \pi \cdot 10^4 \cdot t) \Longrightarrow x_a(t) = x_a(t + 10^{-4})$$

$$x_{a2}(t) = \cos(2 \cdot \pi \cdot 5 \cdot 10^4 \cdot t) \Longrightarrow x_a(t) = x_a(t + 2 \cdot 10^{-5})$$

```
% Ex3_2
clear variables;
% semnalele analogice sinusoidale
F1 = 10*10^3; F2 = 50*10^3;
Fa = [F1 F2]; Ta = 1./Fa;
% T_a(i)<1 => 'sym' pentru 'lcm'
Ta_lcm = double(lcm(sym(Ta))); % 1e-4
Fs = 40*10^3; L = 10; P = 10;

t = 0:1/(L*Fs):P*Ta_lcm-1/(L*Fs); % interval de timp analogic
xa = cos(2*pi*Fa'*t);
```

```
figure,
plot(t, xa), grid, axis([0 max(t) -1 1]),
legend('x_{a1}(t)','x_{a2}(t)'), legend('boxoff'),
xlabel('Timp [s]'), ylabel('Amplitudine'), title('Semnalele analogice'),
```



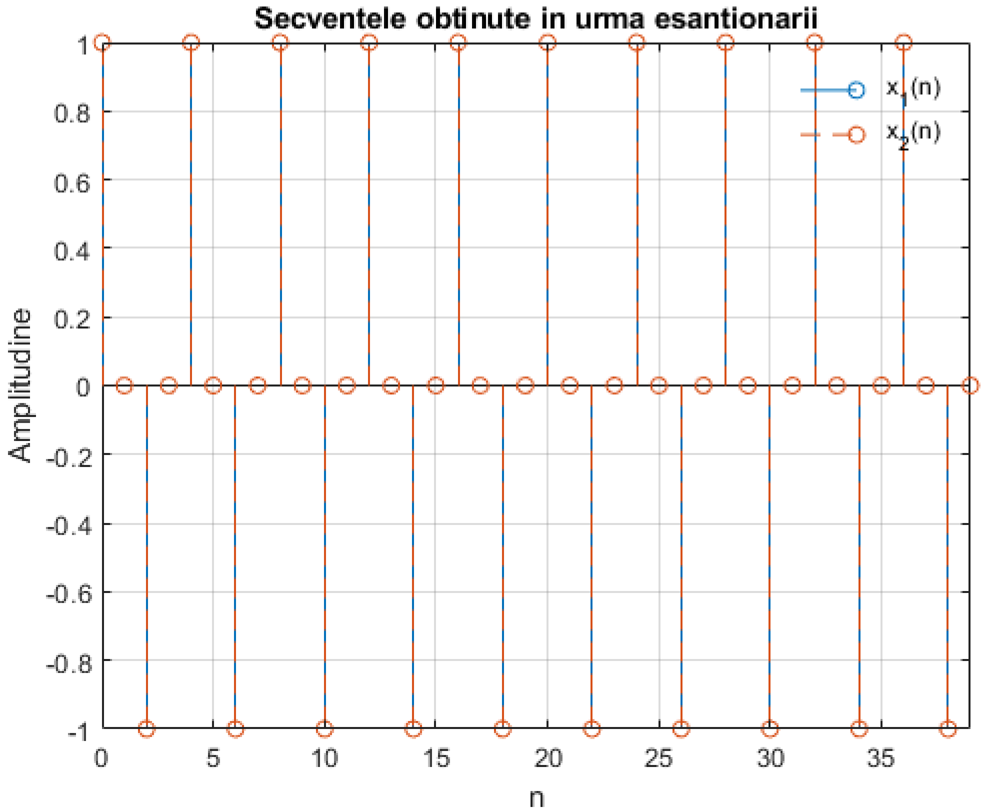
$$x_1(n) \equiv x_{a1}(nT) = \cos\left(2 \cdot \pi \cdot \frac{10^4}{4 \cdot 10^4} \cdot n\right) = \cos\left(2 \cdot \pi \cdot \frac{1}{4} \cdot n\right) \Longrightarrow x_1(n) = x_1(n+4)$$

$$x_2(n) \equiv x_{a2}(nT) = \cos\left(2 \cdot \pi \cdot \frac{5 \cdot 10^5}{4 \cdot 10^4} \cdot n\right) = \cos\left(2 \cdot \pi \cdot \frac{5}{4} \cdot n\right)$$
$$= \cos\left(2 \cdot \pi \cdot \frac{5}{4} \cdot n - 2 \cdot \pi \cdot n\right) = \cos\left[2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{5}{4} - 1\right) \cdot n\right] = \cos\left(2 \cdot \pi \cdot \frac{1}{4} \cdot n\right) \Longrightarrow x_2(n) = x_2(n+4)$$

```
% secventele obtinute dupa esantionare
xn = xa(:, 1:L:length(xa));
N1 = seqperiod(xn(1, :), 1e-10); N2 = seqperiod(xn(2, :), 1e-10);
N = lcm(N1, N2)
```

```
N = 4
```

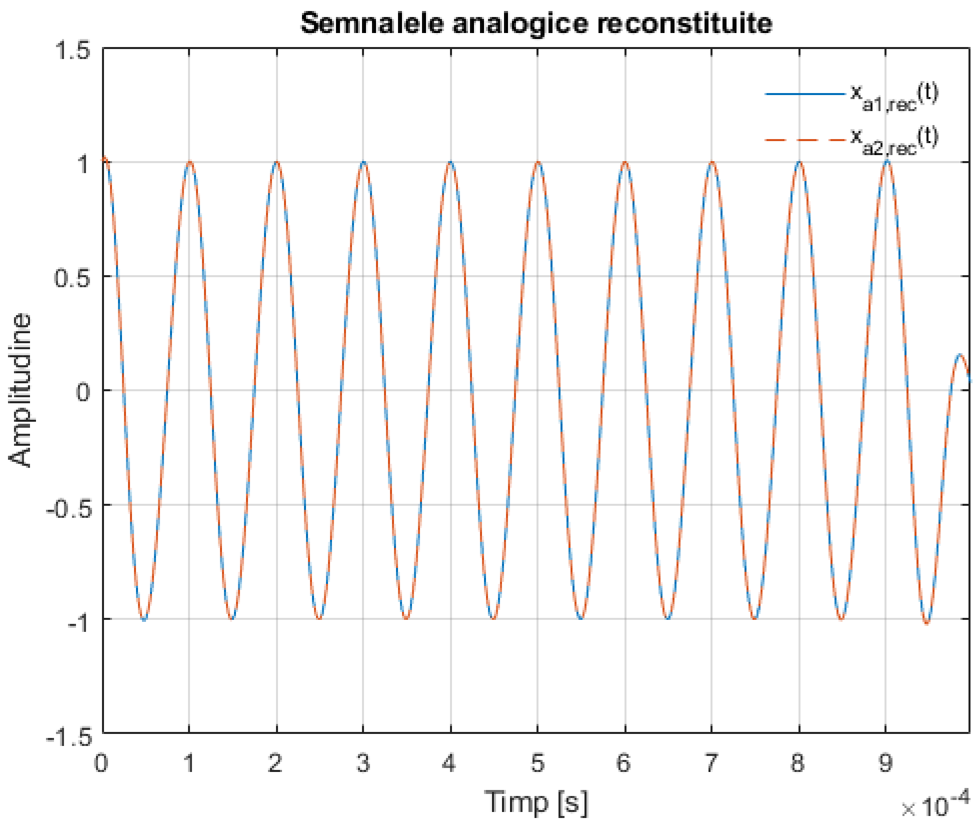
```
n = 0:ceil(length(t)/L)-1;
figure,
stem(n, xn(1, :)), hold all,
stem(n, xn(2, :), '--'), hold off; grid, axis([0 max(n) -1 1]),
legend('x_{1}(n)', 'x_{2}(n)'),  legend boxoff,
title('Secventele obtinute in urma esantionarii'), xlabel('n'), ylabel('Amplitudine'),
```



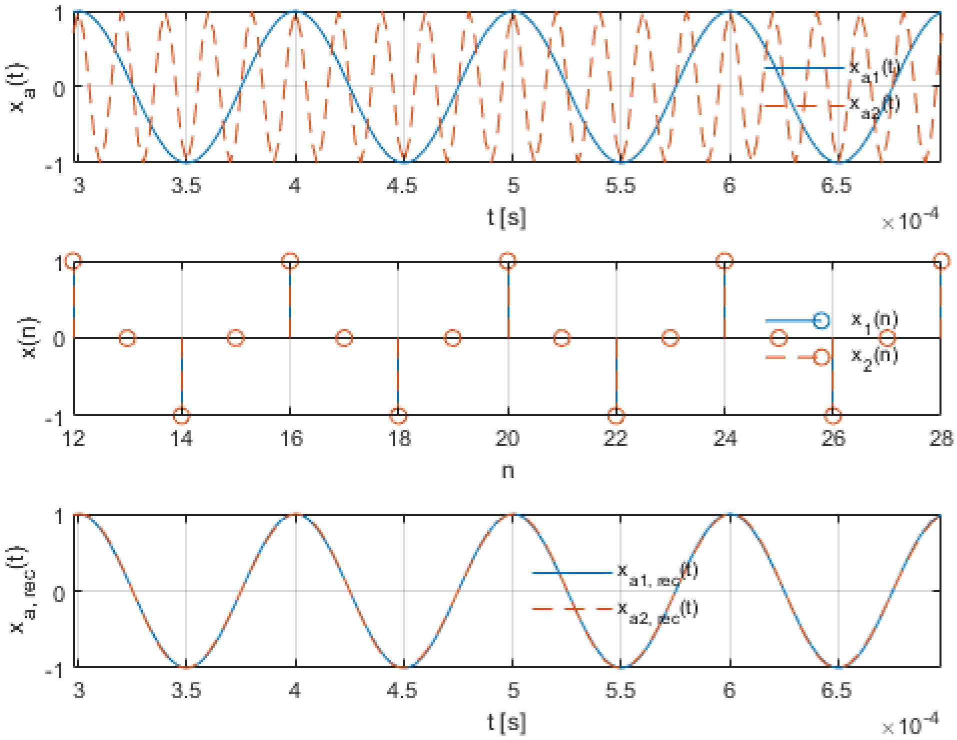
$$\widetilde{x_{a1}}(t) \equiv x_1(nF_s) = \cos\left(2 \cdot \pi \cdot \frac{1}{4} \cdot 4 \cdot 10^4 \cdot t\right) = \cos(2 \cdot \pi \cdot 10^4 \cdot t) = x_{a1}(t)$$

$$\widetilde{x_{a2}}(t) \equiv x_2(nF_s) = \cos\left(2 \cdot \pi \cdot \frac{1}{4} \cdot 4 \cdot 10^4 \cdot t\right) = \cos(2 \cdot \pi \cdot 10^4 \cdot t) = x_{a1}(t) \neq x_{a2}(t)$$

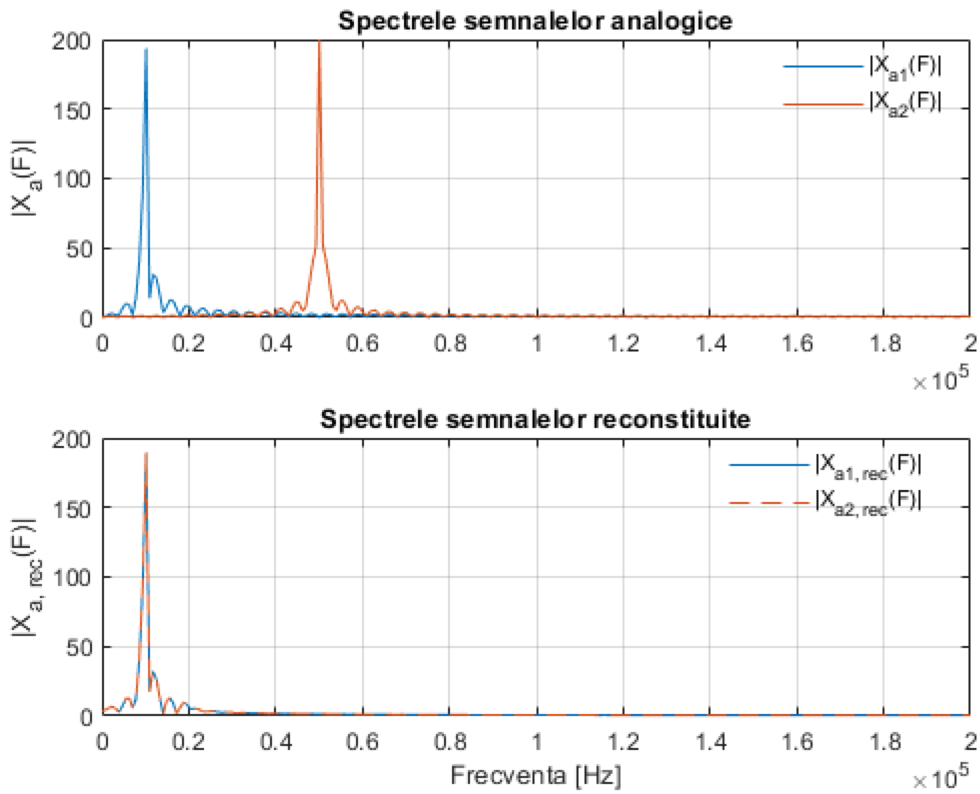
```
% semnalele analogice reconstituite
tr = repmat(t, length(xn), 1);
nr = repmat(n', 1, length(t));
xa_rec = xn*sinc(Fs*(tr - nr/Fs));

figure,
plot(t, xa_rec(1, :)), hold all,
plot(t, xa_rec(2, :), '--'), hold off; grid, xlim([0 max(t)]),
legend('x_{a1,rec}(t)', 'x_{a2,rec}(t)'), legend boxoff,
title('Semnalele analogice reconstituite'), xlabel('Timp [s]'), ylabel('Amplitudine'),
```




```
% semnalele analogice initiale, secventele discrete obtinute in urma
% esantionarii, semnalele analogice reconstituite
te = 3*(length(t)/P):(P-3)*(length(t)/P);
ne = 3*N+1:(P-3)*N+1;

figure,
subplot(311),
plot(t(te), xa(1, te)), hold all,
plot(t(te), xa(2, te), '--'), hold off; grid, xlim([t(te(1)) t(te(end))]),
legend('x_{a1}(t)', 'x_{a2}(t)', 'Location', 'best'), legend boxoff,
xlabel('t [s]'), ylabel('x_a(t)')

subplot(312),
stem(n(ne), xn(1, ne)), hold all,
stem(n(ne), xn(2, ne), '--'), hold off; grid,
legend('x_{1}(n)', 'x_{2}(n)', 'Location', 'best'), legend boxoff,
xlabel('n'), ylabel('x(n)'),

subplot(313),
plot(t(te), xa(1, te)), hold all,
plot(t(te), xa_rec(2, te), '--'), hold off; grid, xlim([t(te(1)) t(te(end))]),
xlabel('t [s]'), ylabel('x_{a, rec}(t)'),
legend('x_{a1, rec}(t)', 'x_{a2, rec}(t)', 'Location', 'best'), legend boxoff,
```




```
% spectre - domeniul frecventa
NFFT = 2^nextpow2(length(xa)); % prima putere a lui 2 >= lungimea lui x_a(t)
F = (L*Fs)*linspace(0, 1, NFFT);
Xa = fft(xa, NFFT, 2); % spectrele semnalelor analogice initiale
Xa_rec = fft(xa_rec, NFFT, 2); % spectrele semnalelor analogice reconstituite

figure,
subplot(211),
plot(F, abs(Xa(:, :))), grid, xlim([0   F(end)/2]),
legend('|X_{a1}(F)|', '|X_{a2}(F)|', 'Location', 'best'), legend boxoff,
title('Spectrele semnalelor analogice'), ylabel('|X_a(F)|'),

subplot(212),
plot(F, abs(Xa_rec(1, :))), hold all,
plot(F, abs(Xa_rec(2, :)), '--'), hold off; grid, xlim([0   F(end)/2]),
legend('|X_{a1, rec}(F)|', '|X_{a2, rec}(F)|', 'Location', 'best'), legend boxoff,
title('Spectrele semnalelor reconstituite'),
ylabel('|X_{a, rec}(F)|'), xlabel('Frecventa [Hz]'),
```



- *Identificați efectul alias (în domeniul timp și în domeniul frecvență) și explicați de ce apare.*

Exemplul 3. Evaluarea eventualei periodicități a unui semnal înecat în zgomot

Se consideră secvența

$$x(n) = 3\cos(2\pi 0.05n),\ n = \overline{0, 99}$$

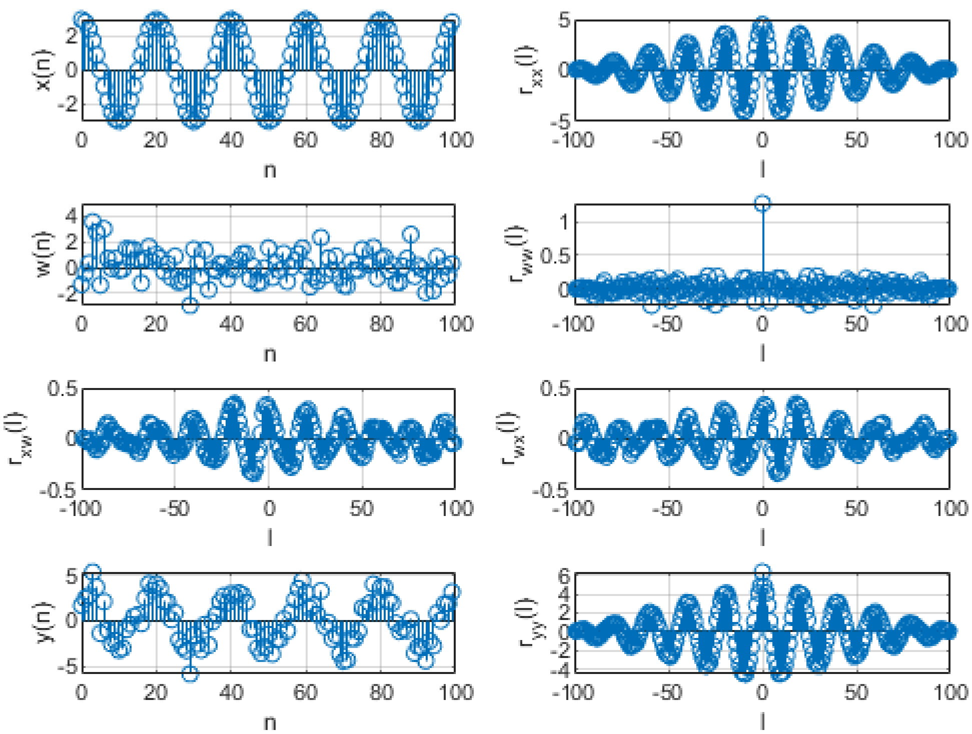
și $w(n)$ un zgomot cu distribuție normală (medie 0 și varianță 1). Evaluând autocorelația secvenței

$$y(n) = x(n) + w(n)$$

să se determine dacă $x(n)$ este periodic sau nu. În caz afirmativ, să se evalueze valoarea perioadei.

```
% Ex3_3
clear variables;
n = 0:99; x = 3*cos(2*pi*0.05*n); % N=20
w = randn(1, length(n)); % zgomot cu distributie normala
y = x + w; % secventa observabila

% evaluare corelatii
[r_xx, x_lags] = xcorr(x, 'biased'); % autocorelatia secventei x(n)
[r_ww, w_lags] = xcorr(w, 'biased'); % autocorelatia secventei w(n)
[r_xw, xw_lags] = xcorr(x, w, 'biased'); % intercorelatia dintre x(n) si w(n)
[r_wx, wx_lags] = xcorr(w, x, 'biased'); % intercorelatia dintre w(n) si x(n)
```

```
[r_yy, y_lags] = xcorr(y, 'biased'); % autocorelatia secventei y(n)

figure,
subplot(421), stem(n, x), grid, ylabel('x(n)'), xlabel('n'),
subplot(422), stem(x_lags, r_xx), grid, ylabel('r_{xx}(l)'), xlabel('l'),
subplot(423), stem(n, w), grid, ylabel('w(n)'), xlabel('n'),
subplot(424), stem(w_lags, r_ww), grid, ylabel('r_{ww}(l)'), xlabel('l'),
subplot(425), stem(xw_lags, r_xw), grid, ylabel('r_{xw}(l)'), xlabel('l'),
subplot(426), stem(wx_lags, r_wx), grid, ylabel('r_{wx}(l)'), xlabel('l'),
subplot(427), stem(n, y), grid, ylabel('y(n)'), xlabel('n'),
subplot(428), stem(y_lags, r_yy), grid, ylabel('r_{yy}(l)'), xlabel('l'),
```



- Din autocorelația secvenței observabile se poate vedea că maximele, respectiv minimele, se repetă din 20 în 20 eșantioane, ca atare secvența *x*(*n*) este periodică cu perioada 20

```
N_x = seqperiod(x, 1e-10)
```

```
N_x = 20
```

- $x(n) = x(n+20) \Longrightarrow r_{xx}(l) = r_{xx}(l+20)$

```
if round(r_xw(1:end)-r_wx(end:-1:1), 10) == 0
    disp('r_{xw}(l) = r_{wx}(-l)')
else
    disp('r_{xw}(l) ~= r_{wx}(-l)')
end
```

r_{xw}(l) = r_{wx}(-l)

- $r_{xw}(l) = r_{wx}(-l)$

Exerciții

1) Să se reprezinte grafic un semnal modulat în amplitudine eșantionat cu 1 MHz. Purtătoarea este la 100 kHz, iar modulatoarea la 10 kHz. Pentru indicele de modulație se consideră două valori: 0.2 și 1.2. Să se reprezinte grafic în aceeași figură, dar în altă subfereastră, semnalul modulat în amplitudine cu purtătoare suprimată.

```
%% Ex. 1
clear variables;
```

2) Dintre toate secvențele obținute prin eșantionarea cu 50 kHz a semnalelor sinusoidale, care are cea mai mare viteză de variație?

```
%% Ex. 2
clear variables;
```

3) Să se genereze 101 valori corespunzătoare unei secvențe obținute prin eșantionarea cu 1 kHz a unei sinusoide cu amplitudine 2, defezaj inițial 45 grade și frecvență de 100 Hz.

- Din semnalul anterior să se obținută un semnal redresat bialternanță
- Să se realizeze media aritmetică a celor două semnale obținute. Cum se numește semnalul obținut?
- Să se reprezintre grafic cele 3 secvențe în aceeași fereastră grafică, în subferestre diferite

```
%% Ex. 3
clear variables;
```

4) Se consideră un semnal analogic sinusoidal cu frecvența de 200 Hz, eșantionat cu 800 Hz. Să se reprezinte grafic semnalul analogic, secvența obținută în urma eșantionării și semnalul analogic reconstituit.

```
%% Ex. 4
clear variables;
```

5) Se consideră semnalele analogice sinusoidale cu frecvențele: 100 Hz, 300 Hz, 400 Hz, 500 Hz, 600 Hz și, respectiv, 800 Hz. Toate se eșantionează cu 900 Hz. Să se reprezinte grafic semnalele analogice, secvențele obținute în urma eșantionării și semnalele analogice reconstituite. Există efect de alias? Explicați. Dacă există alias, reprezentați grafic spectrele de amplitudine pentru semnalele analogice inițiale și pentru cele reconstituite. Sunt spectre corespunzătoare semnalelor reconstituite care se suprapun? Explicați.

```
%% Ex. 5
clear variables;
```

6) Se consideră secvența

$$y(n) = x(n) + w(n),\ n = \overline{0, 200},$$

unde $x(n) = 3\cos(2\pi 0.15n) + 2\cos(2\pi 0.1n),\ n = \overline{0, 200}$

și *w*(*n*) este un zgomot de tip aditiv. Evaluând autocorelația secvenței *y*(*n*) determinați dacă *x*(*n*) este periodic sau nu. Dacă da, care este perioada?

```
%% Ex. 6
clear variables;
```


Lăcrimioara Grama
Signal Processing Group
Technical University of Cluj – Napoca
October 2020