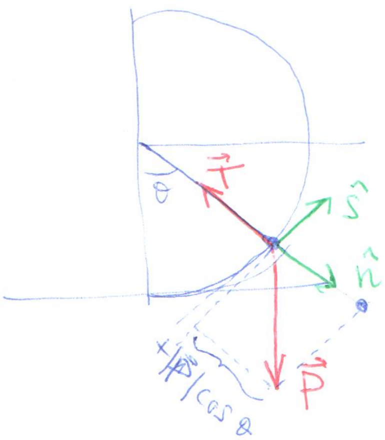
Esercizio "giro della morte".

Una pietra di massa $\underline{m}$ legata a un filo ~~di~~ di lunghezza $\underline{l}$ descrive una circonferenza contenuta in un piano verticale. Determinare la velocità minima della pietra ~~nel~~ nel punto più alto in modo tale che non cada (che la corda abbia una tensione).



Scelgo un ~~es~~ sistema di riferimento con due vettori $\{\hat{n}, \hat{s}\}$ come base, normali e tangenziali al moto della pietra rispettivamente.

L'equazione di Newton nell'asse definito da $\hat{n}$ è:

$$\boxed{m\,a_n = T_n + P_n}$$

ove a_n, T_n, P_n sono le componenti normali (lungo $\hat{n}$) della accelerazione, tensione della corda e peso, i.e.:

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = a_n \cdot \hat{n} + a_s \cdot \hat{s}$$

$$\vec{P} = P_n \hat{n} + P_s \cdot \hat{s}$$

$$\vec{T} = T_n \hat{n} + T_s \cdot \hat{s} \qquad (\text{con } T_s = 0)$$

Decomponendo la forza peso:

$$P_n = mg\cos\theta$$

$$T_n = -T \qquad \text{ove } T = |\vec{T}|$$

uso l'equazione per la accelerazione centripeta:

$$a_n = -\omega^2 r \qquad (\omega, \text{ velocità angolare})$$

L'equazione di Newton viene:

$$\boxed{mg\cos\theta - T = -mr\omega^2.}$$

Sono interessato al valore della tensione nel punto più alto della traiettoria circolare, i.e., quando $\theta = \pi$.

Dunque (metto $\theta = \pi$ nell'ultima equazione)

$$-mg - T = mr\omega^2$$

$$T = mr\omega^2 - mg$$

Se la velocità angolare è molto grande, in modo tale che si può trascurare mg di fronte a $mr\omega^2$, ~~questa è~~ resta l'espressione per la tensione di una corda come funzione di m, r, ω corrispondente a un moto circolare uniforme. Se invece ω è sufficientemente piccola, $= \omega_{min}$, la tensione della corda si annulla:

$$mr\omega_{min}^2 - mg = 0$$

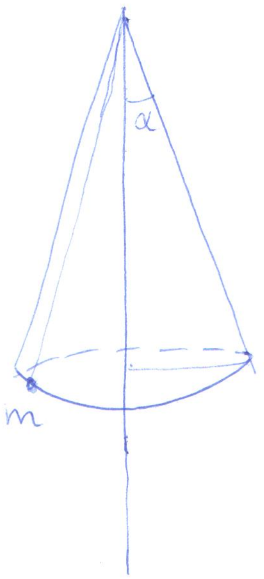
$$\omega_{min} = \sqrt{g/r}$$

oppure, $(v = r\omega,$ velocità$)$

$$v_{min} = \sqrt{gr}$$

Note: sull'interpretazione dell'esercizio. Esso può essere interpretato anche come descrivente il moto di una motocicletta ~~costretta a muoversi sulla~~ che cammina su una pista che descrive una circonferenza di raggio r. La velocità v_{min} è la velocità minima che deve avere nel punto più alto per non staccarsi dal pavimento, e $\vec{T}$ è ~~la~~ in questo caso non più la tensione della corda ma la ~~forza~~ reazione vincolare che esercita la pista sulle ruote della motocicletta.

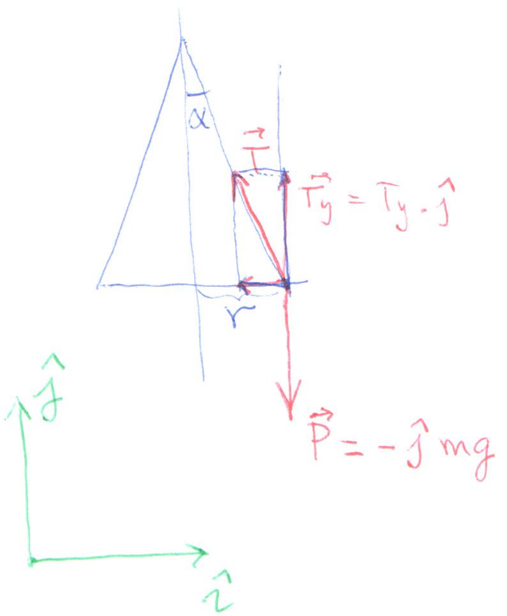
Esercizio: pendolo conico



Un punto materiale di massa m ~~descrive~~ appeso a una corda di lunghezza L descrive una circonferenza nel piano orizzontale, come mostrato nella figura.

1) Si chiede qual'è l'angolo, α, che la corda forma con un asse verticale.

2) Inoltre, si chiede quali sono l'angolo e la velocità massima del punto, α_{max}, v_{max}, che la corda può sopportare, sapendo che il suo carico di rottura (la massima tensione che può sopportare prima di rompersi è T^{max}).



Scelgo $\{\hat{\imath}, \hat{\jmath}\}$ come la base del mio sistema di riferimento: l'equazione di Newton lungo $\hat{\jmath}$ è

$$\boxed{m a_y = T_y - mg}$$

lungo l'asse $\hat{\imath}$, l'eq. di Newton è

$$\boxed{m a_x = T_x}$$

Il moto è confinato in un piano orizzontale. La velocità nell'asse $\hat{j}$ è nulla e costante. Dunque, la sua accelerazione nell'asse ~~x~~ $\hat{j}$ è nulla, $a_y = 0$.

Dunque, dall'eq. di Newton in $\hat{j}$:

$$T = \frac{mg}{\cos\alpha}$$

A

~~Newton~~ a_x

Dall'altra parte, ~~a_x~~ a_x è proprio l'accelerazione centripeta: $a_x = -\omega^2 r$ (negativa perché è rivolta verso il centro della circonferenza). Siccome $r = L\sin\alpha$, ~~la~~ l'equazione di Newton in ~~x~~ $\hat{i}$ diventa:

$$-m r w^2 = -T\sin\alpha \;\cancel{mg}$$

$$-m L \cancel{\sin\alpha} w^2 = -T\cancel{\sin\alpha}$$

~~uso~~ uso questo e ottengo:

$$L w^2 \cos\alpha = g$$

$$\boxed{\alpha = \text{arc.cos}\left(\frac{g}{L w^2}\right)}$$

2) qual'è α_{min}, v_{min}?

uso questa ~~con~~ $T = T^{max}$

$$\boxed{\underline{\alpha_{min}} = \cancel{mg}\ \arccos\left(\frac{mg}{T^{max}}\right)}$$

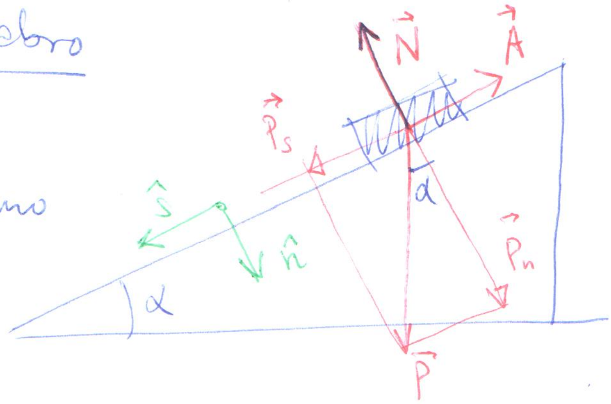
uso poi $\boxed{m L \omega^2 = T}$ l'equazione di prima:

$$\omega_{max} = \sqrt{\frac{T_{max}}{m L}}$$

e $v_{max} = r_{max} \omega_{max} = L \sin\alpha_{max} \omega_{max}$

---

esercizio piano inclinato scabro



Un corpo dimora in riposo su un piano inclinato scabro con coefficiente d'attrito statico μ_s.
Determinare il maggior angolo α_{max} che il piano forma col piano orizzontale, tale per cui il corpo non scivola.

Scelgo il sistema di riferimento definito da $\{\hat{n}, \hat{s}\}$

lungo $\hat{n}$ l'equazione di Newton è

$$N - P_n = 0$$

l'accelerazione normale al piano è nulla (perché la velocità normale lo è)

con $P_n = |\vec{P}_n| = P \cos\alpha$

dunque $N = P \cos\alpha$

leg. di Newton in $\hat{s}$ è:

$$\underbrace{0}_{\text{il corpo è fermo...}} = \underbrace{P_s - A}$$

il corpo è fermo... ...perché l'attrito statico è tale per cui $|\vec{A}| = P_s$, la forza di attrito ha uno modulo uguale al modulo della ~~forza~~ componente parallela alla superficie della forza ~~appli~~ applicata al corpo. Questo è vero se ~~A~~

$A = P_s \leq A_{max} = \mu_s N$.

Insomma

$$A = P_s = mg \sin\alpha$$

se

$$mg \sin\alpha \leq \mu_s mg \cos\alpha$$

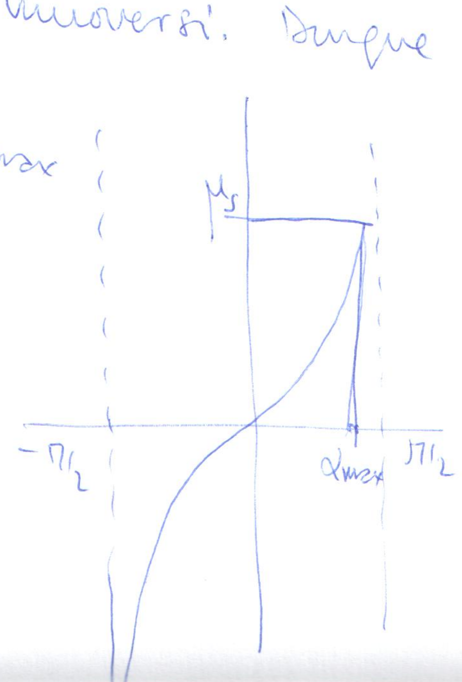
l'identità si ha per l'angolo α_{max}. Per angoli maggiori di α_{max}, il corpo comincia a muoversi. Dunque

$$\sin\alpha_{max} = \mu_s \cos\alpha_{max}$$

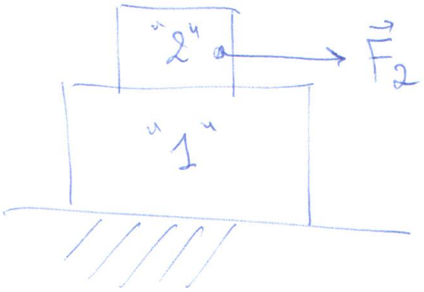
$$\alpha = \arctan \mu_s$$

per $\mu_s = 0$, $\alpha_{max} = 0$

per $\mu_s \to \infty$, $\alpha_{max} \Rightarrow \pi/2$

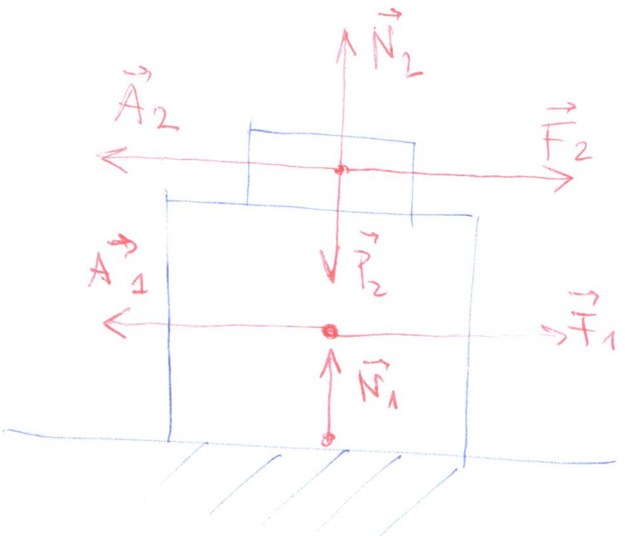


Esercizio: coppia di corpi scabri



Un corpo, "1", di massa m_1 riposa sul pavimento. Un secondo corpo di massa m_2 riposa sul corpo ~~di massa~~ n° 1. Se i coefficienti di attrito statico tra i corpi 1 e 2, e tra il corpo 1 e il pavimento sono μ_{12} e μ_{01} rispettivamente,

si determinino le condizioni per cui, applicando una forza parallela al pavimento di modulo F_2 nel corpo 2, esso resta attaccato al corpo "1", e lo trascina, facendolo scivolare sul pavimento.



Finché "2" è fermo, la forza di attrito su "2" compensa totalmente $\vec{F}_2$ $(\vec{A}_2 = -\vec{F}_2)$

$\vec{A}_2$ è una forza che il corpo "1" esercita sul corpo "2". Per il principio di azione-reazione, il corpo "2" esercita una forza opposta sul corpo 1, $\vec{F}_1 = -\vec{A}_2$

A sua volta, il pavimento induce una forza di attrito, $\vec{A}_1$ sul corpo "1".

Dato che i corpi sono in equilibrio in entrambi gli assi $\hat{\imath}, \hat{\jmath}$ $\xrightarrow{\hat{\imath}}$, $\uparrow \hat{\jmath}$, si ha

$$N_2 = mg$$

$$\cancel{N_2 = A F_1 = A_1 A F_2}$$

$$F_1 = A_2 = F_2 = A_1 \rightarrow$$ è in una ~~situazione~~ condizione tale per cui:

$A_2 = F_2$ se $F_2 \leq \mu_{12} m_2 g$	2 fermo risp. a 1
$F_1 = A_1$ se $F_1 \leq \mu_{01} \underbrace{(m_1+m_2) g}_{N_2}$	1 fermo rispetto al pavimento

I due corpi 1,2 restano attaccati se $F_2 \leq \mu_{12} m_2 g$.

In quella circostanza (e solo in quella), ~~$A_1 = F_1 = A_2 = F_2$~~, $F_1 = F_2 = A_2$. Se, in più, $F_1 \leq \mu_{01} (m_1+m_2) g$, allora $A_1 = F_1 = F_2 = A_2$, e il primo corpo resta attaccato al pavimento. In caso contrario si muove. + Riassumendo, la condizione per cui 1,2 restano attaccati e 1 scivola è:

$$\boxed{g(m_1+m_2)\mu_{01} \leq F_2 \leq g m_2 \mu_{12}.}$$

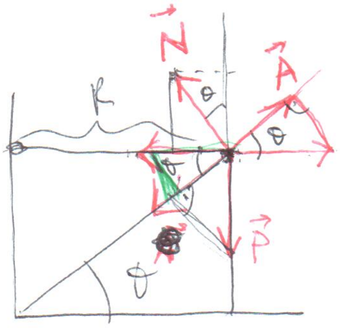
In altre parole, se si verifica

$$\frac{\mu_{01}}{\mu_{12}} \leq \frac{m_2}{m_1+m_2}$$

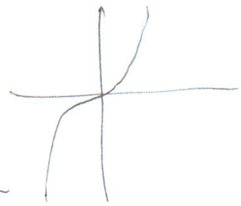
Nota: se m_1 è molto grande, ho bisogno di un rapporto μ_{01}/μ_{12} molto piccolo allora

$$F_2^{min} = \mu_{01}(m_1+m_2)\,g$$

I



$\{\theta, m, \mu_s, R\}$

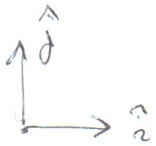


determinare v_{max}, v_{min}

per cui la m. non si muove in $\hat{i}, \hat{j}$

Prima lo faccio senza attrito:

~~Sceg~~ Scelgo gli assi



$$\boxed{R w^2 = \frac{v^2}{R}}$$

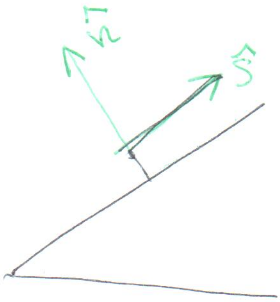
in $\hat{j}$: $m\ddot{y} = N_y - mg$

$$N_y = mg = N\cos\theta \qquad N = \frac{mg}{\cos\theta}$$

in $\hat{i}$: $m a_x = N_x = -N\sin\theta$

$$R w^2 = g\tan\theta$$

$$v = \sqrt{R g \tan\theta}$$



Con l'attrito:

si aggiunge una forza $\vec{A}$ che è uguale a $-$ le componenti in $\hat{s}$ delle forze che ci sono: $-\left[(\vec{P} + \vec{N})\cdot\hat{s}\right]\cdot\hat{s}$

in quel modo, l'equazione in $\hat{i}$ (per esempio) è

$$0 = -N\sin\theta + \underbrace{A_x}$$

tale per cui $a_x = 0$

Questo succede finché

$$\left|(\vec{P} + \vec{N})\cdot\hat{s}\right| \leq \mu_s N$$

$-mg \cancel{\cos\theta} \sin\theta \ \cancel{} = \mu_s \cancel{N_s}$

$|R_s| = \cancel{mg\sin\theta \leq \mu_s N = \mu_s \frac{mg}{\cos\theta}}$

uso adesso la forza centrifuga $\vec{F}_c = -m\vec{a}_c$

$\vec{F}_c = m r \omega^2 \hat{x} = -m\vec{a}_c$

$P_s + \cancel{F} \ F_{cs}$

$= -mg\sin\theta + \cancel{m} \, m r \omega^2 \cdot \cos\theta$

dunque $\cancel{m} \left| r\omega^2 \cos\theta - g\sin\theta \right| \leq \mu_s \cancel{m} \frac{g}{\cos\theta}$

$\left| \frac{v^2}{r}\cos\theta - g\sin\theta \right| \leq \mu_s \frac{g}{\cos\theta}$

1) se ~~primo~~ questo è > 0, la velocità limite è

$\cos\theta \frac{v_{max}^2}{r} = g\sin\theta + \mu_s \frac{g}{\cos\theta}$

2) se quello è < 0, la velocità minima è

$\cos\theta \frac{v_{min}^2}{r} \ \cancel{=} \ g\sin\theta \geq -\mu_s \frac{g}{\cos\theta}$

la minima velocità per cui questo si verifica è

$\cos\theta \frac{v_{min}^2}{r} = g\sin\theta - \mu_s \frac{g}{\cos\theta}$

se $\mu_s = 0$, ottengo quel che mi aspettavo:

$$v_{max}^2 = \frac{gR}{\cos\theta}\left\{\sin\theta + \mu_s \frac{1}{\cos\theta}\right\}$$

$$v_{min}^2 = \frac{gR}{\cos\theta}\left\{\underbrace{\sin\theta - \mu_s \frac{1}{\cos\theta}}_{\text{se} > 0}\right\}$$

se $\mu_s = 0$

$$v_{max} = v_{min} = \sqrt{\frac{gR}{\cos\theta}}$$

Per la precisione $v_{min} = \min\left\{0, \frac{gR}{\cos\theta}\left\{\sin\theta - \frac{\mu_s}{\cos\theta}\right\}\right\}$