

UNIVERSITÄT INNSBRUCK

BACHELORARBEIT

Dimensions-Splitting kombiniert mit Tschebyscheff-Tensorapproximation

Autor

Martin BERGER

Betreuer

Tobias HELL



Verfasst im Rahmen des Seminars mit Bachelorarbeit

LV 702661, SS 2015

Fakultät für Mathematik, Informatik und Physik

Universität Innsbruck

August 2015

“Ein Mathematiker, der nicht irgendwie ein Dichter ist, wird nie ein vollkommener Mathematiker sein.”

—Karl Weierstraß

Abstract

Ziel dieser Bachelorarbeit ist die Kombination von Splittingverfahren mit Tensorapproximation. Dazu geben wir anfangs eine Einführung in die Theorie der Tensorapproximationen und diskutieren anschließend ihre Kombination mit Dimensions-Splitting. Wir setzen mit der Theorie der Tschebyscheff-Interpolation fort, in welcher wir die Definition der Tschebyscheff-Polynome motivieren und ihre wichtigsten Eigenschaften im Hinblick auf die Polynominterpolation auf \mathbb{R} beweisen. Zudem werden wir diese im Anschluss mittels kennengelernter Sätze aus dem vorangegangenen Kapitel auf den \mathbb{R}^2 verallgemeinern. Zum Abschluss der Bachelorarbeit werden wir dann alle bisherigen Resultate verbinden und Splittingverfahren in Kombination mit Tschebyscheff-Tensorapproximation auf drei Evolutionsgleichungen anwenden.

Inhaltsverzeichnis

1. Vorwort	1
2. Tensorapproximation mit Dimensions-Splitting	3
2.1. Tensorprodukt Interpolation	3
2.2. Splittingverfahren kombiniert mit Tensorapproximation	5
3. Tschebyscheff-Approximation	11
3.1. Tschebyscheff-Polynome	11
3.2. Tschebyscheff-Interpolation	16
3.2.1. Verfahrensfehler der Polynominterpolation	16
3.2.2. Tschebyscheff Polynominterpolation in \mathbb{R} und \mathbb{R}^2	17
4. Splittingverfahren kombiniert mit Tschebyscheff-Tensorapproximation	23
4.1. Exponentielles Lie-Splitting	24
4.2. Strang-Splitting	25
4.3. Lie-Resolventen-Splitting	33
5. Nachwort	39
Anhang A. Tschebyscheff-Differentialgleichung	41
Literatur	43

1. Vorwort

Dimensions-Splittingverfahren sind numerische Verfahren zur Lösung von Differentialgleichungen, wie zum Beispiel einer Evolutionsgleichung der Form

$$u'(t) = (\partial_x a \partial_x + \partial_y b \partial_y) u(t) + g(t),$$

wobei a und b Koeffizientenfunktionen bezeichnen. Aufgrund der Struktur obiger Differentialoperatoren erscheint es sinnvoll, Dimensions-Splitting mit Tensorapproximationen zu kombinieren. Daher geben wir zu Beginn eine kurze Einführung in die Theorie der Tensorinterpolation. Hierbei versucht man durch verknüpfen von bereits bekannten Interpolationsverfahren in einer Dimension Approximationen in mehreren Dimensionen zu erhalten. Anschließend kombinieren wir diese mit exponentiellem Lie-, Strang- und Resolventen-Splitting, um somit neue Lösungsverfahren für Evolutionsgleichungen zu erhalten. Da wir diese letztendlich konkret mit Tschebyscheff-Tensorapproximation untersuchen wollen, folgt darauf ein Kapitel zur Theorie der Tschebyscheff-Interpolation. Dort motivieren wir zu Beginn die Definition der Tschebyscheff-Polynome und zeigen ihre grundlegenden Eigenschaften. In der Folge diskutieren wir ihre Rolle bei der Fehleranalyse der Polynominterpolation und letztendlich ihre Anwendungen als Basisfunktionen in der Approximationstheorie auf \mathbb{R} . Zudem werden wir Sätze aus dem vorangegangenen Kapitel verwenden, um die Tschebyscheffapproximation auf zwei Dimensionen zu verallgemeinern. Zum Abschluss dieser Arbeit werden wir dann in Kapitel 4 die bisherigen Resultate kombinieren und auf drei Fälle einer inhomogenen Evolutionsgleichung auf dem Einheitsquadrat $\Omega = [0, 1]^2$ anwenden. Im ersten betrachten wir eine Inhomogenität welche in allen Ecken von Ω verschwindet, während in den beiden anderen Beispielen die Inhomogenität in nur einer respektive keiner Ecke verschwindet. Die folgenden numerischen Versuche und Beispiele wurden alle in MATLAB unter Verwendung des Chebfun¹ Pakets implementiert.

¹<http://www.chebfun.org>

2. Tensorapproximation mit Dimensions-Splitting

Wir beginnen mit Tensorapproximationen und ihrer Verknüpfung mit Dimensions-Splittingverfahren. Dazu machen wir uns anfangs mit dem Konzept der Tensorinterpolation vertraut, indem wir grundlegende Eigenschaften ebensolcher zeigen und diese anschließend mit dem exponentiellen Lie-, Strang- und Resolventen-Splitting kombinieren

2.1. Tensorprodukt Interpolation

Die folgende Darstellung orientiert sich an [1, Kapitel 7]. Im weiteren Verlauf seien X und Y Mengen.

Definition 2.1 (TENSORPRODUKT)

Es seien $U \subset \text{Abb}(X, \mathbb{R})$ sowie $V \subset \text{Abb}(Y, \mathbb{R})$ Vektorräume, dann ist das Tensorprodukt von U und V definiert als

$$U \otimes V := \left\{ \sum_{i=1}^n c_i (u_i \otimes v_i) : n \in \mathbb{N}, \forall i \in \{1 \dots n\} : c_i \in \mathbb{R}, u_i \in U, v_i \in V \right\},$$

wobei $(u \otimes v)(x, y) = u(x)v(y)$ für $u \in U, v \in V$ sowie $x \in X$ und $y \in Y$.

Bemerkung: Offensichtlich ist in obiger Situation $U \otimes V$ selbst ein Vektorraum. \diamond

Lemma 2.2 (BASIS DES TENSORPRODUKTES)

Es sei in der Situation von Definition 2.1 (u_1, \dots, u_m) bzw. (v_1, \dots, v_n) eine Basis von U respektive V , dann ist

$$(u_i \otimes v_j)_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$$

eine Basis von $U \otimes V$.

Beweis: Gelte $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} (u_i \otimes v_j) = 0$. Für $x \in X$, ist dann

$$\sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n c_{ij} u_i(x) \right) v_j = 0.$$

Da (v_1, \dots, v_n) eine Basis ist, folgt $\sum_{j=1}^n c_{ij} u_i(x) = 0$ für alle i und x . Insbesondere

2. Tensorapproximation mit Dimensions-Splitting

gilt $\sum_{j=1}^n c_{ij} u_i = 0$ für alle $i = 1, \dots, n$, woraus analog $c_{ij} = 0$ für jedes i und j folgt. Also ist obige Familie linear unabhängig. Sei nun $u \otimes v \in U \otimes V$, dann folgt laut Voraussetzung

$$u = \sum_{i=1}^m a_i u_i \quad \text{und} \quad v = \sum_{j=1}^n b_j v_j$$

für geeignete a_i und b_j . Nun gilt

$$u \otimes v = \left(\sum_{i=1}^m a_i u_i \right) \otimes \left(\sum_{j=1}^n b_j v_j \right) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_i b_j (u_i \otimes v_j),$$

woraus die Behauptung folgt. ■

Beispiel 2.3

Für $m, n \in \mathbb{N}$ bezeichne $\mathbb{R}_m[X]$ und $\mathbb{R}_n[Y]$ die Menge aller reellen Polynome vom Grad m bzw. n . Dann ist

$$(X^i \otimes Y^j)_{\substack{0 \leq i \leq m \\ 0 \leq j \leq n}}$$

eine Basis von $\mathbb{R}_m[X] \otimes \mathbb{R}_n[Y]$. ◇

Sei nun $G = \{x_1, \dots, x_m\} \times \{y_1, \dots, y_n\} \subset X \times Y$ ein Gitter und P und Q Interpolationsoperatoren, d. h. für $f \in \text{Abb}(X, \mathbb{R})$ und $g \in \text{Abb}(Y, \mathbb{R})$ gelte

$$P[f] = \sum_{i=1}^m f(x_i) u_i \quad \text{und} \quad Q[g] = \sum_{j=1}^n g(y_j) v_j,$$

wobei $u_i(x_k) = \delta_{ik}$ und $v_j(x_\ell) = \delta_{j\ell}$. Dann können wir mittels Tensorstruktur eine Abbildung auf G interpolieren.

Satz 2.4 (Tensorinterpolation)

Sei $F: X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ eine Abbildung. Dann interpoliert $(P \otimes Q)[F]$ definiert durch

$$(P \otimes Q)[F](x, y) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n F(x_i, y_j) (u_i \otimes v_j)(x, y)$$

die Funktion F auf G .

Beweis: Sei $(x_k, y_\ell) \in G$. Es gilt

$$\begin{aligned} (P \otimes Q)[F](x_k, y_\ell) &= \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n F(x_i, y_j) u_i(x_k) v_j(y_\ell) \\ &= \sum_{i=0}^m F(x_i, y_\ell) u_i(x_k) = F(x_k, y_\ell). \end{aligned}$$

■

Beispiel 2.5

In obiger Situation seien

$$u_i(x) = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^m \frac{(x - x_k)}{(x_i - x_k)} \quad \text{und} \quad v_j(y) = \prod_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq j}}^n \frac{(y - y_\ell)}{(y_j - y_\ell)}$$

für $i = 1, \dots, m$ und $j = 1, \dots, n$ die jeweilige Lagrange²-Basis, dann ist

$$(P \otimes Q)[F](x, y) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n F(x_i, y_j) (u_i \otimes v_j)(x, y)$$

ein Polynom in zwei Variablen, welches F auf G interpoliert.

◇

Korollar 2.6 (TENSOR-POLYNOMINTERPOLATION)

Auf $\mathbb{R}_m[X] \otimes \mathbb{R}_n[Y]$ kann eine beliebige Abbildung $F: X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ eindeutig auf einem Gitter G interpoliert werden.

Beweis: Folgt aus Beispiel 2.5 und der Eindeutigkeit der Polynominterpolation.

■

Bemerkung: Sei $d \in \mathbb{N}$, dann können obige Konstruktionen analog auf Gitter auf d Mengen verallgemeinert werden.

◇

2.2. Splittingverfahren kombiniert mit Tensorapproximation

Wir wollen nun die kennengelernte Tensorstruktur mit Splittingmethoden kombinieren. Dazu bezeichne $\Omega = (0, 1)^2$ das offene Einheitsquadrat und \mathcal{L} den gleichmäßig stark elliptischen Differentialoperator $\mathcal{L} = \partial_x(a\partial_x) + \partial_y(b\partial_y)$ mit Definitionsbereich $\mathcal{D}(\mathcal{L}) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. Dabei bezeichnen $a, b \in \mathcal{C}^2([0, 1])$ Koeffizienten-

² Joseph-Louis Lagrange, 1736–1813, französischer Mathematiker

funktionen, welche positiv und von 0 weg beschränkt sind. Auf $L^2(\Omega)$ betrachten wir die Evolutionsgleichung

$$u'(t) = \mathcal{L}u(t) + g(t), \quad u(0) = u_0 \quad (1)$$

mit $u_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{L})$ und $g: [0, T] \rightarrow L^2(\Omega)$ für $T > 0$. Setzen wir $\mathcal{A} = \partial_x(a\partial_x)$ sowie $\mathcal{B} = \partial_y(b\partial_y)$, so lässt sich obiges Anfangswertproblem als

$$u'(t) = (\mathcal{A} + \mathcal{B})u(t) + g(t), \quad u(0) = u_0$$

formulieren. Im Folgenden sei $\tau > 0$ eine feste Zeitschrittweite und u_n eine Näherung an die exakte Lösung zum Zeitpunkt $t_n = n\tau$ für $n \in \mathbb{N}$.

Exponentielles Lie-Splitting

Als erstes untersuchen wir exponentielles Lie-Splitting kombiniert mit Tensorapproximation. Die Splittingmethode liefert

$$u_{n+1} = e^{\tau\mathcal{B}}e^{\tau\mathcal{A}}(u_n + \tau g(t_n)).$$

als Approximation an $u(t_{n+1})$. Gelte nun

$$u_n + g(t_n) \approx \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(n)} (f_i^{(1)} \otimes f_j^{(2)})$$

für $M, N \in \mathbb{N}$ und geeignete Basisfunktionen $f_i^{(1)}, f_j^{(2)}$. Wegen $a = a(x)$ und $b = b(y)$ folgt aus

$$(f_i^{(1)} \otimes f_j^{(2)})(x, y) = f_i^{(1)}(x)f_j^{(2)}(y),$$

dass

$$u_{n+1} \approx \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(n)} (e^{\tau\mathcal{A}}f_i^{(1)} \otimes e^{\tau\mathcal{B}}f_j^{(2)}).$$

Durch Anwendung der Tensorapproximation wirken die Differentialoperatoren also nur noch auf die gewählten Basisfunktionen. Gilt zudem

$$e^{\tau\mathcal{A}}f_i^{(1)} \approx \sum_{k=1}^K x_{ki}f_k^{(1)} \quad \text{und} \quad e^{\tau\mathcal{B}}f_j^{(2)} \approx \sum_{\ell=1}^L y_{\ell j}f_\ell^{(2)}$$

für $K, L \in \mathbb{N}$, so folgt

$$u_{n+1} \approx \sum_{k=1}^K \sum_{\ell=1}^L \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N x_{ki} c_{ij}^{(n)} y_{\ell j} \left(f_k^{(1)} \otimes f_\ell^{(2)} \right).$$

Definieren wir weiters die Koeffizientenmatrizen X, Y, C_n durch $X_{ki} = x_{ki}$, $Y_{\ell j} = y_{\ell j}$ und $(C_n)_{ij} = c_{ij}^{(n)}$ für $k = 1, \dots, K$, $i = 1, \dots, m$, $\ell = 1, \dots, L$ und $j = 1, \dots, N$, so kann dies als

$$u_{n+1} \approx \sum_{k=1}^K \sum_{\ell=1}^L \left(X C_n Y^\top \right)_{k\ell} \left(f_k^{(1)} \otimes f_\ell^{(2)} \right)$$

geschrieben werden. Um also die Evolutionsgleichung (1) näherungsweise zu lösen, müssen die Matrizen X, Y nur einmalig berechnet werden. Dazu diskretisiert man die Differentialoperatoren und löst ein lineares Gleichungssystem. Anschließend entwickelt man in jedem Zeitschritt die vorherige Approximation und berechnet $X C_n Y^\top$.

Strang-Splitting

Ähnlich verhält es sich bei der Kombination des Strang-Splitting mit Tensorapproximation. Das ursprüngliche Splittingverfahren liefert

$$u_{n+1} = e^{\frac{\tau}{2}\mathcal{A}} e^{\frac{\tau}{2}\mathcal{B}} \left(e^{\frac{\tau}{2}\mathcal{B}} e^{\frac{\tau}{2}\mathcal{A}} u_n + \tau g(t_n + \tau/2) \right)$$

als Näherung. Gelte nun

$$u_n \approx \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(n)} \left(f_i^{(1)} \otimes f_j^{(2)} \right), \quad e^{\frac{\tau}{2}\mathcal{A}} f_i^{(1)} = \sum_{k=1}^K x_{ki} f_k^{(1)} \quad \text{sowie} \quad e^{\frac{\tau}{2}\mathcal{B}} f_j^{(2)} = \sum_{\ell=1}^L y_{\ell j} f_\ell^{(2)}$$

und bezeichnen X, Y, C_n wiederum die zugehörigen Koeffizientenmatrizen, so folgt

$$e^{\frac{\tau}{2}\mathcal{B}} e^{\frac{\tau}{2}\mathcal{A}} u_n \approx \sum_{k=1}^K \sum_{\ell=1}^L \left(X C_n Y^\top \right)_{k\ell} \left(f_k^{(1)} \otimes f_\ell^{(2)} \right).$$

Entwickeln wir anschließend die Inhomogenität so, dass

$$g(t_n + \tau/2) \approx \sum_{k=1}^K \sum_{\ell=1}^L d_{k\ell}^{(n)} \left(f_k^{(1)} \otimes f_\ell^{(2)} \right)$$

2. Tensorapproximation mit Dimensions-Splitting

gilt und bezeichnet D_n die zugehörige Koeffizientenmatrix, dann erhalten wir

$$e^{\frac{\tau}{2}\mathcal{B}}e^{\frac{\tau}{2}\mathcal{A}}u_n + \tau g(t_n + \tau/2) \approx \sum_{k=1}^K \sum_{\ell=1}^L (XC_n Y^\top + D_n)_{k\ell} (f_k^{(1)} \otimes f_\ell^{(2)}).$$

Erneute Anwendung der Operatoren führt letztendlich auf

$$u_{n+1} \approx \sum_{k=1}^K \sum_{\ell=1}^L \left(X (XC_n Y^\top + D_n) Y^\top \right)_{k\ell} (f_k^{(1)} \otimes f_\ell^{(2)}).$$

Lie-Resolventen-Splitting

Als letztes Splittingverfahren untersuchen wir das Lie-Resolventen-Splitting. Hierbei wird

$$u_{n+1} = (\text{id} - \tau\mathcal{B})^{-1}(\text{id} - \tau\mathcal{A})^{-1}(u_n + \tau g(t_n))$$

als Approximation an die exakte Lösung verwendet. Erneut gelte

$$u_n + g(t_n) \approx \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(n)} (f_i^{(1)} \otimes f_j^{(2)}).$$

Seien f_1 und f_2 zwei von einer Variablen abhängige Abbildungen, dann gilt wegen

$$\begin{aligned} & ((\text{id} - \tau\mathcal{A})^{-1} \otimes (\text{id} - \tau\mathcal{B})^{-1}) ((\text{id} - \tau\mathcal{A}) \otimes (\text{id} - \tau\mathcal{B})) (f_1 \otimes f_2) \\ &= (\text{id} - \tau\mathcal{A})^{-1} \otimes (\text{id} - \tau\mathcal{B})^{-1} ((\text{id} - \tau\mathcal{A}) f_1 \otimes (\text{id} - \tau\mathcal{B}) f_2) \\ &= (\text{id} - \tau\mathcal{A})^{-1} (\text{id} - \tau\mathcal{A}) f_1 \otimes (\text{id} - \tau\mathcal{B})^{-1} (\text{id} - \tau\mathcal{B}) f_2 = f_1 \otimes f_2 \end{aligned}$$

und analog

$$((\text{id} - \tau\mathcal{A}) \otimes (\text{id} - \tau\mathcal{B})) ((\text{id} - \tau\mathcal{A})^{-1} \otimes (\text{id} - \tau\mathcal{B})^{-1}) (f_1 \otimes f_2) = f_1 \otimes f_2,$$

dass

$$((\text{id} - \tau\mathcal{A})^{-1} \otimes (\text{id} - \tau\mathcal{B})^{-1}) (f_1 \otimes f_2) = (\text{id} - \tau\mathcal{A})^{-1} f_1 \otimes (\text{id} - \tau\mathcal{B})^{-1} f_2$$

und somit

$$u_{n+1} \approx \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(n)} \left((\text{id} - \tau \mathcal{A})^{-1} f_i^{(1)} \otimes (\text{id} - \tau \mathcal{B})^{-1} f_j^{(2)} \right).$$

Erneut bezeichnen X und Y die Koeffizientenmatrizen, sodass

$$(\text{id} - \tau \mathcal{A})^{-1} f_i^{(1)} = \sum_{k=1}^K x_{ki} f_k^{(1)} \quad \text{und} \quad (\text{id} - \tau \mathcal{B})^{-1} f_j^{(2)} = \sum_{\ell=1}^L y_{\ell j} f_\ell^{(2)}$$

gilt. Dann folgt wiederum

$$u_{n+1} \approx \sum_{k=1}^K \sum_{\ell=1}^L \left(X C_n Y^\top \right)_{k\ell} \left(f_k^{(1)} \otimes f_\ell^{(2)} \right).$$

3. Tschebyscheff-Approximation

Im vorherigen Kapitel wurde allgemein die Kombination von Splittingverfahren mit Tensorstrukturen vorgestellt. Zur konkreten Durchführung ebensolcher müssen allerdings noch Basisfunktionen gewählt werden. Da wir uns speziell für die Tschebyscheff-Polynome interessieren, wollen wir ihre wichtigsten Eigenschaften besprechen sowie ihre Rolle für die Polynom-Interpolation. Die folgende Darstellung orientiert sich an Teilen aus [2, Kapitel 5] und [3, Kapitel 3].

3.1. Tschebyscheff-Polynome

Historisch gesehen tauchten die Tschebyscheff³-Polynome erstmals auf als man gewisse Probleme in der Kolbenbewegung von Dampfmaschinen lösen wollte. Dazu betrachtete man folgende Fragestellung: Sei $n \in \mathbb{N}$ und bezeichne P_n die Menge aller reellen Polynome vom Grad n mit Leitkoeffizient 1. Existiert ein $p_0 \in P_n$, sodass die maximale Abweichung auf dem Intervall $[-1, 1]$ minimal wird, d. h.

$$\forall p \in P_n : \max_{-1 \leq x \leq 1} |p_0(x)| \leq \max_{-1 \leq x \leq 1} |p(x)| ? \quad (2)$$

Um obige Aufgabe zu lösen, benötigen wir folgende Eigenschaft des Cosinus.

Lemma 3.1

Es sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt für $\varphi \in \mathbb{R}$, dass

$$\cos(n\varphi) = 2^{n-1} \cos^n(\varphi) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k^{(n)} \cos^k(\varphi)$$

für geeignete $a_k^{(n)} \in \mathbb{R}$.

Beweis: Wir beweisen die Aussage mittels vollständiger Induktion über n . Für $n = 1$ gilt die Aussage offensichtlich. Die Behauptung gelte also für $n \geq 1$. Nun folgt wegen $\cos((n+1)\varphi) + \cos((n-1)\varphi) = 2\cos(n\varphi)\cos(\varphi)$ und der Induktions-

³Pafnutij L. Tschebyscheff, 1821–1894, russischer Mathematiker

3. Tschebyscheff-Approximation

voraussetzung, dass

$$\begin{aligned}\cos((n+1)\varphi) &= \\ &= 2^n \cos^{n+1}(\varphi) + 2 \sum_{k=0}^{n-1} a_k^{(n)} \cos^{k+1}(\varphi) - 2^{n-2} \cos^{n-1}(\varphi) - \sum_{k=0}^{n-2} a_k^{n-1} \cos^k(\varphi) = \\ &= 2^n \cos^{n+1}(\varphi) + \sum_{k=0}^n (2a_k^{(n)} + a_k^{(n-1)}) \cos^k(\varphi)\end{aligned}$$

wobei $a_{-1}^{n-1} := 0$, $a_{n-1}^{n-1} := 0$, $a_n^{n-1} := 0$ und $a_{n-1}^{(n-1)} := a_{n-1}^{(n-1)} - 2^{n-2}$. ■

Obiges Lemma motiviert folgende Definition.

Definition 3.2 (TSCHEBYSCHJEFF-POLYNOME)

Die für $x \in [-1, 1]$ durch

$$T_0(x) := 1, \quad T_n(x) := \cos(n \arccos x) \quad \text{für } n \in \mathbb{N},$$

definierten Abbildungen nennt man *Tschebyscheff-Polynome* (erster Art).

Bemerkung: Aus Lemma 3.1 folgt, dass T_n ein Polynom vom Grad n mit Leitkoeffizient 2^{n-1} für $n \geq 1$ ist. ◇

Satz 3.3 (EIGENSCHAFTEN DER TSCHEBYSCHJEFF-POLYNOME)

Die Tschebyscheff-Polynome erfüllen die folgenden Eigenschaften:

- 1) Sie genügen der 3-Term-Rekursion

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x, \quad T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$$

für $n \geq 2$.

- 2) Es gilt $T_n(\cos(k\pi/n)) = (-1)^k$, wobei $k = 0, \dots, n$ und $n \geq 1$.
- 3) Das Polynom T_n besitzt genau n reelle Nullstellen. Diese sind

$$\cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right), \quad k = 1, \dots, n.$$

- 4) Die Polynome T_n sind orthogonal auf $[-1, 1]$ bezüglich der Gewichtsfunktion $\omega(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$, speziell gilt

$$\int_{-1}^1 \frac{T_n(x)T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{cases} \pi, & n = m = 0, \\ \frac{\pi}{2}, & n = m \neq 0, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beweis: Die Aussagen 2) und 3) sind klar. Aussage 1) folgt aus

$$\begin{aligned} T_{n+1}(x) &= \cos((n+1) \arccos x) \\ &= 2 \cos(\arccos x) \cos(n \arccos x) - \cos((n-1) \arccos x) \\ &= 2xT_n(x) - T_{n-1}(x). \end{aligned}$$

Zudem gilt

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{T_n(x)T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx &= [x \mapsto \cos(x)] = \int_0^\pi \cos(nx) \cos(mx) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\pi (\cos((m+n)x) + \cos((m-n)x)) dx, \end{aligned}$$

woraus Aussage 4) folgt. ■

Bemerkung: Aussage 1) ermöglicht insbesondere eine polynomiale Darstellung. Beispielsweise lauten die ersten sechs Polynome:

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1, \\ T_1(x) &= x, \\ T_2(x) &= 2x^2 - 1, \\ T_3(x) &= 4x^3 - 3x, \\ T_4(x) &= 8x^4 - 8x^2 + 1, \\ T_5(x) &= 16x^5 - 20x^3 + 5x \end{aligned}$$

(vgl. Abbildung 1). Dies ermöglicht zudem eine Fortsetzung der Tschebyscheff-Polynome auf ganz \mathbb{R} . ◇

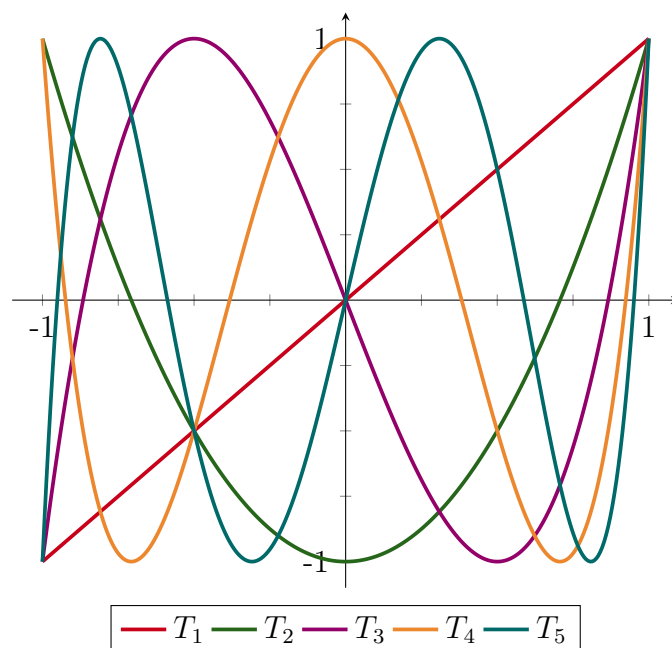


Abbildung 1: Tschebyscheff-Polynome für $n = 1, 2, 3, 4, 5$.

Eine schöne Darstellung erhält man nach einer Idee aus [5] durch radiales plotten der Polynome, siehe dazu Abb. 2.

Satz 3.4 (MINIMALEIGENSCHAFT DER TSCHEBYSCHJEFF-POLYNOME)

Sei Q ein Polynom vom Grad $n \geq 1$ mit $Q \neq T_n$ und Leitkoeffizient 2^{n-1} , dann gilt

$$1 = \max_{x \in [-1, 1]} |T_n(x)| < \max_{x \in [-1, 1]} |Q(x)|.$$

Beweis: Gelte

$$\max_{x \in [-1, 1]} |T_n(x)| \geq \max_{x \in [-1, 1]} |Q(x)|.$$

Weiters sei $x_k = \cos(k\pi/n)$ für $k = 0, \dots, n$. Dann gilt für die Differenz $D(x) = T_n(x) - Q(x)$, dass $D(x_k) > 0$ für gerades und $D(x_k) < 0$ für ungerades k . Somit folgt aus dem Zwischenwertsatz, dass D mindestens n Nullstellen hat. Da $\deg(D) = n - 1$, erhalten wir $D = 0$ im Widerspruch zu $Q \neq T_n$. ■

Bemerkung: Obiger Satz liefert insbesondere, dass die normierten Tschebyscheff-

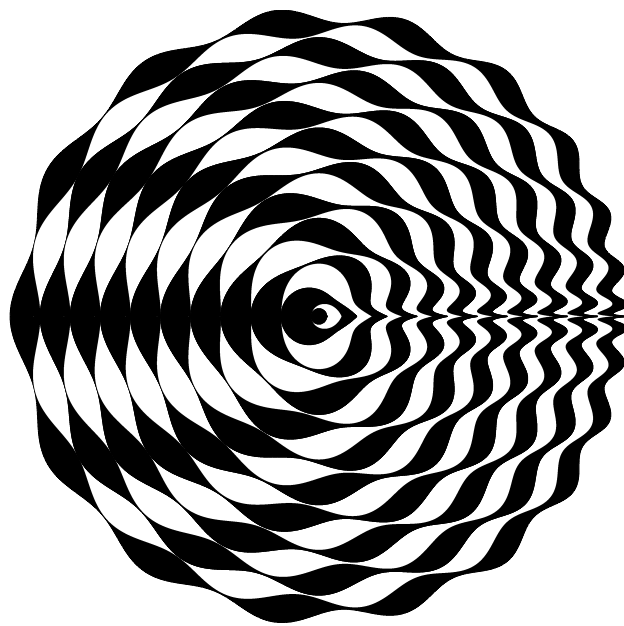


Abbildung 2: Radialer Plot der Tschebyscheff-Polynome von geradem Grad.

Polynome die Lösung der Fragestellung (2) sind. ◇

3.2. Tschebyscheff-Interpolation

Wir wollen nun die Tschebyscheff-Polynome im Kontext der Polynominterpolation anwenden.

3.2.1. Verfahrensfehler der Polynominterpolation

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Abbildung. Dann ist bekannt, dass ein eindeutiges Polynom P vom Grad kleiner gleich n existiert, welches $(n + 1)$ Punkte $(x_i, f(x_i))$ mit $x_i \in [a, b]$ paarweise verschieden für $i = 0, \dots, n$ interpoliert.

Satz 3.5 (VERFAHRENSFEHLER DER POLYNOMINTERPOLATION)

In obiger Situation sei f $(n+1)$ -mal differenzierbar. Dann existiert für alle $x \in [a, b]$ ein $\xi \in (\min_i(x_i, x), \max_i(x_i, x))$, sodass

$$f(x) - P(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (x - x_i).$$

Beweis: Siehe [3]. ■

Obiger Satz motiviert die Fragestellung, ob Stützstellen x_0, \dots, x_n existieren, so dass

$$\max_{a \leq x \leq b} \prod_{i=0}^n |x - x_i|$$

minimal wird. Die Antwort liefert folgender Satz.

Satz 3.6 (MINIMALEIGENSCHAFT DER CHEBYSHEV-KNOTEN)

Seien $x_0, \dots, x_n \in [a, b]$ paarweise verschieden. Dann gilt

$$\max_{a \leq x \leq b} \prod_{i=0}^n |x - x_i| \text{ ist minimal} \iff x_k = \frac{1}{2}(a+b) + \frac{1}{2}(b-a) \cos\left(\frac{2k+1}{2n+2}\pi\right) \quad \text{für } k = 0, \dots, n.$$

Man nennt in obiger Situation die Punkte x_k *Tschebyscheff-Knoten* im Intervall $[a, b]$ vom Grad n .

Beweis: Gelte $[a, b] = [-1, 1]$, dann folgt aus Satz 3.4,

$$\begin{aligned} \max_{-1 \leq x \leq 1} \prod_{i=0}^n |x - x_i| \text{ ist minimal} &\iff \prod_{i=0}^n |x - x_i| = 2^{-n} T_{n+1}(x) \\ &\iff x_0, \dots, x_n \text{ sind die Nullstellen von } T_{n+1}. \end{aligned}$$

Im Fall $[a, b] \neq [-1, 1]$ transformieren wir das Intervall mittels

$$g: [-1, 1] \longrightarrow [a, b]: t \longmapsto \frac{1}{2}(a+b) + \frac{1}{2}(b-a)t$$

auf $[-1, 1]$ und es folgt die Behauptung. ■

3.2.2. Tschebyscheff Polynominterpolation in \mathbb{R} und \mathbb{R}^2

Wie oben sei $f: [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Abbildung. Weiters bezeichne P das Interpolationspolynom vom Grad kleiner gleich n , welches f in den Tschebyscheff-Knoten interpoliert. Da die ersten $n+1$ Tschebyscheff-Polynome eine Basis der Polynome vom Grad kleiner gleich n auf $[-1, 1]$ bilden, vgl. Satz 3.3, besteht die Idee darin, dass Interpolationspolynom als Linearkombination von T_0, \dots, T_n darzustellen. Zur bequemen Berechnung ebensolcher benötigen wir eine weitere Orthogonalitätseigenschaft.

Lemma 3.7 (DISKRETE ORTHOGONALITÄT DER TSCHEBYSCHJEFF-POLYNOME)

Es seien $n \in \mathbb{N}$ und $0 \leq k, \ell \leq n$, dann gilt

$$\langle T_k, T_\ell \rangle = \sum_{j=0}^n T_k(x_j) T_\ell(x_j) = \begin{cases} 0, & k \neq \ell, \\ n+1, & k = \ell = 0, \\ \frac{1}{2}(n+1), & k = \ell \neq 0, \end{cases}$$

wobei

$$x_j = \cos\left(\frac{2j+1}{2n+2}\pi\right) \quad \text{für } j = 0, \dots, n.$$

3. Tschebyscheff-Approximation

Beweis: Unter Anwendung der eulerschen Formeln erhalten wir mit $\alpha = \pi/n + 1$

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^n T_k(x_j) T_\ell(x_j) &= \sum_{j=0}^n \cos \left(k \alpha \left(j + \frac{1}{2} \right) \right) \cos \left(\ell \alpha \left(j + \frac{1}{2} \right) \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=0}^n \cos \left((k + \ell) \alpha \left(j + \frac{1}{2} \right) \right) + \cos \left((k - \ell) \alpha \left(j + \frac{1}{2} \right) \right) \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\sum_{j=0}^n e^{i(k+\ell)\alpha(j+\frac{1}{2})} + \sum_{j=0}^n e^{i(k-\ell)\alpha(j+\frac{1}{2})} \right). \end{aligned}$$

Es gelte $k \neq \ell$, dann folgt wegen $0 \leq k, \ell \leq n$, dass $0 < |k - \ell| \leq n$ und $0 < k + \ell < 2n$. Somit ist

$$\frac{\pi}{n+1} \leq (k + \ell)\alpha < \frac{2n\pi}{n+1} \quad \text{und} \quad \frac{\pi}{n+1} \leq |(k - \ell)\alpha| \leq \frac{n\pi}{n+1}.$$

Insbesondere gilt

$$e^{i(k+\ell)\alpha j} \neq 1 \neq e^{i(k-\ell)\alpha j},$$

weshalb

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^n e^{i(k+\ell)\alpha(j-\frac{1}{2})} &= e^{i\frac{\alpha}{2}(k+\ell)} \sum_{j=0}^n e^{i(k+\ell)\alpha j} \\ &= e^{-i\frac{\alpha}{2}(k+\ell)} \frac{e^{i(k+\ell)\alpha(n+1)} - 1}{e^{i(k+\ell)\alpha} - 1} = \frac{(-1)^{k+\ell} - 1}{2i \sin \left(\frac{\alpha}{2}(k + \ell) \right)} \end{aligned}$$

rein imaginär oder 0 ist. Analoges gilt für $\sum_{j=0}^n e^{i(k-\ell)\alpha(j-\frac{1}{2})}$, woraus die Behauptung für diesen Fall gezeigt ist. Gilt $k = \ell = 0$, so folgt die Aussage unmittelbar aus obiger Darstellung und für $k = \ell > 0$ wegen

$$0 < 2k\alpha < 2\pi$$

aus

$$\sum_{j=0}^n e^{i2k\alpha(j+\frac{1}{2})} = e^{i\alpha k} \sum_{j=0}^n e^{i2k\alpha j} = e^{i\alpha k} \frac{e^{i2\alpha k(n+1)} - 1}{e^{i\alpha k 2} - 1} = \frac{e^{i2\pi k} - 1}{e^{i\alpha k} - e^{-i\alpha k}} = 0. \quad \blacksquare$$

Satz 3.8 (TSCHEBYSCHJEFF-INTERPOLATION AUF $[-1, 1]$)

In obiger Situation gilt

$$P(x) = \frac{1}{2}c_0 + \sum_{k=1}^n c_k T_k(x),$$

wobei

$$c_k = \frac{2}{n+1} \sum_{j=0}^n f\left(\cos\left(\frac{2j+1}{2n+2}\pi\right)\right) \cos\left(\pi k \frac{2j+1}{2n+2}\right)$$

für $k = 0, \dots, n$.

Beweis: Wegen Lemma 3.7 gilt

$$c_k = \frac{\langle p, T_k \rangle}{\|T_k\|^2} = \frac{2}{n+1} \sum_{j=0}^n p(x_j) T_k(x_j) = \sum_{j=0}^n f(x_j) T_k(x_j),$$

woraus die Behauptung folgt. ■

Satz 3.9 (TSCHEBYSCHJEFF-INTERPOLATION AUF $[a, b]$)

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Abbildung. Weiters bezeichne P das eindeutige Interpolationspolynom vom Grad kleiner gleich n mit den Tschebyscheff-Knoten y_k auf $[a, b]$ als Stützstellen. Dann gilt

$$P(x) = \frac{1}{2}c_0 + \sum_{k=1}^n c_k T_k\left(2 \frac{x-a}{b-a} - 1\right),$$

wobei

$$c_k = \frac{2}{n+1} \sum_{j=0}^n f(y_j) \cos\left(\pi k \frac{2j+1}{2n+2}\right)$$

für $k = 0, \dots, n$.

Beweis: Betrachte die Transformation

$$g: [-1, 1] \longrightarrow [a, b]: t \longmapsto \frac{1}{2}(a+b) + \frac{1}{2}(b-a)t.$$

Dann ist $P \circ g$ ein Polynom auf $[-1, 1]$ und es folgt analog zu Satz 3.8

$$(P \circ g)(x) = \frac{1}{2}c_0 + \sum_{k=1}^n c_k T_k(x)$$

3. Tschebyscheff-Approximation

mit

$$c_k = \frac{2}{n+1} \sum_{j=0}^n P(g(x_j)) T_k(x_j) = \frac{2}{n+1} \sum_{j=0}^n P(y_j) T_k(x_j) = \frac{2}{n+1} \sum_{j=0}^n f(x_j) T_k(x_j).$$

Wegen $g^{-1}(x) = 2(x-a)/(b-a) - 1$, folgt

$$P(x) = \frac{1}{2}c_0 + \sum_{k=1}^n c_k T_k\left(2 \frac{x-a}{b-a} - 1\right). \quad \blacksquare$$

Bemerkung: Wie bereits zu Beginn bemerkt, besteht die Idee der Tschebyscheff-Interpolation darin, dass man das eindeutige Interpolationspolynom als Linearkombination von Tschebyscheff-Polynomen darstellt. Obige Sätze liefern uns nun die Vorteile dieser Vorgehensweise. Im Vergleich zum Schema der dividierten Differenzen, welches man zur Polynominterpolation verwendet, können obige Koeffizienten sehr einfach berechnet werden. Zudem gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$ und $x \in [-1, 1]$, dass $|T_n(x)| \leq 1$. Treten also ab einem gewissen Index betragsmäßig sehr kleine Koeffizienten auf, kann man diese vernachlässigen, ohne dabei den Fehler signifikant zu vergrößern. \diamond

Satz 3.10 (TSCHEBYSCHJEFF-INTERPOLATION IN \mathbb{R}^2)

Es seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $c < d$ sowie $f: [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Abbildung. Dann interpoliert

$$P(x, y) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n a_{ij} T_i\left(2 \frac{x-a}{b-a} - 1\right) T_j\left(2 \frac{y-c}{d-c} - 1\right)$$

mit

$$a_{ij} = \frac{1}{\|T_i\|^2 \|T_j\|^2} \sum_{k=0}^m \sum_{\ell=0}^n f(x_k, y_\ell) \cos\left(\pi i \frac{2k+1}{2m+2}\right) \cos\left(\pi j \frac{2\ell+1}{2n+2}\right)$$

die Funktion f auf dem Gitter $G = \{x_0, \dots, x_m\} \times \{y_0, \dots, y_n\}$, wobei x_k und y_ℓ die Tschebyscheff-Knoten auf $[a, b]$ bzw. $[c, d]$ für $k = 0, \dots, m$ und $\ell = 0, \dots, n$ bezeichnen.

Beweis: Folgt aus Satz 2.4 und 3.9. \blacksquare

Beispiel 3.11

Es sei $f = (T_1 \otimes T_3) + 6/7(T_3 \otimes T_1) + 1/2(T_4 \otimes T_5) + 5/4(T_6 \otimes T_2)$. Betrachten wir das Spektrum der obigen Approximation (vgl. Abbildung 3), so erkennt man, dass obiges Verfahren f exakt darstellt. \diamond

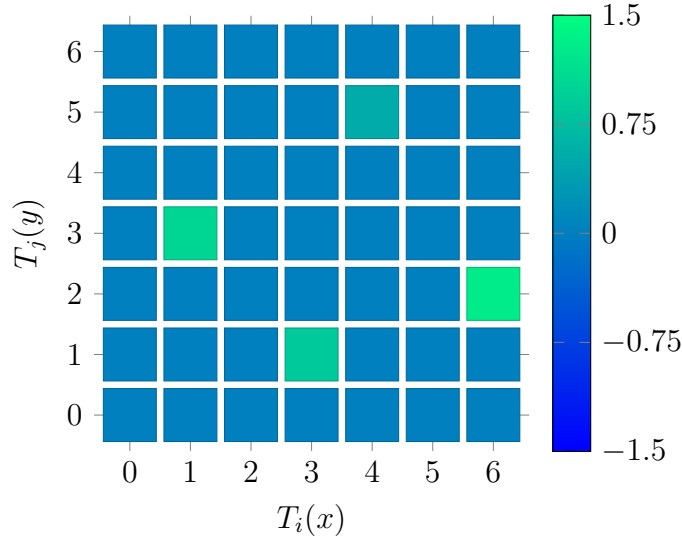


Abbildung 3: Spektrum der Interpolation aus Beispiel 3.11.

Beispiel 3.12

Es sei $g(x, y) = \sin(\sqrt{x^2 + y^2})/\sqrt{x^2 + y^2}$ für $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Tschebyscheff-Tensorinterpolation liefert dann für $m = n = 5$ ein unbrauchbares Ergebnis, während man für $m = n = 10$ bereits eine sehr gute Näherung erhält (siehe Abbildung 4). \diamond

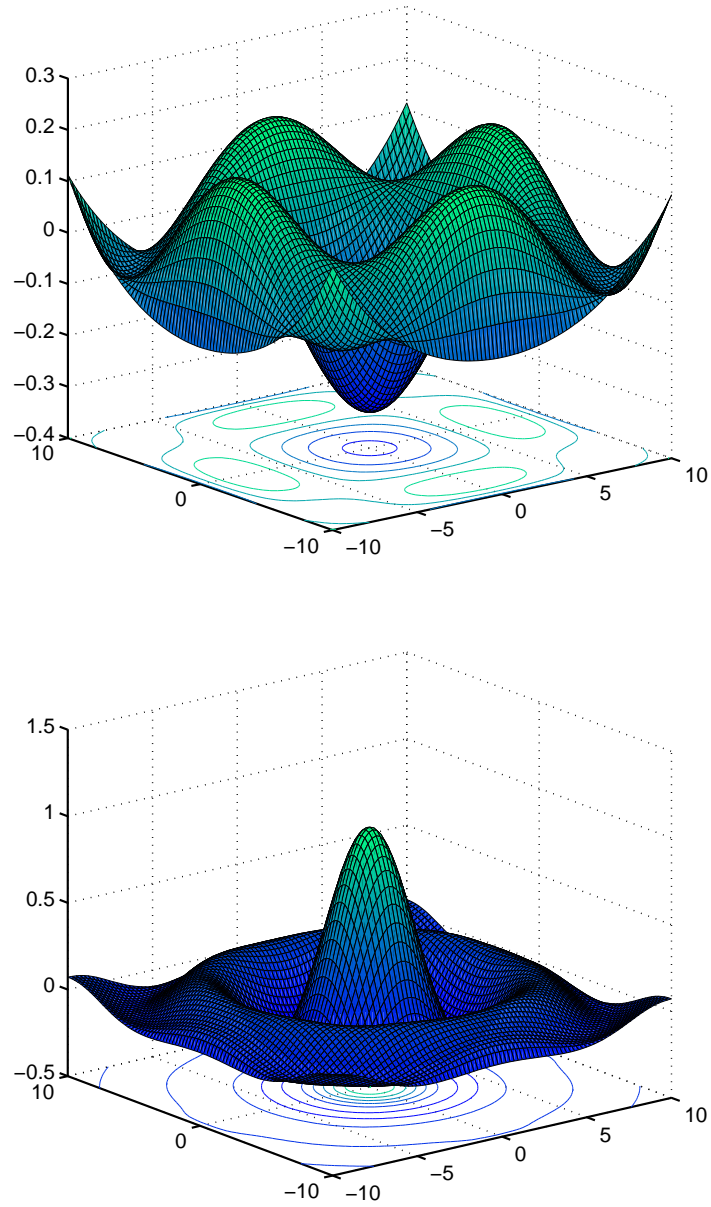


Abbildung 4: Tschebyscheff-Tensorinterpolation angewandt auf Beispiel 3.12. (Oben für $m = n = 5$, unten für $m = n = 10$.)

4. Splittingverfahren kombiniert mit Tschebyscheff-Tensorapproximation

Wir wollen die bisherigen Ergebnisse kombinieren und an numerischen Beispielen illustrieren. Dazu begeben wir uns wieder in die Situation aus Abschnitt 2.2, d. h. wir wollen die Evolutionsgleichung (1) unter entsprechenden Voraussetzungen für $T = 1$ numerisch lösen. In Kapitel 2 war dazu die Idee, auftretende Terme durch Linearkombinationen von Tensorprodukten von geeigneten Basisfunktionen zu approximieren. Im Folgenden werden wir dazu die Tschebyscheff-Polynome verwenden und $K = L = 50$ setzen. So folgt beispielsweise für das Lie-Splitting, dass

$$u_{n+1} \approx \sum_{k=0}^{50} \sum_{\ell=0}^{50} \left(X C_n Y^\top \right)_{k\ell} \left(T_k \otimes T_\ell \right)$$

als Approximation an die exakte Lösung zum Zeitpunkt t_{n+1} verwendet wird. Speziell werden wir die folgenden drei Beispiele untersuchen.

Beispiel 4.1

Es gelte $a \equiv b \equiv 1$, d. h. $\mathcal{L} = \Delta$, sowie

$$u_0(x, y) = \sin(\pi x) \sin(\pi y) .$$

Weiters sei die Inhomogenität g gegeben durch

$$g(t, x, y) = (2\pi^2 - 1)e^{-t} \sin(\pi x) \sin(\pi y) .$$

Dann ist

$$u(t, x, y) = e^{-t} \sin(\pi x) \sin(\pi y)$$

die exakte Lösung der Diffusionsgleichung. Da g in allen Ecken von Ω verschwindet, bezeichnen wir diese Inhomogenität als kompatibel, weshalb die entsprechenden Splittingverfahren in dieser Situation volle Ordnung erzielen sollten, vgl. beispielsweise [6]. Verschwindet die Inhomogenität nicht in allen Ecken, so sprechen wir von einer inkompatiblen Inhomogenität. \diamond

Beispiel 4.2

Es seien

$$a(x) = 5x^4 + 3x^2 + 4 \quad \text{und} \quad b(y) = y^3 + 2y + 1,$$

die Koeffizientenfunktionen und der Anfangswert u_0 wie in Beispiel 4.1. Weiters sei

$$g(t, x, y) = e^{-t} (1 - x)^{20} (1 - y)^{20}.$$

Die Inhomogenität g ist also nun inkompatibel im Ursprung.

◇

Beispiel 4.3

Als letztes Beispiel werden wir noch ein in allen Ecken inkompatibles Problem betrachten. Genauer wählen wir

$$a(x) = 5x^2 + 3x + 10, \quad b(y) = (y + 2)^2$$

sowie

$$u_0(x, y) = x^3 y^3 (1 - x^3)(1 - y^3)$$

und

$$g(t, x, y) = \tilde{g}(t, x, y) + \tilde{g}(t, 1 - x, y) + \tilde{g}(t, 1 - x, 1 - y) + \tilde{g}(t, x, 1 - y)$$

wobei

$$\tilde{g}(t, x, y) = \exp\left(t - 100(x^2 + y^2)\right).$$

◇

4.1. Exponentielles Lie-Splitting

Wir beginnen mit dem exponentiellem Lie-Splitting. Wie anfangs bereits erwähnt, verwenden wir hierbei

$$u_{n+1} = \sum_{k=0}^{50} \sum_{\ell=0}^{50} \left(X C_n Y^\top \right)_{k\ell} \left(T_k \otimes T_\ell \right) \quad \text{für} \quad n = 0, \dots, N$$

als Näherung, wobei N die Anzahl der Zeitschritte ist. Als erstes wenden wir das Verfahren auf Beispiel 4.1 an. Wie man am Ordnungsplott, Abb. 5, erkennt, wird

volle Ordnung 1 erzielt, was auch aufgrund der Eigenschaften der Inhomogenität zu erwarten war. Ferner bietet auch der punktweise Fehler in dieser Situation wenig Überraschendes. Während der Fehler am Rand von Ω verhältnismäßig klein ist, entsteht dieser im Inneren und gipfelt im Mittelpunkt des Quadrates. Betrachtet man die Referenzlösung, so war dies auch zu erwarten. Interessanter ist die Anwendung auf Beispiel 4.2. Hierbei verursacht die Inkompatibilität der Inhomogenität Probleme. Dies spiegelt auch Abbildung 7 wider. Aufgrund der nicht erfüllten Kompatibilitätsbedingungen reduziert sich die Ordnung von 1 auf $1/4$ und der punktweise Fehler konzentriert sich nun im Ursprung und streut von dort ins Innere. Ein ähnliches Bild zeichnet sich auch bei Beispiel 4.3 ab. Wiederum kommt es aufgrund der inkompatiblen Inhomogenität zu einer Ordnungsreduktion auf $1/4$ und der Fehler konzentriert sich in den Ecken. Da der Fehler in diesen Fällen allerdings nur lokal auftritt, gibt es Möglichkeiten ihn zu reduzieren. Eine Variante besteht darin, die Inhomogenität in einen kompatiblen und inkompatiblen Anteil zu zerlegen, d. h. es gelte $g = g_{\text{comp}} + g_{\text{incomp}}$. Wendet man nun das Verfahren auf das Problem zur Inhomogenität g_{comp} an, so wird wieder volle Ordnung erzielt und man erhält eine Näherungslösung u_{comp} . Ist weiters die exakte Lösung u_{incomp} zur Inhomogenität g_{incomp} bekannt, so ist, aufgrund der Linearität von \mathcal{L} , $u_{\text{comp}} + u_{\text{incomp}}$ eine Approximation an die exakte Lösung.

4.2. Strang-Splitting

Kommen wir zum Strang-Splitting. In Kombination mit Tensorprodukten von Tschebyscheff-Polynomen ist dann die Approximation zum Zeitpunkt t_{n+1} durch

$$u_{n+1} = \sum_{k=1}^K \sum_{\ell=1}^L \left(X \left(X C_n Y^\top + D_n \right) Y^\top \right)_{k\ell} (T_k \otimes T_\ell)$$

gegeben. Anwendung auf Beispiel 4.1 liefert wiederum das erwünschte Ergebnis. Aufgrund der erfüllten Kompatibilitätsbedingung erzielt das Verfahren volle Ordnung 2, siehe Abb. 11. Dies spiegelt sich auch im Fehler wider. Während beim exponentiellen Lie-Splitting der Fehler zur kleinsten Schrittweite unter 10^{-4} liegt, reduziert sich dieser bei der Kombination mit Strang-Splitting auf fast 10^{-9} . Der punktweise Fehler, siehe Abbildung 12, zeigt ein zum exponentiellen Lie-Splitting ähnli-

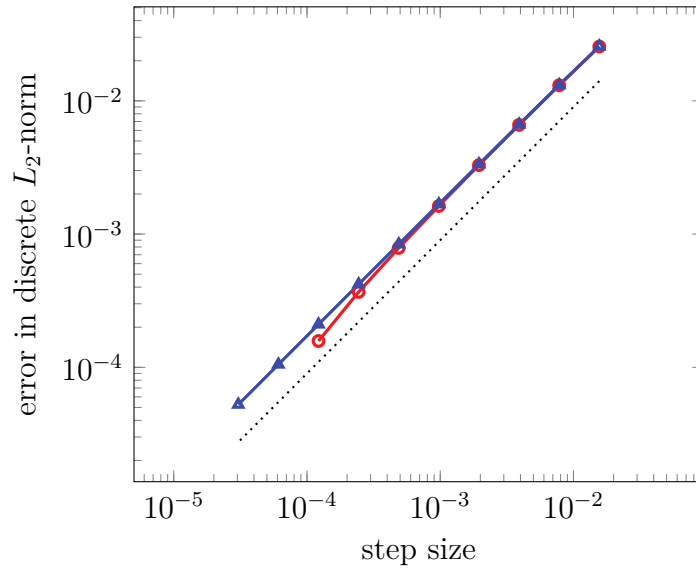


Abbildung 5: Ordnung des exponentiellen Lie-Splittings kombiniert mit Tschebyscheff-Tensorapproximation angewandt auf Beispiel 4.1. Die blaue Linie (Dreiecke) zeigt den Fehler im Vergleich zur exakten Lösung, die rote (Kreise) im Vergleich zu einer numerischen Referenzlösung. Die punktierte Gerade besitzt Steigung 1.

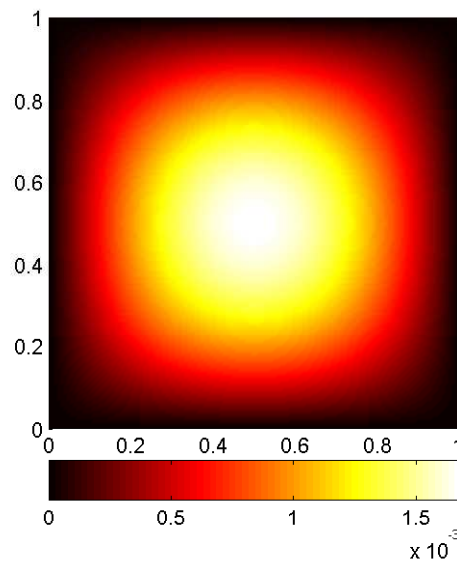


Abbildung 6: Punktwiser Fehler des exponentiellen Lie-Splittings kombiniert mit Tschebyscheff-Tensorapproximation angewandt auf Beispiel 4.1 zum Zeitpunkt $t = T$.

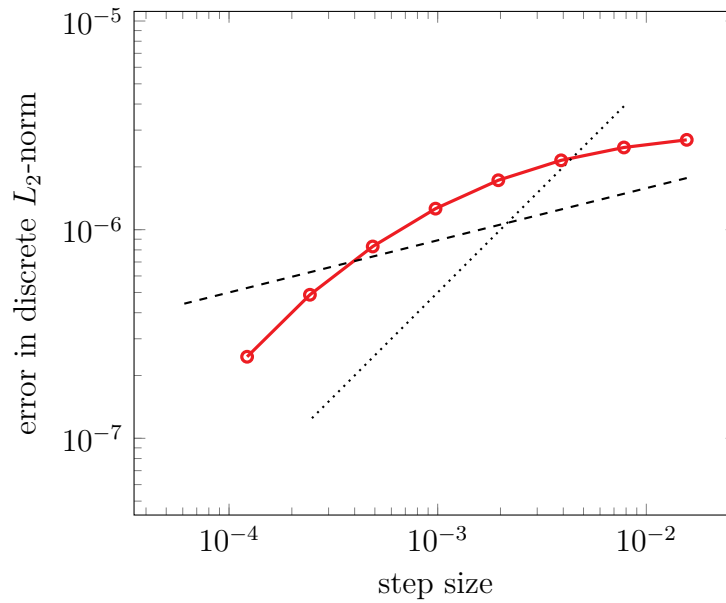


Abbildung 7: Ordnung des exponentiellen Lie-Splittings kombiniert mit Tschebyscheff-Tensorapproximation angewandt auf Beispiel 4.2. Die strichlierte bzw. punktierte Gerade besitzt Steigung $1/4$ bzw. 1 .

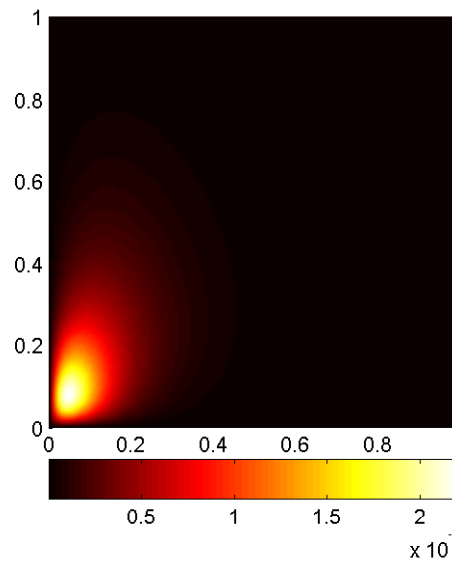


Abbildung 8: Punktwiser Fehler des des exponentiellen Lie-Splittings kombiniert mit Tschebyscheff-Tensorapproximation angewandt auf Beispiel 4.2 zum Zeitpunkt $t = T$.

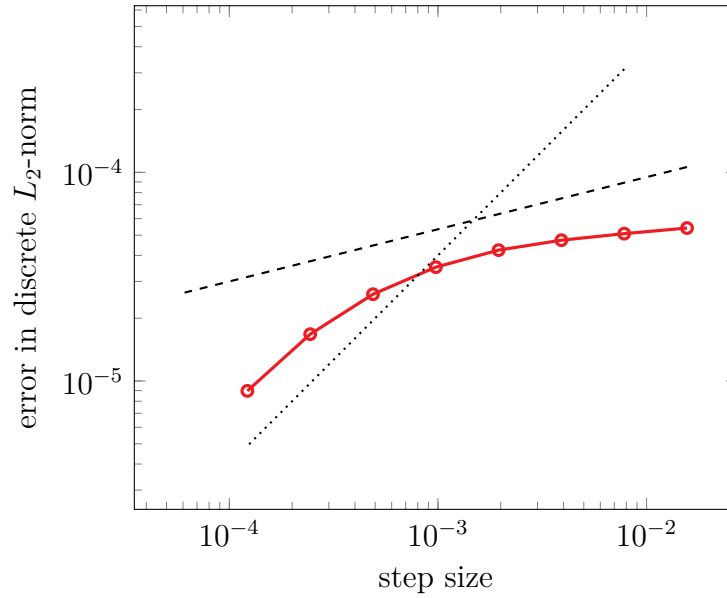


Abbildung 9: Ordnung des exponentiellen Lie-Splittings kombiniert mit Tschebyscheff-Tensorapproximation angewandt auf Beispiel 4.3. Die strichlierte bzw. punktierte Gerade besitzt Steigung $1/4$ bzw. 1 .

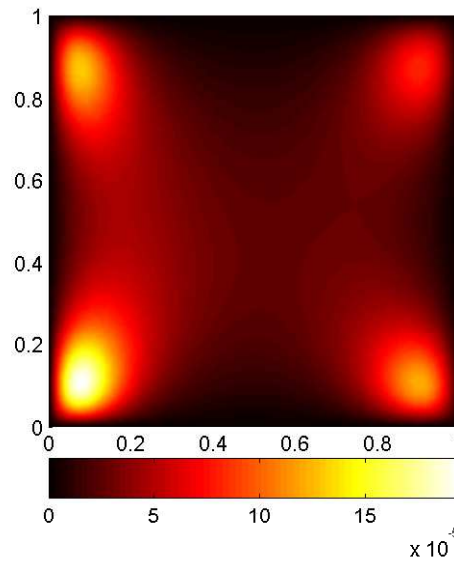


Abbildung 10: Punktwiser Fehler des exponentiellen Lie-Splittings kombiniert mit Tschebyscheff-Tensorapproximation angewandt auf Beispiel 4.3 zum Zeitpunkt $t = T$.

ches Bild. Der Fehler gipfelt im Inneren von Ω , reduziert sich hingegen aufgrund der höheren Ordnung des Strang-Splittings drastisch. Wenden wir das Verfahren auf die Beispiele mit inkompatiblen Inhomogenität an, so zeigen die Ordnungsplots, Abb. 13 und 16, dass es wiederum zu einer Ordnungsreduktion auf $1 + 1/4$ kommt. Überraschendes offenbart sich allerdings im punktweisen Fehlerplot. Abbildung 14 zeigt den punktweisen Fehler des Strang-Splittings ohne Tensorapproximation angewandt auf ein inkompatibles Beispiel aus [7]. Wie man erkennt, verteilt sich hierbei der Fehler auf den ganzen Rand des Quadrates, während hingegen der punktwise Fehler in Kombination mit Tschebyscheff-Tensorapproximation, Abb. 15, analog zum exponentiellen Lie-Splitting lokal im Ursprung bleibt. Auch der punktwise Fehler bezüglich des in allen Ecken inkompatiblen Beispiels bleibt lokal in den Ecken. Dies zeigt das Potential der Kombination von Splittingmethoden und Tensorstrukturen. Verteilt sich der Fehler auf den ganzen Rand von Ω , besteht kaum eine Chance diesen zu korrigieren. Bleibt er jedoch lokal in den Ecken, so kann er durch die vorher beschriebene Methode weiter verbessert werden.

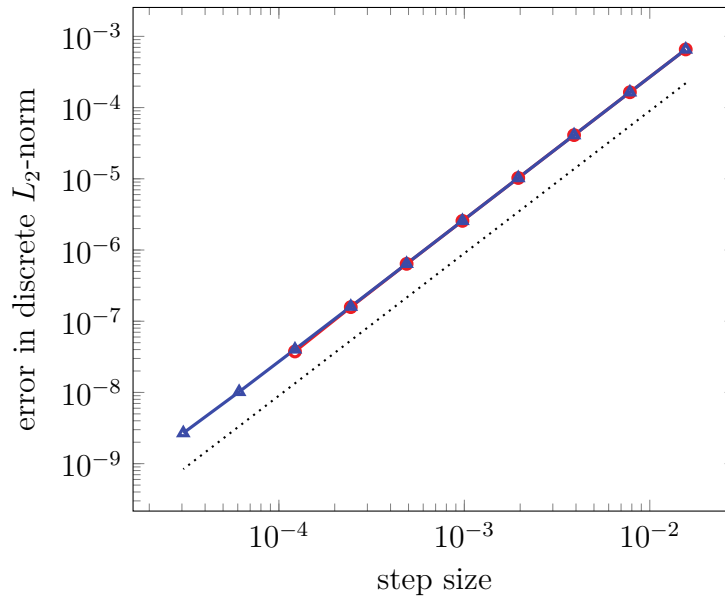


Abbildung 11: Ordnung des Strang-Splittings kombiniert mit Tschebyscheff-Tensorapproximation angewandt auf Beispiel 4.1. Die blaue Linie (Dreiecke) zeigt den Fehler im Vergleich zur exakten Lösung, die rote (Kreise) im Vergleich zu einer numerischen Referenzlösung. Die punktierte Gerade besitzt Steigung 2.

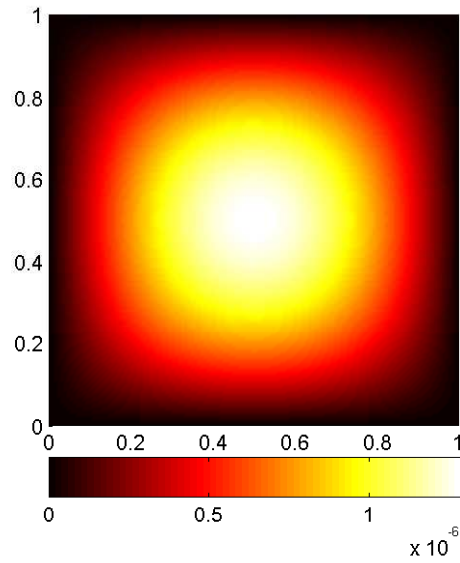


Abbildung 12: Punktweiser Fehler des Strang-Splittings kombiniert mit Tschebyscheff-Tensorapproximation angewandt auf Beispiel 4.1 zum Zeitpunkt $t = T$.

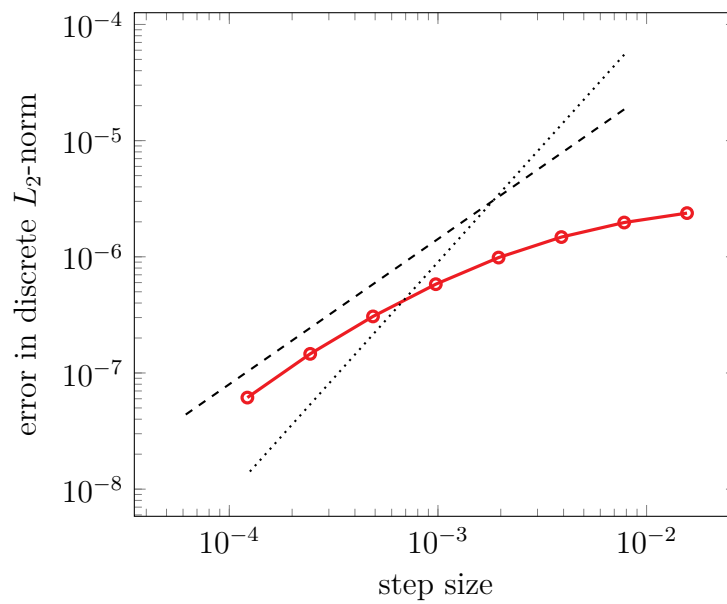


Abbildung 13: Ordnung des Strang-Splittings kombiniert mit Tschebyscheff-Tensorapproximation angewandt auf Beispiel 4.2. Die strichlierte bzw. punktierte Gerade besitzt Steigung $1 + 1/4$ bzw. 2.

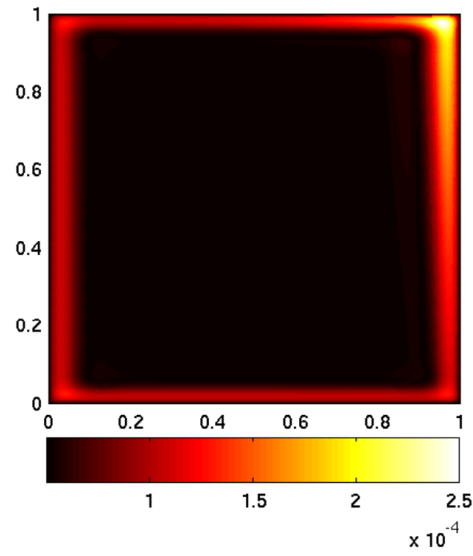


Abbildung 14: Punktweiser Fehler des standard Strang-Splittings angewandt auf ein inkompatibles Beispiel aus [7]. Die Ortsdiskretisierung wurde hierbei mittels einer Finiten-Differenzen-Methode durchgeführt.

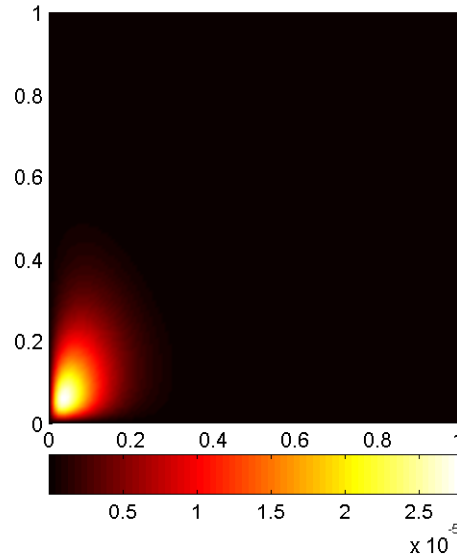


Abbildung 15: Punktweiser Fehler des Strang-Splittings kombiniert mit Tschebyscheff-Tensorapproximation angewandt auf Beispiel 4.2.

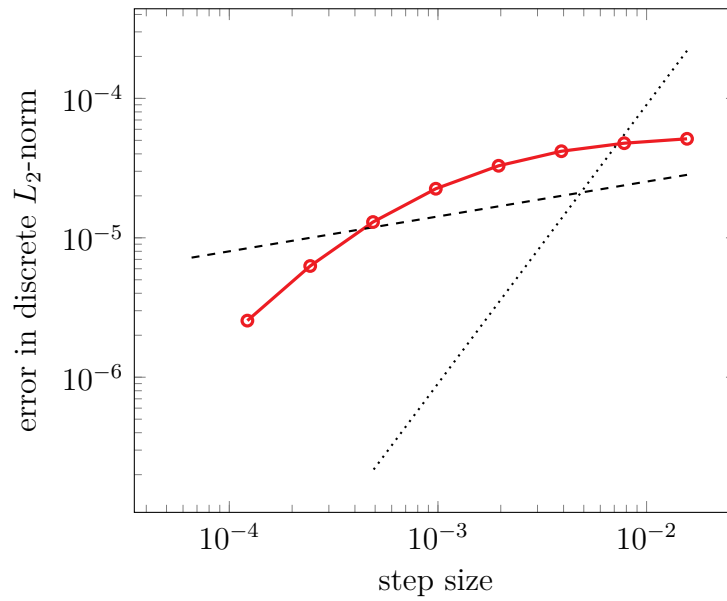


Abbildung 16: Ordnung des Strang-Splittings kombiniert mit Tschebyscheff-Tensorapproximation angewandt auf Beispiel 4.3. Die strichlierte bzw. punktierte Gerade besitzt Steigung $1 + 1/4$ bzw. 2.

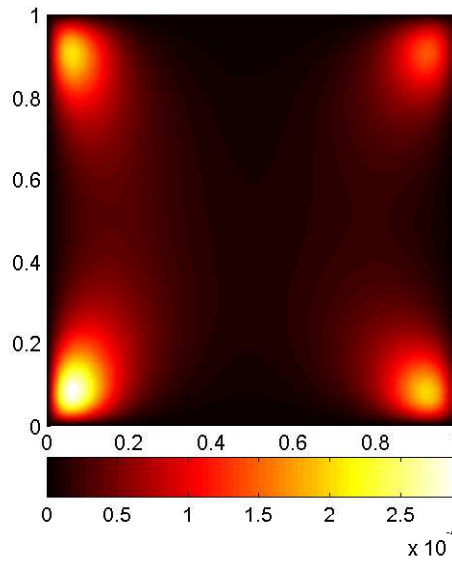


Abbildung 17: Punktwiser Fehler des Strang-Splittings kombiniert mit Tschebyscheff-Tensorapproximation angewandt auf Beispiel 4.3 zum Zeitpunkt $t = T$.

4.3. Lie-Resolventen-Splitting

Als letztes wenden wir das Lie-Resolventen-Splitting in Verbindung mit Tensorinterpolation an. Bevor wir allerdings wieder die Tschebyscheff-Polynome als Basisfunktionen verwenden, wollen wir hier untersuchen, wie sich das Splitting-Verfahren in Kombination mit einer Fourier-Approximation verhält. Gelte also

$$u_{n+1} = \sum_{k=0}^{50} \sum_{\ell=0}^{50} \left(X C_n Y^\top \right)_{k\ell} \left(e^{ik} \otimes e^{i\ell} \right).$$

Bereits im kompatiblen Fall tauchen nun Schwierigkeiten auf. Abbildung 18 zeigt den Ordnungsplot des obigen Verfahrens angewandt auf Beispiel 4.1. Die blaue Linie (Dreiecke) zeigt den Vergleich mit der exakten Lösung, die rote (Kreise) den Vergleich mit der numerischen Lösung desselben Verfahrens, allerdings mit einer viel kleineren Schrittweite. Dies führt dazu, dass aufgrund derselben Ortsdiskretisierung, der Fehler sozusagen aufgehoben wurde und somit nur der Fehler der Zeitdiskretisierung übrig bleibt. Wie man erkennt, bleibt hier der exakte Fehler ab einer gewissen Schrittweite konstant bei ca. $10^{-2,5}$, während der Fehler der Zeitdiskretisierung weiter mit Ordnung 1 fällt. Dies bedeutet, dass der Fehler in der Ortsdiskretisierung so groß ist, dass sich Verbesserungen des Zeitfehlers kaum auf den gesamten Fehler auswirken. Die Ursache hierfür liegt im sogenannten Gibbs-Phänomen⁴, welches am Rand von Ω Überschwüngen verursacht. Insgesamt zeigt sich also, dass sich die trigonometrischen Polynome nicht für unser Vorhaben eignen. Kehren wir somit wieder zurück zu den Tschebyscheff-Polynomen, d. h. im Folgenden gelte

$$u_{n+1} = \sum_{k=0}^{50} \sum_{\ell=0}^{50} \left(X C_n Y^\top \right)_{k\ell} \left(T_k \otimes T_\ell \right).$$

Abermals erhalten wir ähnliche Ergebnisse wie vorher. Im kompatiblen Fall erhält man volle Ordnung und der Fehler liegt im Inneren des Quadrats, während es bei den Beispielen 4.2 und 4.3 erneut zu Ordnungsreduktionen kommt und der Fehler wieder lokal in den Ecken bleibt, wodurch dieser mittels einer modifizierten Resolventen-Splitting-Methode aus [8] weiter korrigiert werden kann.

⁴*Josia W. Gibbs*, 1839–1903, amerikanischer Physiker

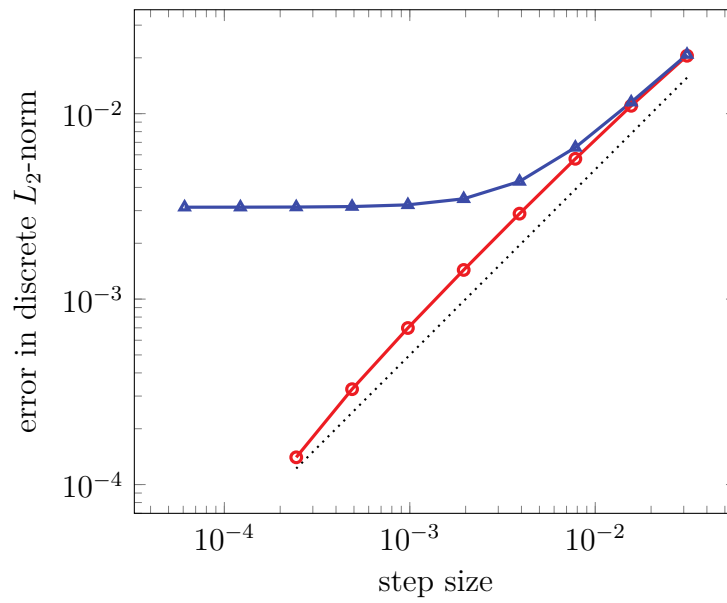


Abbildung 18: Ordnung des Lie-Resolventen-Splittings kombiniert mit Fourier-Tensorapproximation angewandt auf Beispiel 4.1. Die blaue Linie (Dreiecke) zeigt den Fehler im Vergleich zur exakten Lösung, die rote (Kreise) im Vergleich zu einer numerischen Referenzlösung. Die punktierte Gerade besitzt Steigung 1.

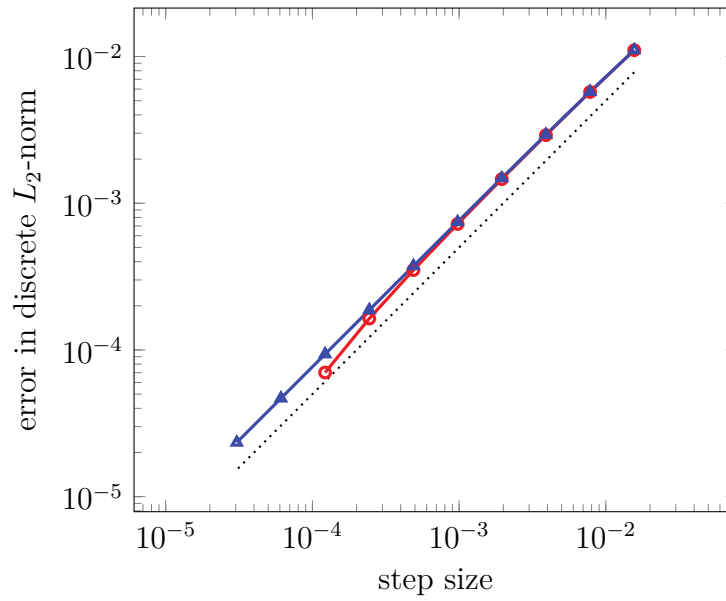


Abbildung 19: Ordnung des Lie-Resolventen-Splittings kombiniert mit Tschebyscheff-Tensorapproximation angewandt auf Beispiel 4.1. Die blaue Linie (Dreiecke) zeigt den Fehler im Vergleich zur exakten Lösung, die rote (Kreise) im Vergleich zu einer numerischen Referenzlösung. Die punktierte Gerade besitzt Steigung 1.

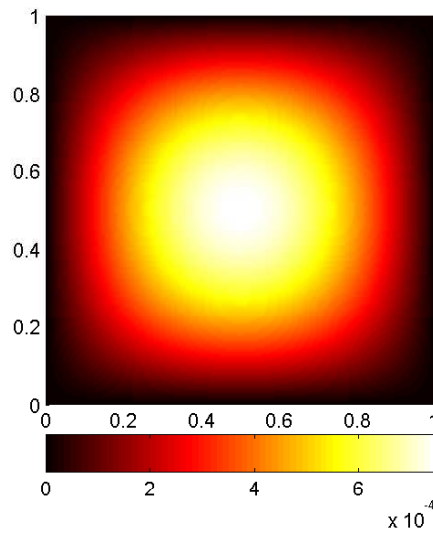


Abbildung 20: Punktwiser Fehler des Lie-Resolventen-Splittings kombiniert mit Tschebyscheff-Tensorapproximation angewandt auf Beispiel 4.2 zum Zeitpunkt $t = T$.

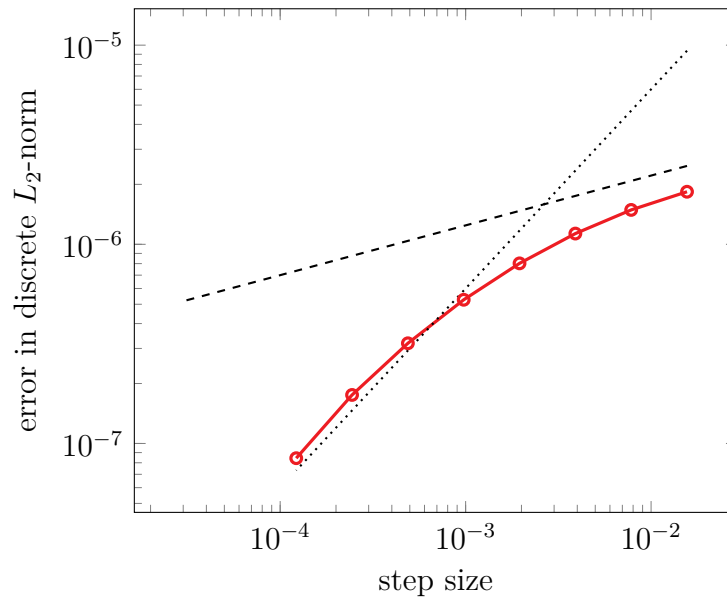


Abbildung 21: Ordnung des Lie-Resolventen-Splittings kombiniert mit Tschebyscheff-Tensorapproximation angewandt auf Beispiel 4.2. Die strichlierte bzw. punktierte Gerade besitzt Steigung 1/4 bzw. 1.

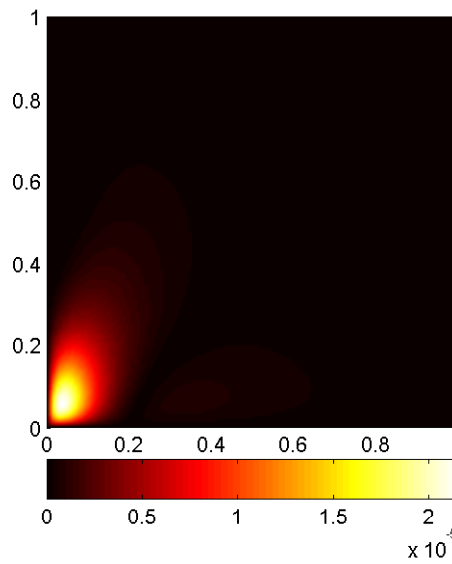


Abbildung 22: Punktwiser Fehler des Lie-Resolventen-Splittings kombiniert mit Tschebyscheff-Tensorapproximation angewandt auf Beispiel 4.2.

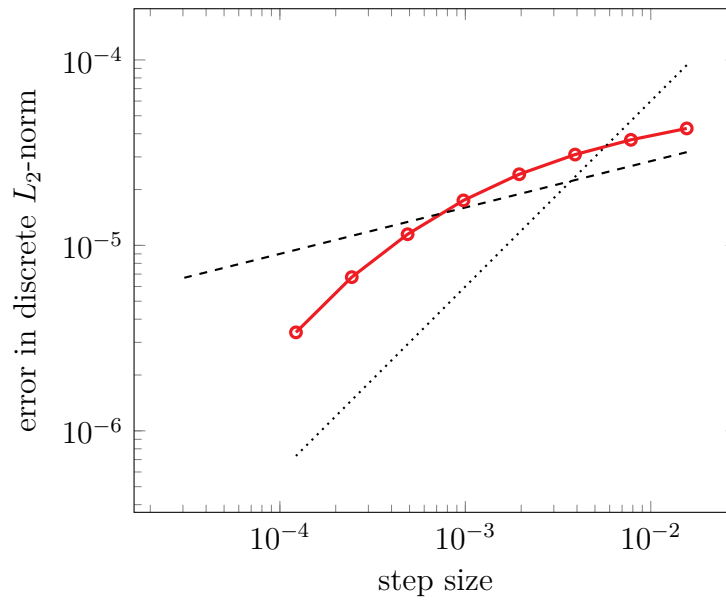


Abbildung 23: Ordnung des Lie-Resolventen-Splittings kombiniert mit Tschebyscheff-Tensorapproximation angewandt auf Beispiel 4.3. Die strichlierte bzw. punktierte Gerade besitzt Steigung $1/4$ bzw. 1 .

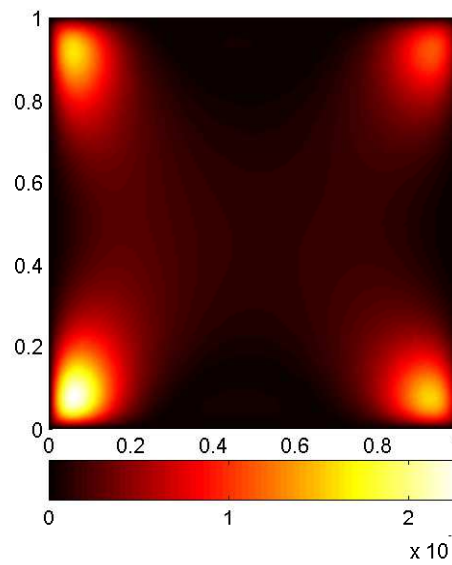


Abbildung 24: Punktwiser Fehler des Lie-Resolventen-Splittings kombiniert mit Tschebyscheff-Tensorapproximation angewandt auf Beispiel 4.3 zum Zeitpunkt $T = t$.

5. Nachwort

Ziel dieser Bachelorarbeit war es, Dimensions-Splitting mit Tensorapproximation zu kombinieren und anhand von numerischen Experimenten zu ermitteln, ob eine solche Verbindung sinnvoll erscheint. Dazu wurden in Kapitel 2 die für diese Arbeit notwendigen Grundlagen der Tensorinterpolation skizziert, welche gleich darauf in Kapitel 3 verwendet wurden, um die Tschebyscheff-Interpolation auf zwei Dimensionen zu erweitern sowie die Kombination von Tensorprodukten mit exponentiellem Lie-, Strang- und Resolventen-Splitting erläutert. Kapitel 3 umfasst zudem eine Vorstellung der Tschebyscheff-Polynome und ihrer wesentlichen Eigenschaften. In Kapitel 4 wurden dann alle bisherigen Resultate durch die Verbindung von Splitting mit Tschebyscheff-Tensorapproximation verknüpft und anhand numerischer Beispiele illustriert. Dazu betrachteten wir eine inhomogene Evolutionsgleichung auf dem Einheitsquadrat $\Omega = (0, 1)^2$ und unterschieden drei Fälle. Im ersten wählten wir eine kompatible Inhomogenität, d. h. eine Inhomogenität welche in den Ecken von Ω verschwindet. Der zweite Fall umfasste eine im Ursprung inkompatible Inhomogenität und als letztes untersuchten wir eine in allen Ecken nicht verschwindende Inhomogenität. Bei allen verwendeten Splittingverfahren zeigte sich ein wenig überraschendes Bild hinsichtlich der Ordnung. Im kompatiblen Fall wurde stets volle Ordnung erzielt, wohingegen bei inkompatiblen Inhomogenitäten Ordnungsreduktionen auftraten. Überraschende Ergebnisse lieferte allerdings die Untersuchung des punktweisen Fehlers in den inkompatiblen Fällen. Während beim Strang-Splitting in ebensolcher Situation eine Verteilung des Fehlers auf den gesamten Rand von Ω zu erwarten war, zeigt der numerische Versuch, dass dieser aufgrund der Tensorstruktur lokal in den Ecken bleibt. Auch bei den weiteren Splittingverfahren wurden ähnliche Ergebnisse erzielt. Insgesamt zeigt diese Bachelorarbeit, dass die Kombination der beiden Methoden als sehr sinnvoll erscheint und motiviert somit eine genaue theoretische Analyse.

Anhang A Tschebyscheff-Differentialgleichung

Eine weitere Herleitung der *Tschebyscheff-Polynome* erhält man durch Lösen der Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$(1 - x^2)y'' - xy' + \lambda^2 y = 0 \quad (\text{Tschebyscheff-Differentialgleichung})$$

für $\lambda \in \mathbb{R}$. Setzen wir $z = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}^\top$ und

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda^2/(1 - x^2) & x/(1 - x^2) \end{pmatrix},$$

dann ist diese Differentialgleichung äquivalent zu

$$z' = Az.$$

Somit liefert ein Potenzreihenansatz eine Lösung für $|x| < 1$. Gelte also

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_n x^n,$$

so folgt

$$\begin{aligned} 0 &= (1 - x^2) \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}(n+2)(n+1)x^n - x \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}(n+1)x^n + \lambda^2 \sum_{k=0}^{\infty} a_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}(n+2)(n+1)x^n - \sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1)x^n - \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^n + \lambda^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\ &= 2a_2 + \lambda^2 a_0 + \left((\lambda^2 - 1)a_1 + 6a_3\right)x + \sum_{n=2}^{\infty} [a_{n+2}(n+2)(n+1) + a_n(\lambda^2 - n^2)]x^n \end{aligned}$$

und es folgen die Bedingungen

$$2a_2 + \lambda^2 a_0 = 0, \quad (\lambda^2 - 1)a_1 + 6a_3 = 0, \quad a_{n+2} = \frac{n^2 - \lambda^2}{(n+2)(n+1)} a_n.$$

für $n \in \mathbb{N}$. Eine leichte Rechnung zeigt, dass die ersten beiden Bedingungen Spezialfälle der Rekursionsformel sind. Insbesondere erhalten wir die Darstellung

$$\begin{aligned} a_2 &= -\frac{\lambda^2}{2} a_0, \\ a_{2n} &= -\frac{\lambda^2(2^2 - \lambda^2)(4^2 - \lambda^2) \cdots ((2n-2)^2 - \lambda^2)}{(2n)!} a_0 \quad \text{für } n \in \mathbb{N}_{\geq 2}, \\ a_{2n+1} &= \frac{(1 - \lambda^2)(3^2 - \lambda^2) \cdots ((2n-1)^2 - \lambda^2)}{(2n+1)!} a_1 \quad \text{für } n \in \mathbb{N}_{\geq 1}. \end{aligned}$$

Wählt man $a_0 = 1$ sowie $a_1 = 0$, dann ist

$$F_1(x) = 1 - \frac{\lambda^2}{2!} x^2 - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\lambda^2(2^2 - \lambda^2)(4^2 - \lambda^2) \cdots ((2n-2)^2 - \lambda^2)}{(2n)!} x^{2k},$$

die Lösung der Tschebyscheff Differentialgleichung, während man für $a_0 = 0$ und $a_1 = 1$ die Lösung

$$F_2(x) = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - \lambda^2)(3^2 - \lambda^2) \cdots ((2n-1)^2 - \lambda^2)}{(2n+1)!} x^{2k+1}$$

erhält. Gilt nun speziell, dass λ eine gerade bzw. ungerade natürliche Zahl ist, so ist F_1 bzw. F_2 ein Polynom vom Grad λ und es gilt

$$T_\lambda(x) = \begin{cases} (-1)^{\lambda/2} F_1(x), & \lambda \text{ gerade}, \\ (-1)^{(\lambda-1)/2} \lambda F_2(x), & \lambda \text{ ungerade}. \end{cases}$$

Literatur

- [1] CHENEY W. & LIGHT W.: *A Course in Approximation Theory*. Pacific Grove: Brooks/Cole pub. Co., c2000.
- [2] HEUSER, H.: *Gewöhnliche Differentialgleichungen*. B. G. Teubener Verlag, 2004.
- [3] OSTERMANN, A.: *Numerische Mathematik 1*. Vorlesungsskriptum, Universität Innsbruck, Wintersemester 2013/2014.
- [4] SCHWARZ H. R. & KÖCKLER N.: *Numerische Mathematik*. Vieweg + Teubener, 2009.
- [5] TROTT, M.: *Graphica 1: The World of Mathematica Graphics. The Imaginary Made Real: The Images of Mihcael Trott*. Champaign, IL: Wolfram Meida, pp. 10 and 84, 1999.
- [6] HELL T. & OSTERMANN A. *Compatibility Conditions for Dirichlet and Neumann problems Poisson's equation on a rectangle*. Journal of Math. Analysis and Appl., 420, 2014.
- [7] HELL, T.: *Overcoming the order reduction of dimension splitting methods due to corner singularities*. Oberwolfach Report 14, 2014.
- [8] HELL, T. & OSTERMANN, A. & SANDBICHLER M.: *Modification of dimension-splitting methods—overcoming the order reduction due to corner singularities*. IMA Journal of Numer. Analysis, 2014. .