**Lucas Arantes Berg**

# *Método dos Elementos Finitos - Lista 3*

Universidade Federal de Juiz de Fora

# ***Método dos Elementos Finitos - Lista 3***

Desenvolvimento das questões 1, 2 e 3

Professor: Bernardo Martins Rocha

Aluno: Lucas Arantes Berg

Universidade Federal de Juiz de Fora
Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional

Considere o seguinte problema: encontrar $u(x)$ tal que:

$$-au''(x) + bu'(x) + cu(x) = f(x),\ para\ 0 \leq x \leq 1 \tag{1.1}$$

Sujeito às seguintes condições de contorno:

$$u(0) = 0\ e\ u(1) = 1 \tag{1.2}$$

Onde $a$, $b$ e $c$ são constantes.

## 1.1 Exercício 1

Escreva a formulação variacional do problema dado pela equação (1.1) com as condições de definidas em (1.2). Especifique o espaço das funções teste.

## 1.2 Resolução

Para reescrever a expressão (1.1) na formulação variacional primeiro multiplica-se ambos os lados da equação por uma função teste $v$, que é definida segundo (1.3).

$$V = \{v : ||v||_{L_I^2} < \infty, ||v'||_{L_I^2} < \infty, v(0) = v(1) = 0\} \tag{1.3}$$

De tal maneira que a expressão em (1.1) fica:

$$-au''v + bu'v + cuv = fv$$

A seguir integra-se ambos os lados da equação em todo o domínio do problema.

$$-a\int_0^1 u''vdx + b\int_0^1 u'vdx + c\int_0^1 uvdx = \int_0^1 fvdx \tag{1.4}$$

Agora analisando o primeiro termo da expressão acima de tal modo que reescrevendo o mesmo utilizando a fórmula de integração por partes dada por (1.5).

$$\int_0^1 sdt = st - \int_0^1 tds \tag{1.5}$$

Onde as variáveis são $s$, $t$, $dt$, $ds$ são dadas por.

$$\begin{cases} s = v \\ dt = u''dx \\ t = u' \\ ds = v'dx \end{cases}$$

Dessa forma o utilizando a integração por partes pode-se reescrever o termo ligado a derivada segunda da expressão anterior da seguinte maneira.

$$\int_0^1 u''vdx = vu' - \int_0^1 u'v'dx \tag{1.6}$$

Substituindo a expressão dada por (1.6) em (1.4).

$$-a\Big(vu' - \int_0^1 u'v'dx\Big) + b\int_0^1 u'vdx + c\int_0^1 uvdx = \int_0^1 fvdx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -avu'\Big|_0^1 + a\int_0^1 u'v'dx + b\int_0^1 u'vdx + c\int_0^1 uvdx = \int_0^1 fvdx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a\int_0^1 u'v'dx + b\int_0^1 u'vdx + c\int_0^1 uvdx = \int_0^1 fvdx + avu'\Big|_0^1 \tag{1.7}$$

Agora relembrando das condições que definem a função teste $v$ e abrindo o último termo da expressão (1.7).

$$a\int_0^1 u'v'dx + b\int_0^1 u'vdx + c\int_0^1 uvdx = \int_0^1 fvdx + [av(1)u'(1) - av(0)u'(0)] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a\int_0^1 u'v'dx + b\int_0^1 u'vdx + c\int_0^1 uvdx = \int_0^1 fvdx \tag{1.8}$$

Por último colocando a expressão na forma bilinear resulta na seguinte expressão na forma variacional.

$$a\int_0^1 u'v'dx + b\int_0^1 u'vdx + c\int_0^1 uvdx = \int_0^1 fvdx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a(u,v) = (f,v) \tag{1.9}$$

## 1.3 Exercício 2

A partir da formulação variacional, escreva a aproximação por elementos finitos e determine a forma do sistema de equações lineares.

## 1.4 Resolução

Para realizar a aproximação do MEF define o espaço $U^h$.

$$U^h = \{u : ||u||_{L^2_I} < \infty, ||u'||_{L^2_I} < \infty, u(0) = 0, u(1) = 1\}$$

De tal forma que a aproximação é dada pela combinação linear das funções base, que para esse caso serão as funções chapéu.

$$u_h = \sum_{j=0}^{n} u_j \phi_j \tag{1.10}$$

$$\phi_i = \begin{cases} (x - x_{i-1})/h, \ x_{i-1} \leq x \leq x_i \\ (x_{i+1} - x)/h, \ x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ 0, \ c.c \end{cases} \tag{1.11}$$

A partir disso definindo que a aproximação será dada por duas parcelas, uma relacionada as nós desconhecidos e outra dos nós conhecidos (contornos).

$$u_h = u_h^D + u_h^C \tag{1.12}$$

$$u_h^D = u_1\phi_1 + u_2\phi_2 + ... + u_{n-1}\phi_{n-1} \tag{1.13}$$

$$u_h^C = u(0)\phi_0 + u(1)\phi_n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u_h^C = (0)\phi_0 + (1)\phi_n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u_h^C = \phi_n \tag{1.14}$$

Dessa forma a equação (1.12) pode ser escrita como:

$$u_h = \sum_{j=1}^{n-1} u_j \phi_j + \phi_n \tag{1.15}$$

Que na forma variacional fica:

$$\sum_{j=1}^{n-1} a(\phi_i, \phi_j) u_j = (f, \phi_i) - (\phi_n, \phi_i), \ i = 1, 2, ..., n-1 \tag{1.16}$$

Note que a equação (1.16) pode ser vista como um sistema linear, para isso basta observar que os termos podem ser reescritos como:

$$A_{ij} = a(\phi_i, \phi_j) = \int_0^1 \Big[a\phi_i'\phi_j' + b\phi_i'\phi_j + c\phi_i\phi_j\Big] dx$$

$$b_i = \begin{cases} \int_0^1 f\phi_i dx \ , \ \ se \ i = 1, 2, ..., n-2 \\ \int_0^1 f\phi_i - \int_0^1 \phi_n\phi_{n-1} dx \ , \ \ se \ i = n-1 \end{cases}$$

Com isso o formato do sistema linear é expresso da seguinte maneira.

$$\begin{pmatrix} a(\phi_1,\phi_1) & a(\phi_1,\phi_2) & 0 & \cdots & 0 \\ a(\phi_2,\phi_1) & a(\phi_2,\phi_2) & a(\phi_2,\phi_3) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a(\phi_{n-1},\phi_{n-1}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (f,\phi_1) \\ (f,\phi_2) \\ \vdots \\ (f,\phi_{n-1}) - (\phi_n,\phi_{n-1}) \end{pmatrix} \tag{1.17}$$

## 1.5 Exercício 3

Considerando elementos finitos lineares com as funções chapéu como base e uma discretização uniforme com espaçamento $h = x_{i+1} - x_i$, faça os cálculos da matriz de rigidez e do vetor de carga de um elemento definido em $[x_i, x_{i+1}]$. As funções base são definidas como:

$$\phi_1^e = \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}}$$

$$\phi_2^e = \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}$$

Obs: também pode-se resolver com o elemento no intervalo $[0, h]$ e com as seguintes funções base definidas no elemento $e$.

$$\phi_1^e = 1 - \frac{x}{h}$$

$$\phi_2^e = \frac{x}{h}$$

## 1.6 Resolução

A matriz de rigidez dos elementos é calculada da seguinte maneira.

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} a\phi_j'\phi_i' + b\phi_j'\phi_i + c\phi_j\phi_i dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^h a\phi_j'\phi_i' + b\phi_j'\phi_i + c\phi_j\phi_i dx \tag{1.18}$$

Considerando a seguinte função base para o cálculo de $K_{00}^e$.

$$\phi_1^e = 1 - \frac{x}{h}$$

$$K_{00}^e = \int_0^h a\Big(\frac{-1}{h}\Big)\Big(\frac{-1}{h}\Big) + b\Big(\frac{-1}{h}\Big)\Big(1 - \frac{x}{h}\Big) + c\Big(1 - \frac{x}{h}\Big)\Big(1 - \frac{x}{h}\Big)dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^h a\frac{1}{h^2} - \frac{b}{h} + \frac{bx}{h^2} + c - \frac{-2cx}{h} + \frac{cx^2}{h^2}dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{a}{h^2}(h) - \frac{b}{h}(h) + \frac{b}{h^2}\Big(\frac{h^2}{2}\Big) + c(h) - \frac{-2c}{h}\Big(\frac{h^2}{2}\Big) + \frac{c}{h^2}\Big(\frac{h^3}{3}\Big) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{a}{h} - b + \frac{b}{2} + ch - ch + \frac{ch}{3} \Rightarrow$$

$$K_{00}^e = \frac{a}{h} - \frac{b}{2} + \frac{ch}{3}$$

Considerando as seguintes funções base para o cálculo de $K_{01}^e$.

$$\phi_i^e = 1 - \frac{x}{h}$$

$$\phi_j^e = \frac{x}{h}$$

$$K_{01}^e = \int_0^h a\Big(\frac{1}{h}\Big)\Big(\frac{-1}{h}\Big) + b\Big(\frac{1}{h}\Big)\Big(1 - \frac{x}{h}\Big) + c\Big(\frac{x}{h}\Big)\Big(1 - \frac{x}{h}\Big)dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^h \frac{-a}{h^2} + \frac{b}{h} - \frac{bx}{h^2} + \frac{cx}{h} - \frac{cx^2}{h^2}dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{-a}{h^2}(h) + \frac{b}{h}(h) - \frac{b}{h^2}\Big(\frac{h^2}{2}\Big) + \frac{c}{h}\Big(\frac{h^2}{2}\Big) - \frac{c}{h^2}\Big(\frac{h^3}{3}\Big) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{-a}{h} + b - \frac{b}{2} + \frac{ch}{2} - \frac{ch}{3} \Rightarrow$$

$$K_{01}^e = \frac{-a}{h} + \frac{b}{2} + \frac{ch}{6}$$

Considerando as seguintes funções base para o cálculo de $K_{10}^e$.

$$\phi_i^e = \frac{x}{h}$$

$$\phi_j^e = 1 - \frac{x}{h}$$

$$K_{10}^e = \int_0^h a\Big(\frac{-1}{h}\Big)\Big(\frac{1}{h}\Big) + b\Big(\frac{-1}{h}\Big)\Big(\frac{x}{h}\Big) + c\Big(1 - \frac{x}{h}\Big)\Big(\frac{x}{h}\Big)dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^h \frac{-a}{h^2} - \frac{bx}{h^2} + \frac{cx}{h} - \frac{cx^2}{h^2}dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{-a}{h^2}(h) - \frac{b}{h^2}\Big(\frac{h^2}{2}\Big) + \frac{c}{h}\Big(\frac{h^2}{2}\Big) - \frac{c}{h^2}\Big(\frac{h^3}{3}\Big) \Rightarrow$$

$$K_{10}^e = -\frac{a}{h} - \frac{b}{2} + \frac{ch}{3}$$

Considerando a seguinte função base para o cálculo de $K_{11}^e$.

$$\phi_i^e = \frac{x}{h}$$

$$K_{11}^e = \int_0^h a\left(\frac{1}{h}\right)\left(\frac{1}{h}\right) + b\left(\frac{1}{h}\right)\left(\frac{x}{h}\right) + c\left(\frac{x}{h}\right)\left(\frac{x}{h}\right)dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^h \frac{a}{h^2} + \frac{bx}{h^2} + \frac{cx^2}{h^2}dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{a}{h^2}(h) + \frac{b}{h^2}\left(\frac{h^2}{2}\right) + \frac{c}{h^2}\left(\frac{h^3}{3}\right) \Rightarrow$$

$$K_{11}^e = \frac{a}{h} + \frac{b}{2} + \frac{ch}{3}$$

Dessa forma a matriz local de cada elemento é dada por:

$$K = \begin{pmatrix} \frac{a}{h} - \frac{b}{2} + \frac{ch}{3} & -\frac{a}{h} + \frac{b}{2} + \frac{ch}{6} \\ -\frac{a}{h} - \frac{b}{2} + \frac{ch}{6} & \frac{a}{h} + \frac{b}{2} + \frac{ch}{3} \end{pmatrix}$$