
95.10 | Modelación numérica

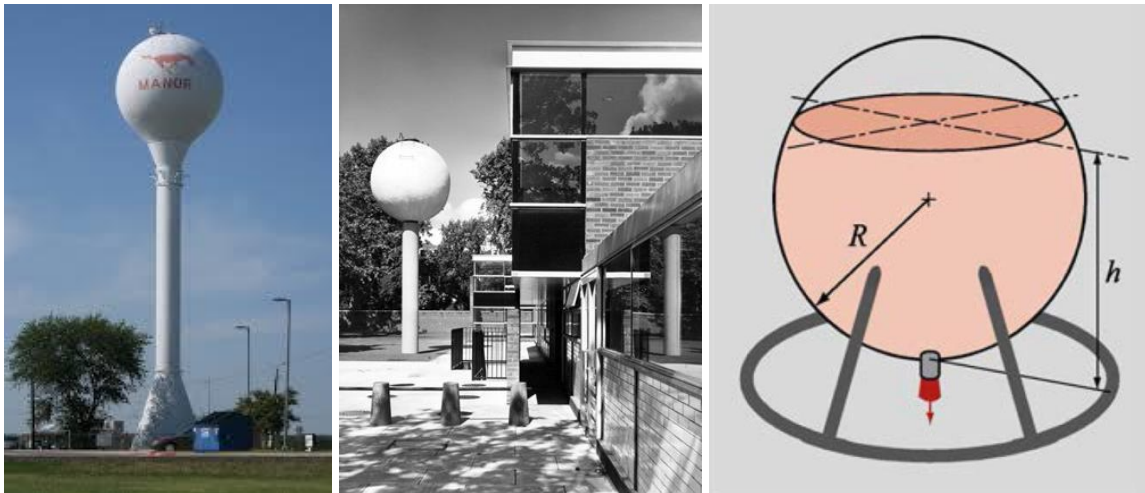
75.12 | Análisis numérico I A

Trabajo Práctico #3

Vaciado de un tanque de agua esférico

Problema

Se plantea una opción de modelo matemático de vaciado de un tanque de agua esférico a través de un orificio situado en su base, donde la forma geométrica del recipiente determina el comportamiento del agua.



Considerando el tanque esférico de radio R con agua hasta una altura h , y suponiendo que el agua fluye a través de un orificio de radio r el cual está ubicado en la base del tanque, la ecuación diferencial que describe este comportamiento es la siguiente:

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{r^2\sqrt{2gh}}{2hR - h^2}$$

Este modelo se denomina M1, siendo la constante $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ representa la aceleración de la gravedad, el radio R del tanque es de 4 m y el radio r del orificio de salida es de 0.12 m . La altura inicial del agua es de $h_0 = 6.5 \text{ m}$ (en $t_0=0$).

Una opción de mejora del modelo matemático presentado consiste en sumar el efecto de

contracción del flujo en la salida del orificio, por lo que la ecuación presentada sería:

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{r^2(c_c\sqrt{2gh})}{2hR - h^2}$$

donde c_c es el coeficiente de contracción que se impone como 0.6, en el modelo que se denomina M2.

Tareas

- a) Resolver el problema numérico utilizando el modelo M1 con el método de Euler y obtener el nivel de agua a los 10 minutos. Calcular con tres pasos de discretización diferentes: $\Delta t=10$, $\Delta t=5$ y $\Delta t=1$ (en segundos).
- b) Idem a) pero utilizando el método del punto medio (RK2).
- c) Idem a) pero utilizando el método de Runge-Kutta 4.
- d) Análisis de sensibilidad. Utilizar el modelo M2 resuelto con el método de Runge-Kutta 4 y resolver igual que en el ítem a): i) repetir cálculos con $c_c=0.55$ y $c_c=0.65$ y comparar resultados evaluando sensibilidad a esa variable, y ii) comparar con resultados de M1.
- e) Realizar análisis completo de errores de truncamiento, considerando ambos modelos y todos los pasos de discretización. Evaluar ordenes de precisión de cada método.
- f) Como indicador de las etapas de vaciado interesa obtener la integral de $h(t)$ obtenida numéricamente con el método de Runge-Kutta 4 durante los minutos 1 y 9 de vaciado. Calcular las integrales con los métodos de los trapecios y Simpson. Comparar resultados y evaluar error de truncamiento.