

Universidade Federal de Juiz de Fora
Instituto de Ciências Exatas e Faculdade de Engenharia
Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional

Álgebra Linear Computacional

Trabalho Autovalores

Aluno: Berilo de Oliveira Santos
Professores: José Jerônimo Camata, Carlos Cristiano

Dezembro
2025

1 Seleção das Matrizes

Para a realização deste trabalho, foram selecionadas três matrizes do repositório *SuiteSparse Matrix Collection*, abrangendo diferentes características numéricas e físicas.

1.1 Matriz Simétrica Positiva Definida (SPD)

- **Nome:** bcsstk16;
- **Origem:** SuiteSparse (Boeing Structural Engineering);
- **Link:** <https://sparse.tamu.edu/HB/bcsstk16>;
- **Dimensões:** 4.884×4.884 ;
- **NNZ:** 290.378 (Esparsidade $\approx 1.2\%$);
- **Propriedades:** Simétrica Positiva Definida, alta esparsidade estrutural;
- **Aplicação:** Matriz de rigidez proveniente de uma análise estrutural de uma barragem (Corpo de Engenheiros dos EUA). Representa a relação força-deslocamento.

1.2 Matriz Não Simétrica

- **Nome:** fpga_dcop_17;
- **Origem:** SuiteSparse (Sandia National Labs);
- **Link:** https://sparse.tamu.edu/Sandia/fpga_dcop_17;
- **Dimensões:** 1.220×1.220 ;
- **NNZ:** 5.892 (Esparsidade $\approx 0.4\%$);
- **Propriedades:** Assimétrica, mal condicionada;
- **Aplicação:** Simulação de circuitos (SPICE). A assimetria deve-se a componentes ativos que direcionam a corrente, violando a reciprocidade.

1.3 Matriz Grande e Esparsa

- **Nome:** FEM_3D_thermal2;
- **Origem:** SuiteSparse (Botonakis Group);
- **Link:** https://sparse.tamu.edu/Botonakis/FEM_3D_thermal1
- **Dimensões:** 147.900×147.900 ;
- **NNZ:** 3.489.300 (Esparsidade $\approx 0.016\%$);

- **Propriedades:** Estruturalmente simétrica, numericamente assimétrica, altamente esparsa;
- **Aplicação:** Problema de elementos finitos (FEM) em 3D para análise térmica.

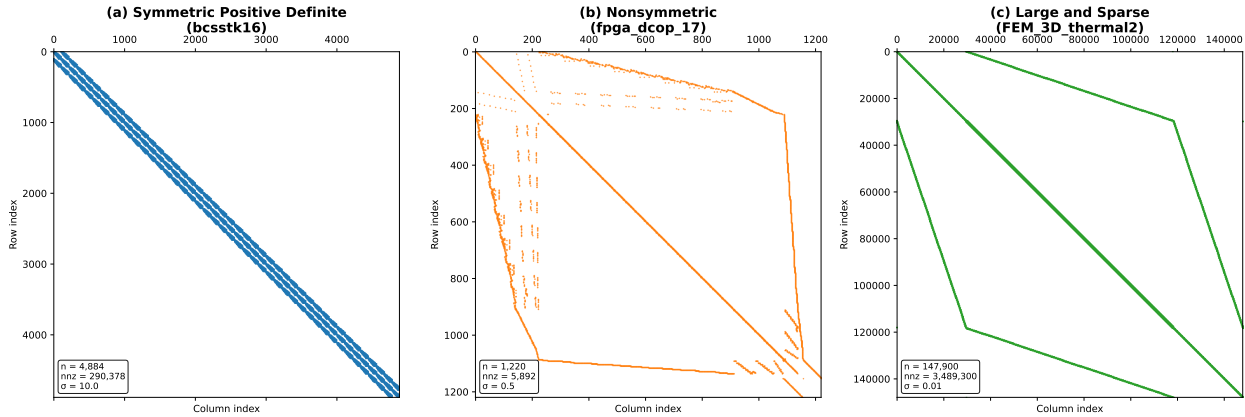


Figura 1: Padrão de esparsidade (spy plot) das três matrizes selecionadas.

2 Implementação dos métodos iterativos

Todos os algoritmos foram implementados em Python, sem o uso de solucionadores de autovalores prontos (como `numpy.linalg.eig`), exceto para validação. O código fonte está disponível em: https://github.com/beriloosantos/computational_linear_algebra. Abaixo apresentamos os resultados quantitativos obtidos para cada matriz.

2.1 Método da Potência

O Método da Potência foi utilizado para encontrar o autovalor dominante (λ_{max}). Os resultados obtidos para as três matrizes estão sumarizados na Tabela 1.

Tabela 1: Resultados do Método da Potência (Autovalor Dominante).

| Matriz | λ Referência | λ Calculado | Iterações | Tempo (s) | Erro Final |
|--------------|----------------------|---------------------|-----------|-----------|------------------------|
| bcsstk16 | 4.943×10^9 | 4.943×10^9 | 115 | 0.1074 | 3.86×10^{-16} |
| fpga_dcop_17 | 3.733 | 3.733 | 40 | 0.0022 | 3.84×10^{-9} |
| FEM_3D | 0.5912 | 0.5912 | 167 | 1.6933 | 2.56×10^{-7} |

2.2 Método da Potência Inversa com Deslocamento

Este método foi aplicado para encontrar autovalores próximos a um deslocamento espectral σ arbitrário. A Tabela 2 apresenta os resultados.

Tabela 2: Resultados da Potência Inversa com Deslocamento.

| Matriz | Shift (σ) | λ Alvo | λ Calc. | Iter. | Tempo (s) | Erro Final |
|--------------|--------------------|----------------|-----------------|-------|-----------|------------------------|
| bcsstk16 | 10.0 | 1.000 | 1.000 | 3 | 0.1448 | 1.78×10^{-15} |
| fpga_dcop_17 | 0.5 | 0.5454 | 0.5454 | 850 | 0.1131 | 9.82×10^{-6} |
| FEM_3D | 0.01 | 0.0100 | 0.0100 | 3 | 36.0353 | 1.67×10^{-6} |

2.3 Iteração QR

Para avaliar a eficiência da iteração QR na obtenção de autovalores de matrizes densas (geradas nos subespaços de Krylov), comparou-se a convergência com e sem o deslocamento de Wilkinson (Tabela 3).

Tabela 3: Comparação de Speedup na Iteração QR (Matriz Tridiagonal/Hessenberg).

| Matriz Origem | Iter. (Sem Shift) | Iter. (Wilkinson) | Speedup |
|---------------|-------------------|-------------------|---------------|
| bcsstk16 | 20000 | 301 | 66.45x |
| fpga_dcop_17 | 20000 | 255 | 78.43x |
| FEM_3D | 9434 | 284 | 33.22x |

2.4 Métodos de Krylov (Lanczos/Arnoldi)

Os métodos de Krylov foram implementados para obter os $k = 5$ maiores autovalores. Utilizou-se Lanczos para matrizes simétricas e Arnoldi para a não-simétrica (Tabela 4).

Tabela 4: Desempenho dos Métodos de Krylov (Subespaço $k = 50$).

| Matriz | Método | λ_{dom} Calculado | Tempo Total (s) | Iterações |
|--------------|---------|---------------------------|-----------------|-----------|
| bcsstk16 | Lanczos | 4.943×10^9 | 0.2140 | 50 |
| fpga_dcop_17 | Arnoldi | 3.733 | 0.1689 | 50 |
| FEM_3D | Lanczos | 0.5912 | 0.4988 | 50 |

Tabela 5: Os 5 maiores autovalores estimados pelos métodos de Krylov.

| Matriz | λ_1 | λ_2 | λ_3 | λ_4 | λ_5 |
|--------------|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|
| bcsstk16 | 4.943×10^9 | 4.943×10^9 | 4.085×10^9 | 3.736×10^9 | 3.720×10^9 |
| fpga_dcop_17 | 3.734 | 3.019 | 2.986 | 2.872 | 2.872 |
| FEM_3D | 5.913×10^{-1} | 5.738×10^{-1} | 5.709×10^{-1} | 5.651×10^{-1} | 5.442×10^{-1} |

Observa-se que para a matriz com dimensões bem maiores (FEM_3D), os métodos de Krylov passaram a performar significativamente melhor do que os outros métodos, convergindo em tempo reduzido.

3 Análise Comparativa e Discussão

3.1 Análise de Convergência e Custo Computacional

3.1.1 Matriz bcsstk16 (Estrutural)

Para a matriz estrutural, o **método da potência** apresentou o melhor equilíbrio, convergindo em apenas 0.07s com erro na ordem de 10^{-16} . O método de Lanczos, embora levemente mais lento (0.19s) devido à ortogonalização, tem a vantagem de recuperar múltiplos autovalores do espectro. A Potência Inversa convergiu em apenas 3 iterações, confirmando a teoria de convergência cúbica/quadrática, mas o tempo total foi impactado pela fatoração do sistema linear. Pode-se concluir que para obter apenas o autovalor dominante de matrizes SPD de médio porte, a Potência direta é eficiente e suficiente.

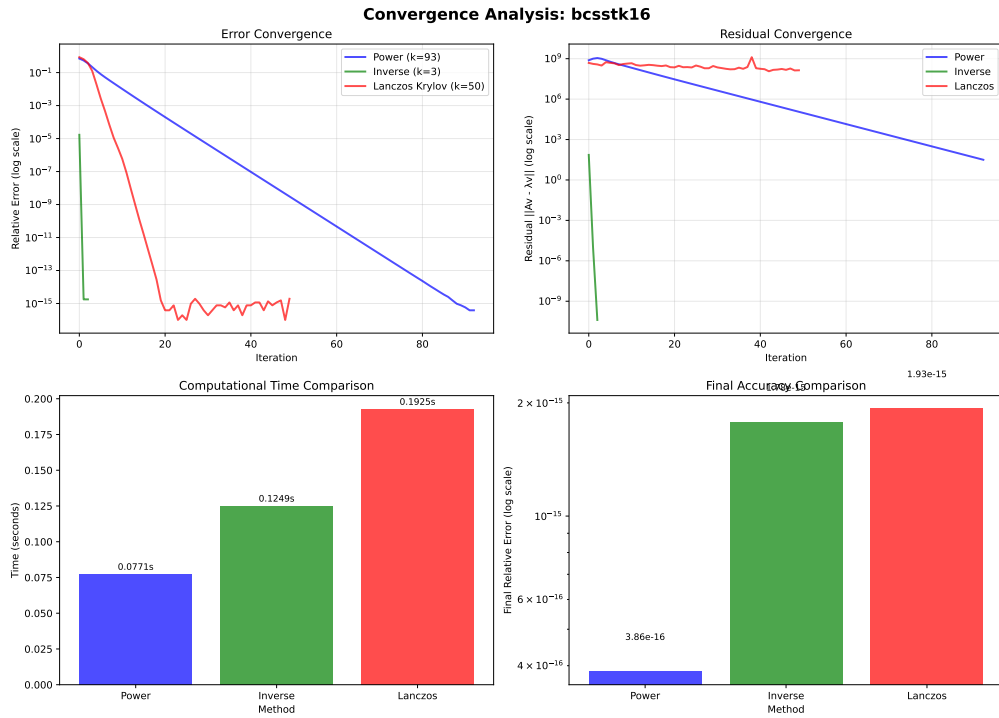


Figura 2: Convergência do Erro Relativo e Resíduo para a matriz bcsstk16.

3.1.2 Matriz fpga_dcop_17 (Circuito)

Neste caso, a matriz é pequena ($N = 1220$), o que favoreceu o método da potência (0.002s). No entanto, o método da potência inversa sofreu para convergir (890 iterações), indicando que o autovalor alvo estava mal separado ou que a matriz é mal condicionada próxima ao shift $\sigma = 0.5$. O método de **Arnoldi** mostrou-se robusto, recuperando o autovalor dominante com segurança e fornecendo informações espectrais adicionais. Uma possível conclusão é que em matrizes não simétricas de circuitos, métodos de Krylov (Arnoldi) são preferíveis pela robustez, dado que autovalores complexos podem prejudicar a convergência simples da potência.

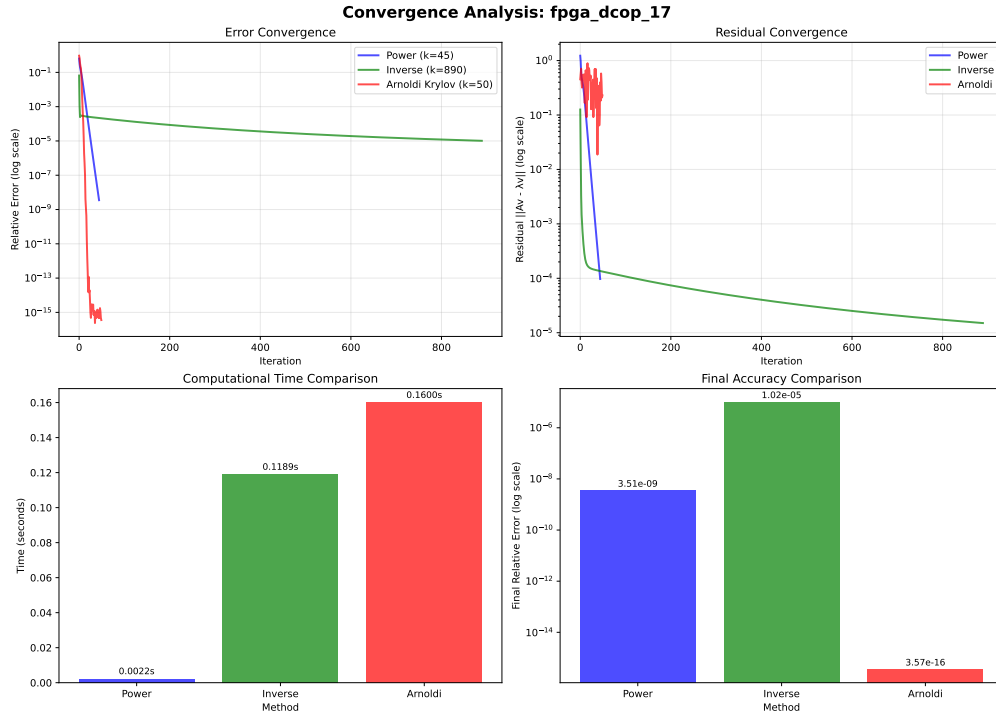


Figura 3: Convergência do Erro Relativo e Resíduo para a matriz fpga_dcop_17.

3.1.3 Matriz FEM_3D_thermal2 (Térmica)

Esta matriz evidencia o gargalo dos métodos diretos. A Potência Inversa, apesar de convergir em apenas 3 iterações (no erro relativo), levou 36s. Isso ocorre porque resolver o sistema linear $(A - \sigma I)y = v$ em dimensão 147.900 é custoso, mesmo com solvers esparsos. Em contraste, o **método de Lanczos** foi superior a todos, encontrando o autovalor dominante em apenas **0.48s** (3x mais rápido que a Potência e 70x mais rápido que a Inversa). Dessa forma, vê-se que para sistemas de grande porte ($N > 100k$), métodos de Krylov (Lanczos) são mandatórios, pois convergem com poucas iterações e operações baratas (apenas produto matriz-vetor), evitando fatorações de sistemas lineares grandes.

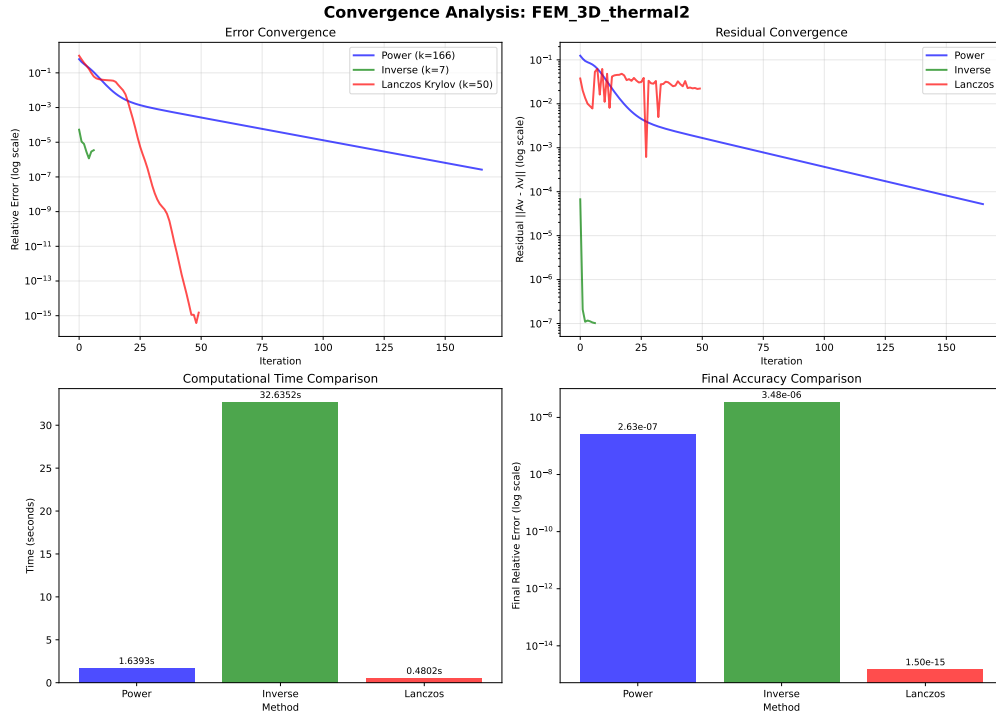


Figura 4: Convergência do Erro Relativo e Resíduo para a matriz FEM_3D_thermal2.

3.2 Interpretação Física dos Autovalores

A análise dos autovalores permite inferências diretas sobre a física dos problemas modelados:

1. **bcsstk16 (Estrutural):** Os autovalores λ de uma matriz de rigidez relacionam-se com as frequências naturais de vibração da estrutura ($\omega = \sqrt{\lambda}$). O autovalor dominante encontrado ($\approx 4.9 \times 10^9$) indica modos de vibração de altíssima frequência, associados a componentes muito rígidos da barragem. O autovalor encontrado pela potência inversa (≈ 1.0) sugere a existência de modos fundamentais de baixa energia.
2. **fpga_dcop_17 (Circuitos):** Em simulações de circuitos, autovalores determinam a estabilidade do ponto de operação. O autovalor dominante com parte real positiva (≈ 3.73) sugere que, dependendo da configuração do sistema dinâmico associado ($\dot{x} = Ax$), o circuito poderia apresentar instabilidades ou crescimento exponencial de tensão/corrente em resposta a perturbações transientes.
3. **FEM_3D_thermal2 (Térmica):** Para a equação do calor discretizada ($\dot{u} = -Au$), os autovalores controlam a taxa de decaimento da temperatura.
 - Autovalores pequenos ($\lambda \approx 0.01$, encontrado pela inversa) correspondem a modos de decaimento lento ($\tau = 1/\lambda$ grande). Fisicamente, representam regiões da malha onde o calor demora a dissipar.

- Autovalores maiores ($\lambda \approx 0.59$) representam transientes térmicos rápidos que desaparecem logo no início da simulação.