TÜRKİYE CUMHURİYETİ

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ

BİLGİSAYAR MÜHENDİSLİĞİ BÖLÜMÜ

Algoritma Analizi Dersi 1. Ödev Raporu

Öğrenci No: 21011084

Ad-Soyad: Berkay Gümüşay

E-Posta: berkay.gumusay@std.yildiz.edu.tr

Telefon: 0 535 840 79 78

1. Aşağıdaki fonksiyonları **Big-Theta cinsinden** ifade edip çözümünüzü ispatlayınız. **(20 Puan)**
   - **a.** $(n^2+1)^{10}$
   - **b.** $\sqrt{10n^2+7n+3}$

Cevap:

1 a.) $(n^2+1)^{10}$

$c_1 \cdot g(n) \le (n^2+1)^{10} \le c_2 \cdot g(n)$

1) $c_1 \cdot n^{20} \le (n^2+1)^{10}$

$n_0 = 1$

$c_1 \le 2^{10}$

$\boxed{c_1 = 1}$

2) $(n^2+1)^{10} \le c_2 \cdot n^{20}$

$n_0 = 1$

$c_2 \ge 2^{10}$

$\boxed{c_2 = 2^{10}}$

1 b.) $\sqrt{10n^2+7n+3}$

$c_1 \cdot n \le \sqrt{10n^2+7n+3} \le c_2 \cdot n$

1) $n_0 = 1$

$c_1 \le \sqrt{20}$

$\boxed{c_1 = 4}$

2) $n_0 = 1$

$\sqrt{20} \le c_2$

$\boxed{c_2 = 5}$

2. Aşağıda verilen toplam ifadesinin büyüme derecesini hesaplayıp **Big-Oh asimptotik notasyonunu** kullanarak yazınız. **(20 Puan)**

$$\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{i-1} (i+j)$$

Cevap:

2) $$\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{i-1} (i+j)$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} \left(\underbrace{\sum_{j=0}^{i-1} i}_{} + \underbrace{\sum_{j=0}^{i-1} j}_{} \right)$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} \left(i^2 + \frac{i.(i-1)}{2} \right)$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{3i^2 - i}{2} = \frac{3}{2} \sum_{i=0}^{n-1} i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} i$$

$$\frac{\cancel{3}}{2} . \frac{(n-1).(n).(2n-1)}{\cancel{6}\,2} - \frac{1}{2} . \frac{n.(n-1)}{2}$$

$$= \frac{2n^3 - 2n^2 - 2n + 2}{4}$$

$$\boxed{f(n) \in O(n^3)}$$

3. Aşağıda sözde kodu verilen algoritmanın

a. matematiksel ifadesini yazıp analizini yaparak büyüme derecesini bulup **Big-Oh cinsinden** ifade ediniz. **(10 Puan)**

b. sözde kodunda yer alan verimliliği düşüren kısmı bulup verimliliği arttırmak için düzenleyiniz. **(10 Puan)**

```
Algorithm GE(A[0..n − 1, 0..n])
//Input: An n-by-n + 1 matrix A[0..n − 1, 0..n] of real numbers
for i ← 0 to n − 2 do
    for j ← i + 1 to n − 1 do
        for k ← i to n do
            A[j, k] ← A[j, k] − A[i, k] ∗ A[j, i] / A[i, i]
```

Cevap:

3.a)

Döngülerin denkleme çevrilmiş hali

$$\sum_{i=0}^{n-2}\sum_{j=i+1}^{n-1}\sum_{i}^{n} 1$$

$$= \sum_{i=0}^{n-2}\sum_{j=i+1}^{n-1}(n-i+1)$$

$$= \sum_{i=0}^{n-2}(n-i+1)\cdot(n-i-1)$$

$$= \sum_{i=0}^{n-2}(n-i)^2-1 = \sum_{i=0}^{n-2}(n-i)^2-\sum_{i=0}^{n-2}1$$

$$= \underbrace{\left((n-1)^2+(n-2)^2+\dots+2^2\right)}-(n-1)$$

$$\underbrace{\frac{(n-1)\cdot(n)\cdot(2n-1)}{6}\cancel{-1}-n+\cancel{1}}$$

$$n^3 \rightarrow f(n) \in O(n^3)$$

3.b)

```
for i ← 0 to n-2 do
    for j ← i+1 to n-2 do
        temVar ← A[j,i]/A[i,i]
        for k ← i to n do
            A[j,k] ← A[j,k] - A[i,k]/tempVar
```

4. Aşağıda verilen rekürans bağıntısını "backward substitution" yardımı ile çözünüz. **(20 Puan)**

$x(n) = x(n/3) + 1$ for $n > 1$, $x(1) = 1$ (solve for $n = 3^k$)

4) $x(n) = x(n/3) + 1$ for $n>1$ $x(1)=1$

$x(3^k) = \underbrace{x(3^{k-1})}+1$

$[x(3^{k-2})+1]+1$

$[x(3^{k-3})+1]+2$

$i=k$ $x(3^{k-i})+i$

$= \underline{x(3^{k-k})}+k$

$\underbrace{1+k}$ $n=3^k$

$\boxed{1+\log n}$ $k=\log_3 n$

5. Aşağıda varyans hesabı yapan iki ayrı formül verilmiştir. Bu formüllerde yer alan bölme (division D(n)), çarpma (multiplication M(n)) ve toplama/çıkarma (addition/substraction (A(n)+S(n)) ifadelerinin sayılarını "n" cinsinden hesaplayıp ayrı ayrı (D(n), M(n) ve A(n)+S(n)) ifade ediniz. **(20 Puan)**

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1} \text{ where } \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \qquad \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2/n}{n-1}$$

$\bar{x}$ **Varyans değerini en başta 1 kere hesaplanıp daha sonra sabit olarak değerlendirildiğini kabul ettim. Bu yüzden her toplama adımında tekrar hesaba dahil etmedim.**

5a)

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2x_i\bar{x} + \bar{x}^2}{n-1}$$

$A(n) + S(n) = 4n - 1$

$D(n) = 2$

$M(n) = 4n$

5.b)

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2/n}{n-1}$$

$A(n) + S(n) = 2n$

$D(n) = 2$

$M(n) = n + 1$