

# LA 1 Repetitorium Day 4

Berk Oytun Bozoğlu

## Exercise 1

Bestimmen Sie für die Permutationen

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 3 & 5 & 1 & 7 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 3 & 5 & 2 & 4 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

$\text{sgn}(\pi_1)$  und  $\text{sgn}(\pi_2)$ .

## Exercise 2

Berechnen Sie die folgenden Determinanten:

1.

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$$

2.

$$\begin{pmatrix} 1 & x & 1 \\ 0 & x & 0 \\ -x & 0 & x \end{pmatrix}$$

3.

$$\begin{pmatrix} 1 + \cos \alpha & 1 + \sin \alpha & 1 \\ 1 - \sin \alpha & 1 + \cos \alpha & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

## Exercise 3

Geben Sie eine Formel für die Determinante der folgenden Matrix A mit  $a \in k$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & \cdots & 0 \\ a & 1 & a & \ddots & \vdots \\ 0 & a & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a \\ 0 & \cdots & 0 & a & 1 \end{pmatrix}$$

### Exercise 4

Beweisen oder Widerlegen Sie jeweils (durch ein Gegenbeispiel) daß die folgenden Abbildungen  $\mathbb{R}$ -linear sind

(a)  $f_1: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y, z) \mapsto (x + 3y, 2y - x)$

(b)  $f_2: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \mapsto \max\{x, y, z\}$

(c)  $f_2: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \det(AB^{-1})$

Wobei  $A = \begin{pmatrix} x & 0 & -1 \\ 0 & y & 0 \\ 1 & 0 & x \end{pmatrix}$  und  $B = \begin{pmatrix} x & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & x \end{pmatrix}$

### Exercise 5

Sei  $k$  ein Körper. Entscheiden Sie für welche Werte  $a \in k$  die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & a & -1 \end{pmatrix}$$

invertierbar ist.

### Exercise 6

Sei  $k$  ein Körper und  $n \geq 1$  eine ganze Zahl. Seien  $x, a_1, \dots, a_n \in k$ .

Sei

$$A = \begin{pmatrix} x & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & x & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & a_2 & x & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n & 1 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{n+1}(k)$$

Zeigen Sie daß  $\det(A) = (x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_n)$  ist.

### Exercise 7

Sei  $A \in \text{Mat}_n(k)$  und  $f_A: \text{Mat}_n(k) \rightarrow \text{Mat}_n(k)$  mit  $f_A(X) = AX - XA$ . Zeigen Sie:

(a)  $f_A$  ist linear für alle  $A \in \text{Mat}_n(k)$ .

(b)  $\det(f_A) = 0$ .

### Exercise 8

Für  $a \in \mathbb{R}$  definiere

$$\begin{aligned} f_a: \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (ax + y, x + ay) \end{aligned}$$

- (a)  $f_a$  sind  $\mathbb{R}$ -linear für alle  $a \in \mathbb{R}$ .
- (b) Bestimme  $\det(f_a)$  in Abhängigkeit von  $a$
- (c) Wieso impliziert b) daß im  $f_a = \mathbb{R}^2$  für alle  $a \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$  ist.
- (d) Bestimme Basen von im  $f_1$  und im  $f_{-1}$

### Exercise 9

Sei  $A = (a_{ij})_{i,j} \in \text{Mat}_n(k)$  mit

$$a_{ij} = \begin{cases} 2 & \text{falls } i = j \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

Berechnen Sie die Determinante der Matrix  $A$ .

### Exercise 10

Sei

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 \\ 7 & 4 & -5 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_3(\mathbb{Q})$$

- (a) Berechnen Sie das Charakteristische Polynom von  $A$ .
- (b) Finden Sie die Eigenwerte von  $A$ .
- (c) Berechnen Sie die Eigenräume von  $A$ .

### Exercise 11

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

- (a) Berechnen Sie  $\det(A)$
- (b) Ist  $A$  invertierbar? Falls ja, berechnen Sie ihre Inverse.