

LA 1 Repetitorium Day 4

Berk Oytun Bozoğlu

Exercise 1

Bestimmen Sie für die Permutationen

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 3 & 5 & 1 & 7 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 3 & 5 & 2 & 4 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

$\text{sgn}(\pi_1)$ und $\text{sgn}(\pi_2)$.

Exercise 2

Berechnen Sie die folgenden Determinanten:

1.

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$$

2.

$$\begin{pmatrix} 1 & x & 1 \\ 0 & x & 0 \\ -x & 0 & x \end{pmatrix}$$

3.

$$\begin{pmatrix} 1 + \cos \alpha & 1 + \sin \alpha & 1 \\ 1 - \sin \alpha & 1 + \cos \alpha & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercise 3

Geben Sie eine Formel für die Determinante der folgenden Matrix A mit $a \in k$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & \cdots & 0 \\ a & 1 & a & \ddots & \vdots \\ 0 & a & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a \\ 0 & \cdots & 0 & a & 1 \end{pmatrix}$$

Exercise 4

Beweisen oder Wiederlegen Sie jeweils (durch ein Gegenbeispiel) daß die folgenden Abbildungen \mathbb{R} -linear sind

(a) $f_1: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y, z) \mapsto (x + 3y, 2y - x)$

(b) $f_2: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \mapsto \max\{x, y, z\}$

(c) $f_2: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \det(AB^{-1})$

Wobei $A = \begin{pmatrix} x & 0 & -1 \\ 0 & y & 0 \\ 1 & 0 & x \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} x & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & x \end{pmatrix}$

Exercise 5

Sei k ein Körper. Entscheiden Sie für welche Werte $a \in k$ die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & a & -1 \end{pmatrix}$$

invertierbar ist.

Exercise 6

Sei k ein Körper und $n \geq 1$ eine ganze Zahl. Seien $x, a_1, \dots, a_n \in k$.

Sei

$$A = \begin{pmatrix} x & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & x & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & a_2 & x & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n & 1 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{n+1}(k)$$

Zeigen Sie daß $\det(A) = (x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_n)$ ist.

Exercise 7

Sei $A \in \text{Mat}_n(k)$ und $f_A: \text{Mat}_n(k) \rightarrow \text{Mat}_n(k)$ mit $f_A(X) = AX - XA$. Zeigen Sie:

(a) f_A ist linear für alle $A \in \text{Mat}_n(k)$.

(b) $\det(f_A) = 0$.

Exercise 8

Für $a \in \mathbb{R}$ definiere

$$f_a: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2
(x, y) \mapsto (ax + y, x + ay)$$

- (a) f_a sind \mathbb{R} -linear für alle $a \in bR$.
- (b) Bestimme $\det(f_a)$ in Abhängigkeit von a
- (c) Wieso impliziert b) daß $\text{im } f_a = \mathbb{R}^2$ für alle $a \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$ ist.
- (d) Bestimme Basen von $\text{im } f_1$ und $\text{im } f_{-1}$

Exercise 9

Sei $A = (a_{ij})_{i,j} \in \text{Mat}_n(k)$ mit

$$a_{ij} = \begin{cases} 2 & \text{falls } i = j \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

Berechnen Sie die Determinante der Matrix A .

Exercise 10

Sei

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 \\ 7 & 4 & -5 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_3(\mathbb{Q})$$

- (a) Berechnen Sie das Charakteristische Polynom von A .
- (b) Finden Sie die Eigenwerte von A .
- (c) Berechnen Sie die Eigenräume von A .

Exercise 11

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

- (a) Berechnen Sie $\det(A)$
- (b) Ist A invertierbar? Falls ja, berechnen Sie ihre Inverse.