

LA 1 Repetitorium Day 1

Berk Oytun Bozoğlu

Exercise 1

Sei k ein Körper, und sei V ein k -Vektorraum. Sei $n \geq 2$ eine ganze Zahl und seien $v_1, \dots, v_n \in V$ linear abhängige Vektoren, von denen jeweils $n - 1$ linear unabhängig sind.

Zeige:

- (a) Es existieren $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in k \setminus \{0\}$, so daß $\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = 0$.
- (b) Seien $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ wie in a). Seien $\beta_1, \dots, \beta_n \in k$ Elemente mit $\sum_{i=1}^n \beta_i v_i = 0$. Dann existieren $\gamma \in k$, so daß $\beta_i = \gamma \alpha_i$ für alle $1 \leq i \leq n$.

Exercise 2

Sei V ein k -Vektorraum und seien U_1, U_2 Unterräume von V . Zeigen Sie daß folgende Aussagen äquivalent sind:

1. $U_1 \cap U_2 = \{0\}$
2. Jedes $v \in U_1 + U_2$ läßt sich auf eindeutige Weise als $v = u_1 + u_2$ mit $u_1 \in U_1$ und $u_2 \in U_2$ darstellen.
3. Je zwei von Null verschieden Vektoren $u_1 \in U_1$ und $u_2 \in U_2$ sind linear unabhängig.

Exercise 3

Sei V ein endlich dimensionaler k -Vektorraum und $U_1, U_2 \subseteq V$ Unterräume mit $\dim_k(U_1) = \dim_k(U_2)$. Zeigen Sie, daß es einen Untervektorraum $W \subseteq V$ gibt, so daß $V = U_1 \oplus W = U_2 \oplus W$ gilt.

Exercise 4

Sei V ein k -Vektorraum und $\varphi \in \text{End}_k(V)$. Beweisen Sie daß die folgenden Aussagen äquivalent sind :

1. $\ker(\varphi) \cap \text{im}(\varphi) = \{0\}$
2. $\ker(\varphi \circ \varphi) = \ker(\varphi)$

Exercise 5

Seien $v_1, \dots, v_n \in V$ linear unabhängig. Zeigen Sie daß falls $x \notin \text{span}(v_1, \dots, v_n)$ dann sind x, v_1, \dots, v_n linear unabhängig .