МИНОБРНАУКИ РОССИИ
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
«ЛЭТИ» ИМ. В.И. УЛЬЯНОВА (ЛЕНИНА)
Кафедра МО ЭВМ

ОТЧЕТ

по лабораторной работе №1

по дисциплине «Построение и анализ алгоритмов»

Тема: Поиск с возвратом

Рекурсивный бэктрекинг. Исследование времени выполнения от размера квадрата

Вариант – 2р

Студент гр. 3388 ____________________ Березовский М.А.

Преподаватель ____________________ Жангиров Т.Р.

Санкт-Петербург
2025

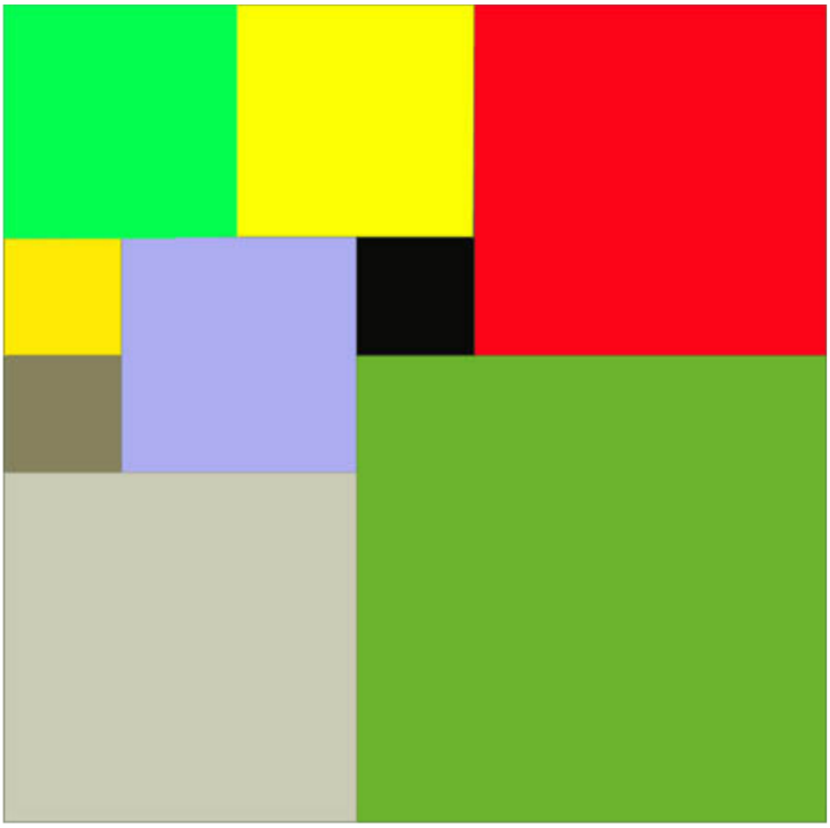
Цель работы

Изучить бэктрекинг (рекурсивный), поиск решений с возвратом. Применить полученные знания на практике, реализовав программный код.

Задание

У Вовы много квадратных обрезков доски. Их стороны (размер) изменяются от 1 до N−1, и у него есть неограниченное число обрезков любого размера. Но ему очень хочется получить большую столешницу - квадрат размера N. Он может получить ее, собрав из уже имеющихся обрезков(квадратов).

Например, столешница размера 7×7 может быть построена из 9 обрезков.



Внутри столешницы не должно быть пустот, обрезки не должны выходить за пределы столешницы и не должны перекрываться. Кроме того, Вова хочет использовать минимально возможное число обрезков.

Входные данные

Размер столешницы - одно целое число N ($2 \le N \le 20$).

Выходные данные

Одно число *K*, задающее минимальное количество обрезков(квадратов), из которых можно построить столешницу(квадрат) заданного размера N*N*. Далее должны идти *K* строк, каждая из которых должна содержать три целых числа x, y и w, задающие координаты левого верхнего угла ($1 \le x, y \le N$) и длину стороны соответствующего обрезка(квадрата).

Пример входных данных

7

Соответствующие выходные данные

9

1 1 2

1 3 2

3 1 1

4 1 1

3 2 2

5 1 3

4 4 4

1 5 3

3 4 1

Выполнение работы

Описание алгоритм для решения задачи.

Предварительная обработка: если размер столешницы N делится на 2 или 3, для таких случаев применяется специализированное разбиение, позволяющее сразу получить корректное решение без полного перебора. Это существенно снижает время вычисления.

Общее решение: для него используем метод полного перебора с возвратом (backtracking), идея такая:

- Используем двумерный массив grid размером N*N – столешница, где каждая ячейка будет отмечена как заполненная или свободная.

- При нахождении первой свободной ячейки, алгоритм пытается разместить в ней квадрат максимально возможного размера (учитывая условия, что квадрат не выходит за границы и не пересекается с уже размещёнными квадратами).

После успешного размещения алгоритм рекурсивно переходит к следующей свободной ячейке и при полном покрытии столешницы, решение сохраняется в переменную best_placement.

Оптимизация алгоритма.

- Специальные разбиения для N кратных 2 или 3 (вручную прописываем фиксированное наилучшее размещение 4 или 6 квадратов)

- Выбор наибольшего возможного квадрата (при каждом рекурсивном шаге функция backtrack ищет первую незаполненную ячейку и пытается разместить в ней квадрат максимального возможного размера, с условием, что он не выходит за границы не перекрывает другие квадраты)

- Остановка (если количество квадратов в текущем частичном решении уже не может быть меньше или равно, чем оптимальное решение до этого, дальнейшее углубление рекурсии прекращается)

- Фиксированное начальное разбиение (перед запуском рекурсивного бэктрекинга для общего случая на простых числах используются три фиксированных квадрата, которые заранее размещаются в матрице, это размещение максимально полезно заполняет большую часть поля, уменьшая площадь, которую необходимо покрыть рекурсивным поиском, улучшая общее время выполнения)

Оценка сложности алгоритма во времени и памяти в нотации O.

По времени: **в теории** в худшем случае алгоритм будет работать, перебирать все клетки на столешнице, их N^2, а также для каждой перебирать все возможные квадраты заполнения, то есть будет $O((N^2)!)$, но на практике мы сильно сокращаем эти переборы оптимизациями, поэтому сложно чётко сказать, что получится по итогу, но алгоритм будет работать где-то $O(N^2)$

По памяти: затраты приходятся на хранение матрицы grid размером N*N, сложность для неё $O(N^2)$

- Рекурсивный стек, глубина определяется количеством размещённых квадратов, в худшем случае если 1*1, тогда $O(N^2)$
- Списки хранения частичных и оптимального решений $O(N^2)$

Итого: $O(N^2)$

Способ хранения частичных решений.

- Матрица grid – представляет собой двумерный список размера N*N, где каждый элемент имеет значение 0 (свободная ячейка) или 1 (ячейка занята квадратом).
- Список current_placement – список, где каждое частичное решение представлено в виде кортежа (x, y, s) , где x и y – координаты левого верхнего угла размещённого квадрата (индексация с 1), а s – длина стороны квадрата. Список отражает текущую последовательность размещённых квадратов.

- Список best_placement – используется для хранения оптимального решения, обновляется, когда в процессе рекурсии находится полное покрытие столешницы с меньшим количеством квадратов, чем ранее.

Рекурсивный бэктрекинг.

Сигнатура: def backtrack(count)

Назначение: функция выполняет рекурсивный поиск с возвратом для размещения квадратов на столешнице таким образом, чтобы полностью заполнить её с минимальным количеством элементов. Функция ищет все возможные варианты заполнения, используя стратегию жадного выбора наибольшего квадрата и раннюю остановку для сокращения числа переборов.

Аргументы: count – целое число – текущее количество размещённых квадратов в частичном решении (список current_placement), оно используется для сравнения с текущим оптимальным решением и для контроля глубины рекурсии.

Возвращаемое значение: функция ничего не возвращает напрямую, но внутри себя, при нахождении полного покрытия столешницы копирует текущее частичное решение в переменную best_placement, таким образом обновляя текущее оптимальное решение на протяжении рекурсии.

Тестирование. Демонстрация граничных случаев алгоритма.

Результаты тестирования представлены в табл. 1.

Таблица 1 – Результаты тестирования

№ п/п	Входные данные	Выходные данные	Комментарии
1.	2	4 1 1 1 2 1 1 1 2 1	Верный вывод

		2 2 1	
2.	20	4 1 1 10 11 1 10 1 11 10 11 11 10	Верный вывод
3.	7	9 4 4 4 5 1 3 1 5 3 1 1 2 3 1 2 1 3 2 3 3 1 4 3 1 3 4 1	Верный вывод
4.	9	6 1 1 6 7 1 3 1 7 3 7 4 3 4 7 3 7 7 3	Верный вывод
5	19	13 10 10 10 11 1 9	Верный вывод

		1 11 9 1 1 6 7 1 4 7 5 4 1 7 4 5 7 2 5 9 2 7 9 2 9 9 1 10 9 1 9 10 1	

Исследование. Результаты. Выводы.

Проведено исследование, написан дополнительный файл, который представляет график зависимости времени от размера квадратов (Рис.1)

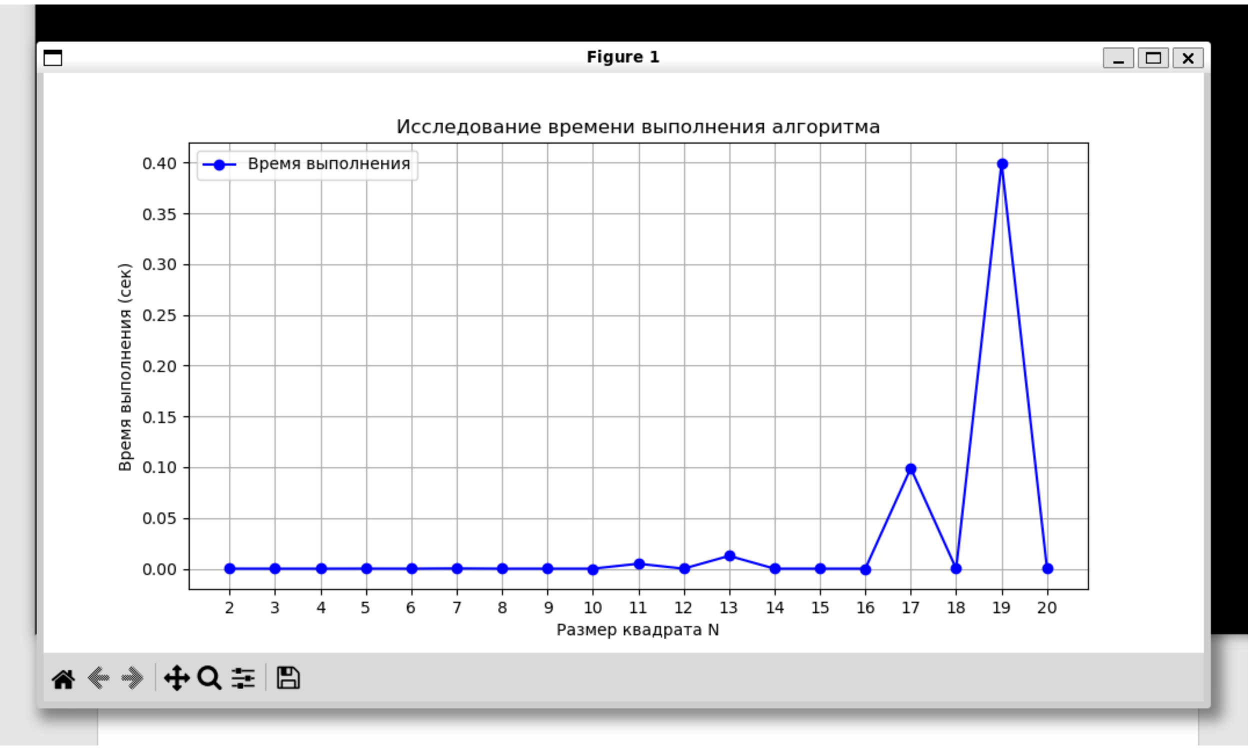


Рис.1

Как видим, случаи, где N кратно 2 или 3 обрабатываются моментально, остальные, простые, числа занимают некоторое время вычислений, но среди них можно наблюдать тенденцию пропорциональности увеличения N и времени выполнения.

Выводы: применение специального разбиения для N кратных 2 или 3 позволяет эффективно обрабатывать многие входные данные. Жадная стратегия выбора размещение в первую очередь наибольших квадратов позволяет уменьшить глубину рекурсии и число перебираемых вариантов. Прерывание рекурсии тоже сокращает число вычислений.

Разработанный программный код см. в приложении А

ПРИЛОЖЕНИЕ А
ИСХОДНЫЙ КОД ПРОГРАММЫ

Название файла: lab1.py

```
def square_splitting(N):
    if N % 2 == 0:
        half = N // 2
        return [
            (1, 1, half),
            (half + 1, 1, half),
            (1, half + 1, half),
            (half + 1, half + 1, half)
        ]
    elif N % 3 == 0:
        third = N // 3
        return [
            (1, 1, 2 * third),
            (2 * third + 1, 1, third),
            (1, 2 * third + 1, third),
            (2 * third + 1, third + 1, third),
            (third + 1, 2 * third + 1, third),
            (2 * third + 1, 2 * third + 1, third)
        ]

    grid = [[0] * N for _ in range(N)]
    best_placement = None

    def find_empty():
        for y in range(N):
            for x in range(N):
                if grid[y][x] == 0:
                    return x, y
        return None

    def can_place(x, y, s):
        if x + s > N or y + s > N:
            return False
        for dy in range(s):
            for dx in range(s):
                if grid[y + dy][x + dx] != 0:
                    return False
        return True

    def place(x, y, s, value):
        for dy in range(s):
            for dx in range(s):
                grid[y + dy][x + dx] = value

    def backtrack(count):

        nonlocal best_placement

        if best_placement is not None and count >= len(best_placement):
            return
```

```
        first_empty_position = find_empty()

        if first_empty_position is None:
            best_placement = current_placement.copy()
            return

        x, y = first_empty_position
        for s in range(min(N - x, N - y), 0, -1):
            if can_place(x, y, s):
                place(x, y, s, 1)
                current_placement.append((x + 1, y + 1, s))
                backtrack(count + 1)
                current_placement.pop()
                place(x, y, s, 0)

    current_placement = []
    a = (N + 1) // 2
    b = N - a
    fixed = [(a, a, a), (N - b + 1, 1, b), (1, N - b + 1, b)]
    for x, y, s in fixed:
        place(x - 1, y - 1, s, 1)

    backtrack(0)
    return fixed + best_placement


if __name__ == "__main__":
    N = int(input())
    result = square_splitting(N)
    print(len(result))
    for square in result:
        print(*square)
```

Файл experiment.py

```
import time
import matplotlib.pyplot as plt
from lab1 import square_splitting

def measure_execution_time():
    sizes = list(range(2, 21))
    times = []

    for N in sizes:
        start_time = time.time()
        square_splitting(N)
        end_time = time.time()
        times.append(end_time - start_time)

    plt.figure(figsize=(10, 5))
    plt.plot(sizes, times, marker='o', linestyle='-', color='b', label='Время выполнения')
    plt.xlabel('Размер квадрата N')
    plt.ylabel('Время выполнения (сек)')
    plt.title('Исследование времени выполнения алгоритма')
    plt.xticks(sizes)
```

```python
    plt.legend()
    plt.grid()
    plt.show()

measure_execution_time()
```