Лабораторная работа №4

Модель гармонических колебаний

Желдакова В. А.

25 февраля 2024

Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

Информация

Докладчик

- Желдакова Виктория Алексеевна
- студентка группы НФИбд-01-21
- Российский университет дружбы народов

Вводная часть

Цель работы

Ознакомиться с понятием гармонического осциллятора. Построить фазовый портрет и решение уравнения гармонического осциллятора с помощью языков OpenModelica и Julia.

Вариант 16

Постройте фазовый портрет гармонического осциллятора и решение уравнения гармонического осциллятора для следующих случаев: 1. Колебания гармонического осциллятора без затуханий и без действий внешней силы $\ddot{x} + 2x = 0$ 2. Колебания гармонического осциллятора с затуханием и без действий внешней силы $\ddot{x} + 3\dot{x} + 3x = 0$ 3. Колебания гармонического осциллятора с затуханием и под действием внешней силы $\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = sin(4t)$

Ход работы

Математическая модель

Движение грузика на пружинке, маятника, заряда в электрическом контуре, а также эволюция во времени многих систем в физике, химии, биологии и других науках при определенных предположениях можно описать одним и тем же дифференциальным уравнением, которое в теории колебаний выступает в качестве основной модели. Эта модель называется линейным гармоническим осциллятором.

Уравнение свободных колебаний гармонического осциллятора имеет следующий вид:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 = 0$$

где x – переменная, описывающая состояние системы (смещение грузика,заряд конденсатора и т.д.), γ – параметр, характеризующий потери энергии (трение в механической системе, сопротивление в контуре), ω_0 - собственная частота колебаний, t – время.

При отсутствии потерь в системе вместо уравнения получаем уравнение консервативного осциллятора энергия колебания которого сохраняется во времени.

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Для однозначной разрешимости уравнения второго порядка необходимо задать два начальных условия вида

$$\begin{cases} x(t_0) = x_0 \\ \dot{x}(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Уравнение второго порядка можно представить в виде системы двух уравнений первого порядка

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\omega_0^2 x \end{cases}$$

Начальные условия для системы примут вид:

$$\begin{cases} x(t_0) = x_0 \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Независимые переменные x, y определяют пространство, в котором «движется» решение. Это фазовое пространство системы, поскольку оно двумерно будем называть его фазовой плоскостью.

Значение фазовых координат x, y в любой момент времени полностью определяет состояние системы. Решению уравнения движения как функции времени отвечает гладкая кривая в фазовой плоскости. Она называется фазовой траекторией. Если множество различных решений (соответствующих различным начальным условиям) изобразить на одной фазовой плоскости, возникает общая картина поведения системы. Такую картину, образованную набором фазовых траекторий, называют фазовым портретом

OpenModelica

В результате работы программы для первого случая получаем следующие графики:

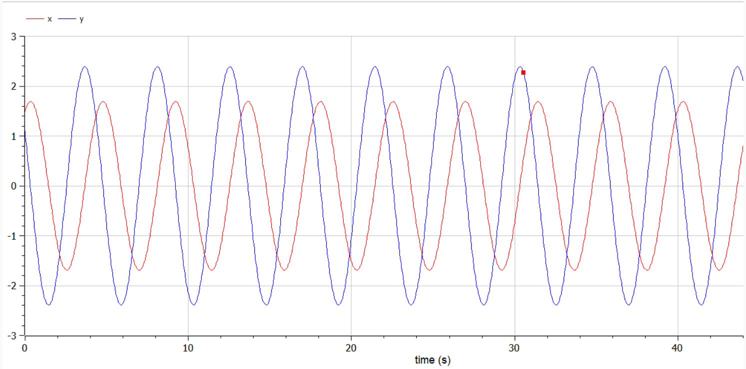


Рис. 1: Решение уравнения гармонического осциллятора

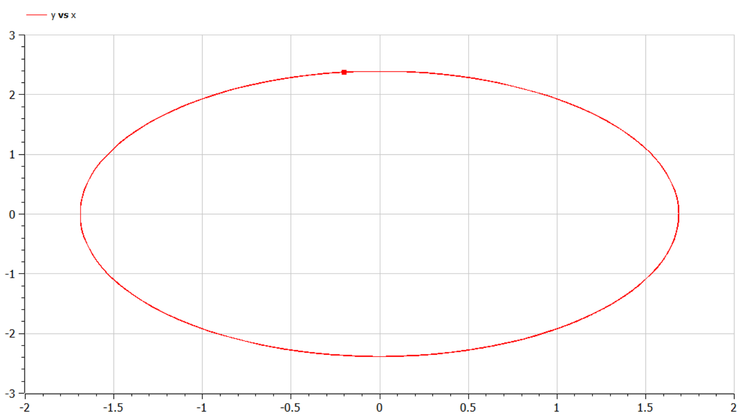


Рис. 2: Фазовый портрет

В результате работы программы для второго случая получаем следующие графики:

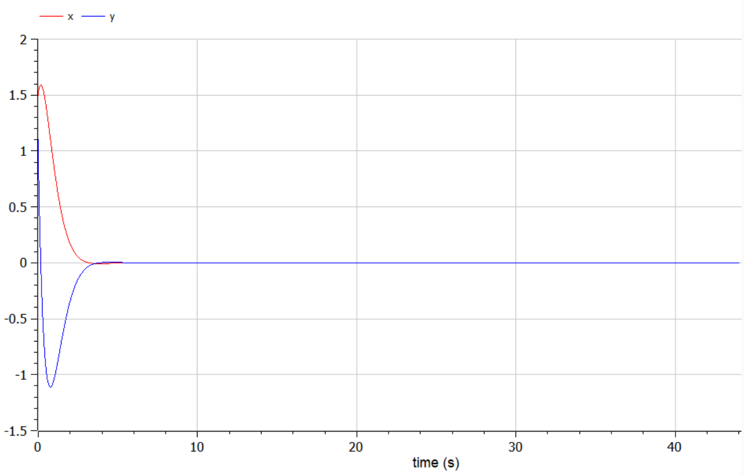


Рис. 3: Решение уравнения гармонического осциллятора

Решение с помощью языков программирования

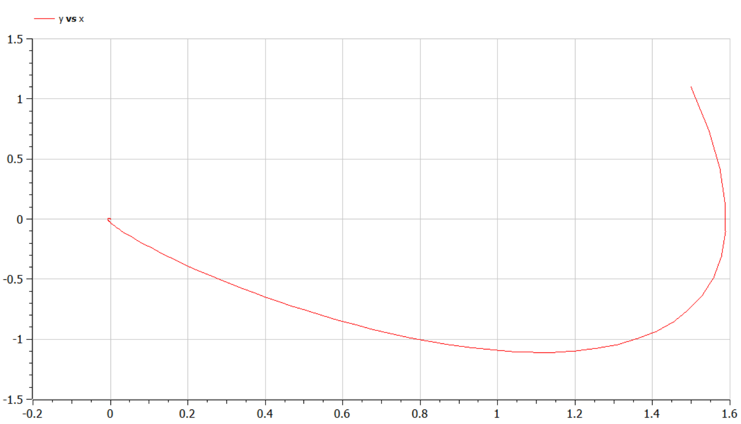


Рис. 4: Фазовый портрет

В результате работы программы для третьего случая получаем следующие графики:

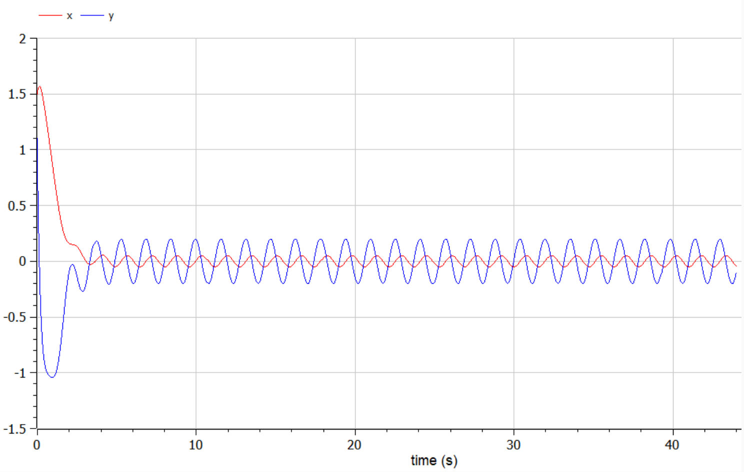


Рис. 5: Решение уравнения гармонического осциллятора

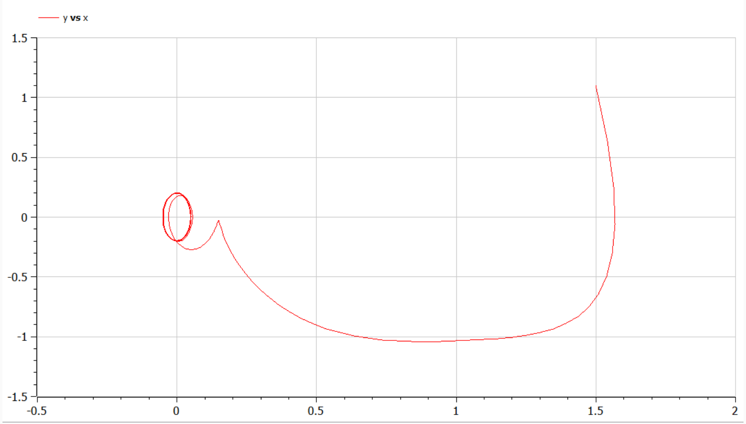


Рис. 6: Фазовый портрет

Julia

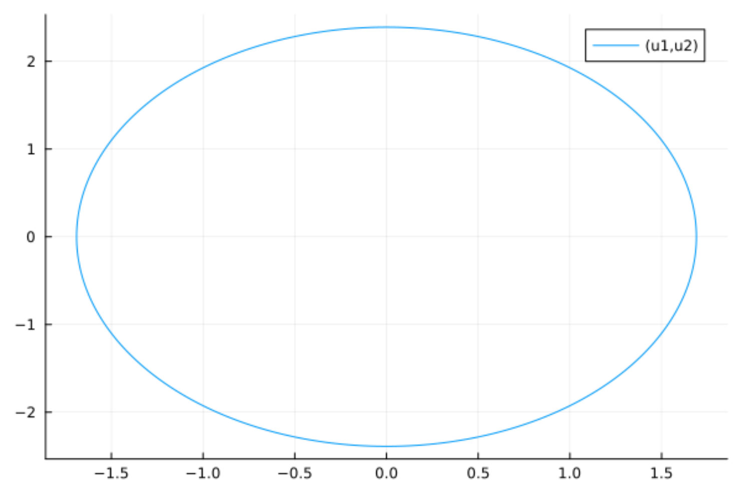
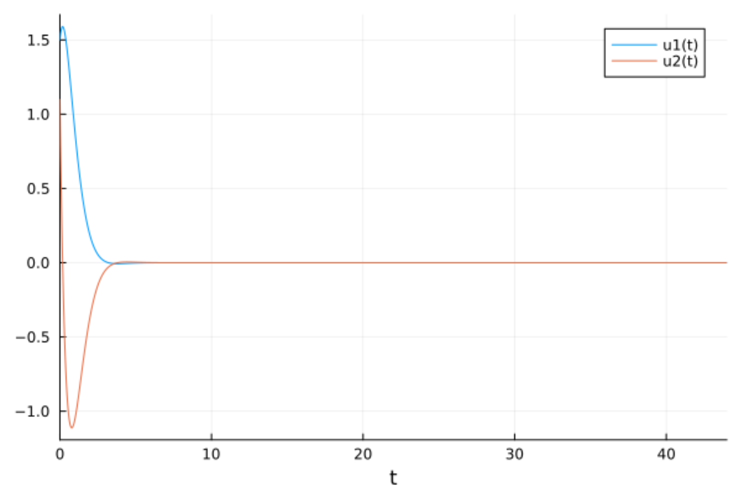


Рис. 8: Фазовый портрет

В результате работы программы для второго случая получаем следующие графики:



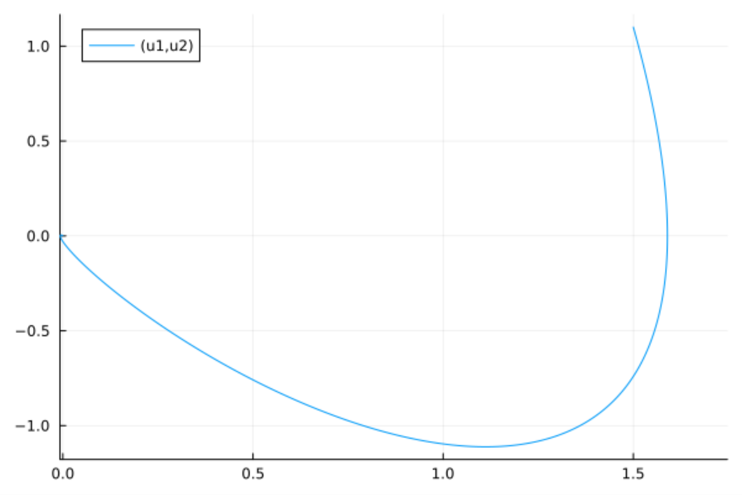
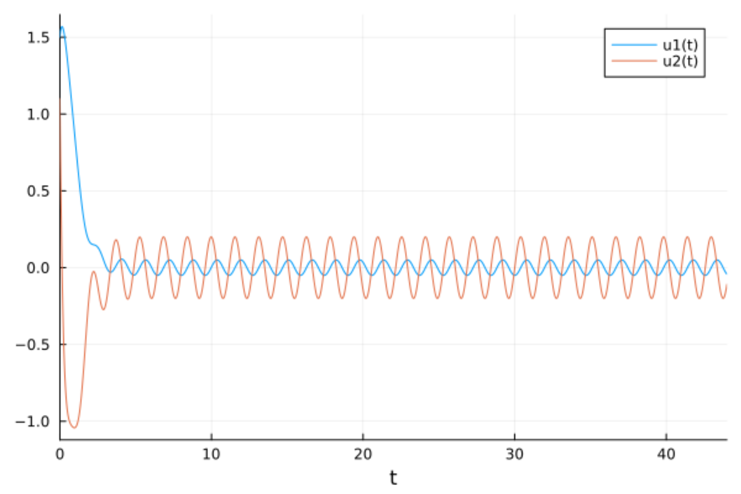


Рис. 10: Фазовый портрет

В результате работы программы для третьего случая получаем следующие графики:



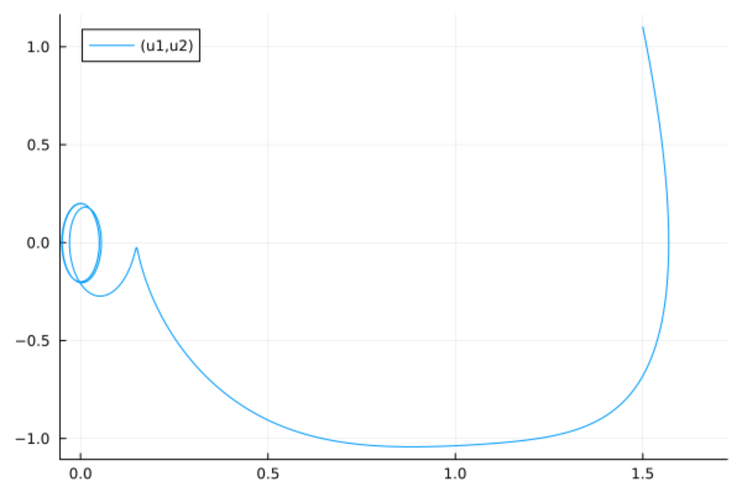


Рис. 12: Фазовый портрет

Графики в OpenModelica получились идентичными с графиками, полученными с помощью Julia.

Выводы

Ознакомились с понятием гармонического осциллятора. Построили фазовый портрет и решение уравнения гармонического осциллятора с помощью языков OpenModelica и Julia.