# Отчёт по лабораторной работе №8

**Модель конкуренции двух фирм**

Желдакова Виктория Алексеевна

# Содержание

# Список иллюстраций

# Список таблиц

# 1 Цель работы

Изучить и построить модель конкуренции двух фирм.

# 2 Задание

## 2.1 Вариант 16

Случай 1. Рассмотрим две фирмы, производящие взаимозаменяемые товары одинакового качества и находящиеся в одной рыночной нише. Считаем, что в рамках нашей модели конкурентная борьба ведётся только рыночными методами. То есть, конкуренты могут влиять на противника путем изменения параметров своего производства: себестоимость, время цикла, но не могут прямо вмешиваться в ситуацию на рынке («назначать» цену или влиять на потребителей каким-либо иным способом.) Будем считать, что постоянные издержки пренебрежимо малы, и в модели учитывать не будем. В этом случае динамика изменения объемов продаж фирмы 1 и фирмы 2 описывается следующей системой уравнений:

$$\frac{dM_1}{d\Theta} = M_1 - \frac{b}{c_1}M_1M_2 - \frac{a1}{c1}M_1^2$$

$$\frac{dM_2}{d\Theta} = \frac{c_2}{c_1}M_2 - \frac{b}{c_1}M_1M_2 - \frac{a_2}{c_1}M_2^2$$

где

$$a_1 = \frac{p_{cr}}{\tau_1^2\widetilde{p}_1^2Nq}$$

$$a_2 = \frac{p_{cr}}{\tau_2^2\widetilde{p}_2^2Nq}$$

$$b = \frac{p_{cr}}{\tau_1^2 \tilde{p}_1^2 \tau_2^2 \tilde{p}_2^2 N q}$$

$$c_1 = \frac{p_{cr} - \tilde{p}_1}{\tau_1 \tilde{p}_1}$$

$$c_2 = \frac{p_{cr} - \tilde{p}_2}{\tau_2 \tilde{p}_2}$$

Также введена нормировка $t = c_1 \theta$

Случай 2. Рассмотрим модель, когда, помимо экономического фактора влияния (изменение себестоимости, производственного цикла, использование кредита и т.п.), используются еще и социально-психологические факторы – формирование общественного предпочтения одного товара другому, не зависимо от их качества и цены. В этом случае взаимодействие двух фирм будет зависеть друг от друга, соответственно коэффициент перед $M_1 M_2$ будет отличаться. Пусть в рамках рассматриваемой модели динамика изменения объемов продаж фирмы 1 и фирмы 2 описывается следующей системой уравнений:

$$\frac{dM_1}{d\Theta} = M_1 - (\frac{b}{c_1} + 0.0007) M_1 M_2 - \frac{a1}{c1} M_1^2$$

$$\frac{dM_2}{d\Theta} = \frac{c_2}{c_1} M_2 - \frac{b}{c_1} M_1 M_2 - \frac{a_2}{c_1} M_2^2$$

Для обоих случаев рассмотрим задачу со следующими начальными условиями и параметрами:

$$M_0^1 = 4.4 \; M_0^2 = 4$$

$$p_{cr} = 10.5 \; N = 28 \; q = 1$$

$$\tau_1 = 16 \; \tau_2 = 25$$

$$\tilde{p}_1 = 7.2 \; \tilde{p}_2 = 5.1$$

1. Постройте графики изменения оборотных средств фирмы 1 и фирмы 2 без учета постоянных издержек и с веденной нормировкой для случая 1.

2. Постройте графики изменения оборотных средств фирмы 1 и фирмы 2 без учета постоянных издержек и с веденной нормировкой для случая 2.

# 3 Выполнение лабораторной работы

## 3.1 Математическая модель

Для построения модели конкуренции хотя бы двух фирм необходимо рассмотреть модель одной фирмы. Вначале рассмотрим модель фирмы, производящей продукт долговременного пользования, когда цена его определяется балансом спроса и предложения. Примем, что этот продукт занимает определенную нишу рынка и конкуренты в ней отсутствуют.

Обозначим:

$N$ – число потребителей производимого продукта.

$S$ – доходы потребителей данного продукта. Считаем, что доходы всех потребителей одинаковы. Это предположение справедливо, если речь идет об одной рыночной нише, т.е. производимый продукт ориентирован на определенный слой населения.

$M$ – оборотные средства предприятия.

$\tau$ – длительность производственного цикла.

$p$ – рыночная цена товара.

$\tilde{p}$ – себестоимость продукта, то есть переменные издержки на производство единицы продукции.

$\delta$ – доля оборотных средств, идущая на покрытие переменных издержек.

$\kappa$ – постоянные издержки, которые не зависят от количества выпускаемой продукции.

$Q(S/p)$ – функция спроса, зависящая от отношения дохода S к цене p. Она равна количеству продукта, потребляемого одним потребителем в единицу времени.

Функцию спроса товаров долговременного использования часто представляют в простейшей форме:

$$Q = q - k\frac{p}{S} = q(1 - \frac{p}{p_{cr}})$$

где $q$ – максимальная потребность одного человека в продукте в единицу времени. Эта функция падает с ростом цены и при $p = p_{cr}$ (критическая стоимость продукта) потребители отказываются от приобретения товара. Величина $pcr = Sq/k$. Параметр $k$ – мера эластичности функции спроса по цене. Таким образом, функция спроса в форме (1) является пороговой (то есть, $Q(S/p) = 0$ при $p \geq pcr$) и обладает свойствами насыщения.

Уравнения динамики оборотных средств можно записать в виде

$$\frac{dM}{dt} = -\frac{M\delta}{\tau} + NQp - k = -\frac{M\delta}{\tau} + Nq(1 - \frac{p}{p_{cr}})p - k$$

Уравнение для рыночной цены $p$ представим в виде

$$\frac{dp}{dt} = \gamma(-\frac{M\delta}{\tau\tilde{p}} + Nq(1 - \frac{p}{p_{cr}}))$$

Первый член соответствует количеству поставляемого на рынок товара (то есть, предложению), а второй член – спросу.

Параметр $\gamma$ зависит от скорости оборота товаров на рынке. Как правило, время торгового оборота существенно меньше времени производственного цикла ⊠. При заданном $M$ уравнение (3) описывает быстрое стремление цены к равновесному значению цены, которое устойчиво.

В этом случае уравнение (3) можно заменить алгебраическим соотношением

$$-\frac{M\delta}{\tau\tilde{p}} + Nq(1 - \frac{p}{p_{cr}}) = 0$$

Из (4) следует, что равновесное значение цены p равно

$$p = p_{cr}(1 - \frac{M\delta}{\tau\tilde{p}Nq})$$

Уравнение (2) с учетом (5) приобретает вид

$$\frac{dM}{dt} = -\frac{M\delta}{\tau}(\frac{p}{p_{cr}} - 1) - M^2(\frac{\delta}{\tau\tilde{p}})^2\frac{p_{cr}}{Nq} - k$$

Уравнение (6) имеет два стационарных решения, соответствующих условию $\frac{dM}{dt} = 0$:

$$\widetilde{M_{1,2}} = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$$

где

$$a = Nq(1 - \frac{\tilde{p}}{p_{cr}}\tilde{p}\frac{\tau}{\delta}), b = kNq\frac{(\tau\tilde{p})^2}{p_{cr}\delta^2}$$

Из (7) следует, что при больших постоянных издержках (в случае $a^2 < 4b$) стационарных состояний нет. Это означает, что в этих условиях фирма не может функционировать стабильно, то есть, терпит банкротство. Однако, как правило, постоянные затраты малы по сравнению с переменными (то есть, $b << a^2$) и играютроль, только в случае, когда оборотные средства малы. При $b << a$ стационарные значения $M$ равны

$$\widetilde{M_+} = Nq\frac{\tau}{\delta}(1 - \frac{\tilde{p}}{p_{cr}})\tilde{p}, \widetilde{M_-} = k\tilde{p}\frac{\tau}{\delta(p_{cr} - \tilde{p})}$$

Первое состояние $\widetilde{M_+}$ устойчиво и соответствует стабильному функционированию предприятия. Второе состояние $\widetilde{M_-}$ неустойчиво, так, что при $M < \widetilde{M_-}$ оборотные средства падают ($\frac{dM}{dt} < 0$), то есть, фирма идет к банкротству. По смыслу $\widetilde{M_-}$ соответствует начальному капиталу, необходимому для входа в рынок.

В обсуждаемой модели параметр $\delta$ всюду входит в сочетании с $\tau$. Это значит, что уменьшение доли оборотных средств, вкладываемых в производство, эквивалентно удлинению производственного цикла. Поэтому мы в дальнейшем положим: $\delta = 1$, а параметр $\tau$ будем считать временем цикла, с учётом сказанного.

## 3.2 Решение с помощью языков программирования

### 3.2.1 OpenModelica

Код программы для первого случая [1]:

```
model lab08_1
Real cr = 10.5;
Real N = 28;
Real q = 1;
Real t1 = 16;
Real t2 = 25;
Real p1 = 7.2;
Real p2 = 5.1;

Real a1 = cr / (t1 * t1 * p1 * p1 * N * q);
Real a2 = cr / (t2 * t2 * p2 * p2 * N * q);
Real b = cr / (t1 * t1 * p1 * p1 * t2 * t2 * p2 * p2 * N * q);
Real c1 = (cr - p1) / (t1*p1);
Real c2 = (cr - p2) / (t2*p2);

Real M1;
Real M2;
initial equation
```

```
M1 = 4.4;
M2 = 4;
equation
der(M1) = M1 - b / c1 * M1 * M2 - a1 / c1 * M1 * M1;
der(M2) = c2 / c1 * M2 - b / c1 * M1 * M2 - a2 / c1 * M2 * M2;
end lab08_1;
```

В результате работы программы получаем следующий график (рис. 3.1).

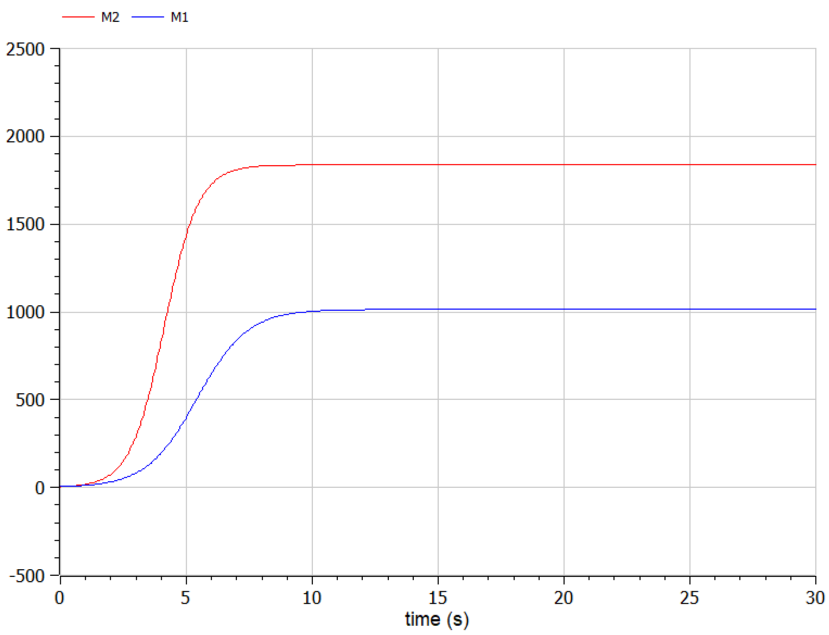


Рис. 3.1: График для первого случая

Код программы для второго случая:

```
model lab08_2
Real cr = 10.5;
Real N = 28;
Real q = 1;
Real t1 = 16;
Real t2 = 25;
Real p1 = 7.2;
```

```
Real p2 = 5.1;

Real a1 = cr / (t1 * t1 * p1 * p1 * N * q);
Real a2 = cr / (t2 * t2 * p2 * p2 * N * q);
Real b = cr / (t1 * t1 * p1 * p1 * t2 * t2 * p2 * p2 * N * q);
Real c1 = (cr - p1) / (t1*p1);
Real c2 = (cr - p2) / (t2*p2);

Real M1;
Real M2;
initial equation
M1 = 4.4;
M2 = 4;
equation
der(M1) = M1 - (b / c1 + 0.0007) * M1 * M2 - a1 / c1 * M1 * M1;
der(M2) = c2 / c1 * M2 - b / c1 * M1 * M2 - a2 / c1 * M2 * M2;
end lab08_2;
```

В результате работы программы получаем следующий график (рис. 3.2).

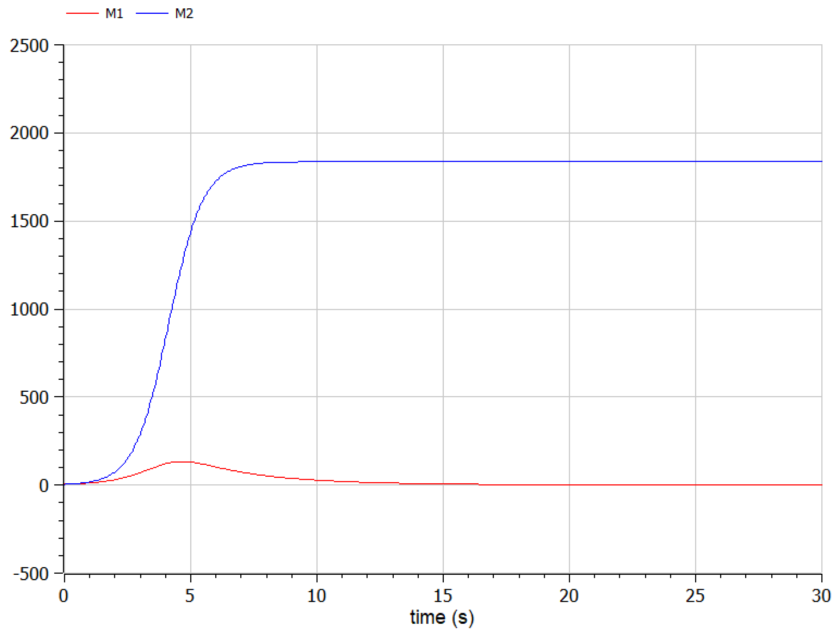


Рис. 3.2: График для второго случая

### 3.2.2 Julia

Код программы для первого случая [2]:

```
using Plots
using DifferentialEquations

cr = 10.5
N = 28
q = 1
t1 = 16
t2 = 25
p1 = 7.2
p2 = 5.1

a1 = cr / (t1 * t1 * p1 * p1 * N * q)
a2 = cr / (t2 * t2 * p2 * p2 * N * q)
```

```
b = cr / (t1 * t1 * p1 * p1 * t2 * t2 * p2 * p2 * N * q)
c1 = (cr - p1) / (t1*p1)
c2 = (cr - p2) / (t2*p2)

function ode_fn(du, u, p, t)
    M1, M2 = u
    du[1] = u[1] - b / c1 * u[1] * u[2] - a1 / c1*u[1] * u[1]
   du[2] = c2 / c1 * u[2] - b / c1 * u[1] * u[2] - a2 / c1 * u[2] * u[2]
end

v0 = [4.4, 4]
tspan = (0.0, 30.0)
prob = ODEProblem(ode_fn, v0, tspan)
sol = solve(prob, dtmax = 0.05)
M1 = [u[1] for u in sol.u]
M2 = [u[2] for u in sol.u]
T = [t for t in sol.t]

plt = plot(dpi = 600, legent = true)

plot!(plt, T, M1, label = "Оборотные средства фирмы #1", color = :green)
plot!(plt, T, M2, label = "Оборотные средства фирмы #2", color = :red)

savefig(plt, "lab08_1.png")
```

В результате работы программы получаем следующий график (рис. 3.3).

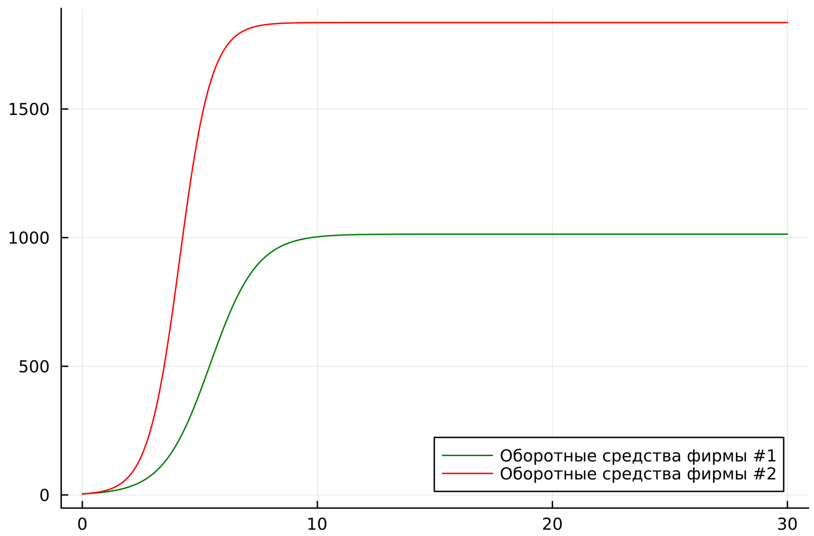


Рис. 3.3: График для первого случая

Код программы для первого случая:

```
using Plots
using DifferentialEquations

cr = 10.5
N = 28
q = 1
t1 = 16
t2 = 25
p1 = 7.2
p2 = 5.1

a1 = cr / (t1 * t1 * p1 * p1 * N * q)
a2 = cr / (t2 * t2 * p2 * p2 * N * q)
b = cr / (t1 * t1 * p1 * p1 * t2 * t2 * p2 * p2 * N * q)
c1 = (cr - p1) / (t1*p1)
c2 = (cr - p2) / (t2*p2)
```

```
function ode_fn(du, u, p, t)
    M1, M2 = u
   du[1] = u[1] - (b / c1 + 0.0007) * u[1] * u[2] - a1 / c1 * u[1] * u[1]
   du[2] = c2 / c1 * u[2] - b / c1 * u[1] * u[2] - a2 / c1 * u[2] * u[2]
end

v0 = [4.4, 4]
tspan = (0.0, 30.0)
prob = ODEProblem(ode_fn, v0, tspan)
sol = solve(prob, dtmax = 0.05)
M1 = [u[1] for u in sol.u]
M2 = [u[2] for u in sol.u]
T = [t for t in sol.t]

plt = plot(dpi = 600, legend = :topright)

plot!(plt, T, M1, label = "Оборотные средства фирмы #1", color = :green)
plot!(plt, T, M2, label = "Оборотные средства фирмы #2", color = :red)

savefig(plt, "lab08_2.png")
```

В результате работы программы получаем следующий график (рис. 3.4).

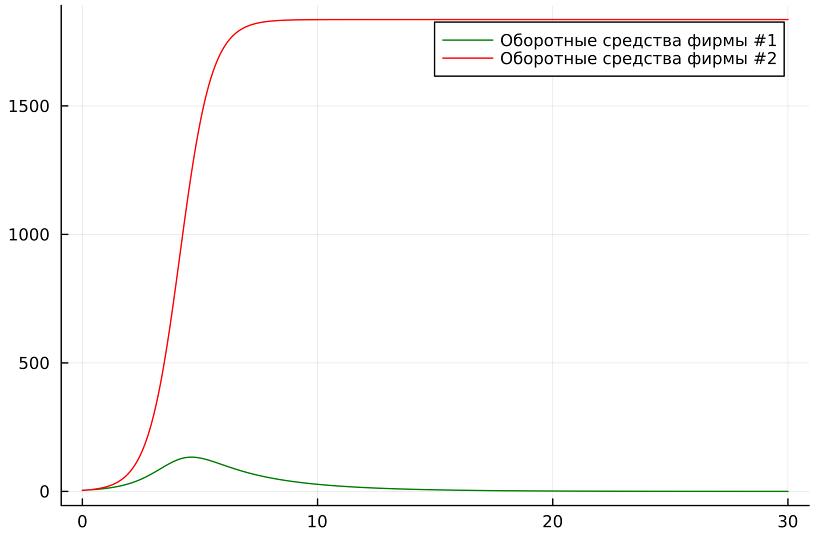


Рис. 3.4: График для второго случая

## 3.3 Анализ

Графики в OpenModelica получились идентичными с графиками, полученными с помощью Julia.

# 4 Выводы

Изучили и построили модель конкуренции двух фирм.

# Список литературы

[1] Документация по OpenModelica: https://openmodelica.org/

[2] Документация по Julia: https://docs.julialang.org/en/v1/