Probabilidade I
Lista de exercícios I

Alunos: Daniel de Queiroz Maurício
Bernardo Monteiro Nicola

Questão 1a) O espaço amostral nesta questão é uma combinação das 52 cartas com 5 possibilidades de escolha, C(52, 5). O cálculo é mais fácil pela complementar do erro, ou seja, (1 - a probabilidade do erro), o erro é a combinação de nenhum Ás do baralho, C(48, 5)

$$1 - \frac{\binom{48}{5}}{\binom{52}{5}} \qquad \frac{48!}{5!\,43!} = 1.712.304$$

$$\frac{52!}{5!\,47!} = 2.598.960$$

$1 - 0,658841998 = 0,341158002$ ou $\cong 0,3412\%$

1b) São 13 as cartas do naipe de ouros, então o que queremos é uma combinação de 13, 5 a 5, ou seja, C(13, 5) e o espaço amostral é a combinação das 52 cartas com 5 tiradas. C(52, 5).

$$P(\text{ouros}) = \frac{\binom{13}{5}}{\binom{52}{5}} = \frac{\frac{13!}{5!\,8!}}{\frac{52!}{5!\,47!}} = \frac{1.287}{2.598.960}$$

P(apenas ouros) = 0,000495148 0792

ou $\cong 0,049\%$

Questão 1c) A probabilidade de tirar apenas cartas do mesmo naipe é o somatório das probabilidades para cada naipe.

$$P(\text{mesmo naipe}) = 4 \cdot \frac{\binom{13}{5}}{\binom{52}{5}}$$

$$4 \cdot 0{,}000495198079\!2 = 0{,}00019807923\!17$$

ou $\cong 0{,}198\%$

Questão 1d) As sequências são 10, sendo 4 naipes ficam 40 sequências possíveis desejadas em um espaço amostral de 52 cartas combinadas de 5 a 5.

Sequências
Ás - 2 - 3 - 4 - 5
2 - 3 - 4 - 5 - 6
⋮
10 - Va - Da - Rei - Ás

$$P(\text{sequências}) = \frac{40}{\binom{52}{5}} = \frac{40}{2.598.960}$$

$P(\text{sequências}) = 0.0000153907\!7169$ ou $\cong 0.001539\%$

Questão 1e) São 10 sequências possíveis como na questão 1d), como não importa o naipe são 4 possibilidades em cada tirada de carta, ou seja, queremos $10 \cdot 4^5$ o que dá em 10.240 sequências válidas, o espaço amostral é a combinação 52 a 5 como na questão. O cálculo fica:

$$P(\text{sequência}) = \frac{10 \cdot 4^5}{\binom{52}{5}} = \frac{10.240}{2.598.960} = 0{,}00394003753$$

ou 0,394%

Questão 1f) Para que a última carta seja um rei, há 4 possibilidades em um espaço de 52 cartas possíveis

$$P(\text{última carta ser rei}) = \frac{4}{52} = 0{,}076923076$$

ou 7,69%

Questão 1 g) Para tirar exatamente 3 damas ou 2 valetes calculamos a probabilidade de tirar 3 damas mais 2 valetes menos a interseção dos 2 eventos. Para as damas combinamos as 4 cartas em 3 a 3 escolhas e multiplicamos pelas 48 cartas complementares 2 a 2, somamos com a probabilidade dos valetes, são 4 cartas combinadas 2 a 2 multiplicado pelas 48 cartas complementares combinadas 3 a 3. A interseção é a combinação 4, 3 a 3 vezes a 4, 2 à 2. Dividimos pelo espaço amostral de 52, 5 a 5 já calculado anteriormente.

$$\binom{4}{3} \cdot \binom{48}{2} = \frac{4!}{3!\,1} \cdot \frac{48!}{2!\,46!} = 4512$$

$$+\binom{4}{2} \cdot \binom{48}{3} = \frac{4!}{2!\,2!} \cdot \frac{48!}{3!\,45!} \quad 6 \times 17.296 = 103.776$$

$$-\binom{4}{3} \cdot \binom{4}{2} = 4 \cdot 6 = 24$$

$$\frac{4512 + 103.776 - 24}{2598\,960} = 0{,}041656662$$

ou $\cong 4{,}16\%$

Questão 3 h) Para calcularmos exatamente 3 valetes e 2 damas usamos a interseção calculada anteriormente e dividimos pelo espaço amostral

$$\frac{\binom{4}{3}\cdot\binom{4}{2}}{\binom{52}{5}} = \frac{4.6}{2598960} = 0{,}0000092344630 16$$

ou $\cong 0{,}0009234\%$

Questão 3 i) Para exatamente 2 reis fazemos a combinação de 4 cartas 2 a 2 e multiplicamos pela complementar de 48 cartas combinadas 3 a 3 e dividimos pelo espaço amostral já conhecido

$$\frac{\binom{4}{2}\cdot\binom{48}{3}}{\binom{52}{5}} = \frac{6.17,296}{2598960} = 0{,}03992 9818$$

ou $\cong 3{,}9929$

Questão 3 j) Para 2 cartas quaisquer do naipe de paus e 3 de espadas combinamos 13 cartas 2 a 2 e multiplicamos pela combinação de 13 cartas 3 a 3 e dividimos pelo espaço amostral conhecido.

$$\frac{\binom{13}{2}\binom{13}{3}}{\binom{52}{5}} \quad \frac{78.286}{2598960} = 0{,}0085834 33373$$

$\cong 0{,}8583\%$

Questão 2) Para um dado honesto todas as faces tem probabilidade igual de ser escolhido. Um dado viciado terá a seguinte probabilidade no caso da face 6 ter 5 vezes a mais de probabilidade de ocorrer

$$p + p + p + p + p + 5p = 1 \text{ ou } 100\%$$

$$10p = 1 \qquad p = 1/10$$

Face	1	2	3	4	5	6
P(cada face)	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,5

Questão 3) Sendo 4 moedas o total de eventos é $2^4 = 16$.
A moeda desonesta tem a probabilidade em 4/5 ou 0.8 para o lado viciado e 1/5 ou 0.2 para o complementar. Cada moeda honesta tem a probabilidade 1/2 para cada lado.

$$p = \begin{cases} 0.8 \cdot (0.5)^3 = 0.1 & \text{moeda viciada} \\ 0.2 \cdot (0.5)^3 = 0.025 & \text{moeda honesta} \end{cases}$$

Jogada	CCCC	CCCK	CCKC	CKCC	CCKK	CKCK	CKKC
$P(X = x)$	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1

CKKK	KCCC	KCKC	KCKK	KKCC	KKCK
0.1	0.025	0.025	0.025	0.025	0.025

KKKC	KKKK	KCCK
0.025	0.025	0.025

Questão 4) O espaço amostral de possibilidades da forma de sentarem nas cadeiras é 6! que dá 720, para mulheres sentadas juntas temos as maneiras

[M M M] H H H H [M M M] H H

H H [M M M] H H H H [M M M]

i)

$$P(\text{mulheres juntas}) = \frac{4! \cdot 3!}{6!} = \frac{1}{5} \text{ ou } 0,2$$

ii) Para sentarem de forma alternada temos

M H M H M H e H M H M H M

2 possibilidades . 3! . 3! = 72 formas

$$P(\text{sentarem de forma alternada}) = \frac{72}{720} = 0,1$$

Questão 5) A área total se dá pela fórmula $\frac{l^2\sqrt{3}}{4}$ então $\Omega = \frac{9\sqrt{3}}{4}$, a área do setor onde o ponto está se mede por $\frac{\theta \cdot \pi \cdot r^2}{360}$, como são 3 fica $\frac{3\pi 60^\circ}{360^\circ} = \frac{\pi}{2}$. A área válida se dá pela diferença da área total menos a área excluída dos vértices.

$$P(X) = \frac{\frac{9\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{2}}{\frac{9\sqrt{3}}{4}} = 1 - \frac{2\pi}{9\sqrt{3}} \qquad 1 - 0,40306652 5$$

$$= 0,59693347 4$$

$$\text{ou} \cong 59,7\%$$

Questão 6) Para que 3 segmentos de reta formem um triângulo, a soma de dois deles tem que ser maior que o terceiro, então:

$a < b + c$ $\qquad L = |AB|$ $\qquad$ L vai de A até B

$b < a + c$

$c < b + a$ $\qquad a = AX \quad , b = XB = L - A$

$c = AM = \frac{L}{2}$

Com isso temos: $\qquad$ logo $\frac{L}{4} < a < \frac{3L}{4}$

1) $a < L - A + \frac{L}{2}$; $a < \frac{3L}{4}$

$P = \frac{\frac{L}{2}}{L} = \frac{1}{2}$ ou $0,5$

2) $L - A < a + \frac{L}{2}$; $a > \frac{L}{4}$

3) $\frac{L}{2} < L - \cancel{A} + \cancel{A}$; $L = a + b$

Questão 7) $P(E) > 0$

$P((A \cup B)|E) = \frac{P((A \cup B) \cap E)}{P(E)}$ $\qquad (A \cup B) \cap E = (A \cap E) \cup (B \cap E)$

A e B são disjuntos, ou seja $A \cap B = \emptyset$, então:

$(A \cap E) \cap (B \cap E) = (A \cap B) \cap E = \emptyset$ $\qquad$ $A \cap E$ e $B \cap E$ também são disjuntos

$P((A \cup B) \cap E) = P(A \cap E) + P(B \cap E)$

$P((A \cup B)|E) = \frac{P(A \cap E)}{P(E)} + \frac{P(B \cap E)}{P(E)} = P(A|E) + P(B|E)$

Questão 8) 49 cartas restantes $\begin{cases} 39 \text{ não ouros} \\ 10 \text{ de ouros} \end{cases}$

Quero 4 cartas, então o espaço amostral é $\binom{49}{4} = 211876$

Para tirar 2 ouros $\binom{10}{2} \cdot \binom{39}{2} = 45 \cdot 741 = 33.345$

Para 3 ouros $\binom{10}{3} \cdot \binom{39}{1} = 120 \cdot 39 = 4680$

Para 4 ouros $\binom{10}{4} = 210$

$P(\text{ao menos duas cartas de ouro}) = \frac{33345 + 4680 + 210}{211876}$

$= 0.180459325$ ou $\cong 18{,}045$

Questão 9 i) $\binom{9}{2} = \frac{9 \cdot 8}{2} = 36$ possibilidades de números

para ser ímpar um dos números deve ser ímpar

$p = \{2, 4, 6, 8\} \quad i = \{1, 3, 5, 7, 9\} \quad 5 \cdot 4 = 20$

$\{(2+1), (2+3), (2+5), (2+7), (2+9)\} = 5$ casos

$\frac{5}{20} = \frac{1}{4} = 25\%$ ou 0.25

ii) $\frac{\text{soma ímpar com } 2}{\text{número tendo } 2} = \frac{5}{8} = 0.625$ ou 62.5%

Questão 10) Escolhemos como exemplo para essa questão o lançamento de duas moedas não viciadas

$\Omega = \{CC, KK, CK, KC\}$ Probabilidades

A: 1ª moeda é cara $p(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ ou 0,5

$A: \{CC, CK\}$

B: 2ª moeda é cara $p(B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ ou 0,5

$B: \{CC, KC\}$

C: 2 lançamentos iguais $p(C) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ ou 0,5

$C: \{CC, KK\}$

$(A,B): A \cap B = \{CC\}$ $p(A \cap B) = \frac{1}{4}$

$p(A) \cdot p(B) = 0,5 \cdot 0,5 = \frac{1}{4}$

$(A,C): A \cap C = \{CC\}$ $p(A \cap C) = \frac{1}{4}$

$p(A) \cdot p(C) = 0,5 \cdot 0,5 = 1/4$

$(B,C): B \cap C = \{CC\}$ $p(B \cap C) = 1/4$

$p(B) \cdot p(C) = 0,5 \cdot 0,5 = 1/4$

$$\left.\begin{array}{l} (A,B,C): A \cap B \cap C = \{CC\} \quad p(A \cap B \cap C) = 1/4 \\ p(A) \cdot p(B) \cdot p(C) = 0,5 \cdot 0,5 \cdot 0,5 = \frac{1}{8} \end{array}\right\} \neq$$

logo são independentes 2 a 2, mas não são coletivamente independentes