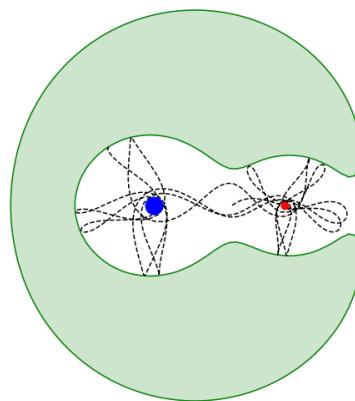


# Mecánica Celeste y Analítica

## Teoría, problemas y algoritmos



**Jorge I. Zuluaga**

Profesor titular de Física y Astronomía

Instituto de Física, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales  
Universidad de Antioquia

30 de octubre de 2019

BORRADOR

# Índice general

<b>1.</b>	<b>Prefacio</b>	<b>11</b>
1.1.	¿Otro libro de mecánica celeste? . . . . .	12
1.2.	Mecánica celeste y mecánica analítica . . . . .	13
1.3.	Mecánica celeste en la era de la información . . . . .	14
1.4.	Mecánica celeste en Python . . . . .	14
1.5.	Mecánica celeste con SPICE . . . . .	16
1.6.	¿Qué hace distinto a este libro?: un decálogo . . . . .	17
<b>2.</b>	<b>Agradecimientos</b>	<b>21</b>
<b>3.</b>	<b>Introducción</b>	<b>23</b>
3.1.	¿Cómo se organiza este libro? . . . . .	23
3.2.	¿Cómo usar este libro? . . . . .	30
3.3.	Mecánica celeste en <i>libretas</i> . . . . .	31
3.3.1.	Instalación de las libretas . . . . .	32
3.4.	Idioma y Notación . . . . .	32
3.4.1.	Extranjerismos y pronunciación . . . . .	32
3.4.2.	Siglos y décadas . . . . .	33
3.4.3.	Notación matemática . . . . .	33
3.5.	Estructura del libro . . . . .	34
3.5.1.	Cajas de texto . . . . .	34
3.5.2.	Algorítmos . . . . .	35
3.6.	Figuras interactivas y animaciones . . . . .	38
<b>4.</b>	<b>Fundamentos</b>	<b>41</b>
4.1.	Vectores y cálculo . . . . .	41
4.1.1.	Conjunto, tuplas y vectores . . . . .	42
4.1.2.	Sistemas de coordenadas . . . . .	48
4.1.3.	Funciones . . . . .	50
4.1.4.	Derivadas . . . . .	52
4.1.5.	Funciones homogéneas . . . . .	54
4.1.6.	Derivada vectorial . . . . .	55
4.1.7.	Integrales . . . . .	57
4.1.8.	Integrales vectoriales . . . . .	58
4.1.9.	Ecuaciones diferenciales . . . . .	60
4.1.10.	Funcionales y cálculo de variaciones . . . . .	66

4.1.11.	Gráficos interactivos . . . . .	73
4.2.	Curvas cónicas . . . . .	73
4.2.1.	Definición geométrica . . . . .	74
4.2.2.	Del nombre al álgebra . . . . .	74
4.2.3.	Directriz de las cónicas . . . . .	77
4.2.4.	Síntesis geométrica . . . . .	80
4.2.5.	Descripción algebraica . . . . .	80
4.2.6.	Ecuación respecto al centro . . . . .	81
4.2.7.	Eje mayor y menor de la elipse . . . . .	82
4.2.8.	Parámetros de la hipérbola . . . . .	83
4.2.9.	Rotación de las cónicas en el plano . . . . .	85
4.2.10.	Ecuación general de las cónicas . . . . .	87
4.2.11.	Gráfico de una cónica rotada en el plano . . . . .	88
4.2.12.	Síntesis algebraica . . . . .	92
4.2.13.	Cónicas en coordenadas cilíndricas . . . . .	93
4.2.14.	Cónicas en el espacio . . . . .	100
4.2.15.	Ángulos de Euler . . . . .	101
4.2.16.	Matrices de rotación generales . . . . .	103
4.2.17.	Gráfico de una cónica rotada en el espacio . . . . .	104
4.2.18.	Elementos orbitales . . . . .	105
<b>5.</b>	<b>Mecánica de partículas</b>	<b>109</b>
5.1.	Cinemática . . . . .	110
5.1.1.	Cantidades cinemáticas . . . . .	110
5.1.2.	Sistemas de referencia . . . . .	112
5.1.3.	La ecuación de movimiento (e.d.m.) . . . . .	113
5.1.4.	Integración de la e.d.m. . . . .	115
5.1.5.	Integración por cuadraturas . . . . .	115
5.1.6.	Integración numérica de la e.d.m. . . . .	118
5.2.	Dinámica . . . . .	124
5.2.1.	Cantidades dinámicas . . . . .	124
5.2.2.	Partículas y fuerzas . . . . .	125
5.2.3.	Sistemas de referencia inerciales . . . . .	127
5.2.4.	Postulado de fuerzas . . . . .	127
5.2.5.	Fuerzas conservativas y no conservativas . . . . .	129
5.2.6.	Energía mecánica . . . . .	131
5.2.7.	¿Ley de inercia? . . . . .	131
5.2.8.	Postulado de acción y reacción . . . . .	132
5.2.9.	Postulado de gravitación universal . . . . .	132
5.2.10.	La fuerza gravitacional de la Tierra, el Sol y la Luna	134
5.2.11.	El campo gravitacional . . . . .	135
5.2.12.	Energía potencial gravitacional . . . . .	136
5.2.13.	Masa y principio de equivalencia . . . . .	137
5.3.	Sistemas de partículas . . . . .	140
5.3.1.	Fuerzas y centro de masa . . . . .	140
5.3.2.	Centro de masa de un sistema de dos partículas . . . . .	146
5.3.3.	Teoremas de conservación . . . . .	147
5.3.4.	Dinámica referida al centro de masa . . . . .	150

<b>6. El Problema de los N cuerpos</b>	<b>155</b>
6.1. Formulación del problema . . . . .	155
6.1.1. Motivación . . . . .	155
6.1.2. Enunciado físico y matemático . . . . .	156
6.2. ¿Solución analítica? . . . . .	159
6.2.1. Aplicación de los teoremas de conservación . . . . .	160
6.2.2. Momento lineal . . . . .	161
6.2.3. Posición del centro de masa . . . . .	162
6.2.4. Momentum angular . . . . .	163
6.2.5. Energía potencial de N cuerpos . . . . .	166
6.2.6. Conservación de la energía . . . . .	170
6.2.7. Caso de estudio: el sistema Tierra-Luna . . . . .	170
6.2.8. Síntesis y teorema de Bruns . . . . .	172
6.3. Energía y virial . . . . .	174
6.3.1. Momento de inercia . . . . .	175
6.3.2. El virial . . . . .	175
6.3.3. Identidad de Lagrange-Jacobi . . . . .	176
6.3.4. Teorema del virial . . . . .	177
6.3.5. Caso de estudio: el virial del Sistema Solar . . . . .	178
6.3.6. Caso de estudio: la masa de cúmulos de galaxias . . . . .	181
6.4. Solución numérica . . . . .	184
6.4.1. Unidades canónicas . . . . .	184
6.4.2. Las ecuaciones de movimiento reducidas . . . . .	188
6.4.3. Algoritmo de solución . . . . .	190
6.4.4. Figuras interactivas . . . . .	197
6.4.5. Constantes de movimiento y teorema del virial . . . . .	198
6.4.6. Una algoritmo general . . . . .	201
<b>7. El Problema de los dos cuerpos</b>	<b>205</b>
7.1. Motivación . . . . .	205
7.2. El problema relativo de dos cuerpos . . . . .	209
7.3. Constantes de movimiento . . . . .	211
7.3.1. Momento angular específico relativo . . . . .	211
7.3.2. Energía específica relativa . . . . .	214
7.3.3. El vector de excentricidad . . . . .	215
7.4. La ecuación de la trayectoria . . . . .	216
7.5. La velocidad relativa . . . . .	218
7.6. Teoremas del movimiento orbital . . . . .	219
<b>Bibliografía</b>	<b>223</b>

BORRADOR

# Índice de figuras

1.1.	Imagen procesada de Ultima Thule, el objeto transneptuniano sobrevolado por la sonda New Horizons en 2019 (crédito: NASA/- Johns Hopkins University Applied Physics Laboratory/Southwest Research Institute/Roman Tkachenko.) . . . . .	11
1.2.	Figura correspondiente al código 1.1. . . . .	16
3.1.	Retrato de Johanes Kepler, copia de un original de 1610 de pintor desconocido y que se conserva en el monasterio Benedictino de Kremsmünster . . . . .	36
3.2.	Figura correspondiente al código 3.3. . . . .	38
3.3.	Gráfico de las funciones trigonométricas básicas, en el intervalo de interés (gráfico generado). . . . .	39
4.1.	Definición geométrica de vector espacial y de sus operaciones básicas (suma, resta y multiplicación por un escalar). Aunque la resta de $\vec{A} - \vec{B}$ es un caso particular de la suma, es importante aquí familiarizarse con la dirección que tiene este vector (va de la cabeza del sustraendo $\vec{B}$ a la del minuendo $\vec{A}$ ). . . . .	43
4.2.	Definción de los sistemas de coordenadas usadas en este texto . . . . .	48
4.3.	Figura correspondiente al código 4.3. Solución aproximada de la ecuación diferencial $d^2F/dt^2 = -kF$ con $k=1.5$ . . . . .	65
4.4.	El área bajo una curva es un funcional, en tanto depende de la función que represente la curva, $f(t)$ o $f_0(t)$ Se conoce como una variación $\delta f$ a la diferencia entre dos funciones cercanas, parametrizada a través de un número real $\epsilon$ y una función plantilla (panel inferior.) En términos de variaciones el valor de cualquier función vecina a una función de referencia $f_0$ se puede calcular, en un intervalo de interés, como $f(t) = f_0(t) + \epsilon\eta(t)$ . . . . .	67
4.5.	Figura correspondiente al código 4.5. La curva continua indica una aproximación numérica al camino más corto entre los puntos $(0, 0)$ y $(0, \pi)$ del plano euclíadiano, encontrada al minimizar el funcional longitud de arco y usando como función de prueba $f_0 = (t/\pi)^n$ (línea punteada) y como función plantilla $\epsilon(t) = \sin t$ . El valor de $\epsilon$ que corresponde a la solución se muestra en la etiqueta. Para comparación se muestra (línea rayada) la solución exacta, que corresponde a una línea recta. . . . .	73
4.6.	Definición geométrica original de las <i>curvas cónicas</i> . . . . .	74

4.7.	Definición con <i>áreas aplicadas de las curvas cónicas y el origen de sus nombres</i> . . . . .	75
4.8.	Figura correspondiente al código 4.6. . . . .	77
4.9.	Definición de las cónicas usando la recta directriz y el foco. . . . .	78
4.10.	Parámetros geométricos de la elipse referidos al apside O, el foco F y el centro C: <i>a</i> semieje mayor, <i>b</i> semieje menor, <i>p semilatus rectum</i> , <i>e</i> excentricidad, <i>c</i> distancia foco-centro. . . . .	82
4.11.	Parámetros geométricos de la hipérbola referidos al apside O, el foco F y el vértice C: <i>a</i> distancia al vértice (llamado con frecuencia también semieje mayor aunque en la hipérbola no hay tal), <i>β</i> pendiente de la hipérbola, <i>p semilatus rectum</i> , <i>e</i> excentricidad, <i>ψ</i> angulo de semiapertura. . . . .	84
4.12.	Figura correspondiente al código 4.8. . . . .	90
4.13.	Figura correspondiente al código 4.10. . . . .	91
4.14.	Derivación de la ecuación de la cónica en coordenadas cilíndricas referidas al Foco. En la figura el ángulo <i>f</i> es la <i>anomalía verdadera</i> . .	94
4.15.	Figura correspondiente al código 4.12. . . . .	95
4.16.	Figura correspondiente al código 4.14. . . . .	98
4.17.	Definición de la anomalía excéntrica <i>E</i> y el método asociada a ella para determinar la posición de los puntos sobre una elipse. . . . .	99
4.18.	Anomalía verdadera <i>f</i> como función de la anomalía excéntrica <i>E</i> para una elipse. La línea punteada corresponde a la aproximación $f \approx \sqrt{(1+e)/(1-e)}E$ . . . . .	99
4.19.	Anomalía excéntrica <i>F</i> como función de la anomalía verdadera <i>f</i> para una hipérbola. La línea punteada corresponde a la aproximación $F \approx \sqrt{(e-1)/(e+1)}f$ . . . . .	100
4.20.	Secuencia de rotaciones que permiten pasar del sistema natural de ejes de la cónica $x - y - z$ a un sistema con una orientación arbitraria $x''' - y''' - z'''$ . . . . .	101
4.21.	Figura correspondiente al código 4.17. . . . .	106
4.22.	Figura correspondiente al código 4.18. . . . .	108
5.1.	Figura correspondiente al código 5.2. La figura muestra la solución numérica a la e.d.m. de un sistema sometido a un tirón constante $\vec{j} = j_0 \hat{e}_x$ . . . . .	121
5.2.	Figura correspondiente al código 5.3. Comparación de la solución numérica (puntos) y la solución analítica (línea continua) de la e.d.m. de un sistema con tirón constante $j_0 = 0,5$ . . . . .	122
5.3.	Figura correspondiente al código 5.4. Solución numérica de la e.d.m. de un sistema dinámico con aceleracion $\vec{a} : (-2,5x, 0, 0)$ . .	124
5.4.	Dos formas del postulado de acción y reacción: a la izquierda el postulado débil, en el que las fuerzas son iguales y de sentido contrario, pero no son paralelas a la línea que une las partículas; a la derecha el postulado fuerte en el que la acción y reacción actúan sobre la línea que une a las partículas. . . . .	133
5.5.	Definición de los vectores de posición, vector relativo y vector de fuerza en el postulado de gravitación universal. . . . .	134

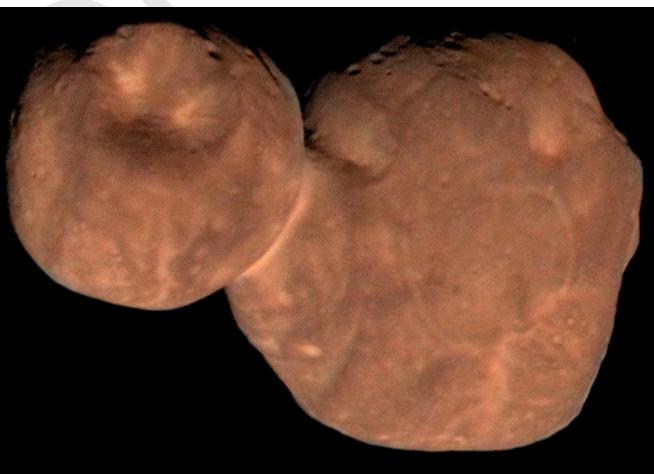
5.6.	El único retrato disponible de Simon Stevin (ca. 1548). Crédito: Colección Universidad de Leiden. . . . .	139
5.7.	Figura correspondiente al código 5.7. Un sistema de tres partícu- las. El tamaño del círculo que representa cada partícula es propor- cional a su masa. La cruz y la flecha adherida a ella muestran la posición y velocidad del centro de masa. . . . .	145
5.8.	Relación entre la posición del centro de masa $\vec{R}$ , el vector relativo $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ y la posición de las partículas en un sistema de dos cuerpos. . . . .	146
5.9.	Primera página de la obra cumbre de Kepler <i>Astronomía Nova</i> . . . . .	147
6.1.	El problema de los N cuerpos: dadas las condiciones iniciales de un conjunto de N partículas puntuales, predecir la posición y ve- locidad de las partículas en cualquier instante futuro. . . . .	157
6.2.	Fotografía de Henri Poincaré hacia el año 1886, unos años antes de realizar su trabajo histórico sobre el problema de los tres cuerpos (Foto: Eugène Pirou) . . . . .	160
6.3.	Ilustración gráfica de la orientación del plano invariable de La- place. El plano invariable esta definido en el sistema de referencia inercial del centro de masa y se mueve con él con velocidad $V_{CM}$ y tiene una orientación dada por el momento angular total $\vec{L}'$ de las partículas respecto del centro de masa. . . . .	164
6.4.	Figura correspondiente al código 6.4. . . . .	181
6.5.	Mosaico en falso color del cúmulo de Galaxias de Coma que com- bina imágenes en luz visible e infrarrojo. Crédito: NASA / JPL- Caltech / L. Jenkins (GSFC). . . . .	181
6.6.	Sistema de tres cuerpos de ejemplo (todas las cantidades están expresadas en unidades canónicas) . . . . .	191
6.7.	Figura correspondiente al código 6.8. Posiciones y velocidades de las partículas en el sistema de ejemplo, en el tiempo inicial y en $t = 1$ (en unidades canónicas). . . . .	194
6.8.	Figura correspondiente al código 6.11. Posiciones y velocidades de las partículas en el sistema de ejemplo, entre el tiempo inicial $t_0 = 0$ y $t = 5$ (en unidades canónicas). . . . .	196
6.9.	Figura correspondiente al código 6.13. . . . .	197
6.10.	Figura correspondiente al código 6.15. . . . .	199
6.11.	Figura correspondiente al código 6.17. . . . .	204
7.1.	Figura correspondiente al código 7.1. . . . .	207
7.2.	Figura correspondiente al código 7.2. . . . .	208
7.3.	Tipos de sistemas jerarquicos de N cuerpos. . . . .	209
7.4.	Configuración del problema de los dos cuerpos. . . . .	210

- 7.5. El problema de los dos cuerpos puede reducirse al movimiento de su vector relativo  $\vec{r}$ , un vector libre sin un origen definido. Por simplicidad podemos suponer la existencia un punto imaginario  $\mathcal{O}$  alrededor del cual la punta del vector se mueve. La constancia de  $\vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \vec{h}$  en el problema relativo de los dos cuerpos implica que el movimiento del sistema (trayectoria rayada) se realiza sobre un plano: aquel definido por el vector  $\vec{h}$ . Adicionalmente (panel inferior) la magnitud de este vector se puede relacionar con la razón de cambio del área barrida por el vector relativo (superficie coloreada en el panel inferior.) . . . . . 212
- 7.6. Trayectorias del vector relativo (arriba) y de las partículas individuales (abajo). Las trayectorias tienen todas la misma excentricidad. El foco de la trayectoria del vector relativo es un punto arbitrario en el espacio  $\mathcal{O}$ , mientras que el foco de las trayectorias de las partículas es el centro de masa (CMD). El vector relativo se muestra en dos posiciones: en el apoapsis (flecha rayada) y en un punto cualquiera de la trayectoria (flecha continua.) Nótese que la anomalía verdadera  $f$  es igual en las tres trayectorias. . . . . 218

# Capítulo 1

# Prefacio

En el mismo año en el que escribo estas palabras, celebramos el centenario de la histórica observación de un eclipse total de Sol, liderada por *Sir Arthur Eddington* y que permitió la primera confirmación experimental de las predicciones de la teoría general de la relatividad. Hace tan solo unos meses, una nave espacial, la sonda **New Horizons**, sobrevoló el cuerpo astronómico más remoto fotografiado por nuestra especie, el objeto transneptuniano **2014 (MU69) “Ultima Thule”**; la misma sonda, cinco años antes, había pasado “rozando” la superficie de Plutón, enviándonos imágenes inesperadas de un mundo sorprendente. Muy lejos de allí, y también en el año en el que escribo este prefacio, dos naves espaciales, una japonesa, la sonda **Hayabusa 2** y la otra estadounidense, **OSIRIS-REx**, transmitieron imágenes impactantes desde la superficie de dos pequeños asteroides, cuerpos que visitaron con el objeto de traer muestras a la Tierra.



**Figura 1.1:** Imagen procesada de Ultima Thule, el objeto transneptuniano sobrevolado por la sonda New Horizons en 2019 (crédito: NASA/Johns Hopkins University Applied Physics Laboratory/Southwest Research Institute/Roman Tkachenko.)

Todas estas hazañas de exploración y conocimiento fueron posibles gracias a la **Mecánica Celeste**. Esta disciplina científica, combinación asombrosa de astronomía, física y matemáticas, comenzó con el trabajo teórico pionero de *Johannes Kepler* a principios de los 1600; se estableció con la obra cumbre de *Sir Isaac Newton*, los *Principios Matemáticos de la Filosofía Natural* [19], publicada a finales de los 1600; y alcanzó su apogeo entre los 1700 y los 1800 con los trabajos de matemáticos y astrónomos como *Edmund Halley*, *Leonhard Euler*, *Pierre-Simon Laplace*, *Joseph-Louis Lagrange*, *William Rowan Hamilton* y *Henri Poincaré* (entre muchos otros que mencionaremos en este libro).

Este libro presenta una visión panorámica de la mecánica celeste y en general de la **mecánica analítica** o **mecánica clásica**, que se desarrolló de forma paralela a la primera, inspirada, en muchos casos, por sus problemas. El texto está dirigido especialmente a quiénes, por su formación o trabajo, están interesados en la aplicación de la mecánica celeste en astronomía o en ingeniería aeroespacial. Su extensión, énfasis y nivel de profundidad lo hace especialmente adecuado para estudiantes de pregrado (licenciatura o bachillerato, dependiendo del país) de cualquier programa científico o técnico, especialmente astronomía, física o ingeniería aeroespacial. Su enfoque computacional, lo podría hacer, además, útil como material de referencia para profesionales de estas disciplinas.

## 1.1. ¿Otro libro de mecánica celeste?

Al escribir este libro, no pretendo hacer un compendio exhaustivo de la Mecánica Celeste, que, durante más de 400 años de historia se ha convertido en una disciplina científica basta y en constante desarrollo.

Muchos textos en la materia han sido escritos desde los tiempos de Newton, la mayoría en las últimas décadas. Algunos presentan detallados y rigurosos desarrollos matemáticos. Otros están orientados específicamente al Sistema Solar o al movimiento de satélites y vehículos espaciales. Muchos más son buenos libros de texto, la mayoría dirigidos a estudiantes de posgrado (la mecánica celeste es considerada una línea de profundización, tanto en física como en astronomía.) También se han escrito algunos libros divulgativos y al alcance de aficionados.

La bibliografía de este libro recoge una lista de importantes referencias en la materia, que serán citados a lo largo de sus capítulos, y que, de antemano, invito a los lectores a explorar con curiosidad para no quedarse con la punta de el inmenso *iceberg* que apenas alcanzará a asomarse en estas páginas.

Siendo este el caso ¿para qué escribir un libro más de mecánica celeste? Existen dos razones fundamentales que me motivaron a emprender esta aventura.

La primera es que, como mencione antes, la mayoría de los libros de mecánica celeste están dirigidos a estudiantes con una formación media o avanzada en matemáticas, mecánica newtoniana y mecánica analítica. Como se acostumbra decir, tienen un nivel de posgrado. En contraste, el número de textos al “alcance” de estudiantes de los primeros años universitarios, no es muy grande. Escribo este libro para contribuir a enriquecer precisamente ese “nicho”.

Podría argumentarse que la mecánica celeste, como aplicación específica de la mecánica, es un tema especializado y de allí que sus textos estén dirigidos a estudiantes más avanzados. Sin embargo, la importancia de esta disciplina en la historia de la astronomía y de la física, así como su potencial para describir fenómenos

fascinantes, desde el movimiento de planetas y naves espaciales, hasta la colisión de agujeros negros, hace de la mecánica celeste un medio educativo excelente para introducir conceptos teóricos en física y astronomía, que, sin un contexto y motivación apropiado, son difíciles de digerir.

Un buen libro de mecánica celeste o mecánica analítica, sin importar su nivel, debería poder ser estudiado por cualquier estudiante, incluso de pregrado. Esa ha sido la premisa en muchos centros académicos. Pero la realidad es más compleja. Como cualquier profesor sensible sabe, para valorar realmente los logros intelectuales del pasado, entender las motivaciones que llevaron a los padres de una disciplina a introducir hipótesis o formular las leyes de la misma, se necesita experiencia académica. Experiencia que la mayoría de los estudiantes de pregrado no tienen. No es solo un problema de nivel matemático, es también un problema de falta de exposición a la materia.

Este libro, pretende ser un buen *primer* libro de mecánica celeste y mecánica analítica. Un primer escalón para abordar, ya con experiencia, libros más avanzados.

## 1.2. Mecánica celeste y mecánica analítica

La segunda razón, y la original para mi como profesor del pregrado de Astronomía en la Universidad de Antioquia, fue la necesidad de escribir un texto de mecánica celeste que permitiera además una formación en los principios y métodos de la mecánica analítica (mecánica teórica o mecánica clásica). Esos principios y métodos son instrumentales en la formulación de la mecánica cuántica y lo son además en versiones modernas de otras áreas de la física clásica, como la relatividad o la electrodinámica. La mecánica analítica es indispensable entonces en la formación de cualquier estudiante de ciencias físicas.

En la inmensa mayoría de los textos clásicos de mecánica celeste, los resultados se derivan usando, casi exclusivamente, los métodos de lo que llamaremos aquí el **formalismo vectorial o geométrico de la mecánica**. En este formalismo (originalmente introducido por Newton y desarrollado posteriormente por Euler) las fuerzas juegan el papel central en la descripción de la dinámica (*dime cuánto te halan y te diré cómo te mueves.*)

Desde los trabajos pioneros de matemáticos y “físicos” de los 1700 y 1800, tales como *Alambert*, *Lagrange*, *Hamilton* y *Jacobi*, se hizo evidente que algunos problemas complejos de mecánica celeste podían abordarse usando un **formalismo analítico de la mecánica**. En este formalismo, los sistemas se describen usando *funcionales* tales como el *Lagrangiano* o el *Hamiltoniano*, que contienen toda la información relevante del sistema, sus restricciones y simetrías (*dime cuál es tu hamiltoniano y no solo te diré para dónde vas sino también cómo eres.*)

Un caso ilustrativo, muy popular y reciente, de como el formalismo analítico de la mecánica es aplicado hoy, de forma generalizada, en mecánica celeste, es la “predicción” de un nuevo planeta en el Sistema Solar, más allá del cinturón de Kuiper, cuya existencia, a la fecha, no se ha confirmado, ni rechazado [7]. Este trabajo también es la punta de un inmenso “iceberg” de literatura científica en mecánica celeste en la que el formalismo analítico es protagonista.

Más allá entonces de la necesidad práctica de juntar a la mecánica celeste y a la mecánica analítica en un mismo texto, de modo que sirva a estudiantes de pro-

gramas académicos como astronomía o ingeniería aeroespacial, este libro presenta este particular “matrimonio” entre dos disciplinas clásicas de la astronomía y la física como lo que es: una relación estrecha entre dos cuerpos de conocimiento inseparables.

### 1.3. Mecánica celeste en la era de la información

Un ingrediente adicional hace a este libro diferente. Me refiero al enfasis especial que daremos a los algoritmos de la mecánica celeste a través de todo el libro.

Es un hecho reconocido que la complejidad de muchos problemas de mecánica celeste, en particular aquellos con un interés práctico tales como el diseño de trayectorias de vehículos espaciales, la predicción de la posición precisa de asteroides y cometas que pueden amenazar nuestro planeta o la predicción a largo plazo de la posición de los cuerpos del sistema solar y otros sistemas planetarios, ha exigido, casi desde los tiempos de Kepler, el desarrollo y aplicación de métodos numéricos y, más recientemente, su implementación en calculadores y computadores.

En este sentido, la relación de la mecánica celeste con *algoritmos* de toda clase, no es comparable con la relación, principalmente utilitaria, que tienen la mayoría de las áreas de la física con la computación. Podría decirse, que hoy, es casi impensable saber de mecánica celeste, sin estar familiarizado también con sus algoritmos.

Pensando en esto, todo el contenido del libro ha sido elaborado usando *libretas* o *notebooks* del Proyecto Jupyter<sup>1</sup>. Estas libretas pueden ser obtenidas y usadas por el lector para interactuar con y modificar los algoritmos. Este medio tecnológico permite además aprovechar gráficos interactivos y animaciones (disponibles en la versión electrónica del texto) para entender mejor conceptos que pueden ser difíciles.

En la versión impresa, los algoritmos se presentarán en cajas especiales de texto como esta:

```
import math
e=0.3
M=0.5
E=M
Eo=2*M
while abs(E-Eo)>0.01:
    Eo=E
    E=M+e*math.sin(E)
```

¿Puede el lector adivinar qué hace este algoritmo? ¿sabe en qué lenguaje de programación está escrito?

### 1.4. Mecánica celeste en Python

Es casi imposible escribir un libro con algoritmos sin comprometerse con un lenguaje de programación específico (especialmente si queremos que los algoritmos funcionen.) En el caso de esta edición del libro, el lenguaje elegido es Python.

<sup>1</sup><https://jupyter.org>

Esta siempre será una apuesta arriesgada. Aunque la mecánica celeste y sus algoritmos no pasarán de “moda”, los lenguajes de programación van y vienen. Es un hecho (poco reconocido) que cientos de libros científicos acumulan polvo por haber comprometido su contenido con lenguajes de programación que hoy no son tan populares (BASIC o Pascal por ejemplo)

No sabemos si Python y este libro sufrirán la misma suerte. Pero hay tres hechos que *sugieren* que la popularidad de este lenguaje podría durar más de lo esperado (o al menos esa es mi esperanza).

El primero es que su sintaxis es muy similar a la del “lenguaje natural”. Consideré, por ejemplo, el algoritmo presentado antes (que ya lo sabe, está escrito en Python) o el siguiente algoritmo, aún más simple:

```
from math import pi
for n in range(1,5):
    print("pi a la",n,"es",pi**n)
```

```
pi a la 1 es 3.141592653589793
pi a la 2 es 9.869604401089358
pi a la 3 es 31.006276680299816
pi a la 4 es 97.40909103400242
```

Es difícil que estos algoritmos se escriban de manera tan natural en casi cualquier otro lenguaje de programación popular en ciencia (C, FORTRAN o Java.) Este hecho, no solo facilita el aprendizaje del lenguaje, sino también la legibilidad de los algoritmos.

El segundo hecho que demuestra el promisorio futuro de Python como lenguaje de la computación científica, es la creciente cantidad paquetes, en todas las disciplinas de la ciencia y la técnica, que se escriben permanentemente en este lenguaje y que están disponibles en [repositorios públicos](#)<sup>2</sup>. Además, herramientas informáticas muy conocidas (bibliotecas de rutinas, bases de datos, sistemas de información, etc.) escritas originalmente en otros lenguajes, han sido ahora traducidas a Python (*pythonizadas* si quieren) con el único propósito de que puedan ser usadas por la creciente comunidad de desarrolladores en este lenguaje.

Python se está convirtiendo, y esta es una conjectura mía, en depositario de décadas de experiencia en ciencia computacional. ¿Cambiará esta tendencia pronto? Lo dudo (o al menos así lo espero, por el bien de este libro).

Una última razón, pero no por ello, menos importante, para elegir Python como el idioma oficial de los algoritmos en este libro, es la existencia de una biblioteca gráfica, robusta y bien documentada, escrita para este lenguaje. Me refiero por supuesto a [matplotlib](#)<sup>3</sup>. Y es que, con la excepción de paquetes científicos que incluyen avanzadas facilidades de graficación, tales como Mathematica, Matlab, o IDL (todos ellos sujetos a un pago), la mayoría de los lenguajes de programación dependen, a veces, de complejas bibliotecas gráficas o programas de terceros para hacer, hasta los más sencillos gráficos.

En Python, hacer un gráfico elemental, es tan simple como escribir:

<sup>2</sup><https://pypi.org/project/IPy>

<sup>3</sup><https://matplotlib.org>

(Algoritmo 1.1)

```
from matplotlib.pyplot import plot
plot([1,2,3,4],[1,4,9,16]);
```

ver Figura 1.2

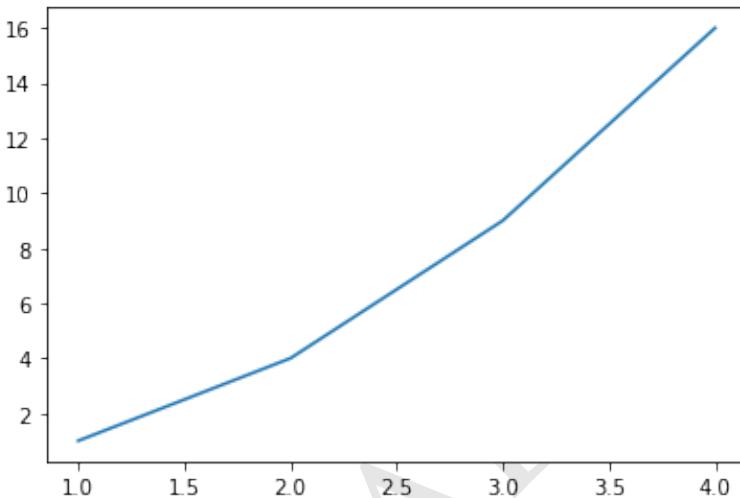


Figura 1.2: Figura correspondiente al código 1.1.

## 1.5. Mecánica celeste con SPICE

Con el temor de haberlos aburrido ya suficiente con este largo prefacio, no puedo dejar de mencionar aquí, una última herramienta que será protagonista en este libro. Se trata de SPICE, una aplicación desarrollado para la *NASA's Navigation and Ancillary Information Facility (NAIF)*<sup>4</sup>.

SPICE es un sistema de información de uso libre, formado basicamente por una biblioteca de rutinas para realizar cálculos en mecánica celeste y de datos (*kernels*) que permiten, usando esas mismas rutinas, la determinación de la posición y orientación precisa (pasada y futura) de muchos cuerpos del Sistema Solar y de algunos vehículos espaciales lanzados al espacio por nuestra especie.

Esta herramienta ha cobrado, en años recientes, una popularidad significativa en la comunidad académica. Sus rutinas y *kernels* están detrás de algunas de los servicios en línea más populares de NASA, tales como el sistema *NASA Horizons*<sup>5</sup>, que permite, a través de distintas interfaces, calcular la posición pasada y futura de cuerpos del sistema solar y naves espaciales; o del simulador *NASA's Eyes*<sup>6</sup> que ofrece vistas en tiempo real de la posición de los cuerpos del sistema solar y de misiones espaciales de la agencia espacial estadounidense.

<sup>4</sup><https://naif.jpl.nasa.gov/naif/>

<sup>5</sup><https://ssd.jpl.nasa.gov/horizons.cgi>

<sup>6</sup><https://eyes.nasa.gov/>

En este libro usaremos las rutinas y *kernels* de SPICE (a través de la biblioteca [spiceypy](#)<sup>7</sup>, desarrollada en Python) para ilustrar conceptos, desarrollar ejemplos y resolver problemas que, de otro modo, implicarían un gran esfuerzo algorítmico (el objetivo será no *reinventar la rueda redonda*.)

Al hacerlo, además, el lector, sin importar su nivel, se familiarizará con una herramienta que usan astrónomos e ingenieros aeroespaciales para resolver problemas reales de mecánica celeste. ¡De la teoría a la acción!

Como nos preguntamos en el caso de Python, ¿podría SPICE desaparecer o, mejor, ser reemplazada por un sistema diferente en los próximos años? No podemos asegurarlo, pero la cantidad de herramientas que hoy dependen de este sistema de información, hace difícil suponer que podría cambiar radicalmente en el futuro inmediato.

Un último aspecto hace de SPICE una opción muy estable para los propósitos de un libro de texto. La biblioteca de rutinas asociada con el sistema está disponible para un amplio conjunto de lenguajes de programación diferentes a Python. Familiarizarse con las rutinas y *kernels* de SPICE aquí, será suficiente para que pueda usarlo con lenguajes como C/C++, FORTRAN e IDL.

A continuación, y a modo de ilustración, presento un algoritmo, escrito con SPICE, para calcular la distancia de la Tierra al Sol durante el eclipse total de Sol del 29 de mayo de 1919 en el que se obtuvieron las primeras evidencias empíricas de la relatividad general y con el que abrimos este prefacio. Naturalmente, este algoritmo es mucho más complejo (y menos natural) que los que escribí antes, pero ilustra el poder de esta herramienta para obtener resultados interesantes con muy poco esfuerzo computacional.

```
import spiceypy as spy
spy.furnsh('pymcel/data/naif0012.tls')
spy.furnsh('pymcel/data/de430.bsp')
et=spy.str2et("05/29/1919 09:08:00 UTC-3")
sol,tluz=spy.spkgeo(10,et,"ECLIPJ2000",0)
tierra,tluz=spy.spkgeo(399,et,"ECLIPJ2000",0)
distancia=spy.vnorm(tierra-sol)
```

Distancia Tierra-Sol durante el eclipse de 1919: 151649284 km

## 1.6. ¿Qué hace distinto a este libro?: un decálogo

Para resumir, enumero a continuación las 10 cosas que hacen de este un libro distinto de los muchos que se han escrito en casi 400 años de historia de la mecánica celeste. Este decálogo, como la mayor parte de este prefacio, es, además de una descripción abreviada de las características únicas del libro, una lista de razones que justifican la existencia de un libro más en el “basto océano” de literatura en la materia.

1. ¿Ya les mencione que es un libro para estudiantes de pregrado? Para entender su contenido no es necesario haber visto previamente un curso de mecánica analítica o matemáticas especiales. Solo se necesita una fundamentación mínima en geometría, cálculo y física.

<sup>7</sup><https://spiceypy.readthedocs.io/en/master>

2. El libro ha sido escrito, en la medida de las posibilidades, para ser autocontenido. Todo lo que un lector necesita saber de los fundamentos matemáticos (geometría, cálculo vectorial, ecuaciones diferenciales), los fundamentos físicos (mecánica newtoniana), astronómicos o de computación, ha sido incluido en los capítulos o en apéndices. Esto hace del libro, un texto que puede ser leído o estudiado por personas ajenas a la disciplina, incluso por aficionados.
3. El libro utiliza, como la mayoría de los textos en el área, el *formalismo geométrico y vectorial* de la mecánica para presentar y desarrollar los problemas centrales de la mecánica celeste. Pero también introduce el *formalismo analítico* (mecánica analítica o mecánica clásica) y lo aplica a la mecánica celeste. Es por tanto un libro de mecánica celeste y al mismo tiempo uno de mecánica analítica.
4. El libro no profundiza en todos los temas de la mecánica celeste o la mecánica analítica como lo hacen textos más avanzados. Pero, para un estudiante de pregrado, esta podría ser su primera lectura antes de abordar esos textos.
5. El texto hace un énfasis especial en los algoritmos de la mecánica celeste, que implementa usando códigos en Python, gráficas en matplotlib y, en ocasiones, las rutinas y datos del sistema SPICE de NASA.
6. Todo el libro está disponible como *notebooks* de Jupyter que pueden ser modificados por el lector o ejecutados durante una clase (¡es un libro para enseñar!) Los *notebooks* contienen gráficos interactivos y animaciones que ilustran conceptos que pueden resultar difíciles.
7. El libro no requiere conocimientos previos de programación en Python (aunque tenerlos puede ser muy útil.) En realidad, el libro podría utilizarse como una manera de aprender el lenguaje en contexto, algo que es difícil de conseguir en libros dedicados específicamente a la enseñanza de la programación.
8. Los temas no se desarrollan en el orden en el que aparecieron en la historia: problema de los dos cuerpos → teoría de perturbaciones → problema de los tres cuerpos → mecánica celeste relativística, etc. He preferido presentarlos como me hubiera gustado conocerlos desde el principio, siguiendo un orden más lógico y un poco atemporal. Esta es la manera en la que, creo, un viajero en el tiempo, que retrocediera a 1700, se lo explicaría a un sorprendido Newton.
9. A pesar de lo anterior, la historia es importante en el libro. A través de los capítulos y en recuadros especiales he incluido anécdotas y biografías que permitirán hacerse a una idea del contexto en el que surgieron las principales ideas de la mecánica celeste y la mecánica analítica y los personajes que las concibieron.
10. He incluido tópicos modernos, escasamente cubiertos por otros textos en el área a este nivel, tales como una fundamentación elemental en relatividad, útil para realizar cálculos postnewtonianos en mecánica celeste, que hoy, en la era de los viajes espaciales y las observaciones ultra precisas, han cobrado mucha relevancia.

**Jorge I. Zuluaga**  
Medellín, Diciembre 31 de 2019

BORRADOR

BORRADOR

## Capítulo 2

# Agradecimientos

Así como no hay *vacas esféricas en el vacío*, tampoco existen los *autores cilíndricos en el vacío*. La elaboración de este libro ha sido determinada y afectada por una multitud de factores y personas a los que no puedo dejar de mencionar.

En primer lugar, quiero agradecer a todos **los estudiantes del pregrado de astronomía** que tomaron el curso de Mecánica Celeste durante los años en los que elaboré las notas que sirvieron de base para este libro. Agradezco su paciencia y sus preguntas en clase que me ayudaron a enriquecer el texto, concentrarme en puntos difíciles y escoger mejor los temas más interesantes. También fue de gran valor los errores que me ayudaron a detectar en las primeras versiones de los *notebooks*. Entre ellos, quiero resaltar a **Andrés Gómez**, quien fue mas lejos aún al revisar detalladamente el contenido de algunos *notebooks* y criticarlos como lo haría un colega o un editor. Adicionalmente, sus impecables soluciones de los problemas inspiraron una parte del material que he incluido en esta edición del libro.

### Agradecimiento a Andrés Pérez.

Una buena parte de la primera versión de las notas del curso fue **escrita y transcrita a LaTeX** por el hoy Astrónomo **Bayron Portilla** (en ese entonces mi tallerista del curso). En un momento dado, nos propusimos, incluso, escribir juntos el libro. Sin embargo, nuestras ocupaciones fueron dilatando el proyecto hasta que decidí re escribir todo el material usando solamente *notebooks* de Jupyter. El resultado fue esta edición del libro. Aún así, reconozco y agradezco el esfuerzo que hizo en esas primeras notas, en las que además exploramos las mejores maneras de organizar los temas del curso. Tal vez en el futuro retome con Bayron algunas de esas notas iniciales con miras a un texto avanzado en la materia donde podamos, por ejemplo, abordar los tópicos que se quedaron por fuera de este libro.

Estoy también en deuda con **Miguel Vásquez**, el mejor de los talleristas que he tenido en mi carrera como profesor (ahora es un Astrónomo). Miguel realizó una juiciosa tarea de búsqueda de problemas, transcripción de los mismos al formato de Jupyter y, más importante, preparación en el mismo formato de su solución. Todo, mientras mantenía una estrecha relación con los estudiantes (mucho mejor que la mía como profesor, debo admitir) que le permitió entender sus necesidades, evaluar y ajustar el grado de dificultad de los problemas y recoger correcciones y

sugerencias a las notas. **Muchos problemas** incluídos en este libro se basan en el trabajo original de Miguel al que debo hacer un sentido reconocimiento aquí.

Agradezco también a los maestros que me motivaron a estudiar física teórica durante el pregrado y el posgrado, muy a pesar de mi monocromática pasión por la astronomía. Esto me permitió entender, apreciar y abordar mejor los aspectos teóricos de la mecánica celeste. En particular, mis agradecimientos van para los profesores **Lorenzo de la Torre, Alonso Sepúlveda, Jorge Mahecha, William Ponce y Boris Rodríguez**. A través de sus propios manuscritos, conocí (y espero haber aprendido con el ejemplo) el “arte” de escribir libros de texto. El estilo, profundidad y cuidado de sus **notas de clase, libros publicados e inéditos**, han sido imitados sistemáticamente en este libro.

Agradezco a la **Universidad de Antioquia** y en particular a las autoridades del **Instituto de Física** y la **Facultad de Ciencias Exactas y Naturales**, por otorgarme el beneficio de un año sabático, durante el cuál pude, entre otras cosas maravillosas, escribir la primera versión completa de este libro. Mi reconocimiento y agradecimiento además para los **profesores del pregrado de Astronomía** que recibieron mi carga académica y de investigación durante ese año en el que estuve escribiendo.

Finalmente, pero no menos importante, quiero agradecer a mi familia, **Olga y Sofía**. A ellas les toco la peor parte, es decir, soportarme un año entero en la casa, escribiendo en pijamas (o mejor hablando solo, por yo no escribo sino que hablo con el computador) y prestándoles, a veces, menos atención de la que les presto incluso en situaciones normales. Este libro esta dedicado a ellas.

# Capítulo 3

## Introducción

### 3.1. ¿Cómo se organiza este libro?

Como mencionamos en la [Sección 1.6](#), una de las cosas hace a este libro diferente de otros textos de mecánica celeste, es la manera y el orden particular en el que se desarrollan los temas. El libro esta dividido en tres grandes partes:

- Los fundamentos matemáticos y físicos.
- Mecánica celeste usando vectores y geometría (formalismo vectorial de la mecánica).
- Mecánica analítica (formalismo lagrangiano y hamiltoniano) y su aplicación en mecánica celeste (clásica y postnewtoniana).

En los siguiente párrafos encontrarán una síntesis *narrada* del libro; algo así como una *tabla de contenido comentada* que le permitirá al lector, no solo orientarse en el texto, sino también entender la manera como se encadenan cada una de sus partes.

Y es que todo libro debería contar una *historia*. En los textos académicos, lamentablemente, esa “vocación” narrativa parece perderse en medio de figuras, teoremas y algoritmos. Esta sección puede ser entonces entendida, como un esfuerzo para esbozar la *historia* que se hila a través de sus capítulos.

- **Parte 1 ([Capítulo 4](#)): Fundamentos.** Antes de comenzar, respasaremos algunos temas de matemáticas y física necesarios para estudiar mecánica celeste. Si bien el lector debería estar familiarizado con la mayoría de estos temas, hemos decidio incluir este capítulo no solo para hacer al texto autocontenido, sino también con el propósito de compilar resultados útiles, definiciones y algoritmos, en el formato y notación del texto, que se usarán en capítulos posteriores.

- **???: Fundamentos de geometría analítica.** En este capítulo nos concentraremos en repasar (o presentar) las propiedades de las figuras cónicas, su definición y descripción geométrica más general, así como su descripción algebraica.

Las figuras cónicas juegan un papel central en la mecánica celeste y estar familiarizado con ellas, permitirá resolver más fácilmente problemas físicos relativamente complejos.

Estudiaremos las cónicas, tanto en el plano, como en el espacio de tres dimensiones. Con este propósito, introduciremos aquí el tema de las rotaciones en dos y tres dimensiones (ángulos de Euler) que son usados con frecuencia en la mecánica celeste.

- **??: Fundamentos de mecánica.** Como hizo Newton en los *Principia*, antes de resolver el problema del “movimiento planetario”, es necesario definir las cantidades físicas básicas, formular los principios fundamentales y obtener las leyes y teoremas que permiten entender el movimiento de los cuerpos en cualquier contexto (no solo en un contexto gravitacional).

Este capítulo es una breve síntesis de un texto de mecánica newtoniana. Tiene elementos distintivos: hace una presentación moderna de la teoría (con definiciones y leyes que se diferencian un poco de la formulación histórica, muy común en los textos universitarios); hace énfasis en una formulación basada en el cálculo vectorial y en distintos sistemas de coordenadas; introduce algoritmos para la solución numérica de las ecuaciones de movimiento de sistemas dinámicos (algoritmos que serán muy importantes en el resto del libro); y presenta una síntesis de algunos resultados importantes de la cinemática y dinámica en sistemas de referencia rotantes (que son de interés en el estudio del *problema circular restringido de los tres cuerpos*.)

- **??: Fundamentos de relatividad.** Como lo mencionamos en el prefacio, otro elemento que hace diferente a este libro, es la introducción de algunos tópicos modernos que han estado normalmente ausentes de los textos de mecánica celeste, al menos para el nivel al que esta dirigido. Para llegar a ese punto es necesario, sin embargo, presentar una fundamentación básica de la teoría de la relatividad (especial y general).

La síntesis presentada aquí es bastante breve y tiene dos propósitos prácticos: 1) introducir el concepto de métrica del espacio-tiempo y sus consecuencias para la cinemática; nos concentraremos específicamente en las métricas de Minkowski y de Schwarzschild. Y 2) a partir de las métricas, derivar resultados sobre las diferencias en los intervalos de tiempo medido por observadores inerciales y otros en campos gravitacionales. Ambos temas serán la base para presentar algunos resultados de *mecánica celeste postnewtoniana* en capítulos posteriores.

- **??: Fundamentos de astronomía.** Muchos de los ejemplos y problemas en el curso se refieren a sistemas físicos reales, dentro y afuera del Sistema Solar. La mecánica celeste, como área de la astronomía, se desarrolló para predecir, justamente, la posición en el cielo de los planetas o determinar la trayectoria de cometas y otros cuerpos errantes.

En este capítulo repasaremos algunos conceptos de Astronomía que serán de utilidad en el resto del texto: la organización general del Sistema Solar, algunos elementos de nomenclatura astronómica, la medida del tiempo y los sistemas de referencia usados para especificar la posición

tanto en el cielo como en el espacio de tres dimensiones, de cuerpo astronómicos o vehículos espaciales.

- **Parte 2: El formalismo vectorial de la mecánica.** Como veremos a lo largo del libro, la mecánica puede ser presentada usando dos enfoques matemáticas o *formalismos* diferentes. En esta parte del curso nos concentraremos en la formulación geométrica o vectorial de la mecánica celeste, la más popular y la que uso originalmente Newton en sus *Principia* y que fue desarrollada posteriormente por Euler.

- **Capítulo 6: El problema de Los N Cuerpos.** A diferencia de la mayoría de los textos en esta área, en este libro comenzamos por el más general de los problemas de la mecánica celeste: el problema de los N cuerpos. En este problema, el reto consiste en predecir la posición y velocidad de muchos cuerpos que interactúan gravitacionalmente. Si bien el problema de los N cuerpos fue el último en ser formulado y abordado rigurosamente en la historia, su presentación temprana en este libro, permitirá introducir resultados y métodos que serán de utilidad para el resto del texto.

De particular interés será la introducción en este capítulo de los algoritmos para resolver numéricamente el problema. Estos algoritmos y algunas herramientas computacionales relacionadas, serán muy importante en el resto del texto, para comparar y validar resultados de los modelos analíticos. Se presentará también aquí el concepto de integrales de movimiento o *cuadraturas*, uno de los métodos usados clásicamente para extraer información sobre un sistema dinámico sin resolverlo completamente. El método de las cuadraturas será central en lo que queda del texto.

- **?: El problema de los dos cuerpos.** Una de las idealizaciones más conocidas de la mecánica celeste consiste en suponer que cuando dos cuerpos astronómicos interactúan gravitacionalmente, el efecto del resto del Universo es completamente despreciable. Naturalmente, no existe ningún sistema astronómico real que cumpla cabalmente estas condición. Todos los sistemas del universo, en sentido estricto, son sistemas de N cuerpos.

En este capítulo mostraremos, a través de experimentos numéricos y ejemplos astronómicos reales, que la mayoría de los sistemas astronómicos se pueden analizar dinámicamente como *sistemas de N cuerpos jerárquicos*, es decir, sistemas en los que las partículas se agrupan por pares (pares de partículas, pares de pares, etc.) que se perturban mutuamente.

El problema de los dos cuerpos no es, sin embargo, el destino final de la mecánica celeste, sino su punto de partida. Es un resultado útil para estudiar sistemas mucho más complejos. Resolveremos en este capítulo el problema de los dos cuerpos usando el método de las cuadraturas (primeras integrales de movimiento) introducido en el capítulo anterior. Demostraremos que el movimiento relativo de dos cuerpos se realiza sobre una cónica y desarrollaremos en detalle las relaciones entre

las propiedades geométricas de esa cónica y las propiedades dinámicas del sistema. Resolveremos también, usando métodos geométricos primero y después métodos del cálculo, el denominado problema de los dos cuerpos en el tiempo, que conducirá a la famosa ecuación de Kepler.

- ??: **Aplicaciones del problema de los dos cuerpos.** Antes de abordar sistemas más complejos, nos ocuparemos en este capítulo de estudiar a fondo algunas aplicaciones de interés para la astronomía o la ingeniería aeroespacial, de los resultados del capítulo anterior: la descripción de la trayectoria de cuerpos astronómicos y vehículos espaciales usando elementos orbitales instantáneos (osculatrices); la transformación entre el denominado *vector de estado* y los elementos orbitales y viceversa; la determinación de las órbitas, usando información de la posición y el movimiento de un cuerpo.

Usaremos estos resultados para hacer predicciones, de primer orden, de la posición de algunos cuerpos astronómicos reales. Estudiaremos también los fundamentos de la teoría de perturbaciones, en la que no profundizaremos, sin embargo (este es un tema que se deja para libros más avanzados).

Nos aprovecharemos, además, de las capacidades del sistema de información SPICE de NASA para predecir la posición precisa de cuerpos astronómicos reales y para calcular con ellas efemérides astronómicas (condiciones de eclipses, ocultaciones, fases de la Luna y los planetas, etc.)

En síntesis, este será el más astronómico de todos los capítulos del texto.

- ??: **El problema de los tres cuerpos.** A pesar del poder que la teoría desarrollada en el capítulo anterior tiene para describir el movimiento de muchos sistemas astronómicos, existen situaciones que escapan a una descripción *kepleriana* del movimiento orbital (incluso, una que incluye perturbaciones). El caso de la Luna, el de algunos cometas perturbados por Júpiter y vehículos espaciales modernos, son especialmente significativos.

En este capítulo abordaremos, inicialmente, el problema general de los tres cuerpos, es decir, aquel en el que la dinámica no es jerárquica. A diferencia del problema de los dos cuerpos, no se conoce una solución general en términos de funciones analíticas o de series al problema de los tres cuerpos (aunque se sabe que existe una.)

Una versión restringida de este problema, a saber el *problema circular restringido de tres cuerpos* (CRTBP por su sigla en inglés), tiene propiedades teóricas que han resultado de interés en la descripción de sistemas astronómicos reales. Estudiaremos aquí en detalle el CRTBP, su descripción dinámica y cinemática, tanto en sistemas inerciales como no inerciales. Introduciremos algoritmos para la solución numérica del problema en el sistema rotante. Encontraremos su constante de movimiento, la *constante de Jacobi* y una aproximación astronómica en términos de elementos orbitales, el *parámetro de Tisserand*. Deduciremos las propiedades y visualizaremos las denominadas *regiones de exclusión* y *curvas de cero velocidad*.

*ciudad* (conceptos interesantes que permiten, si no predecir dónde estarán los cuerpos, al menos, donde no estarán). Finalmente se deducirán las propiedades de los *puntos de equilibrio de Lagrange* y algunas aplicaciones astronómicas y en mecánica orbital del problema.

■ **Parte 3: El formalismo analítico de la mecánica.** En esta parte del libro, introduciremos el *formalismo analítico de la mecánica* y su aplicación en la solución a la mecánica celeste. El formalismo analítico tiene una importancia central en la física que trasciende la mecánica celeste (se usa por ejemplo para estudiar la dinámica de cuerpos rígidos y sistemas oscilantes, el caos en sistemas dinámicos, la mecánica relativista, el electromagnetismo, la teoría de campos clásica y la mecánica cuántica.) Si bien ninguna aplicación del formalismo distinta a la mecánica celeste, se desarrollara en este texto (como si sucede en algunos textos avanzados de mecánica clásica) los fundamentos teóricos presentados en esta parte le permitirán al lector abordar el estudio de esas otras disciplinas.

- ??: **El formalismo lagrangiano.** En este capítulo se introducen los principios y teoremas centrales del formalismo analítico de la mecánica, en particular los principios de Alambert-Lagrange y de Hamilton. Haremos aquí, un especial énfasis en las motivaciones teóricas que llevaron a matemáticos y físicos de los 1700 a introducir este formalismo (un tema en el que los textos más avanzados de mecánica clásica, apenas si consideran.)

Se introducirá aquí la función lagrangiana, las ecuaciones de Lagrange y, a través de la aplicación del cálculo variacional (del que se hará una introducción breve y práctica), se deducirán las ecuaciones generales de Euler-Lagrange (que tienen una aplicación amplia en muchas áreas de la física).

Muchos de los ejemplos usados para ilustrar el formalismo Lagrangiano serán, como se usa en la mayoría de los textos avanzados de mecánica clásica, sistemas mecánicos simples (péndulos, bloques en movimiento, esferas y cilindros que ruedan, etc.) Sin embargo, a diferencia de esos textos, no profundizaremos demasiado en sistemas de este tipo (el interés central aquí son los problemas gravitacionales.) Este hecho, sin embargo, no compromete el rigor o la extensión en la que el formalismo lagrangiano será presentado y desarrollado aquí.

Como un elemento novedoso se presentarán en este capítulo algunos algoritmos aplicados al formalismo lagrangiano, y en particular a la comprensión mejor del principio de Hamilton y los métodos del cálculo variacional.

- ??: **Aplicaciones del formalismo lagrangiano.** Con los elementos básicos del formalismo lagrangiano a la mano, procederemos a aplicarlo en la solución de problemas concretos en mecánica celeste. Para ello presentaremos, primero, resultados importantes sobre la relación entre las simetrías de la función lagrangiana y las cantidades conservadas en el movimiento (teorema de Noether). A partir de allí, procederemos de

forma similar a como lo hicimos con el formalismo vectorial, a resolver el problema general de los  $N$  cuerpos y el de los dos cuerpos.

Deduciremos el lagrangiano de los  $N$  cuerpos y de sus simetrías obtendremos las cantidades conservadas en el sistema. Pero ¿de qué sirve deducir los mismos resultados que ya habíamos visto en el capítulo correspondiente de la segunda parte? Usaremos lo que sabemos de mecánica celeste para ilustrar el poder del formalismo lagrangiano frente al formalismo vectorial.

Posteriormente, abordaremos el problema de los dos cuerpos usando el formalismo lagrangiano. En este caso, a diferencia del problema de los  $N$  cuerpos, tendremos una novedad. En lugar de restringirnos al caso de la gravitación Newtoniana, estudiaremos aquí el problema más general de sistemas de dos cuerpos sometidos a fuerzas centrales con un potencial generalizado. Los resultados obtenidos aquí, tendrán un rango más amplio de aplicación. Podrán por ejemplo usarse para estudiar la física de sólidos, moléculas y átomos, pero también la mecánica celeste postnewtoniana.

Estudiaremos, en este contexto, el problema de fuerzas centrales reducido a una dimensión, el potencial efectivo (y las correspondientes zonas de exclusión). Para el caso del potencial newtoniano deduciremos la denominada ecuación de la forma orbital y resolveremos el problema de los dos cuerpos a partir de ella. Para el caso de un potencial general, pero no muy distinto del potencial Newtoniano, estudiaremos el denominado *avance del perihelio* como una introducción al capítulo siguiente.

- ??: **El problema de los dos cuerpos postnewtoniano.** Con los elementos desarrollados en el capítulo anterior, estaremos en posición de abordar la solución general a una versión restringida del problema de los dos cuerpos en el contexto de la relatividad general (la denominada *aproximación postnewtoniana*).

Para ello partiremos de la métrica de Schwarzschild y las ecuaciones de la geodésica (una versión geométrica de las ecuaciones de Euler Lagrange.) A partir de ellas y con argumentos de simetría, obtendremos las primeras integrales o cuadraturas y deduciremos el lagrangiano y su potencial efectivo, para el movimiento de una partícula muy ligera (partícula de prueba) en la métrica de Schwarzschild.

Usando estos elementos estudiaremos dos aplicaciones específicas: el avance del perihelio de Mercurio, el primer problema de mecánica celeste que resolvió la Relatividad General y la primera prueba de su superioridad frente a la teoría newtoniana del movimiento y la gravedad. Y el movimiento de partículas de prueba alrededor de cuerpos muy densos (estrellas de neutrones o agujeros negros.)

- ??: **El formalismo hamiltoniano.** En este capítulo abordamos el más general (y poderoso) formalismo analítico de la mecánica: el formalismo Hamiltoniano. Después de discutir las motivación para la introducción de este formalismo (motivaciones de naturaleza principalmente geométrica), deduciremos de forma heurística las ecuaciones canónicas (de primer orden) de Hamilton; introduciremos la función Hamiltoniana

y demostraríamos su equivalencia con las ecuaciones (de segundo orden) de Euler-Lagrange. Ilustraremos el poder del formalismo y la descripción de los sistemas en el denominado *espacio de fase*; para ello nos valdremos inicialmente de sistemas dinámicos simples (péndulos y bloques), como hicimos en el primer capítulo de esta parte.

Posteriormente abordaremos (sin el detalle en el que lo hicimos en el caso del formalismo Lagrangiano y por las obvias analogías entre los dos formalismos) el tema de las simetrías y las cantidades conservadas, e introduciremos los útiles *corchetes de Poisson*, como herramienta matemática para estudiar dichas simetrías.

Escribiremos los hamiltonianos del problema general de los N cuerpos, el del problema de los dos cuerpos y el del problema circular restringido de los tres cuerpos, y redescubriremos, usando los elementos de este nuevo formalismo, las propiedades ya conocidas de estos sistemas.

- ??: **El formalismo de Hamiltoniano-Jacobi.** Una de las formas más frecuentes en las que se aplica el formalismo Hamiltoniano en la mecánica celeste, es la de aprovechar las simetrías de los sistemas gravitacionales, para, a través de transformaciones de *coordenadas* en el espacio de fase, escribir formas simplificadas de los Hamiltonianos. Estas formas simplificadas, además, permiten aplicar de forma más directa la teoría de perturbaciones y así estudiar sistemas muy complejos (un tema que no está incluido en este libro.)

En este capítulo introduciremos, primero, el tema de las transformaciones canónicas, que son transformaciones de coordenadas en el espacio de fase que mantienen la *estructura hamiltoniana* de los sistemas (es decir, que hacen que los sistemas sigan siendo descritos con las ecuaciones canónicas). Nos concentraremos, especialmente en el formalismo de la función generatriz de las transformaciones canónicas.

A continuación, aplicando lo visto en el capítulo anterior y la teoría de transformaciones canónicas recién introducida, presentaremos el formalismo de Hamilton-Jacobi que permite, entre otras cosas, encontrar sistemas de coordenadas que simplifican significativamente la descripción de ciertos sistemas físicos. En particular utilizaremos este formalismo para deducir, en el problema de los dos cuerpos, el Hamiltoniano del sistema en términos de elementos orbitales; en particular, en términos de funciones específicas de esos elementos orbitales, que hacen lo más simple posible el hamiltoniano del sistema.

El resultado más importante de este capítulo será la deducción de las denominadas *variables de Dalaunay* que son de gran utilidad y poder en la mecánica celeste moderna y posiblemente el punto de partida de algunos textos de mecánica celeste avanzados.

Todos los capítulos hasta aquí contarán con un conjunto completo de preguntas, ejercicios y problemas, que permitirán al lector poner a prueba los conocimientos adquiridos y las habilidades desarrolladas, pero también, descubrir como estas ideas, métodos y herramientas, se aplican en otras situaciones específicas.

- **Apéndices.** La última parte del libro, presenta material complementario y de referencia, que puede ser de interés consultar durante su lectura.
  - **???: Python mínimo.** En este apéndice ofrecemos un breve tutorial introductorio al lenguaje Python y a la biblioteca de gráficos de Matplotlib que usaremos como herramientas para presentar los algoritmos de la mecánica celeste, desarrollar ejemplo y formular problemas (ver la [Sección 1.4](#)).
  - **???: El sistema de información SPICE.** Como comentamos en la [Sección 1.5](#), una de las herramientas prácticas de programación de las que nos apoyaremos en este libro, es el sistema de información SPICE del NAIFF de NASA. En este apéndice ofrecemos una guía de referencia básica a este sistema, que puede ser consultada para entender mejor algunos de los ejemplos desarrollados a lo largo del libro.
  - **???: Notación y glosario.** La notación en física y en astronomía, así como el vocabulario, puede cambiar mucho de unos textos a otros. En este apéndice encontrará una guía de referencia práctica a la notación y el vocabulario usado en este libro.
  - **???: La biblioteca pymcel.** Las rutinas útiles escritas a lo largo del libro se han compilado en un paquete de Python que acompaña este libro. En este apéndice se ofrece una lista completa de las rutinas del paquete.

## 3.2. ¿Cómo usar este libro?

Este libro puede ser utilizado de tres formas diferentes:

1. Como un texto para el *autoaprendizaje* de la mecánica celeste y analítica. Estudiantes y profesionales de muchas disciplinas, se pueden valer de él para acercarse a ellas.
2. Como el texto guía de un primer curso de mecánica celeste. Una fuente de lecciones y problemas útiles para organizar un curso de pregrado.
3. Como material de referencia para estudiantes y profesionales. Muchas fórmulas, algoritmos, e incluso anécdotas e historias interesantes, podrían resultar útiles para quiénes ya tienen una formación en el área.

Como **texto para el autoaprendizaje**, recomiendo **leerlo enteramente** incluyendo la primera parte de Fundamentación en la que se encuentran algunos elementos teóricos (matemáticos y físicos) requeridos para el resto del libro.

Para quiénes tengan una formación avanzada en física, astronomía o ingeniería, es posible que una buena fracción de los temas de esa primera parte resulten sencillos y puedan obviarse. Sin embargo, aunque los tópicos tratados allí aparezcan conocidos (al menos por los nombres), su tratamiento puede resultar novedoso; de modo que no deje de echarle una mirada. En particular recomiendo revisar, como mínimo, las secciones dedicadas a la solución numérica de las ecuaciones de movimiento, la dinámica en sistemas rotantes y los principios de relatividad, donde podrían encontrarse las diferencias más significativas respecto a los textos canónicos de matemáticas y física.

El uso ideal de este libro es como **texto guía** de un primer curso de mecánica celeste y analítica. El libro fue escrito a partir de la experiencia de más de 5 años ofreciendo el curso en el pregrado de astronomía de la Universidad de Antioquia; por la misma razón esta la extensión y organización particular del texto, se adapta de forma *precisa* a las condiciones propias de un curso universitario de un semestre de duración (cuatro meses efectivos de lecciones.) El curso se ofrece ha ofrecido exitosamente a estudiantes que han cursado los cursos básicos de física (hasta el curso de oscilaciones y ondas) y de cálculo (incluyendo cálculo vectorial y ecuaciones diferenciales.)

Todos los capítulos del libro han sido dictados dentro del plazo del curso. Sin embargo, dependiendo del nivel académico de los estudiantes y de su independencia intelectual, el curso puede dictarse sin incluir todos los temas de la primera parte.

Por mi experiencia dictando el curso, el repaso de los fundamentos puede resultar extenso (como mínimo toma un mes que es justamente el período en el que los estudiantes tienen una motivación y disposición mayor, además de menos distracciones de otros cursos.) Sugeriría, entonces, que de sacrificarse algunos temas de esa parte, se asigne la lectura independiente a los estudiantes de los temas mejor conocidos y se evalúe a través de la completa lista de problemas incluidos al final de esa parte.

Como se menciono en la [Sección 1.3](#), y se detallará abajo, el libro fue escrito usando *libretas de Jupyter*, una por cada clase (a lo sumo se pueden dictar dos clases con cada libreta). Es decir, el número de *libretas* y su organización puede ofrecer una idea del programación detallado de actividades del curso o del plan de lectura.

### 3.3. Mecánica celeste en *libretas*

El libro ha sido concebido, escrito y compilado enteramente usando *libretas* de *Jupyter*. Las libretas, que están disponibles en la versión electrónica del texto, son archivos en un formato especial (no son programa de Python, ni páginas web) que pueden ser visualizadas y ejecutadas usando un navegador de Internet.

El uso de las libretas no es indispensable para entender el contenido del libro, pero pueden ofrecer una experiencia interactiva muy enriquecedora, que a veces puede acelerar el proceso de aprendizaje. El uso de las libretas en clase puede, además, hacer más dinámica la interacción entre el profesor y los estudiantes.

Para hacer uso de las libretas se debe contar con un **computador de escritorio** que use cualquier sistema operativo (Windows, Linux o MacOS). Por la misma razón, en caso de usarla, recomiendo que el curso se desarrolle en una sala de computo. Para ejecutar las libretas es necesario instalar primero el interprete y la biblioteca base del lenguaje Python, un conjunto específico de paquetes y el sistema Jupyter, además de varias de sus extensiones (los detalles se presentan en la siguiente sección.)

La versión web de este libro, puede ser también una alternativa a las libretas de Jupyter. Tiene la ventaja de que solo requiere un dispositivo con conexión a Internet (de escritorio o móvil) y puede manipularse en cualquier contexto. Aunque la versión web carece de casi todas las características interactivas de las libretas de Jupyter, en ella encontraran, además de todos los algoritmos y gráficos, todas las

animaciones y otros elementos de *hipertexto*.

### 3.3.1. Instalación de las libretas

Para aquellos que deseen aprovechar las libretas de Jupyter como medio didáctico, se ofrece a continuación una guía básica de cómo preparar un computador para ejecutarlas. Instrucciones adicionales pueden encontrarse en la versión en línea del libro.

1. **Instalación del lenguaje Python y las bibliotecas básicas del lenguaje.** El primer requisito para utilizar las libretas es instalar el interprete y las bibliotecas del sistema del lenguaje Python. Existen diversas maneras para hacerlo en cada sistema operativo y abundante información en Internet. Mi recomendación es utilizar sel sistema [Anaconda<sup>8</sup>](#) que ofrece en una plataforma completa de programación incluyendo los archivos del lenguaje Python, una amplia diversidad de paquetes científicos, el sistema Jupyter y todas las herramientas necesarias para la instalación de otros paquetes.
2. **Descarga las libretas.** Una vez haya instalado Python y Jupyter, puede descargar las libretas del libro los archivos adicionales requeridos por ellas del sitio web del libro. Para ello siga las instrucciones provistas allí.
3. **Ejecución de pruebas.** Para verificar si las libretas funcionan correctamente, una vez descargadas, busque y abra la libreta Pruebas.ipynb. Una vez abierta ejecute todas sus celdas (Cell / Run all). Si la ejecución se realiza completa, en la última celda aparecerá un reporte completo con los resultados de la prueba. Si alguna de las prueba individuales falla, es posible que sea necesario instalar paquetes, datos adicionales y otras dependencias.
4. **Instalación de dependencias.** Para instalar todas las dependencias del libro abra la libreta Instalacion.ipynb y siga las instrucciones descritas allí.

## 3.4. Idioma y Notación

### 3.4.1. Extranjerismos y pronunciación

El libro está escrito en español. Sin embargo, y como sucede con todas las ciencias, habrán muchos apartes en los que es necesario introducir términos técnicos y acrónimos procedentes de la lengua inglesa. En estos casos las palabras y acrónimos se presentarán en itálica. Así por ejemplo, al referirnos al problema matemático de resolver la ecuación de movimiento de una partícula hablaremos del *initial value problem* o su acrónimo *IVP*, en contraposición al *boundary condition problem*. Por otro lado en el ?? estudiaremos el *CRTBP* o *circular restricted three body problem*.

Muchos de los científicos (hombres y mujeres) que han contribuído con el desarrollo de la mecánica celeste en sus cuatro siglos de historia, tienen nombres y apellidos no hispanos. Su correcta pronunciación, especialmente en el caso de autores franceses o de origen germano, es difícil para quienes no hablamos las lenguas de esos pueblos.

<sup>8</sup><https://www.anaconda.com>

Un caso notable, por ejemplo, es el nombre de la matemática alemana *Emmy Noether*. En castellano la mayoría pronunciaríamos “emi noeter” o “emmi neder” (siguiendo la tradición inglesa con la que estamos más familiarizados.)<sup>9</sup> La pronunciación “correcta” (en alemán) del nombre de esta matemática, es en realidad “emmi noutar”.

Para hacernos a una idea fonética más precisa nos apoyaremos a lo largo del libro de la increíble colección compilada en [este sitio web<sup>10</sup>](#) que ofrece pronunciaciōnes en línea, en decenas de idiomas, de miles de nombres, palabras y frases. Allí encontrará por ejemplo la pronunciación correcta, en su idioma original del nombre [Emmy Noether<sup>11</sup>](#).

### 3.4.2. Siglos y décadas

La historia de la mecánica celeste y analítica, así como la historia de las áreas de la física y las matemáticas con las que se relaciona, es fascinante. En el libro, como detallamos en la próxima sección, incluiremos abundantes referencias históricas sobre los personajes y los momentos claves en el desarrollo de las ideas de la mecánica celeste.

Para referirnos a los siglos, sin embargo, nos desviaremos de las reglas convencionales del español. Según esas reglas al período comprendido, por ejemplo, entre 1701 y 1800, se lo llama el siglo XVIII. Para este autor, la notación usando números romanos, si bien ampliamente aceptada, es confusa y exige realizar operaciones mentales innecesarias (número romano → número indoarabigo → restar uno → multiplicar por 100).

En los sucesivos para referirnos al período comprendido entre 1700 y 1799 (comenzando en el año cero y no en el año uno como dicta la regla) hablaremos de **los 1700**. Así mismo el siglo XX será **los 1900** y así sucesivamente.

Dado que en las reglas establecidas del español, los 1900 hacen referencia en realidad a la década entre 1901 y 1910, cuando queramos referirnos a un período de diez años siempre usaremos explícitamente la palabra **década**: década de 1680, década de 1960, etc.

No pretendó, con este acto de rebeldía *gramático*, cambiar el idioma. Pero sí, al menos en lo que respecta a este libro, facilitar la lectura de los períodos históricos.

### 3.4.3. Notación matemática

Todos los libros de ciencias físicas o matemáticas se “casan” con una notación específica. La elección de la notación, no es sin embargo una tarea sencilla, en tanto son muy comunes los casos de textos que en virtud de su notación se hacen prácticamente ilegibles aunque traten los mismos temas o problemas de otros que usan notaciones más comunes.

Pensando justamente en esto, he tomado la decisión de utilizar, en la medida de las posibilidades, la misma notación de algunos textos clásicos de mecánica

<sup>9</sup>En el libro presentaremos “transliteraciones” de la pronunciación en castellano, indicando, entre comillas las letras y palabras más cercanas que un hispanohablante podría usar. Así por ejemplo “niu-ton” será la transliteración fonética de Newton.

<sup>10</sup><http://forvo.com>

<sup>11</sup><https://es.forvo.com/search/Emmy%20Noether/de/>

celeste, que se diferencia, a veces significativamente, de la que utilizan libros de matemáticas e incluso de física, con los que el lector puede estar familiarizado.

El lector encontrará los detalles específicos de la notación usada en el libro en la [Sección *Vectores y cálculo*].

## 3.5. Estructura del libro

Para facilitar la lectura del libro y hacer de la experiencia de leerlo algo realmente excitante, el libro, además de toda la teoría que esperamos encontrar en un texto académico, contiene una serie de elementos gráficos con los que debemos familiarizarnos.

### 3.5.1. Cajas de texto

Mucha información importante en el texto se presenta en *cajas* independientes y cuyas características gráficas resaltan del resto del documento. En particular existen 3 tipos de cajas:

- **Resumen del capítulo.** Esta caja aparece normalmente al principio del libro y contiene una breve síntesis de cada capítulo. No deje de leer este resumen para identificar los temas centrales de cada parte del libro. El profesor podría usar la información contenida allí para definir los objetivos específicos de la evaluación.
- **Notas.** A veces es necesario desviarse un momento del hilo del texto para alcarar o ampliar asuntos relacionados con la notación, algunos detalles sobre los paquetes y algoritmos utilizados, o simplemente llamar la atención sobre un asunto importante. A continuación se muestra un ejemplo de una *caja de nota*.

#### Nota

**El lenguaje *Markdown*.** La mayor parte del texto de este libro, ha sido escrito en las celdas de libretas de Jupyter en un lenguaje de descripción de documentos conocido como *Markdown*. Puede explorar la sintaxis del lenguaje, o bien desplegando el contenido de las *celdas* de las libretas, o bien consultando la documentación.

- **Definiciones.** Muchas cantidades físicas y algunos conceptos claves requieren una definición rigurosa. Este es el rol justamente que juegan las *cajas de definición*. A diferencia de las cajas de Resumen y Notas, las cajas de *Definición* están numeradas (como las figuras o las ecuaciones), de modo que sea más fácil referirse a ellas.

### Definición 3.1

**Mecánica celeste.** Llamamos *Mecánica Celeste* a la disciplina científica que aplica las leyes de la mecánica para estudiar el movimiento de cuerpos bajo la acción dominante de la gravedad. Dado que solo en lugares lejanos a la superficie terrestre (normalmente fuera de su atmósfera), la gravedad es la fuerza dominante, la mecánica celeste normalmente describe el movimiento de cuerpos astronómicos (desde partículas de roca, hielo o polvo interestelar, hasta planetas y estrellas) y de vehículos espaciales. En este último caso se habla más de *Mecánica orbital*.

- **Teoremas y leyes.** Como las definiciones, en muchas ocasiones será indispensable separarnos un momento de una explicación para formular más rigurosamente un resultado, normalmente obtenido por razonamiento deductivo en el marco de una teoría (teoremas, colorarios) o por razonamiento inductivo a partir de la experiencia (leyes).

### Teorema 3.1

**Teorema de Danelin.** Dada una esfera tangente a un cono y un plano que corta el cono en un determinado ángulo, el punto de tangencia de la esfera con el plano es uno de los focos de la cónica.

- **Un poco de historia.** Finalmente, pero no menos importante, son las anécdotas e historias que contaremos a lo largo de todo el libro. Como se mencionó en el prefacio, la mecánica celeste tiene ya más de 400 años (aproximadamente 100 años más que la mecánica analítica) y cientos de libros y miles de artículos se han escrito en el tema. Es casi imposible hablar de mecánica celeste y analítica, sin mencionar de vez en cuando las historias que rodearon la invención de una técnica, la biografía de alguno de los grandes hombres y mujeres que concibieron las ideas contenidas en el libro o simplemente una anécdota curiosa relacionada con algún tema de interés.

#### 3.5.2. Algoritmos

Como se ha insistido hasta aquí, una de las novedades más importantes de este libro, es el énfasis que se ha querido dar en los algoritmos y la aplicación de técnicas computacionales en la comprensión y aplicación de la mecánica celeste. A lo largo de todo el texto encontraremos *algoritmos* para realizar tareas de computo propias de cada uno de los temas abordados.

Existen en general tres tipos de *algoritmos* que encontraremos a lo largo del texto. En primer lugar están los algoritmos más sencillos, *retazos de código* (en inglés *code snippets*), que ejecutan tareas básicas de preparación para algoritmos más complejos. Este es un caso de ellos:

```
a=1  
b=-1
```

### Un poco de historia

**¿Kepler o Newton?** En el Prefacio daba a entender que la mecánica celeste posiblemente había comenzado con los trabajos pioneros de Johannes Kepler (ver Figura 3.1). Otros autores van más lejos y apuntan a los astrónomos de la antigüedad y la edad media, especialmente indios, chinos, árabes y griegos, que desarrollaron modelos complejos para la descripción del movimiento de los cuerpos celestes. Los más conservadores apuntan a Sir Isaac Newton, quien después de la publicación de su obra cumbre, los *Principia*, sentó las bases físicas, no solo para la mecánica celeste, sino también, en general, para toda la mecánica.



**Figura 3.1:** Retrato de Johannes Kepler, copia de un original de 1610 de pintor desconocido y que se conserva en el monasterio Benedictino de Kremsmünster

La razón en este libro para escoger a Kepler, como el *padre* de la disciplina (y en general de la astronomía física) fueron sus contribuciones decisivas y bastante bien conocidas, para esclarecer definitivamente la *cinemática* del movimiento planetario. En particular, el descubrimiento (o enunciado matemáticos) de sus conocidas *leyes del movimiento planetario*, representaron un cambio cualitativo en el desarrollo de la teoría del movimiento planetario e inspiraron en últimas el trabajo de Newton.

Adicionalmente, y esto es aún más importante, Kepler fue uno de los primeros astrónomos modernos (renacentistas europeos) en hacer consideraciones teóricas sobre la causa del movimiento planetario, más allá de ocuparse de su descripción, como lo hicieron la

mayoría de los astrónomos de la antigüedad y la edad media. Esto pone a Kepler, entre esos astrónomos, como el primer *astrofísico* de la historia.

```
c=2
disc=b**2-4*a*c
```

Los algoritmos más complejos pueden, como las ecuaciones, venir numerados:

(Algoritmo 3.1)

```
def calcula_discriminante(a,b,c):
    """Calcula el discriminante de una ecuación de segundo grado.

    Argumentos:
    =====
    a, b, c (float): Coeficientes

    Retorna:
    =====
    d (float): Valor del discriminante

    """
    a=1
    b=-1
    c=2
    disc=b**2-4*a*c
    return disc
```

En este caso, además, el algoritmo representa una rutina o función, que podría ser usada más adelante, no solo en el mismo capítulo, sino en un capítulo posterior. Todas las rutinas como estas, hacen parte de un paquete que viene con el libro, el paquete `pymcel`.

Hay algoritmos que se ejecutan implícitamente pero para los cuáles, al menos en el libro impreso o en el libro para la web, no mostramos el código, bien sea por economía o porque es muy complejo e irrelevante para el libro. Un ejemplo común de este código oculto, es el código que usamos para mostrar los resultados de algunos cálculos. Por ejemplo:

(Algoritmo 3.2)

```
d=calcula_discriminante(1,2,3)
```

El valor del discriminante es: -7

Nótese que en el código (3.2) no hay ningón comando para mostrar el valor de la variable discriminante y mucho menos del mensaje asociado. Esa tarea se realiza en una celda de código oculta. En las libretas de clase, el lector encontrará todas las celdas.

También tenemos los códigos que dan como resultado figuras o gráficos. Estos están entre los más interesantes y útiles. Todos los códigos que producen figuras están numerados. Así mismo los gráficos que producen aparecen en el texto como figuras independientes. Incluso, en el texto impreso, y por razones de eficiencia del espacio, algunas de esos gráficos pueden estar en lugares lejanos de la posición del código. Es por esto que en todos los algoritmos que producen gráficos encontrarán (en la parte inferior) una referencia a la figura correspondiente.

(Algoritmo 3.3)

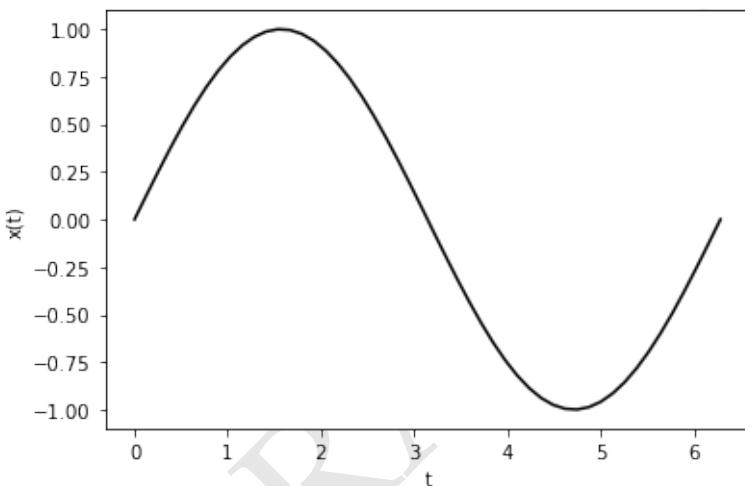
```
import matplotlib.pyplot as plt
from numpy import linspace,sin,pi
```

```
t=linspace(0,2*pi)
x=sin(t)

plt.figure()
plt.plot(t,x, 'k-');

plt.xlabel("t");
plt.ylabel("x(t)");
```

*ver Figura 3.2*



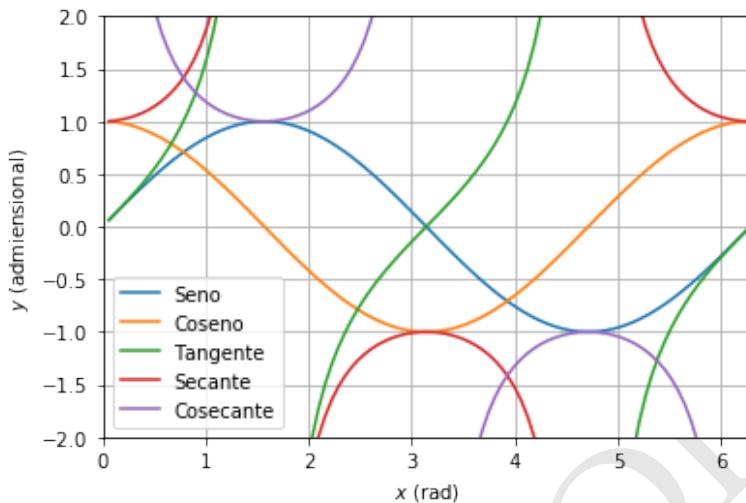
**Figura 3.2:** Figura correspondiente al código 3.3.

La mayoría de las figuras del libro han sido elaboradas usando software de diseño independientes. Sin embargo, algunas figuras, especialmente gráficos de datos o resultados de simulaciones, son generadas por las libretas con las que fue escrito el libro. Si bien los algoritmos con los que son creados esas figuras (que llamaremos *gráficos generados*) no aparecen en la versión impresa o en la versión web (pueden ser muy elaborados e irrelevantes para los fines del curso), ellos si pueden aparecer en las libretas de clase.

### 3.6. Figuras interactivas y animaciones

Uno de las cosas que hace poderosas a las libretas de Jupyter, como medios para compartir información o estudiar un tema, es la posibilidad de interactuar con la información que se está compartiendo o asimilando. Esto se consigue principalmente accediendo al contenido de las celdas de la libreta (código) y eventualmente modificándolas.

Pero hay otra posibilidad que ofrecen las libretas y es la de generar gráficos interactivos y animaciones, que permiten al lector o al estudiante, modificar de forma



**Figura 3.3:** Gráfico de las funciones trigonométricas básicas, en el intervalo de interés (gráfico generado).

sencilla los parámetros de un algoritmo o una solución (gráficos interactivos) o ver en movimiento figuras que normalmente vemos estáticas en los libros.

Para ver las figuras interactivas y animaciones de esta parte del libro, debe dirigirse al sitio en línea del texto.

BORRADOR

# Capítulo 4

# Fundamentos

## Resumen

En este capítulo haremos una síntesis práctica de los temas de matemáticas, física y astronomía que necesitaremos para desarrollar la mecánica celeste en el resto del libro. Repasaremos la geometría de las cónicas, (que son la base para describir la trayectorias de cuerpos celestes sometidos a la gavedad newtoniana), en el plano y en el espacio de tres dimensiones. Sintetizaremos, en un lenguaje moderno, los principios y leyes de la mecánica newtoniana, incluyendo la dinámica en sistemas de referencia rotantes. Presentaremos brevemente los fundamentos de la teoría de la relatividad (especial y general), especialmente el concepto de métrica y sus implicaciones cinemáticas básicas. Finalmente repasaremos a algunas conceptos y definiciones de astronomía que serán de relevancia en el texto, la organización y nomenclatura del sistema solar, los sistemas de medida de tiempo y los sistemas de referencia usados para especificar la posición de cuerpos en el cielo y en el espacio interplanetario.

## 4.1. Vectores y cálculo

En esta sección repasaremos, de manera práctica (y posiblemente poco rigurosa desde el punto de vista matemático), algunos resultados centrales del cálculo infinitesimal y la teoría de ecuaciones diferenciales que serán de utilidad en el resto del libro.

Para quienes conocen bien estos temas, puede servir de motivación para la lectura de esta sección, el hecho de que además de conceptos matemáticos ampliamente conocidos, hemos incluido aquí detalles sobre la **notación matemática, definiciones y teoremas** que usaremos en el resto del libro; escritos todos en un lenguaje muy propio del texto. Tal vez más interesante es el hecho de que a lo largo de esta sección ilustraremos también algunos de los conceptos claves usando **algoritmos**, con lo que sentaremos las bases para todos los desarrollos *computacionales* de los demás capítulos.

Sea que lea esta sección o sea que no lo haga, antes de pasar a los siguientes capítulos intente resolver los problemas al final de este capítulo que están directamente relacionados con los temas de esta sección. Este ejercicio le permitirá valorar mejor las habilidades matemáticas y algorítmicas que tiene antes de comenzar y que serán indispensable en el resto del libro. Tal vez descubra que después todo no es mala idea hacer este repaso.

#### 4.1.1. Conjunto, tuplas y vectores

Hay tres tipos de entidades matemáticas (además de los números reales y las funciones) que usaremos con frecuencia en este capítulo (y en general en todo el libro):

- **Conjuntos.** Muchas veces nos referiremos aquí a conjuntos (no necesariamente ordenados) de entidades que están relacionadas de alguna manera: las coordenadas de un punto en el espacio de fases, un conjunto de funciones, las ecuaciones diferenciales que describen el movimiento de un sistema dinámico, las partículas que interactúan gravitacionalmente en un sistema, etc. Los elementos de la mayoría de los conjuntos usados en este libro estarán numerados. Así por ejemplo, las masas de un sistema de  $N$  partículas,  $m_0, m_1, \dots, m_{N-1}$  se representarán como el conjunto:

$$\{m_i\}_{i=0,1,\dots,N-1}$$

Una versión sintética más común de esta notación será  $\{m_i\}_N$ . En el caso en el que el número de elementos sea claro en el contexto se usará simplemente  $\{m_i\}$

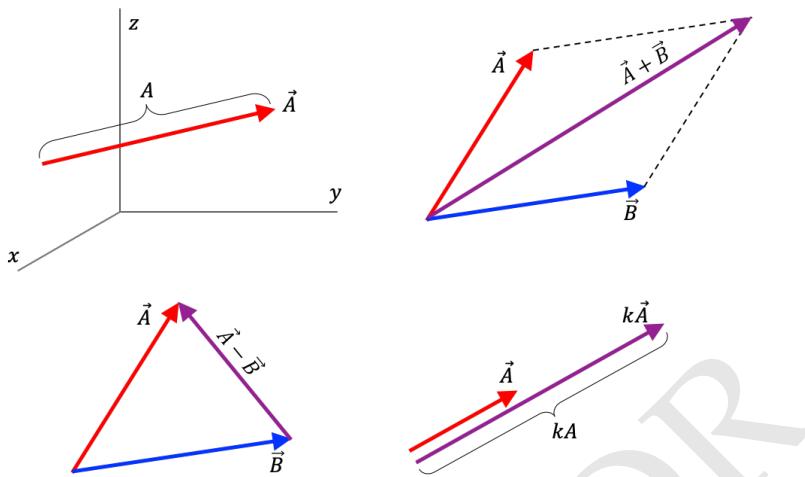


##### Nota

**Numeración comenzando en cero.** En lo sucesivo numeraremos todas las cantidades físicas y matemáticas (partículas, variables auxiliares, componentes de un vector o una matriz, etc.) comenzando en cero, tal y como se acostumbra en programación. Esta elección facilitará la implementación de las fórmulas en algoritmos y programas de computadora. Si bien la numeración comenzando en cero no es muy común en matemáticas o física, existen justificaciones poderosas para su uso, algunas de las cuales están enumeradas en el documento “[Why numbering should start at zero](#)”<sup>a</sup> del maestro de maestros de la programación científica, Edsger Wybe Dijkstra.

<sup>a</sup><https://www.cs.utexas.edu/users/EWD/transcriptions/EWD08xx/EWD831.html>

- **Tuplas.** Las tuplas (pares, tripletes, etc.) son conjuntos ordenados de números reales. Para las tuplas usaremos la notación convencional  $(x_0, x_1, \dots, x_{N-1})$ , donde los paréntesis, a diferencia de las llaves de los conjuntos más generales, nos permitirán reconocer el hecho de que el orden de



**Figura 4.1:** Definición geométrica de vector espacial y de sus operaciones básicas (suma, resta y multiplicación por un escalar). Aunque la resta de  $\vec{A} - \vec{B}$  es un caso particular de la suma, es importante aquí familiarizarse con la dirección que tiene este vector (va de la cabeza del sustraendo  $\vec{B}$  a la del minuendo  $\vec{A}$ .)

los elementos es importante. Las tuplas forman, con el conjunto de los números reales, un *espacio vectorial*. En este espacio se definen las siguientes operaciones básicas:

- Suma:

$$(a_0, a_1, \dots) + (b_0, b_1, \dots) \equiv (a_0 + b_0, a_1 + b_1, \dots) \quad (4.1)$$

- Multiplicación por un escalar:

$$k(a_0, a_1, \dots) \equiv (ka_0, ka_1, \dots) \quad (4.2)$$

donde  $k$  es un número real.

- **Vectores geométricos (euclidianos).** Los vectores geométricos o en breve vectores, son *segmentos orientados* en el espacio de tres dimensiones (ver [Figura 4.1](#)) que tienen las siguientes propiedades:

- Se denotarán en este libro como  $\vec{A}$  o  $\hat{e}$  (este último es un vector unitario) en lugar de usar la notación más común con letras en negrilla.
- Todo vector tiene: 1) magnitud,  $A$ , igual a la longitud (euclíadiana) del segmento correspondiente y 2) una dirección en el espacio.
- Los vectores forman con los números reales, un espacio vectorial con operaciones definidas, geométricamente, como se muestra en la [Figura 4.1](#).

- El elemento neutro de la operación suma entre vectores, es el vector nulo, que representaremos como  $\vec{0}$ .
- Todo vector, por definición, se puede escribir como una combinación lineal de tres vectores de una base ortonormal:  $\hat{e}_0, \hat{e}_1, \hat{e}_2$ . Los coeficientes de la combinación se conocen como componentes del vector:

$$\vec{A} = A_0 \hat{e}_0 + A_1 \hat{e}_1 + A_2 \hat{e}_2. \quad (4.3)$$

- El espacio de vectores es *isomórfico* a el espacio vectorial de triplets. Por la misma razón nos referiremos al vector, o bien como la entidad abstracta  $\vec{A}$ , como su representación en términos de los vectores unitarios de una base ortonormal (ver ítem anterior) o aún mejor, en términos de la triplete:

$$\vec{A} : (A_0, A_1, A_2)$$

En este caso usaremos el símbolo “:” en lugar de “=” para dar entender que el vector *no es* una triplete sino una entidad geométrica más abstracta.

El isomorfismo implica también, que las componentes de los vectores en las operaciones geométricas definidas en la [Figura 4.1](#), cumplen la Ecs. (4.1) y (4.2).

- Además de la suma y la multiplicación por un escalar, que caracterizan el espacio vectorial, se definen dos productos adicionales:

- **Producto escalar o producto punto**,  $\vec{A} \cdot \vec{B}$ . El producto escalar se define, a partir los vectores unitarios de la base, como:

$$\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = \delta_{ij},$$

donde  $\delta_{ij}$  es el “delta de kroenecker”:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (4.4)$$

Con esta esta definición y usando la representación de los vectores dada por la Ec. (4.3) puede probarse que:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_0 B_0 + A_1 B_1 + A_2 B_2$$

- **Producto vectorial o producto cruz**,  $\vec{A} \times \vec{B}$ . El producto vectorial se define, a partir los vectores unitarios de la base, como:

$$\hat{e}_i \times \hat{e}_j = \epsilon_{ijk} \hat{e}_k, \quad (4.5)$$

donde  $\epsilon_{ijk}$  es el “simbolo de Levi-Civita” (“levi chivita”<sup>12</sup>):

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{si } (i, j, k) \text{ es } (0, 1, 2), (1, 2, 0) \text{ o } (2, 0, 1) \\ -1 & \text{si } (i, j, k) \text{ es } (2, 1, 0), (0, 2, 1) \text{ o } (1, 0, 2) \\ 0 & \text{de otro modo } i = j \text{ o } j = k \text{ o } k = i \end{cases} \quad (4.6)$$

<sup>12</sup><https://forvo.com/word/levi-civita/#it>

Al conjunto de vectores unitarios de una base que se definen cumpliendo la Ec. (4.5) se lo llama un *conjunto de vectores de mano derecha*. Con esta definición y usando la representación de los vectores dada por la Ec. (4.3) puede probarse que:

$$\vec{A} \times \vec{B} = (A_1 B_2 - A_2 B_1) \hat{e}_0 + \\ -(A_0 B_2 - A_2 B_0) \hat{e}_1 + \\ (A_0 B_1 - A_1 B_0) \hat{e}_2 \quad (4.7)$$

Está última expresión es tan elaborada que con frecuencia se usa la regla mnemotécnica:

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{e}_0 & \hat{e}_1 & \hat{e}_2 \\ A_0 & A_1 & A_2 \\ B_0 & B_1 & B_2 \end{vmatrix} \quad (4.8)$$

Donde  $|M|$  es el determinante de la matriz  $M$ .

- Otras identidades útiles:
  - Propiedad cíclica del **triple producto escalar**:

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A}) \quad (4.9)$$

- **Triple producto vectorial**:

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C} \quad (4.10)$$

### Algoritmos para conjuntos y tuplas

Todos los lenguajes modernos de programación, definen tipos especiales para representar conjuntos y tuplas. En Python existen tres tipos de objetos básicos para este propósito: *listas*, *tuplas* y *diccionarios*. Existen sútiles diferencias entre las listas y las tuplas en Python y en general usaremos con más frecuencia las primeras. Para los algoritmos de este libro, es importante entender las *operaciones* entre listas, que son diferentes a las operaciones en el espacio vectorial de las tuplas matemáticas que definimos antes.

Así, por ejemplo, en el siguiente algoritmo se construye una lista con las componentes del vector de estado de una partícula, “sumando” las listas de las componentes de su vector posición y velocidad:

```
#Lista de componentes del vector posición
r=[1,0,3]
#Lista de componentes del vector velocidad
v=[0,-1,0]
#Lista de componentes del vector de estado
X=r+v
```

X = [1, 0, 3, 0, -1, 0]

El operador `+`, entre listas y tuplas de Python produce la unión de los elementos de las listas.

Usando este operador se pueden hacer algoritmos prácticos como el que se muestra a continuación:

```
def f(x):
    from math import sin
    y=sin(x)/x
    return y

valores_de_x=[1.0,2.0,3.0]
valores_de_f=[]
for x in valores_de_x:
    valores_de_f+=[f(x)]
```

valores de f = [0.8414709848078965, 0.45464871341284085, 0.0470400026866224]

aquí, comenzamos con un conjunto vacío, `valores_de_f=[]` y después, dentro de un ciclo, usamos el operador de acumulación `+=` para agregar elementos al conjunto. Este es un método muy común usado en el lenguaje para construir “tablas de valores”, que pueden, por ejemplo usarse para hacer gráficos de funciones.

### Algoritmos para vectores

Los vectores forman un “capítulo” en la computación separado de las listas y las tuplas. La razón básica son sus propiedades matemáticas y las operaciones definidas entre ellos. Bibliotecas de rutinas muy completas existen en todos los lenguajes de programación para representar este tipo de entidades matemáticas.

En Python y a lo largo de este libro usaremos los objetos y rutinas de los paquetes NumPy y SPICE para definir y manipular vectores.

El ejemplo abajo muestra como se calcula el ángulo entre dos vectores  $\theta_{AB}$ , a partir de la interpretación geométrica del producto punto  $\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos \theta_{AB}$  (ver problemas al final del capítulo):

```
#Definimos los vectores
from numpy import array
A=array([1.0,0.0,2.0])
B=array([0.0,1.0,3.0])

#Calculamos el producto escalar y vectorial
from numpy import dot
ApuntoB=dot(A,B)

#El ángulo entre los vectores
from numpy import arccos
from numpy.linalg import norm
anguloAB=arccos(ApuntoB/(norm(A)*norm(B)))
```

AnguloAB = 31.948059431330062 grados



### Nota

**Radianes y grados en los algoritmos.** Es importante entender que las funciones trigonométricas inversas como `arccos`, devuelven, en todos los lenguajes de programación, valores de los ángulos en radianes. En el caso anterior, por ejemplo, el valor de la variable `anguloAB` al final del algoritmo en realidad era 0.5575988266995369. Sin embargo, decidimos mostrar su valor en grados después de multiplicar `anguloAB` por el factor de conversión  $\pi/180$  (esta operación no se muestra en el código.) Así lo seguiremos haciendo en el resto del libro. El lector que use los algoritmos no debe olvidar multiplicar por el factor de conversión para reconstruir los resultados mostrados aquí.

Un procedimiento similar, esta vez usando vectores y rutinas de SPICE (internamente SPICE usa vectores o arreglos de NumPy), puede usarse para calcular el triple producto vectorial:

```
from numpy import array
from spiceypy import vdot,vcrss

A=array([2.0,2.0,1.0])
B=array([0.0,-1.0,0.0])
C=array([0.0,0.0,2.0])

AxByC=vdot(A,B)*C-vdot(A,C)*B
```

$$A \times (B \times C) = [-0. \quad 2. \quad -4.]$$

También podemos usarlas para verificar la propiedad cíclica del triple producto escalar:

```
from numpy import array
from spiceypy import vnrm,vdot,vcrss
A=array([2.0,2.0,1.0])
B=array([0.0,-1.0,0.0])
C=array([0.0,0.0,2.0])

ABC=vdot(A,vcrss(B,C))
CAB=vdot(C,vcrss(A,B))
BCA=vdot(B,vcrss(C,A))
```

$$\begin{aligned} A \cdot (B \times C) &= -4.0 \\ C \cdot (A \times B) &= -4.0 \\ B \cdot (C \times A) &= -4.0 \end{aligned}$$

Con lo que se verifica la identidad (al menos para los vectores escogidos.)

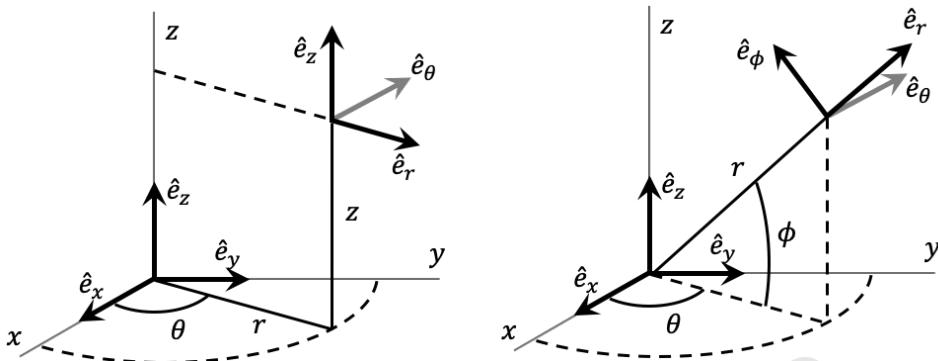


Figura 4.2: Definición de los sistemas de coordenadas usados en este texto

#### 4.1.2. Sistemas de coordenadas

A lo largo de este libro, usaremos los tres sistemas de coordenadas ortogonales clásicos (cartesianas, cilíndricas y esféricas, ver Figura 4.2) con algunas convenciones más propias de la astronomía y la mecánica celeste que del cálculo.

A continuación, y en especial para clarificar nuestra notación, enumeramos detalladamente las propiedades de cada sistema.

- **Sistema de coordenadas cartesiano.**

- Coordenadas:  $x \in (-\infty, +\infty)$ ,  $y \in (-\infty, +\infty)$ ,  $z \in (-\infty, +\infty)$ .
- Vectores unitarios:  $\hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z$ .
- Comentarios:
  - En todos los casos la orientación de los ejes obedecerá la *regla de la mano derecha*, es decir, los sistemas cartesianos usados en el texto y cuyos ejes están definidos por el conjunto de vectores unitarios ( $\hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z$ ) forman un *conjunto de mano derecha* (ver Ec. 4.5), a saber, en forma explícita:

$$\begin{aligned}\hat{e}_x \times \hat{e}_y &= \hat{e}_z \\ \hat{e}_y \times \hat{e}_z &= \hat{e}_x \\ \hat{e}_z \times \hat{e}_x &= \hat{e}_y\end{aligned}\tag{4.11}$$

- **Sistema de coordenadas cilíndrico** (ver Figura 4.2).

- Coordenadas:  $r \in [0, +\infty)$ ,  $\theta \in [0, 2\pi)$ ,  $z \in (-\infty, +\infty)$ .
- Conversión al sistema de coordenadas cartesianas:

$$\begin{aligned}x &= r \cos \theta \\ y &= r \sin \theta\end{aligned}\tag{4.12}$$

- Vectores unitarios expresados en el sistema de coordenadas cartesianas:

$$\begin{aligned}\hat{e}_r &= \cos \theta \hat{e}_x + \sin \theta \hat{e}_y \\ \hat{e}_\theta &= -\sin \theta \hat{e}_x + \cos \theta \hat{e}_y \\ \hat{e}_z &= \hat{e}_z\end{aligned}\quad (4.13)$$

- Comentarios:

- El conjunto de vectores unitarios  $(\hat{e}_r, \hat{e}_\theta, \hat{e}_z)$  forman un conjunto de mano derecha tal y como se definió en las Ecs. (4.11).
- Nótese que, a diferencia de la notación usada generalmente en los textos de cálculo, la coordenada cilíndrica  $r$  usa la misma letra que la coordenada esférica  $r$  y la magnitud del vector posición (ver siguiente sección). La distinción entre las tres, dependerá del contexto.
- Usaremos la letra griega  $\theta$  para denotar el ángulo *acimutal*, a diferencia de la notación convencional que usa esta letra para la coordenada esférica polar (ángulo del vector posición respecto al eje z.)

- Sistema de coordenadas esférico (ver Figura 4.2).

- Coordenadas:  $r \in [0, +\infty)$ ,  $\theta \in [0, 2\pi)$ ,  $\phi \in [-\pi/2, +\pi/2]$ .
- Conversión al sistema de coordenadas cartesianas:

$$\begin{aligned}x &= r \cos \phi \cos \theta \\ y &= r \cos \phi \sin \theta \\ z &= r \sin \phi\end{aligned}\quad (4.14)$$

- Vectores unitarios expresados en el sistema de coordenadas cartesianas:

$$\begin{aligned}\hat{e}_r &= \cos \phi \cos \theta \hat{e}_x + \cos \phi \sin \theta \hat{e}_y + \sin \phi \hat{e}_z \\ \hat{e}_\theta &= -\sin \theta \hat{e}_x + \cos \theta \hat{e}_y \\ \hat{e}_\phi &= \cos \phi \cos \theta \hat{e}_x + \sin \phi \sin \theta \hat{e}_y - \sin \phi \hat{e}_z\end{aligned}\quad (4.15)$$

- Comentarios:

- El conjunto de vectores unitarios  $(\hat{e}_r, \hat{e}_\theta, \hat{e}_\phi)$  forman un conjunto de mano derecha tal y como se definió en las Ecs. (4.11).
- Nótese que, a diferencia de la notación usada generalmente en los textos de cálculo, la coordenada esférica  $\phi$  se medirá respecto al plano  $x - y$  (como una *latitud*) en lugar de hacerlo respecto al eje  $z$  (como una *colatitud*).

Una interesante página interactiva que permite visualizar mejor la definición de los sistemas de coordenadas y la orientación de los vectores coordenadas puede encontrarse en los siguientes enlaces, tanto para el [sistema de coordenadas cilíndrica](#)<sup>13</sup> como para el [sistema de coordenadas esféricas](#)<sup>14</sup>.

<sup>13</sup><http://dynref.engr.illinois.edu/rvy.html>

<sup>14</sup><http://dynref.engr.illinois.edu/rvy.html>

### 4.1.3. Funciones

Una función es, en términos informales, una regla de correspondencia que asocia los elementos de un conjunto de partida o *dominio* (p.e. el conjunto de los números reales  $\mathbb{R}$ , el conjunto de puntos en un plano  $\mathbb{R}^2$  o de eventos en el espacio tiempo  $\mathbb{R}^4$ ) con los de otro conjunto, llamado rango, de modo a que cada elemento del dominio le corresponde **uno y solo un elemento del rango**.

Entre los distintos tipos de funciones que reconoce el análisis matemático, en este libro nos concentraremos en:

- **Funciones de variable real:** Dominio y rango  $\mathbb{R}$ . Ejemplo:  $f(t) = t^2$ .
- **Funciones de muchas variables o Campos escalares:** Dominio  $\mathbb{R}^n$ , rango  $\mathbb{R}$ . Ejemplos:  $f(x, y) = x^2 + y^2$ ,  $H(\{q_i\}_N) = \sum_i q_i^2$  (para la notación del conjunto  $\{q_i\}$  ver la Sección 4.1.1).
- **Funciones vectoriales:** Dominio  $\mathbb{R}$ , rango  $\mathbb{R}^n$ . Ejemplo:  $\vec{u}(t) = kr^{-n}\hat{\ell}_r$ .
- **Funciones vectoriales de muchas variables o Campos vectoriales:** Dominio  $\mathbb{R}^n$ , rango  $\mathbb{R}^3$ . Ejemplo:  $\vec{F}(r, \theta, z) : -k(r \cos \theta, r \sin \theta, z)$ .

#### Nota

*t como variable genérica de las funciones.* En todos los textos de matemáticas (incluso en los de física) se acostumbra usar  $x$  como el nombre preferido para representar, de forma genérica, la variable independiente de las funciones. En lo sucesivo cambiaremos esta convención al llamar  $t$  a la variable independiente genérica. La razón no puede ser más sencilla: en la mecánica  $t$  es el nombre que damos a la variable independiente por excelencia, el tiempo, de modo que muchas de las fórmulas que desarrollaremos en este capítulo, se trasladaran simbólicamente casi sin modificación a la mecánica.

Es obvio que la elección de la letra con la que representamos la variable independiente, no modifica en nada las definiciones y teoremas que veremos en esta sección, de modo que esperamos esta elección no moleste a los más conservadores ni confunda a quienes han estudiado ampliamente estos temas en otros textos.

### Algoritmos para funciones

Hay dos maneras de definir una función en Python: 1) como una rutina o 2) como una función `lambda`.

Como una rutina, una función en Python puede recibir como “argumentos” de entrada no solo las variables de la función sino también argumentosopcionales.

La siguiente función, por ejemplo, permite calcular el valor de la energía potencial de un sistema físico usando la función de varias variables  $U(\vec{r}) = kr^n$  (siendo  $\vec{r} : x, y, z$  el vector posición y  $r$  su magnitud.)

(Algoritmo 4.1)

```
def U(x,y,z,k=1,n=-1):
    r=(x**2+y**2+z**2)**0.5
    return k*r**n
```

$U(1.0, 2.0, 0.0)$  con  $k = 1$  y  $n = -1$  (valores por defecto) = 0.4472135954999579  
 $U(1.0, 2.0, 0.0)$  con  $k = 6.67e-11$  y  $n = -2$  = 1.334e-11

### Nota

**Argumentos obligatorios y argumentos opcionales.** Toda rutina en Python puede tener unos argumentos obligatorios (que llamaremos variables) o unosopcionales.

Las variables son en estricto sentido una tupla de valores, por ejemplo  $x, y, z$  en la función  $U$  en el Alg. (4.1).

Los argumentosopcionales son, por otro lado, un diccionario de valores, que no es otra cosa que una lista de valores identificados con un nombre (también llamado clave o key). En la función  $U$  en el Alg. (??) los argumentosopcionales son  $k=1, n=-1$ .

En Python las variables y las opciones de una rutina pueden representarse usando los objetos especiales `*variables` y `**opciones`. El uso de estos objetos especiales no es muy común, pero en ciertas situaciones puede ser bastante útil.

Una forma alternativa de la rutina para  $U$  en el Alg. (??) es:

```
def U(*variables,**opciones):
    x,y,z=variables
    r=(x**2+y**2+z**2)**0.5
    return opciones["k"]*r**n
```

que se puede invocar usando:

```
var=1.0,2.0
opc=dict(k=1,n=-2)
U(*var,**opc)
```

No parece muy práctico, pero como veremos puede ser muy útil en ciertas situaciones especiales.

Las funciones `lambda` se usan para representar funciones muy abreviadas y no tienen argumentos distintos de las variables de las que dependen.

Así, por ejemplo, el siguiente algoritmo define una función `lambda`,  $U_x$ , basada en la función  $U$  del Alg. (??), que depende solo de la variable  $x$  cuando y asumes constante los valores de  $y$  y  $z$  ( $U_x$  será util para calcular más abajo la derivadas parcial de  $U$  respecto a  $x$ ):

(Algoritmo 4.2)

```

y=1.0
z=1.0
k=1
n=-2
U_x=lambda x:U(x,y,z,k,n)

```

$U_x(0.0) = 0.4999999999999994$

#### 4.1.4. Derivadas

La derivada de una función de variable real es en sí misma una función definida por el límite:

$$\frac{df}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t) - f(t + \Delta t)}{\Delta t} \quad (4.16)$$

Si el límite no existe decimos que la función no es derivable en  $t$ .



#### Nota

**Notación de la derivada.** A lo largo de la historia la manera como se ha representado la función derivada ha cambiado. Existen al menos tres notaciones comunes:

- La **notación de Leibniz**,  $df/dt$ ,  $d^2f/dt^2$ . En esta notación la derivada se representa como si fuera la razón entre dos cantidades, pero no es así ¡mucho cuidado! Usaremos la notación de Leibniz especialmente para representar la derivada de funciones que se escriben de forma explícita, así por ejemplo:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} t^2 \right)$$

- La **notación de Newton**,  $\dot{f}$ ,  $\ddot{f}$ . Esta será la forma que usaremos para denotar a lo largo del libro las derivadas respecto del tiempo (o el tiempo propio en relatividad).
- La **notación de Lagrange**,  $f'$ ,  $f''$ , que no usaremos en este libro pero que pueden encontrar en muchos textos clásicos de mecánica celeste o analítica.
- La **notación de Euler**,  $Df$ ,  $D^2f$ , es la notación menos común, pero puede aparecer en el contexto de la mecánica de fluidos.

La definición de derivada de las funciones de variable real como un límite, se extiende por analogía a campos escalares, funciones vectoriales o campos vectoriales. Para las funciones que dependen de varias variables, sin embargo, se usa

una notación y un nombre diferente: **derivada parcial**. La derivada parcial de un campo escalar se define como:

$$\frac{\partial f}{\partial q_k} = \lim_{\Delta q_k \rightarrow 0} \frac{f(q_1, q_2, \dots, q_k + \Delta q_k, \dots, q_N) - f(q_1, q_2, \dots, q_k, \dots, q_N)}{\Delta q_k}$$

La derivada parcial se calcula de la misma manera que la derivada de una variable, con la salvedad de que al hacerlo se asume que todas las demás variables de la función son constantes.

En muchas partes en este libro, y por economía usaremos la notación de Euler para las derivadas parciales, a saber:

$$\partial_x f \equiv \frac{\partial f}{\partial x}$$

En esta notación una derivada parcial múltiple se escribirá como:

$$\partial_{xyz} f(x, y, z) \equiv \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z}$$

A pesar de que la derivada parcial tiene una definición *numérica* análoga a la de la derivada total, existe una sutil diferencia entre ambas.

Imagine que tenemos una **variable independiente**  $t$  y definimos, a partir de ella, una nueva variable  $u$  que es función de  $t$  (variable dependiente).

¿Cómo podemos calcular la derivada de una función de la nueva variable  $f(u)$  respecto de la variable independiente  $t$ ?

#### Teorema 4.1

**Regla de la Cadena.** Dada una función compuesta  $f(u(t))$ , la derivada de  $f$  respecto a  $t$  es:

$$\frac{df}{dt} = \frac{df}{du} \frac{du}{dt}$$

Decimos que la función  $f$  depende *implícitamente* de la variable independiente  $t$ . En este sentido la regla de la cadena es una regla de *derivación implícita*.

Usando la notación de Newton la expresión anterior se escribirá de forma abreviada:

$$\dot{f}(t) = \dot{u} \frac{df}{du}$$

¿Qué pasa en el caso en el que  $f$  depende de varias variables dependientes, por ejemplo  $f(q_1(t), q_2(t), \dots, q_N(t)) \equiv f(\{q_i(t)\}_N)$ ?

En este caso la regla de la cadena se puede generalizar como:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial q_1} \frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial f}{\partial q_2} \frac{dq_2}{dt} + \dots + \frac{\partial f}{\partial q_N} \frac{dq_N}{dt} = \sum_i \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} = \sum_i \dot{q}_i \partial_{q_i} f$$

Ahora bien: ¿existirá, en este caso, la derivada parcial de  $f$  respecto de  $t$ ?

La respuesta a esta pregunta, ilustra, justamente, la diferencia sutil entre la derivada ordinaria o *derivada total*  $d/dt$  y la derivada parcial  $\partial/\partial t$ .

Hay dos situaciones posibles:

- Si la función  $f$  no depende explícitamente de  $t$ , es decir si la variable  $t$  no aparece en la fórmula de  $f$ , entonces  $\partial f / \partial t = 0$ . Este resultado es *independiente* de que  $f$  dependa implícitamente de  $t$  a través de otras variables dependientes.
- Ejemplo:** si  $f(q, t) = q^2$ , entonces:  $\partial f / \partial t = 0$  aunque, por regla de la cadena,  $df/dt = 2q\dot{q}$ .
- Si la fórmula de la función  $f$  contiene la variable  $t$ , entonces su derivada parcial puede ser distinta de cero (dependiendo de la forma funcional de  $f$ ).
- Ejemplo:** Si  $f(q, t) = q^2 + \sin t$ , entonces:  $\partial f / \partial t = \cos t$  y  $df/dt = 2q\dot{q} + \cos t$ .

En este sentido la derivada parcial es como un “operador semántico”, es decir un operador sobre las “letras” que aparecen en la fórmula de la función.

Teniendo en cuenta esta propiedad, la forma más general de la regla de la cadena, para una función de varias variables (campo escalar o vectorial) será:

$$\frac{d}{dt}f(\{q_i\}, t) = \sum_i \dot{q}_i \partial_{q_i} f + \frac{\partial f}{\partial t} \quad (4.17)$$

#### 4.1.5. Funciones homogéneas

Existe un interesante conjunto de funciones para las cuales hay una relación no trivial entre su derivada y el valor de la función misma. Se conocen como **funciones homogéneas**:

##### Definición 4.1

**Funciones homogéneas.** Una función general  $f(\{q_i\})$  se llama homogénea si frente a una operación de escalado de sus variables (multiplicación por un escalar), la función *escala* también. En términos matemáticos:

$$f(\{\lambda q_i\}) = \lambda^k f(\{q_i\})$$

donde  $\lambda$  es un número real y  $k$  se conoce como el **orden** de la función.

Las funciones homogéneas son, generalmente polinomios y funciones racionales. Así por ejemplo  $f(x, y) = x^2/a^2 + y^2/b^2$ , con  $a$  y  $b$  constantes, y que representa la ecuación algebraica de una elipse, es una función homogénea de grado  $k = 2$ . De otro lado  $f(x) = x^3y^2 + y^5$  es homogénea de grado  $k = 5$ .

Las funciones homogéneas más interesantes para nosotros en este libro son del tipo  $f(\vec{r}) = kr^n$  que son homogéneas de grado  $k = n$  (ver problemas al final del capítulo.)

Como mencionamos desde el principio, las derivadas de las funciones homogéneas tienen una propiedad muy importante:

**Teorema 4.2**

**Teorema de funciones homogéneas de Euler.** Si una función  $f(\{q_i\}_N)$  es homogénea de grado  $k$ , entonces:

$$\sum_i q_i \frac{\partial f}{\partial q_i} = kf$$

Para funciones homogéneas definidas en el espacio de tres dimensiones, el teorema de Euler se puede escribir como:

$$\vec{r} \cdot \vec{\nabla} f = kf$$

#### 4.1.6. Derivada vectorial

Para funciones de varias variables (especialmente aquellas con dominio en el espacio coordenado  $\mathbb{R}^3$ ) se definen generalizaciones vectoriales de la derivada que tienen motivaciones e interpretaciones geométricas específicas.

El *operador diferencial vectorial* básico se conoce como el **gradiente**. Denotado comúnmente como  $\vec{\nabla}$ , en coordenadas cartesianas se define explícitamente como:

$$\vec{\nabla} f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x} \hat{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{e}_z \quad (4.18)$$

El operador gradiente en el sistema de coordenadas cilíndrico (con la notación definida anteriormente) está dado por:

$$\vec{\nabla} f(r, \theta, z) = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{e}_z \quad (4.19)$$

Donde el factor  $1/h_\theta \equiv 1/r$  se conoce como *factor de escala*.

Por su parte en coordenadas esféricas (con la notación definida anteriormente):

$$\vec{\nabla} f(r, \theta, \phi) = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{e}_\theta + \frac{1}{r \cos \phi} \frac{\partial f}{\partial \phi} \hat{e}_\phi \quad (4.20)$$

En este caso se ha introducido un nuevo factor de escala:  $h_\phi \equiv r \cos \phi$ .

#### Nota

**Una notación para el gradiente.** Como lo hicimos con la derivada parcial, a lo largo de este libro, abreviaremos el gradiente usando la notación especial:

$$\partial_{\vec{r}} f \equiv \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} \equiv \vec{\nabla} f$$

Aunque no es una notación muy rigurosa, permite abreviar expresiones que de otra manera serían muy elaboradas. Así por ejemplo, la regla de la cadena (Ec. 4.17) para funciones definidas en el espacio coor-

### Nota (Cont.)

denado, se puede escribir de forma compacta como:

$$\dot{f}(x, y, z, t) = \partial_{\vec{r}} f \cdot \dot{\vec{r}} + \partial_t f \quad (4.21)$$

Existen otros operadores vectoriales (laplaciano, divergencia, rotacional) sobre los que no profundizaremos aquí por no ser de mucha utilidad práctica en la mecánica celeste (al menos no al nivel de este libro.)

### Algoritmos para la derivada

Existen diversos algoritmos para calcular la derivada de una función en una o varias variables. En este libro, en donde sea necesario, nos apoyaremos de la biblioteca científica `scipy` y su rutina `derivative` que permite calcular, numéricamente, derivadas de cualquier orden.

El siguiente algoritmo ilustra el uso de `derivative` y sus opciones:

```
def f(t):
    from math import sin
    return sin(t)/t

#Valor de la variable independiente donde queremos la derivada
t=2.0

from scipy.misc import derivative

#Primera derivada usando un dx=0.01 y 3 puntos
dfdt=derivative(f,t,dx=1e-2,n=1,order=3)

#Segunda derivada en t
d2fdt2=derivative(f,t,dx=1e-2,n=2,order=5)

dfdt : Numérica = -0.4353938258295498, Exacta = -0.43539777497999166
d2fdt2 : Numérica = -0.019250938436687903, Exacta = -0.01925093843284925
```

Usando `derivative` es posible diseñar funciones para calcular derivadas parciales e incluso gradientes (para los cuales no existen funciones en la biblioteca `scipy`). Así por ejemplo:

```
def f(x,y,z):
    from math import sin
    return sin(x*y*z)/(x*y*z)

def partial_derivative_x(f,x,y,z,**opciones):
    f_solo_x=lambda x:f(x,y,z)
    dfdx=derivative(f_solo_x,x,**opciones)
    return dfdx
```

```
x=1.0
y=2.0
z=3.0
dfdx=partial_derivative_x(f,x,y,z,dx=0.01)
```

dfdx: Numérica = 1.0061803563982654, Exacta = 1.006739536350187

Nótese como usamos aquí la función `lambda f_solo_x`, de la manera que lo hicimos en el Algoritmo (4.2) para conseguir el resultado deseado.

#### 4.1.7. Integrales

Se llama **antiderivada** de una función de variable real  $f(t)$ , a la función  $F(t)$  cuya derivada es igual a la función original:

$$\dot{F}(t) = f(t)$$

O en notación *integral*:

$$F(t) \equiv \int f(t) dt$$

A  $F(t)$  o equivalentemente  $\int f(t) dt$  se la llama también la **integral indefinida** de  $f(t)$ .

La antiderivada permite calcular la **cuadratura de una función**, que no es otra cosa que el área encerrada por la curva en el plano cartesiano definido por la variable independiente y los valores de la función:

##### Teorema 4.3

**Fórmula de Newton-Leibniz.** <sup>a</sup> Dada una función  $f(t)$  que tiene antiderivada  $F(t)$  definida en el intervalo  $[a, b]$ , el área o cuadratura de la función en el mismo intervalo esta dado por:

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$$

A la cantidad  $\int_a^b f(t) dt$  se la llama **integral definida** de  $f(t)$ .

<sup>a</sup>A esta fórmula se la llama a menudo *segundo teorema fundamental del cálculo*

En términos de la integral definida podemos definir una nueva función:

$$I(t) = \int_a^t f(\tau) d\tau$$

Nótese que para ser rigurosos hemos cambiado el nombre de la “variable de integración”  $\tau$  para no confundirla con el límite superior de la integral  $t$ .

Esta nueva función tiene una importante propiedad:

**Teorema 4.4**

**Teorema fundamental del cálculo.** Dada una función  $f(t)$  integrable en el intervalo  $[a, b]$ , si definimos la función  $I(t) = \int_a^t f(\tau) d\tau$ , entonces:

$$\frac{dI}{dt} = f(t)$$

o bien,

$$\frac{d}{dt} \int_a^t f(\tau) d\tau = f(t) \quad (4.22)$$

Es interesante anotar que aunque la antiderivada  $F(t)$  y la función  $I(t)$  tienen la misma derivada en  $t$ , es decir  $dF/dt = dI/dt = f(t)$ , no son necesariamente la misma función. Considere, por ejemplo, el hecho elemental de que  $I(a) = 0$  (por definición) mientras que  $F(a)$  podría ser cualquier número (incluyendo cero por supuesto.)

#### 4.1.8. Integrales vectoriales

Una extrapolación del concepto de integral a funciones de varias variables (campos escalares y campos vectoriales) conduce a algunas operaciones integrales de gran importancia en la física. Para los propósitos de lo que veremos en este libro, son de particular interés las integrales del tipo:

$$\int \vec{F} \cdot d\vec{r},$$

que se define sobre todos los valores de  $\vec{r}$  de una curva en el espacio coordenado. A esta integral se la conoce como **integral de línea**. Si la trayectoria es cerrada, escribiremos:

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{r},$$

que no se diferencia (matemáticamente) en nada de una integral de línea. A esta integral la llamaremos **circulación** del campo vectorial  $\vec{F}$ .

Otro tipo de integral vectorial de interés es:

$$\int_{\Sigma} \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

Donde  $d\vec{S}$  tiene dirección normal a la superficie  $\Sigma$  (formada por el lugar geométrico de todos los puntos que la definen) y magnitud igual al área de una fracción infinitesimal de la superficie.

**Teorema 4.5**

**teorema de Stokes.** Si  $\vec{F}(\vec{r})$  es un campo vectorial diferenciable en todos los puntos del espacio, entonces:

**Teorema 4.5 (Cont.)**

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\Sigma} (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot d\vec{S}$$

Donde  $\Sigma$  es cualquier superficie que tenga como frontera la trayectoria sobre la que se define la circulación.

Un importante corolario del teorema de Stokes es el siguiente:

**Teorema 4.6**

**Corolario de Stokes.** Si el campo vectorial  $\vec{F}(\vec{r})$  tiene circulación nula:

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

Entonces existe un campo escalar  $U(\vec{r})$  tal que:

$$\vec{F} = \vec{\nabla} U$$

Llamamos a  $U$  la función *potencial* de  $\vec{F}$ .

**Algoritmos para la integral**

El cálculo numérico de integrales es una basta área del análisis numérico. En cada lenguaje de programación es posible encontrar bibliotecas completas con rutinas para el cálculo de aproximaciones numéricas de integrales definidas e integrales vectoriales.

Para los propósitos de este libro, usaremos la rutina `quad` de la biblioteca SciPy para calcular numéricamente integrales definidas de funciones de variable real.

En el algoritmo provisto a continuación, calculamos, por ejemplo, el trabajo  $W \equiv \int F(x) dx$  sobre una partícula que se mueve en una dimensión sometida a una fuerza del tipo  $F(x) = -kx$ , asumiendo que  $k = 0,1$  y que la partícula se desplaza entre  $x = 1,0$  y  $x = 5,0$ :

```
#El integrando debe definirse como una rutina
def F(x,k=1):
    return -k*x

from scipy.integrate import quad
k=0.1
x0=1.0
x1=5.0
integral=quad(F,x0,x1,args=(k,))
```

Integral: Numérica = (-1.2, 1.3322676295501878e-14), Exacta = -1.2

Nótese que los argumentos opcionales del integrando se pasan como la tupla `args` que en este caso, dado que la función solo depende de un parámetro opcio-

nal, se escribe de forma poco intuitiva como `args=(k,)` donde la coma final es obligatoria.

El resultado de la función quad es una tupla con dos números: el valor de la integral y el error estimado de la misma. Como vemos, en el ejemplo arriba, la integral es prácticamente exacta.

### Nota

**Cuadraturas Gaussianas.** El método usado por quad para calcular la integral se conoce como *cuadraturas gaussianas* y approxima la integral como una serie de pocos términos del valor de la función definido en algunos puntos específicos [23]. Las cuadraturas gaussianas permiten calcular la integral de funciones polinómicas de forma *exacta*. Esta es la razón por la cual la integral en el ejemplo dado aquí, es idéntica al valor esperado.

#### 4.1.9. Ecuaciones diferenciales

Encontrar la antiderivada de una función (ver [Sección 4.1.7](#)), se puede formular, de forma general, como el problema de encontrar una función  $F(t)$  tal que:

$$\frac{dF(t)}{dt} = f(t) \quad (4.23)$$

La solución a este problema es, por definición:

$$F(t) = \int f(t) dt$$

La integral indefinida en el lado derecho de la anterior ecuación y los métodos numéricos o exactos (analíticos) para obtenerla (no cubiertos en este corto resumen) representan unas de las herramientas matemáticas más útiles de la física.

Pero, existen situaciones en las que el cálculo de una antiderivada no se reduce simplemente a una integral indefinida. Considere por ejemplo el siguiente problema:

$$\frac{d^2F(t)}{dt^2} = -kF(t) \quad (4.24)$$

que, en palabras, se formularía como: encontrar la función cuya segunda derivada es proporcional ( $k$  se supone constante) al negativo de ella misma.

Ambas, las Ecs. (4.23) y (4.24) se conocen como **ecuaciones diferenciales**.

Las ecuaciones diferenciales se clasifican según:

- **Su orden.** El orden de una ecuación diferencial es igual al máximo orden de la derivada de la función objetivo (antiderivada) que aparece en la ecuación. La ecuación diferencial básica (4.23) es, por ejemplo, de *primer orden* porque solo involucra la *primera* derivada de la función  $F(t)$ . Por su parte, la ecuación diferencial (4.24) es una ecuación diferencial de *segundo orden*.

- **Su linealidad.** Una ecuación diferencial que solo depende de primeras potencias de la función y sus derivadas se dice que es lineal. En caso contrario tenemos una *ecuación diferencial no lineal*. Las ecuaciones (4.23) y (4.24) son lineales, pero la siguiente ecuación diferencial de primer orden, no lo es:

$$\frac{dF(t)}{dt} = \frac{h}{F(t)},$$

donde  $h$  es una constante.

- **El número de variables independientes.** Una ecuación diferencial en la que la función depende de una sola variable real se conoce como una **ecuación diferencial ordinaria** (*ODE* por la sigla en inglés de *ordinary differential equation*). Si, por otro lado, la función es un campo escalar o vectorial y la ecuación diferencial se expresa en términos de derivadas parciales (y totales) hablamos de una **ecuación diferencial parcial** (*PDE* por sus siglas en inglés).
- **El número de funciones o variables dependientes.** Es posible que un problema implique encontrar más de una antiderivada. En ese caso hablamos de un **sistema de ecuaciones diferenciales**. Un caso común de sistemas de ecuaciones diferenciales se produce cuando queremos encontrar la antiderivada de una función vectorial (cada componente de una función vectorial es una función en sí misma). El caso más importante en la física de un sistema de ecuaciones diferenciales es la *ecuación de movimiento de una partícula* (que exploraremos a fondo en la ??):

$$\frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} = \vec{a}$$

Esta ecuación es una forma abreviada de escribir el sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned}\frac{d^2x(t)}{dt^2} &= a_x \\ \frac{d^2y(t)}{dt^2} &= a_y \\ \frac{d^2z(t)}{dt^2} &= a_z\end{aligned}\tag{4.25}$$

Como las cantidades  $a_x$ ,  $a_y$  y  $a_z$  pueden ser a su vez funciones del tiempo, de las funciones  $x$ ,  $y$ ,  $z$  y de sus derivadas, se habla, además, de un **sistema de ecuaciones diferenciales acopladas**.

- **Las condiciones que deben proveerse para resolverla.** La solución abstracta de una ecuación diferencial, es decir, el problema de encontrar la antiderivada general, es el equivalente a la integral indefinida. Las integrales definidas, por su lado, equivalen en la teoría de ecuaciones diferenciales a los que se

conocen como **problemas de valor inicial** (*IVP* por el acrónomimo en inglés de *initial value problem*.) En este tipo de problemas la solución a la ecuación diferencial consiste en encontrar el valor de la función para cualquier valor de la variable independiente una vez se ha provisto el valor de la función (o funciones) y de sus derivadas, en un valor específico o inicial de la variable independiente. Así por ejemplo:

$$\frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} = \vec{a}, \text{ con } \vec{r}(0) : (0, 0, 0) \text{ y } \dot{\vec{r}}(0) : (1, 0, 0)$$

es un IVP.

Por otro lado un **problema de condiciones de frontera** (*BVP* por la sigla en inglés de *boundary value problem*) es aquel en el que el valor de la función dependiente (no de sus derivadas necesariamente) se provee para varios valores de la variable independiente. Así por ejemplo:

$$\frac{d^2F(t)}{dt^2} = -F(t), \text{ con } F(0) = 0 \text{ y } F(\pi/2) = 1,0,$$

es un BVP.

Como se intuye fácilmente, la dificultad en la solución a una ecuación diferencial, como sucede también con las ecuaciones algebraicas, puede aumentar con su orden. Sin embargo, usando variables auxiliares, siempre es posible escribir una ecuación diferencial de orden  $M$  como un sistema de  $M$  ecuaciones diferenciales de primer orden.

Por ejemplo, si en la Ec. (4.24) llamamos  $G(t) \equiv dF(t)/dt$ , esa ecuación diferencial de segundo orden se puede escribir como el sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dt} &= G \\ \frac{dG}{dt} &= -kF \end{aligned} \tag{4.26}$$

A esta sistema de ecuaciones, lo llamamos el *sistema de ecuaciones diferenciales reducido*.

La reducción del orden será un método muy utilizado en este libro para abordar la solución a las ecuaciones diferenciales de la mecánica celeste y analítica.

### Algoritmos para la solución de ODE

La solución aproximada de ecuaciones diferenciales es una de las áreas de mayor interés en el análisis numérico. Sus beneficios prácticos se extienden desde la física teórica y la economía hasta la climatología y la simulación del vuelo de aviones y vehículos espaciales. A lo largo de los últimos 350 años (y en paralelo con la evolución de la mecánica), se han desarrollado métodos numéricos para aproximar la solución de todos los tipos de ecuaciones diferenciales que hemos mencionado hasta aquí.

En este libro, sin embargo, nos concentraremos en la solución de sistemas ecuaciones diferenciales ordinarias con valores iniciales o *IVP*.

Los métodos numéricos generales, desarrollados para resolver este tipo de problemas (ver [23] para detalles sobre los métodos y algoritmos explícitos), suponen que la ecuación o sistema de ecuaciones diferenciales que queremos resolver puede escribirse como un sistema reducido de ecuaciones diferenciales de primer orden de la forma:

$$\{\dot{Y}_i = f_i(\{Y_k\}, t)\}_{i=0,1,\dots,M} \quad (4.27)$$

Donde  $Y_i$  ( $i = 0, 1, 2, \dots, M - 1$ ) es el conjunto de funciones auxiliares que reemplaza a las funciones dependientes y sus derivadas de orden inferior y  $f_i$  son las función que proveen el valor de la primera derivada de la variable auxiliar  $Y_i$ .

Así por ejemplo, para resolver la ecuación diferencial (4.24), que ya habíamos reducido como las ecuaciones (4.26), las variables auxiliares y sus derivadas serían:

$$\begin{aligned} Y_0 &= F & f_0(t, Y_0, Y_1) &= Y_1 \\ Y_1 &= G & f_1(t, Y_0, Y_1) &= -kY_0 \end{aligned} \quad (4.28)$$

Con esta identificación, el problema original puede escribirse, de forma general como la Ec. (4.27).

En este libro usaremos la rutina `odeint` de la biblioteca científica SciPy (ver *Nota* abajo) para integrar numéricamente sistemas de ecuaciones diferenciales de la forma reducida. El lector puede leer la [documentación completa de `odeint`](#)<sup>15</sup> para conocer los detalles de su aplicación.

El primer paso para usar `odeint` es implementar las ecuaciones reducidas como una rutina. En nuestro ejemplo (Ec. 4.28) la rutina sería:

```
def ode_simple(Y, t, k=1):
    f=[0, 0]
    f[0]=Y[1]
    f[1]=-k*Y[0]
    return f
```

Los primeros dos argumentos de esta rutina (ver Sección 4.1.3), es decir  $Y$  (que contiene una lista de los valores instantáneos de las variables auxiliares  $Y_i$ ) y  $t$  (el tiempo en el que las variables auxiliares tienen ese valor) deben estar, estrictamente en ese orden. Otros podrían encontrar más natural poner de primero el tiempo, pero `odeint` está diseñado para trabajar con rutinas con este *prototipo* particular. Además de estos argumentos obligatorios, la rutina puede tener cualquier otro argumento opcional. En este caso aprovechamos esta libertad para proveer el valor de la constante  $k$ , que aparece en la ecuación diferencial, y para el cual hemos asumido un valor por defecto  $k=1$  (naturalmente el usuario de la rutina podrá especificar un valor distinto cuando la llame.)

Para resolver este conjunto de ecuaciones diferenciales debemos, además de la rutina anterior, proveer:

1. Valores específicos para los parámetros de la ecuación diferencial (en este caso la constante  $k$ ),
2. Una lista de condiciones iniciales, es decir de los valores iniciales de las variables auxiliares  $\{Y_i(t = t_0)\}$

<sup>15</sup><https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.integrate.odeint.html>

3. un conjunto de valores del tiempo (incluyendo el tiempo inicial  $t_0$ ) para los cuales deseamos predecir el valor de la antiderivada (función o funciones dependientes.)

El siguiente algoritmo prepara estos insumos para `odeint` en nuestro ejemplo particular:

```
from numpy import array

k=1.5

Y0s=array([1.0,0.0])

ts=array([0.0,1.0,2.0,3.0,4.0,5.0])
```

Nótese que para las condiciones iniciales y los valores de tiempo (que son aquí arbitrarios, el lector podría escoger unos completamente diferentes) hemos escogido usar arreglos de NumPy (`array`) en lugar de listas planas (ver [Sección 4.1.1](#)). Aunque esto no es obligatorio, más adelante hará más fácil la manipulación matemática de estas variables.

### Nota

**El plural en los algoritmos.** Preste atención a la convención que usaremos en lo sucesivo de usar la letra `s` como sufijo del nombre de algunos arreglos y matrices (p.e. `Y0s`, `ts`). En lo sucesivo (a no ser que se indique lo contrario) `t` denotará un valor individual de la variable, pero `ts` será un arreglo de valores de `t`.

La solución numérica al conjunto de ecuaciones diferenciales implementados en la rutina `ode_simple` se obtiene, finalmente, invocando `odeint`:

```
from scipy.integrate import odeint
Ys=odeint(ode_simple,Y0s,ts,args=(k,))
```

Solución, `Ys` =

```
[[ 1.          0.        ]
 [ 0.33918602 -1.15214115]
 [-0.76990562 -0.78158038]
 [-0.86146852  0.6219388 ]
 [ 0.18550948  1.20348632]
 [ 0.987313   0.1944726 ]]
```

Las filas de la matriz solución `Ys`, contienen el valor de las variables auxiliares  $\{Y_i\}$  en cada uno de los tiempos provistos. Las columnas, naturalmente, corresponden a los valores instantáneos de cada una de esas variables auxiliares. Así, la componente `Ys[0,0]` corresponde al valor de  $Y_0$  (es decir el valor de la función  $F$  de nuestro ejemplo) en  $t_0$  (condición inicial).

También es posible extraer tajadas de la matriz. Así,  $\text{Ys}[:, 1]$  (que podría leerse como *el segundo valor de cualquier fila* o simplemente *la columna 1*), corresponde al valor de la función auxiliar  $G$  en cada uno de los tiempos de integración (recuerde que  $G = Y_1$ , ver la identificación en la Ec. 4.28).

Usando la matriz de solución  $\text{Ys}$  es posible, finalmente, hacer el gráfico de la función  $F(t)$  que estabamos buscando:

(Algoritmo 4.3)

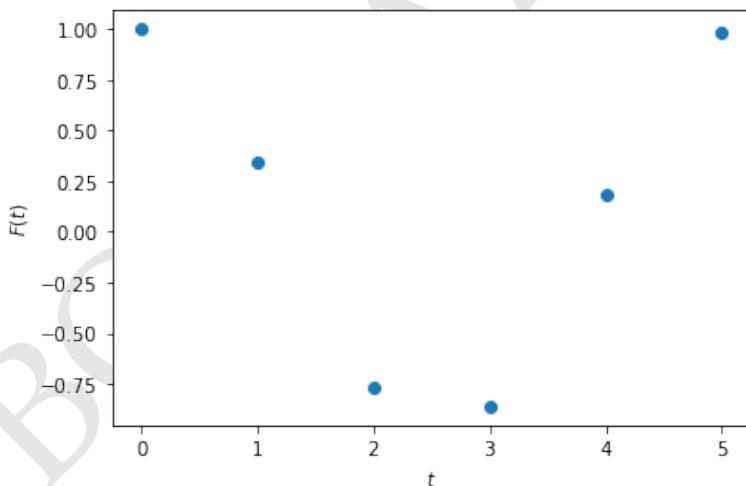
```
import matplotlib.pyplot as plt

#Extraemos los valores de la función F
Fs=Ys[:,0]

plt.figure();
plt.plot(ts,Fs,marker='o', linewidth=0);

#--hide--
plt.xlabel("$t$");
plt.ylabel("$F(t)$");
```

*ver Figura 4.3*



**Figura 4.3:** Figura correspondiente al código 4.3. Solución aproximada de la ecuación diferencial  $d^2F/dt^2 = -kF$  con  $k=1.5$ .

Naturalmente la resolución de este gráfico es bastante pobre porque hemos pedido al algoritmo encontrar únicamente los valores de  $F(t)$  en 5 valores del tiempo (arreglo  $\text{ts}$ .) Si se incrementa el número de componentes de este vector el resultado será mucho más cercano al que esperamos de una función.



### Nota

**Los algoritmos detrás de `odeint`.** La rutina `odeint` es un *empaque* en Python (*wrap* en inglés) de un complejo y robusto paquete de rutinas conocido como **ODEPACK**<sup>a</sup>. Desarrollado por el *Center for Applied Scientific Computing* del *Lawrence Livermore National Laboratory*, las rutinas de ODEPACK están escritas en lenguaje FORTRAN77 (Python se usa únicamente para pasar los parámetros al paquete y para recuperar las salidas; ese es justamente el sentido del nombre “empaque”) y han sido probadas y perfeccionadas durante varias décadas en distintas aplicaciones científicas y de ingeniería [16].

Existen otras rutinas en el paquete SciPy para resolver ecuaciones diferenciales con condiciones iniciales (IVP). Por ejemplo `ode` y `solve_ivp` pueden usarse también (esta última es, por ejemplo, la recomendada por los desarrolladores de SciPy). Sin embargo, estas otras rutinas tienen una *interface* un poco más complicada. Así por ejemplo, para integrar la e.d.m. del ejemplo visto aquí, usando `solve_ivp`, el código **mínimo** en Python sería:

```
from scipy.integrate import solve_ivp
solucion=solve_ivp(fun=lambda t,Y:ode_simple(Y,t,k),
                    t_span=[ts[0],ts[-1]],y0=Y0,t_eval=ts)
```

Como puede apreciarse la complejidad del código supera con creces la de aquel que usamos para invocar `odeint`. A esto se suma el hecho de que la solución, que en el caso de `odeint` es una matriz `Y` fácil de interpretar, en el caso de `solve_ivp` es en realidad un *objeto* cuyo *atributo* `solucion.y` contiene la solución que buscamos. Y finalmente, pero no menos importante: para el tipo de ecuaciones diferenciales que usaremos en este libro `solve_ivp` es casi dos veces más lento que `odeint`. El lector sin embargo puede explorar esas otras alternativas, especialmente si quiere, por ejemplo, comparar distintos métodos de solución (a diferencia de `odeint`, `solve_ivp` escoger el método de solución.)

---

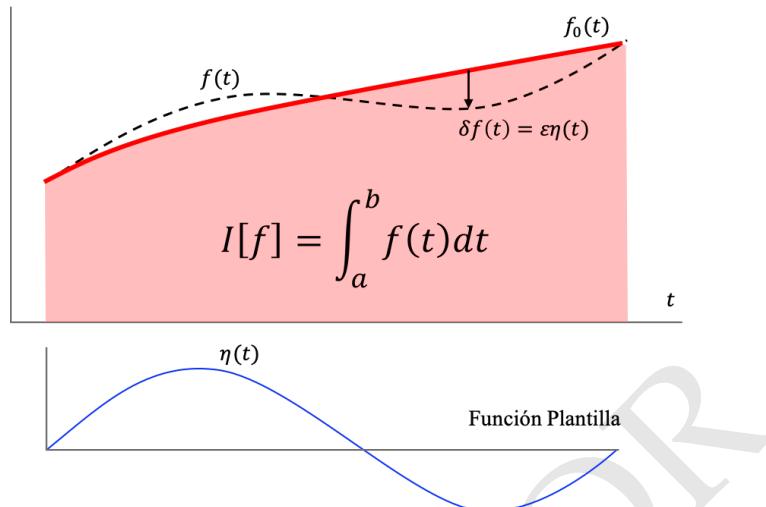
<sup>a</sup><https://computing.llnl.gov/casc/odepack>

#### 4.1.10. Funcionales y cálculo de variaciones

Un tema poco cubierto en los textos básicos de cálculo, pero de gran utilidad en la mecánica, es el denominado **cálculo de variaciones**. Si bien en esta sección de “repaso” no pretendemos ofrecer una introducción detallada a esta importante área del análisis matemático, es necesario presentar aquí algunos resultados básicos que serán de utilidad para el resto del libro.

Si el cálculo infinitesimal, que repasamos en las secciones anteriores, trata sobre la variación continua de funciones de variable real, el cálculo de variaciones se ocupa de la variación de los que se conocen como **funcionales**.

En términos informales, un funcional es una “función de funciones”, es decir,



**Figura 4.4:** El área bajo una curva es un funcional, en tanto depende de la función que represente la curva,  $f(t)$  o  $f_0(t)$ . Se conoce como una variación  $\delta f$  a la diferencia entre dos funciones cercanas, parametrizada a través de un número real  $\epsilon$  y una función plantilla (panel inferior). En términos de variaciones el valor de cualquier función vecina a una función de referencia  $f_0$  se puede calcular, en un intervalo de interés, como  $f(t) = f_0(t) + \epsilon\eta(t)$ .

una regla de correspondencia entre el conjunto de las funciones y el de los números reales.

Un ejemplo, muy interesante e ilustrativo de un funcional, es la integral definida de una función de variable real:

$$I[f] = \int_a^b f(t) dt$$

La notación  $I[f]$ , en lugar de  $I(b)$  como lo usamos en [Sección 4.1.7](#), trata de poner en evidencia el hecho de que lo que nos interesa aquí no es el valor mismo de la integral definida, sino cómo el valor de esta cantidad cambia si modificamos la función  $f$ . En la [Figura 4.4](#) se muestra la interpretación gráfica de la integral definida. Sabemos que el área bajo la curva, el valor de nuestro funcional, dependerá de si usamos la función  $f(t)$  o  $f_0(t)$ .

De la misma manera en la que se puede estudiar el efecto que un cambio muy pequeño  $\Delta t$  en el valor de la variable independiente  $t$  tiene en una función de variable real  $f(t)$ , como lo hicimos por ejemplo para definir la derivada (ver [Sección 4.1.4](#)), en el cálculo variacional es posible estudiar el efecto que un cambio pequeño  $\delta f$  de una función  $f$  tiene en el funcional  $I[f]$ .

Para hacerlo debemos primero definir otra función  $\eta$  que sirve de “plantilla” para el cambio. Al cambio en  $f$  se lo llama **variación** y se escribe como:

$$\delta f \equiv \epsilon\eta \tag{4.29}$$

Una ilustración del concepto de *variación* se muestra en la [Figura 4.4](#). Allí reconocemos una importante propiedad de la función de plantilla  $\eta(t)$  y es que vale

cero en los extremos del intervalo considerado  $[a, b]$ .

El cálculo variacional surgió originalmente para resolver problemas prácticos en física, tales como hallar las funciones que maximan o minimizan (extremos) funcionales de alguna utilidad.

Así por ejemplo, considere la siguiente pregunta: ¿cuál es la curva más corta que conecta dos puntos en el plano de euclíadiano?

Para responder a esta pregunta debemos primero construir el funcional “distancia a lo largo de una curva”, también llamado, longitud de arco ([2]):

$$I[f] = \int_a^b \sqrt{1 + \left| \frac{df}{dt} \right|^2} dt \quad (4.30)$$

Queremos encontrar la función  $f_0$  tal que  $I[f_0]$  tenga el mínimo valor entre todas las posibles funciones  $f$ .

Para encontrar la función que minimiza este funcional debemos, como se acostumbra en el cálculo ([1]), derivar el funcional respecto a la cantidad que parametriza la variación:  $\epsilon$ .

Escribamos el funcional de forma más general, en términos de una función cercana al mínimo escrita como  $f = f_0 + \epsilon\eta$ :

$$I[f] = \int_a^b L(f(t), \dot{f}(t), t) dt \quad (4.31)$$

Nótese que hemos escrito el integrando como una función general  $L$  que depende del valor de la función  $f(t)$ , de su derivada  $\dot{f}(t)$  y de la variable independiente  $t$ . Implícitamente, el funcional depende también del parámetro  $\epsilon$  dado que  $f = f_0 + \epsilon\eta$ .

Si derivamos el funcional respecto de  $\epsilon$ , obtenemos:

$$\frac{dI[f]}{d\epsilon} = \int_a^b \frac{d}{d\epsilon} L(f(t), \dot{f}(t), t) dt$$

Aplicando la regla de la cadena, la integral del lado derecho nos queda:

$$\frac{dI[f]}{d\epsilon} = \int_a^b \left( \frac{\partial L}{\partial f} \frac{df}{d\epsilon} + \frac{\partial L}{\partial \dot{f}} \frac{d\dot{f}}{d\epsilon} \right) dt$$

Como  $f(t) = f_0(t) + \epsilon\eta(t)$ , entonces  $df/d\epsilon = \eta$ , mientras que  $d\dot{f}/d\epsilon = \dot{\eta}$ . Así la integral anterior se desarrolla como:

$$\frac{dI[f]}{d\epsilon} = \int_a^b \left( \frac{\partial L}{\partial f} \eta + \frac{\partial L}{\partial \dot{f}} \dot{\eta} \right) dt \quad (4.32)$$

El término  $\int_a^b (\partial L / \partial \dot{f}) \dot{\eta} dt$  se puede integrar por partes, si se hace  $u = \partial L / \partial \dot{f}$  y  $dv = \dot{\eta} dt$ :

$$\int_a^b \frac{\partial L}{\partial \dot{f}} \dot{\eta} dt = \frac{\partial L}{\partial \dot{f}} \eta \Big|_a^b - \int_a^b \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{f}} \right) \eta dt$$

El primer término del lado derecho de la ecuación anterior es cero, en tanto, por definición  $\eta(a) = \eta(b) = 0$ .

Reemplazando en la Ec. (4.32), la derivada del funcional respecto de epsilon queda finalmente:

$$\frac{dI[f]}{d\epsilon} = \int_a^b \eta(x) \left( \frac{\partial L}{\partial f} - \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial \dot{f}} \right) dx$$

Para que  $I[f]$  sea mínima en  $f = f_0$  su derivada  $dI[f]/d\epsilon$  debe ser cero en  $\epsilon = 0$ . Esto equivale a la *ecuación integral*:

$$\int_a^b \eta(x) \left( \frac{\partial L}{\partial f} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{f}} \right) dt = 0 \quad (4.33)$$

que lamentablemente no es muy útil para resolver nuestro problema original. Para acercarnos a la solución necesitamos de un poderoso teorema:

#### Teorema 4.7

**Lema fundamental del cálculo de variaciones.** Si una función continua  $f(t)$  en el intervalo abierto  $(a, b)$  satisface la igualdad:

$$\int_a^b f(t)h(t) dt = 0$$

para toda función  $h(t)$  continuamente diferenciable (todas sus derivadas son continuas) y con *soporte compacto* (acotada), entonces  $f(t) = 0$ .

De acuerdo con este teorema, y suponiendo que  $\eta(t)$  es continuamente diferenciable y acotada, la función entre paréntesis la ecuación integral (4.33) es:

$$\frac{\partial L}{\partial f} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{f}} = 0 \quad (4.34)$$

Esta ecuación es una versión particular (para funciones de una sola variable) de la que se conoce en la historia como la **ecuación de Euler-Lagrange** y que será de importancia central en este libro.

Volviendo a nuestro problema original, es decir, encontrar la curva con la menor longitud entre dos puntos, y reconociendo que:

$$L(f(t), \dot{f}(t), t) = \sqrt{1 + |\dot{f}(t)|^2},$$

Entonces  $\partial L/\partial f = 0$  (no aparece el símbolo  $f$  en la fórmula de  $L$ ) y  $\partial L/\partial \dot{f} = \dot{f}/\sqrt{1 + |\dot{f}(t)|^2}$ . De allí, la ecuación de Euler-Lagrange (4.34) en este problema se convierte en:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\dot{f}}{\sqrt{1 + |\dot{f}(t)|^2}} \right) = 0$$

Esta ecuación significa que el término entre paréntesis es constante. Después de un poco de álgebra, la expresión resultante, se puede integrar para obtener:

$$f(t) = At + B,$$

donde  $A, B$  son constantes.

La respuesta final a la pregunta original es ahora clara: la curva más corta entre dos puntos en el plano euclíadiano es una línea recta.

### Algoritmos en el cálculo variacional

Si el cálculo variacional es poco común en los textos básicos de cálculo infinitesimal, los algoritmos relacionados con él son aún más escasos en los textos de análisis numérico.

Dada la importancia del cálculo variacional en la mecánica nos detendremos un momento aquí para explorar desde la algoritmia, al menos la solución al problema de cálculo variacional que expusimos en la sección anterior: el cálculo de la curva más corta entre dos puntos en el plano euclíadiano.

Para ello escribamos primero la rutina que servirá en nuestro caso como funcional (y que implementa la Ec. 4.30):

(Algoritmo 4.4)

```
def funcional_integral(f0,eta,epsilon,a,b,**opciones_de_f0):

    #Definimos las función con su variación
    f=lambda t:f0(t,**opciones_de_f0)+epsilon*eta(t)

    #La derivada de f la calculamos con derivative
    from scipy.misc import derivative
    dfdt=lambda t:derivative(f,t,0.01)

    #Este es el integrando del funcional
    from numpy import sqrt
    L=lambda t:sqrt(1+abs(dfdt(t))**2)

    #El funcional es la integral definida del integrando
    from scipy.integrate import quad
    integral=quad(L,a,b)
    longitud=integral[0]

    return longitud
```

Nótese que un *funcional* en el lenguaje de la algoritmia es una rutina que recibe como parámetros otras rutina (en este caso  $f_0$  y  $\eta$ ) y devuelve un valor numérico (en este caso  $longitud$ .)

La rutina en el Alg. (4.4), si bien parece compleja, recoje todos los elementos que hemos aprendido en esta sección: los parámetros opcionales de una rutina expresados como `**opciones_de_f0` y que vimos en una nota de la Sección 4.1.3, las funciones `lambda` que vimos en la misma sección, la derivada numérica calculada usando `derivative` que conocimos en la Sección 4.1.4 y la integral por cuadraturas usando `quad` de la Sección 4.1.7.

Más importante aún es el hecho que esta rutina puede usarse para cualquier

funcional que se exprese como una integral definida de la forma de la Ec. (4.31). Para adaptarla a otras situaciones, simplemente se debe cambiar la función L. En la sección de problemas al final de este capítulo se pone a prueba esta rutina en otros contextos.

Supongamos ahora que queremos calcular la curva más corta que une los puntos del plano cartesiano  $(0,0)$  y  $(\pi, 1)$  (es decir  $a = 0$  y  $b = \pi$ ). Para ello proponemos una función de referencia  $f_0(t) = (t/\pi)^n$ . Esta función pasa por ambos puntos para todo  $n$ . Como función de plantilla  $\eta(t)$ , que debe ser una función acotada de acuerdo al lema fundamental del cálculo de variaciones, usaremos la función trigonométrica seno (que cumple la condición  $\eta(a) = \sin 0 = 0$  y  $\eta(b) = \sin \pi = 0$ ).

El siguiente algoritmo implementa estas elecciones:

```
#Intervalo entre los puntos
from numpy import pi
a=0
b=pi

#Funcion de referencia
def curva(t,n=1):
    return (t/pi)**n

#Función plantilla
from numpy import sin
eta=sin
```

Para ilustrar el uso de la rutina en el Alg. (4.4), calculemos la longitud de arco para el caso en el que  $n = 2$  y  $\epsilon = 0,5$ :

```
n=2
If=funcional_integral(curva,eta,0.5,a,b,n=n)

I[f] = 3.337162809417341
```

Para encontrar la trayectoria más corta entre los puntos seleccionados, debemos minimizar una función del tipo `longitud_arco(epsilon)` que llame a la rutina `funcional_integral`, pero que solo dependa de la variable que queremos minimizar, es decir de `epsilon`. Para ello podemos definir la función `lambda`:

```
longitud_arco=lambda epsilon:funcional_integral(curva,eta,epsilon,
                                                a,b,n=n)
```

La minimización, finalmente, se consigue usando la rutina `minimize` del paquete SciPy, capaz de encontrar el mínimo de funciones escalares con un número arbitrario de variables. Lo único que necesita `minimize` para lograr su cometido es que le pasemos una rutina que tenga un solo parámetro, en nuestro caso `longitud_arco` y un valor de prueba para la variable independiente (en nuestro caso usaremos  $\epsilon = 0$ ):

```
from scipy.optimize import minimize
solucion=minimize(longitud_arco,0.0)
```

Resultado de la minimización:

```
fun: 3.2975722013512403
hess_inv: array([[0.73687233]])
jac: array([1.1920929e-06])
message: 'Optimization terminated successfully.'
nfev: 12
nit: 3
njev: 4
status: 0
success: True
x: array([0.25801323])
```

Nótese que el resultado de la rutina `minimize` es un *objeto* entre cuyos atributos se encuentra el valor de la variable independiente `x` que hace mínima la función de nuestro interés, en este caso `longitud_de_arco`.

Puesto en términos de nuestro problema el resultado anterior indica que para curvas del tipo  $f_0(t) = (t/\pi)^2$ , que sufren variaciones con una función plantilla  $\eta(t) = \sin t$ , la curva de mínima longitud entre el punto  $(0,0)$  y el punto  $(0,\pi)$ , corresponde a una variación con  $\epsilon = 0,258$ .

Hagamos un gráfico de la función resultante y de su comparación con la solución analítica:

(Algoritmo 4.5)

```
import matplotlib.pyplot as plt
plt.figure()

from numpy import linspace,pi
ts=linspace(0,pi)

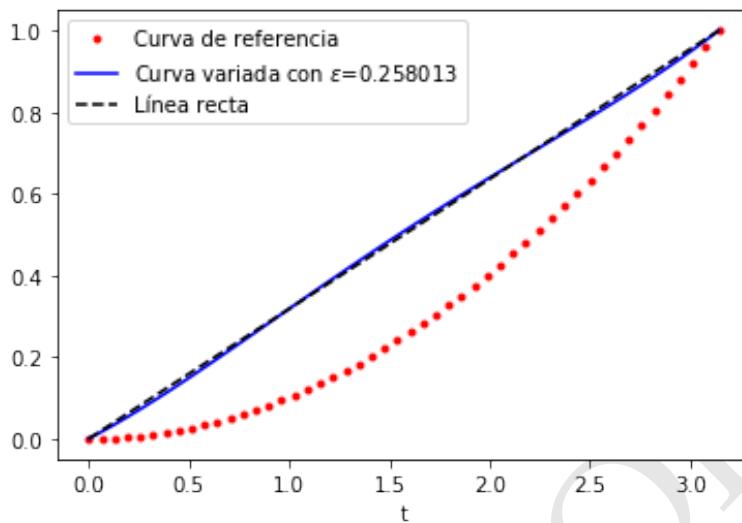
#Valor de epsilon proveniente de la minimización
epsilon=solucion.x[0]

plt.plot(ts,curva(ts,n=n), 'r.',
         label=f"Curva de referencia")
plt.plot(ts,curva(ts,n=n)+epsilon*eta(ts), 'b-',
         label=f"Curva variada con ${\epsilon}={epsilon:g}")
plt.plot(ts,curva(ts,n=1), 'k--',
         label=f"Línea recta")

plt.legend();

---hide---
plt.xlabel("t");
```

*ver Figura 4.5*



**Figura 4.5:** Figura correspondiente al código 4.5. La curva continua indica una aproximación numérica al camino más corto entre los puntos  $(0,0)$  y  $(0,\pi)$  del plano euclíadiano, encontrada al minimizar el funcional longitud de arco y usando como función de prueba  $f_0 = (t/\pi)^n$  (línea punteada) y como función plantilla  $\epsilon(t) = \sin t$ . El valor de  $\epsilon$  que corresponde a la solución se muestra en la etiqueta. Para comparación se muestra (línea rayada) la solución exacta, que corresponde a una línea recta.

#### 4.1.11. Gráficos interactivos

Para ver los gráficos interactivos use a las libretas de Jupyter que están disponibles en la versión electrónica del libro.

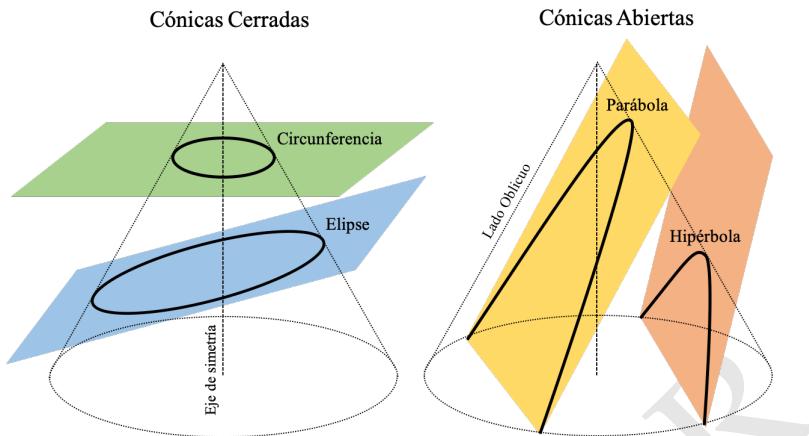
## 4.2. Curvas cónicas

En el año 1609, Johannes Kepler descubrió uno de los secretos mejor guardados del Universo: el camino que seguía el planeta Marte alrededor del Sol no era un círculo, como lo “mandaban” siglos de tradición filosófica y astronómica, sino una *elipse*.

Durante meses el astrónomo Prusiano había estado luchando, sin mucha suerte, por ajustar las precisas observaciones del astrónomo Danés Tycho Brahe (“[tycho braja](#)<sup>16</sup>”) del planeta en cuestión, al modelo que Nicolás Copérnico había desarrollado unos 60 años antes y en el que se suponía que los planetas se movían “alrededor” del Sol sobre trayectorias circulares descentradas (el Sol no ocupaba realmente el centro en el sistema Copérnico.)

Después de muchos intentos fallidos Kepler relata, en la que hoy se considera su obra cumbre “*Astronomía Nueva*”, que desesperado empezó a considerar la posibilidad de que la órbita de Marte fuera “ovalada” (con forma de huevo) en lugar de circular. Finalmente, después de muchos intentos, Kepler “adivinó” que el ovalo no podía ser otra cosa sino una elipse, una figura geométrica que había

<sup>16</sup>[https://es.forvo.com/word/tycho\\_brahe](https://es.forvo.com/word/tycho_brahe)



**Figura 4.6:** Definición geométrica original de las curvas cónicas.

sido ampliamente estudiada por los geómetras de la antigüedad y la edad media, pero cuyo papel en la astronomía no había sido considerado hasta ese momento.

Esta historia marcó el inicio de la mecánica celeste y el renacimiento del interés astronómico por la elipse y las curvas emparentadas con ella y que hoy llamamos *curvas cónicas*. En las próximas sesiones repasaremos las propiedades geométricas de las cónicas, desde su definición original hasta su descripción algebraica moderna, en preparación para su aplicación en el estudio de la trayectoria de los cuerpos en mecánica celeste.

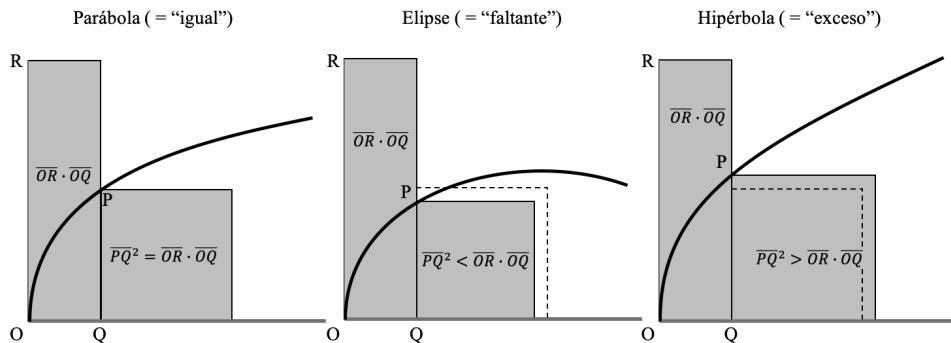
#### 4.2.1. Definición geométrica

Desde los primeros trabajos geométricos griegos, compilados y organizados por Euclides de Alejandría (323 a 283 a.e.c.) en su libro “*Elementos*”, se sabe que la familia de curvas que resultan de intersectar un plano con un cono (una figura que se forma al hacer rotar en el espacio un triángulo alrededor de uno de sus lados, ver ??) tienen propiedades geométricas especiales. Es a esta familia de curvas a las que llamamos *cónicas*, en clara referencia a su definición geométrica original.

La **circunferencia**, que es una cónica, resulta por ejemplo de intersectar el cono con un plano perpendicular a su eje de simetría. Si el plano, sin embargo, forma un ángulo distinto de 90 grados con el eje de simetría, pero no es paralelo a los lados del cono, la figura resultante, que es también cerrada como la circunferencia, se llama una **elipse**. Si el plano es paralelo a los lados oblicuos del cono la figura resultante es abierta y la llamamos una **parábola**. Finalmente, si el plano no es paralelo a los lados del cono, pero por su ángulo nunca intersecta el eje de simetría, decimos que la figura que se forma es una **hipérbola**.

#### 4.2.2. Del nombre al álgebra

La palabra “parábola” viene del griego  $\pi\alpha\rho\alpha\beta\alpha\lambda\lambda\epsilon\nu$  (“parabalei”) que significa “poner al lado”, “igualar”, “comparar” (de allí que una parábola en español sea también una historia que donde se narran hechos que pueden servir como mode-



**Figura 4.7:** Definición con áreas aplicadas de las curvas cónicas y el origen de sus nombres.

los de comportamiento.) Este curioso nombre tiene su origen en la manera como este tipo de curva fue definida de forma más rigurosa a como lo hicimos en la sección anterior, por uno de los más grandes matemáticos de la antiguedad, Apolonio de Perga (ca. 262 a ca. 190 a.e.c.) en su tratado clásico *Conicas*.

En la [Figura 4.7](#) se ilustra la construcción de Apolonio y la razón para el nombre que dió a cada cónica. Para ello ubicamos las curvas sobre el plano de modo que su eje de simetría quede alineado con una semirrecta horizontal que comienza en el punto O que llamaremos *apside* de la cónica (la elipse tiene dos *apsides*.) Todas las cónicas de la figura tienen asociado un parámetro que define su tamaño y que es igual a la longitud de un segmento  $\overline{OR}$  perpendicular al eje de simetría. Si aumentamos o disminuimos la longitud de este segmento las cónicas serán más grandes o más pequeñas de las representadas en la figura. Por cada punto P de las cónicas existe un punto Q que es su proyección sobre el eje de simetría.

La propiedad descubierta por Apolonio (y posiblemente por Euclides y otros matemáticos anteriores a él) es que el área del rectángulo que tiene como base el segmento  $\overline{OQ}$  y como altura el parámetro de tamaño, es decir, la longitud del segmento  $\overline{OR}$  puede ser (dependiendo de la cónica) igual, menor o mayor al área del cuadrado que tiene como lado la longitud del segmento  $\overline{PQ}$ . En la geometría clásica a esta operación se la llama la *aplicación de un rectángulo* o la *cuadratura del rectángulo*.

La parábola es entonces la figura en la que esas áreas son exactamente iguales. De allí su nombre en griego. Por otra parte la elipse, cuyo nombre viene del griego *ελειπεῖν* ("eleipeín") que significa "faltante", es tal que el área del cuadrado no alcanza a ser igual a la del rectángulo. Y en la hipérbola, cuyo nombre viene del griego *ὑπερβαλλεῖν* ("hiperbalein") que significa "exceso", el área del cuadrado supera la del rectángulo aplicado.

En términos algebraicos (geometría analítica), si construimos un sistema de coordenadas cartesianas con origen en el ápside O, eje  $x_a$  (el subíndice indica precisamente que el origen está en al apside) en la dirección del eje de simetría y eje  $y_a$  en dirección del segmento  $\overline{OR}$  (cuya longitud llamaremos  $L$ ), las coordenadas  $(x_a, y_a)$  de los puntos sobre las cónicas se relacionan de acuerdo con [13]:

$$y_a^2 = Lx_a + \eta x_a^2 \quad (4.35)$$

Aquí  $\eta$  es un parámetro que define la “forma” de la cónica, siendo:

- $\eta = 0$  en el caso de un **parábola**.
- $\eta < 0$  en el caso de una **elipse**.
- $\eta > 0$  en el caso de una **hipérbola**.

Por su origen llamaremos a  $\eta$  el parámetro de Apolonio de la cónica.

En el algoritmo a continuación usamos estas definiciones para dibujar las cónicas y ver el efecto que tienen los parámetros  $L$  y  $\eta$  en su tamaño y forma.

(Algoritmo 4.6)

```
#Definimos el algoritmo como una rutina
def conicas_apolonio(eta=-0.5):

    #Escala
    L=10.0
    #Forma
    eta=float(eta)

    #Máximo valor de x
    xamax=L/abs(eta) if abs(eta)>0 else L

    #Valores de x en los que graficaremos
    from numpy import sqrt,linspace
    xas=linspace(0,xamax,100)

    #Ecuaciones de las cónicas referidas al apside
    from numpy import append
    yas_par=sqrt(L*xas)
    yas=sqrt(L*xas+float(eta)*xas**2)

    #Gráfica
    import matplotlib.pyplot as plt
    fig=plt.figure(figsize=(6,6))
    ax=fig.gca()

    ax.plot(xas,yas_par,'k--')
    ax.plot(xas,-yas_par,'k--')
    ax.plot(xas,yas,'b')
    ax.plot(xas,-yas,'b')

    #Decoración
    ax.grid()
    ax.set_title(f"Cónica con $L = {L}$, $\eta={eta}$")

    #Fijamos la misma escala en los ejes
    from pymcel.plot import fija_ejes_proporcionales
    valores=(xas,yas_par,-yas_par,yas,-yas),
    fija_ejes_proporcionales(ax,valores,
```

```
xmin=-xamax/2,ycm=0);  
  
#Invocamos la rutina  
conicas_apolonio()
```

ver Figura 4.8

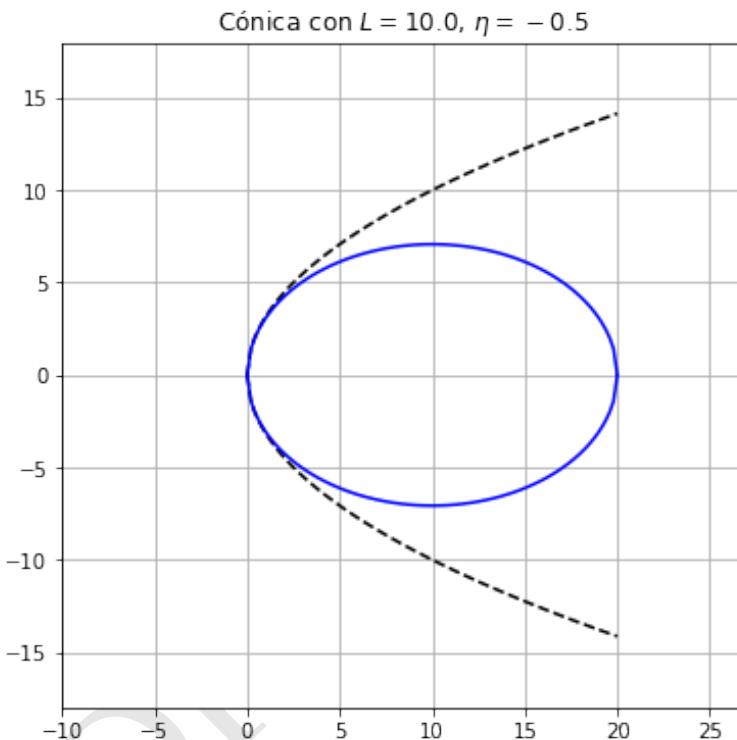


Figura 4.8: Figura correspondiente al código 4.6.

Trate de demostrar usando el algoritmo o manipulando la Ec. (4.35) que la circunferencia, que en la definición original se considera una cónica más, no es más que una elipse para la cual el parámetro de forma  $\eta$  es igual a -1.

Para ver esta una versión interactiva de esta figura por favor use las libretas disponibles en la [versión electrónica del libro](#)<sup>17</sup>.

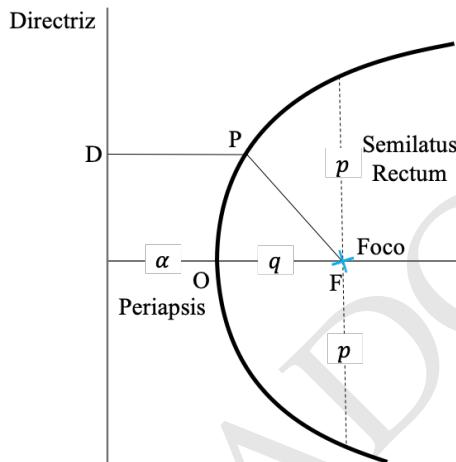
### 4.2.3. Directriz de las cónicas

La definición de Apolonio de las cónicas provista en la sección anterior, no solo nos permite introducir la primera fórmula algebraica para describirlas (Ec. ??) y tal vez la primera en la historia que lo hizo, sino que además nos ayudó a entender el origen de sus nombres.

<sup>17</sup><http://mybook.org>

Sin embargo, esta definición adolece de algunas características que nos resultarán muy útiles en lo sucesivo. No es claro, por ejemplo, la relación entre los parámetros de tamaño  $L$  y forma  $\eta$  con otras propiedades de la cónica (en el caso de una elipse por ejemplo con su diámetro.)

Una definición más conveniente es la de Arquímedes (introducida posiblemente unos años antes que Apolonio y usada más frecuentemente en la edad media y tiempos modernos.) Esta definición se basa en proporciones más que en áreas.



**Figura 4.9:** Definición de las cónicas usando la recta directriz y el foco.

Según esta definición, toda cónica se puede construir partiendo de una recta a la que se llama *recta directriz* y un punto o *foco* (ver Figura 4.9.) Las cónicas son el lugar geométrico de los puntos tal que la razón de la distancia del punto al foco y la distancia del punto a la directriz es constante:

$$\frac{PF}{PD} \equiv e \quad (4.36)$$

donde  $e > 0$ . A este parámetro lo llamamos la *excentricidad* de la cónica.

Si definimos un sistema de coordenadas tal que el eje  $y_d$  pase por la recta directriz (el subíndice  $d$  indica que el sistema de coordenadas esta precisamente referido a la directriz) y el eje  $x_d$  por el foco, en términos de las coordenadas  $(x_d, y_d)$  de cada punto de la cónica, la condición en la Ec. (4.36) se puede escribir como:

$$\frac{\sqrt{(F - x_d)^2 + y_d^2}}{x_d} = e \quad (4.37)$$

donde  $F$  es la distancia del Foco a la directriz.

Despejando  $y$  obtenemos:

$$y_d^2 = (e^2 - 1)x_d^2 + 2Fx_d - F^2 \quad (4.38)$$

Una comparación de esta ecuación con la Ec. (4.35) revela inmediatamente que el valor de la excentricidad dependerá de la cónica así:

- $e = 1$  en el caso de la **parábola**.
- $0 < e < 1$  en el caso de una **elipse**.
- $e > 1$  en el caso de una **hipérbola**.

Estudiemos ahora la posición de dos puntos sobre la cónica que merecen alguna atención. El primero es el punto que se encuentra justo encima del foco, es decir  $x = F$ . La distancia vertical del eje de simetría a este punto se conoce como el *semilatus rectum*  $p$  y se denota como  $p$ . Reemplazando en la Ec. (4.38):

$$p^2 = (e^2 - 1)F^2 + 2F^2 - F^2$$

de donde se obtiene:

$$p = eF$$

El otro punto es el apside más cercano a la directriz. Si llamamos  $\alpha$  a la distancia de ese punto a la directriz y usamos la definición de la cónica en la Ec. (4.37) obtenemos:

$$\alpha = \frac{F}{1 + e} \quad (4.39)$$

Por otro lado la distancia del foco al apside más cercano, que llamaremos **periapsis**  $q$ , viene dada en términos de  $F, e$  por:

$$\begin{aligned} q &= F - \alpha \\ &= eF / (1 + e) \end{aligned}$$

o bien,

$$q = \frac{p}{1 + e} \quad (4.40)$$

Si trasladamos ahora la Ec. (4.38) el origen de coordenadas en el punto O, es decir si reemplazamos  $x_d = x_a + \alpha, y_d = y_a$  obtenemos:

$$y_a^2 = 2eFx_a + (e^2 - 1)x_a^2 \quad (4.41)$$

que comparando con la Ec. (4.35) nos permite escribir los parámetros de tamaño  $L$  y forma  $\eta$  en la definición de Apolonio, en función de la excentricidad  $e$  y *semilatus rectum*  $p$ :

$$L = 2p$$

$$\eta = e^2 - 1 \quad (4.42)$$

De esta última relación y de la frase final de la Sección 4.2.2 en la que identificamos a la circunferencia como la cónica con  $\eta = -1$ , concluimos nuevamente que la circunferencia no es más que una elipse para la cuál  $e = 0$ .

#### 4.2.4. Síntesis geométrica

En resumen podemos decir que las curvas cónicas, o al menos sus principios de construcción, eran conocidas en Grecia posiblemente desde el tiempo de los pitagóricos. Sin embargo, fue Apolonio de Perga quién profundizó en las propiedades geométricas y “algebraicas” de estas curvas. Su aplicación astronómica, sin embargo, era desconocida y fue descubierta solo hasta los trabajos de Kepler en los 1600.

En términos geométricos simples las cónicas con el resultado de la intersección de un cono con un plano con cuatro posibles inclinaciones respecto a su eje de simetría. A pesar de que esto implicaría que existen cuatro posibles cónicas, las definiciones posteriores demuestran que en realidad la circunferencia es un caso particular de la elipse ( $\eta = -1$  o  $e = 0$ .)

Toda cónica tiene: un eje de simetría, una recta directriz, un foco, un áplice (el periapsis o punto más cercano al foco) y un *latus rectum* (segmento perpendicular al eje y que pasa por el foco.) Las elipses tienen un segundo eje de simetría, perpendicular al primero y a distancias iguales de dos apses y por la misma razón un segundo foco y un segundo *latus rectum*.

Las dimensiones y forma de una cónica se pueden describir, en general, en términos de dos parámetros:

- **Parametrización de Apolonio.** Los parámetros son la longitud del *latus rectum*  $L > 0$  y el parámetro de Apolonio  $-\infty < \eta < \infty$ . De acuerdo con  $\eta$  las cónicas se clasifican en: parábola ( $\eta = 0$ ), circunferencia o elipse ( $\eta < 0$ ) e hipérbola ( $\eta > 0$ ).
- **Parametrización de Arquímedes.** Los parámetros son el *semilatus rectum*  $p > 0$  y la excentricidad  $0 \leq e < 1$ . De acuerdo con  $e$  las cónicas se clasifican en: parábola ( $e = 1$ ), circunferencia y elipse ( $0 \leq e < 1$ ) e hipérbola ( $e > 1$ ).

Se acostumbra usar más la parametrización de Arquímedes y es la que utilizaremos en lo sucesivo en el libro.

Si se construye un sistema de coordenadas en el plano de la cónica, con eje  $x$  en la dirección del eje de simetría, dependiendo de la localización del origen, las coordenadas cartesianas de los puntos sobre la cónica obedecen las ecuaciones:

- **Origen en el áplice:**  $y_a^2 = 2px_a + (e^2 - 1)x_a^2$ .
- **Origen en la directriz:**  $y_d^2 = (e^2 - 1)x_d^2 + (2p/e)x_d - (p/e)^2$

Esta última ecuación no es conveniente para describir la circunferencia.

#### 4.2.5. Descripción algebraica

Si bien en las secciones anteriores adscribimos a Apolonio y a Arquímedes (y a sus contemporáneos griegos) la descripción de las cónicas en términos de ecuaciones algebraicas con sus coordenadas como variables, en realidad esta descripción solo apareció en la historia con el surgimiento de la moderna Geometría analítica en los 1600 y de la mano de René Descartes (“René decart”<sup>18</sup>) y Pierre de Fermat (“pier de fermat”).

<sup>18</sup>[https://es.forvo.com/word/ren%C3%A9\\_descartes/#fr](https://es.forvo.com/word/ren%C3%A9_descartes/#fr)

Ahora bien, la forma algebraica general que vimos en la Ec. (4.35)

$$y_a^2 - 2px_a - (e^2 - 1)x_a^2 = 0 \quad (4.43)$$

no es precisamente ni la fórmula más simple, ni la más general.

En esta sección exploraremos a fondo las propiedades algebraicas de las cónicas y al hacerlo descubriremos algunas propiedades importantes que usaremos en la mecánica celeste.

Si queremos escribir la ecuación de la cónica en otras formas, podemos, como lo hicimos en el caso de la Eq. 4.41, aplicar dos tipos de transformaciones al sistema de coordenadas:

- Una **traslación**, que implica simplemente modificar la posición del origen de coordenadas, tal y como hicimos en la Sección 4.2.3 al pasar del origen en la directriz a un origen en el ápide.
- Una **rotación**, que implica modificar la dirección de los ejes coordinados. Esta es una transformación más compleja pero que resultará particularmente útil en la aplicación de las cónicas en mecánica celeste.

#### 4.2.6. Ecuación respecto al centro

Para encontrar una forma más simple de la ecuación de la cónica, podemos realizar una traslación del origen, del apside (respecto al cuál esta escrita la Ec. 4.35) a un punto C en el cuál la forma algebraica, por ejemplo solo contenga términos cuadráticos en las coordenadas.

Una traslación a lo largo del eje  $x$  se escribe como:

$$\begin{aligned} x_a &= x_c + a \\ y_a &= y_c \end{aligned} \quad (4.44)$$

donde  $a$  es la distancia del origen de las nuevas coordenadas  $x_c, y_c$  (punto C), al origen de las coordenadas  $x_a, y_a$  (apside).

Reemplazando las Ecs. (4.44) en la ecuación de la cónica obtenemos:

$$y_a^2 - 2p(x_c + a) + (1 - e^2)(x_c + a)^2 = 0$$

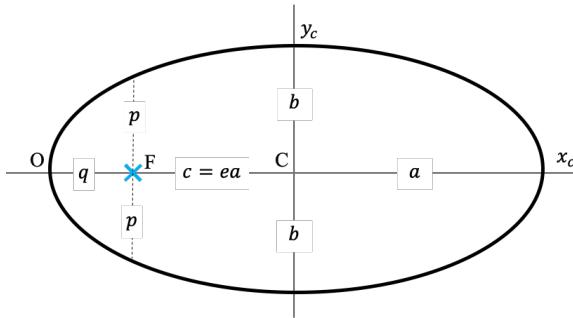
que después de una manipulación algebraica se puede escribir en la forma:

$$y_c^2 + (1 - e^2)x_c^2 + 2[(1 - e^2)a - p]x_c = 2pa - (1 - e^2)a^2$$

Como el valor de  $a$  es libre, podemos escogerlo de modo el término lineal en  $x_c$  desaparezca. Con esta elección el valor de esta constante queda:

$$a = \frac{p}{1 - e^2} \quad (4.45)$$

Descubrimos aquí que el desplazamiento al punto C solo tiene el efecto deseado en el caso en el que  $e \neq 1$  (elipse e hipérbola). Para el caso de la parábola, en realidad la forma más simple de la ecuación sigue siendo aquella referida al apside (Ec. 4.35),  $y_d^2 = 2px_d$ .



**Figura 4.10:** Parámetros geométricos de la elipse referidos al apside  $O$ , el foco  $F$  y el centro  $C$ :  $a$  semieje mayor,  $b$  semieje menor,  $p$  semilatus rectum,  $e$  excentricidad,  $c$  distancia foco-centro.

La ecuación de la elipse o de la hipérbola se puede escribir entonces como:

$$\frac{x_c^2}{p^2/(1-e^2)^2} + \frac{y_c^2}{p^2/(1-e^2)} = 1$$

o en términos del parámetro  $a$ :

$$\frac{x_c^2}{a^2} + \frac{y_c^2}{b^2} = 1 \quad (4.46)$$

en el que se ha definido:

$$b^2 \equiv a^2(1 - e^2) \quad (4.47)$$

#### 4.2.7. Eje mayor y menor de la elipse

La ecuación (4.46) es la forma más simple y simétrica de una elipse o una hipérbola. Pero ¿qué interpretación geométrica tienen los parámetros  $a$ ,  $b$  y el punto  $C$ .

En el caso de la elipse, podemos ver que cuando  $y_c = 0$  (apsides),  $x_c = \pm a$  (ver Figura 4.11), es decir  $a$  es la distancia de los apsides al punto  $C$ , alrededor del cual la elipse es simétrica. Llamamos a la constante  $a$  en este caso el **semieje mayor** de la elipse y  $C$  es el centro geométrico de la figura.

También en el caso de la elipse, haciendo  $x_c = 0$  resulta  $y_c = \pm b$ , de donde interpretamos a  $b = a\sqrt{1 - e^2}$  como la distancia a los extremos del **eje menor** al centro de la elipse. Por esta misma razón llamamos a la constante  $b$  el **semieje menor**.

Un resultado interesante, que podemos agregar a las definiciones geométricas de Apolonio y Democrito, resulta al combinar la definición de  $a$  con la distancia de un apside al foco más cercano  $q$ . Es claro de la ?? que la distancia entre el centro y el foco de la elipse, que llamaremos en lo sucesivo  $c$  es:

$$\begin{aligned}c &= a - q \\&= \frac{p}{1 - e^2} - \frac{p}{1 + e}\end{aligned}$$

o en términos simples:

$$c = ae \quad (4.48)$$

Este resultado se puede interpretar diciendo que la excentricidad de una elipse  $e = c/a$  es el grado en el que el foco está desplazado a partir del centro geométrico de la figura y medido en unidades del semieje mayor  $a$ . De allí precisamente el nombre de este parámetro.

Uno podría entonces cuantificar la excentricidad de una elipse como un porcentaje. Así por ejemplo, la órbita *osculatriz* de Marte (volveremos sobre este concepto en el [Capítulo 7](#)), que fue el planeta utilizado por Kepler para descubrir que las órbitas planetarias eran elipses, es una elipse con una excentricidad de 9,3 %.

Es decir, el centro geométrico de la órbita de Marte está desplazado respecto a su foco (donde se ubica el Sol o más precisamente el centro de masa del Sistema Solar) un 9,3 % del eje mayor (la distancia promedio de Marte al Sol.) Este desplazamiento (que es significativo) fue la clave precisamente de porque fue más fácil para Kepler deducir la elipticidad de la trayectoria de ese planeta, de lo que lo fue para todos los astrónomos antes que él deducirlo usando la trayectoria de todos los demás planetas (en comparación las excentricidades de las órbitas osculatrices de la Tierra y de Júpiter, por ejemplo, son 1,6 % y 4,8 %, respectivamente.)

Utilice el código interactivo que viene con las libretas en la [versión electrónica del libro](#)<sup>19</sup> para visualizar la forma de las órbitas de los planetas mencionados y ver realmente, que tan diferentes de una circunferencia son.

#### 4.2.8. Parámetros de la hipérbola

La interpretación geométrica de  $a$  y  $b$  en el caso de la hipérbola ( $e > 1$ ) es un poco más complicada (ver la ??).

Para empezar el valor del parámetro  $a = p/(1 - e^2)$  es negativo. Esto implica que el punto  $C$ , que hace la ecuación de la hipérbola la más sencilla posible, está a la izquierda del apside, contrario a lo que pasa con la elipse. Llamamos a  $C$ , no el centro de la hipérbola sino su *vértice*.

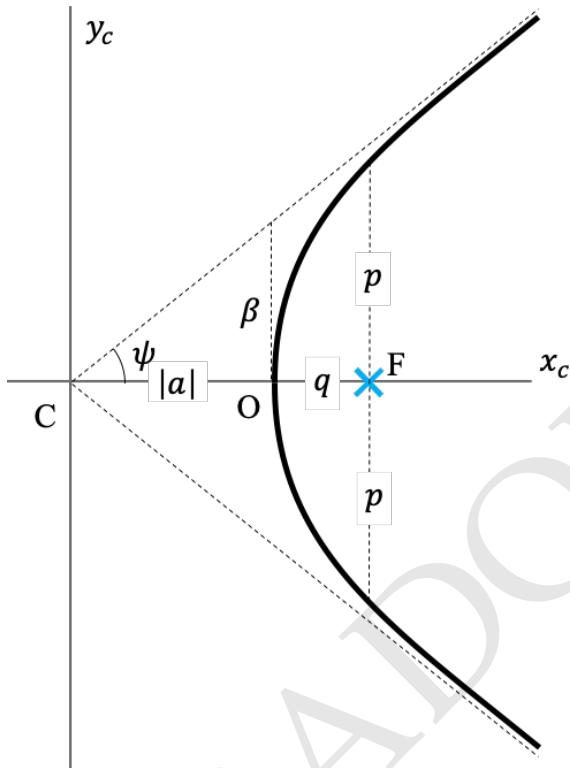
No debemos confundir sin embargo el eje  $y_c$  en la ?? con la directriz de la hipérbola (ver [Figura 4.9](#)) que en realidad está situada a una distancia  $\alpha = a(1 - e)/e$  (ver Ec. 4.39.) La directriz y el eje  $y_c$  se aproximan una a otra cuando  $e \rightarrow \infty$ .

El parámetro  $b^2 = a^2(1 - e^2)$  es inconveniente dado que en este caso  $e > 1$  y por lo tanto  $b$  debería ser un número imaginario. Para evitar este inconveniente reescribimos la ecuación de la hipérbola Ec. (4.46) como:

$$\frac{x_c^2}{a^2} - \frac{y_c^2}{\beta^2} = 1 \quad (4.49)$$

---

<sup>19</sup><http://mybook.org>



**Figura 4.11:** Parámetros geométricos de la hipérbola referidos al apside  $O$ , el foco  $F$  y el vértice  $C$ :  $a$  distancia al vértice (llamado con frecuencia también semieje mayor aunque en la hipérbola no hay tal),  $\beta$  pendiente de la hipérbola,  $p$  semilatus rectum,  $e$  excentricidad,  $\psi$  angulo de semiapertura.

y definimos:

$$\beta \equiv |a| \sqrt{e^2 - 1} \quad (4.50)$$

¿Cuál es la interpretación geométrica de  $\beta$ ? Si despejamos  $y_c$  de la Ec. (4.49) tenemos:

$$y_c = \pm \beta \sqrt{\frac{x_c^2}{a^2} - 1}$$

donde los signos  $\pm$  corresponden a las “ramas” superior e inferior de la hipérbola.

Aquí descubrimos una interesante propiedad de esta cónica: cuando  $x_c \rightarrow \infty$ , la hipérbola se approxima a las rectas:

$$y_c \rightarrow \pm \frac{\beta}{|a|} x_c$$

que llamamos *asíntotas*. La pendiente de las asíntotas,  $\beta/|a|$  nos permite identificar a  $\beta$  como una cantidad que cuantifica el grado de *apertura* de la hipérbola respecto

a su eje de simetría: a mayor  $\beta$  (mayor excentricidad), mayor es la pendiente de las asíntotas y más cerca está la hipérbola de una línea recta paralela a la directriz.

Otra manera de cuantificar la pendiente de las asíntotas es usar el ángulo  $\psi$ :

$$\tan \psi \equiv \frac{\beta}{|a|}$$

No es difícil mostrar (ver problemas al final del capítulo), a partir de la definición anterior, que:

$$\cos \psi = \frac{1}{e} \quad (4.51)$$

Para poner en un contexto astronómico este resultado, podemos mencionar que en 2019 fue descubierto un cometa proveniente del espacio interestelar, hoy conocido como el 2I/Borisov, cuya trayectoria respecto al centro de masa del sistema solar es una hipérbola con  $e = 3.35$ . Usando la Ec. (4.51) podemos calcular que las asíntotas de su órbita se abren en un ángulo extremo de

#Cometa interestelar 2I/Borisov

e=3.35

```
from numpy import arccos
psi=arccos(1/e)
```

Psi = 72.63202008811639 grados

Utilice el código interactivo que viene con las libretas en la [versión electrónica del libro](#)<sup>20</sup> para visualizar la forma de la órbita del 2I/Borisov.

#### 4.2.9. Rotación de las cónicas en el plano

Al comenzar la ??, habíamos mencionado dos posibles transformaciones que nos conducían a la forma algebraica más simple (la que obtuvimos en la [Sección 4.2.6](#)) y a la más general. La primera la obtuvimos simplemente aplicando una traslación de los ejes coordenados:

$$\begin{aligned} x_c &= x_a - c \\ y_c &= y_a \end{aligned}$$

Para obtener la forma más general, nos proponemos ahora realizar una rotación.

Si llamamos  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  a las coordenadas de un punto con respecto a los ejes rotados, puede demostrarse (ver problemas al final del capítulo) que estas se relacionan con las coordenadas del mismo punto en el sistema alineado con la cónica (eje  $x$  en dirección del eje de simetría) a través de:

$$\begin{aligned} x' &= x \cos \theta + y \sin \theta \\ y' &= -x \sin \theta + y \cos \theta \\ z' &= z \end{aligned} \quad (4.52)$$

<sup>20</sup><http://mybook.org>

donde  $\theta$  es el ángulo que forma el eje  $x'$  con el eje  $x$  (ver ??.)

Matricialmente estas relaciones se pueden escribir como:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = R_z(\theta) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (4.53)$$

donde la matriz  $R_z(\theta)$  esta dada por:

$$R_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.54)$$

y el subíndice  $z$  indica que la rotación se realiza alrededor de este eje.

La matriz de rotación  $R_z(\theta)$  es una matriz *unitaria* que tiene las siguientes propiedades:

- Determinante,  $\det R_z = 1$ .
- Inversa,  $R_z^{-1} = R_z^T$

Esta última propiedad implica que:

$$R_z^{-1}(\theta) = R_z(-\theta) \quad (4.55)$$

que será muy conveniente para lo que viene.

Usando las propiedades de  $R_z$  podemos encontrar la transformación inversa a la Ec. (4.52):

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = R_z(-\theta) \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \quad (4.56)$$

o explícitamente:

$$\begin{aligned} x &= x' \cos \theta - y' \sin \theta \\ x &= x' \sin \theta + y' \cos \theta \\ z &= z' \end{aligned} \quad (4.57)$$

El sistema SPICE contiene una rutina útil para definir de manera sencilla una matriz de rotación dado un ángulo y un eje respecto al que se realiza la rotación:

(Algoritmo 4.7)

```
from spiceypy import rotate
from numpy import pi
Rz=rotate(pi/6,3)

Rz(30 grados) =
[[ 0.8660254  0.5           0.          ]
 [-0.5          0.8660254  0.          ]
 [ 0.           0.            1.          ]]
```

Que coincide con la definición dada por la Ec. (4.54).

### 4.2.10. Ecuación general de las cónicas

Qué pasa entonces si, partiendo de la ecuación general respecto al apside (Ec. 4.43) hacemos primero una traslación a un punto con coordenadas  $(t_x, t_y)$ :

$$(y + t_y)^2 - 2p(x + t_x) - (e^2 - 1)(x + t_x)^2 = 0$$

y una vez trasladados al nuevo origen, realizamos una rotación a unos nuevos ejes  $(x', y')$  realizando para ello la transformación dada por las Ecs. (4.57):

$$[(x' \sin \theta + y' \cos \theta) + t_y]^2 - 2p[(x' \cos \theta - y' \sin \theta) + t_x] - (e^2 - 1)[(x' \cos \theta - y' \sin \theta) + t_x]^2 = 0$$

Expandiendo y recogiendo términos comunes, la ecuación general de una cónica trasladada y rotada será:

$$\begin{aligned} x'^2(1 - e^2 \cos^2 \theta) + x'y'(e^2 \sin 2\theta) + y'^2(1 - e^2 \sin^2 \theta) &+ \\ x'[2t_y \sin \theta - 2p \cos \theta + 2t_x \cos \theta(1 - e^2)] &+ \\ y'[2t_y \cos \theta + 2p \sin \theta - 2t_x \sin \theta(1 - e^2)] &+ \\ t_x^2(1 - e^2) - 2pt_x + t_y^2 &= 0 \end{aligned} \quad (4.58)$$

que puede escribirse de forma general, como:

$$Ax'^2 + Bx'y' + Cy'^2 + Dx' + Ey' + F = 0 \quad (4.59)$$

con:

$$\begin{aligned} A &= 1 - e^2 \cos^2 \theta \\ B &= e^2 \sin 2\theta \\ C &= 1 - e^2 \sin^2 \theta \\ D &= 2t_y \sin \theta - 2p \cos \theta + 2t_x \cos \theta(1 - e^2) \\ E &= 2t_y \cos \theta + 2p \sin \theta - 2t_x \sin \theta(1 - e^2) \\ F &= t_x^2(1 - e^2) - 2pt_x + t_y^2 \end{aligned} \quad (4.60)$$

Es decir, cualquier curva en el plano cuyos puntos obedezcan una ecuación cuadrática general de la forma Ec. (4.59) es una cónica con una orientación, tamaño, forma y posición de los apsides que dependerá de los coeficientes  $A, B, C, D, E$  y  $F$ .

Dada la ecuación algebraica de una cónica, expresada en la forma cuadrática general (Ec. 4.59), es posible, usando los coeficientes  $A, B$  y  $C$  determinar qué tipo de cónica y su orientación en el espacio.

Para ello es posible, combinando algunas de las Ecs. (??), demostrar que:

$$\eta = 1 - (A + C) \quad (4.61)$$

y por otro lado:

$$\tan 2\theta = \frac{B}{C - A} \quad (4.62)$$

Si además se usan los valores de los coeficientes  $D$  y  $E$ , es posible determinar la ordenada del vértice de la cónica:

$$t_y = \frac{D \sin \theta + E \cos \theta}{2} \quad (4.63)$$

Expresiones mucho más complejas pueden derivarse para  $t_x$  y para  $p$  en función de los coeficientes  $D$ ,  $E$  y  $F$ , que también dependen de ellos (ver problemas al final del capítulo.) Sin embargo, una vez el apside de la cónica ha sido localizada sobre el eje de las abcisas (realizando la traslación inversa  $-t_y$ ) y ha sido rotada en un ángulo  $\theta$  dado por la Ec. (4.62) para que su eje de simetría coincida con el eje  $x$ , las demás propiedades de la curva pueden obtenerse más fácilmente.

#### 4.2.11. Gráfico de una cónica rotada en el plano

Podemos poner en práctica algunos de los resultados de las secciones anteriores (siempre es importante hacerlo para garantizar que todo se ha entendido bien), construyendo numéricamente una cónica con la Ec. (4.43) y aplicando traslaciones y rotaciones a la misma para ver el efecto y escribir la ecuación general cuadrática (Ec. 4.59) que la describe.

Comencemos, escogiendo las propiedades de nuestra cónica y determinando, el rango de valores de las coordenadas  $x_a$  de los puntos sobre la cónica, en el sistema de coordenadas que tiene origen en el ápide:

```

p=10.0
e=0.8

#Parametro eta
eta=e**2-1

#Conjunto de valores de x de la cónica
from numpy import linspace
if e==1:
    a=p
else:
    a=p/(1-e**2)

#Rango de valores de x
xs=linspace(0,2*abs(a),100)

```

Nótese que  $a$  no está definido en el caso de una parábola  $e = 1$  (para una elipse y una hipérbola  $a = p/(1 - e^2)$ , ver Ec. 4.45.) Por esa razón en el algoritmo anterior hemos escogido definir  $a \equiv p$  cuando  $e = 1$ , únicamente con el propósito de usar una sola expresión `xs=linspace(0,2*abs(a),100)` para calcular el rango de valores de las abcisas de la cónica.

Si bien sabemos que en el caso de paráboles e hipérbolas, los valores de las abcisas son  $x_a \in [0, \infty)$  (ver Figura 4.7), para una elipse es claro que  $x_a \in [0, 2a]$  (ver Figura 4.11.)

Con los valores de  $x$  podemos ahora usar la Ec. (4.43) para calcular los valores de la ordenada, tanto para la rama superior de la cónica (por encima del eje de simetría) como para la inferior:

```
#Ecuación de la cónica
from numpy import sqrt
ys_sup=sqrt(2*p*xs+eta*xs**2)
ys_inf=-sqrt(2*p*xs+eta*xs**2)
```

Para los propósitos de graficar la cónica, debemos duplicar los valores de la lista `xs`. Sin embargo, y por razones que veremos abajo, lo haremos ordenando de forma especial las coordenadas de los puntos, comenzando primero con el punto más lejano al origen ( $x = 2a$  o  $xs[-1], ys[-1]$ ), llegando hasta el origen mismo  $xs[0], ys[0]$  y de allí regresando de nuevo al punto más lejano.

En Python esta “compleja” operación puede abreviarse usando la sintaxis general para extraer tajadas de los arreglos:

```
from numpy import append,zeros_like
xs=append(xs[::-1],xs)
ys=append(ys_sup[::-1],ys_inf)
zs=zeros_like(xs)
```

Un gráfico de los puntos de la cónica en el sistema de referencia del áplice srá:

(Algoritmo 4.8)

```
import matplotlib.pyplot as plt
fig=plt.figure()
ax=fig.gca()

ax.plot(xs,ys, 'b-')

from pymcel.plot import fija_ejes_proporcionales
valores=(xs,ys)
fija_ejes_proporcionales(ax,valores,xmin=0,ycm=0);
ax.grid()
```

*ver Figura 4.12*

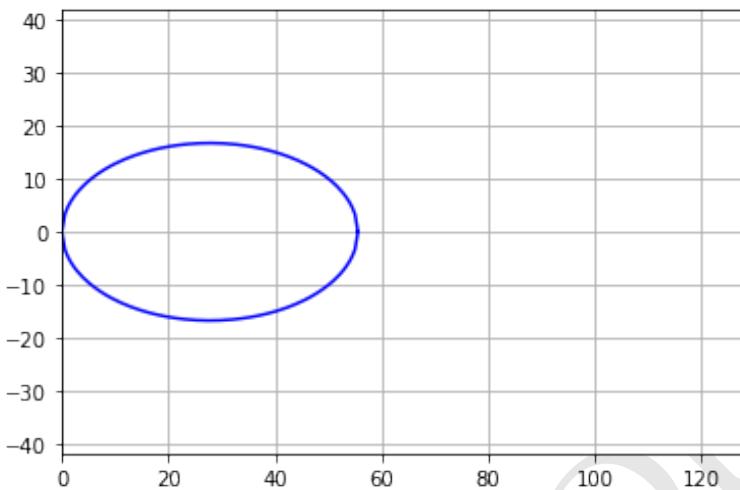
Ahora podemos trasladar la cónica:

```
#Parámetros de la traslación
tx=15.0
ty=-10.0

#Coordenadas trasladadas
xs=xs-tx
ys=ys-ty
```

Construimos la matriz de rotación usando las rutinas de SPICE (ver Alg. 4.7):

```
from spiceypy import rotate
from numpy import pi
teta=pi/6
```



**Figura 4.12:** Figura correspondiente al código 4.8.

```
Rz=rotate(teta,3)
```

La rotación de los puntos de la cónica contenidos en las listas `xs`, `ys` usando la Ec. (4.53), no es tan trivial en Python. Para ello definiremos una rutina general que usaremos más adelante en el libro:

(Algoritmo 4.9)

```
def rota_puntos(R,x,y,z):
    from spiceypy import mxv
    from numpy import zeros_like
    N=len(x)
    xp=zeros_like(x)
    yp=zeros_like(y)
    zp=zeros_like(z)
    for i in range(N):
        xp[i],yp[i],zp[i]=mxv(R,[x[i],y[i],z[i]])
    return xp,yp,zp
```

Los puntos rotados de la cónica serán:

```
xps,yps,zps=rota_puntos(Rz,xs,ys,zs)
```

Y una gráfica de los puntos rotados:

(Algoritmo 4.10)

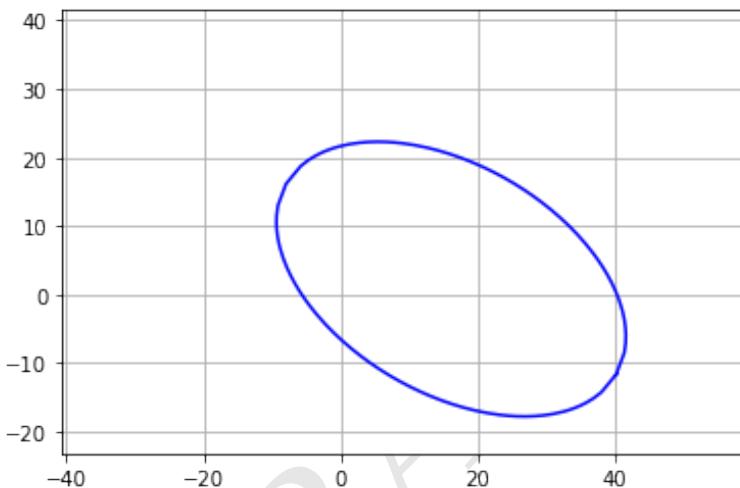
```
import matplotlib.pyplot as plt
fig=plt.figure()
ax=fig.gca()
```

```

ax.plot(xps,yps, 'b-')
from pymcel.plot import fija_ejes_proporcionales
valores=(xps,yps)
fija_ejes_proporcionales(ax,valores);
ax.grid()

```

*ver Figura 4.13*



**Figura 4.13:** Figura correspondiente al código 4.10.

Los valores de los coeficientes del polinomio de segundo grado  $P(x,y) = Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F$  que describe los puntos del gráfico anterior, son (Ec. 4.60):

```

from numpy import sin,cos
A=1-e**2*cos(teta)**2
B=e**2*sin(2*teta)
C=1-e**2*sin(teta)**2
D=2*ty*sin(teta)-2*p*cos(teta)+2*tx*cos(teta)*(1-e**2)
E=2*ty*cos(teta)+2*p*sin(teta)-2*tx*sin(teta)*(1-e**2)
F=tx**2*(1-e**2)-2*p*tx+ty**2

```

```

A = 0.5199999999999998
B = 0.5542562584220408
C = 0.84
D = -17.967433714816835
E = -12.720508075688773
F = -119.00000000000003
Ecuación: (0.52)x^2+(0.55)xy+(0.84)y^2+(-18)x+(-13)y+(-119.0)=0

```

Podemos ahora verificar la afirmación que los puntos de la cónica satisfacen

la ecuación  $P(x, y) = 0$  (Ec. 4.59), construyendo primero una rutina para calcular, dado cualquier punto  $(x, y)$  el valor del polinomio  $P(x, y)$ :

(Algoritmo 4.11)

```
def polinomio_segundo_grado(coeficientes,x,y):
    A,B,C,D,E,F=coeficientes
    P=A*x**2+B*x*y+C*y**2+D*x+E*y+F
    return P
```

Si calculamos el valor de  $P(x, y)$  para todos los puntos  $xps$  y  $yps$  verificamos la afirmación:

```
coeficientes=A,B,C,D,E,F
```

```
Pxpsyps=polinomio_segundo_grado(coeficientes,xps,yps)
```

```
print(f"P(xps,yps):\n{Pxpsyps[:5]}...")
```

```
P(xps,yps):
[ 2.84217094e-14 -1.13686838e-13 -1.13686838e-13 -7.10542736e-14
-5.68434189e-14]...
```

O para verificarlo en todos los puntos, podemos sumar el valor absoluto de los valores de  $Pxpsyps$ :

```
Psum=sum(abs(Pxpsyps))
```

```
Sum |P(xps,yps)| = 1.1738165994756855e-11
```

Finalmente podemos poner a prueba las Ecs. (??), (4.62) y (4.63):

```
#Parámetro de forma
eta_num=1-(A+C)

#Ángulo
from numpy import arctan,sin,cos
teta_num=0.5*arctan(B/(C-A))

#Desplazamiento vertical
ty_num=(D*sin(teta_num)+E*cos(teta_num))/2
```

```
eta original = -0.36, eta numérico = -0.36
teta original = 30, teta numérico = 30
ty original = -10, ty numérico = -10
```

Como era de esperarse, la coincidencia es perfecta.

#### 4.2.12. Síntesis algebraica

En la Sección 4.2.2 mostramos como las definiciones abstractas de la antigüedad, basadas en áreas y proporciones, se convirtieron en la edad baja edad media

y el renacimiento, en ecuaciones algebraicas. Las representaciones algebraicas permiten describir de forma sintética y poderosa el lugar geométrico de las cónicas.

En las secciones precedentes hemos visto como la descripción algebraica de las cónicas depende de donde coloquemos el origen o en que dirección escojamos los ejes del sistema de coordenadas. De acuerdo a estas elecciones reconocimos hasta ahora 4 formas distintas de describir algebraicamente cualquier cónica, una vez especificados un parámetro de tamaño, por ejemplo el *semilatus rectum*  $p$  y uno de forma, por ejemplo la excentricidad  $e$ :

- Ecuación respecto al apside (origen en el ápice, eje  $x$  sobre el eje de simetría, Ec. 4.35):

$$y_a^2 - 2px_a - (e^2 - 1)x_a^2 = 0$$

- Ecuación respecto a la directriz (origen en la directriz, eje  $x$  sobre el eje de simetría, Ec. ??):

$$y_d^2 - 2pex_d - (e^2 - 1)x_d^2 + e^2 p^2 = 0$$

- Ecuación respecto al centro (origen en el centro de simetría, eje  $x$  sobre el eje de simetría, Ec. 4.46, solo valida para  $e \neq 1$ ):

$$\frac{x_c^2}{a^2} \pm \frac{y_c^2}{b^2} = 1$$

donde  $a^2 = p/(1 - e^2)$ , el signo “+” es para elipses ( $e < 1$ ) en cuyo caso  $b^2 = a^2(1 - e^2)$  y el signo “-” es para hipérbola ( $e > 1$ ) para el cuál  $b^2 = \beta^2 = a^2(e^2 - 1)$ .

- Ecuación general (origen en  $t_x, t_y$  y eje  $x'$  rotado un ángulo  $\theta$  respecto al eje de simetría, Ec. 4.59):

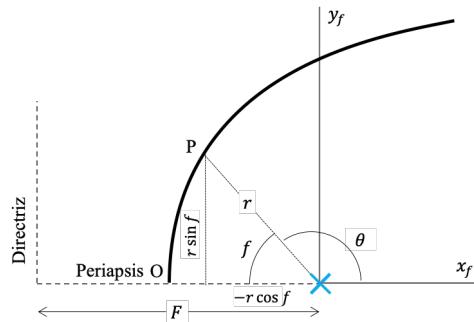
$$Ax'^2 + Bx'y' + Cy'^2 + Dx' + Ey' + F = 0$$

con:

$$\begin{aligned} A &= 1 - e^2 \cos^2 \theta \\ B &= e^2 \sin 2\theta \\ C &= 1 - e^2 \sin^2 \theta \\ D &= 2t_y \sin \theta - 2p \cos \theta + 2t_x \cos \theta (1 - e^2) \\ E &= 2t_y \cos \theta + 2p \sin \theta - 2t_x \sin \theta (1 - e^2) \\ F &= t_x^2 (1 - e^2) - 2pt_x + t_y^2. \end{aligned}$$

#### 4.2.13. Cónicas en coordenadas cilíndricas

Nos proponemos ahora a escribir la ecuación de la cónica, en coordenadas cilíndricas con origen en uno de los focos. La ecuación resultante y los resultados geométricos que se derivan de ella, es de primera importancia para la mecánica celeste.



**Figura 4.14:** Derivación de la ecuación de la cónica en coordenadas cilíndricas referidas al Foco. En la figura el ángulo  $f$  es la anomalía verdadera.

Comenzando con la ecuación de la cónica referida a la directriz (Ec. 4.38) podemos aplicar una traslación al foco haciendo  $x_d = x_f + F$  y  $y_d = y_f$ :

$$y_f^2 - (e^2 - 1)(x_f + F)^2 - 2F(x_f + F) + F^2 = 0 \quad (4.64)$$

Si escribimos  $x_f, y_f$  en coordenadas cilíndricas como (ver Ecs. 4.12):

$$\begin{aligned} x_f &= -r \cos f \\ y_f &= r \sin f \end{aligned} \quad (4.65)$$

donde  $f$ , en lugar de la coordenada cilíndrica acimutal convencional  $\theta$  (que es un ángulo referido al semi eje  $x+$ ) el ángulo entre la dirección del periapsis y el radio vector del punto (ver ??), la Ec. (4.64), después de algunas manipulaciones algebraicas se convierte en:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos f} \quad (4.66)$$

que es la ecuación fundamental de la cónica y que veremos aparecer con mucha frecuencia en la mecánica celeste.

Las ecuaciones (??) y (4.66) evidencian un hecho interesante: el ángulo  $f$  se puede usar para describir matemáticamente, usando un sólo parámetro, las coordenadas cartesianas de los puntos sobre la cónica. Esto hace mucho más sencillo encontrar la posición de los puntos sobre estas curvas, en comparación como lo teníamos que hacer al usar las ecuaciones algebraicas en  $x, y$  de las secciones anteriores.

Para ilustrar el poder de este resultado considere el siguiente algoritmo para graficar una elipse y compárela con el visto en la ??:

(Algoritmo 4.12)

```
#Parámetros
p=10.0
e=0.8

#Valores del ángulo
from numpy import linspace,pi
```

```
fs=linspace(0,2*pi,100)

#Distancias
from numpy import cos
rs=p/(1+e*cos(fs))

#Coordenadas
from numpy import sin
xs=rs*cos(fs)
ys=rs*sin(fs)

#Gráfica
import matplotlib.pyplot as plt
fig=plt.figure()
ax=fig.gca()

#Puntos cónica
ax.plot(xs,ys,'b-')
#Foco
ax.plot([0],[0], 'cx', markersize=10)

#Decoración
ax.set_xlabel(f"${x_f}$")
ax.set_ylabel(f"${y_f}$")
from pymcel.plot import fija_ejes_proporcionales
valores=(xs,ys),
fija_ejes_proporcionales(ax,valores);
ax.grid();
```

ver Figura 4.15

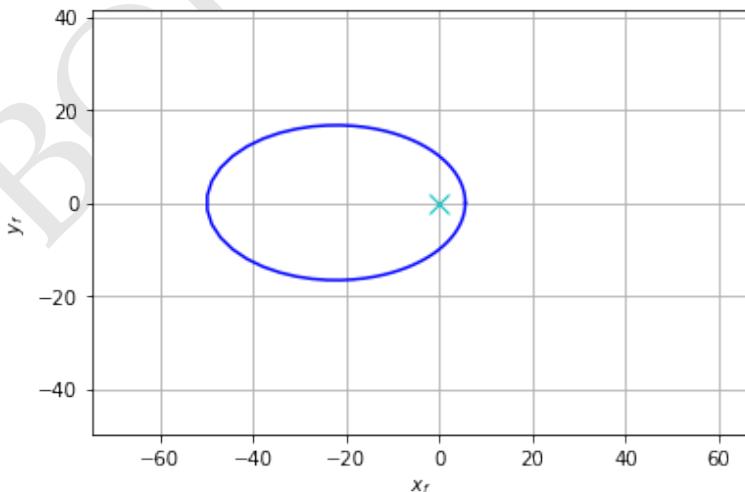


Figura 4.15: Figura correspondiente al código 4.12.

Este será el método que utilizaremos en lo sucesivo para generar los puntos sobre cualquier cónica.

Un hecho interesante sobre el Alg. (4.12) es que no se generaliza fácilmente para el caso de una parábola o una hipérbola. La razón es que en los casos de conicas abiertas el valor del ángulo  $f$  esta limitado a un intervalo diferente al de la elipse en la que  $f \in [0, 2\pi]$  o  $f \in [-\pi, \pi]$ .

En este caso si despejamos  $\cos f$  de la Ec. (??):

$$\cos f = \frac{1}{e} \left( \frac{p}{r} - 1 \right)$$

cuando  $r \rightarrow \infty$  el ángulo  $f$  adopta valores extremos dados por:

$$\cos f \rightarrow -\frac{1}{e}$$

Para el caso de la parábola esto implica que  $f \in (-\pi, \pi)$ , que es idéntico al caso de la elipse pero con el extremo inferior del intervalo abierto. En el caso de la hipérbola:

$$f \in (-\pi + \psi, \pi - \psi)$$

donde  $\psi = \cos^{-1}(1/e)$  es el ángulo de apertura introducido en la Ec. (4.51).

Un algoritmo más general entonces, para generar los puntos sobre una cónica se presenta en la rutina a continuación:

(Algoritmo 4.13)

```
def puntos_conica(p,e,df=0.1):

    #Compute fmin,fmax
    from numpy import pi
    if e<1:
        fmin=-pi
        fmax=pi
    elif e>1:
        from numpy import arccos
        psi=arccos(1/e)
        fmin=-pi+psi+df
        fmax=pi-psi-df
    else:
        fmin=-pi+df
        fmax=pi-df

    #Valores del ángulo
    from numpy import linspace,pi
    fs=linspace(fmin,fmax,500)

    #Distancias
    from numpy import cos
    rs=p/(1+e*cos(fs))

    #Coordenadas
    from numpy import sin
```

```

xs=rs*cos(fs)
ys=rs*sin(fs)
from numpy import zeros_like
zs=zeros_like(xs)

return xs,ys,zs

```

Y un gráfico de la cónica, usando la rutina anterior sería:

(Algoritmo 4.14)

```

#Genera puntos
p=10.0
e=1.5
xs,ys,zs=puntos_conica(p,e)

#Gráfica
import matplotlib.pyplot as plt
fig=plt.figure()
ax=fig.gca()

ax.plot(xs,ys,'b-')
ax.plot([0],[0],'cx',markersize=10)

#Decoración
ax.set_xlabel(f"${x}_f$")
ax.set_ylabel(f"${y}_f$")
from pymcel.plot import fija_ejes_proporcionales
valores=(xs,ys),
fija_ejes_proporcionales(ax,valores);
ax.grid()

```

*ver Figura 4.16*

### Anomalías {#subsubsec\_conicas\_anomalias}

Además de las Ecs. (4.66) y (4.65) en las que describimos las coordenadas de los puntos sobre una cónica arbitraria como función de un único parámetro  $f$  (ecuaciones paramétricas), existe una segunda manera de expresar las ecuaciones de la elipse y de la hipérbola, en términos de otro parámetro.

En el caso de la elipse, por ejemplo, si partimos de la ecuación respecto al centro (Ec. 4.46):

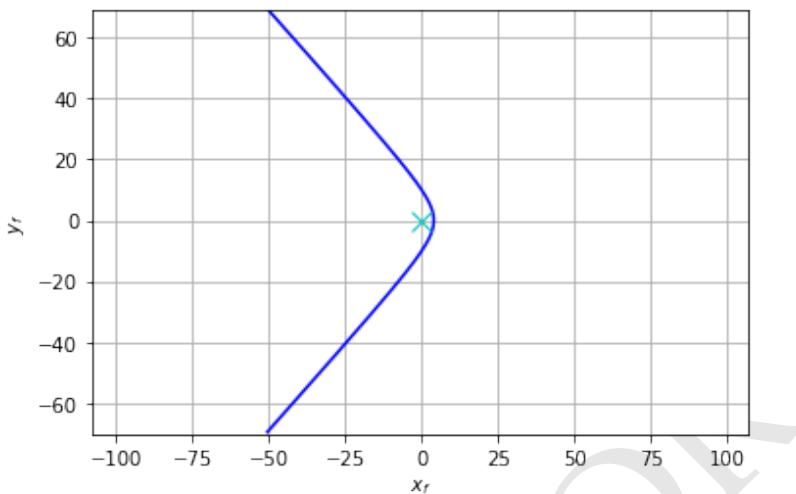
$$\frac{x_c^2}{a^2} + \frac{y_c^2}{b^2} = 1$$

es posible escribir una forma parámetrica para las coordenadas:

$$\begin{aligned} x_c &= a \cos E \\ y_c &= b \sin E \end{aligned} \tag{4.67}$$

donde  $E$  es el nuevo parámetro.

La interpretación del parámetro  $f$  en la ecuación en coordenadas cilíndricas de la cónica era clara: el valor  $f$  para un punto dado, es al ángulo formado por la línea



**Figura 4.16:** Figura correspondiente al código 4.14.

que va del foco al periapsis y la dirección del radio vector del punto. Por ser un ángulo que especifica la posición del punto respecto al foco (en el que se encuentra el Sol, en la teoría de Kepler del movimiento planetario), llamamos a  $f$  la **anomalía verdadera** del punto.

### Un poco de historia

**Kepler y las anomalías.** El nombre de anomalías viene de Kepler.

¿Qué interpretación tiene por su parte el parámetro  $E$  en las Ecs. (4.67)?

En la construcción de la Figura 4.17 identificamos a  $E$  como un nuevo ángulo, esta vez medido respecto al centro de la elipse y cuyo radio asociado al cortar dos círculos imaginarios de radios  $a$  y  $b$ , permiten encontrar la abcisa y la ordenada de los puntos de la elipse, respectivamente.

Por el hecho de medirse respecto al centro del círculo y no respecto del foco (en el que en la teoría de Kepler se encuentra el Sol, centro del Sistema Solar), llamamos a  $E$  la **anomalía excéntrica**.

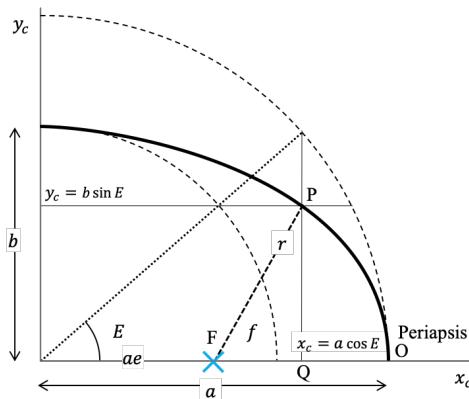
¿Podemos escribir una ecuación para  $r$  en términos del parámetro  $E$  análoga a la Ec. (4.66) que nos da  $r$  en función de  $f$ ? ¡Sin duda alguna!

Considere el triángulo entre los puntos FPQ en la Figura 4.17. El teorema de Pitágoras en ese triángulo se escribe:

$$r^2 = (a \cos E - ae)^2 + b^2 \sin^2 E$$

Teniendo en cuenta que  $b^2 = a^2(1 - e^2)$  y después de un poco de álgebra obtenemos:

$$r = a(1 - e \cos E) \quad (4.68)$$

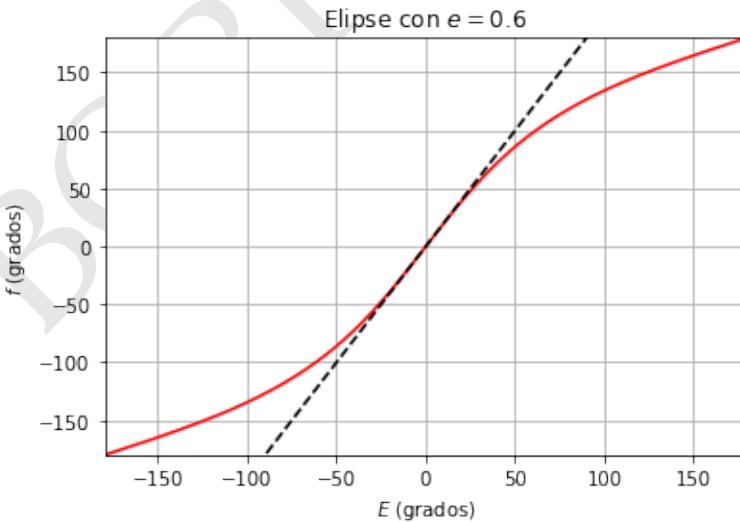


**Figura 4.17:** Definición de la anomalía excéntrica  $E$  y el método asociada a ella para determinar la posición de los puntos sobre una elipse.

que será una forma para representar la cónica alternativa a la Ec. (4.68) y que usaremos con frecuencia en el libro.

Finalmente, la manipulación adecuada de las ecuaciones anteriores permite escribir una relación explícita entre las anomalías verdadera  $f$  y excéntrica  $E$  que será muy utilizada a lo largo de este libro (ver problemas al final del capítulo):

$$\tan \frac{f}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{E}{2} \quad (4.69)$$



**Figura 4.18:** Anomalía verdadera  $f$  como función de la anomalía excéntrica  $E$  para una elipse. La línea punteada corresponde a la aproximación  $f \approx \sqrt{(1+e)/(1-e)}E$ .

Un procedimiento similar al anterior, pero en el caso de la hipérbola, permite escribir las coordenadas de los puntos de la curva en términos de un nuevo parámetro  $F$ :

$$\begin{aligned}x_c &= a \cosh F \\y_c &= a \sinh F\end{aligned}\quad (4.70)$$

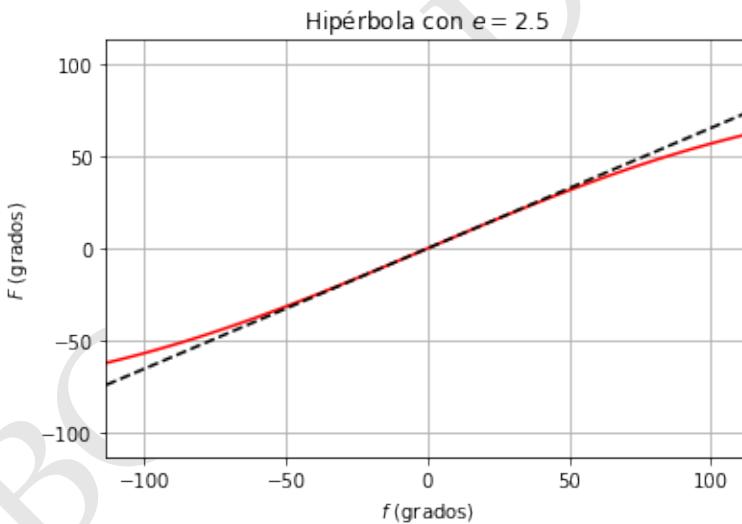
Por analogía con la elipse,  $F$  también es llamada la anomalía excéntrica (aunque en este caso la interpretación geométrica de  $F$  no es tan directa como en el caso de  $E$ .)

La distancia al foco se puede escribir en términos de  $F$  como:

$$r = a(e \cosh F - 1) \quad (4.71)$$

y la relación entre la anomalía verdadera  $f$  y la anomalía excéntrica  $F$  resulta ser:

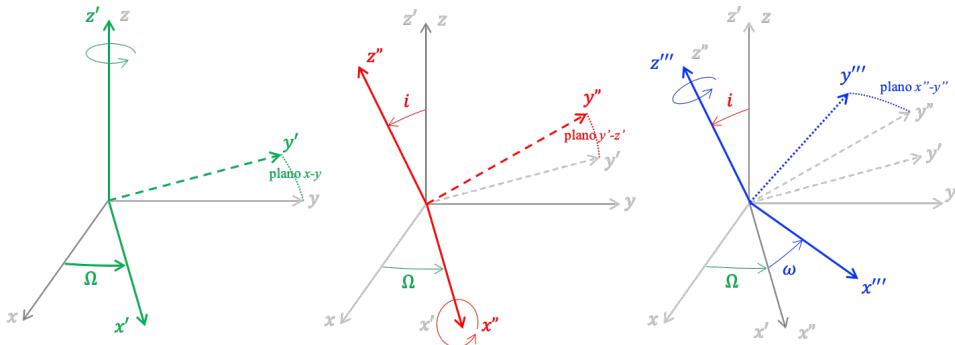
$$\tanh \frac{f}{2} = \sqrt{\frac{e+1}{e-1}} \tanh \frac{F}{2} \quad (4.72)$$



**Figura 4.19:** Anomalía excéntrica  $F$  como función de la anomalía verdadera  $f$  para una hipérbola. La línea punteada corresponde a la aproximación  $F \approx \sqrt{(e-1)/(e+1)}f$ .

#### 4.2.14. Cónicas en el espacio

En las secciones anteriores desarrollamos todas las posibles representaciones algebraicas de las curvas cónicas sobre el plano en el que están definidas. En esta sesión daremos el salto a tres dimensiones y resolveremos la pregunta de ¿cuál es la representación algebraica o geométrica más general de las cónicas en el espacio?



**Figura 4.20:** Secuencia de rotaciones que permiten pasar del sistema natural de ejes de la cónica  $x - y - z$  a un sistema con una orientación arbitraria  $x''' - y''' - z'''$

En la [Sección 4.2.9](#) habíamos visto que es posible, partiendo de la descripción algebraica de la cónica en un sistema de coordenadas referido a su eje de simetría y que llamaremos en lo sucesivo el *sistema de referencia natural de la cónica*, aplicar una rotación sobre el plano para obtener la ecuación más general de la cónica sobre ese mismo plano. El salto al espacio de tres dimensiones es simplemente una generalización de este procedimiento.

#### 4.2.15. Ángulos de Euler

Partiendo del sistema de referencia natural de la cónica, es posible orientar de forma arbitraria la curva en el espacio realizando en total tres rotaciones *independientes* (ver [Figura 4.20](#).) Los ángulos en los que se realizan esas rotaciones, y que llamaremos en este texto ( $\Omega, i, \omega$ ), se conocen universalmente como los **ángulos de Euler**.

La secuencia de rotaciones mostradas en la ?? se puede describir cualitativamente como:

1. Rotación del sistema original  $x - y - z$  (sistema natural) en un ángulo  $\Omega$  alrededor del eje  $z$ , para obtener un nuevo sistema de ejes  $x' - y' - z'$
2. Rotación del sistema  $x' - y' - z'$  en un ángulo  $i$  alrededor del eje  $z'$ , para obtener un nuevo sistema de ejes  $x'' - y'' - z''$
3. Rotación del sistema  $x'' - y'' - z''$  en un ángulo  $\omega$  alrededor del eje  $z''$ , para obtener un nuevo sistema de ejes  $x''' - y''' - z'''$ .

Al sistema de ejes final lo llamamos el *sistema de coordenadas del observador*.

Usando la representación matricial de las rotaciones en el plano de la Ec. (4.53), la relación entre las coordenadas del observador y las coordenadas naturales de las cónicas será:

$$\begin{pmatrix} x''' \\ y''' \\ z''' \end{pmatrix} = R_z(\omega)R_x(i)R_z(\Omega) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (4.73)$$

Si usamos la definición de las matrices de rotación de la Ec. (4.54):

$$\begin{pmatrix} x''' \\ y''' \\ z''' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c\omega & s\omega & 0 \\ -s\omega & c\omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & ci & si \\ 0 & -si & ci \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c\Omega & s\Omega & 0 \\ -s\Omega & c\Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

donde se ha abreviado  $c\theta \equiv \cos \theta$  y  $s\theta \equiv \sin \theta$ .

Al realizar las multiplicaciones matriciales explícitas queda:

$$\begin{pmatrix} x''' \\ y''' \\ z''' \end{pmatrix} = \mathcal{M}(\Omega, i, \omega) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (4.74)$$

donde la matriz de rotación en tres dimensiones,

$$\mathcal{M}(\omega, i, \Omega) \equiv R_z(\omega)R_x(i)R_z(\Omega) \quad (4.75)$$

se escribe explícitamente como:

$$\mathcal{M}(\omega, i, \Omega) = \begin{pmatrix} c\omega c\Omega - ci s\omega s\Omega & c\omega s\Omega + c\Omega ci s\omega & si s\omega \\ -c\Omega s\omega - s\Omega ci c\omega & -s\Omega s\omega + c\Omega ci c\omega & si c\Omega \\ s\Omega si & -c\Omega si & ci \end{pmatrix} \quad (4.76)$$

Por ser  $\mathcal{M}$  el producto de matrices de unitarias (Ec. 4.75), ella es en sí misma una matriz unitaria, es decir  $\det \mathcal{M} = 1$ , pero más importante:

$$\mathcal{M}^{-1} = \mathcal{M}^T$$

explícitamente,

$$\mathcal{M}(\omega, i, \Omega)^T = \begin{pmatrix} c\omega c\Omega - ci s\omega s\Omega & -c\Omega s\omega - c\omega ci s\Omega & si s\Omega \\ c\omega s\Omega + s\omega ci c\Omega & -s\Omega s\omega + c\omega ci c\Omega & si c\omega \\ s\omega si & c\omega si & ci \end{pmatrix} \quad (4.77)$$

A la inversa, las coordenadas naturales de la cónica  $(x, y, z)$  se pueden obtener de las coordenadas del observador, invirtiendo la Ec. (??):

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = R_z(-\Omega)R_x(-i)R_y(-\omega) \begin{pmatrix} x''' \\ y''' \\ z''' \end{pmatrix} \quad (4.78)$$

o equivalentemente, usando la forma explícita en la Ec. (4.74) y aprovechando las propiedades de la matriz de rotación en tres dimensiones  $\mathcal{M}$ :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathcal{M}^T \begin{pmatrix} x''' \\ y''' \\ z''' \end{pmatrix} \quad (4.79)$$

### 4.2.16. Matrices de rotación generales

Usando SPICE podemos construir la matriz de rotación en tres dimensiones  $\mathcal{M}$  por dos medios distintos. El primero es usar la rutina `rotate` que habíamos introducido en el Alg. (4.7):

```
#Angulos
from numpy import pi
Omega=pi/6
omega=pi/3
i=pi/4

#Matrices individuales
from spiceypy import rotate
RzOmega=rotate(Omega,3)
Rxi=rotate(i,1)
Rzomega=rotate(omega,3)
```

La matriz de rotación en tres dimensiones  $\mathcal{M}$ , de acuerdo con su definición en la Ec. (4.75), puede obtenerse aplicando sucesivamente la rutina de multiplicación de matrices `mxm`:

(Algoritmo 4.15)

```
from spiceypy import mxm
M=mxm(Rzomega,mxm(Rxi,RzOmega))

M =
[[ 0.12682648  0.78033009  0.61237244]
 [-0.9267767 -0.12682648  0.35355339]
 [ 0.35355339 -0.61237244  0.70710678]]
```

Existe sin embargo una rutina compacta y mucho más general en SPICE que permite calcular la matriz rotación de cualquier sucesión de rotaciones en el espacio, no solamente la que usamos aquí.

Para ello podemos definir una matriz de rotación general  $\mathcal{R}$  resultante de aplicar rotaciones sucesivas  $\theta_i$  alrededor del eje  $\hat{e}_k$ ,  $\theta_j$  alrededor del eje  $\hat{e}_j$  y  $\theta_i$  alrededor del eje  $\hat{e}_i$  como:

$$\mathcal{R}(\theta_i, \theta_j, \theta_k, i, j, k) \equiv R_i(\theta_i)R_j(\theta_j)R_k(\theta_k)$$

En términos de esta matriz general, la matriz de rotación *canónica*  $\mathcal{M}$  presentada en la Sección 4.2.15 se escribe:

$$\mathcal{M} = \mathcal{R}(\omega, i, \Omega, 3, 1, 3)$$

En el paquete SPICE la rotación general  $\mathcal{R}$  se implementa con la rutina `eul2m` que podemos usar para obtener  $\mathcal{M}$  como:

(Algoritmo 4.16)

```
from spiceypy import eul2m
M=eul2m(omega,i,Omega,3,1,3)
```

```
M =
[[ 0.12682648  0.78033009  0.61237244]
 [-0.9267767 -0.12682648  0.35355339]
 [ 0.35355339 -0.61237244  0.70710678]]
```

Naturalmente el resultado coincide con el obtenido en el Alg. (4.15). Podemos ahora verificar la unitariedad de  $\mathcal{M}$  calculando su determinante, su inversa (calculada numérica y usando la propiedad en la Ec. 4.78) y su transpuesta:

```
#Determinante
from numpy.linalg import det
detM=det(M)

#Inversa
from numpy.linalg import inv
Minv=inv(M)

#Inversa por definicion
Minv_def=eul2m(-Omega,-i,-omega,3,1,3)

#Transpuesta
MT=M.transpose()

print(f"det(M) = {detM:g}")
print(f"inversa M (numérica) = \n{Minv}")
print(f"inversa M (definición) = \n{Minv_def}")
print(f"transpuesta M = \n{MT}")

det(M) = 1
inversa M (numérica) =
[[ 0.12682648 -0.9267767   0.35355339]
 [ 0.78033009 -0.12682648 -0.61237244]
 [ 0.61237244  0.35355339  0.70710678]]
inversa M (definición) =
[[ 0.12682648 -0.9267767   0.35355339]
 [ 0.78033009 -0.12682648 -0.61237244]
 [ 0.61237244  0.35355339  0.70710678]]
transpuesta M =
[[ 0.12682648 -0.9267767   0.35355339]
 [ 0.78033009 -0.12682648 -0.61237244]
 [ 0.61237244  0.35355339  0.70710678]]
```

#### 4.2.17. Gráfico de una cónica rotada en el espacio

Con estos elementos a la mano podemos escribir algoritmos para, usando las ecuaciones encontradas en la Sección 4.2.11 y los algoritmos de la Sección 4.2.11, representar gráficamente una cónica en el espacio.

Comenzamos por obtener los puntos de la cónica en su sistema natural de coordenadas (plano de la cónica, origen en el foco, semieje  $x+$  apuntando hacia el perihelio) usando para ello la rutina `puntos_conica` que habíamos introducido en el Alg. (4.13):

```
from pymcel.export import puntos_conica
p=10.0
e=0.8
xs,ys,zs=puntos_conica(p,e)
```

Ahora podemos rotar los puntos de la cónica usando la matriz  $M$  calculada en el Alg. (4.16). Para hacerlo nos apoyaremos nuevamente en la rutina general `rota_puntos` que habíamos introducido antes en el Alg. (??):

```
from pymcel.export import rota_puntos
xppps,yppps,zppps=rota_puntos(M,xs,ys,zs)
```

Una gráfica en tres dimensiones de la cónica en su plano natural y en los ejes rotados se puede realizar usando el siguiente código:

(Algoritmo 4.17)

```
import matplotlib.pyplot as plt
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
fig=plt.figure()
ax=fig.gca(projection='3d')

#Gráfica de los puntos originales
ax.plot(xs,ys,zs, 'k--')

#Gráfica de la cónica rotada
ax.plot(xppps,yppps,zppps, 'b-')

#Decoración
ax.set_xlabel("$x$")
ax.set_ylabel("$y$")
ax.set_zlabel("$z$")

from pymcel.plot import fija_ejes3d_proporcionales
fija_ejes3d_proporcionales(ax);
fig.tight_layout();
```

*ver Figura 4.21*

#### 4.2.18. Elementos orbitales

Partiendo de las ecuaciones paramétricas de la cónica en su plano natural (Ecs. 4.65 y 4.66):

$$\begin{aligned}x''' &= \frac{p \cos f}{1 + e \cos f} \\x''' &= \frac{p \sin f}{1 + e \cos f} \\z''' &= 0\end{aligned}$$

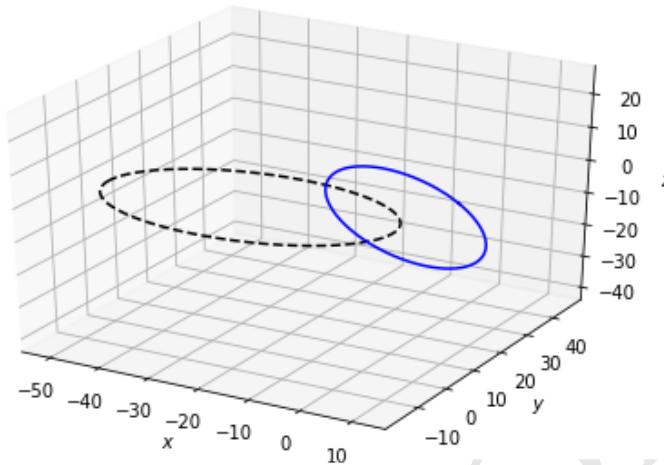


Figura 4.21: Figura correspondiente al código 4.17.

y usando las expresiones explícitas para la rotación en tres dimensiones dadas por las Ecs. (4.79) y (4.77), podemos escribir las ecuaciones paramétricas generales de una cónica en el espacio:

$$\begin{aligned}x &= r[\cos \Omega \cos(\omega + f) - \cos i \sin \Omega \sin(\omega + f)] \\y &= r[\sin \Omega \cos(\omega + f) + \cos i \cos \Omega \sin(\omega + f)] \\z &= r[\cos f \sin \omega \sin i + \sin f \cos \omega \sin i]\end{aligned}\quad (4.80)$$

donde  $r = p / (1 + e \cos f)$

Vemos aquí entonces que para especificar la posición de cualquier punto sobre una cónica, independiente de su orientación espacial, hace falta indicar el valor de 6 parámetros:  $p, e, i, \Omega, \omega$  y  $f$ . A estas cantidades las llamamos en mecánica celeste los **elementos orbitales clásicos** y volveremos sobre ellos en el [Capítulo 7](#).

En realidad, de los 6 elementos orbitales clásicos, 5 de ellos ( $p, e, i, \Omega, \omega$ ) permiten especificar el tamaño, forma y orientación de la cónica y son compartidos por todos los puntos que definen la curva. El último elemento,  $f$  permite especificar la posición de un punto específico.

Usando los elementos orbitales clásicos podemos dibujar una cónica en el espacio usando un algoritmo más directo que el que usamos en la [Sección 4.2.17](#). Para ello hemos diseñado la rutina `conica_de_elementos`:

```
def conica_de_elementos(p=10.0,e=0.8,i=0.0,Omega=0.0,omega=0.0,df=0.1):

    #Convierte elementos angulares en radianes
    from numpy import pi
    p=float(p)
    e=float(e)
    i=float(i)*pi/180
    Omega=float(Omega)*pi/180
    omega=float(omega)*pi/180
```

```
#Compute fmin,fmax
if e<1:
    fmin=-pi
    fmax=pi
elif e>1:
    from numpy import arccos
    psi=arccos(1/e)
    fmin=-pi+psi+df
    fmax=pi-psi-df
else:
    fmin=-pi+df
    fmax=pi-df

#Valores del ángulo
from numpy import linspace,pi
fs=linspace(fmin,fmax,500)

#Distancia al periapsis
q=p/(1+e)

#Distancia al foco
from numpy import sin,cos
rs=p/(1+e*cos(fs))

#Coordenadas
xs=rs*(cos(Omega)*cos(omega+fs)-cos(i)*sin(Omega)*sin(omega+fs))
ys=rs*(sin(Omega)*cos(omega+fs)+cos(i)*cos(Omega)*sin(omega+fs))
zs=rs*(cos(fs)*sin(omega)*sin(i)+sin(fs)*cos(omega)*sin(i))

#Posición del periapsis (f=0)
xp=q*(cos(Omega)*cos(omega)-cos(i)*sin(Omega)*sin(omega))
yp=q*(sin(Omega)*cos(omega)+cos(i)*cos(Omega)*sin(omega))
zp=q*sin(omega)*sin(i)

#Gráfico
import matplotlib.pyplot as plt
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
fig=plt.figure()
ax=fig.gca(projection='3d')

#Gráfica de los puntos originales
ax.plot(xs,ys,zs,'b-')

#Posición del periapsis
ax.plot([0,xp],[0,yp],[0,zp], 'r-')

#Fija punto de vista
ax.view_init(elev=15.,azim=30.0)

#Decoración
from pymcel.plot import fija_ejes3d_proporcionales
```

```
xrange,yrange,zrange=fija_ejes3d_proporcionales(ax);

#Dibuja Ejes
ax.plot([0,xrange[1]],[0,0],[0,0], 'k-')
ax.plot([0,0],[0,yrange[1]],[0,0], 'k-')
ax.plot([0,0],[0,0],[0,zrange[1]], 'k-')
ax.text(xrange[1],0,0,"$x$",ha='left',va='top')
ax.text(0,yrange[1],0,"$y$",ha='left',va='top')
ax.text(0,0,zrange[1],"$z$",ha='left',va='bottom')

fig.tight_layout();
```

El gráfico de la cónica sería:

(Algoritmo 4.18)

```
from numpy import pi
conica_de_elementos(p=10.0,e=0.5,Omega=60.0,i=30.0,omega=20.0);
```

*ver Figura 4.22*

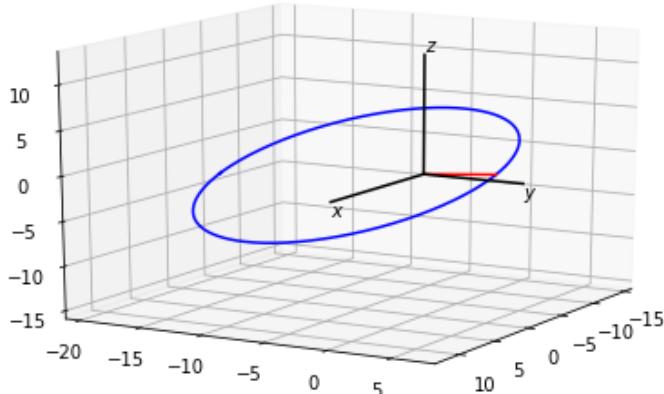


Figura 4.22: Figura correspondiente al código 4.18.

Para ver una versión interactiva de esta gráfica vaya a las libertas disponibles en la [versión electrónica el libro<sup>21</sup>](#).

<sup>21</sup><http://mybook.org>

## Capítulo 5

# Mecánica de partículas

### Resumen

En este capítulo presentaremos una síntesis moderna de los principios y leyes de la mecánica, especialmente la mecánica prerrelativística o newtoniana, sobre los que se fundamenta la mecánica celeste y la mecánica analítica que desarrollaremos en los siguientes capítulos. Nos concentraremos aquí en la mecánica de partículas puntuales y sistemas de partículas interactuantes. Dividiremos la mecánica en cinemática, la descripción del movimiento y dinámica, el estudio de sus causas. Hacia el final presentaremos algunos elementos de mecánica relativística (principalmente cinemática) que serán de utilidad en la mecánica celeste postnewtoniana.

Conocemos con el nombre de **mecánica** al conjunto de definiciones, principios y leyes físicas que permiten describir el movimiento de los cuerpos materiales (cinemática) y la relación con los agentes que los producen y perturban (dinámica).

La mecánica se ha desarrollado históricamente durante dos períodos. El primero período esta comprendido entre la publicación de los *hilosophiae Naturalis Principia Mathematica* por Sir Isaac Newton [19] y los artículos fundamentales de la teoría de la relatividad de 1905. A la mecánica de este período la llamaremos **mecánica prerrelativística** o **mecánica newtoniana**. El segundo período cubre el tiempo entre 1905 y el presente. A la mecánica que se desarollo después de los trabajos originales de Einstein la llamaremos **mecánica relativística** e incluye las teorías especial (mecánica en espacio-tiempo plano) y general de la relatividad (gravitación moderna.)

El adjetivo newtoniano, que usaremos a lo largo de este capítulo, no significa que las cantidades, principios y leyes que formularemos aquí fueron todas inventadas por Newton. Por un lado, además de sus ideas originales, Newton también compiló y sistematizó ideas que ya existían en su época; por el otro, mucha de sus ideas fueron también ampliadas durante casi 200 años después de la publicación de sus obras.

Lo *newtoniano* se refiere aquí al hecho de que en la definición de las cantidades básicas y en la formulación de las leyes, asumiremos, como lo hizo Newton en los *Principia* y lo hicieron sus sucesores hasta principios de los 1900, que: (1) el espacio y el tiempo son entidades independientes y no son afectadas por la materia y (2) la gravedad es una fuerza de acción instantánea a distancia.

Aunque hoy nos parezca increíble, casi toda la mecánica celeste de los últimos 350 años se ha formulado sobre la base de estos principios que hoy sabemos no describen la realidad fundamental del Universo.

La mecánica es una teoría muy amplia que se usa para describir no solo el movimiento de cuerpos o partículas individuales, sino también el movimiento, rotación y deformación de cuerpos materiales continuos (cuerpos rígidos y fluídos.) En este capítulo (y en lo que resta del libro) nos concentraremos, sin embargo, en la mecánica de partículas o sistemas de partículas (nubes de partículas que interactúan débilmente y a distancia entre ellas.)

Antes de proceder a formular los principios (axiomas) y postulados (leyes) en los que se fundamenta la mecánica newtoniana, es necesario definir primero, las cantidades físicas que requerimos en esta tarea. Definir estas cantidades en todo rigor, no solo es un ejercicio intelectual indispensable en la formulación de una teoría, sino, como veremos, puede ser la fuente misma de algunas ideas claves.

## 5.1. Cinemática

### 5.1.1. Cantidades cinemáticas

Las cantidades cinemáticas son aquellas que se usan para describir el movimiento, tal y como ocurre, independiente de sus causas.

Para detalles sobre las convenciones y la notación de las cantidades definidas abajo se recomienda leer la [Sección 4.1.1](#), [Sección 4.1.2](#) y [Sección 4.1.4](#).

- **Tiempo,  $t$ :** Un número real que indica el *intervalo* transcurrido desde un *instante* de referencia. Esta cantidad es *independiente y absoluta* (ver comentarios abajo.)
- **Posición (o vector posición),  $\vec{r}$ :** Es el vector que va del origen de coordenadas a un lugar del espacio.
  - Coordenadas cartesianas:  $\vec{r} = x\hat{e}_x + y\hat{e}_y + z\hat{e}_z$ .
  - Coordenadas cilíndricas:  $\vec{r} = r\hat{e}_r + z\hat{e}_z$ .
  - Coordenadas esféricas:  $\vec{r} = r\hat{e}_r$ .

- **Velocidad  $\vec{v}$ :**

- Definición general:  $\vec{v} \equiv d\vec{r}/dt = \dot{\vec{r}}$ .
- Coordenadas cartesianas:  $\vec{v} = \dot{x}\hat{e}_x + \dot{y}\hat{e}_y + \dot{z}\hat{e}_z$ .
- Coordenadas cilíndricas:  $\vec{v} = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta + \dot{z}\hat{e}_z$ .
- Coordenadas esféricas:  $\vec{v} = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta} \cos \phi \hat{e}_\theta + r\dot{\phi} \hat{e}_\phi$

- **Estado  $\vec{X}$ :** En el contexto de la cinemática en mecánica celeste, llamamos vector de estado  $\vec{X}$ , al vector formado por la unión de las componentes cartesianas de los vectores posición y velocidad,  $\vec{X} : (x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ . En distintos

en contextos será más conveniente denotar al vector de estado usando *notación matricial*, como un vector columna (matriz  $6 \times 1$ )  $\vec{X} : (x \ y \ z \ \dot{x} \ \dot{y} \ \dot{z})^T$  o explícitamente:

$$\vec{X} : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} \quad (5.1)$$

■ **Aceleración  $\vec{a}$ :**

- Definición general:  $\vec{a} \equiv d\vec{v}/dt = \dot{\vec{v}} = d^2\vec{r}/dt^2 = \ddot{\vec{r}}$ .
- Coordenadas cartesianas:  $\vec{a} = \ddot{x}\hat{e}_x + \ddot{y}\hat{e}_y + \ddot{z}\hat{e}_z$ .
- Coordenadas cilíndricas:

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{e}_r(r\ddot{\theta} + 2r\dot{\theta}\dot{\phi})\hat{e}_\theta + \ddot{z}\hat{e}_z \quad (5.2)$$

- Coordenadas esféricas:

$$\begin{aligned} \vec{a} = & (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \cos^2 \phi - r\dot{\phi}^2)\hat{e}_r + \\ & (2r\dot{\theta} \cos \phi + r\ddot{\theta} \cos \phi - 2r\dot{\theta}\dot{\phi} \sin \phi)\hat{e}_\theta + \\ & (2r\dot{\phi} + r\dot{\phi}^2 \sin \phi \cos \phi + r\ddot{\phi})\hat{e}_\phi \end{aligned} \quad (5.3)$$

■ **Tirón y otras:** Es posible definir propiedades que correspondan a la derivada tercera e incluso derivadas superiores del vector posición.

Así por ejemplo, en algunos contextos es útil definir el *tirón* o *sobreaceleración* (*jerk* en inglés):

$$\vec{j} = d\vec{a}/dt = \frac{d^3\vec{r}}{dt^3},$$

el *chasquido* o *rebote* (*jounce* en inglés):

$$\vec{s} \equiv d\vec{j}/dt = \frac{d^4\vec{r}}{dt^4}.$$

Aunque estas cantidades pueden ser de utilidad en algunos contextos mecánicos (por ejemplo en aplicaciones tecnológicas) e incluso en algunos contextos de física teórica, en mecánica celeste ninguno de los dos tiene una función específica (aunque es natural que puedan aparecer derivadas superiores de la posición en los desarrollos.) Por esta misma razón no profundizaremos en estas cantidades. Los interesados pueden encontrar en línea<sup>22</sup> algunas *lecturas interesantes*<sup>23</sup> al respecto.

<sup>22</sup>[https://en.wikipedia.org/wiki/Jerk\\_\(physics\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Jerk_(physics))

<sup>23</sup><http://math.ucr.edu/home/baez/physics/General/jerk.html>

Las expresiones para  $\vec{v}$  y para  $\vec{a}$  en el sistema de coordenadas cilíndricas y esféricas, provistas en la enumeración anterior, pueden obtenerse a partir de las derivadas respecto al tiempo de los vectores unitarios en cada sistema de coordenadas. Dejamos al lector estas deducciones (ver problemas al final del capítulo.)

Varias precisiones deben hacerse sobre la definición de las cantidades cinemáticas presentadas arriba:

- **Tiempo independiente y absoluto.** En la mecánica newtoniana, el valor del tiempo  $t$  asociado a un evento depende solo de las unidades y el instante de referencia escogido. Si dos sistemas de referencia, independiente de su estado de movimiento relativo, usan las mismas unidades y el mismo instante de referencia, obtendrán el mismo valor de  $t$ . Este postulado (que formularemos rigurosamente en el siguiente aparte) aunque bastante útil, es inexacto como se comprobaría a principios de los 1900.
- **Notación del vector posición en coordenadas cilíndricas.** La notación del vector posición en coordenadas cilíndricas,  $\vec{r} = r\hat{a}_r + z\hat{a}_z$  es “inconsistente” porque usa la misma letra para referirse a cantidades diferentes. Así, en este sistema de coordenadas la magnitud del vector posición es  $r = \sqrt{r^2 + z^2}$ , una expresión que carece de sentido (parece indicar que todos los puntos tienen  $z = 0$ ). Para subsanar esta dificultad es común que en los libros de cálculo se use la letra griega  $\rho$  para denotar la componente radial del vector posición en coordenadas cilíndricas. ¿Por qué no hacer lo mismo aquí? Como sucede con muchas elecciones no muy sensatas en astronomía, lo haremos simplemente porque es tradición en mecánica celeste usar la letra  $r$  para referirse a la coordenada radial sobre un plano. En lo que resta del libro, el significado de las cantidades que denotemos como  $r$  se precisará de acuerdo al contexto en la que se usen.
- **Velocidad, rapidez y componente radial de la velocidad.** Asegurese de entender la diferencia conceptual y matemática entre las cantidades:  $\dot{\vec{r}}$  (vector velocidad),  $v = |\dot{\vec{r}}|$  (magnitud de la velocidad o rapidez) y  $\dot{r}$  (componente radial de la velocidad en el sistema de coordenadas cilíndricas o esféricas).

### 5.1.2. Sistemas de referencia

Como hemos sugerido antes, el valor de las cantidades cinemáticas definidas arriba, dependerá, por ejemplo, de cómo elijamos el instante de referencia para medir el tiempo o el origen del sistema de coordenadas. Estas elecciones (arbitrarias) definen lo que en física se conoce como el **sistema de referencia**.

Vale la pena aclarar que el sistema de referencia no es lo mismo que el sistema de coordenadas: en un mismo sistema de referencia se pueden usar distintos sistemas de coordenadas.

¿Cómo se relacionan las cantidades cinemáticas medidas en dos sistemas de referencia diferentes?

Esta pregunta fue importante en los albores de la mecánica, especialmente en los trabajos de Galileo. En aquel entonces, sin embargo, tenía un valor más bien filosófico e incluso retórico (como herramienta de argumentación), pero una relevancia física menor. A principios de los 1900, especialmente en los trabajos de Albert Einstein y colaboradores, la pregunta por la relación entre las observaciones

realizadas en distintos sistemas de referencia, se convirtió en la base de la formulación de una nueva teoría física (la teoría de la relatividad).

Toda la mecánica newtoniana que veremos a continuación, y sobre la base de ella, los resultados de la mecánica celeste que desarrollaremos en este libro, se apoyan en el postulado de que las observaciones realizadas en sistemas de referencias diferentes se pueden conectar a través de las denominadas **transformaciones de Galileo**:

### Postulado 5.1

**Transformaciones de Galileo.** Si dos sistemas de referencia,  $R$  y  $R'$  usan las mismas unidades y el origen de sus sistemas de coordenadas coincide en  $t = 0$ , las siguientes relaciones entre las propiedades cinemáticas básicas medidas en los dos sistemas de referencia, se consideran válidas:

$$\begin{aligned} t &= t' \\ \vec{r} &= \vec{r}' + \int_0^t \vec{u}(t) dt \end{aligned} \quad (5.4)$$

Donde  $\vec{u}(t)$  es la velocidad del origen de coordenadas del sistema  $R'$  respecto del sistema  $R$ .

Estas transformaciones fundamentales, permiten escribir las reglas de transformación para cualquier otra propiedad cinemática, por ejemplo, para la velocidad y la aceleración:

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{u} \quad (5.5)$$

$$\vec{a} = \vec{a}' + \dot{\vec{u}} \quad (5.6)$$

La Ec. (5.5) se conoce como la **ley de adición de velocidades galileana** y tiene una importancia histórica en el desarrollo de los postulados de la teoría de la relatividad. La Ec. (5.6) será importante en la definición, en las próximas secciones, del concepto de **sistema de referencia inercial**.

#### 5.1.3. La ecuación de movimiento (e.d.m.)

La posición y velocidad de una partícula en cualquier instante futuro puede predecirse si se resuelve la siguiente ecuación diferencial:

$$\ddot{\vec{r}} = \vec{a}. \quad (5.7)$$

A esta ecuación se la conoce en mecánica como la **ecuación de movimiento** y para referirnos a ella, en lo sucesivo, usaremos el acrónimo e.d.m. o el nombre **edm** en los algoritmos.

La solución general de esta ecuación es la función de posición de la partícula  $\vec{r}(t)$ , de la que se pueden deducir posteriormente las demás cantidades cinemáticas.

La e.d.m. es una ecuación diferencial vectorial de segundo orden con condiciones iniciales  $\vec{r}(t_0) = \vec{r}_0$ ,  $\dot{\vec{r}}(t = t_0) = \vec{v}_0$ , es decir, matemáticamente y como explicamos en la Sección 4.1.9, es un problema de valor inicial (IVP).

La aceleración  $\vec{a}$  en la Ec. (5.7) es una función que puede depender de varias de las cantidades cinemáticas definidas en la sección previa. Para la mayoría de las situaciones consideradas en este texto, sin embargo, asumiremos que la aceleración depende solamente del tiempo y del estado de la partícula, es decir:

$$\vec{a} = \vec{a}(t, \vec{r}, \dot{\vec{r}}).$$

La e.d.m. puede expresarse también como dos ecuaciones diferenciales vectoriales de primer orden (*reducción de orden*):

$$\begin{aligned}\dot{\vec{r}} &= \vec{v} \\ \dot{\vec{v}} &= \vec{a}(t, \vec{r}, \vec{v})\end{aligned}\tag{5.8}$$

Aquí se ha introducido como variable auxiliar la velocidad misma  $\vec{v} \equiv \dot{\vec{r}}$ . Escrita de esta manera, la solución al sistema de ecuaciones diferenciales de la e.d.m. provee simultáneamente las funciones  $\vec{r}(t)$  y  $\vec{v}(t)$ . El sistema gana variables, pero el orden se reduce.

La e.d.m., tanto en la forma (5.7) como (5.8) representa, en realidad, una forma compacta de escribir un sistema de ecuaciones diferenciales escalares.

En términos de las componentes cartesianas, la e.d.m. de la Ec. (5.7) es en realidad un sistema de tres ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden:

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= a_x \\ \ddot{y} &= a_y \\ \ddot{z} &= a_z\end{aligned}\tag{5.9}$$

Por su lado la e.d.m. de la Ec. (5.8) corresponde a un sistema de 6 ecuaciones diferenciales escalares de primer orden:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= v_x \\ \dot{y} &= v_y \\ \dot{z} &= v_z \\ \dot{v}_x &= a_x(t, x, y, z, v_x, v_y, v_z, y) \\ \dot{v}_y &= a_y(t, x, y, z, v_x, v_y, v_z, y) \\ \dot{v}_z &= a_z(t, x, y, z, v_x, v_y, v_z, y)\end{aligned}\tag{5.10}$$

En esta última expresión hemos escrito explícitamente la dependencia de la aceleración de las componentes del vector de estado, para resaltar el hecho que el sistema de ecuaciones diferenciales puede ser altamente *acoplado*.

En términos del vector de estado  $\vec{X} : (\vec{r} \ \vec{v})^T$ , la e.d.m. de primer orden (Ec. 5.10) se puede escribir como:

$$\dot{\vec{X}} = \begin{pmatrix} \vec{v} \\ \vec{a} \end{pmatrix}\tag{5.11}$$

donde (abusando de la notación)  $\vec{v} : (v_x \ v_y \ v_z)^T$  y  $\vec{a} : (a_x \ a_y \ a_z)^T$

**Nota**

**Ecuaciones de movimiento en otros sistemas de coordenadas.** Ecuaciones análogas a la Ecs. (5.9,5.10) pueden escribirse en caso de que la aceleración sea provista en los sistema coordenadas cilíndricas o esféricas. Para ello deben usarse las definiciones de velocidad y aceleración, en el sistema de coordenadas respectivo, que vimos en la [Sección 5.1.1](#). La forma explícita de esas ecuaciones diferenciales, sin embargo, no será tan sencilla como la que escribimos en el caso de las coordenadas cartesianas. El lector podrá explorar estos casos a través de algunos de los problemas incluidos al final del capítulo.

#### 5.1.4. Integración de la e.d.m.

La solución o *integración* de la e.d.m. constituye el problema matemático central de la cinemática y a la larga, el problema más importante de toda la mecánica incluyendo, naturalmente, la mecánica celeste.

En los cursos de mecánica newtoniana básica el problema se resuelve normalmente para dos casos simples:

1.  $\vec{a} = \vec{0}$  que se conoce también como *movimiento rectilíneo y uniforme*.
2.  $\vec{a} = \vec{a}_0$ , donde  $\vec{a}_0$  es un vector constante y que se conoce como movimiento rectilíneo uniformemente acelerado.

Si bien estos dos casos son interesantes en la descripción de un amplio rango de aplicaciones simples (p.e. en el movimiento parabólico), en situaciones realistas y en particular en las que veremos en la mecánica celeste, la función  $\vec{a}$  puede ser mucho más compleja.

En los ejemplos desarrollados a continuación, y que nos servirán para ilustrar algunos conceptos físicos y matemáticos que usaremos con regularidad en el resto del libro, consideraremos dos situaciones hipotéticas comunes, a saber que la  $\vec{a}$  depende exclusivamente del tiempo o que esta cantidad depende del vector de estado.

#### 5.1.5. Integración por cuadraturas

##### Ejemplo 1: movimiento con tirón constante

Considerese el caso simple de una partícula que está sometida a un tirón  $\vec{j}$ :  $(j_0, 0, 0)$  constante en el tiempo. Suponga además que en  $t = 0$  la aceleración de la partícula es nula.

En estas condiciones la función de aceleración, en cualquier tiempo, se puede escribir como:

$$\vec{a}(t) : (j_0 t, 0, 0),$$

Por tanto, la a e.d.m., escrita en términos de las componentes del vector posición (Ec. 5.9) será:

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= j_0 t \\ \dot{y} &= 0 \\ \ddot{z} &= 0\end{aligned}\tag{5.12}$$

Si bien una solución a esta ecuación diferencial puede encontrarse fácilmente por tanto, p.e.  $x(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$ , un procedimiento cuidadoso de solución nos permitirá a continuación revelar algunas propiedades interesantes del sistema dinámico y, más importante aquí, ilustrar un método de solución de ecuaciones diferenciales que será de gran utilidad en los siguientes capítulos.

Reescribamos la ecuación para  $x$  en el sistema de Ecs. (5.12) de la forma:

$$\frac{d}{dt} \dot{x} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} ct^2 \right). \tag{5.13}$$

La clave de este procedimiento de solución esta en la posibilidad de escribir, en función de sus respectivas antiderivadas, ambos lados de la ecuación diferencial. Esta es la razón por la que llamaremos a este método, **método de las cuadraturas** en referencia al término que introdujimos en la [Sección 4.1.7](#) para referirnos a la integral definida de una función.

Reuniendo los términos de la Ec. (5.13) en un mismo lado obtenemos:

$$\frac{d}{dt} \left( \dot{x} - \frac{1}{2} ct^2 \right) = 0.$$

Si bien no hemos resuelto la ecuación todavía, está última manera de escriirla nos permite que la *fórmula* que aparece entre paréntesis y que combina la velocidad y el tiempo, sin importar el estado de la partícula o el instante de tiempo, siempre será constante (su derivada con respecto al tiempo es cero):

$$\dot{x} - \frac{1}{2} ct^2 = I_x \tag{5.14}$$

Decimos que  $C_{I_x}(t, \dot{x}) \equiv \dot{x} - ct^2/2$  es una **integral**, una **cuadratura** o una **constante de movimiento** del sistema. En este caso  $I_x$  es el valor que esta constante adopta para un conjunto específico de condiciones iniciales.

### Definición 5.1

**Constante de movimiento de un sistema dinámico.** Si una función  $f(t, \vec{r}, \vec{v})$  es tal que:

$$C_I(t, \vec{r}, \vec{v}) = I$$

Donde  $I$  es una cantidad que solo depende de las condiciones iniciales, decimos que  $C_I(t, \vec{r}, \vec{v})$  es una **constante de movimiento**. La llamaremos también una **integral** o **cuadratura** del sistema <sup>a</sup>.

<sup>a</sup>En términos rigurosos la *constante de movimiento* es la función  $C_I(t, \vec{r}, \vec{v})$  no su valor numérico  $I$  que por definición es un número real y por lo tanto es constante.

Es fácil verificar que otras constantes de movimiento de este sistema son  $\dot{y} = I_y$  y  $\dot{z} = I_z$ .

### Ejemplo 2: movimiento oscilatorio

Considere ahora el caso en el que una partícula tiene una aceleración dada por:

$$\vec{a}(t) : (-\omega x, 0, 0),$$

donde  $\omega$  es una cantidad constante. Como vemos, cuando la partícula se aleja del origen la aceleración apuntá de nuevo hacia allí. Sabemos que este tipo de aceleración producirá un movimiento oscilatorio.

En este caso la e.d.m. para la componente  $x$  será:

$$\ddot{x} = -\omega x.$$

La integración de esta ecuación por tanteo ya no es tan trivial. Tampoco lo es intentar expresar ambos lados de la ecuación como derivadas respecto al tiempo de otras funciones (como lo hicimos para encontrar la Ec. 5.13).

Sin embargo, si multiplicamos ambos lados de la ecuación por la función  $\dot{x}$ :

$$\dot{x}\ddot{x} = -\omega\dot{x}x,$$

la nueva ecuación puede escribirse, convenientemente, de la forma:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \dot{x}^2 \right) = \frac{d}{dt} \left( -\frac{1}{2} \omega x^2 \right).$$

Allí podemos identificar una constante de movimiento del sistema:

$$\frac{1}{2} \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \omega x^2 = I_x. \quad (5.15)$$

Como la multiplicación de la e.d.m. original por la función  $\dot{x}$  nos permitió encontrar una integral de la ecuación, llamamos a  $\dot{x}$ , un *factor integrante*.

¿De qué sirve encontrar las constantes de movimiento de un sistema si lo que queremos en realidad es hallar la forma explícitas para las funciones  $\vec{r}(t)$ ,  $\vec{v}(t)$ ?

Las constantes de movimiento pueden ofrecernos información sobre la dinámica del sistema, incluso en situaciones en las que no es posible obtener una solución. Note, por ejemplo, cuan diferentes son las constantes de movimiento de los sistemas en los ejemplos 1 y 2. Aunque no resolvimos ninguno de los dos problemas, sus cuadraturas nos dan pistas sobre como se relacionan la posición y velocidad de la partícula en cualquier instante del tiempo. Más adelante mostraremos que es incluso posible dar una interpretación física a estas constantes (en términos de cantidades dinámicas conocidas tales como la energía, el momentum lineal, el momentum angular, o incluso de cantidades desconocidas pero útiles) y su relevancia para la comprensión del sistema será aún mayor.

Ahora bien, siendo las cuadraturas  $C(t, \vec{r}, \vec{v})$  funciones de las variables que deseamos encontrar, si se obtienen suficientes constantes de movimiento (tantas como variables), habremos, técnicamente, obtenido la solución.

En otras palabras, un número suficiente de cuadraturas o de constantes de movimiento permite convertir la solución de una ecuación diferencial, en la solución a un sistema algebraico de ecuaciones (aquel formado por las cuadraturas).

Para ilustrarlo volvamos a la e.d.m. del sistema en el ejemplo 1:

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= j_0 t \\ \dot{y} &= 0 \\ \ddot{z} &= 0\end{aligned}$$

Es posible mostrar que este sistema tiene 6 constantes de movimiento (ya habíamos introducido tres de ellas):

$$\begin{aligned}\dot{x} - \frac{1}{2}j_0 t^2 &= I_x \\ \dot{y} &= I_y \\ \dot{z} &= I_z \\ x - \frac{1}{6}j_0 t^6 - I_x t &= S_x \\ y - I_y t &= S_y \\ z - I_z t &= S_z\end{aligned}\tag{5.16}$$

El valor de las cantidades  $I_x, I_y, I_z, S_x, S_y, S_z$  se obtiene reemplazando las condiciones iniciales en el lado izquierdo de estas ecuaciones.

Si se resuelve simultáneamente el sistema de ecuaciones algebraicas (5.16) se obtiene, finalmente, la solución al problema original:

$$\begin{aligned}x(t) &= \frac{1}{3}j_0 t^3 + I_x t + S_x \\ y(t) &= I_y t + S_y \\ z(t) &= I_z t + S_z \\ \dot{x}(t) &= \frac{1}{2}j_0 t^2 + I_x \\ \dot{y}(t) &= I_y \\ \dot{z}(t) &= I_z\end{aligned}\tag{5.17}$$

Un procedimiento análogo puede usarse para encontrar la solución a la e.d.m. del sistema del ejemplo 2 (vea los problemas al final del capítulo.)

Es posible que nadie escoja un procedimiento tan elaborado para encontrar la solución a la e.d.m. de estos dos sistemas dinámicos simples. Claramente, existen procedimientos más sencillos (incluyendo una solución por tanteo.) Sin embargo, usar el método de las cuadraturas aquí, con sistemas cuya solución se puede obtener con métodos más directos, nos permite ilustrar el poder que tiene el método de las cuadraturas, que será el preferido para encontrar la solución de la e.d.m. de sistemas dinámicos mucho más complejos en mecánica celeste.

### 5.1.6. Integración numérica de la e.d.m.

En aquellos sistemas dinámicos en los que resolver la e.d.m. o encontrar *todas* las constantes de movimiento (resolver por cuadratura el sistema), sea imposible matemáticamente o simplemente muy difícil, es posible buscar una solución aproximada usando los métodos numéricos que estudiamos al final de la Sección 4.1.9.

Como vimos allí, para hacerlo, es necesario primero escribir la e.d.m. como el conjunto de 6 ecuaciones diferenciales de primer orden con la forma general (Ec. 4.27):

$$\{\dot{Y}_i = f_i(t, \{Y_k\})\}_{6}\tag{5.18}$$

Donde  $Y_i$  ( $i = 0, 1, 2, \dots, 5$ ) son las denominadas funciones auxiliares que reemplazan aquí a las cantidades claves del sistema dinámico (las componentes de

$\vec{r}$  y  $\vec{v}$ ). En física, llamaremos a las Ecs. (5.18), *ecuaciones de movimiento reducidas* del sistema o *e.d.m.r.*

Si comparamos la forma general de las e.d.m.r. en la Ec. (5.18) con las ecuaciones de primer orden (5.10), podemos hacer la siguiente identificación para las variables auxiliares  $Y_i$ :

$$\begin{aligned} Y_0 &= x, & Y_1 &= y, & Y_2 &= z \\ Y_3 &= v_x, & Y_4 &= v_y, & Y_5 &= v_z \end{aligned} \quad (5.19)$$

Por otro lado, las funciones  $f_i$  serán:

$$\begin{aligned} f_0(t, \{Y_k\}) &= v_x = Y_3, & f_1(t, \{Y_k\}) &= v_y = Y_4, & f_2(t, \{Y_k\}) &= v_z = Y_5 \\ f_3(t, \{Y_k\}) &= a_x, & f_4(t, \{Y_k\}) &= a_y, & f_5(t, \{Y_k\}) &= a_z \end{aligned}$$

Con esta identificación, una forma compacta de escribir las e.d.m.r., muy útil a la hora de preparar algoritmos, es:

$$\dot{Y}_i = \begin{cases} Y_{3+i} & , \quad 0 \leq i < 3 \\ a_{i-3} & , \quad 3 \leq i < 6 \end{cases} \quad (5.20)$$

Donde hemos introducido la notación  $\{a_0, a_1, a_2\} \equiv \{a_x, a_y, a_z\}$ .

### Integración numérica de las e.d.m. del ejemplo 1

El sistema dinámico del ejemplo 1 introducido en [Sección 5.1.5](#) se caracteriza por tener una aceleración del tipo  $\vec{a} : (j_0 t, 0, 0)$ . En términos de la parametrización de la e.d.m.r. en la Ec. (5.20), esto significa que  $\{a_0, a_1, a_2\} = (j_0 t, 0, 0)$ .

El sistema de ecuaciones diferenciales que describe el sistema puede implementarse en Python usando la rutina:

(Algoritmo 5.1)

```
def edm_ejemplo1(Y, t, j0=1):
    dYdt=[0,0,0,0,0,0]
    dYdt[:3]=Y[3:]
    dYdt[3:]=[j0*t,0,0]

    return dYdt
```

Aunque al final de la [Sección 4.1.9](#) nos habíamos familiarizado con este tipo de rutinas, el diseño de ésta en particular merece algunos comentarios:

- Como sabemos, el propósito de esta rutina es calcular la lista de los valores de las funciones  $f_i$  (lado derecho de las Ecs. 5.18) que son iguales a las primeras derivadas en el tiempo de las variables auxiliares  $\dot{Y}_i$ . En la rutina, para hacer más explícito su significado, hemos decidido llamar a esta lista `dYdt` en lugar de `f`. Los nombres de las variables no afectan la funcionalidad de las rutinas, pero pueden hacerla más legible y modificable.
- Para asignar los valores de la lista `dYdt` hemos aprovechado el poder de Python para sacar *trozos, porciones o tajadas* (*slices* en inglés) de listas y arreglos. Así el trozo `dYdt[:3]` corresponde a las primeras tres componentes

$dYdt[0]$ ,  $dYdt[1]$ ,  $dYdt[2]$  (nótese que, por empezar en 0, este trozo no incluye la componente  $dYdt[3]$ .) Por otra parte el trozo  $Y[3:]$  de esta lista, corresponde a las componentes  $Y[3]$ ,  $Y[4]$ ,  $Y[5]$ . Por tanto, la igualdad  $dYdt[:3]=dYdt[3:]$  equivale a escribir explícitamente  $dYdt[0]=Y[3]$ ,  $dYdt[1]=Y[4]$ ,  $dYdt[2]=Y[5]$  que justamente implementa la parte  $\dot{Y}_i = Y_{i+3}$  de la Ec. (5.20)

Una vez escrita la rutina, la solución se obtiene siguiendo los algoritmos introducidos al final de la Sección 4.1.9:

```
#Valor del tiron
j0=0.5

#Condiciones iniciales
from numpy import array
Y0s=array([1,0,0,-3,0,0])

#Tiempos para obtener la solución
from numpy import linspace
ts=linspace(0.0,5.0,20)

#Solución con odeint
from scipy.integrate import odeint
Ys=odeint(edm_ejemplo1,Y0s,ts,args=(j0,))
```

Solucion, Ys:

```
[[ 1.          0.          0.          -3.          0.          0.        ]
 [ 0.21204503  0.          0.          -2.98268698  0.          0.        ]
 [-0.56679785  0.          0.          -2.93074792  0.          0.        ]
 [-1.32741651  0.          0.          -2.84418283  0.          0.        ]
 [-2.06069881  0.          0.          -2.72299169  0.          0.        ]]
...
...
```

Podemos, finalmente, visualizar la solución a la e.d.m.r. haciendo un gráfico de la coordenada  $x$  (columna  $Ys[:,0]$  de la matriz de solución) como función del tiempo  $ts$ :

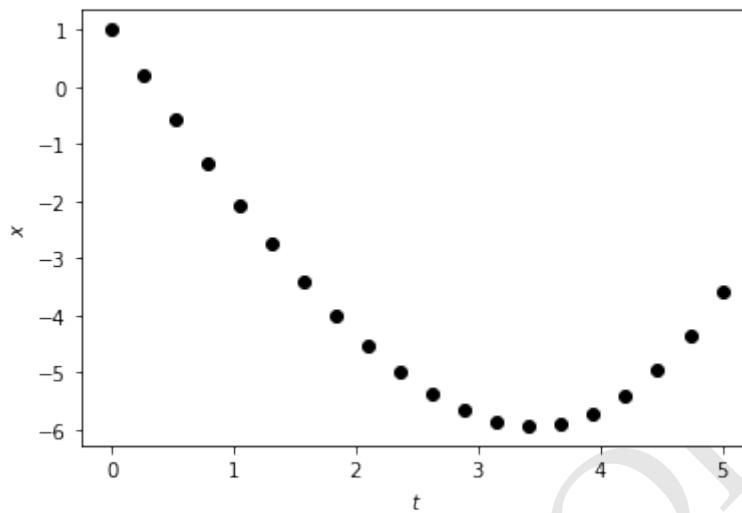
(Algoritmo 5.2)

```
import matplotlib.pyplot as plt
plt.figure();
plt.plot(ts,Ys[:,0],'ko');

plt.xlabel("$t$");
plt.ylabel("$x$");
plt.show();
```

ver Figura 5.1

¿Cómo saber si la solución obtenida con `odeint` y mostrada en la Figura 5.1 es la correcta?



**Figura 5.1:** Figura correspondiente al código 5.2. La figura muestra la solución numérica a la e.d.m. de un sistema sometido a un tirón constante  $\vec{j} = j_0 \hat{e}_x$ .

Existen dos maneras de comprobarlo. La primera es verificar que las posiciones y velocidades obtenidas satisfagan las constantes de movimiento que escribimos en las Ecs. (5.16).

Así por ejemplo, podemos verificar que el valor de  $I_x$  y  $S_x$  sean efectivamente constantes:

```
#Extraemos los valores de x y dxdt de la solución
xs=Ys[:,0]
xdots=Ys[:,3]

#Fórmula de la constante C_Ix
C_Ixs=xdots-0.5*j0*ts**2

#Fórmula de la constante C_Sx
C_Sxs=xs-(1./6)*j0*ts**3-C_Ixs*ts
```

Valores de C\_Ix = [-3. -3. -3. -3. -3.]...

Valores de C\_Sx = [1. 1. 1. 1. 1.]...

Comprobamos así que las fórmulas  $C_{Ix} = \dot{x} - j_0 t^2 / 2$  y  $C_{Sx} = x - j_0 t^3 / 6 - I_x t$ , tienen el mismo valor para todos los tiempos en los que integramos la e.d.m.r., es decir, son, por definición, constantes de movimiento. La solución numérica, por tanto, satisface nuestras expectativas matemáticas.

La segunda manera de verificar que nuestra solución numérica coincide con la analítica es compararla con la solución explícita escrita en las Ecs. (5.17):

$$x(t) = \frac{1}{6} j_0 t^3 + I_x t + S_x$$

Aquí, los valores de  $I_x$  y  $S_x$  pueden obtenerse de las condiciones iniciales.

Una comparación gráfica entre ambas soluciones se consigue con este algoritmo:

(Algoritmo 5.3)

```
#Valor de las constantes de movimiento
Ix=Yos[3]-0.5*j0*ts[0]**2
Sx=Yos[0]-(1./6)*j0*ts[0]**3+Ix*ts[0]

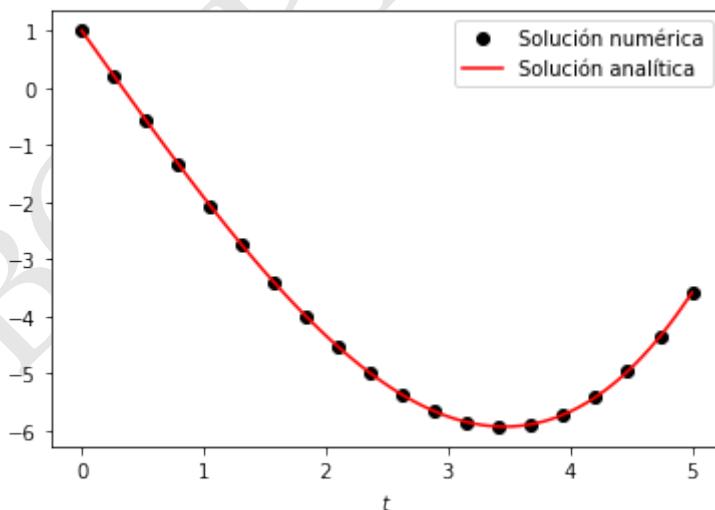
#Lista más completa de valores del tiempo
from numpy import linspace
tas=linspace(ts[0],ts[-1],100)

#Solución analítica
xs=(1./6)*j0*tas**3+Ix*tas+Sx

#Gráfico
plt.figure();
plt.plot(ts,Ys[:,0],'ko',label="Solución numérica");
plt.plot(tas,xs,'r-',label="Solución analítica");

plt.xlabel("$t$")
plt.ylabel("$x$")
plt.legend();
plt.show();
```

ver Figura 5.2



**Figura 5.2:** Figura correspondiente al código 5.3. Comparación de la solución numérica (puntos) y la solución analítica (línea continua) de la e.d.m. de un sistema con tirón constante  $j_0 = 0,5$ .

La coincidencia entre la solución analítica y la solución numérica mostrada en

la [Figura 5.2](#) es casi perfecta.

### Integración numérica de las e.d.m. del ejemplo 2

Usando las mismas herramientas y algoritmos análogos a los usados antes, podemos ahora resolver el ejemplo 2 de la [Sección 5.1.4](#).

De nuevo, las ecuaciones reducidas del sistema serán, como en el ejemplo 1, las mismas de la Ec. (5.20), pero ahora  $\{a_i\} = \{-\omega Y_0, 0, 0\}$  (nótese que hemos reemplazado  $x$  por la variable auxiliar  $Y_0$  de acuerdo a las reglas en Ec. 5.19).

La rutina que implementa las e.d.m. en este caso será:

```
def edm_ejemplo2(Y,t,omega):
    dYdt=[0,0,0,0,0,0]

    dYdt[:3]=Y[3:]
    dYdt[3:]=[-omega*Y[0],0,0]

    return dYdt
```

La solución al sistema, una comprobación de que la constante  $C_{Ix}$  en la Ec. (5.15) es en realidad una constante, y una gráfica de la posición como función del tiempo, se muestra en el siguiente algoritmo:

(Algoritmo 5.4)

```
#Propiedades del sistema
omega=2.5

#Condiciones iniciales
from numpy import array
Y0=array([1,0,0,0,0,0])

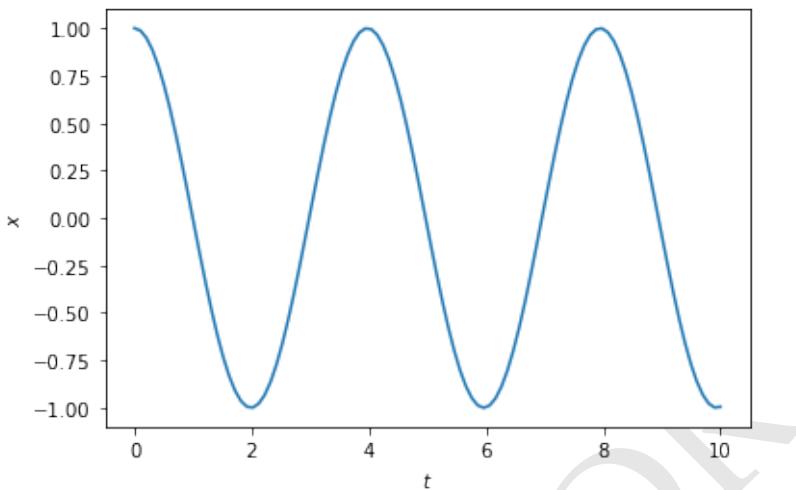
#Tiempos
from numpy import linspace
ts=linspace(0,10.0,100)
#Solución
Ys=odeint(edm_ejemplo2,Y0,ts,args=(omega,))

#Constante de movimiento
xs=Ys[:,0]
xdots=Ys[:,3]
C_Ixs=0.5*xdots**2+0.5*omega*xs**2

#Gráfico
fig=plt.figure();
plt.plot(ts,Ys[:,0]);

plt.xlabel("$t$");
plt.ylabel("$x$");
plt.show();
```

*ver Figura 5.3*



**Figura 5.3:** Figura correspondiente al código 5.4. Solución numérica de la e.d.m. de un sistema dinámico con aceleración  $\vec{a} : (-2,5x, 0, 0)$ .

Valores de C\_Ix: [1.25 1.25 1.25 1.25 1.25] ...

Podemos comprobar al examinar la Figura 5.3 nuestra intuición inicial de que la dinámica del sistema correspondía a la de un movimiento oscilatorio.

## 5.2. Dinámica

### 5.2.1. Cantidades dinámicas

Las cantidades dinámicas son aquellas que son requeridas para describir la relación entre las causas del movimiento y su descripción. Las más usadas se describen a continuación:

- **Masa,  $m$ .**

- Definición: Escalar que mide (en el contexto de la mecánica Newtoniana): (1) la cantidad de materia contenida en un cuerpo,  $m = \int \rho dV$  donde  $\rho$  es la densidad y la integral se realiza sobre el volumen del cuerpo, (2) la *inercia* o resistencia del cuerpo a moverse y (3) la intensidad de la atracción gravitacional que experimenta o produce en otros cuerpos (ver la Sección 5.2.13).
- Patrón:  $[m] = \text{M}$ .
- Unidad del SI<sup>24</sup>: kg.

- **Momento lineal,  $p$ :**

- Definición:  $\vec{p} \equiv m\vec{v} = m\dot{\vec{r}}$ .
- Patrón:  $[p] = \text{M L T}^{-1}$ .

<sup>24</sup>Sistema Internacional de Unidades

- Unidad del SI:  $\text{kg m s}^{-1}$ .

■ **Momentum angular,  $L$ :**

- Definición:  $\vec{L} \equiv \vec{r} \times \vec{p}$ .
- Una propiedad para partículas puntuales ( $m$  constante):  $\vec{L} = m\vec{r} \times \dot{\vec{r}}$ .
- Patrón:  $[L] = \text{M L}^2 \text{T}^{-1}$ .
- Unidad del SI:  $\text{kg m}^2 \text{s}^{-1}$ .

■ **Fuerza resultante,  $\mathcal{F}$ :**

- Definición:  $\vec{\mathcal{F}} \equiv \dot{\vec{p}}$ .
- Una propiedad para partículas puntuales ( $m$  constante),  $\vec{\mathcal{F}} = m\ddot{\vec{r}}$ .
- Patrón:  $[\mathcal{F}] = \text{M L T}^{-2}$ .
- Unidad del SI:  $\text{kg m s}^{-2} \equiv \text{N}$  (Newton).

■ **Momento de fuerza o torca,  $\vec{\tau}$ :**

- Definición:  $\vec{\tau} \equiv \vec{r} \times \vec{\mathcal{F}}$ .
- Una propiedad para partículas puntuales ( $m$  constante):  $\vec{\tau} = \dot{\vec{L}}$ .
- Patrón:  $[\tau] = \text{M L}^2 \text{T}^{-2}$ .
- Unidad del SI:  $\text{kg m}^2 \text{s}^{-2}$ .

■ **Energía cinética o *vis viva*,  $K$ :**

- Definición:  $K \equiv m\vec{v}^2/2$ .
- Patrón:  $[K] = \text{M L}^2 \text{T}^{-2}$ .
- Unidad del SI:  $\text{kg m}^2 \text{s}^{-2} \equiv \text{J}$  (*Joule*, pronunciado “syul”<sup>25</sup>).

■ **Trabajo,  $W$ :**

- Definición:  $W = \int \mathcal{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$ .
- Patrón:  $[W] = \text{M L}^2 \text{T}^{-2}$ .
- Unidad del SI: J.

### 5.2.2. Partículas y fuerzas

Hay tres conceptos centrales en la dinámica newtoniana: partícula, fuerza y masa.

Entenderemos aquí por partícula o **partícula puntual** a una entidad material de tamaño insignificante, sin estructura, ni volumen (independientemente de que se las represente gráficamente como esferas.)

Un sistema de muchas partículas puntuales puede formar: una “nube”, un cuerpo (rígido o elástico) o un fluído. En lo que resta de este libro nos concentraremos únicamente en la dinámica de partículas individuales o “nubes” de partículas.

<sup>25</sup><https://forvo.com/search/Joule/fr/>



### Nota

**Masa constante para partículas puntuales.** A diferencia de lo que pasa con un sistema de partículas, en la que el número de constituyentes puede variar debido al intercambio de materia con otros sistemas, en lo sucesivo asumiremos que la masa de las partículas puntuales es constante en el tiempo e independiente del sistema de referencia.

El concepto de fuerza es uno de los más esquivos de la Física [29]. Para los propósitos de este libro nos apegaremos a “definiciones” prácticas del concepto, cercanas pero no en exceso a las introducidas originalmente por Newton en los *Principia*.

Distinguemos dos cantidades físicas a las que llamaremos *fuerza*:

- La **fuerza resultante**,  $\vec{F}$  es el nombre que daremos aquí a la razón instantánea de cambio en el momento lineal,  $\mathcal{F} \equiv \dot{\vec{p}}$ , independiente de cuál sea la causa de ese cambio.
- La **fuerza aplicada**,  $\vec{F}$ , es un concepto eminentemente newtoniano y, en términos modernos, pobamente definido. En general, la fuerza aplicada es una medida la intensidad de la *interacción* entre una partícula y su entorno (otras partículas, medios materiales o campos). El valor de la fuerza aplicada difícilmente puede derivarse de primeros principios y normalmente se postula (p.e. la fuerza gravitacional) o se construye a partir de modelos simplificados de las interacciones (p.e. las fuerzas de fricción.)

En la mecánica Newtoniana se reconocen dos tipos básicos de *fuerza aplicada*:

- **Fuerzas de contacto:** Fuerzas que resultan de la interacción por contacto de una partícula con otras partículas (p.e. fuerzas en choques), con medios (p.e. fricción en un fluido) o con fronteras materiales (p.e. fuerzas normales o de fricción).
- **Fuerzas de campo o de acción a distancia:** Fuerzas que resultan de la interacción de las partículas con otras partículas o cuerpos materiales, sin que medie el contacto directo (a distancia); también están en este grupo las fuerzas que resultan de la interacción con un *campo* (por ejemplo los campos electromagnéticos).

Existe una tercera categoría de fuerzas, pero a diferencia de las anteriores no corresponden a *fuerzas aplicadas* sino un tipo específico de *fuerzas resultantes*:

- **Fuerzas ficticias:** Son fuerzas resultantes que se manifiestan al estudiar la dinámica en ciertos sistemas de referencia (por ejemplo en sistemas de referencia rotantes). Entre ellas están la *fuerza centrífuga* y la *fuerza de Coriolis* que estudiaremos en la ???. El adjetivo de *ficticias* viene precisamente del hecho de que no son producto de interacciones con otras partículas o cuerpos materiales.

### 5.2.3. Sistemas de referencia inerciales

La introducción del concepto de fuerza ficticia permite definir un concepto central en la mecánica newtoniana:

#### Definición 5.2

**Sistema de referencia inercial.** Decimos que un sistema de referencia es inercial si todas las fuerzas resultantes en el sistema son causadas por fuerzas aplicadas, es decir si todos los cambios en los momentos lineales de las partículas pueden rastrearse hasta interacciones entre ellas, con medios materiales o con campos.

Demostrar en la práctica que un sistema de referencia es inercial, que implica rastrear todas las causas físicas de los cambios en los momentos lineales de las partículas de un sistema de prueba, puede ser muy complicado sino imposible. Existe, sin embargo, un teorema que puede ser de gran utilidad para este propósito:

#### Teorema 5.1

**Sistemas de referencia con velocidad relativa constante.** Si un sistema de referencia  $R$  se mueve con velocidad constante respecto a un sistema de referencia inercial  $I$ , entonces  $R$  es también un sistema de referencia inercial.

Este teorema es una consecuencia directa de las transformaciones de Galileo que postulamos en la [Sección 5.1.2](#) (ver sección de problemas al final del capítulo).

Para los propósitos de la mecánica Newtoniana, basta que identifiquemos al menos un sistema de referencia inercial en el Universo para que, midiendo la velocidad relativa respecto a él, podamos determinar si otros sistemas de referencia son también inerciales.

En la práctica la “inercialidad” de un sistema de referencia (el centro de masa del sistema solar, el centro de la galaxia, la radiación cósmica de fondo) se postula (o se considera como una aproximación en los modelos) y a partir de ellos a través del Teorema (?) se construyen otros sistemas de referencia inerciales.

### 5.2.4. Postulado de fuerzas

La manera original en la que Newton formuló sus postulados clásicos sobre la relación entre las fuerzas aplicadas y el movimiento resultante, ha cambiado mucho en los 350 años que nos separan de la publicación de los *Principia*. Hoy, existen maneras alternativas de formular estos principios y leyes (algunas de las cuales serán desarrolladas en el libro) manteniendo los efectos prácticos de la teoría.

A continuación usaremos una presentación de la mecánica newtoniana muy propia del estilo de este libro y que sintetiza en un esquema formal, sobre la base de los conceptos y cantidades definidas en las secciones anteriores, sus postulados (leyes) y teoremas.

**Nota**

**Una formulación original.** El lector puede encontrar relativamente extraña nuestra formulación (muy diferente a la que encontrará en los textos de mecánica básica.) La razón de fondo estriba esencialmente en la manera como hemos definido antes el concepto de fuerza. Esta formulación sin embargo, como veremos a lo largo del libro, además de contener los resultados básicos de la teoría conocidos por todos, ofrece algunas ventajas para su formulación en teorías del movimiento más general como la teoría de la relatividad.

La ley física en el corazón de la mecánica newtoniana se conoce como el **postulado de fuerza**:

**Postulado 5.2**

**Postulado de Fuerzas.** Si en un sistema de referencia inercial, una partícula está sometida a una fuerza neta aplicada  $\vec{F}$  (suma vectorial de las fuerzas aplicadas correspondientes a cada interacción que sufre la partícula en ese instante) su momento lineal cambiará instantáneamente a razón de:

$$\dot{\vec{p}} = \vec{F}$$

En otros términos, la fuerza resultante es siempre igual la fuerza neta aplicada:

$$\vec{F} = \vec{F}$$

Aunque esta última expresión parece obvia y universal, no lo es. Recordemos que la fuerza aplicada  $\vec{F}$  es una propiedad de las interacciones y su valor se calcula a partir de los modelos específicos que las describen. En contraposición, la fuerza resultante  $\vec{F}$  (la razón de cambio del momento lineal) es un efecto observado en el movimiento de la partícula. El postulado fuerzas básicamente plantea que en todas las interacciones a las que se somete una partícula, la causa (fuerza aplicada) y el efecto (fuerza resultante o razón de cambio del momento lineal) tienen el mismo valor.

Es importante resaltar la condición de que el sistema de referencia sea inercial para que el postulado de fuerzas sea válido. En otras palabras, en sistemas de referencia *no* inerciales, la fuerza resultante no es igual a la fuerza aplicada. Volveremos sobre este caso en la ??.

Por la suposición que hemos hecho desde el principio de que la masa de las partículas es constante, el postulado de fuerzas nos permite calcular la función de aceleración de las partículas que usamos en la e.d.m. (ver Ec. 5.7). Si reconocemos que por definición para una partícula  $\dot{\vec{p}} = m\vec{a}$ , el postulado de fuerzas se puede escribir como:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$$

La e.d.m. de una partícula en función de las fuerzas aplicadas queda:

$$\ddot{\vec{r}} = \frac{\vec{F}}{m}. \quad (5.21)$$



### Nota

**Ecuación de movimiento con fuerzas resultantes.** Una relación idéntica a la Ec. (5.21) es válida en el caso de las fuerzas resultantes:

$$\ddot{\vec{r}} = \frac{\vec{\mathcal{F}}}{m} \quad (5.22)$$

Esta ecuación sin embargo no es un postulado de la mecánica, sino una forma de la definición misma de fuerza aplicada  $\vec{\mathcal{F}}$  que introdujimos en la Sección 5.2.1.

Aunque la identidad matemática de las Ecs. (5.21) y (5.22) nos permite escribir la ecuación de movimiento sin distinguir qué tipo de fuerzas están involucradas, no debemos olvidar la diferencia conceptual entre una aceleración producto de las interacciones (fuerza aplicada, Ec. 5.21) y aquella que es simplemente una manifestación del cambio en el momento lineal (fuerza aplicada, Ec. 5.22).

La igualdad matemática, en sistemas iniciales, postulada entre la fuerza neta aplicada sobre una partícula y la fuerza resultante, permite extraer la definición de trabajo que presentamos en la Sección 5.2.1 y derivar un importante teorema de la mecánica newtoniana:

### Teorema 5.3

**Teorema del trabajo y la energía.** Si una partícula que en un sistema de referencia inercial, se mueve sobre una trayectoria entre dos puntos  $\vec{r}_1$  (donde tiene velocidad  $\vec{v}_1$ ) y  $\vec{r}_2$  (donde tiene velocidad  $\vec{v}_2$ ), esta sometida a una fuerza neta aplicada  $\vec{F}$  que cambia de acuerdo a una función conocida y continua sobre la trayectoria, entonces, el trabajo realizado por la fuerza aplicada es  $W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}$  y la siguiente igualdad es válida:

$$W = \Delta K$$

Donde  $K = mv^2/2$ .

### 5.2.5. Fuerzas conservativas y no conservativas

Una clasificación adicional de las fuerzas (tanto resultantes como aplicadas) surge al estudiar su circulación  $\oint \vec{F} \cdot d\vec{r}$  (ver Sección 4.1.7.) En términos físicos, la

circulación de una fuerza (resultante o aplicada) es el trabajo total realizado por ella a lo largo de una trayectoria cerrada.

De acuerdo con la circulación las fuerzas se clasifican en:

- **Fuerzas conservativas:** Una fuerza es conservativa si y solo si, su circulación es nula:

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 \quad (5.23)$$

Una manera más frecuente (y física) de expresar esta propiedad (ver problemas al final del capítulo) es diciendo que el trabajo realizado por una fuerza conservativa entre dos puntos del espacio, es independiente de la trayectoria que esta siga entre esos puntos.

Por el teorema del trabajo y la energía, la circulación nula implica que la energía cinética de una partícula sometida a una fuerza conservativa, es la misma antes y después de recorrer una trayectoria cerrada. Este es precisamente el origen del adjetivo *conservativo*.

- **Fuerzas no conservativas o disipativas:** Una fuerza es *no conservativa* si su circulación es distinta de cero. En este caso, en virtud del teorema del trabajo y la energía, la energía cinética de la partícula antes y después de realizar el recorrido cerrado, será diferente. Es por esta razón que a este tipo de fuerzas se las llama también *fuerzas disipativas*.

### Nota

**La fuerza como campo vectorial.** Nótese que al definir la circulación o al hablar aquí del trabajo realizado sin importar el camino seguido por la partícula, estamos asumiendo que en todos los puntos del espacio a los que tiene acceso la partícula, podemos calcular el valor de la fuerza  $\vec{F}$ . En este sentido la fuerza ya no es simplemente un vector más, sino que se convierte en lo que en el cálculo se conoce como un *campo vectorial*, es decir, una función que asocia a cada punto del espacio un vector (ver Sección 4.1.3.)

La propiedad expresada en la Ec. (5.23) implica, por el corolario al teorema de Stokes (Cor. 4.6) que las fuerzas conservativas se pueden escribir como:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U = -\partial_r U \quad (5.24)$$

donde el signo menos, que parece arbitrario, es una convención usada frecuentemente en física (y que se justificará en la siguiente sección.)

En mecánica llamamos a  $U$  la **función de energía potencial** de la fuerza conservativa.

Las fuerzas conservativas pueden describirse o bien usando un campo escalar  $U$  (el campo de energía portencial) o bien usando un campo vectorial  $\vec{F}$  (como se acostumbra con todas las fuerzas, conservativas o no). El uso de una descripción o de la otra dependerá de la situación que estemos considerando.

### 5.2.6. Energía mecánica

Con la definición de la función de energía potencial, el trabajo realizado por una fuerza conservativa se puede escribir como:

$$\begin{aligned}\int \vec{F} \cdot d\vec{r} &= - \int \partial_{\vec{r}} U \cdot d\vec{r} \\ &= - \int dU \\ &= -[U(\vec{r}_2) - U(\vec{r}_1)] \\ &= -\Delta U\end{aligned}$$

donde hemos usado, en su orden, la regla de la cadena (Teo. 4.1) y la regla de Newton-Leibniz (Teo. ??).

El teorema del trabajo y la energía (Teo. ??) para una fuerza conservativa se escribe entonces como:

$$\begin{aligned}-\Delta U &= \Delta K \\ \Delta(K + U) &= 0.\end{aligned}\tag{5.25}$$

Este último resultado implica que la cantidad  $E \equiv K + U$  se conserva durante el movimiento de una partícula bajo la acción de una fuerza conservativa. Llamaremos a esta cantidad en lo sucesivo **energía mecánica** y a esta interesante propiedad (que es producto del teorema del trabajo y la energía), **conservación de la energía mecánica**.

El resultado anterior puede generalizarse cuando sobre la partícula actúan todo tipo de fuerzas, aplicadas o resultantes, conservativas o no conservativas:

#### Teorema 5.2

**Conservación de la energía.** Si una partícula se mueve en el espacio mientras está sometida a fuerzas conservativas y no conservativas, el trabajo total realizado por las fuerzas no conservativas  $W_{NC}$  entre dos puntos cualquiera de la trayectoria es:

$$W_{NC} = \Delta E$$

Donde  $E \equiv K + \sum U_i$ , siendo  $\{U_i\}$  las funciones de energía potencial asociadas a todas las fuerzas conservativas que actúan sobre la partícula. Llamamos a  $E$  la energía mecánica total de la partícula.

### 5.2.7. ¿Ley de inercia?

En la historia de la mecánica, el concepto de *inercia* o *movimiento inercial*, y la *ley de inercia* de Newton, jugaron un papel fundamental en la ruptura con los conceptos dinámicos de la física Aristotélica que postulaban que todo movimiento necesitaba una *causa motriz* (una *fuerza aplicada* en nuestro caso.)

En los Principia y en sus reformulaciones posteriores [9], la inercia aparece postulada como la primera ley movimiento.

En el esquema con el que hemos sintetizado la mecánica newtoniana aquí, la inercia no tiene que postularse, sino que en realidad es un teorema muy sencillo que se sigue (casi trivialmente) del postulado de fuerzas:

### Teorema 5.3

**Teorema de inercia.** Si la fuerza resultante o la fuerza neta aplicada sobre una partícula es nula durante un cierto intervalo de tiempo  $[t_1, t_2]$ <sup>a</sup>, su momento lineal en ese intervalo será constante e igual al momento lineal que tenía en  $t_1$ :

$$\vec{F}(t \in [t_1, t_2]) = \vec{0} \iff \vec{p}(t \in [t_1, t_2]) = \vec{p}(t_1)$$

En otras palabras durante el intervalo considerado la partícula estará en reposo (si  $\vec{p}(t_1) = \vec{0}$ ) se moverá siguiendo una trayectoria rectilínea y con velocidad constante  $\vec{v} = \vec{p}(t_1)/m$ .

<sup>a</sup>El intervalo es cerrado en  $t_1$  en tanto en algún momento tiene que comenzar la condición de movimiento libre de fuerzas, mientras que es abierto en  $t_2$  en tanto esa condición podría extenderse para siempre

### 5.2.8. Postulado de acción y reacción

#### Postulado 5.3

**Acción y reacción.** En un sistema de referencia inercial en el que dos partículas 1 y 2 interactúan mutuamente, sea a través de fuerzas de contacto o de campo, se cumple que:

- (**Forma débil del postulado de acción y reacción**) la fuerza  $\vec{F}_{12}$  que la partícula 1 experimenta por la interacción con la partícula 2 (que llamaremos *acción*), es igual pero de sentido contrario a la fuerza  $\vec{F}_{21}$  que la partícula 2 experimenta por la interacción con la partícula 1 (que llamaremos *reacción*; ver panel izquierdo de la [Figura 5.6](#).)

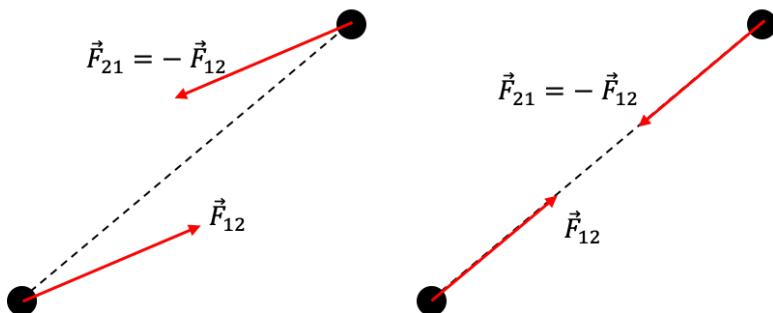
o bien,

- (**Forma fuerte de la ley de acción y reacción**) las fuerzas de acción y reacción, definidas arriba, son además paralelas a la línea que une las posiciones de las partículas (ver panel derecho de la [Figura 5.6](#)).

Las consecuencias de este postulado son fundamentales en la mecánica y serán discutidas en la ??.

### 5.2.9. Postulado de gravitación universal

Una de los más atrevidos y visionarios postulados de Newton sobre la naturaleza del movimiento de los cuerpos y en general del Universo, se conoce como la **ley o postulado de gravitación universal** que en su forma moderna propone:



**Figura 5.4:** Dos formas del postulado de acción y reacción: a la izquierda el postulado débil, en el que las fuerzas son iguales y de sentido contrario, pero no son paralelas a la línea que une las partículas; a la derecha el postulado fuerte en el que la acción y reacción actúan sobre la línea que une a las partículas.

#### 5.4

**Postulado de gravitación universal.** Una partícula de masa  $m_1$  situada en  $\vec{r}_1$  ejerce sobre cualquier otra partícula de masa  $m_2$  situada en un  $\vec{r}_2$ , una fuerza instantánea a distancia dada por:

$$\vec{F} = -\frac{Gm_1m_2}{r^2}\hat{r}$$

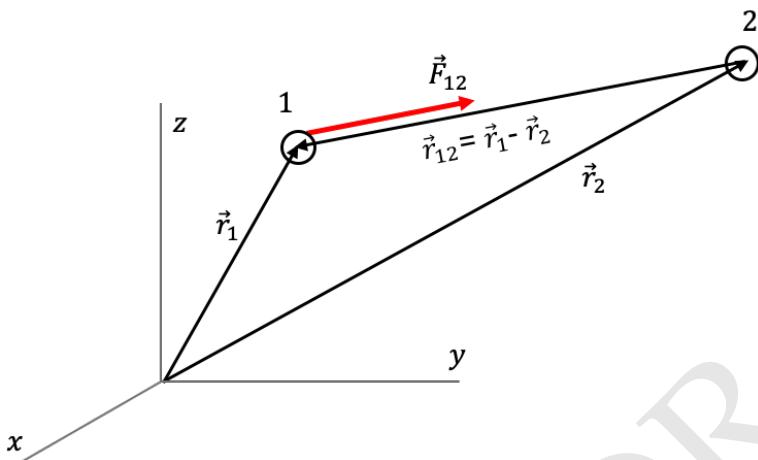
donde  $\vec{r} \equiv \vec{r}_2 - \vec{r}_1$  y  $G = 6,67408(31) \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2} = (6,67408 \pm 0,00031) \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$  es una constante de la naturaleza conocida como la *constante de gravitación universal o constante de Cavendish*.

En lo sucesivo usaremos la notación más precisa y consistente (ver Figura 5.5):

$$\vec{F}_{12} = -\frac{Gm_1m_2}{r_{12}^3}\vec{r}_{12} \quad (5.26)$$

Donde  $\vec{r}_{12} \equiv \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ .

Nótese que esta forma del postulado de gravitación universal, ofrece una expresión para la fuerza *sobre* la partícula 1 en lugar de la que ella ejerce sobre la partícula 2 (aunque por el postulado de acción y reacción son iguales). Además, el vector relativo  $\vec{r}_{12}$  (ver Figura 5.5) va de la partícula 2 a la partícula 1 (en lugar de  $\vec{r}$  que en el enunciado del postulado que va de la 1 a la 2). Asegúrese de entender claramente la definición y el sentido de estos vectores que serán usados con mucha frecuencia a lo largo del texto.



**Figura 5.5:** Definición de los vectores de posición, vector relativo y vector de fuerza en el postulado de gravitación universal.

#### Nota

**La fuerza de gravedad y la ley de acción y reacción.** Como puede verse de la definición matemática de la fuerza de gravitación (Ec. 5.26), tanto ella como su reacción, satisfacen las condiciones del postulado fuerte de acción y reacción, lo que tendrá consecuencias fundamentales cuando estudiemos las simetrías y cantidades conservadas en sistemas de varias partículas interactuando gravitacionalmente.

### 5.2.10. La fuerza gravitacional de la Tierra, el Sol y la Luna

Para poner en un contexto práctico las ideas de la sección anterior, calcularemos aquí la fuerza gravitacional ejercida por el Sol y la Tierra sobre la Luna.

Si bien el postulado de gravitación universal (Ec. 5.26), aplica solamente para partículas puntuales, como se explico desde el principio, dadas las dimensiones del Sistema Solar, podemos asumir que los tres cuerpos en cuestión son muy pequeños.

El cálculo de la Fuerza requiere que compilemos primero la información sobre las masas y distancias de estos cuerpos:

```
# Constante de gravitación
G=6.67408e-11 #m^3/kg s^2
```

```
#Masa de los cuerpos
M_tierra=5.97e24 #kg
M_luna=7.34e22 #kg
M_sol=1.98e30 #kg
```

```
#Distancia entre ellos
d_sol_tierra=149600000*1000 #m
d_tierra_luna=385000*1000 #m
d_sol_luna=d_sol_tierra-d_tierra_luna
```

Aunque la distancia entre el Sol y la Luna cambia continuamente debido al complejo movimiento de nuestro satélite, asumiremos, para nuestro sencillo cálculo, la mínima distancia entre ellos, es decir la distancia a la que se encuentran en la fase de Luna Nueva (cuando la Luna está entre la Tierra y el Sol.)

Las fuerzas entre ellos serán por tanto:

```
F_sol_tierra=G*M_sol*M_tierra/d_sol_tierra**2
F_sol_luna=G*M_sol*M_luna/d_sol_luna**2
F_tierra_luna=G*M_tierra*M_luna/d_tierra_luna**2

F_sol_tierra = 3.525069974834854e+22 N
F_sol_luna = 4.356399422118894e+20 N
F_tierra_luna = 1.9730602178040146e+20 N
```

Si bien, fuerzas tan grandes son difíciles de interpretar en términos cotidianos (la fuerza gravitacional que ejerce la Tierra sobre una persona con una masa de 60 kg es de apenas 590 N), un hecho “inesperado” llama la atención: la fuerza que ejerce el Sol sobre la Luna es más del doble que la que ejerce la Tierra sobre ella. ¿Será porque usamos la distancia de la Luna en la fase de nueva cuando está más cerca al Sol? ¿Cuánto disminuirá la fuerza del Sol sobre la Luna si la ponemos en una posición cercana la fase de Luna Llena? ¿A qué distancia debería estar la Luna de la Tierra para que la fuerza de nuestro planeta sobre la primera igualará a la que siente del Sol? ¿Órbita entonces la Luna al Sol o a la Tierra? y si ese es el caso ¿Por qué la hemos considerado siempre nuestro “satélite”?

Dejamos al lector la discusión y solución de estas preguntas (algunas de las cuales serán ampliadas en la sección de problemas al final del capítulo), pero no podemos dejar de mencionar que una importante motivación para los desarrollos de la mecánica celeste posteriores a los tiempos de Newton, fue precisamente resolver la última de esas preguntas. Volveremos a este asunto en un capítulo posterior.

### 5.2.11. El campo gravitacional

Otra forma de escribir el postulado de gravitación, es reconocer que la fuerza gravitacional que produce una partícula de masa  $M$  sobre cualquier otra partícula de masa  $m$  situada en un punto arbitrario con posición relativa  $\vec{r}$  (donde  $\vec{r}$  es el vector que va de la posición de  $M$  a la del punto arbitrario) es:

$$\vec{F} = m \left( -\frac{GM}{r^3} \vec{r} \right) \quad (5.27)$$

De aquí podemos postular que el *campo vectorial*:

$$\vec{g} \equiv -\frac{GM}{r^3} \vec{r}, \quad (5.28)$$

existe independiente de si hay una masa  $m$  que pueda sentirlo. A esta cantidad vectorial (¿entidad física?) la llamaremos en lo sucesivo el **campo gravitacional** producido por la partícula puntual  $M$ .

En términos del campo gravitacional, la fuerza que experimenta una partícula de prueba situada en  $\vec{r}$  respecto a  $M$  se escribe:

$$\vec{F} = m\vec{g} \quad (5.29)$$

Esta última relación está lejos de ser trivial. En realidad la extenderemos para denotar, de manera general, la fuerza gravitacional experimentada por una partícula en un campo gravitacional  $\vec{g}$ , independientemente de si el campo es producido por una partícula puntual, por un sistema de partículas, un cuerpo rígido o un fluido.

### 5.2.12. Energía potencial gravitacional

Es posible demostrar (ver problemas al final de este capítulo) que la fuerza gravitacional de la Ec. (5.27), es una fuerza conservativa con función de energía potencial igual a:

$$U = -\frac{GMm}{r}, \quad (5.30)$$

#### Nota

**Energía potencial gravitacional negativa.** En términos rigurosos la función de energía potencial más general de la que podemos derivar la fuerza gravitacional es

$$U = -\frac{GMm}{r} + C$$

siendo  $C$  una constante arbitraria. Esta libertad implica que el valor de la energía gravitacional no tiene en realidad un significado físico relevante. Lo importante en la dinámica es la diferencia de energía potencial entre dos puntos del espacio  $\Delta U$  y que determina, por ejemplo, el cambio en la energía cinética a través de la Ec. (5.25.) Naturalmente para el cálculo de  $\Delta U$  el valor de  $C$  es irrelevante.

La elección arbitraria de  $C = 0$  que hicimos al escribir la Ec. (5.30), sin embargo, tiene una interpretación interesante, que podemos obtener al aplicar la conservación de la energía  $\Delta K = -\Delta U$  en una situación hipotética.

Imaginemos que cuando dos partículas están a una distancia  $r$  finita, su energía cinética total es 0 (están en reposo relativo) y su energía potencial  $U_0 < 0$ . Por efecto de la acción instantánea de un agente externo, una de las partículas se acelera (el sistema recibe una inyección de energía mecánica  $\Delta E > 0$ ) hasta que las dos partículas terminan separadas a una distancia enorme  $r \rightarrow \infty$  donde su velocidad vuelve a ser casi nula  $v \rightarrow 0$  (podría ser mayor, pero asumiremos este caso



### Nota (Cont.)

extremo).

A esa distancia, el sistema tiene energía cinética total  $K \rightarrow 0$  y dado que  $C = 0$ , su energía potencial será también  $U \rightarrow 0$ . Aplicando la conservación de la energía mecánica total:

$$\begin{aligned}\Delta K &= -\Delta U \\ 0 - (0 + \Delta E) &= -(0 - U_0) \\ \Delta E &= -U_0\end{aligned}$$

En conclusión: *El valor absoluto de la energía potencial  $U_0$  se puede interpretar como la energía mecánica adicional que necesita un sistema para apenas escapar de su mutua interacción gravitacional.*

En otros términos, el signo negativo de la energía potencial podría interpretarse no solamente como una elección arbitraria de una constante matemática sino también como una *deuda energética*, es decir como la energía que debe aportar un agente externo para liberar a las partículas de su “esclavitud” gravitacional.

Dado que la energía potencial de cualquier partícula, sometida a la fuerza gravitacional de  $M$  es proporcional a su masa  $m$ , es posible definir la **función de potencial gravitacional** o simplemente el **potencial gravitacional**:

$$V \equiv \frac{U}{m} = -\frac{GM}{r} \quad (5.31)$$

$V$  es un campo escalar (de acuerdo a las definiciones de Sección 4.1.3) y como sucede con el campo vectorial  $\vec{g}$ , en muchas aplicaciones es la representación matemática del *campo gravitacional* producido por una partícula. En términos de  $V$ , la energía potencial de una partícula de masa  $m$  sumergida en un campo gravitacional y la fuerza experimentada por ella, se pueden escribir como:

$$\begin{aligned}U &= mV \\ \vec{F} &= -m \partial_{\vec{r}} V\end{aligned} \quad (5.32)$$

De nuevo, junto con la Ec. (5.29) estas relaciones aplican, independientemente de si el campo gravitacional, cuantificado por  $V$  o  $\vec{g}$ , es producido por una partícula o un cuerpo extendido. Una última relación interesante que resulta de comparar la Ec. (5.32) con la Ec. (5.29) es la siguiente:

$$\vec{g} = -\partial_{\vec{r}} V \quad (5.33)$$

que es análoga a la definición de  $U$  (ver Ec. 5.24),  $\vec{F} = -\partial_{\vec{r}} U$ .

#### 5.2.13. Masa y principio de equivalencia

La masa, como aparece en la Ec. (5.31), es tanto una medida de las capacidad de un cuerpo para producir campo gravitacional (y afectar a otras partículas), o,

como se expresa en 5.29, una medida de su “sensibilidad” al campo gravitacional producido por otros cuerpos<sup>26</sup>.

La masa, así concebida, es muy diferente, conceptualmente, a la que usamos (y uso Newton originalmente) para definir las cantidades dinámicas en la Sección 5.2.1. Por ello es necesario precisar la diferencia entre esos dos tipos de masa con una definición:

#### Definición 5.4

**Masa inercial y masa gravitacional.** En mecánica Newtoniana distinguimos dos tipos de masa conceptualmente diferentes:

Llamamos **masa inercial  $m_I$**  a la razón entre las magnitudes del momento lineal de una partícula y su velocidad, a saber  $m_I = p/v$ . La masa inercial de una partícula es la que aparece en la ecuación de movimiento  $\ddot{r} = \vec{F}/m_I$  y en la energía cinética  $K = m_I v^2/2$ .

Por otro lado la **masa gravitacional  $m_G$**  es la masa que determina la intensidad del campo gravitacional producido por una partícula  $V = Gm_G/r$  (*masa gravitacional activa*) o la intensidad de la fuerza que ella experimenta en un campo gravitacional de otro cuerpo,  $\vec{F} = m_G \vec{g}$  (*masa gravitacional pasiva*).

Si usamos el postulado de fuerza (Ec. ??) y la expresión para la fuerza gravitacional escrita en la Ec. (5.29), encontramos que la aceleración que sufre una partícula de masa inercial  $m_I$  y masa gravitacional (pasiva)  $m_G$  en un campo gravitacional  $\vec{g}$  es:

$$\ddot{r} = \frac{m_G}{m_I} \vec{g} \quad (5.34)$$

La razón  $m_G/m_I$ , ha sido medida cuidadosamente en el laboratorio desde finales del siglo 1500 (ver recuadro Un poco de historia: El experimento de Eötvos), con un resultado ampliamente conocido: el valor numérico de la masa gravitacional (pasiva) coincide con el de la masa inercial hasta la onceava cifra significativa [25].

#### Un poco de historia

**El experimento de Eötvos.** La pregunta de si dos cuerpos de distinta masa caen al mismo tiempo cuando son lanzadas desde la misma altura (que, en términos modernos, es igual a la pregunta de si tienen la misma aceleración), ha ocupado a pensadores desde la antigüedad.

El primer experimento preciso de este tipo fue realizado por Simon Stevin (1548-1620), un matemático, filósofo e ingeniero flamenco (es decir de la región que hoy llamamos Bélgica) que hizo importantes contribuciones

<sup>26</sup>En términos estrictos, la masa que produce el campo y la masa que lo siente, deberían diferenciarse también. La primera sería una masa gravitacional activa y la segunda una masa gravitacional pasiva. En lo que sigue nos ocuparemos únicamente de la masa gravitacional pasiva, o para acortar, la masa gravitacional.

### Un poco de historia (Cont.)

tempranas a la mecánica prenewtoniana.



**Figura 5.6:** El único retrato disponible de Simon Stevin (ca. 1548). Crédito: Colección Universidad de Leiden.

el campo gravitacional de la Tierra.

Las medidas más precisas de la razón entre las masas gravitacional e inercial fueron realizadas entre 1889 y 1909 por el físico húngaro Roland von Eötvos (“[fon otfosh](#)”<sup>b</sup>) y sus colaboradores, usando para ello un instrumento conocido como la balanza de torsión (similar al usado para medir la constante de gravedad universal.) Los experimentos probaron la igualdad entre la masa gravitacional y la masa inercial hasta la octava cifra significativa y fueron repetidos en la segunda mitad de los 1900 hasta alcanzar la precisión mencionada en el texto: once dígitos significativos [25].

<sup>a</sup>La idea de que Galileo realizó un experimento similar al de Stevin, lanzando objetos desde lo alto de la Torre de Pisa no ha podido ser confirmado y podría tratarse de una anécdota apócrifa.

<sup>b</sup><https://es.forvo.com/search/E%C3%B6tv%C3%B6s/hu/>

La igualdad entre la masa gravitacional e inercial ha sido elevada hoy a la altura de un principio fundamental de la mecánica, el **principio de equivalencia**:

#### Principio 5.1

**Principio de equivalencia (versión débil).** <sup>a</sup>. La aceleración de una partícula puntual en un campo gravitacional depende únicamente del valor del campo y es independiente de la masa y composición de la partícula. En términos matemáticos, en la mecánica newtoniana,  $m_G = m_I$ .

<sup>a</sup>El adjetivo débil, hace referencia al hecho de que existe un principio de equivalencia más fundamental sobre el que se sustenta la teoría de la relatividad general.

Por la igualdad numérica (mas no conceptual) entre la masa gravitacional (pasiva) y la mas inercial, en el contexto de la mecánica newtoniana, usaremos en lo sucesivo el símbolo  $m$  para referirnos a la masa sin distinguir si se trata de la una o la otra.

## 5.3. Sistemas de partículas

Una vez definidas las cantidades y conceptos básicos de la mecánica y formulados los principios, postulados y teoremas que nos permiten describir el movimiento de partículas puntuales, tenemos los elementos necesarios para abordar la cinemática y dinámica de sistemas formados por muchas partículas.

Los sistemas considerados aquí, sin embargo, estarán constituidos por partículas que interactúan a distancia, con fuerzas relativamente débiles y en números relativamente pequeños. La mecánica de sistemas con partículas unidas por fuerzas intensas y que mantienen su posición relativa de forma estable (cuerpos rígidos) o aquellos formados por *moles* de partículas individuales, y cuya mecánica es descrita por leyes empíricas macroscópicas o por reglas estadística, está más allá del interés del libro.

Una buena parte de los desarrollos teóricos contenidos en esta sección vienen originalmente del texto clásico de Goldstein, Poole & Safko, “*Classical mechanics*” [15] y que estaremos citando con alguna frecuencia en el resto de este libro.

### 5.3.1. Fuerzas y centro de masa

Cada partícula en nuestro sistema esta sometida a dos tipos de fuerzas: (1) las fuerzas externas  $\vec{F}_i^E$ , producidas por cuerpos externos o campos diferentes a los producidos por las componentes del sistema y (2) las fuerzas entre las partículas  $\vec{F}_{ij}$ .

La evolución del sistema se obtiene resolviendo simultáneamente el conjunto de las e.d.m. de cada partícula, que se puede escribir en términos de las fuerzas externas e internas como:

$$\left\{ m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i^E + \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij} \right\}_N \quad (5.35)$$

Si sumamos todas las e.d.m. y suponemos que las fuerzas entre partículas satisfacen la ley de acción y reacción (débil o fuerte), esto es  $\vec{F}_{ji} = -\vec{F}_{ij}$ , podemos escribir:

$$\sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i = \sum_i \vec{F}_i^E$$

o bien:

$$\frac{d^2}{dt^2} \left( \sum_i m_i \vec{r}_i \right) = \sum_i \vec{F}_i^E$$

Si definimos:

$$\vec{R} \equiv \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{M} \quad (5.36)$$

donde  $M = \sum_i m_i$  es la masa total del sistema, las e.d.m. de todas las partículas del sistema se transforman en una sola ecuación, que tiene exactamente la misma forma que la e.d.m. de una sola partícula de masa  $M$  y posición  $\vec{R}$  sometida a una fuerza total  $\vec{F}^E = \sum_i \vec{F}_i^E$ :

$$M \ddot{\vec{R}} = \vec{F}^E \quad (5.37)$$

Este sencillo resultado tiene implicaciones trascendentales. Significa, esencialmente, que muchos de las cantidades cinemáticas y dinámicas definidas hasta ahora para partículas individuales, así como algunos de los resultados vistos antes, se aplican también cuando describimos sistemas de partículas, siempre y cuando nos ocupemos del movimiento de un punto imaginario localizado en la posición  $\vec{R}$  dada por la Ec. (5.36). Llamamos a este punto el **centro de Masa** del sistema.

Para ilustrar numéricamente el concepto de centro de masa consideremos un sistema de  $N$  partículas con posiciones y masas aleatorias sobre el plano xy.

Para ello generaremos valores uniformemente distribuidos en el intervalo  $[0, 100]$  que corresponderán a la masa de las partículas en kg. La posición de las partículas se generará asumiendo que sus coordenadas se encuentran restringidas al interior de un cuadrado de lado 2 m y apoyado sobre el origen del sistema de coordenadas. Por su lado, supondremos que las componentes de la velocidad están restringidas al intervalo  $[-0.2, 0.2]$  m/s.

El algoritmo para preparar las masas, posiciones y velocidades de las partículas será:

(Algoritmo 5.5)

```
#Número de partículas
N=3

#Semilla de números aleatorios
from numpy.random import seed
seed(30)

#Valores aleatorios de las masas
from numpy.random import uniform
ms=uniform(0,100,size=N)

#Masa total
M=ms.sum()

#Tabla de posiciones
rs=uniform(0,2,size=(N,3))
#Ponemos todos los valores de z en 0
rs[:,2]=0

#Tabla de velocidades
vs=uniform(-0.2,0.2,size=(N,3))
#Ponemos todos los valores de vz en 0
```

```
vs[:,2]=0
```

Masas:  
[64.41 38.07 66.3] ...  
Posiciones:  
[[0.33 1.93]  
 [1.98 0.47]  
 [0.81 0.27]]  
...  
Velocidades:  
[[ 0.01 0.11]  
 [-0.16 -0.12]  
 [-0.11 -0.1]]  
...

### Nota

**semilla de números aleatorios.** La mayoría de los algoritmos de generación de números aleatorios, lo hacen partiendo de una *semilla entera*, a partir del cuál generan secuencias de números perfectamente predecibles pero que a los ojos de un ser humano parecen completamente al azar (pseudo-aleatorios).

En el Alg. (5.5) hemos generado las propiedades del sistema físico fijando la semilla en un valor arbitrario de 30 (de allí el comando `seed(30)`.) De este modo, al correr este algoritmo siempre obtendremos las mismas propiedades.

Si el lector desea generar un conjunto completamente diferente puede cambiar este número por cualquier otro (siempre que sea entero.) Más interesante aún es comprobar el efecto que tienen eliminar (o comentar esta línea.)

Usando la Ec. (5.36), podemos calcular la posición y velocidad del centro de masa con el siguiente algoritmo:

(Algoritmo 5.6)

```
from numpy import array
R_CM=sum(ms[:,None]*rs)/M
V_CM=sum(ms[:,None]*vs)/M
```

Posición centro de masa: [0.89 0.95]  
Velocidad centro de masa: [-0.08 -0.03]

### Nota

**Operaciones entre vectores y matrices.** En lo que queda de esta sección, pero también en algunos de los capítulos posteriores, nos enfrentaremos con mucha frecuencia a situaciones en las que es necesario



### Nota (Cont.)

realizar operaciones entre vectores y matrices (como `ms` y `rs` en el algoritmo anterior), que merecen un poco de atención.

El cálculo, en una sola línea de código, de la posición del centro de masa que hicimos en el Alg. (5.6) no es para nada trivial.

Si quisieramos hacerlo paso a paso el código (uno de los muchos posibles) sería bastante bastante engorroso:

```
R_CM=[0,0,0]
for i in range(3):
    for k in range(N):
        R_CM[i]=R_CM[i]+ms*rs[k,i]
```

En este ineficiente algoritmo (el único posible en lenguajes como C), el primer ciclo `for` es para recorrer las componentes del vector `R_CM` y el segundo para recorrer las partículas del sistema.

Si tuvieramos que escribir todas las expresiones vectoriales usando algoritmos como aquel, este texto tendría miles de páginas y posiblemente se convertiría en un aburrido libro de “programación ineficiente” (cuando en realidad lo emocionante está en la física.)

Hay cinco trucos entonces que debemos reconocer para todos los algoritmos sucesivos:

1. Si queremos multiplicar un vector por una matrix, por ejemplo para calcular  $\{m_i \vec{r}_i\}$  no podemos simplemente escribir `ms*rs` (aunque el sistema eventualmente no produzca ningún error el resultado será equivocado). Para hacer correctamente esta multiplicación, debemos asegurarnos que `ms` (que es un vector de dimensiones  $1 \times N$ , donde  $N$  es el número de partículas) se convierta en un vector columna  $N \times 1$ . El truco en Python para ello es escribir simplemente `ms[:, None]`.
2. Si queremos sumar las filas de una matrix  $N \times M$  basta usar la rutina `sum` incorporada en la biblioteca base del lenguaje. Así `sum(rs)` produce un vector de  $M$  componentes que tiene la suma *vectorial* de todas las filas de la matriz `rs`. Este y el anterior truco, son los que permiten escribir en una línea las componentes de  $\vec{R}$ :  
`R_CM=sum(ms[:,None]*rs)/M.`
3. Si queremos restar a la matriz `rs` un vector constante `R_CM`, la operación `rs-R_CM` producirá un error. La razón es que el operador `-` asume que los dos arreglos tienen el mismo tamaño; en realidad `rs` es una matriz  $N \times 3$  y `R_CM` un vector simple de 3 componentes. Para restar cada fila de la matriz `rs` por el vector `R_CM` se debe usar la rutina `subtract` de NumPy: `subtract(rs,R_CM)`.

### Nota (Cont.)

4. Las operaciones vectoriales `cross` (producto cruz) y `dot` (producto punto) del paquete NumPy, aplicadas sobre dos matrices  $N \times 3$  (como las matrices de posiciones `rs` y velocidades `vs` de las partículas del sistema), realizan las operaciones fila por fila (cada fila de la matriz se considera un vector.) Así `cross(rs, vs)` es igual al conjunto  $\{\vec{r}_i \times \vec{v}_i\}$  y es en sí misma una matriz  $N \times 3$ . Lo mismo sucede con `dot(rs, rs)`, aunque en este último caso el resultado es un vector columna  $N \times 1$  con los productos punto  $\{\vec{r}_i \cdot \vec{r}_i\}$ .
5. La operación `norm` (que está en el subpaquete `linalg` de NumPy) y que permite calcular la magnitud euclidiana de un vector, se puede aplicar sobre una matriz como `vs` para obtener la magnitud de cada fila; pero no de cualquier manera. `norm(vs)` devuelve un solo número. Pero `norm(vs, axis=1)` devuelve la magnitud de cada fila (el `axis=1` le indica a `norm` que recorra la matriz por filas; alternativamente `axis=0` le dirá a que lo haga por columnas, que no es nuestro interés aquí.) Así el código `norm(vs, axis=1)**2` permite calcular el conjunto  $\{v_i^2\}$ .

Un gráfico de la posición y velocidad de las partículas del sistema y de la posición y velocidad del centro de masa puede obtenerse con el siguiente algoritmo:

(Algoritmo 5.7)

```
import matplotlib.pyplot as plt
fig=plt.figure();

#Etiquetas sobre las partículas
for i in range(N):
    plt.text(rs[i,0],rs[i,1],i,color="cyan",
             ha='center',va='center')

#Posiciones y velocidades de las partículas
plt.scatter(rs[:,0],rs[:,1],s=5*ms,c='red',marker='o')
plt.quiver(rs[:,0],rs[:,1],vs[:,0],vs[:,1],scale=1)

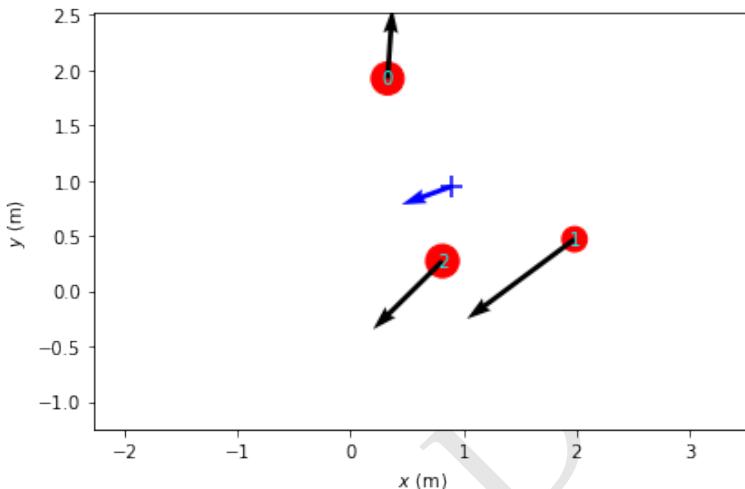
#Posiciones y velocidad del centro de masa
plt.scatter(R_CM[0],R_CM[1],s=M,c='blue',marker='+')
plt.quiver(R_CM[0],R_CM[1],V_CM[0],V_CM[1],color='blue',scale=1)

#Decoración
plt.xlabel("$x$ (m)");
plt.ylabel("$y$ (m)");

#Ajusta gráfico
from pymcel.plot import fija_ejes_proporcionales
fija_ejes_proporcionales(fig.gca(),(rs,R_CM),margin=0.4);
```

```
plt.tight_layout();
plt.show();
```

ver Figura 5.7



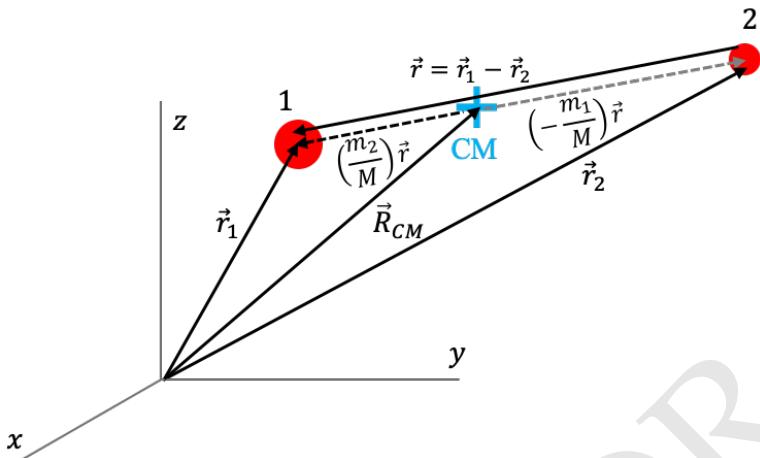
**Figura 5.7:** Figura correspondiente al código 5.7. Un sistema de tres partículas. El tamaño del círculo que representa cada partícula es proporcional a su masa. La cruz y la flecha adherida a ella muestran la posición y velocidad del centro de masa.

### Nota

**Escala de los ejes en el espacio.** La rutina `fija_ejes_proporcionales` del paquete `pymcel` que viene con la versión electrónica de este libro y que utilizamos en el Alg. (5.7), juega en ese algoritmo un papel muy importante.

En lo sucesivo, al representar la posición de partículas en el espacio coordenado, es indispensable que la escala de los ejes sea exactamente la misma. El lector puede verificar con una regla, que una unidad sobre el eje horizontal en la Figura 5.7 mide exactamente lo mismo que una unidad del eje vertical. De este modo las posiciones o los vectores representados no estarán deformados, un efecto que crea distorsiones en nuestra interpretación de esas cantidades (más adelante veremos que solo usando esta rutina, las trayectorias circulares aparecerán efectivamente como círculos.)

El código de esta rutina es muy elaborado como para reproducirlo en el libro. El lector curiosos puede encontrar todos los algoritmos del paquete `pymcel` en el material distribuido con la [versión electrónica del libro<sup>a</sup>](#).



**Figura 5.8:** Relación entre la posición del centro de masa  $\vec{R}$ , el vector relativo  $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$  y la posición de las partículas en un sistema de dos cuerpos.

#### Nota (Cont.)

<sup>a</sup><http://mybook.org>

### 5.3.2. Centro de masa de un sistema de dos partículas

De particular de interés para la mecánica celeste son las propiedades del centro de masa de un sistema formado por solo dos partículas:

$$\vec{R}_{CM} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{M}$$

Es fácil mostrar que en este caso, el centro de masa siempre se encuentra en la línea que une a las dos partículas (ver problemas al final del capítulo.)

Si introducimos el vector relativo  $\vec{r} \equiv \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ , es posible mostrar que la posición de cada partícula se puede escribir en términos de la posición del centro de masa  $\vec{R}_{CM}$  y el vector  $\vec{r}$  como:

$$\vec{r}_1 = \vec{R}_{CM} + \frac{m_2}{M} \vec{r} \quad (5.38)$$

$$\vec{r}_2 = \vec{R}_{CM} - \frac{m_1}{M} \vec{r} \quad (5.39)$$

Como vemos la distancia del centro de masa a cada partícula es directamente proporcional a la masa de la otra partícula. Así, si llamamos  $\vec{r}'_i = \vec{r}_i - \vec{R}$  al vector que va del centro de masa a la posición de cada partícula, entonces:

$$\frac{r'_1}{r'_2} = \frac{m_2}{m_1} \quad (5.40)$$

### Un poco de historia

**Kepler y el centro de masa.** Muchos años antes de que Newton hubiera formalizado las leyes de la mecánica, antes de que apareciera el concepto de masa, fuerza o el postulado de acción y reacción, todos los cuales son requeridos para la deducción formal de la relación expresada en la Ec. (5.40), Kepler había ya intuido este resultado. En su obra cumbre *Astronomía Nueva* de 1609, presentó, entre los que denomino sus *8 axiomas de una teoría verdadera de la gravedad*, la siguiente afirmación:

*"Si la Tierra y la Luna no fueran mantenidas en sus respectivas órbitas por una fuerza espiritual o de alguna otra naturaleza equivalente, la Tierra ascendería hacia la Luna 1/54 de la distancia y la Luna descendería las restantes 53 partes del intervalo y así se unirían. Pero este cálculo presupone que ambos poseen la misma densidad."*<sup>a</sup>

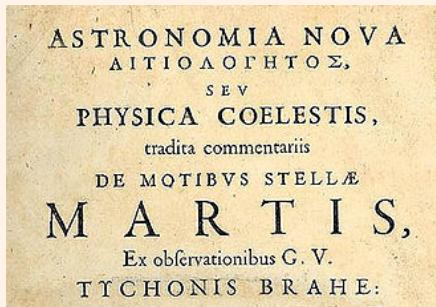


Figura 5.9: Primera página de la obra cumbre de Kepler Astronomía Nova.

Este hecho pone en evidencia dos cosas: (1) la clarividencia del matemático alemán, quién entre otras cosas además de la citada, intuyó algunas importantes propiedades de la gravedad y de sus efectos sobre el movimiento planetario 80 años antes que Newton y sus contemporáneos; y (2) que las ideas de la mecánica que hoy atribuimos exclusivamente a Newton estaban "flotando" en el ambiente intelectual de su época desde hacía casi 100

años. Newton, como lo sería también Maxwell un siglo y medio después en el caso de la electricidad y el magnetismo, fue en cierto sentido un compilador de la sabiduría "mecánica" de su época.

<sup>a</sup>En realidad el centro de masa del sistema Tierra-Luna está a 1/81 de la distancia entre ambos (la masa de la Tierra es 81 veces la de la Luna.) Sin embargo, la estimación de Kepler, como bien lo aclara al final de esta cita sin que terminemos de entenderle, se basaba en la suposición de que la masa de nuestro satélite se puede estimar exclusivamente a partir de su tamaño. Usando el valor contemporáneo del radio de la Luna y de la Tierra, la masa estimada de nuestro satélite, a partir de su tamaño y suponiendo densidades iguales, sería  $(R_{\text{Luna}}/R_{\text{Tierra}})^3 = (1737/6371)^3 = 1/49$  de la masa de la Tierra, que es cercano al valor de 1/54 usado por Kepler.

#### 5.3.3. Teoremas de conservación

Usando la e.d.m. para un sistema de partículas (Ec. 7.2) y algunas de las deducciones que ya habíamos realizado en el caso de partículas individuales, podemos deducir algunos teoremas mecánicos de gran importancia.

**Teorema 5.4**

**Teorema de conservación del momentum lineal.** Si la fuerza externa total sobre un sistema de partículas es nula, el momentum total del sistema se mantiene constante. En términos matemáticos:

$$\vec{F}^E = \sum_i \vec{F}_i^E = 0 \iff \vec{P} = \vec{P}_{CM}$$

Donde  $\vec{P}_{CM}$  es un vector constante.

Este teorema ocupa un lugar central en la mecánica y sus implicaciones no son para nada triviales. Piense tan solo en el hecho de que aún si un sistema contiene un enorme número de partículas, que rebotan entre sí o se dispersan unas contra otras, procesos en los cuáles el momento de las partículas se modifica de formas a veces inesperadas, la suma de todos los momentos individuales producirá siempre el mismo número.

Premultiplicamos ahora la e.d.m. en la Ec. (5.37) por el factor integrante  $\vec{r}_i \times$  y sumando sobre todas las partículas:

$$\sum_i m_i \vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \left( \vec{F}_i^E + \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij} \right)$$

El lado izquierdo izquierdo de esta última ecuación se puede expresar en términos de cuadraturas (ver Sección 5.1.4), de modo que la ecuación adopta la forma más conveniente de:

$$\frac{d}{dt} \left( \sum_i m_i \vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i \right) = \vec{r}_i \times \sum \left( \vec{F}_i^E + \vec{F}_{ij} \right),$$

donde reconocemos, del lado izquierdo al momento angular total  $\vec{L} = \sum m_i \vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i$  y del derecho la torca neta:

$$\vec{\tau} = \vec{r}_i \times \sum \left( \vec{F}_i^E + \vec{F}_{ij} \right). \quad (5.41)$$

En términos de estas cantidades, la e.d.m. de un sistema de partículas se puede escribir, alternativamente, como:

$$\dot{\vec{L}} = \vec{\tau} \quad (5.42)$$

Volvamos a la torca. Por el postulado de acción y reacción (Pos. 5.3) las torcas de las fuerzas entre las partículas se pueden agrupar por pares de la forma:

$$\vec{r}_k \times \vec{F}_{lk} + \vec{r}_l \times \vec{F}_{kl} = -\vec{r}_{lk} \times \vec{F}_{lk},$$

donde  $\vec{r}_{lk} = \vec{r}_l - \vec{r}_k$  es el vector relativo, y hemos usado índices  $l, k$  distintos a los originales  $i, j$  de la e.d.m. para evitar confusiones.

Si adicionalmente, las interacciones son tales que el postulado de acción y reacción fuerte se cumple, es decir si  $\vec{r}_{lk} \parallel \vec{F}_{lk}$ , entonces todas las torcas internas se cancelan mutuamente y como consecuencia:

$$\vec{\tau} = \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i^E, \quad (5.43)$$

de donde, finamente, la e.d.m. del sistema de partículas (Ec. 5.42) tiene la forma explícita:

$$\dot{\vec{L}} = \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i^E$$

Esta última ecuación conduce a un segundo importante teorema de conservación:

### Teorema 5.5

**Teorema de conservación del momentum angular.** Si la torca externa total sobre un sistema de partículas es nula, el momento angular total del sistema se mantiene constante. En términos matemáticos:

$$\vec{\tau} = \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i^E = \vec{0} \iff \vec{L} = \vec{L}_0$$

Donde  $\vec{L}_0$  es un vector constante.

Es claro que la condición básica del teorema de conservación del momento angular (torque neto nulo) se cumple también en el caso en el que las fuerzas externas son nulas. Es decir, en un sistema aislado de partículas, tanto el momento lineal como el momento angular se conservan.

De nuevo, por trivial que nos parezca el teorema de conservación del momento angular, esta lejos de serlo. La cantidad implicada aquí es mucho más compleja que el momento lineal y resulta sencillamente increíble que bajo una condición tan particular como la que supone el teorema, una combinación no trivial de cantidades cinemáticas produzcan un vector constante.

Pongamos a prueba el teorema usando el sistema de partículas que habíamos introducido en la Sección 5.3.1. Para ello calculemos el momento angular total del sistema:

(Algoritmo 5.8)

```
#Momento angular de cada partícula
from numpy import cross
Ls=ms[:,None]*cross(rs,vs)

#Momento angular total
L=sum(Ls)
```

Momentos angulares individuales:

```
[[ 0.      0.      1.35]
 [ 0.     -0.     -6.25]
 [ 0.     -0.     -3.72]]
```

Momento angular total:

```
[ 0.      0.     -8.62]
```

Propagaremos ahora sus posiciones y velocidades asumiendo que las partículas se mueven con velocidad constante, es decir, sin experimentar ninguna fuerza de

interacción mutua, y más importante, ninguna fuerza externa. En esta condición dinámica las velocidades no se modifican:

```
#Tiempo futuro
t=10.0

#Posición y velocidad de las partículas en t
rs_t=rs+10*vs
vs_t=vs
```

Posiciones iniciales: rs =

```
[[0.33 1.93 0. ]
 [1.98 0.47 0. ]
 [0.81 0.27 0. ]]
```

Posiciones finales: vs =

```
[[ 0.4 2.99 0. ]
 [ 0.34 -0.75 0. ]
 [-0.25 -0.77 0. ]]
```

Véamos ahora cuánto valen los momentos angulares individuales y total, después de que las partículas se propagaran:

```
#Momento angular de cada partícula
from numpy import cross
Ls_t=ms[:,None]*cross(rs_t,vs_t)

#Momento angular total
L_t=Ls_t.sum(axis=0)
```

Momentos angulares después:

```
[[ 0. 0. 1.35]
 [ 0. -0. -6.25]
 [ 0. 0. -3.72]]
```

Momento angular total después:

```
[ 0. 0. -8.62]
```

El momento angular total después de la propagación resulta igual al momento angular antes de ella (Alg. 5.8) con lo que comprobamos que en la ausencia de fuerzas externas, incluso frente a modificaciones no triviales de las posiciones, el momento angular se mantiene constante.

### 5.3.4. Dinámica referida al centro de masa

Una forma especial de las e.d.m. de un sistema de partículas, se obtiene cuando lo describimos desde un sistema de referencia “atado” del centro de masa (origen en el centro de masa y velocidad igual a él.)

Usando las transformaciones de Galileo (Pos. 5.1) la posición y velocidad de cada partícula referida al centro de masa será (Ecs. 5.5 y 5.4):

$$\begin{aligned}\vec{r}_i(t) &= \vec{R}_{CM}(t) + \vec{r}'_i(t) \\ \vec{v}_i(t) &= \vec{V}_{CM}(t) + \vec{v}'_i(t)\end{aligned}\tag{5.44}$$

Aquí, las cantidades primadas están referidas al nuevo sistema de referencia. En general  $\vec{R}_{\text{CM}}(t) = \int \vec{V}_{\text{CM}}(t) dt$  será la posición del centro de masa en  $t$ .

### Momento angular total del sistema

En el sistema de referencia del centro de masa el momentum angular es:

$$\begin{aligned}\vec{L} &= \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i \\ &= \sum_i m_i (\vec{R}_{\text{CM}} + \vec{r}'_i) \times (\vec{V}_{\text{CM}} + \vec{v}'_i) \\ &= (\sum_i m_i) \vec{R}_{\text{CM}} \times \vec{V}_{\text{CM}} + \vec{R}_{\text{CM}} \times (\sum_i m_i \vec{v}'_i) + (\sum_i m_i \vec{r}'_i) \times \vec{V}_{\text{CM}} + \sum_i (m_i \vec{r}'_i \times \vec{v}'_i)\end{aligned}$$

En esta expresión  $\sum m_i \vec{r}'_i$  y  $\sum m_i \vec{v}'_i$  son, respectivamente, vectores proporcionales a la posición y velocidad del centro de masa (ver Ec. 5.36), pero medidos en el sistema de referencia del mismo centro de masa; por definción, ambas cantidades son entonces nulas (para una sencilla comprobación numérica, ver algoritmos abajo.)

Finalmente, el momento angular total del sistema se puede escribir como:

$$\vec{L} = \vec{R}_{\text{CM}} \times \vec{P}_{\text{CM}} + \sum_i \vec{r}'_i \times \vec{p}'_i \quad (5.45)$$

es decir, **el momento angular total de un sistema de partículas** es igual a la suma del **momento angular del centro de masa** y el **momentum angular total de las partículas en el sistema de referencia del centro de masa**.

Nuevamente podemos comprobar este resultado usando el sistema de ejemplo que introdujimos en [Sección 5.3.1](#).

Calculemos primero el momento angular del centro de masa del sistema:

```
#Momento angular del centro de masaa
from numpy import cross
L_CM=M*cross(R_CM,V_CM)
```

Momento angular del centro de masa:  
[ 0. -0. 7.96]

Para calcular el momento angular de las partículas en el sistema de referencia del centro de masa, debemos primero calcular la posición y velocidad de ellas en ese sistema usando las Ecs. (5.44):

```
#Posición y velocidad referida al centro de masa
from numpy import subtract
rps=subtract(rs,R_CM)
vps=subtract(vs,V_CM)
```

Posiciones respecto al CM:

```
[[ -0.56  0.98]
 [ 1.09 -0.48]
 [-0.08 -0.68]]
```

Velocidades respecto al CM:

```
[[ 0.08  0.13]]
```

```
[[-0.09 -0.09]
 [-0.03 -0.08]]
```

Con este resultado podemos verificar la afirmación que habíamos hecho en la deducción de la Ec. (5.45), en la que habíamos dicho que  $\sum m_i \vec{r}'_i$  y  $\sum m_i \vec{v}'_i$  son vectores nulos:

```
R_CM_CM=sum(ms[:,None]*rps)/M
V_CM_CM=sum(ms[:,None]*vps)/M
```

Posiciones del CM respecto al CM:

```
[1.53e-16 0.00e+00]
```

Posiciones del CM respecto al CM:

```
[-3.95e-18 5.26e-18]
```

Hecha esta verificación, podemos ahora calcular el momento angular total de las partículas en el sistema de referencia del centro de masa:

```
#Momento angular de cada partícula
from numpy import cross
Lps=ms[:,None]*cross(rps,vps)

#Momento angular total
Lp=sum(Lps)
```

Momento angular total referido al centro de masa:

```
[ 0.      0.     -16.58]
```

Ciertamente este vector no coincide con el momentum angular total referido al origen que habíamos calculado en el Alg. (5.8); pero esto es natural puesto que no hemos sumado el momento angular del centro de masa que calculamos antes:

```
#Momento angular total
L=L_CM+Lp
```

Momento angular total:

```
[ 0.      0.     -8.62]
```

Que coincide con el obtenida con el Alg. (5.8). Con esto hemos comprobado la relación expresada en la Ec. (5.45).

### Energía cinética total del sistema

Una relación similar a la encontrada en la Ec. (5.45) para el momento angular, puede deducirse también para el caso de la energía cinética total  $K$ .

Usando el teorema del trabajo y energía (Teo. 5.3) puede probarse que en el caso de un sistema de partículas  $K$  es:

$$K = \frac{1}{2} \sum m_i v_i^2$$

Reemplazando en esta expresión la velocidad de cada partícula en el sistema original por su velocidad en el sistema de referencia del centro de masa,  $\vec{v}_i = \vec{v}'_i + \vec{V}$  (Ec. 5.44) se obtiene:

$$K = \frac{1}{2} \sum m_i \vec{V}^2 + \vec{V} \cdot \frac{d}{dt} \left( \sum m_i \vec{r}'_i \right) + \frac{1}{2} \sum m_i \vec{v}'_i^2$$

de donde por los mismos argumentos en la deducción de la Ec. (5.45) obtenemos finalmente:

$$K = \frac{1}{2} MV^2 + \frac{1}{2} \sum m_i v'_i^2, \quad (5.46)$$

es decir la **energía cinética total del sistema** es igual a la **energía cinética del centro de masa** más la **energía cinética total referida al centro de masa** (energía interna.)

De nuevo podemos verificar este resultado usando el sistema de ejemplo.

Para ello, primero calculemos la energía cinética total usando las velocidades referidas al sistema de referencia original:

(Algoritmo 5.9)

```
#Magnitud de las velocidades de las partículas
from numpy.linalg import norm
vmags=norm(vs, axis=1)

#Energía cinética individual de cada partícula
Ks=0.5*ms*vmags**2

#Energía cinética total
K=sum(Ks)
```

Energía cinética de las partículas:

[0.37 0.79 0.73]

Energía cinética total: 1.90

Ahora podemos hacerlo usando la nueva expresión:

```
#Energía cinética del centro de masa:
K_CM=0.5*M*norm(V_CM)**2

#Magnitud de las velocidades
vpmags=norm(vps, axis=1)

#Energía cinética individual de cada partícula
Kps=0.5*ms*vpmags**2

#Energía cinética en el centro de masa
Kp=Kps.sum()

#Energía total
K=K_CM+Kp
```

Energía cinética del CM: 0.5505136059795793

Energía cinética de las partículas (respecto al CM): [0.8 0.32 0.22]

Energía cinética total (respecto al CM): 1.35

Energía cinética total: 1.90

De nuevo, la energía cinética calculada con la Ec. (5.46) coincide con la obtenida en el Alg. (5.9).

BORRADOR

## Capítulo 6

# El Problema de los N cuerpos

### Resumen

En este capítulo abordaremos el que podría considerarse el problema central de la mecánica celeste: predecir la evolución futura de un sistema de cuerpos que se atraen gravitacionalmente (los planetas del sistema solar, las estrellas de un cúmulo globular o las galaxias de un cúmulo galáctico). A este problema se lo conoce históricamente como el *problema de los N cuerpos*. Formularemos física y matemáticamente el problema general, estudiaremos a continuación su “solución” aproximada usando algoritmos numéricos y finalmente exploraremos algunas de sus propiedades matemáticas más generales. Para todo ello, nos valdremos de los principios y leyes de la mecánica newtoniana y de su aplicación usando fuerzas, cálculo vectorial y geometría (un enfoque que llamaremos en lo sucesivo *formalismo vectorial* o *formalismo geométrico* de la mecánica celeste). Este capítulo sentará las bases numéricas y teóricas de los capítulos posteriores.

## 6.1. Formulación del problema

### 6.1.1. Motivación

El problema de los N cuerpos es uno de los más importantes problemas de la Física y, posiblemente, el primer problema de física teórica que se formuló en la historia de esta disciplina.

Cuando Newton desarrolló su teoría mecánica con el propósito de describir el movimiento de los cuerpos del Sistema Solar, era claro que en el sistema existían cuerpos que dominaban el movimiento de otros, sin verse significativamente afectados por ellos.

Así por ejemplo, el Sol *domina* el movimiento de la Tierra, Júpiter por su lado *domina* el movimiento de sus lunas, mientras que Saturno lo hace para el movimiento de las partículas que componen sus anillos.

Cuando un cuerpo *domina* el movimiento de muchos otros cuerpos *ligeros* (el

Sol y los asteroides, Júpiter y sus Lunas, etc.) predecir los movimientos en el sistema es relativamente sencillo: la fuerza que ejercé el cuerpo *principal* sobre cada cuerpo pequeño se puede considerar independiente de la posición o velocidad de todos los demás. En este caso, la solución al problema se obtiene resolviendo, independientemente, la ecuación de movimiento de cada uno de los cuerpos en el sistema (como veremos en el ??).

Al estudiar, sin embargo, la dinámica de algunos sistemas gravitacionales en el Universo en los que no existe necesariamente un cuerpo dominante, tales como un cúmulo de estrellas o galaxias, el sistema formado por el Sol y los planetas (aunque el Sol es 1000 veces más masivo que el planeta más grande, al calcular de forma muy precisa la posición de los planetas para hacer observaciones o enviar naves espaciales, es necesario considerarlo un cuerpo más en el sistema), el sistema formado por Plutón y sus satélites (especialmente Caronte), etc., se hace claro que la dinámica de estos sistemas es mucho más compleja que aquella que se predice usando la aproximación mencionada en el párrafo anterior.

Cuando se admite que en un sistema de muchas partículas, la posición y velocidad de todas ellas debe considerarse para obtener una descripción correcta de la dinámica del sistema, decimos que nos enfrentamos al **problema de los N cuerpos**

<sup>27</sup>

### 6.1.2. Enunciado físico y matemático

#### Definición 6.1

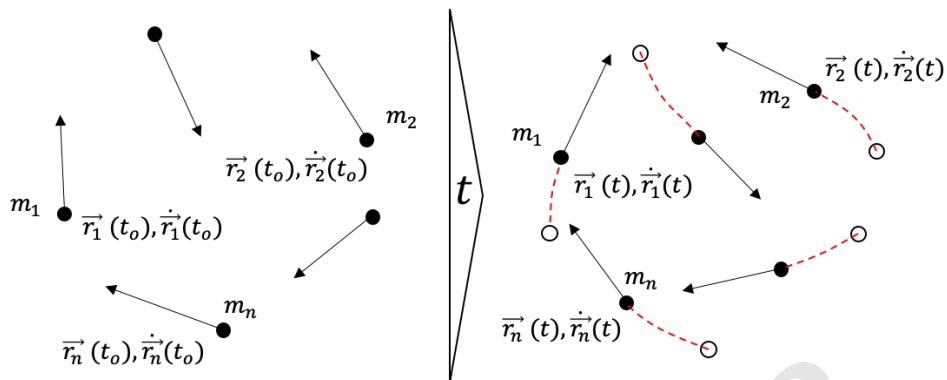
**Problema de los N cuerpos.** “Dado un sistema con un número arbitrario de partículas puntuales que se atraen mutuamente obedeciendo [los postulados mecánicos] de Newton, encontrar, bajo la suposición de que ninguna de esas partículas colisiona, una representación de las coordenadas de cada partícula como una serie de una variable que sea una función conocida del tiempo, tal que para todos los valores de la variable, la serie converga uniformemente.” <sup>a</sup>

<sup>a</sup>Tomado literalmente del prefacio del editor en [21], que a su vez reproduce el texto del concurso organizado por el rey de Suecia Oscar II en 1889 (ver el recuadro *Un poco de historia* en esta sección).

Esta formulación del problema, que tiene un marcado estilo matemático, puede matizarse con algunos comentarios físicos:

- Asumimos que en un momento dado del tiempo  $t_0$ , las posiciones y velocidades de todas las partículas (condiciones iniciales) son conocidas  $\{\vec{r}_i(t_0), \dot{\vec{r}}_i(t_0)\}_N$  (ver Figura 6.1.) Adicionalmente suponemos que las posiciones de dos o más partículas no coinciden completamente en el tiempo inicial  $t_0$ . El problema de los N cuerpos consiste entonces en encontrar las posiciones y velocidades de todas las partículas en un instante futuro de tiempo  $t$ , es decir encontrar  $\{\vec{r}_i(t), \dot{\vec{r}}_i(t)\}_N$ .

<sup>27</sup>En otras áreas de la física, a este problema se lo conoce también como el **problema de muchos cuerpos** y en general no se restringe únicamente a describir el movimiento del sistema (que es propio de la *física clásica*), sino también, por ejemplo, su estado cuántico y posible evolución en el tiempo.



**Figura 6.1:** El problema de los  $N$  cuerpos: dadas las condiciones iniciales de un conjunto de  $N$  partículas puntuales, predecir la posición y velocidad de las partículas en cualquier instante futuro.

- Al decir que la solución puede, en general, expresarse como una serie de una variable dependiente del tiempo (no necesariamente el tiempo mismo), el enunciado admitió que no es necesario que las posiciones y velocidades deban expresarse en la forma de funciones analíticas (p.e. polinomios, funciones trigonométricas, función logarítmica o exponencial, etc.) Es claro que, al menos para propósitos del cálculo aproximado de la solución, tener una serie convergente puede ser tan útil como tener una solución analítica (aunque naturalmente no es lo mismo, especialmente si la serie converge muy lentamente como veremos más adelante.)
- La convergencia uniforme es una condición matemática rigurosa, aplicada a las sucesiones y series, que implica, en pocas palabras que las posiciones y velocidades calculadas con la serie sean tan cercanas como se deseé a las posiciones y velocidades reales, sin importar el tiempo en el que se calculen.
- Como lo admite implícitamente el enunciado, no se espera que sea posible predecir el estado del sistema en cualquier instante futuro. En el caso, por ejemplo, en el que las condiciones iniciales conduzcan a una colisión, es decir, una situación en la que al menos dos partículas en el sistema podrían situarse a una distancia nula una de otra, se produciría una *singularidad* matemática en el sistema (fuerzas infinitas). Aún en casos en los que se produzcan colisiones, se espera que sea posible predecir la evolución del sistema entre el tiempo inicial y el tiempo de la primera colisión.

Matemáticamente, el problema de los  $N$  cuerpos es equivalente la solución de las e.d.m. de todas las partículas (Ecs. 5.37):

$$\left\{ \ddot{\vec{r}}_i = \frac{1}{m_i} \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij} \right\}_N ,$$

donde no sobra recordar que según las convenciones usadas aquí,  $\vec{F}_{ij}$  es la fuerza ejercida sobre la partícula  $i$  por la partícula  $j$ .

Como esta implícito aquí, asumiremos que no existe ninguna fuerza externas sobre las partículas del sistema, p.e. fricción con un medio, interacción con un campo externo, etc.

De acuerdo a la formulación del problema presentada en la Definición 6.1, asumimos que la dinámica es estrictamente newtoniana, lo que incluye suponer que la única interacción a distancia entre las partículas es la interacción gravitacional newtoniana (ver Pos. ??, Ec. 5.26):

$$\vec{F}_{ij} = -\frac{Gm_i m_j}{r_{ij}^3} \vec{r}_{ij}.$$

donde tampoco sobra recordar que en lo sucesivo el vector relativo  $\vec{r}_{ij} \equiv \vec{r}_i - \vec{r}_j$  apunta en la dirección que va de la partícula que produce la fuerza (partícula  $j$ ) hacia la partícula que la experimenta (partícula  $i$ ).

En términos explícitos, finalmente, el problema de los N cuerpos en mecánica celeste, consiste en resolver el conjunto de ecuaciones diferenciales:

$$\left\{ \ddot{\vec{r}}_i = - \sum_{j \neq i} \frac{\mu_j}{r_{ij}^3} \vec{r}_{ij} \right\}_N, \quad (6.1)$$

donde hemos introducido el **parámetro gravitacional**  $\mu_j \equiv Gm_j$  sobre el que volveremos en la Sección 6.4.

### Un poco de historia

**Henri Poincaré y el premio del Rey Oscar.** En 1889, el matemático sueco Mittag-Leffler convenció al rey Oscar II de Suecia de que, con motivo de la celebración de su cumpleaños presentaría al mundo un nuevo concurso matemático.

Entre los problemas formulados en el concurso del rey Oscar II se encontraba, precisamente, el problema de los N cuerpos. La formulación del problema presentada en este capítulo, es literalmente la que preparó para el Rey, el matemático alemán Karl Weierstrass (“Vierstrass<sup>a</sup>”), inspirado originalmente por las ideas del también matemático alemán Peter Gustav Dirichlet (“Diriclet”).

Uno de los participantes del concurso, fue el matemático Francés **Henri Poincaré** (“Honri Poancaré<sup>b</sup>”), que contaba para la época con 35 años (ver Figura 6.2).

Poincaré nació en Francia el 29 de abril de 1854 y se graduó como doctor en matemáticas en 1879 bajo la orientación de Charles Hermite (“Charles Hermite<sup>c</sup>”).

Las mayores contribuciones de Poincaré, como matemático, se produjeron en la teoría de ecuaciones diferenciales. Sin embargo, por sus estudios posteriores de ingeniería, su posición como profesor de la Universidad de París (La Sorbona) en las áreas de Mecánica, Física Matemática, Teoría de la Probabilidad, Mecánica Celeste y Astronomía, además del reconocimiento

### Un poco de historia (Cont.)

público que lo llevó a ser miembro de la Oficina de Longitudes de Francia en 1897 y elegido presidente de la Academia Francesa de Ciencias en 1906, los conocimientos de Poincaré se extendieron a muchas otras disciplinas. De allí que sea considerado un **Polímata** o un “hombre universal” (alguien que domina muchas disciplinas intelectuales o artísticas) un apelativo que comparte con personajes como Aristóteles o Leonardo da Vinci).

El artículo presentado por Poincaré en el concurso del Rey Oscar II, titulado “Sobre el problema de los tres cuerpos y las ecuaciones de la dinámica”<sup>[20]</sup>, fue declarado, sin lugar a dudas el ganador del concurso. Pero no sin alguna polémica. De un lado el trabajo no resolvía el problema general y del otro contenía algunos errores que fueron solo corregidos después. Adicionalmente la “solución” cuya existencia demostraba Poincaré suponía que los cuerpos se mantendrían siempre a una distancia mayor a un cierto valor mínimo. El mismo Poincaré admitiría, que la solución general al problema tal vez no se encontraría pronto y que serían necesarias “herramientas analíticas infinitamente más complicadas que las disponibles en la época.” Aún así los métodos introducidos por Poincaré en aquel trabajo de 1890, influenciarían de forma importante la mecánica celeste y serían la base para el desarrollo de la teoría del caos.

El problema de los tres cuerpos, formulado a la manera del concurso del rey Oscar II, fue finalmente resuelto en 1912 por el matemático Finlandés Karl Sundman <sup>[28]</sup>. En este trabajo Sundman probó la existencia de series que describían la posición de los tres cuerpos y que convergían para tiempos arbitrarios. Una excelente síntesis histórica de la contribución (poco apreciada) de Sundman puede encontrarse en <sup>[5]</sup>.

<sup>a</sup><https://es.forvo.com/search/Weierstrass/de/>

<sup>b</sup><https://es.forvo.com/search/Henri%20Poincare/>

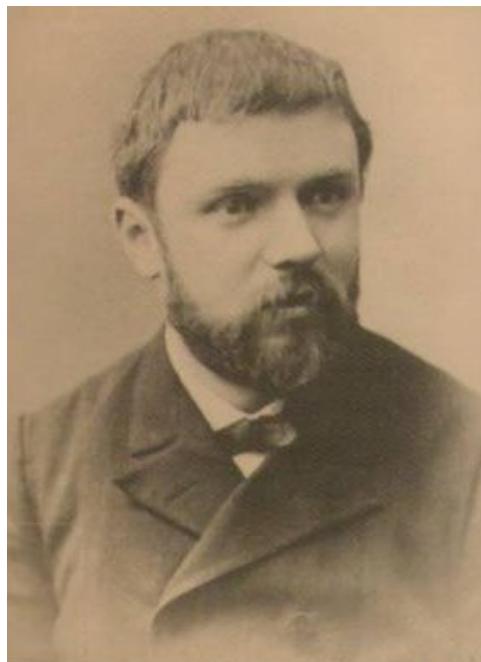
<sup>c</sup><https://es.forvo.com/search/Charles%20Hermite/fr/>

## 6.2. ¿Solución analítica?

Como aprendimos en la [Sección 5.1.4](#), una manera posible para buscar una solución analítica a las  $6N$  ecuaciones diferenciales del problema de los  $N$  cuerpos (Ec. [6.1](#)), o para al menos, aprender cosas sobre la dinámicas del sistema aunque no obtengamos la solución, es la de buscar tantas constantes de movimiento (cuadraturas) como sea posible.

Como habíamos visto, para convertir el problema diferencial en uno algebraico completamente determinado (igual numero de ecuaciones que de incognitas), es necesario encontrar  $6N$  cuadraturas, es decir, un número de constantes de movimiento igual al de variables del sistema.

En esta sección usaremos los resultados generales sobre la dinámica de sistemas de partículas que obtuvimos en la [Sección 5.3](#) además de los métodos matemáticos introducidos en la [Sección 5.1.4](#), para encontrar las primeras integrales de movimiento del problema de los  $N$  cuerpos y acercarnos así a su solución analítica.



**Figura 6.2:** Fotografía de Henri Poincaré hacia el año 1886, unos años antes de realizar su trabajo histórico sobre el problema de los tres cuerpos (Foto: Eugène Pirou)

### 6.2.1. Aplicación de los teoremas de conservación

En la forma específica del problema de los N cuerpos presentada aquí, asumimos que el sistema de partículas está aislado del Universo, es decir, sobre los cuerpos no actúa ninguna fuerza externa.

Como vimos en la [Sección 5.3.3](#), esta condición implica que tanto el momentum lineal total del sistema (ver Teo. 5.4), como su momentum angular total (ver Teo. 5.5) se conservan.

De acuerdo con esto, las funciones:

$$\begin{aligned}\sum m_i \dot{\vec{r}}_i &= \vec{P}_{\text{CM}} \\ \sum m_i \vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i &= \vec{L}\end{aligned}$$

son las primeras constantes de movimiento que reconocemos para el problema.

Dada la importancia que el método de cuadraturas tiene en el desarrollo de muchos de los resultados en este libro, en las siguientes secciones confirmaremos este resultado, lo interpretaremos en el contexto del problema de los N cuerpos y en particular estudiaremos su implicación para algunos sistemas astronómicos de interés, pero más importante, encontraremos dos constantes adicionales que no habíamos deducido hasta ahora en el caso general de sistemas de muchas partículas.

### 6.2.2. Momento lineal

Como vimos en la Sección 5.3.1, la manera de probar la conservación del momento angular en el problema de los N cuerpos, consiste en sumar las e.d.m. de cada una de las partículas (Ecs. 6.1):

$$\sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i = - \sum_i \sum_j \frac{m_i \mu_j}{r_{ij}^3} \vec{r}_{ij} \quad (6.2)$$

En el lado derecho de esta ecuación, el término en el denominador es simétrico,  $r_{ji} = r_{ij}$ , mientras el término en el numerador,  $\vec{r}_{ji} = \vec{r}_i - \vec{r}_j$  es *antisimétrico* (el signo cambia al cambiar el orden de los índices). Como resultado, por cada término en la doble sumatoria (por ejemplo el término  $i = 1, j = 4$ ) habrá un término idéntico pero de signo contrario (el término con  $i = 4, j = 1$ ) que lo anulará. Físicamente, esta propiedad matemática es equivalente a aplicar postulado de acción y reacción que usamos para deducir la Ec. (5.37).

Así, el lado derecho de la Ec. (6.2) siempre será nulo (sin importar el número de partículas) y la suma de las e.d.m. será:

$$\sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i = 0. \quad (6.3)$$

Como era de esperarse esta ecuación es equivalente a la e.d.m. de un sistema de partículas sobre el que no actúan fuerzas externas (Ec. 5.37.).

En forma de cuadraturas la misma ecuación se escribe:

$$\frac{d}{dt} \left( \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i \right) = 0,$$

donde como siempre asumimos que las masas de todas las partículas del sistema  $\{m_i\}$  son constantes.

Esta expresión no es otra cosa que una forma del teorema de conservación del momento lineal y provee la primera constante (vectorial) de movimiento del problema de N cuerpos:

$$\sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i = \vec{P}_{CM} \quad (6.4)$$

Por tratarse de una expresión vectorial, en esta cuadratura hay contenidas en realidad tres constantes de movimiento:  $\sum_i m_i \dot{x}_i = P_{CM,x}$ ,  $\sum_i m_i \dot{y}_i = P_{CM,y}$  y  $\sum_i m_i \dot{z}_i = P_{CM,z}$ .

#### Nota

**El sistema de referencia del centro de masa.** La constancia de  $\vec{P}_{CM}$  en el problema de los N cuerpos, nos permite introducir un sistema de referencia inercial ideal para la descripción simplificada del problema. Naturalmente nos referimos al sistema de referencia del centro de masa, que tiene, respecto al sistema de referencia general considerado hasta aquí, una velocidad constante e igual a  $\vec{V}_{CM} = \vec{P}_{CM}/M$  (donde

### Nota (Cont.)

$$M = \sum m_i.$$

El movimiento de las partículas en este sistema de referencia es el más *simple* que podemos percibir desde un sistema de referencia inercial. Por la misma razón, en lo sucesivo y siempre y cuando no se diga lo contrario, la dinámica de la mayoría de los sistemas de N cuerpos considerados en este libro se describirá en el sistema de referencia de su centro de masa.

#### 6.2.3. Posición del centro de masa

Una segunda constante de movimiento puede obtenerse aplicando cuadraturas a la primera integral (Ec. ??):

$$\frac{d}{dt} \left( \sum_i m_i \vec{r}_i \right) = \frac{d}{dt} (\vec{P}_{CM} t)$$

De donde podemos escribir:

$$\sum_i m_i \vec{r}_i - \vec{P}_{CM} t = M \vec{R}_0 \quad (6.5)$$

Para expresar esta última constante de movimiento, hemos elegido, arbitrariamente, llamar a su valor como  $M \vec{R}_0$ , donde  $M$  es la masa total del sistema (que también es un valor constante). La elección de esta parametrización para el valor de la integral, no modifica en nada el hecho que el lado derecho de la Ec. (6.6) es constante también.

¿Cómo podemos interpretar físicamente la constante de movimiento en la Ec. (6.6)? Si dividimos la expresión de esta constante por la masa total del sistema  $M$  y la escribimos como:

$$\frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{M} = \vec{R}_0 + \vec{V} t,$$

podemos identificar, del lado izquierdo, la posición del centro de masa del sistema en cualquier tiempo  $\vec{R}_{CM} = \sum m_i \vec{r}_i / M$  (ver Ec. 5.36). Del lado derecho, por otro lado, encontramos a  $\vec{V}_{CM} t$ , que no es otra cosa que el desplazamiento que sufre el centro de masa al moverse con velocidad constante  $\vec{V}_{CM} = \vec{P}_{CM} / M$ . En consecuencia podemos entonces concluir que  $\vec{R}_0$  no es otra cosa es la posición inicial del centro de masa. Así, la Ec. (6.6) es la constante de movimiento asociada al centro de masa.

De nuevo, por tratarse de una expresión vectorial, la Ec. (6.6) corresponde en realidad a tres constantes en lugar de una:  $\sum_i m_i x_i - P_{CM,x} t = M x_{CM,0}$ ,  $\sum_i m_i y_i - P_{CM,y} t = M y_{CM,0}$  y  $\sum_i m_i z_i - P_{CM,z} t = M z_{CM,0}$ .

En el sistema de referencia del centro de masa que habíamos mencionado en una nota anterior, esta constante de movimiento se puede escribir de forma simplificada como:

$$\sum_i m_i \vec{r}'_i = \vec{0}, \quad (6.6)$$

donde, como hicimos en la [Sección 5.3.4](#), las cantidades primadas son medidas respecto al centro de masa.

Esta expresión confirma la intuición expresada antes de que en este sistema de referencia la descripción del problema es la más simple posible.

#### 6.2.4. Momentum angular

Como hicimos en la [Sección 5.3.3](#), si tomamos las e.d.m. del sistema de partículas (Ec. 6.1) y premultiplicamos vectorialmente por el vector posición y la masa de cada partícula (este será el factor integrante), el resultado es el conjunto de ecuaciones:

$$\left\{ m_i \vec{r}_i \times \ddot{\vec{r}}_i = -m_i \sum_j \frac{\mu_j}{r_{ij}^3} \vec{r}_i \times \vec{r}_{ij} \right\}$$

Por las propiedades del producto vectorial, el último término en el lado derecho será,  $\vec{r}_i \times \vec{r}_{ij} = -\vec{r}_i \times \vec{r}_j$ , que es también antisimétrico. En consecuencia, si sumamos todas las ecuaciones diferenciales resultantes, obtendremos la ecuación:

$$\sum_i m_i \vec{r}_i \times \ddot{\vec{r}}_i = \vec{0},$$

que podemos expresar en cuadraturas como:

$$\frac{d}{dt} \left( \sum_i m_i \vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i \right) = \vec{0}$$

Esta última ecuación permite identificar la constante de movimiento:

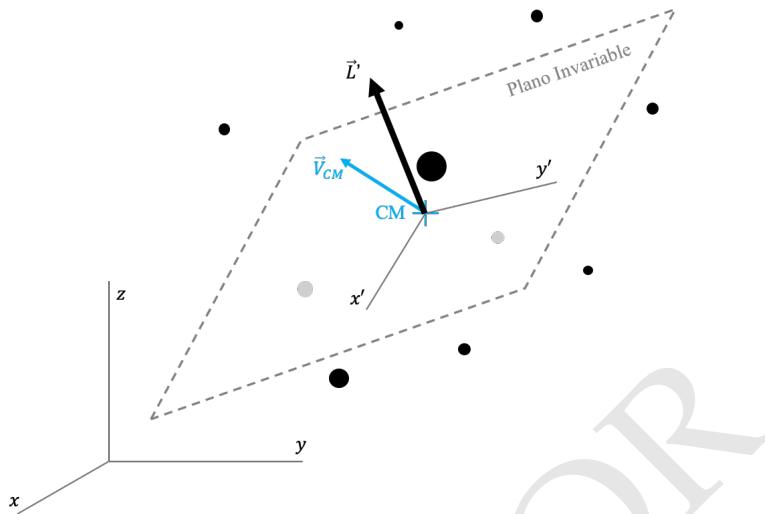
$$\sum m_i \vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i = \vec{L} \quad (6.7)$$

que reconocemos, naturalmente, con el momento angular total del sistema.

Existe una interesante interpretación geométrica de esta constante de movimiento: si nos ubicamos en el sistema de referencia del centro de masa del sistema, la dirección (constante) del vector momento angular total define un plano invariable (en dirección perpendicular a él). No importa la posición de las partículas, ni el tiempo en el que se registren, dicho plano mantendrá siempre su orientación en el espacio. A este plano se lo conoce históricamente como el **plano invariable de Laplace** [18].

#### Definición 6.2

**Plano invariable (de Laplace) y sistema natural de referencia.** Dado un sistema de N partículas puntuales  $\{m_i\}$ , llamamos **plano invariable (de Laplace)**.. a aquel que tiene como vector normal  $\hat{n} = \vec{L}' / L'$ , donde:



**Figura 6.3:** Ilustración gráfica de la orientación del plano invariable de Laplace. El plano invariable está definido en el sistema de referencia inercial del centro de masa y se mueve con él con velocidad  $V_{CM}$  y tiene una orientación dada por el momento angular total  $\vec{L}'$  de las partículas respecto del centro de masa.

#### Definición 6.2 (Cont.)

$$\vec{L}' = \sum m_i \vec{r}'_i \times \dot{\vec{r}}'_i$$

es el momento angular total de las partículas referidas al sistema de referencia del centro de masa. Dado que  $\vec{L}'$  es constante, es posible usar las posiciones y velocidades de las partículas en un tiempo arbitrario para calcular la dirección del plano invariable.

Llamamos **sistema natural de coordenadas** de un sistema de N cuerpos a aquel que tiene: 1) origen en el centro de masa y 2) plano  $x - y$  sobre el plano invariable de Laplace (ver Figura Figura 6.3.).)

Es importante insistir en que el vector que define la dirección del plano invariable de Laplace, no es, en general el vector en la Ec. (6.7) que, como vimos en la Sección 5.3.4 se puede escribir como:

$$\vec{L} = M \vec{R}_{CM} \times \vec{V}_{CM} + \sum m_i \vec{r}'_i \times \dot{\vec{r}}'_i.$$

El vector de la Definición 6.2, que es esencialmente el segundo término de la ecuación anterior, no tiene la misma dirección de  $\vec{L}$  debido al término  $M \vec{R}_{CM} \times \vec{V}_{CM}$  (momento angular del centro de masa.) Por lo tanto, es muy importante al construir el sistema de coordenadas natural, tener cuidado de asegurarse que las posiciones y velocidades de las partículas estén referidas al centro de masa.

### Un poco de historia

**El plano invariable del Sistema Solar.** Durante más de 100 años, los astrónomos han intentado encontrar la orientación del plano invariable del Sistema Solar. El esfuerzo no ha sido sencillo, en tanto durante en el mismo lapso, la masa de los cuerpos no siempre se ha conocido con precisión e incluso, cuerpos enteramente nuevos se descubren de vez en cuando.

La determinación más precisa de la orientación del plano invariable se hizo recientemente [26] y concluyó que este importante plano tiene una inclinación, respecto al plano del ecuador en el sistema ICRF (ver la ??) de  $23^\circ 0' 31''$ .9 y una longitude del nodo ascendente de  $3^\circ 51' 9''$ .4 (para una definición de estos ángulos ver la Sección 4.2.14.) Esto implica, que el plano invariable del Sistema Solar esta inclinado respecto al plano de la eclíptica de J2000.0 (que es muy importante en la mecánica celeste al usarse como el plano de referencia fundamental para el cálculo de posiciones planetarias) en un ángulo de  $1^\circ 34' 43''$ .3.

Usando SPICE podemos hacer una estimación de primer orden de la inclinación del plano invariable del Sistema Solar, respecto al sistema de la eclíptica de J2000.0 (ver la ??.) Para ello podemos asumir, por simplicidad, que el momentum angular total del sistema esta concentrado en el Sol y el planeta más masivo, Júpiter (entre los dos cuerpos concentran el 99.96 % de la masa del sistema.)

Para conseguirlo, primero debemos obtener de los kernels de SPICE, la masa, posición y velocidad de los cuerpos implicados en un *tiempo de efemérides* arbitrario (tomaremos  $t_{\text{ef}} = 0$  por comodidad):

(Algoritmo 6.1)

```
import spiceypy as spy

#Asumimos un tiempo cualquiera, en este caso t=J2000.0
tef=0

#Carga kernels con posiciones (bsp) y masas (tpc)
spy.furnsh('pymcel/data/de430.bsp')
spy.furnsh('pymcel/data/de430.tpc')

#Parámetro gravitacional, posiciones y velocidades de los cuerpos
musol=spy.bodvrd("SUN","GM",1)[1][0]
sol,tluz=spy.spkezr("SUN",tef,
                     "ECLIPJ2000","None","SSB")
rsol=sol[:3]
vsol=sol[3:]
mujupiter=spy.bodvrd("JUPITER_BARYCENTER","GM",1)[1][0]
jupiter,tluz=spy.spkezr("JUPITER_BARYCENTER",tef,
                         "ECLIPJ2000","None","SSB")
rjupiter=jupiter[:3]
vjupiter=jupiter[3:]
```

Sol:

$\mu = 132712440041.9394 \text{ km}^3/\text{s}^2$

```

Posición = [-1067598.50226456 -418234.39327422 30837.61810502] km
Velocidad = [ 0.00931257 -0.01282475 -0.00016333] km/s
Jupiter:
mu = 126712764.7999999 km^3/s^2
Posición = [ 5.97499980e+08 4.39186501e+08 -1.51960586e+07] km
Velocidad = [-7.90052522 11.14330827 0.13069904] km/s

```

Nótese que como señalamos antes nos hemos cuidado de calcular tanto la posición del Sol como de Júpiter, respecto al centro de masa (baricentro) del sistema solar (SSB por *Solar System Barycenter* en SPICE.)

Con esta información, el momento angular total del sistema será:

```

#Constante de gravitación universal:
G=6.67e-20 # km^3 / kg s^2

#Momentum angular total
from numpy import cross
L=(musol/G)*cross(rsol,vsol)+(mujupiter/G)*cross(rjupiter,vjupiter)

L = [4.31661898e+35 7.99455257e+34 1.92754426e+37] kg m^2/s^2

```

En el algoritmo anterior, para obtener la masa de cada cuerpo, hemos dividido el valor de los parámetros gravitacionales  $\mu$  por la constante  $G$  (en las unidades apropiadas.)

Con este resultado, la inclinación estimada del plano invariable del Sistema Solar, se obtiene, finalmente, calculando el ángulo formado entre el momento angular total y el eje z (que en SPICE es perpendicular al plano de la eclíptica de J2000.0), es decir,  $i = \cos^{-1}(L_z/L)$ :

```

from numpy import arccos
from numpy.linalg import norm

i=arccos(L[2]/norm(L))

i = 1.3046988768626038 grados
= 1:18:16

```

Aquí hemos usado la notación grados:minutos:segundos, más conveniente en el contexto de los algoritmos.

La inclinación obtenida,  $i = 1^\circ 18' 16''$ , difiere de la calculada con todos los cuerpos del Sistema Solar (ver el recuadro el *Un poco de historia, el plano invariable del Sistema Solar*) en casi 16 minutos de arco (que corresponde a un error relativo de un poco más del 17%). El lector podría obtener una estimación mejor de esta inclinación si incluye otros cuerpos en el cálculo (ver sección de problemas al final de este capítulo.)

### 6.2.5. Energía potencial de N cuerpos

Una manera alternativa de escribir la ecuación de movimiento del problema de los N cuerpos, es reconociendo que cada una las fuerzas gravitacionales que actúan sobre las partículas *derivan* de un potencial (son fuerzas conservativas). Así:

$$\left\{ m_i \ddot{\vec{r}}_i = -\frac{\partial}{\partial \vec{r}_i} \left( \sum_{j \neq i} m_j V_j \right) \right\}_N ,$$

donde  $V_j = -\mu_j / r_{ij}$  es el potencial gravitacional de la partícula  $j$  (ver 5.33), medido en la posición de la partícula  $i$ , y la *derivada vectorial*  $\partial / \partial \vec{r}_i$  es, por definición en este libro, una representación del operador gradiente,  $\vec{\nabla}_i$ , calculado con respecto a las coordenadas de la partícula  $i$  (ver la Sección 4.1.4).

Si introducimos lo que podemos llamar la *energía potencial gravitacional mutua*  $U_{ij} \equiv m_i V_j$  (ver Ec. 5.32), la ecuación de movimiento se puede escribir como:

$$\left\{ m_i \ddot{\vec{r}}_i = -\frac{\partial}{\partial \vec{r}_i} \left( \sum_{j \neq i} U_{ij} \right) \right\}_N , \quad (6.8)$$

Si bien, la función de energía potencia  $\sum_{j \neq i} U_{ij}$ , que aparece en el lado derecho de las Ecs. (6.8), es única para cada partícula del sistema, existe una interesante propiedad del problema de los  $N$  cuerpos (y otros problemas con *fuerzas de interacción centrales*) que permite calcular las fuerzas en el sistema, como el gradiente de una única función de energía potencial. Aunque esta propiedad es presentada como un resultado trivial en casi todos los libros de mecánica celeste, esta lejos de serlo por lo que profundizaremos un momento en ella.

Consideremos el caso particular de un sistema de tres cuerpos. En términos explícitos, las e.d.m. de este sistema (Ecs. 6.1) tienen la forma :

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{\vec{r}}_1 &= -\frac{m_1 \mu_2}{r_{12}^3} \vec{r}_{12} - \frac{m_1 \mu_3}{r_{13}^3} \vec{r}_{13} \\ m_2 \ddot{\vec{r}}_2 &= -\frac{m_2 \mu_1}{r_{21}^3} \vec{r}_{21} - \frac{m_2 \mu_3}{r_{23}^3} \vec{r}_{23} \\ m_3 \ddot{\vec{r}}_3 &= -\frac{m_3 \mu_1}{r_{31}^3} \vec{r}_{31} - \frac{m_3 \mu_2}{r_{32}^3} \vec{r}_{32} \end{aligned} \quad (6.9)$$

Nótese, por ejemplo, que las fuerzas  $\vec{F}_{12} = -m_1 \mu_2 \vec{r}_{12} / r_{12}^3$  y  $\vec{F}_{21} = -m_2 \mu_1 \vec{r}_{21} / r_{21}^3$ , en realidad pueden obtenerse de una sola energía potencial, a saber,  $U_{12} = -m_1 \mu_2 / r_{12}$ :

$$\begin{aligned} \vec{F}_{12} &= \partial_{\vec{r}_1} U_{12} \\ \vec{F}_{21} &= \partial_{\vec{r}_2} U_{12} \end{aligned}$$

La fuerza  $\vec{F}_{12}$  se obtiene de  $U_{12}$  si se deriva esta cantidad respecto a  $\vec{r}_1$ ; por su lado, la fuerza  $\vec{F}_{21}$  aparece deribando  $U_{12}$  respecto a  $\vec{r}_2$ . Una situación similar ocurre con los pares de fuerzas  $\vec{F}_{13}, \vec{F}_{31}$  y  $\vec{F}_{23}, \vec{F}_{32}$ .

Es decir, 6 fuerzas diferentes derivan, en realidad, de solo 3 términos de energía potencial:  $U_{12}, U_{13}$  y  $U_{23}$ . Explícitamente:

$$\begin{aligned}
 m_1 \ddot{\vec{r}}_1 &= -\frac{\partial U_{12}}{\partial \vec{r}_1} - \frac{\partial U_{13}}{\partial \vec{r}_1} \\
 m_2 \ddot{\vec{r}}_2 &= -\frac{\partial U_{12}}{\partial \vec{r}_2} - \frac{\partial U_{23}}{\partial \vec{r}_2} \\
 m_3 \ddot{\vec{r}}_3 &= -\frac{\partial U_{13}}{\partial \vec{r}_3} - \frac{\partial U_{23}}{\partial \vec{r}_3}
 \end{aligned} \tag{6.10}$$

Si reconocemos que  $\partial U_{23}/\partial \vec{r}_1 = \partial U_{13}/\partial \vec{r}_2 = \partial U_{12}/\partial \vec{r}_3$ , las e.d.m. se pueden escribir de forma más completa como:

$$\begin{aligned}
 m_1 \ddot{\vec{r}}_1 &= -\frac{\partial U_{12}}{\partial \vec{r}_1} - \frac{\partial U_{13}}{\partial \vec{r}_1} - \frac{\partial U_{23}}{\partial \vec{r}_1} \\
 m_2 \ddot{\vec{r}}_2 &= -\frac{\partial U_{12}}{\partial \vec{r}_2} - \frac{\partial U_{13}}{\partial \vec{r}_2} - \frac{\partial U_{23}}{\partial \vec{r}_2} \\
 m_3 \ddot{\vec{r}}_3 &= -\frac{\partial U_{12}}{\partial \vec{r}_3} - \frac{\partial U_{13}}{\partial \vec{r}_3} - \frac{\partial U_{23}}{\partial \vec{r}_3}
 \end{aligned} \tag{6.11}$$

Allí identificamos, finalmente, una sola función de energía potencial para todo el sistema:

$$U = U_{12} + U_{13} + U_{23}, \tag{6.12}$$

de la cual puede calcularse la fuerza sobre cualquier partícula del sistema usando la prescripción general:

$$\left\{ m_i \ddot{\vec{r}}_i = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}_i} \right\}_N \tag{6.13}$$

Esta es la forma más compacta de escribir las ecuaciones de movimiento del problema de los N cuerpos.

Estudie cuidadosamente las diferencias entre esta forma de las ecuaciones, que usa una sola función de energía potencial y la menos económica forma original escrita en las Ecs. (6.8).

### NOTA

**Motivación física de la energía potencial de N cuerpos.** La deducción que hicimos aquí de la energía potencial de tres cuerpos, es de naturaleza eminentemente matemática. Sin embargo, una vez obtenida, es posible dar a ella una interpretación que nos permite entender las razones físicas profundas por las que la energía potencial del sistema tiene en realidad un número restringido de términos.

Es claro, físicamente, que al cuantificar la energía total de interacción



### NOTA (Cont.)

de un sistema, solo debemos tener en cuenta *una vez* la contribución que cada pareja de partículas. Así, el sistema de partículas 1 y 2 contribuyen con  $U_{12}$  a la energía total, es obvio entonces que sumar a esa energía el término  $U_{21}$  sería redundante y físicamente incorrecto. Lo mismo pasa con las energías de interacción  $U_{13}$  que descartan la necesidad de incluir la  $U_{31}$  y la  $U_{23}$  que una vez sumada hace innecesario agregar la energía  $U_{32}$ .

Este razonamiento, es la razón *física* por la cual la función de energía potencial en la Ec. (6.12) total solo contiene tres términos (en lugar de 6 como podría intuirse de la forma de la Ec. 6.8).

¿Podría el lector generalizar este resultado a cuatro cuerpos? O más interesante aún, ¿podría ofrecer una fórmula general para el *número de términos* que tiene la función de energía potencial de un sistema de N cuerpos? (intente encontrar la respuesta antes de mirar el pie de nota)

*a*

<sup>a</sup>La respuesta está en la teoría combinatoria: el número de términos de la energía potencial es igual al número de combinaciones  $C_{N,k}$  en parejas ( $k = 2$ ) de N números (las partículas del sistema). Es un resultado bien conocido de la combinatoria que  $C_{N,k} = N!/[k!(N - k)!]$ . Así, por ejemplo, con  $N = 3$  y  $k = 2$ , el número de combinaciones es  $C_{3,2} = 3!/2! = 3$  que coincide con el ejemplo desarrollado aquí (ver Ec. 6.12.)

La energía potencial de N cuerpos  $U$ , que escribimos en la Ec. (6.12) para un sistema de tres partículas, puede ahora escribirse, en general, para un sistema de N cuerpos, de dos maneras diferentes:

1. Restringiendo las sumatorias:

$$U = - \sum_{i=1}^{i < j} \sum_{j=1}^{j=N} \frac{m_i \mu_j}{r_{ij}} \quad (6.14)$$

Una fórmula que se escribe en casi todos los textos y de forma simplificada como:

$$U = - \sum_{i < j} \frac{m_i \mu_j}{r_{ij}}$$

Esta expresión es relativamente simple, pero expandir las sumatorias, en la práctica, puede ser muy complicado (el lector puede intentar, por ejemplo, escribir la energía potencial de un sistema de cuatro cuerpos, usando la fórmula anterior y no el razonamiento físico que esbozamos en la última *Nota*.)

2. Sin restringir las sumatorias:

$$U = - \frac{1}{2} \sum_i \sum_{j \neq i} \frac{m_i \mu_j}{r_{ij}} \quad (6.15)$$

El factor  $1/2$  en el lado derecho, aunque extraño desde el punto de vista de la física, proviene del hecho de que al no restringir la sumatoria sobre la  $i$ , aparecerán los términos duplicados  $m_i \mu_j / r_{ij}$  y  $m_j \mu_i / r_{ji}$  que son exactamente iguales.

En lo que queda de este texto usaremos la parametrización de la Ec. (6.15).

### 6.2.6. Conservación de la energía

Si multiplicamos las Ecs. (6.13) por el factor integrante  $m_i \vec{r}_i$  (usando el producto punto o producto escalar) y sumamos sobre todas las partículas (como lo hemos hecho para obtener las otras constantes de movimiento) obtenemos:

$$\sum_i m_i \vec{r}_i \cdot \ddot{\vec{r}}_i = - \sum_i \vec{r}_i \cdot \frac{\partial U}{\partial \vec{r}_i}$$

El lado derecho de esta ecuación corresponde a la regla de la cadena (ver Ec. 4.17):

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\partial U}{\partial \vec{r}_1} \cdot \frac{d\vec{r}_1}{dt} + \frac{\partial U}{\partial \vec{r}_2} \cdot \frac{d\vec{r}_2}{dt} + \dots + \frac{\partial U}{\partial \vec{r}_n} \cdot \frac{d\vec{r}_n}{dt}$$

lo que permite conseguir el objetivo del factor integrante: escribir la ecuación diferencial en cuadraturas:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i^2 \right) = - \frac{dU}{dt}$$

De esta ecuación podemos identificar, finalmente, una nueva constante de movimiento en el problema de los N cuerpos:

$$\frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i^2 + U(\{\vec{r}_i\}) = E \quad (6.16)$$

Con  $U(\{\vec{r}_i\}) = (1/2) \sum_i \sum_{j \neq i} m_i \mu_j / r_{ij}$ .

Físicamente el valor de  $E$  corresponde a la energía mecánica total del sistema de N cuerpos y esta integral no es otra cosa que una expresión del teorema de conservación de la energía (ver Teo. 5.2) en la ausencia de fuerzas no conservativas.

### 6.2.7. Caso de estudio: el sistema Tierra-Luna

En un terreno más práctico, sería interesante, usar este resultado, para preguntarse, por ejemplo, cuánta energía *mecánica* existe en el sistema Tierra-Luna.

Para ello podemos apoyarnos otra vez de SPICE, como lo hicimos antes para calcular el momentum angular del sistema Sol-Jupiter (ver Algoritmo 6.1):

(Algoritmo 6.2)

```
import spiceypy as spy

# Constante de gravedad universal
G=6.67e-20 # km^3 / kg s^2
```

```
#Asumimos un tiempo cualquiera, en este caso t=J2000.0
tef=0

#Carga kernels con posiciones (bsp) y masas (tpc)
spy.furnsh('pymcel/data/de430.bsp')
spy.furnsh('pymcel/data/de430.tpc')

#Parámetro gravitacional, posiciones y velocidades
mutierra=spy.bodvrd("EARTH","GM",1)[1][0]
tierra,tluz=spy.spkezr("EARTH",tef,
                        "ECLIPJ2000","None","EARTH_BARYCENTER")
rtierra=tierra[:3]
vtierra=tierra[3:]

muluna=spy.bodvrd("MOON","GM",1)[1][0]
luna,tluz=spy.spkezr("MOON",tef,
                      "ECLIPJ2000","None","EARTH_BARYCENTER")
rluna=luna[:3]
vluna=luna[3:]
```

Una diferencia importante entre este algoritmo y el que vimos para el cálculo del momentum angular, es que las posiciones y velocidades de la Tierra y la Luna, son calculadas respecto a la posición del centro de masa del sistema (EARTH\_BARYCENTER) en lugar de hacerlo respecto del baricentro del sistema solar (SSB). Si bien, nada en la Ec. (6.16) nos dice que la energía mecánica total solo se conserva en el sistema de referencia del centro de masa, nuestra interpretación del valor de esta cantidad será más fácil allí. El lector puede intentar hacer el cálculo relativo al baricentro del sistema solar y comparar con el resultado obtenido aquí.

La energía mecánica total del sistema, será entonces:

(Algoritmo 6.3)

```
#Masas
mtierra=mutierra/G
mluna=muluna/G

#Energía potencial
from numpy.linalg import norm
U=-G*mluna*mtierra/norm(rtierra-rluna)

#Energía cinética
K=0.5*mutierra*norm(vtierra)**2+0.5*mluna*norm(vluna)**2

#Energía mecánica total
E=K+U
```

```
print(f"Energía potencial U: {U} kg km^2/s^2")
print(f"Energía cinética K: {K} kg km^2/s^2")
print(f"Energía mecánica total E: {E} kg km^2/s^2")
```

Energía potencial U: -7.369786503549795e+22 kg km^2/s^2

Energía cinética K: 3.4021556025880696e+22 kg km<sup>2</sup>/s<sup>2</sup>

Energía mecánica total E: -3.967630900961725e+22 kg km<sup>2</sup>/s<sup>2</sup>

¿Qué significa que la energía mecánica total del sistema Tierra-Luna sea negativa?

Como lo comentamos en la Sección 5.2.12 el signo negativo de la energía potencial gravitacional (responsable aquí del signo negativo de E) se debe a que escogimos el valor de la constante C en la Ec. (5.30) como cero.

Siguiendo un razonamiento similar al que usamos en esa sección para explicar físicamente el significado de esta elección arbitraria (y por tanto el signo de U), podemos decir aquí que el valor de |E| en el sistema Tierra-Luna y en general en cualquier sistema de dos cuerpos, es el trabajo *mínimo* requerido para separar a la Tierra y a la Luna a una distancia inmensa. O, en términos *escatológicos*, |E| es la energía mínima necesaria para destruir la unión entre nuestro planeta y su eterna compañera.

No es difícil mostrar (ver problemas al final del capítulo) que esta energía es igual a la energía cinética de un cuerpo con la masa de la Luna moviéndose a  $\sim \$1$  km/s relativa al centro de masa del sistema. Es decir, una colisión *elástica* con un cuerpo gemelo de la Luna podría hacer el trabajo de separarnos de ella<sup>28</sup>.

Para hacernos ahora a una idea más cercana del valor de esta energía, las unidades de energía utilizadas aquí, kg km<sup>2</sup>/s<sup>2</sup>, que siguen la convención en SPICE de usar km como unidad de longitud, no son las más convenientes. Para convertirlas a las unidades del sistema internacional, los joules, J = kg m<sup>2</sup>/s<sup>2</sup>, basta multiplicar las energías obtenidas anteriormente por un factor de conversión de 10<sup>6</sup>.

En conclusión podemos decir que (el valor absoluto de) la energía mecánica total del sistema Tierra-Luna es  $4 \times 10^{28}$  j. Esta energía es aproximadamente igual a la energía consumida por toda la humanidad en casi 2 millones de años<sup>29</sup>.

### 6.2.8. Síntesis y teorema de Bruns

Hasta aquí hemos identificado las siguientes constantes de movimiento (cuadraturas) del problema de N cuerpos:

$$\begin{aligned} \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i &= \vec{P}_{CM} \\ \sum_i m_i \vec{r}_i - \vec{P}_{CM} t &= M \vec{R}_{CM} \\ \sum m_i \vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i &= \vec{L} \\ \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\vec{r}}^2 + U(\{\vec{r}_i\}) &= E \end{aligned} \quad (6.17)$$

Las tres primeras son formas compactas (vectoriales) de expresar, cada una, tres constantes diferentes, de modo que, en total, tenemos hasta ahora 10 ecuaciones algebraicas (escalares) que relacionan las 6N cantidades desconocidas  $\{x_i(t), y_i(t), z_i(t)\}_N, \{\dot{x}_i(t), \dot{y}_i(t), \dot{z}_i(t)\}_N$ .

Es claro que nos falta mucho trabajo por hacer si queremos resolver incluso el problema más simple (con N=2, necesitaríamos por lo menos 12 cuadraturas para resolver el sistema.)

<sup>28</sup>En la vida real la colisión mencionada sería *inelástica*, es decir una buena parte de la energía cinética de la se convertiría inicialmente en calor y destruiría a la Luna y al impactor

<sup>29</sup>[https://en.wikipedia.org/wiki/World\\_energy\\_consumption](https://en.wikipedia.org/wiki/World_energy_consumption)

En el año 1887 el destacado matemático Ernst Heinrich Bruns, en un artículo titulado *Sobre las integrales del problema de varios cuerpos* [8] demostró que, al menos para el problema de los tres cuerpos, no existen otras primeras integrales de movimiento que puedan expresarse en términos de funciones algebraicas de las posiciones y velocidades de las partículas.

En el año 2000, este resultado fue generalizado a sistemas con un número arbitrario de partículas y de dimensiones espaciales, constituyéndose en lo que se conoce hoy como el poderoso **teorema de Bruns generalizado** [17]:

### Teorema 6.1

**Teorema de Bruns generalizado.** En el problema newtoniano de  $(M+1)$  cuerpos en  $\mathbb{R}^p$ , con  $M \geq 2$  y  $1 \leq p \leq M + 1$ , toda primera integral que es algebraica respecto a las posiciones, el momento lineal y el tiempo, es una función algebraica de las primeras integrales clásicas: la energía, las  $p(p-1)/2$  componentes del momento angular, y las  $2p$  constantes que vienen del movimiento lineal uniforme del centro de masa.

En el caso particular que hemos estudiado aquí en el que las partículas se mueven en tres dimensiones, es decir en  $\mathbb{R}^3$  o bien  $p = 3$ , según el teorema generalizado de Bruns, las únicas integrales de movimiento *independientes* son: (1) la energía, (2,3,4)  $p(p-1)/2 = 3(3-1)/2 = 3$  componentes del momento angular y (5,6,7,8,9 y 10)  $2p = 6$  constantes del movimiento lineal uniforme del centro de masa (3 para el momento lineal y 3 para la posición inicial del centro de masa.)

Es decir, para problemas de  $N$  cuerpos en 3 dimensiones las 10 cuadraturas escritas en las Ecs. (6.17) son las únicas que podemos encontrar.

Este resultado parece desesperanzador dado que implica que por mucho que lo intentemos, no podemos obtener el número de constantes necesarias para expresar el problema de los  $N$  cuerpos como un conjunto completo de cuadraturas.

Esto, sin embargo, no significa, de un lado, que las cuadraturas obtenidas no puedan enseñarnos cosas muy interesantes sobre los sistemas de  $N$  cuerpos (como ilustraremos en la siguiente sección y en el ??.)

Del otro lado, y más importante aún, la limitación impuesta por el teorema de Bruns, no implica necesariamente que el problema no tenga solución: el hecho de no encontrar cuadraturas suficientes solo significa que una solución algebraica es imposible.

En realidad, y contrario a la “mitología tradicional”, el problema de los  $N$  cuerpos, al menos en el caso de sistemas con momento angular cero, tiene solución en series, como lo exigía el concurso del Rey Oscar II (ver el recuadro *Un poco de historia, la solución al problema de los  $N$  cuerpos.*) Dicha solución, que no presentaremos en este libro por razones del nivel matemático exigido (el lector avanzado puede ir directamente a la literatura especializada), sin embargo, converge muy lentamente y se necesitan normalmente millones de términos para aproximar la posición de las partículas incluso en intervalos de tiempo extremadamente cortos [12].

### Un poco de historia

**La solución al problema de los N cuerpos.** En el año 1990, casi exactamente 100 años después de la formulación del problema en el concurso del Rey Oscar II, el matemático chino Wang Qiu-Dong [24] y, antes de él (posiblemente) el ruso L. K. Babadzhaniants ([3], [4]) demostraron la existencia de una solución al problema de N cuerpos, con las condiciones expresadas en el problema original (ver la [Sección 6.1](#)), al menos para el caso de un sistema con momentum angular total nulo. Con este resultado, Wang y Babadzhaniants habrían extendido el resultado obtenido en 1912 por Karl Sundman, quién probó la existencia de dicha solución existe en el caso de  $N=3$ , incluso en sistemas con un momento angular no nulo. Esto es lo más cerca que la ciencia ha estado de resolver analíticamente el problema de los N cuerpos.

El obstáculo que en la solución práctica al problema de los N cuerpos representan, de un lado el teorema de Bruns y del otro la lenta convergencia de las series descubiertas en el último siglo para la solución general al problema, nos llevará, en las siguientes secciones y en los capítulos que les siguen a desarrollar aproximaciones teóricas al problema de los N cuerpos. Estas aproximaciones nos permitirán formular explicaciones del comportamiento de sistemas astronómicos reales o realizar predicciones precisas requeridas para hacer observaciones astronómicas o controlar el movimiento de vehículos espaciales.

En pocas palabras, los esfuerzos para vencer los obstáculos matemáticos y físicos que enfrentamos en la solución al problema de los N cuerpos, representan la mayor parte de lo que conocemos hoy como mecánica celeste.

## 6.3. Energía y virial

En la [Sección 6.2.7](#) le pusimos números a una de las más importantes constantes de movimiento en el problema de los N cuerpos: la Energía.

Para hacerlo, calculamos la energía mecánica total del sistema Tierra-Luna y encontramos, contra toda intuición, que era negativa. La interpretación física de este resultado indica que *hace falta* energía para separar a la Tierra y la Luna a una distancia enorme; o dicho en otros términos, que *el valor negativo de la energía de un sistema de dos partículas indica que la distancia entre ellas está acotada y forman un sistema ligado*.

Este interesante resultado, aunque parece obvio, es evidencia de una afirmación que hemos repetido a lo largo de este capítulo: las constantes de movimiento o integrales en el problema de los N cuerpos, pueden no proveer toda la información necesaria para saber dónde estarán las cuerpos en el futuro, pero ofrecen pistas útiles sobre el destino del sistema.

¿Podríamos generalizar la interpretación del signo de la energía en el sistema Tierra-Luna a sistema formados por un número arbitrario de partículas?

### 6.3.1. Momento de inercia

Para responder a esta última pregunta deberíamos identificar o definir primero una cantidad física que nos ayude a evaluar la afirmación “*las partículas se encuentran a una distancia finita*”.

No es difícil descubrir que el momento de inercia total  $I$  del sistema puede cumplir esta función. Para una nube de partículas,  $I$  está definido como<sup>30</sup>:

$$I \equiv \sum_i m_i r_i^2 \quad (6.18)$$

En términos de esta cantidad podemos decir que el sistema tenderá a disgregarse, si para  $t \rightarrow \infty$ , también  $I \rightarrow \infty$ . Al contrario, el sistema colapsará totalmente, si, en algún tiempo finito  $t_c$ , el momento de inercia  $I \rightarrow 0$ . Un sistema *ligado* (que no se disgrega, ni colapsa), será aquel que se encuentra entre estos dos extremos.

¿Cómo evoluciona  $I$  con el tiempo?

Podemos saberlo si encontramos sus primeras derivadas respecto al tiempo:

$$\dot{I} = 2 \sum_i m_i \vec{r}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i$$

Esta primera derivada tiene una propiedad interesante: en una misma cantidad combina, tanto información sobre la posición de las partículas como sobre su velocidad.

Si definimos:

$$G \equiv \sum_i m_i \vec{r}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i \quad (6.19)$$

entonces:

$$\dot{I} = 2G \quad (6.20)$$

A la “luz” de la función  $G$ , es más razonable definir un sistema ligado como aquel en el que simultáneamente la posición y la velocidad de las partículas están acotadas. En términos de  $G$ :

$$G_{\min} \leq G \leq G_{\max} \quad (6.21)$$

### 6.3.2. El virial

¿Cómo convertir la condición (??), que define a un sistema ligado, en una condición sobre la energía del sistema?

No es difícil reconocer que la tasa de cambio de  $G$ ,  $\dot{G}$ , incluirá términos proporcionales a la energía cinética, que es justamente lo que buscamos:

$$\begin{aligned} \dot{G} &= \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i^2 + \sum_i \vec{r}_i \cdot (m_i \ddot{\vec{r}}_i) \\ &= 2K - \sum_i \vec{r}_i \cdot \vec{F}_i \end{aligned} \quad (6.22)$$

En esta expresión aparece una cantidad nueva:

---

<sup>30</sup>La definición del momento de inercia aparece originalmente en la mecánica newtoniana al estudiar la cinemática y dinámica del movimiento de cuerpos rígidos.

$$\mathcal{V} = \sum_i \vec{r}_i \cdot \vec{F}_i,$$

que depende de las fuerzas que experimentan las partículas del sistema instantáneamente.

$\mathcal{V}$  no tuvo una utilidad reconocida previamente en la mecánica newtoniana hasta 1870 cuando Rudolf Clausius [10] estudiaba la teoría mecánica de los gases y el calor. Por su relación con la fuerza, cuya palabra en latín es *vis* (con acusativo *viris*), Clausius llamó a  $\mathcal{V}$  el “virial” del sistema<sup>31</sup>.

### 6.3.3. Identidad de Lagrange-Jacobi

En el caso del problema de N partículas que interactúan a través de la fuerza gravitacional Newtoniana (Ec. 6.13)  $\{\vec{F}_i = \partial_{\vec{r}_i} U\}$ , el virial viene dado por

$$\mathcal{V} = \sum_i \vec{r}_i \cdot \vec{F}_i = - \sum_i \vec{r}_i \cdot \partial_{\vec{r}_i} U \quad (6.23)$$

Es posible demostrar (ver problemas al final del capítulo) que la  $U(\{\vec{r}_i\})$  definida por la Ec. (6.15) es una función homogénea con  $k = -1$  (ver Def. ??).

Por lo tanto, por el Teo. ?? el virial de un sistema de N cuerpos es simplemente igual a su energía potencial:

$$\mathcal{V} = - \sum_i \vec{r}_i \cdot \partial_{\vec{r}_i} U = U$$

Aplicando este resultado a la Ec. (6.22) obtenemos la denominada **Identidad de Lagrange-Jacobi**:

$$\begin{aligned} \dot{G} &= 2K + U \\ &= 2E - U \\ &= K + E \end{aligned} \quad (6.24)$$

Donde, para la segunda y tercera forma de la identidad, hemos usado el hecho conocido que  $E = K + U$ .

En virtud de la relación expresada por la Ec. (6.20), una forma alternativa de esta identidad, muy común en la literatura pero más oscura en términos del significado de las cantidades involucradas es:

$$\ddot{I} = 4K + 2U$$

No podemos perder de vista para donde vamos: nuestro propósito era estudiar la posible relación existente entre la energía mecánica total de un sistema y el hecho de que sea un sistema ligado o no.

Para ello, consideremos la última forma de la identidad de Lagrange-Jacobi,

$$\dot{G} = K + E.$$

---

<sup>31</sup>En realidad el “virial” original de Clausius, por razones que de verán en la Sección 6.3.4 es  $\langle \mathcal{V} \rangle / \epsilon$ , donde  $\langle \mathcal{V} \rangle$  es el promedio de esta cantidad en un intervalo de tiempo muy largo.

Dado que por definición  $K \geq 0$ , si la energía mecánica total del sistema es  $E \geq 0$ , los valores (constantes) de  $\dot{G}$  y de  $\dot{I}$  serán siempre positivos. Por lo tanto, ambos,  $G$  e  $I$ , independientemente de sus valores iniciales, crecerán indefinidamente y el sistema tenderá a disgregarse (no será un sistema ligado)<sup>32</sup>

Por otro lado si  $E < 0$ , los signos de  $\dot{G}$  e  $\dot{I}$ , dependerán de la comparación entre  $K$  y  $|E|$ . Sin embargo como el valor de  $K$  es variable en el tiempo (recordemos que solo  $E$  es constante), no hay manera de predecir, trivialmente, si el sistema estará ligado o no.

En otras palabras,  $E < 0$  es una condición necesaria (puesto que  $E \geq 0$  implica un sistema no ligado), mas no suficiente para que un sistema de  $N$  cuerpos sea ligado.

### 6.3.4. Teorema del virial

Puede que no sepamos cuánto vale la energía cinética de un sistema de  $N$  cuerpos en un momento dado (para evaluar por ejemplo el signo de  $\dot{G}$  en la identidad de Lagrange-Jacobi), pero podríamos averiguar si esta acotada por un valor máximo y si valor es finito.

Una manera de hacerlo es calcular el *promedio asintótico* de  $K(t)$ , que definimos como:

$$\langle K \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T K(t) dt$$

Un sistema en el que la energía cinética tampoco esté acotada, para algún tiempo  $t$ , es decir  $K \rightarrow \infty$ , tendrá un valor promedio de la energía cinética  $\langle K \rangle \rightarrow \infty$  y posiblemente, en virtud de las identidades de Lagrange-Jacobi no sea tampoco un sistema acotado.

Ahora bien, por la identidad de Lagrange-Jacobi (Ec. {eq:identidad\_lagrange\_jacobi}):

$$\langle \dot{G} \rangle = 2\langle \dot{K} \rangle + \langle \dot{U} \rangle$$

pero:

$$\langle \dot{G} \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \dot{G} dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \left( \frac{G(T) - G(0)}{T} \right)$$

donde usamos el teorema fundamental del cálculo (ver Teo. 4.4.)

Ahora bien si  $G$  está acotada, es decir si  $G_{\min} \leq G(t) \leq G_{\max}$

$$\langle \dot{G} \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \left( \frac{G(T) - G(0)}{T} \right) \leq \lim_{T \rightarrow \infty} \left( \frac{G_{\max} - G_{\min}}{T} \right) = 0$$

Lo que conduce a uno de los más importantes teoremas de la dinámica de sistemas de muchas partículas:

---

<sup>32</sup>Es interesante anotar que para que  $I$  crezca indefinidamente, basta que al menos una partícula, por ejemplo la partícula  $k$ , escape del sistema, esto es que  $r_k \rightarrow \infty$  cuando  $t \rightarrow \infty$ .

### Teorema 6.2

**Teorema del virial.** Si en un sistema de N cuerpos se define la cantidad física  $G \equiv \sum_i m_i \vec{r}_i \cdot \vec{\dot{r}}_i$ , la condición  $G_{\max} \leq G \leq G_{\min}$  ( $G$  esta acotada) es necesaria y suficiente<sup>a</sup> para que el promedio asintótico de las funciones de energía potencial  $U$  y energía cinética  $K$ , satisfagan:

$$\langle U \rangle = -2\langle K \rangle \quad (6.25)$$

o equivalentemente:

$$E = -\langle K \rangle \quad (6.26)$$

Donde  $\langle f \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} (1/T) \int_0^T f(t) dt$

<sup>a</sup>La condición de que  $G$  este acotada es demasiado restringente. Es posible mostrar, por ejemplo, que en el caso de un sistema de dos cuerpos que se mueven sobre una parábola, también se cumple el teorema del Virial. Por lo tanto, existe una condición mucho más general y satisfactoria para formular el teorema que puede encontrarse en [22, ?]. Esta condición sin embargo no afecta las conclusiones que obtenemos en este libro para sistemas generales

Puesto en palabras más llanas, en un sistema de N cuerpos ligado, es decir aquel en el que las posiciones y velocidades están acotadas, el negativo del promedio asintótico de la energía cinética es igual a la energía mecánica total. O bien, como es más común encontrarlo en la literatura:

$$\langle K \rangle = -\frac{1}{2}\langle U \rangle \quad (6.27)$$

Aunque las consecuencias del teorema del virial son interesantes, sus aplicaciones prácticas en mecánica celeste, especialmente al estudiar sistemas de pocas partículas, no son muchas. Sin embargo cuando se estudian, tanto en astronomía como en física, sistemas con un número significativo de partículas ( $N \rightarrow \infty$ ), las implicaciones pueden ser muy útiles como veremos en el siguiente caso de estudio.

#### 6.3.5. Caso de estudio: el virial del Sistema Solar

Podemos comprobar el teorema del virial en el caso del sistema Solar, tomando los cuerpos más masivos del sistema y en los que asumimos se concentra la mayor parte de la energía cinética y potencial gravitacional del sistema: El Sol, Júpiter y Saturno.

Para ello, podemos usar como base los Algs. (6.2,6.3), con la diferencia que ahora debemos calcular las posiciones y velocidades de los cuerpos no en uno, sino en muchos tiempos (valores que nos servirán para calcular los promedios.) El siguiente algoritmo prepara la información básica requerida para nuestro cálculo:

```
#Constante de gravedad universal
G=6.67e-20 # km^3 / kg s^2

#Carga kernels con posiciones (bsp) y masas (tpc)
import spiceypy as spy
```

```

spy.furnsh('pymcel/data/de430.bsp')
spy.furnsh('pymcel/data/de430.tpc')

#Número de valores de tiempo
Nt=100

#Lista de tiempos en los que calcularemos el virial:
#Tomamos 60 años que es aprox. 2 veces el periodo de Saturno
from numpy import linspace
tefs=linspace(0.0,60*356.25*86400,Nt)

#Masas de los cuerpos
msol=spy.bodvrd("SUN","GM",1)[1][0]/G
mjupiter=spy.bodvrd("JUPITER_BARYCENTER","GM",1)[1][0]/G
msaturno=spy.bodvrd("SATURN_BARYCENTER","GM",1)[1][0]/G

```

Con estos datos en mano podemos calcular ahora la energía cinética del sistema, la energía potencial (Ec. 6.12) y la energía total, para cada valor del tiempo escogido. Una vez calculadas estas cantidades podemos determinar su valor promedio:

```

from numpy.linalg import norm
Ks=[]
Us=[]
Es=[]
for tef in tefs:
    #Posiciones, velocidades, energías cinéticas
    sol,tluz=spy.spkezr("SUN",tef,
                         "ECLIPJ2000","None","SSB")
    rsol=sol[:3]
    vsol=sol[3:]
    K_sol=0.5*msol*norm(vsol)**2

    jupiter,tluz=spy.spkezr("JUPITER_BARYCENTER",tef,
                           "ECLIPJ2000","None","SSB")
    rjupiter=jupiter[:3]
    vjupiter=jupiter[3:]
    K_jup=0.5*mjupiter*norm(vjupiter)**2

    saturno,tluz=spy.spkezr("SATURN_BARYCENTER",tef,
                           "ECLIPJ2000","None","SSB")

    rsaturno=saturno[:3]
    vsaturno=saturno[3:]
    K_sat=0.5*msaturno*norm(vsaturno)**2

    #Distancias entre los cuerpos
    r_jup_sol=norm(rjupiter-rsol)
    r_sat_sol=norm(rsaturno-rsol)
    r_jup_sat=norm(rjupiter-rsaturno)

```

```

#Energia potencial
U_jup_sol=-G*mjupiter*msol/r_jup_sol
U_sat_sol=-G*msaturno*msol/r_sat_sol
U_jup_sat=-G*mjupiter*msaturno/r_jup_sat

#Energía cinética, potencial y mecánica
Ktot=K_sol+K_jup+K_sat
U=U_jup_sol+U_sat_sol+U_jup_sat
E=Ktot+U

#Guarda valores en la lista
Ks+=[Ktot]
Us+=[abs(U)]
Es+=[abs(E)]

```

$K = 1.883839013581885e+29 \text{ kg km}^2/\text{s}^2$   
 $U/2 = -1.8840677890439464e+29 \text{ kg km}^2/\text{s}^2$   
 $E = -1.8842965645060087e+29 \text{ kg km}^2/\text{s}^2$

Como vemos, las tres cantidades coinciden (con un margen de error del 0.1 %) con lo esperado a partir del teorema del Virial.

Podemos también hacer un gráfico de  $K$  (lista  $Ks$ ),  $|U|$  (lista  $Us$ ) y  $|E|$  (lista  $Es$ ):

(Algoritmo 6.4)

```

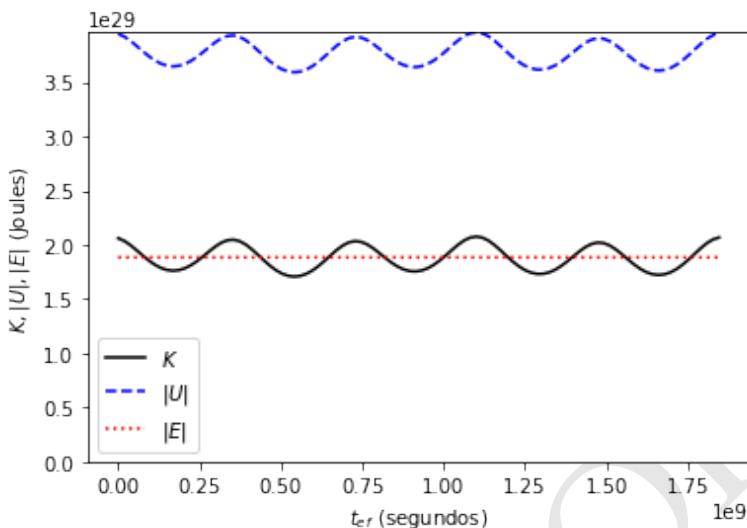
from numpy import max
import matplotlib.pyplot as plt
plt.plot(tefs,Ks,'k-',label="$K$")
plt.plot(tefs,Us,'b--',label="$|U|$")
plt.plot(tefs,Es,'r:',label="$|E|$")

```

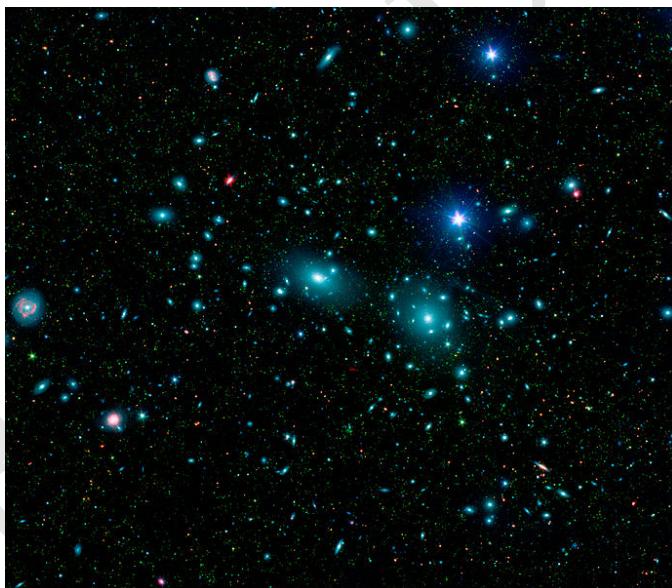
ver Figura 6.4

Como podemos ver en la Figura 6.4, los resultados coinciden otra vez con nuestras expectativas:

- La energía total  $E$  (línea punteada) es constante, confirmando la validez del teorema de conservación de la energía mecánica en el Sistema Solar.
- El valor promedio de la energía cinética del sistema (promedio de la línea continua) es igual al valor absoluto de la energía total, lo que confirma el teorema del Virial (Ec. 6.26).
- El valor absoluto del promedio de la energía potencial del sistema (promedio de la línea rayada), es el doble que el promedio de la energía cinética, lo que confirma también el teorema del Virial (Ec. 6.25).



**Figura 6.4:** Figura correspondiente al código 6.4.



**Figura 6.5:** Mosaico en falso color del cúmulo de Galaxias de Coma que combina imágenes en luz visible e infrarrojo. Crédito: NASA / JPL-Caltech / L. Jenkins (GSFC).

### 6.3.6. Caso de estudio: la masa de cúmulos de galaxias

Otro interesante caso de aplicación del teorema del virial en astronomía, tiene que ver con el estudio la distribución de masa en cúmulos de estrellas y galaxias.

Se dice que un cúmulo de galaxias, estrellas o simplemente de “partículas” de materia oscura, esta “virializado”, si ha alcanzado un estado dinámico en el cuál

el teorema del virial describe apropiadamente los promedios estadísticos de sus propiedades cinemáticas (velocidades y posiciones.) En virtud de las condiciones del Teo. (6.2), esto significa, esencialmente, que el sistema es ligado o estable a largo plazo.

Si asumimos que las partículas del cúmulo tienen una distribución esférica con una densidad aproximadamente uniforme y con un radio característico  $R_{\text{vir}}$  (dentro del cual hay una masa  $M_{\text{vir}}$ ), la energía potencial promedio del cúmulo será igual a:

$$\langle U \rangle = -\frac{3GM_{\text{vir}}^2}{5R_{\text{vir}}}$$

Por su parte si asumimos que todas las partículas tienen la misma masa, el promedio de la energía cinética total será:

$$\langle K \rangle = \frac{1}{2}M_{\text{vir}}\langle v^2 \rangle$$

Usando el teorema del virial obtenemos:

$$\frac{3GM_{\text{vir}}}{5R_{\text{vir}}} = \langle v^2 \rangle \quad (6.28)$$

Si se puede estimar o medir el radio del sistema y el promedio del cuadrado de las rapideces de las partículas, la masa se puede de un cúmulo se puede estimar usando:

$$M_{\text{vir}} = \frac{5R_{\text{vir}}\langle v^2 \rangle}{3G}$$

En el algoritmo a continuación estimamos la masa de virial del cúmulo de Co-ma (ver Figura 6.5) para el cuál se ha estimado que  $R_{\text{vir}} \approx 2 \times 10^6$  pc (parsecs<sup>33</sup>) y  $\langle v^2 \rangle^{1/2} \approx 1,000$  km/s (datos obtenidos de [14] y [27] respectivamente):

(Algoritmo 6.5)

```
#Constante gravitacional
G=6.67e-20 # km^3 / kg s^2

#Parsec y año-luz
pc=3.26
al=9.46e12 #km

#Radio del viral
Rvir=2e6*pc*al

#Dispersión de velocidades
v2=1000**2

#Masa del virial del cúmulo
Mvir=5*Rvir*v2/(3*G)
```

<sup>33</sup>1 parsec = 3.26 a.l., 1 año-luz =  $9,46 \times 10^{12}$  km

Masa del virial del cúmulo de Coma:

1.5412093953023487e+45 kg

Que equivale a  $\sim 7 \times 10^{14} M_{\odot}$  ( $1 M_{\odot} \approx 2 \times 10^{30}$  kg), o lo que es lo mismo a la masa de las estrellas y el gas de unas 10.000 galaxias típicas.

### Un poco de historia

**Fritz Zwicky, el teorema del virial y la materia oscura.** La estimación de la masa del cúmulo de Coma, usando el teorema del virial, que presentamos aquí, reproduce el trabajo del reconocido astrónomo suizo Fritz Zwicky (“[Fritz tsviky](#)”<sup>a</sup>), uno de los primeros en aplicar el teorema en Astronomía.

En 1933, Zwicky presentó en la revista Suiza *Helvetica Physica Acta* un artículo titulado “*El desplazamiento al rojo de las nebulosas extragalácticas*”. En este artículo, usando estimaciones del número y la masa de las galaxias del Cúmulo (que midió a partir de su luminosidad), así como medidas de su radio aproximado, Zwicky calculó la dispersión de velocidades  $\langle v^2 \rangle$  con la Ec. (6.28).

Para su sorpresa las velocidades típicas estimadas con el teorema del virial para las galaxias en el cúmulo,  $\langle v^2 \rangle^{1/2} \approx 80$  km/s, eran casi 10 veces menores que las que se obtenían al medir el corrimiento espectral de la luz de las galaxias. Es decir, las galaxias reales se estaban moviendo tan rápido en el cúmulo que este sistema no podría estar ligado (satisfacer el teorema del virial).

Otra posibilidad era que la masa usada en la Ec. (6.28) y que el supuso podía estimar a partir de la materia luminosa de las galaxias, fuera en realidad 10 veces mayor. Esto implicaba la existencia de una forma de materia invisible (que no emite luz) y que Zwicky llamó en su artículo en alemán *dunkle Materie* o Materia oscura.

En 1937, Zwicky publicó, en inglés, una versión extendida de su trabajo en la prestigiosa revista americana *The Astrophysical Journal* ([30]), donde estimó la masa del cúmulo, a partir de la dispersión de velocidades medida, siguiendo un procedimiento similar al desarrollado aquí. El resultado confirmó sus estimaciones de 1933: el cúmulo de Coma, que contiene unas  $\sim 1000$  galaxias, tiene una masa equivalente a  $\sim 10000$  galaxias (tal y como estimamos en el Algoritmo ??.) Es decir el contenido de materia oscura del cúmulo, supera por un factor de  $\sim 10$  el de materia luminosa (estrellas y nubes de gas).

Hoy la existencia de la materia oscura es soportada por un gran número de observaciones diferentes (curvas de rotación de galaxias, formación de grandes estructuras, lentes gravitacionales, etc.) pero su naturaleza física (en el tiempo de Zwicky se sospechaba que podría ser simplemente materia convencional poco luminosa) ha escapado a los más sesudos esfuerzos teóricos y a las más delicadas búsquedas experimentales. A la fecha de preparación de este libro el misterio de la composición de la materia oscura, cuya existencia fue sugerida por una ingeniosa aplicación del teorema del virial, sigue abierto.

### Un poco de historia (Cont.)

<sup>a</sup><https://es.forvo.com/search/Fritz%20Zwicky/en/>

## 6.4. Solución numérica

Como mencionamos en la Sección 6.1, contrario a lo que dice el mito popular, para finales de los 1900, el problema de los N cuerpos había sido resuelto finalmente [28],[24],[4]. Es decir, hoy conocemos series convergentes que permiten calcular con precisión arbitraria la posición y velocidad de un número cualquiera de partículas siempre y cuando su momento angular total sea cero; o de hasta tres partículas si el momento angular es distinto de cero [28]. Sin embargo, la convergencia de esas series es tan lenta que en términos prácticos su utilidad es casi nula. Más allá entonces de demostrar que la solución analítica es posible, estos trabajos no resolvieron el problema, también urgente, de encontrar fórmulas que puedan usarse en situaciones reales para predecir la posición de un sistema de partículas que interactúan gravitacionalmente.

Hoy por hoy, el método más utilizado por los astrónomos e ingenieros aeroespaciales para la solución al problema de los N cuerpos en mecánica celeste consiste en resolver numéricamente las ecuaciones de movimiento del sistema. En las próximas secciones exploraremos algunos algoritmos, métodos y herramientas para obtener dicha solución y que serán de utilidad en el resto del libro.

Si bien podría pensarse que presentar en este punto del libro la solución numérica al problema de los N cuerpos agota el problema y reduce la mecánica celeste a la aplicación de un conjunto de técnicas numéricas, nada está en realidad más lejos de la verdad. Como veremos en los próximos capítulos, aún en la ausencia de una solución analítica práctica y en presencia de poderosos métodos numéricos para aproximar la solución para configuraciones arbitrarias de cuerpos, existen muchos resultados teóricos de interés que permiten describir analíticamente una amplia diversidad de sistemas físicos. La introducción de métodos numéricos en esta parte del libro tiene el propósito de proveernos un conjunto de poderosas herramientas que permitieran poner a prueba los desarrollos teóricos del resto del libro.

De alguna manera, las herramientas introducidas aquí nos permitirán construir laboratorios virtuales de mecánica celeste para poner a prueba nuestras ideas teóricas. Un laboratorio del que lamentablemente no disponíamos en la naturaleza antes del advenimiento de los computadores.

### 6.4.1. Unidades canónicas

La fuerza gravitacional es la fuerza más débil del Universo. Por esta razón el valor de la constante que determina su intensidad  $G$  es muy pequeño, por lo menos cuando es medido en las unidades que hemos definido en la vida cotidiana para los patrones de longitud, tiempo y masa. En el Sistema Internacional  $G \sim 10^{-10}$  (en lo sucesivo  $\sim$  no se usará para indicar el valor aproximado de una cantidad, sino su *orden de magnitud*.)

De otro lado, en Astronomía, las cantidades involucradas en el cálculo de la fuerza gravitacional (Ec. 5.26), es decir, las masas de los cuerpos  $m_i$  y sus distancias

mutuas  $r_{ij}$ , tienen valores enormes en esas mismas unidades. Así por ejemplo en el sistema Tierra-Sol,  $m \sim 10^{24} - 10^{30}$  kg y  $r \sim 10^{11}$  m.

Con el propósito de evitar la combinación de cantidades muy grandes y muy pequeñas en las mismas ecuaciones, se ha convenido en utilizar un sistema de unidades en el cuál todas las cantidades implicadas tengan, por un lado, una magnitud similar y por el otro sus valores sean de orden uno.

Resulta notable que las dimensiones o unidades de la constante de gravitación universal  $G$ :

$$[G] = \frac{L^3}{MT^2},$$

combinen los patrones usados para definir todas las cantidades físicas relevantes en mecánicos. Este hecho implica, que si ajustamos el valor de estas tres unidades fundamentales, podríamos obtener casi cualquier valor que deseáramos para  $G$ .

Supongamos, por ejemplo, que definimos un sistema de unidades nuevo,  $\mathcal{L}$ ,  $\mathcal{M}$ ,  $\mathcal{T}$  (que denotan la unidad de longitud, masa y tiempo respectivamente), para el cual, en unidades del SI, los factores de conversión son iguales a  $U_L$ ,  $U_M$  y  $U_T$  respectivamente. En este sistema de unidades, para convertir, por ejemplo, una distancia medida en  $\mathcal{L}$  a la misma distancia pero medida en m (metros) es necesario multiplicar la distancia por  $U_L$ .

Así por ejemplo, en astronomía podríamos escoger medir las longitudes (y todas las cantidades derivadas) en *Unidades Astronómicas* (UA o AU, por sus siglas en inglés), en lugar de hacerlo en metros. Como sabemos que  $1 \text{ AU} = 1,496 \times 10^8 \text{ km} = 1,496 \times 10^{11} \text{ m}$ , entonces en este sistema de unidades,  $\mathcal{L} : \text{AU}$  y  $U_L = 1,496 \times 10^{11} \text{ m}$ . Así mismo, podríamos escoger medir la masa en unidades de la masa del sol  $M_\odot$  (como se acostumbra hacerlo por ejemplo en astronomía estelar). En este caso  $\mathcal{M} : M_\odot$ ,  $U_M = 1,98 \times 10^{30} \text{ kg}$

El propósito original de las unidades canónicas en mecánica celeste es conseguir que, en este nuevo sistema de unidades, el valor de la constante de gravitación universal sea pequeño y de orden 1. Dada la arbitrariedad de nuestra elección, podemos ir más lejos e imponer la condición de que la constante tenga un valor exactamente igual a 1. Así, los cálculos en los que aparezca la constante se simplificarán considerablemente.

En el sistema definido en el ejemplo antes, si escogemos una unidad de tiempo  $\mathcal{T}$  tal que  $U_T = 5033865$  segundos (ver justificación abajo), el valor de la constante de gravitación será:

$$\begin{aligned} G &= 6,67308 \times 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2} \times \left( \frac{\text{AU}}{1,496 \times 10^{11} \text{ m}} \right)^3 \left( \frac{1,98 \times 10^{30} \text{ kg}}{M_\odot} \right)^2 \left( \frac{5033865 \text{ s}}{\mathcal{T}} \right) \\ &= 1 \frac{\text{AU}^3}{M_\odot \mathcal{T}^2} \end{aligned}$$

Decimos que AU,  $M_\odot$ ,  $\mathcal{T}$  forman un conjunto de unidades canónicas.

### Definición 6.3

**Unidades canónicas.** A un conjunto de unidades  $\mathcal{L}, \mathcal{M}, \mathcal{T}$  con factores de conversión  $U_L, U_M, U_T$  se los llama *unidades canónicas* en mecánica celeste, si se cumple que:

$$G \frac{U_M^2 U_T}{U_L^3} = 1 \frac{\mathcal{L}^3}{\mathcal{M} \cdot \mathcal{T}^2}$$

donde  $G = 6,67308 \times 10^{-11} \text{m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2}$ . En términos estrictamente numéricos, un sistema de unidades canónicas es aquel en el que se cumple la igualdad:

$$G = \frac{U_L^3}{U_M^2 U_T} \quad (6.29)$$

En la práctica, en la Ec. (6.29), si fijamos el valor de dos de los factores de conversión, podemos encontrar el valor del tercer factor.

En el ejemplo anterior, una vez definimos  $U_L = 1,496 \times 10^{11} \text{ m}$  y  $U_M = 1,98 \times 10^{30} \text{ kg}$ , entonces

$$U_T = \sqrt{\frac{U_L^3}{GU_M}}$$

que numéricamente es:

```
G=6.67308e-11 # m^3/kg/s
UL=1.496e11 #m
UM=1.98e30 #kg

UT=(UL**3/(G*UM))**0.5 #s
```

UT = 5033865.755208481 segundos  
= 1398.296043113467 horas  
= 58.26233512972779 días  
= 0.15951080126450734 años

### Nota

**Escalas naturales en un sistema gravitacional.** Es interesante anotar que el valor del factor de conversión de tiempo  $U_T$  obtenido con este procedimiento no es completamente arbitrario. Cuando  $U_T$  se expresa en años, su valor es diferente, por poco menos de un factor de 10, del período de revolución de la Tierra alrededor del Sol (1 año). Esto hecho es notable en tanto para deducir el valor esta *escala de tiempo* nos validamos únicamente del valor de la constante gravitacional, la masa del sol y la distancia de la Tierra. No fue necesario resolver las ecuaciones de

### Nota (Cont.)

movimiento o tener una teoría completa del movimiento orbital. Decimos que la **escala de tiempo** característica de la dinámica sistema Tierra-Sol (que podríamos considerar similar al período orbital de la Tierra) se puede estimar combinando apropiadamente la constante de gravitación universal (intensidad de la interacción) con la masa del sistema y la separación característica de los cuerpos que lo constituyen. Un procedimiento similar puede usarse para obtener, a partir de la constante de gravitación, la **escala de longitud** (en caso que se provean las unidades de masa y tiempo) o la **escala de masa** (en caso que se provean las unidades de longitud y tiempo) de un sistema físico.

A partir del sistema de unidades canónicas introducidas, es posible definir los patrones de medida para todas las restantes cantidades mecánicas:

$$\begin{aligned} UV &= UL/UT \\ UA &= UL/UT^{**2} \\ UF &= UM*UA \\ UP &= UM*UV \\ UH &= UM*UL*UP \\ UE &= UM*UL^{**2}/UT^{**2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Velocidad, } UV &= 29718.710683774327 \text{ m/s} \\ \text{Aceleración, } UA &= 0.005903755111670335 \text{ m/s}^2 \\ \text{Fuerza, } UF &= 1.1689435121107264e+28 \text{ N} \\ \text{Momento lineal, } UP &= 5.884304715387317e+34 \text{ kg m/s} \\ \text{Momento angular, } UH &= 1.7429781311354465e+76 \text{ kg m}^2/\text{s} \\ \text{Energía, } UE &= 1.7487394941176467e+39 \text{ kg m}^2/\text{s}^2 \end{aligned}$$

De nuevo, como sucede con la unidad de tiempo, estas unidades no son solo el producto de operaciones aritméticas entre cantidades “arbitrarias”. Sus valores nos dan una idea de las escalas (valores típicos) de cada cantidad en el sistema.

Así, por ejemplo, la unidad de velocidad,  $U_V \approx 29,8 \text{ km/s}$  coincide con la velocidad orbital promedio de la Tierra alrededor del Sol; la unidad de aceleración  $U_A \approx 0,006 \text{ m/s}^2$  es del orden de la aceleración de la gravedad del Sol medida a la distancia promedio de la Tierra al Sol, etc.

### Históricas de la mecánica celeste

**Unidades canónicas.** La motivación presentada aquí para la introducción de las unidades canónicas no es la misma que la que se esboza en textos clásicos de la disciplina. En realidad en distintos tiempos, han sido otras las razones para usar un sistema de unidades propio en mecánica celeste.

Particularmente interesantes, son las razones expuestas en el texto clásico de Roger Bate, Donald Mueller y Jerry White, “*Fundamentals of Astrodynamics*” [6]. De acuerdo a Bate y colaboradores, después de la segunda gue-

### Historias de la mecánica celeste (Cont.)

rra mundial durante la que se desarrollaron los primeros misiles balísticos de largo alcance (los temidos V2), quedo claro que los humanos podríamos alcanzar el espacio y viajar por nuestro sistema planetario. Para navegar el Sistema Solar, sin embargo, era necesario conocer muy bien las masas y distancias relativas de los grandes cuerpos astronómicos que dominarían la dinámica de esos vehículos espaciales. Para la época, sin embargo (incluso para 1971, cuando fue escrito el texto de Bate y compañía) el valor de la distancia Tierra-Sol y la masa de nuestra estrella, no eran conocidas con gran precisión. Este hecho motivo a muchos a resolver los primeros problemas de mecánica celeste práctica o *mecánica orbital*, asignando a estas cantidades desconocidas un valor de 1 (unidades de masa y distancia) y calculando todas las propiedades relevantes del problema en términos de ellas. Este fue el origen del uso de unidades canónicas, al menos, en el contexto de la mecánica orbital de finales de los 1900.

#### 6.4.2. Las ecuaciones de movimiento reducidas

En unidades canónica, las ecuaciones de movimiento del sistema de N cuerpos se escriben de la misma manera que en la Ec. (6.1):

$$\left\{ \ddot{\vec{r}}_i = - \sum_{j \neq i} \frac{\mu_j}{r_{ij}^3} \vec{r}_{ij} \right\}_N \quad (6.30)$$

La diferencia es que ahora  $\mu_j = m_j$ .

#### Nota

**Unidades del parámetro gravitacional.** El hecho de que en unidades canónicas el valor numérico del parámetro gravitacional de un cuerpo  $\mu = Gm$  coincida con el valor la masa  $m$ , no debe llevarnos a confundir las dos cantidades físicas. No debemos perder de vista que el patrón de  $\mu$  es  $L^3/T^2$ , mientras que el de  $m$  es, por definición,  $M$ . En la igualdad  $\mu_j = m_j$  se “oscurece” el efecto que tiene la constante gravitacional en el equilibrio dimensional (las unidades a ambos lados de la ecuación no son las mismas.) En términos rigurosos  $\mu_j = m_j$  es una expresión dimensionalmente incorrecta, pero es común que se use esta sustitución en algunos contextos. No debemos nunca perder de vista este hecho, especialmente cuando manipulamos sistemas físicos reales.

Con el propósito de resolver numéricamente este sistema de ecuaciones diferenciales, usando los métodos y herramientas que introdujimos en la Sección 5.1.6, es necesario primero escribir las ecuaciones (6.30) en su forma reducida más general (Ec. 4.27):

$$\{\dot{Y}_i = f_i(\{Y_k\}, t)\}_{6N},$$

y para ello, primero debemos introducir las funciones auxiliares  $Y_i(t)$  que identificaremos con las funciones relevantes en el problema  $\{x_i(t), y_i(t), z_i(t), \dot{x}_i(t), \dot{y}_i(t), \dot{z}_i(t)\}_N$ .

Una elección  *posible* de esta identificación puede ser la siguiente:

$$\begin{aligned} Y_0 &= x_0, & Y_1 &= y_0, & Y_2 &= z_0 \\ Y_3 &= x_1, & Y_4 &= y_1, & Y_5 &= z_1 \\ &\dots &&&& \\ Y_{3N-3} &= x_{N-1}, & Y_{3N-2} &= y_{N-1}, & Y_{3N-1} &= z_{N-1} \\ Y_{3N+0} &= \dot{x}_0, & Y_{3N+1} &= \dot{y}_0, & Y_{3N+2} &= \dot{z}_0 \\ Y_{3N+3} &= \dot{x}_1, & Y_{3N+4} &= \dot{y}_1, & Y_{3N+5} &= \dot{z}_1 \\ &\dots &&&& \\ Y_{6N-3} &= \dot{x}_{N-1}, & Y_{6N-2} &= \dot{y}_{N-1}, & Y_{6N-1} &= \dot{z}_{N-1} \end{aligned}$$

es decir, asignaremos a la primera mitad de los elementos de la lista  $\{Y_i\}$  las coordenadas de las partículas (en total  $3N$  funciones) y a la segunda mitad las componentes de las velocidades respectivas (otras  $3N$  funciones.)

Podrían usarse asignaciones diferentes. Sin embargo, esta manera de separar las coordenadas y las componentes de las velocidades, permiten escribir las reglas de identificación de una forma general como:

$$\begin{aligned} Y_{3i} &= x_i, & Y_{3i+1} &= y_i, & Y_{3i+2} &= z_i \\ Y_{3N+3i} &= \dot{x}_i, & Y_{3N+3i+1} &= \dot{y}_i, & Y_{3N+3i+2} &= \dot{z}_i \end{aligned} \quad (6.31)$$

Con  $i = 0, 1, 2, \dots, N - 1$ .

Ahora bien, para la partícula  $i$ , la Ec. (6.30) se puede escribir en términos de las funciones originales como:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= -\sum_{j \neq i} \mu_j (x_i - x_j) / r_{ij}^3 \\ \dot{y}_i &= -\sum_{j \neq i} \mu_j (y_i - y_j) / r_{ij}^3 \\ \dot{z}_i &= -\sum_{j \neq i} \mu_j (z_i - z_j) / r_{ij}^3 \end{aligned}$$

Con  $r_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2}$ .

Pero en términos de las funciones auxiliares y las identificaciones definidas anteriormente, estas ecuaciones se puede escribir como:

$$\begin{aligned} \dot{Y}_{3N+3i} &= -\sum_{j \neq i} \mu_j (Y_{3i} - Y_{3j}) / r_{ij}^3 \\ \dot{Y}_{3N+3i+1} &= -\sum_{j \neq i} \mu_j (Y_{3i+1} - Y_{3j+1}) / r_{ij}^3 \\ \dot{Y}_{3N+3i+2} &= -\sum_{j \neq i} \mu_j (Y_{3i+2} - Y_{3j+2}) / r_{ij}^3 \end{aligned}$$

con

$$r_{ij} = \sqrt{(Y_{3i} - Y_{3j})^2 + (Y_{3i+1} - Y_{3j+1})^2 + (Y_{3i+2} - Y_{3j+2})^2} \quad (6.32)$$

Las ecuaciones de movimiento en términos de las funciones auxiliares se pueden escribir de forma general:

$$\dot{Y}_k = - \sum_{j \neq i} \mu_j (Y_{3i+l} - Y_{3j+l}) / r_{ij}^3$$

Donde  $k = 3N, 3N + 1, \dots, 6N - 1$ ,  $l = k \bmod 3$  (residuo de la división de  $k$  entre 3, que siempre será un número entre 0 y 2) e  $i = \lfloor (k - 3N)/3 \rfloor$  (valor entero más pequeño que el número resultante de dividir  $k - 3N$  por 3).

Con la asignación anterior, las e.d.m.r. del problema de los N cuerpos se pueden escribir finalmente como:

$$\dot{Y}_k = \begin{cases} Y_{3N+k} & , \quad 0 \leq k < 3N \\ -\sum_{j \neq i} \mu_j (Y_{3i+l} - Y_{3j+l}) / r_{ij}^3 & , \quad 3N \leq k < 6N \end{cases} \quad (6.33)$$

donde  $l = k \bmod 3$  e  $i = \lfloor (k - 3N)/3 \rfloor$  y  $r_{ij}$  esta definido por Ec. (6.32).

#### 6.4.3. Algoritmo de solucion

Para resolver numéricamente las e.d.m.r. del problema de los N cuerpos usando los métodos introducidos en la [Sección 5.1.6](#), debemos implementar primero las Ecs. (6.33) como una rutina:

(Algoritmo 6.6)

```
def edm_ncuerpos(Y,t,N=2,mus=[]):
    from numpy import zeros,floor
    dYdt=zeros(6*N)

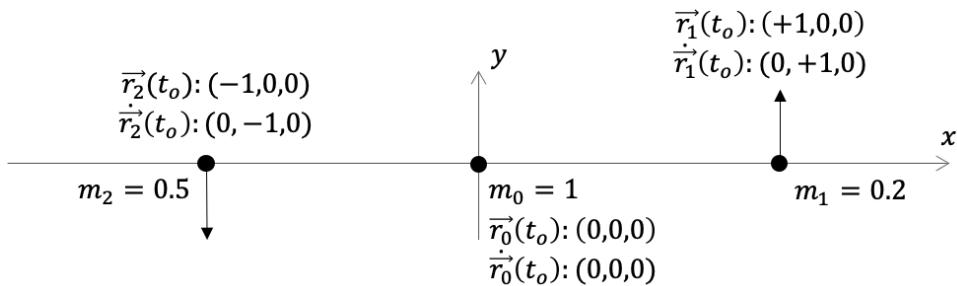
    #Primer conjunto de ecuaciones
    dYdt[:3*N]=Y[3*N:]

    #Segundo conjunto de ecuaciones
    for k in range(3*N,6*N):
        l=k%3
        i=int(floor((k-3*N)/3))
        for j in range(N):
            if j==i:continue
            rij=(Y[3*i]-Y[3*j])**2+\n                  (Y[3*i+1]-Y[3*j+1])**2+\n                  (Y[3*i+2]-Y[3*j+2])**2
            dYdt[k]+=-mus[j]*(Y[3*i+1]-Y[3*j+1])/rij**1.5

    return dYdt
```

Para ilustrar la solución al problema, supongamos que queremos predecir la posición en  $t = 1$  (en unidades canónicas) de las partículas que conforman el sistema mostrado en la [Figura 6.6](#).

Las propiedades del sistema (masas y número de partículas) y las condiciones iniciales indicadas en la Figura, pueden expresarse, en términos de las variables auxiliares  $\{Y_k\}$ , de la siguiente manera:



**Figura 6.6:** Sistema de tres cuerpos de ejemplo (todas las cantidades están expresadas en unidades canónicas)

```
#Número de partículas
N=3
#Parámetros gravitacionales o masas de las partículas
mus=[1.0,0.2,0.5]
#Estado inicial del sistema
Y0s=[
    #Posición cuerpo 0
    0,0,0,
    #Posición cuerpo 1
    1,0,0,
    #Posición cuerpo 2
    -1,0,0,
    #Velocidad cuerpo 0
    0,0,0,
    #Velocidad cuerpo 1
    0,1,0,
    #Velocidad cuerpo 2
    0,-1,0,
]
```

La solución la obtenemos usando odeint:

```
from scipy.integrate import odeint
solucion=odeint(edm_ncuerpos,Y0s,[0.0,1.0],args=(3,mus))
```

Solución:

```
array([[ 0.          ,  0.          ,  0.          ,  1.          ,  0.          ,
         0.          , -1.          ,  0.          ,  0.          ,  0.          ,
         0.          ,  0.          ,  0.          ,  1.          ,  0.          ,
         0.          , -1.          ,  0.          ],
       [-0.15068697, -0.06168292,  0.          ,  0.49242022,  0.83105115,
        0.          , -0.49559416, -0.80905462,  0.          , -0.29283302,
       -0.20870151,  0.          , -0.91545262,  0.52712521,  0.          ,
        0.95184709, -0.39344707,  0.          ]])
```

La matriz resultante tiene, como filas, el estado de las partículas del sistema para cada uno de los instantes provistos en el vector de valores de tiempo (en este

caso  $[0.0, 1.0]$ ). Así, la fila 0 no es otra cosa que las mismas condiciones iniciales provistas. Por otro lado, la fila 1 contiene el estado del sistema en el tiempo  $t = 1$ , que es justamente la información que necesitábamos obtener.

Las columnas de la matriz de solución, por otro lado, contienen los valores de la variable auxiliar  $Y_k$ , que a su vez corresponden a las posiciones y velocidades de las partículas, de acuerdo a las reglas definidas en Ec. (6.31). Así, las columnas 0, 1 y 2, contienen el vector posición de la partícula 0. Las columnas 3, 4 y 5, la posición de la partícula 1 y las columnas 6, 7 y 8, la posición de la partícula 2. De otro lado, las columnas 9, 10 y 11, contendrán las componentes de la velocidad de la partícula 0 y así sucesivamente.

Una forma más apropiada de manipular la matriz solución puede ser asignar el valor de sus columnas a vectores (o mejor, matrices) con nombres que nos recuerden el hecho que almacenan posiciones y velocidades de las diferentes partículas. Así por ejemplo, las posiciones y velocidades de la partícula 0, en cada uno de los tiempos en los que se realiza la integración,  $\vec{r}_0(t), \dot{\vec{r}}_0(t)$ , pueden almacenarse usando las matrices  $r0s$  y  $v0s$ :

```
r0s=solucion[:,0:3]
v0s=solucion[:,9:12]

r_0(t)
= [[ 0.          0.          0.          ]
 [-0.15068697 -0.06168292  0.          ]]
v_0(t)
= [[ 0.          0.          0.          ]
 [-0.29283302 -0.20870151  0.          ]]
```

En general, las posiciones o velocidades de todas las partículas del sistema,  $\vec{r}_i(t), \dot{\vec{r}}_i(t)$ , pueden almacenarse en matrices  $rs$  o  $vs$ , tal que, para obtener para una partícula, el valor de una componente del vector posición o de la velocidad, en un determinado tiempo, la regla será:

```
rs[Partícula,Tiempo,Componente]
vs[Partícula,Tiempo,Componente]
```

Así,  $rs[0, 1, 2]$  corresponderá a la coordenada z (componente 2), en el tiempo 1, para la partícula 0. Por su parte  $vs[1, :, 0]$  serán todos los valores (elipsis :) de la coordenada x (componente 0), para la partícula 1.

El algoritmo para convertir la matriz de solución en  $rs$  y  $vs$  se presenta a continuación:

(Algoritmo 6.7)

```
import numpy as np
rs=np.zeros((N,2,3))
vs=np.zeros((N,2,3))
for i in range(N):
    rs[i]=solucion[:,3*i:3*i+3]
    vs[i]=solucion[:,3*N+3*i:3*N+3*i+3]

rs =
[[[ 0.          0.          0.          ]
 [ 0.          0.          0.          ]
 [ 0.          0.          0.          ]]]
```

```

[-0.15068697 -0.06168292  0.          ]
[[ 1.          0.          0.          ]
 [ 0.49242022  0.83105115  0.          ]]
[[[-1.          0.          0.          ]
 [-0.49559416 -0.80905462  0.          ]]
vs =
[[[ 0.          0.          0.          ]
 [-0.29283302 -0.20870151  0.          ]]
[[ 0.          1.          0.          ]
 [-0.91545262  0.52712521  0.          ]]
[[ 0.          -1.          0.          ]
 [ 0.95184709 -0.39344707  0.          ]]

```

Finalmente, con la solución parametrizada apropiadamente, podemos escribir el algoritmo requerido para mostrar, gráficamente la posición de las partículas en el espacio:

(Algoritmo 6.8)

```

import matplotlib.pyplot as plt
fig=plt.figure()
ax=fig.gca()

for i in range(N):
    ax.plot(rs[i,:,0],rs[i,:,1],marker='o');

from pymcel.plot import fija_ejes_proporcionales
fija_ejes_proporcionales(ax,rs);

```

*ver Figura 6.7*

Todo el procedimiento descrito en los códigos anteriores, puede condensarse en pocas líneas, si se diseñan rutinas adecuadas para convertir las condiciones iniciales de un sistema de partículas en el vector de valores iniciales de las variables auxiliares  $Y_0$ s o para convertir la matriz de solución en las matrices de posición  $rs$  y velocidad  $vs$ .

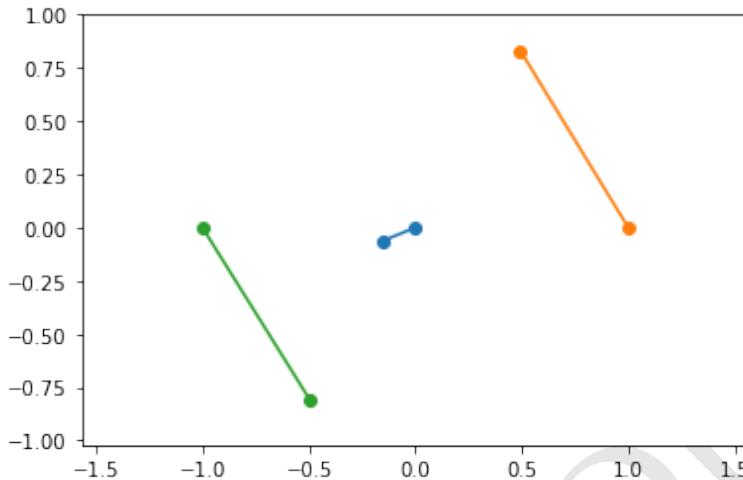
Podemos, por ejemplo, expresar las condiciones iniciales del sistema usando una estructura de datos más *legible*, p.e. una lista de diccionarios:

```

sistema_ejemplo=[
    dict(m=1.0,r=[0.0,0.0,0.0],v=[0.0,0.0,0.0]),
    dict(m=0.2,r=[1.0,0.0,0.0],v=[0.0,1.0,0.0]),
    dict(m=0.5,r=[-1.0,0.0,0.0],v=[0.0,-1.0,0.0]),
]

```

Para convertir esta estructura en el vector con las condiciones iniciales de las variables auxiliares usaremos la siguiente rutina:



**Figura 6.7:** Figura correspondiente al código 6.8. Posiciones y velocidades de las partículas en el sistema de ejemplo, en el tiempo inicial y en  $t = 1$  (en unidades canónicas).

(Algoritmo 6.9)

```
def sistema_a_Y(sistema):
    mus=[]
    r0s=[]
    v0s=[]
    N=0
    for particula in sistema:
        m=particula['m']
        if m>0:
            mus+=[m]
            r0s+=list(particula["r"])
            v0s+=list(particula["v"])
            N+=1
    from numpy import array
    Y0s=array(r0s+v0s)
    mus=array(mus)
    return N,mus,Y0s
```

Nótese que en la rutina hemos usado inicialmente listas (p.e. `mus=[]`) pero para devolver el resultado de la rutina, convertirmos esas listas en arreglos de NumPy (p.e. `mus=array(mus)`) que tienen propiedades más adecuadas para su manipulación posterior. También debe tenerse cuidado con la línea `Y0s=array(rs+vs)` donde se da a entender que estamos *sumando* posiciones y velocidades (peras con manzanas.) Debemos recordar aquí (ver la [Sección 4.1.1](#)) que dado que en el algoritmo `rs` y `vs` son listas, la suma indica la unión de esas listas (para formar la lista `Y0s`) y no la suma vectorial de ellas.

Un último detalle codificado en la rutina `sistema_a_Y` (que usaremos mucho en lo que queda de este libro) es que si la masa de una partícula en el diccionario `sistema` se fija en 0, la partícula no será incluida en las condiciones iniciales

(esa es justamente la función del condicional que comienza con `if m>0:....`) Esta condición puede ser de utilidad para agregar y quitar partículas a un sistema sin necesidad de borrar o comentar sus condiciones iniciales en el diccionario de sistema.

Por otro lado, para convertir la matriz `solucion` en matrices de posición y velocidad, `rs` y `vs`, tal y como lo hicimos en el Alg. (6.7), usaremos la siguiente rutina:

(Algoritmo 6.10)

```
def solucion_a_estado(solucion,Nparticulas,Ntiempos):
    from numpy import zeros
    rs=zeros((Nparticulas,Ntiempos,3))
    vs=zeros((Nparticulas,Ntiempos,3))
    for i in range(Nparticulas):
        rs[i]=solucion[:,3*i:3*i+3]
        vs[i]=solucion[:,3*Nparticulas+3*i:3*Nparticulas+3*i+3]
    return rs,vs
```

Con todos estos elementos a la mano, un algoritmo completo para expresar las condiciones iniciales del sistema en Figura 6.6, encontrar la solución numérica a las e.d.m.r. para 50 valores del tiempo entre  $t_0 = 0,0$  y  $t = 5,0$  (en unidades canónicas) y visualizar la solución, será:

(Algoritmo 6.11)

```
# Definición de las condiciones iniciales
sistema_ejemplo=[
    dict(m=1.0,r=[0.0,0.0,0.0],v=[0.0,0.0,0.0]),
    dict(m=0.2,r=[1.0,0.0,0.0],v=[0.0,1.0,0.0]),
    dict(m=0.5,r=[-1.0,0.0,0.0],v=[0.0,-1.0,0.0]),
]
N,mus,Yo=sistema_a_Y(sistema_ejemplo)

#Tiempo de integración
import numpy as np
Nt=50
ts=np.linspace(0.0,5,Nt,endpoint=True)

# Solución al sistema de ecuaciones diferenciales
from scipy.integrate import odeint
solucion_ejemplo=odeint(edm_ncuerpos,Yo,ts,args=(N,mus))
rs,vs=solucion_a_estado(solucion_ejemplo,N,Nt)

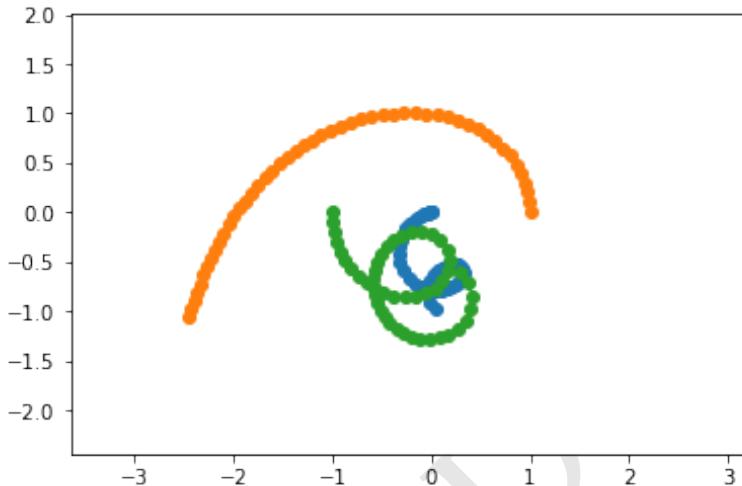
# Componente gráfica del algoritmo
import matplotlib.pyplot as plt
fig=plt.figure()
ax=fig.gca()

for i in range(N):
    ax.plot(rs[i,:,0],rs[i,:,1],marker='o');

from pymcel.plot import fija_ejes_proporcionales
```

```
fija_ejes_proporcionales(ax,rs);
```

*ver Figura 6.8*



**Figura 6.8:** Figura correspondiente al código 6.11. Posiciones y velocidades de las partículas en el sistema de ejemplo, entre el tiempo inicial  $t_0 = 0$  y  $t = 5$  (en unidades canónicas).

Puede encontrar una versión animada o interactiva de este gráfico en la [Sección 6.4.4](#) al final de esta sección.

Dado que en general, el movimiento de los cuerpos en un sistema de muchas partículas, ocurre en el espacio de tres dimensiones, la componente gráfica del algoritmo anterior puede reemplazarse con este código:

(Algoritmo 6.12)

```
def plot_ncuerpos_3d(rs,vs,**opciones):
    #Número de partículas
    N=rs.shape[0]

    import matplotlib.pyplot as plt
    from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
    fig=plt.figure()
    ax=fig.gca(projection='3d')

    for i in range(N):
        ax.plot(rs[i,:,0],rs[i,:,1],rs[i,:,2],**opciones);

    from pymcel.plot import fija_ejes3d_proporcionales
    fija_ejes3d_proporcionales(ax);
    fig.tight_layout();
    plt.show();
```

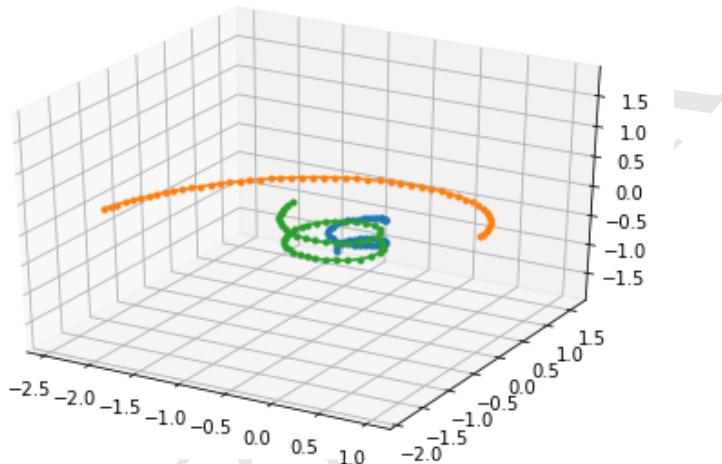
```
    return fig
```

Que invocamos con:

(Algoritmo 6.13)

```
fig=plot_ncuerpos_3d(rs,vs,marker='o');
```

*ver Figura 6.9*



**Figura 6.9:** Figura correspondiente al código 6.13.

La diferencia de la representación en tres dimensiones de los sistemas, de su representación en dos dimensiones esta en:

- El uso del módulo Axes3D: `from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D`.
- La elección de una proyección específica al definir el espacio de graficación: `ax=fig.gca(projection='3d')`.
- El uso de las coordenadas  $x, y, z$  de las posiciones de las partículas, en lugar de solo dos de ellas:

```
ax.plot(rs[i,:,0],rs[i,:,1],rs[i,:,2],marker='o');
```

- Y el ajuste de las escalas de los tres ejes a través de una rutina previamente preparada en el paquete pymcel: `fija_ejes3d_proporcionales(ax)`.

#### 6.4.4. Figuras interactivas

Busque las figuras interactivas y las animaciones incluídas en el [sitio en línea del libro](#)<sup>34</sup>.

<sup>34</sup><http://mybook.org>

### 6.4.5. Constantes de movimiento y teorema del virial

Una interesante primera “aplicación” de la solución numérica al problema de los N cuerpos vista en estas secciones, es la de verificar “experimentalmente” los resultados analíticos descritos en la ?? y en la Sección 6.3.

Para ello estudiaremos un sistema de 5 partículas con masas, posiciones y velocidades generadas al azar. La solución numérica a las e.d.m.r. del sistema, obtenida con los métodos vistos en esta sección, nos permitirá obtener las listas de sus posiciones y velocidades para distintos valores del tiempo. Con estas listas podremos calcular y graficar los valores de las constantes de movimiento, momento lineal, momento angular, energía y de las cantidades críticas para el teorema del virial.

Comencemos pues por generar las condiciones iniciales del sistema usando, entre otras cosas, la rutina `sistema_a_Y` del Alg. (6.9) y las rutinas de generación de números aleatorios que usamos en la Sección 5.3.2:

(Algoritmo 6.14)

```
#Número de partículas
N=5

#Generación de las condiciones para cada partícula
from numpy.random import uniform,seed
seed(7)

#Condiciones iniciales
sistema=[]
for i in range(N):
    particula=dict(
        m=uniform(0.0,1.0),
        r=uniform(-1.0,1.0,size=3),
        v=uniform(-1.0,1.0,size=3)
    )
    sistema+=[particula]

N,mus,Y0s=sistema_a_Y(sistema)

#Tiempos
from numpy import linspace
Nt=100
ts=linspace(0.0,10.0,Nt)

print(f"N = {N}")
print(f"mus = {mus}")
print(f"Y0s = {Y0s}")

N = 5
mus = [0.07630829 0.07205113 0.2881456 0.9501295 0.66901324]
Y0s = [ 5.59837584e-01 -1.23181537e-01 4.46930356e-01 -4.63122040e-01
-2.34998349e-04 3.58459992e-01 8.19187055e-01 -5.73229293e-01
-9.57520764e-02 -5.39394242e-01 9.69798385e-02 8.18256750e-01
-6.44942805e-02 -5.90301819e-01 -1.84682218e-02 9.55979024e-01
7.69917408e-02 2.24092732e-03 6.07478072e-01 -2.38117734e-01]
```

```
-8.68127306e-01 8.62412039e-01 -9.50201545e-01 2.01097835e-01
-7.33661108e-01 4.68251613e-02 5.00819718e-01 -2.55230621e-01
-4.51976903e-02 -2.68219228e-01]
```

Ahora podemos resolver las ecuaciones de movimiento y extraer las posiciones y velocidades de las partículas:

```
#Solución
from scipy.integrate import odeint
solucion=odeint(edm_ncuerpos,Y0s,ts,args=(N,mus))

#Extracción de las posiciones y velocidades
rs,vs=solucion_a_estado(solucion,N,Nt)
```

Una gráfica del movimiento de las partículas en tres dimensiones se puede obtener usando la rutina `plot_ncuerpos_3d` que definimos en el Alg. (6.12):

(Algoritmo 6.15)

```
fig=plot_ncuerpos_3d(rs,vs,marker='.');
```

*ver Figura 6.10*

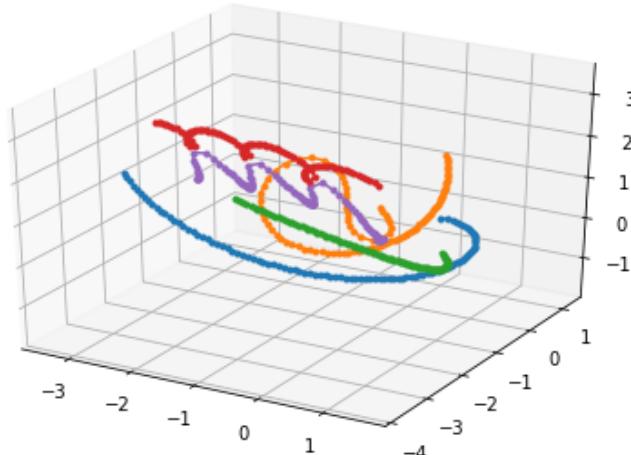


Figura 6.10: Figura correspondiente al código 6.15.

Ahora podemos calcular las constantes de movimiento. En este caso, sin embargo, la dificultad algorítmica estriba en que las posiciones y velocidades de las partículas están guardadas en las matrices `rs` y `vs` que no son triviales de manipular.

Así, por ejemplo el momento lineal inicial de la partícula 0 esta dado por:

```
p_0_0=mus[0]*vs[0,0,:]
```

```
p_0_0 = [0.07294912 0.00587511 0.000171 ]
```

Pero si queremos el momento lineal de esa partícula en cualquier tiempo será:

```
p_0=mus[0]*vs[0,:,:]
p_0(t) =
[[ 0.07294912  0.00587511  0.000171 ]
 [ 0.0653799   0.00154574 -0.00381787]
 [ 0.05898078 -0.00240643 -0.0070324 ]
 [ 0.05337202 -0.00601935 -0.00963238]
 [ 0.04832467 -0.00932501 -0.0117392 ]]
...
```

La cuadratura de momento lineal total  $C_{PCM}$  la podemos obtener si sumamos uno a uno los momentos lineales en cada tiempo de todas las partículas del sistema:

```
from numpy import zeros
C_PCM=zeros((Nt,3))
for i in range(N):
    C_PCM=C_PCM+mus[i]*vs[i,:,:]
C_PCM =
[[ -0.50260689 -0.27082582  0.29196827]
 [-0.50260689 -0.27082582  0.29196827]
 [-0.50260689 -0.27082582  0.29196827]
 [-0.50260689 -0.27082582  0.29196827]
 [-0.50260689 -0.27082582  0.29196827]]
...

```

Y como vemos el valor del momento lineal es el mismo, que es lo que esperábamos de acuerdo con la teoría.

Por otro lado la cuadratura de momento angular será:

```
from numpy import zeros,cross
C_L=zeros((Nt,3))
for i in range(N):
    C_L=C_L+mus[i]*cross(rs[i,:,:],vs[i,:,:])
C_L =
[[ 0.05919488 -0.37417055 -0.11685289]
 [ 0.05919488 -0.37417055 -0.11685289]
 [ 0.05919488 -0.37417055 -0.11685289]
 [ 0.05919488 -0.37417055 -0.11685289]
 [ 0.05919488 -0.37417055 -0.11685288]]
...
```

Que de nuevo resulta constante como esperábamos.

Finalmente la cuadratura de energía se puede calcular usando la fórmula para la energía potencial la dada por la Ec. (??):

```

from numpy import zeros
from numpy.linalg import norm

C_E=zeros(Nt)
K=zeros(Nt)
U=zeros(Nt)
for i in range(N):
    K=K+0.5*mus[i]*norm(vs[i,:,:,:],axis=1)**2
    for j in range(N):
        if i==j:continue
        rij=norm(rs[i,:,:]-rs[j,:,:],axis=1)
        U+=-0.5*mus[i]*mus[j]/rij
C_E=K+U

```

C\_E = [-0.53641214 -0.53641214 -0.53641214 -0.53641214 -0.53641214] ...

Como vemos el valor de la energía es negativo, lo que podría implicar que el sistema es ligado (tal y como sugieren las trayectorias de las partículas.) Sin embargo, como mencionamos en la [Sección 6.3.2](#) la condición  $E < 0$  es necesaria más no suficiente. Para saber si el sistema es ligado debemos evaluar los promedios a largo plazo de las energía cinética y potencial y compararlas con la energía total:

```

E=C_E[0]
Kmean=K.mean()
Umean=U.mean()

print(f"-E = {-E}")
print(f"<K> = {Kmean}")
print(f"-<U>/2 = {-Umean/2}")

-E = 0.5364121422571039
<K> = 0.5201023115823993
-<U>/2 = 0.5282572686928928

```

Como vemos la identidad  $\langle K \rangle = -E = -\langle U \rangle / 2$  se cumple aproximadamente para la ventana de tiempo en la que estudiamos el sistema y podríamos sospechar que es estable.

#### 6.4.6. Una algoritmo general

Usando lo visto en esta y en las secciones anteriores, podemos construir ahora un algoritmo general que nos servirá en lo sucesivo para partiendo de la descripción de un sistema de  $N$  cuerpos obtener las posiciones y velocidades de las partículas que lo constituyen, resolviendo numéricamente las e.d.m.r. para un determinado conjunto de tiempo provistos.

El algoritmo presentado a continuación define esa rutina. Para ello usa las rutinas definidas en los Algs. [\(6.6, 6.9, 6.10\)](#) y los procedimientos para el cálculo de las constantes de movimiento presentados en la [Sección 6.4.5](#).

(Algoritmo 6.16)

```

def ncuerpos_solucion(sistema,ts):
    #Condiciones iniciales
    from pymcel.export import sistema_a_Y
    N,mus,Y0s=sistema_a_Y(sistema)

    #Masa total
    M=sum(mus)

    #Número de tiempos
    Nt=len(ts)

    #Solución
    from scipy.integrate import odeint
    solucion=odeint(edm_ncuerpos,Y0s,ts,args=(N,mus))

    #Extracción de las posiciones y velocidades
    from pymcel.export import solucion_a_estado
    rs,vs=solucion_a_estado(solucion,N,Nt)

    #Calcula las constantes de movimiento
    from numpy import zeros
    PCM=zeros(3)
    for i in range(N):
        PCM=PCM+mus[i]*vs[i,:,0]

    #Posición del CM como función del tiempo
    RCM=zeros((Nt,3))
    for i in range(N):
        RCM=RCM+mus[i]*rs[i,:,:]
    RCM/=M

    #Momento angular
    from numpy import zeros,cross
    L=zeros(3)
    for i in range(N):
        L=L+mus[i]*cross(rs[i,:,0],vs[i,:,0])

    #Energía total
    from numpy.linalg import norm
    K=zeros(Nt)
    U=zeros(Nt)
    for i in range(N):
        K=K+0.5*mus[i]*norm(vs[i,:,:],axis=1)**2
        for j in range(N):
            if i==j:continue
            rij=norm(rs[i,:,:]-rs[j,:,:],axis=1)
            U+=-0.5*mus[i]*mus[j]/rij
    E=K[0]+U[0]

    #Constantes

```

```
constantes=dict(M=M,
                 RCM=RCM,PCM=PCM,
                 L=L,K=K,U=U,E=E)

#Posiciones y velocidades relativas al centro de masa
from numpy import subtract
rps=rs-RCM
vps=subtract(vs,PCM/M)

#Devuelve las posiciones y velocidades
return rs,vs,rps,vps,constantes
```

La rutina se invocaría así:

```
rs,vs,rps,vps,constantes=ncuerpos_solucion(sistema,ts)
```

```
M = 2.055647763339272
R_CM_0 = [-0.15092322 -0.23222195  0.38792434]
P_CM = [-0.50260689 -0.27082582  0.29196827]
L = [ 0.05919488 -0.37417055 -0.11685289]
E = -0.5364121422571039
<K> = 0.5201023115823993
<U> = -1.0565145373857856
```

Una representación gráfica de las posiciones de las partículas en el sistema de referencia del centro de masa:

(Algoritmo 6.17)

```
fig=plot_ncuerpos_3d(rps,vps,marker='.'
```

ver Figura 6.11

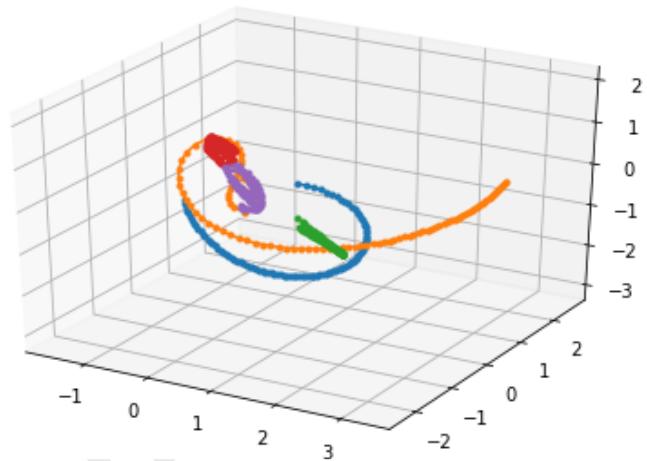


Figura 6.11: Figura correspondiente al código 6.17.

## Capítulo 7

# El Problema de los dos cuerpos

### Resumen

En este capítulo estudiaremos un caso particular de sistemas de  $N$  cuerpos, a saber, aquellos que contienen solo dos partículas que interactúan gravitacionalmente. Este es el problema clásico de la mecánica celeste y el primero en ser resuelto en la historia, tanto por Newton, como por sus contemporáneos. Después de motivar su introducción con los denominados sistemas jerárquicos de  $N$  cuerpos, procederemos a escribir las ecuaciones de movimiento relativo, encontraremos las constantes o integrales de movimiento y finalmente deduciremos la solución exacta del problema, tanto en el espacio como en el tiempo. Los elementos conceptuales y algunas herramientas teóricas y algorítmicas introducidas en este capítulo, se usan en casi todos las áreas de la mecánica celeste, bien sea que pueda o no aplicarse la aproximación de dos cuerpos. Por esta razón, los resultados en este capítulo no solo son una curiosidad matemática o una decente aproximación para el movimiento de algunos sistemas. El problema de los dos cuerpos es la base para la descripción general de la trayectoria de una gran diversidad de sistemas físicos en el Universo.

### 7.1. Motivación

Los sistemas físicos de los ejemplos estudiados en el Capítulo 6 exhiben una dinámica compleja y relativamente impredecible, tal y como lo evidencian las trayectorias de sus partículas en las Figuras Figura 6.8 y Figura 6.10. Más allá de lo que pudimos aprender sobre esos sistemas estudiando sus constantes de movimiento o las propiedades estadísticas a largo plazo (teorema del virial), es poco lo que podemos hacer, analíticamente e incluso estadísticamente, para predecir su comportamiento.

Hay dos factores, sin embargo, que confabulan en esos dos casos en contra de la posibilidad de una descripción analítica exacta o aproximada de ambos sistemas. El primero, es que la masa y distancia inicial de sus componentes es similar:

la masa de cada partícula no difiera de la de las demás en un factor mayor a unos cuantos y las distancias entre ellas son casi iguales. Esta características, si bien muy útil para ilustrar los conceptos del capítulo anterior, es realmente poco común en sistemas reales. En la naturaleza, los cuerpos interactuantes en sistemas de muchas partículas, normalmente y por razones de su formación, tienen masas muy diferentes y distancias a menudo enormemente distintas unas de otras.

La segunda, fue la generación totalmente aleatoria y pareja de las condiciones iniciales, al menos en el caso del ejemplo de la [Sección 6.4.5](#). Si bien factores aleatorios determinan las propiedades de sistemas astronómicos reales, las posiciones y velocidades de las componentes de estos sistemas normalmente guardan relaciones que emergen también de sus procesos de formación.

Consideremos entonces un sistema en el que las relaciones entre las masas y las distancias sean menos parejas, más cercanas a lo que podríamos encontrar en la naturaleza:

```
sistema=[  
    dict(  
        m=10.0,  
        r=[1,0,0],  
        v=[0,1,0.5]),  
    dict(  
        m=1.0,  
        r=[1.5,0,0],  
        v=[0,-3,1],  
    ),  
    dict(  
        m=0.1,  
        r=[-1,0,0],  
        v=[0,3,1],  
    )  
]
```

Note que las masas de este sistema difieren por un factor de entre 10 y 100 (en la naturaleza los factores pueden ser superiores a 1.000 o 10.000). Las distancias entre ellas son también muy diferentes (mientras que las partículas 0 y 1 están a 0.5 unidades, la 0 y la 2 están a 2 unidades, es decir 4 veces más lejos). Adicionalmente, todas las partículas están, en el tiempo inicial, cerca de un mismo plano.

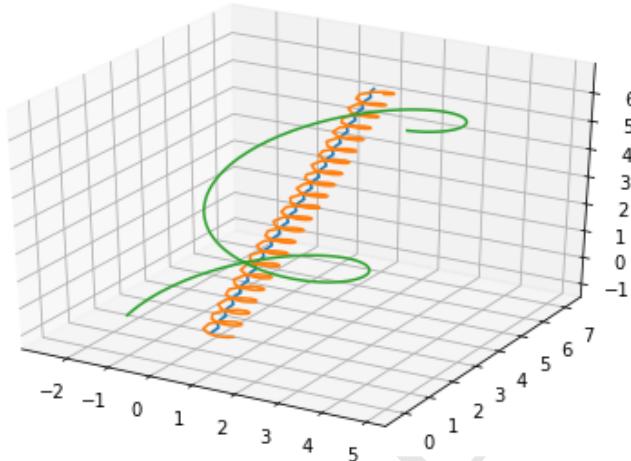
Podemos usar las rutinas desarrolladas en el capítulo anterior para encontrar la evolución de este sistema durante, por ejemplo, 10 unidades de tiempo:

(Algoritmo 7.1)

```
from numpy import linspace  
  
#Solución  
from pymcel.export import ncuerpos_solucion  
rs,vs,rps,vps,constantes=ncuerpos_solucion(sistema,  
                                              linspace(0.0,10.0,200))  
  
#Gráfica en el sistema de referencia inercial original
```

```
from pymcel.export import plot_ncuerpos_3d
fig=plot_ncuerpos_3d(rs,vs)
```

*ver Figura 7.1*



**Figura 7.1:** Figura correspondiente al código 7.1.

Si bien la trayectoria de las partículas de este sistema es mucho más predecible que las de los sistemas en el capítulo anterior, en el sistema de referencia original en el que se describieron las condiciones iniciales, el movimiento sigue siendo relativamente complejo.

Si nos pasamos al sistema de referencia del centro de masa, descubrimos el secreto que motiva esta sección:

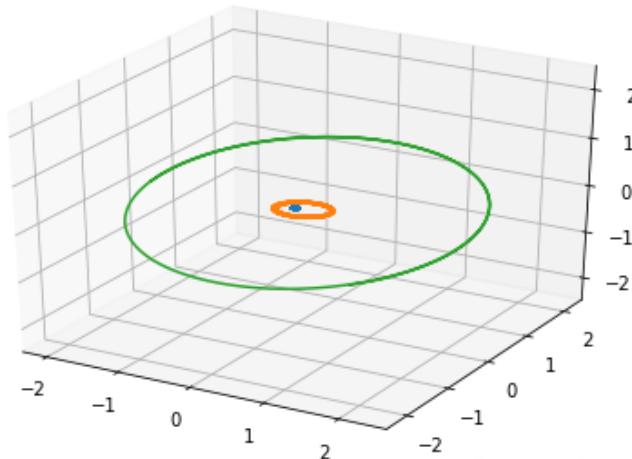
(Algoritmo 7.2)

```
#Gráfica en el sistema de referencia del centro de masa
from pymcel.export import plot_ncuerpos_3d
fig=plot_ncuerpos_3d(rps,vps);
```

*ver Figura 7.2*

La trayectoria de todas las partículas parece ahora bastante predecible. La partícula 0 está cerca al centro de masa (aunque tiene un movimiento de baja amplitud.) La partícula 1, forma con la primera un sistema de dos cuerpos perfectamente reconocible, mientras que la partícula 2 parece orbitar a las primeras dos más masivas, como si fueran una solar, aunque en un plano diferente de la trayectoria que ellas describen entre sí.

En conclusión, a pesar de tratarse en estricto de un sistema de 3 cuerpos, en realidad podemos describirlo como dos sistemas anidados de dos cuerpos: (1) el sistema formado por la partícula 0 y 1 y (2) el sistema formado por este par (como si fuera una sola partícula) y la partícula 2.



**Figura 7.2:** Figura correspondiente al código 7.2.

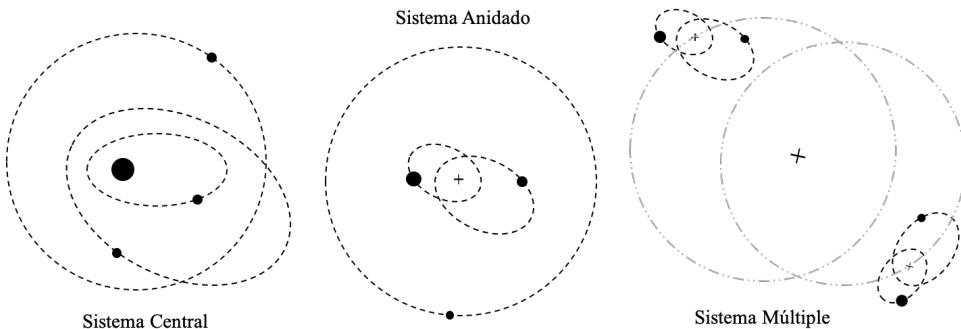
Muchos de los sistemas que encontramos en la naturaleza son como este. Los llamamos **sistemas jerarquicos de N cuerpos**.

### Definición 7.1

**Sistemas jerarquicos de N cuerpos.** Un sistema de N cuerpos se considera jerarquico si su movimiento puede describirse como la combinación o superposición de  $N - 1$  sistemas de dos cuerpos.

Los sistemas jerarquicos de N cuerpos pueden clasificarse en cuatro tipos (ver [Figura 7.3](#)):

- **Sistemas centrales:** En estos sistemas, normalmente dominados por un cuerpo muy masivo, las partículas orbitan un centro de masa común (baricentro) siguiendo trayectorias que pueden describirse como la de un sistema de dos cuerpos con la masa de cada partícula y la masa del cuerpo central. El cuerpo central puede considerarse en reposo. El Sistema Solar es un sistema de este tipo.
- **Sistemas anidados:** En estos sistemas, las partículas se organizan de forma anidada: una partícula órbita a un par de sistemas que a su vez son pares de sistemas y así sucesivamente. El ejemplo de esta sección es un sistema jerarquico anidado.
- **Sistemas múltiples:** En estos sistemas las partículas se agrupan por pares, cuyos centro de masa se orbitan mutuamente como si fueran a su vez sistemas de dos cuerpos. Un sistema cuádruple de estrellas formados por dos sistemas binarios que se orbitan mutuamente forman un sistema jerarquico multiple.



**Figura 7.3:** Tipos de sistemas jerárquicos de  $N$  cuerpos.

#### Definición 7.1 (Cont.)

- **Sistemas mixtos:** Son sistemas jerárquicos que combinan dos o varios de los modelos descritos aquí.

Resolver el problema de los dos cuerpos no es entonces, simplemente, una manera burda de estudiar sistemas más complejos formados por muchos cuerpos interactuantes. En sistemas jerárquicos el problema de dos cuerpos, sumado a la teoría de perturbaciones, es la manera en la que normalmente se estudia la dinámica de los sistemas.

## 7.2. El problema relativo de dos cuerpos

Naturalmente el problema de dos cuerpos es un caso particular del problema de los  $N$  cuerpos y la mayoría de las propiedades que descubrimos en el [Capítulo 6](#) son válidas también en este caso.

Las ecuaciones de movimiento del sistema se reducen a (Ecs. ??):

$$\begin{aligned}\ddot{\vec{r}}_1 &= -\frac{\mu_2}{r_{12}^3} \vec{r}_{12} \\ \ddot{\vec{r}}_2 &= -\frac{\mu_1}{r_{21}^3} \vec{r}_{21}\end{aligned}\tag{7.1}$$

donde  $\vec{r}_{12} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 = -\vec{r}_{21}$  (ver [Figura 7.5](#).)

Al reducirse de orden, las Ecs. (7.1) corresponden a un total de 12 ecuaciones diferenciales escalares de primer orden, con incógnitas  $x_1(t), y_1(t), z_1(t)$ ,  $\dot{x}_1(t), \dot{y}_1(t), \dot{z}_1(t)$  y  $x_2(t), y_2(t), z_2(t)$ ,  $\dot{x}_2(t), \dot{y}_2(t), \dot{z}_2(t)$ .

Las constantes de movimiento son las mismas que encontramos en la [Sección 6.2](#):

- Tres para el momento lineal del centro de masa, Ec. (6.4).
- Tres para la posición inicial del centro de masa, Ec. (6.6).
- Tres para el momento angular total, Ec. (6.7)

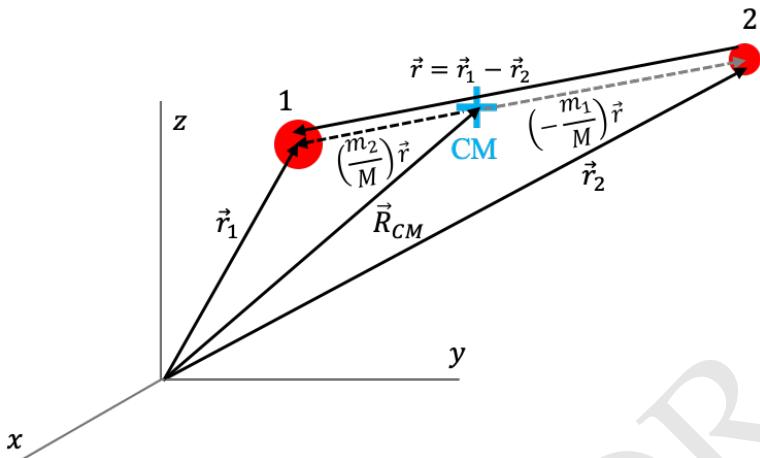


Figura 7.4: Configuración del problema de los dos cuerpos.

■ Una para la energía mecánica total, Ec. (6.16)

El problema tiene entonces, hasta ahora, tan solo 10 cuadraturas (constantes de movimientos) que relacionan algebraicamente 12 variables dependientes. Por lo tanto, si bien en este caso el Teorema de Bruns generalizado, Teo. (6.1) no limita la posibilidad de encontrar otras constantes independientes, con la información disponible, el problema no puede resolverse por cuadraturas.

Hay sin embargo dos “simetrías” que reducen considerablemente el problema y nos ponen en el camino de una solución analítica completa.

La primera simetría la identificamos en la Sección 5.3.2 y esta ilustrada en la ???. Habíamos mostrado que el centro de masa de un sistema de dos cuerpos está siempre localizado sobre la línea que une las dos partículas. Esto implica que la posición de cada partícula puede expresarse como función de una sola cantidad vectorial, a saber, el vector relativo  $\vec{r} \equiv \vec{r}_{12}$ :

$$\begin{aligned}\vec{r}_1 &= \vec{R}_{CM} + \frac{m_2}{M} \vec{r} \\ \vec{r}_2 &= \vec{R}_{CM} - \frac{m_1}{M} \vec{r}\end{aligned}\tag{7.2}$$

y por consiguiente también la velocidad de las partículas es función solamente de la velocidad relativa entre ellas:

$$\begin{aligned}\dot{\vec{r}}_1 &= \vec{V}_{CM} + \frac{m_2}{M} \dot{\vec{r}} \\ \dot{\vec{r}}_2 &= \vec{V}_{CM} - \frac{m_1}{M} \dot{\vec{r}}\end{aligned}\tag{7.3}$$

Resolver el problema de los dos cuerpos consiste entonces, en realidad, en encontrar las funciones  $\vec{r}(t)$  y  $\dot{\vec{r}}(t)$  que describen el movimiento del vector relativo.

Para encontrar la e.d.m. del vector relativo, basta que restemos las Ecs. (7.1) y tengamos en cuenta que, por definición,  $\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}_2 - \ddot{\vec{r}}_1$ .

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu}{r^3} \vec{r} \quad (7.4)$$

donde hemos introducido  $\mu \equiv G(m_1 + m_2)$  que llamaremos en lo sucesivo el *parámetro gravitacional del sistema*.

Con esta simetría, hemos reducido el tamaño del problema de las 12 ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden equivalentes a las Ecs. (7.1), a solo 6 ecuaciones (la versión reducida de la Ec. 7.4), al costo, sin embargo, de abandonar las coordenadas originales y por la misma razón las cuadraturas que encontramos anteriormente.

Si queremos obtener la solución a este problema por el método de cuadraturas, debemos entonces encontrar 6 constantes de movimiento a partir de la Ec. (7.4) y que relacionen las 6 variables del problema:  $x(t), y(t), z(t), v_x(t), v_y(t), v_z(t)$ .

## 7.3. Constantes de movimiento

Es claro que la Ec. (7.4), a diferencia de lo que pasa en el problema de los N cuerpos con la Ec. (6.2), no puede expresarse directamente en cuadraturas sin la ayuda de un factor integrante. Esto implica que en el problema relativo, a diferencia de lo que pasa en el problema de los N cuerpos, el momento lineal no es constante.

### 7.3.1. Momento angular específico relativo

Si pre multiplicamos ambos lados de la Ec. (7.4) por  $\vec{r} \times$  obtenemos:

$$\vec{r} \times \ddot{\vec{r}} = 0$$

que puede expresarse en cuadraturas como:

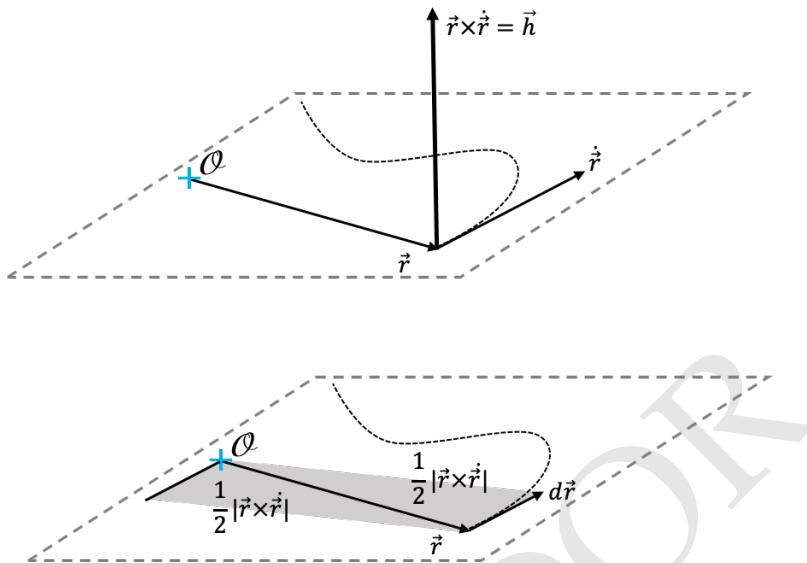
$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) = 0$$

de donde encontramos nuestro primera constante de movimiento:

$$\vec{r} \times \dot{\vec{r}} \equiv \vec{h} \quad (7.5)$$

Si bien esta cantidad no se corresponde con ninguna cantidad dinámica del sistema original, su estructura y unidades nos recuerda la definición de un momento angular específico (momento angular por unidad de masa) y en lo sucesivo llamaremos a  $\vec{h}$  el *momento angular específico relativo* del problema.

La constancia de la cantidad  $\vec{r} \times \dot{\vec{r}}$  tiene una implicación mas trascendental aún. Como sucedió en el problema de los N cuerpos con el momento angular total referido al centro de masa, el vector constante  $\vec{h}$  define un plano invariable, el análogo aquí del plano invariable de Laplace de la Def. (6.2). Este plano, a diferencia del que encontramos en el problema de los N cuerpos, tiene una propiedad distintiva y crucial. Dado que por definición, el vector relativo  $\vec{r}$  y su velocidad  $\dot{\vec{r}}$  son perpendiculares a  $\vec{h}$ , ambos residirán siempre sobre ese plano (ver ??). Como resultado,



**Figura 7.5:** El problema de los dos cuerpos puede reducirse al movimiento de su vector relativo  $\vec{r}$ , un vector libre sin un origen definido. Por simplicidad podemos suponer la existencia un punto imaginario  $\mathcal{O}$  alrededor del cual la punta del vector se mueve. La constancia de  $\vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \vec{h}$  en el problema relativo de los dos cuerpos implica que el movimiento del sistema (trayectoria rayada) se realiza sobre un plano: aquel definido por el vector  $\vec{h}$ . Adicionalmente (panel inferior) la magnitud de este vector se puede relacionar con la razón de cambio del área barrida por el vector relativo (superficie coloreada en el panel inferior.)

la trayectoria del vector relativo se realizará siempre sobre un plano (que en el sistema de referencia del centro de masa será invariable también.) Llamamos a este plano, el **plano orbital** del sistema.

La existencia de un plano orbital en el problema relativo de los dos cuerpos es una simetría nueva que reduce aún más el “tamaño” del sistema. Ahora, podemos escribir explícitamente el vector posición y el vector velocidad sobre el plano en términos de sus componentes en coordenadas cilíndricas (ver la Sección 4.1.2), como:

$$\vec{r} = r\hat{a}_r \quad (7.6)$$

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r}\hat{a}_r + r\dot{\theta}\hat{a}_\theta \quad (7.7)$$

y con esto el problema de los dos cuerpos relativo se reduce a encontrar las cuatro funciones  $r(t)$ ,  $\theta(t)$ ,  $\dot{r}(t)$  y  $\dot{\theta}(t)$  o sus equivalentes cartesianos  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $\dot{x}(t)$  y  $\dot{y}(t)$ .

En el plano orbital, el momento angular específico relativo tiene solo una componente no nula (en dirección  $z$ ) y se puede escribir simplemente como  $\vec{h} : (0, 0, h)$ , donde de las Ecs. (7.6) y (7.7),

$$h = r^2\dot{\theta} \quad (7.8)$$

La magnitud del vector  $\vec{h}$  tiene un significado adicional que viene directamente de la interpretación geométrica de la magnitud del producto cruz  $2dA = |\vec{r} \times d\vec{r}|$  que no es otra cosa que el área del paralelogramo definido por los vectores  $\vec{r}$  y  $d\vec{r}$  (ver Figura ??.):

$$h = 2 \frac{dA}{dt}$$

La constancia  $h$  conduce a uno de los más conocidos teoremas de la mecánica celeste:

### Teorema 7.1

**Teorema de áreas.** La *velocidad areal* del vector relativo (la razón de cambio del área barrida por el vector en su movimiento) en el problema de los dos cuerpos es constante e igual a:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}h$$

donde  $h = |\vec{r} \times \dot{\vec{r}}|$ .

En otros términos, el vector relativo en el problema de los dos cuerpos barre áreas iguales en tiempos iguales.

El teorema de áreas fue introducido originalmente en 1609 por Johanes Kepler en su obra cumbre “*Astronomía Nueva*”. Kepler lo obtuvo por inducción (a diferencia de como lo hicimos aquí por deducción a partir de las ecuaciones de movimiento) con el objetivo específico de describir de la forma más precisa posible el movimiento del planeta Marte alrededor del Sol, del cual contaba con las observaciones precisas realizadas durante varias decadas por el astrónomo danés Tycho Brahe (“*tyco braja*”<sup>35</sup>) Kepler, extendió este resultado “empírico” a todos los planetas, razón por la cual se lo conoce históricamente como la *segunda ley del movimiento planetario*.

Hay dos diferencias importantes entre la segunda ley de Kepler y el teorema de áreas formulado aquí. Mientras que la ley clásica aplica únicamente para el movimiento de planetas en trayectorias cerradas alrededor del Sol (que se asumía inmóvil) la versión moderna del teorema no hace ninguna suposición específica sobre la forma (si es cerrada o abierta) de la trayectoria del vector relativo. Adicionalmente, el teorema de áreas no dice nada sobre la relación entre las masas y se aplica universalmente a cualquier sistema de dos cuerpos, sea ésta la descripción (aproximada) el movimiento de un planeta alrededor del Sol, la de un cometa que sobrevuela a Júpiter o un sistema binario de estrellas de neutrones con masas similares.

Formulado en términos de la velocidad areal, el teorema de áreas es relativamente oscuro. Si usamos la magnitud del vector  $\vec{h}$  (Ec. ) y escribimos:

$$\dot{\theta} = \frac{h}{r^2} \tag{7.9}$$

<sup>35</sup>[https://es.forvo.com/word/tycho\\_brahe/#da](https://es.forvo.com/word/tycho_brahe/#da)

otra manera de interpretar la constancia del momento angular específico es decir que la velocidad angular  $\dot{\theta}$  del vector relativo es mayor en tanto menor sea la magnitud el vector  $r$  (distancia entre las partículas.) Es decir, las partículas del sistema se mueven más rápidamente en los puntos de máxima aproximación que en aquellos en los que están más lejos. Este comportamiento ya lo intuimos al observar la solución numérica de los sistemas que estudiamos en el [Capítulo 6](#).

### 7.3.2. Energía específica relativa

Si pre multiplicamos ambos lados de la Ec. (7.4) por  $\vec{r} \cdot$  obtenemos:

$$\vec{r} \cdot \ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu}{r^3} \vec{r} \cdot \vec{r}$$

que puede expresarse en cuadraturas como:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \dot{\vec{r}}^2 \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{\mu}{r} \right)$$

de donde encontramos una segunda constante de movimiento:

$$\frac{1}{2} \dot{\vec{r}}^2 - \frac{\mu}{r} \equiv \epsilon \quad (7.10)$$

Si bien, como sucedió con  $\vec{h}$ , esta cantidad no se corresponde con ninguna cantidad dinámica del sistema original, su estructura y unidades nos recuerda la definición de una energía mecánica específica (energía mecánica por unidad de masa) y en lo sucesivo llamaremos a  $\epsilon$  la *energía específico relativa* del problema.

De nuevo, teniendo en cuenta que el movimiento se realiza sobre un plano, la energía específica relativa se puede escribir en términos de las componentes cartesianas en la forma:

$$\frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{\mu}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \epsilon, \quad (7.11)$$

o en coordenadas cilíndricas como:

$$\frac{1}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) - \frac{\mu}{r} = \epsilon \quad (7.12)$$

donde al poner  $\epsilon$  del lado derecho de la ecuación estamos reafirmando simbólicamente el hecho de que la fórmula del lado izquierdo es la que define explícitamente la cuadratura que puede, eventualmente, conducirnos a una solución exacta del problema.  $\epsilon$  no es más que un número cuyo valor puede calcularse usando estas fórmulas por ejemplo a partir de las condiciones iniciales del problema.

Hasta aquí hemos conseguido dos cuadraturas del problema:

- La magnitud del momento angular específico relativo, Ec. (7.3.1), cuyo valor es  $h$ .
- La energía específica relativa, Ec. (7.12), cuyo valor es  $\epsilon$ .

Si queremos resolver el problema por caudraturas necesitamos obtener cuatro constantes, el número de variables dependientes del problema relativo sobre el plano orbital. De acuerdo al Teorema de Bruns, para sistema con 3 o más cuerpos no hay ninguna otra constante de movimiento que sea independiente de las anteriores. En el problema relativo de los dos cuerpos, sin embargo, existe una constante nueva que nos permite resolver analíticamente el problema.

### 7.3.3. El vector de excentricidad

Que pasa si postmultiplicamos ambos lados de la Ec. (7.4) por  $\times \vec{h}$ :

$$\ddot{\vec{r}} \times \vec{h} = -\frac{\mu}{r^3} \vec{r} \times \vec{h}$$

Dado que  $\vec{h}$  es constante, el lado izquierdo se puede escribir en cuadraturas:

$$\frac{d}{dt}(\dot{\vec{r}} \times \vec{h}) = -\frac{\mu}{r^3} \vec{r} \times \vec{h} \quad (7.13)$$

Por su parte en el lado derecho:

$$\begin{aligned} \vec{r} \times \vec{h} &= \vec{r} \times (\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) \\ &= \vec{r}(\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}}) - \dot{\vec{r}}(\vec{r} \cdot \vec{r}) \\ &= \vec{r}\vec{r}\dot{r} - \dot{\vec{r}}\vec{r}^2 \end{aligned}$$

que multiplicando por  $-\mu/r^3$  también se puede escribir en cuadraturas como:

$$\begin{aligned} \vec{r} \times \vec{h} &= -\mu \left( \frac{\vec{r}\dot{r}}{r^2} - \frac{\dot{\vec{r}}}{r} \right) \\ &= \frac{d}{dt} \left( \mu \frac{\vec{r}}{r} \right) \end{aligned}$$

Con todo esto la Ec. (7.13) en cuadraturas completas queda:

$$\frac{d}{dt}(\dot{\vec{r}} \times \vec{h}) = \frac{d}{dt} \left( \mu \frac{\vec{r}}{r} \right) \quad (7.14)$$

y de aquí podemos identificar una nueva y complementamente independiente constante de movimiento:

$$\frac{\dot{\vec{r}} \times \vec{h}}{\mu} - \frac{\vec{r}}{r} \equiv \vec{e} \quad (7.15)$$

La razón por la que hemos expresado esta integral dividiendo la cuadratura en la Ec. (7.14) por  $\mu$  es para hacer a la constante resultante adimensional (recordemos que  $\mu$  tiene unidades de  $L^3/T^2$ ) lo que es mas conveniente para su manipulación numérica.

¿Cuál es el significado geométrico o físico del vector  $\vec{e}$ ? A diferencia de lo que pasó con  $\vec{h}$  y con  $\epsilon$ , no es trivial encontrar ahora una cantidad dinámica que podamos asociar con  $\vec{e}$ . Este vector, sin embargo ha aparecido en distintos contextos en

la historia de la física y las matemáticas, desde la mecánica celeste misma, pasando por el cálculo vectorial hasta la más reciente mecánica cuántica (ver recuadro *Un poco de historia, Laplace, de la mecánica celeste a la mecánica cuántica.*)

No es difícil mostrar que  $\vec{e}$  no es enteramente independiente de  $\vec{h}$  y  $\epsilon$ . Si se calcula la magnitud del vector se obtiene la relación (ver problemas al final del capítulo):

$$e = \sqrt{1 + \frac{2\epsilon h^2}{\mu^2}} \quad (7.16)$$

que será de gran utilidad en lo que queda de este capítulo y en general en la mecánica celeste.

#### Un poco de historia

**Laplace, de la mecánica celeste a la mecánica cuántica.** El vector de excentricidad tiene una historia muy interesante.

## 7.4. La ecuación de la trayectoria

Una manera de encontrar una interpretación geométrica para el vector  $\vec{e}$  es comparar su dirección con la de otros vectores en el plano orbital. Sabemos, por su definición en la Ec. (7.15) que  $\vec{e}$  está en el mismo plano que  $\vec{r}$  y  $\dot{\vec{r}}$ . Si proyectamos  $\vec{e}$  sobre el vector posición obtenemos:

$$\vec{e} \cdot \vec{r} = \frac{1}{\mu} \vec{r} \cdot (\dot{\vec{r}} \times \vec{h}) - \vec{r} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$$

Utilizando la propiedad cíclica del tripe producto escalar (Ec. 4.9) el primer término del lado derecho de la ecuación queda:

$$\begin{aligned} \vec{r} \cdot (\dot{\vec{r}} \times \vec{h}) &= \vec{h} \cdot (\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) \\ &= \vec{h} \cdot \vec{h} \\ &= h^2 \end{aligned}$$

de donde, la proyección es simplemente:

$$\vec{e} \cdot \vec{r} = \frac{h^2}{\mu} - r$$

Si ahora hacemos  $\vec{e} \cdot \vec{r} = er \cos \theta_{er}$ , con  $\theta_{er}$  el ángulo entre el vector  $\vec{e}$  y el vector posición  $\vec{r}$  sobre el plano orbital, la proyección se puede escribir como:

$$er \cos \theta_{er} = \frac{h^2}{\mu} - r$$

de la que podemos despejar explícitamente  $r$  en función de  $\theta_{er}$ :

$$r = \frac{h^2/\mu}{1 + e \cos \theta_{er}}, \quad (7.17)$$

que es claramente la ecuación de una cónica con *semilatus rectum*,  $p = h^2 / \mu$ , excentricidad  $e = |\vec{e}|$  y anomalía verdadera  $f = \theta_{er}$ .

No solo hemos encontrado la interpretación geométrica para el vector  $\vec{e}$  (el vector está dirigido hacia el periapsis de la cónica y su magnitud es la excentricidad de la misma) sino que además encontramos con este sencillo procedimiento la forma general de la trayectoria descrita por el vector relativo en el problema de los dos cuerpos. Este resultado lo podemos formular como un teorema general:

### Teorema 7.2

**Primer teorema del movimiento orbital.** El extremo del vector relativo en el problema de los dos cuerpos, describe en el plano orbital una trayectoria cónica con foco en el origen imaginario  $\mathcal{O}$  (extremo del vector relativo), periapsis en la dirección del vector  $\vec{e} = (\dot{\vec{r}} \times \vec{h}) / \mu - \vec{r} / r$ , excentricidad igual a  $|\vec{e}| = \sqrt{1 + 2\epsilon h^2 / \mu^2}$  y semilatus rectum  $p = h^2 / \mu$ .

Este teorema es el equivalente moderno a la primera ley (empírica) de Kepler del movimiento planetario, formulada al mismo tiempo con su segunda ley (ver Teo. ??) en 1609 en su texto “*Astronomía nueva*”. A diferencia de la deducción realizada aquí, Kepler, después de estudiar el movimiento de Marte, esencialmente adivinó que su trayectoria debía ser una elipse. Adicionalmente y a diferencia de la primera ley de Kepler, el primer teorema del movimiento orbital formulado aquí no se restringe al caso de trayectorias elípticas, para las cuáles  $|\vec{e}| < 1$ , sino que en principio predice que la trayectoria del vector relativo podría ser cualquier cónica incluyendo también una línea recta, una parábola o una hipérbola.

Una cosa es el movimiento del vector relativo y otra la trayectoria que describen las partículas mismas en el espacio ¿son también esas trayectorias cónicas?

Usando las Ecs. (7.2) y la solución en la Ec. (7.17) puede probarse que la distancia de cada partícula al centro de masa esta dada por:

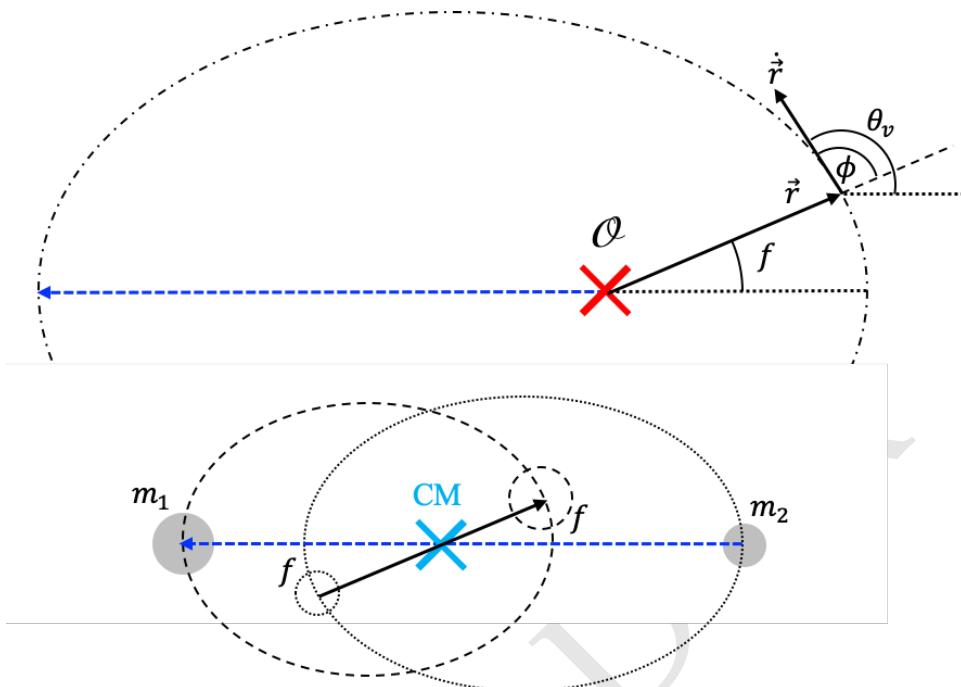
$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{(m_2/M)h^2/\mu}{1 + e \cos f} \\ r_2 &= \frac{(m_1/M)h^2/\mu}{1 + e \cos f} \end{aligned} \tag{7.18}$$

Este resultado implica las dos partículas tienen trayectorias cónicas con idéntica excentricidad, foco en el centro de masa y *semilatus rectum* proporcional a la distancia de cada una al centro de masa:

$$p_1 = \frac{m_2}{M} p \tag{7.19}$$

$$p_2 = \frac{m_1}{M} p \tag{7.20}$$

En la [Figura 7.6](#) mostramos un ejemplo de la trayectoria elíptica del vector relativo y las trayectorias correspondientes de las dos partículas.



**Figura 7.6:** Trayectorias del vector relativo (arriba) y de las partículas individuales (abajo). Las trayectorias tienen todas la misma excentricidad. El foco de la trayectoria del vector relativo es un punto arbitrario en el espacio  $\mathcal{O}$ , mientras que el foco de las trayectorias de las partículas es el centro de masa (CMD). El vector relativo se muestra en dos posiciones: en el apoapsis (flecha rayada) y en un punto cualquiera de la trayectoria (flecha continua.) Nótese que la anomalía verdadera  $f$  es igual en las tres trayectorias.

## 7.5. La velocidad relativa

En la sección anterior mostramos que es posible, sin resolver el problema relativo de los dos cuerpos (es decir sin encontrar expresiones para la posición y velocidad relativa como función del tiempo), usar una de las cuadraturas (el vector de excentricidad) para escribir la ecuación en coordenadas cilíndricas de la trayectoria (Ec. 7.17.) Usando esa ecuación podemos encontrar el vector posición  $\vec{r} : (r, \theta)$  para cualquier valor de  $\theta$ .

Ahora bien, ¿podemos, de forma análoga, saber cuál es el vector velocidad  $\dot{\vec{r}} : (\dot{r}, r\dot{\theta})$ ?

La magnitud del vector velocidad (rapidez) está contenida en la energía específica relativa:

$$\frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} = \epsilon,$$

de modo que si sabemos  $\epsilon$  y  $r$  (este último se puede obtener con la Ec. ??) podemos obtener  $v$ .

De otro lado es posible, usando esta cuadratura escribir una expresión general para  $\epsilon$  que será de mucha utilidad en lo sucesivo.

Para ello partimos de reconocer que podemos, para calcular el valor de la energía específica relativa, usar cualquier punto sobre la trayectoria. En particular, en el periapsis donde  $r = q = a(1 - e)$  (con  $e \neq 1$ ) y  $h = qv$ , es decir  $v = h/q$ :

$$\epsilon = \frac{h^2}{2a^2(1-e)^2} - \frac{\mu}{a(1-e)}$$

Después de una sencilla manipulación algebraica obtenemos:

$$\epsilon = -\frac{\mu}{2a} \quad (7.21)$$

Esta expresión es válida únicamente en el caso en el que  $e \neq 1$ . En el caso de la parábola,  $e = 1$  puede mostrarse que  $\epsilon = 0$ .

Si reemplazamos en la cuadratura de la energía específica relativa (Ec. 7.10) obtenemos:

$$v^2 = \mu \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right) \quad (7.22)$$

Donde de nuevo esta relación es válida únicamente si  $e \neq 1$ . Llamamos a esta relación la *vis viva*.

Una interesante propiedad de la *vis viva* es que dada una distancia relativa inicial  $r$  y una rapidez relativa  $v$ , el valor del semieje mayor de la órbita resultante será independiente de la dirección de la velocidad:

$$a = \frac{\mu}{2\mu/r - v^2}$$

La *vis viva* nos permite calcular la magnitud de la velocidad, pero ¿cuál es la dirección de  $\vec{v}$ ?

Podemos usar para ello el vector  $\vec{h}$ , cuya magnitud podemos escribir como:

$$h = |\vec{r} \times \dot{\vec{r}}| = vr \sin \phi$$

donde  $\phi$  es el ángulo entre el vector posición y la velocidad (ver Figura 7.6) que llamaremos en lo sucesivo el *argumento de la velocidad* y que en virtud de la expresión anterior está dado por:

$$\sin \phi = \frac{h}{rv}$$

Finalmente, el ángulo que forma la velocidad respecto a la dirección del periapsis (dirección del vector  $\vec{e}$ ) estará dada por:

$$\theta_v = \phi + f$$

## 7.6. Teoremas del movimiento orbital

En las secciones anteriores hemos usado las constantes de movimiento para deducir dos importantes teoremas sobre del problema relativo de los dos cuerpos que fueron descubiertas originalmente por Kepler y que se conocen históricamente como las leyes del movimiento planetario.

En 1619, Kepler publicó su libro “*La armonía de los mundos*” y en el revelo la que sería una de las más increíbles leyes del movimiento planetario (al menos para la época): la ley armónica. ¿Cuál es en términos modernos el teorema que corresponde a esta ley?

### Teorema 7.3

**Teorema armónico.** Dado un sistema de dos cuerpos cuyo movimiento relativo es tal que  $e \neq 1$ , la velocidad angular promedio  $n = \langle \dot{\theta} \rangle$  del vector relativo es independiente de la excentricidad de la órbita, y se relaciona con el valor absoluto del semieje mayor de la órbita relativa  $|a|$  a través:

$$n^2 |a|^3 = \mu \quad (7.23)$$

Naturalmente esta no es la forma tradicional en la que conocemos la tercera ley de Kepler. Esta última fue formulada solo en el caso de movimiento sobre una órbita elíptica, mientras que el teorema general formulado arriba aplica también en el caso de órbitas hiperbólicas.

En realidad la ley armónica es un corolario del teorema de áreas. En el caso, por ejemplo, de una órbita elíptica, que es una órbita con período  $T$ , la velocidad areal se puede escribir como:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{A}{T} = \frac{\pi ab}{T}$$

donde hemos aprovechado el hecho que la velocidad areal es constante para escribirla como la razón entre el área total de la elipse  $A = \pi ab$  y el período de la misma.

Si tenemos ahora en cuenta que  $b = a\sqrt{1 - e^2}$ ,  $h^2 = \mu a(1 - e^2)$  y  $dA/dt = h/2$  es fácil deducir que:

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{\mu}{4\pi^2} \quad (7.24)$$

que es la forma original de la ley armónica de Kepler: “*la razón entre el cubo del semieje mayor y el cuadrado del período orbital de los planetas es constante*”.

Lo que no sabía Kepler era la relación de esa constante con constantes físicas (la masa total del sistema) y geométricas (el factor  $4\pi^2$ ).

Para obtener a partir de la Ec. (7.24) la relación entre  $a$  y  $n$  en el teorema armónico (Teo. 7.3), basta reconocer, de un lado, que en una órbita periódica la velocidad angular promedio es:

$$n = \frac{2\pi}{T}$$

y escribir la Ec. (7.24) en la forma:

$$a^3 \left( \frac{2\pi}{T} \right)^2 = \mu$$

Esta última es exactamente la relación  $n^2 a^3 = \mu$  del teorema armónico.

En los problemas al final del capítulo el lector podrá demostrar el teorema armónico en el caso de una órbita hiperbólica.

Podemos finalmente sintetizar los resultados de esta sección enumerando en un mismo lugar los teoremas fundamentales del movimiento relativo de dos cuerpos:

- **Primer teorema del movimiento orbital** (Teo. 7.2). El vector relativo de un sistema de dos cuerpos describe una trayectoria cónica.
- **Teorema de áreas** (Teo. 7.1). La tasa de cambio del área barrida por el vector relativo es constante.
- **Teorema armónico** (Teo. 7.3). El producto del cuadrado de la velocidad angular promedio del vector relativo y el cubo del valor absoluto del semieje mayor de su trayectoria es constante.

Hoy, por su importancia histórica, estos teoremas son todavía conocidos como las leyes del movimiento planetario de Kepler. Sin embargo, entre las versiones originales de las leyes formuladas por Kepler y las formas rigurosas de los teoremas presentadas aquí hay importantes diferencias. Por la misma razón en lo sucesivo y a través de todo este libro nos seguiremos refiriendo a estos resultados como los **teoremas del movimiento orbital** en lugar de llamarlos, como se acostumbra en todas partes, las leyes de Kepler.

BORRADOR

# Bibliografía

- [1] T. M. APOSTOL, *CALCULUS volume I One-Variable Calculus, with an Introduction to Linear Algebra*, Blaisdell Publishing Company, John Wiley & Sons, 1967.
- [2] T. M. APOSTOL, *Calculus, Volume II: Multi-Variable Calculus and Linear Algebra, with Applications to Differential Equations and Probability*, John Wiley & Sons, 1969.
- [3] L. K. BABADZHANYANTS, *Existence of the Continuations in the N-Body Problem*, Celestial Mechanics, 20 (1979), pp. 43–57, <https://doi.org/10.1007/BF01236607>.
- [4] L. K. BABADZHANYANTS, *On the global solution of the N-body problem*, Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, 56 (1993), pp. 427–449, <https://doi.org/10.1007/BF00691812>.
- [5] J. BARROW-GREEN, *The dramatic episode of sundman*, Historia Mathematica, 37 (2010), pp. 164 – 203, <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.hm.2009.12.004>, <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0315086009001360>.
- [6] R. R. BATE, D. D. MUELLER, AND J. E. WHITE, *Fundamentals of astrodynamics*, Courier Corporation, 1971.
- [7] K. BATYGIN AND M. E. BROWN, *Evidence for a distant giant planet in the solar system*, The Astronomical Journal, 151 (2016), p. 22.
- [8] H. BRUNS, *Über die integrale des vielkörper-problems*, Acta Mathematica, 11 (1887), pp. 25–96.
- [9] S. CHANDRASEKHAR, *Newton's Principia for the common reader*, Oxford University Press, 2003.
- [10] R. CLAUSIUS, *On a mechanical theorem applicable to heat*, The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science, 40 (1870), pp. 122–127.
- [11] J. T. DEVREESE AND G. V. BERGHE, *'Magic is no magic': the wonderful world of Simon Stevin*, WIT Press, 2008.
- [12] F. DIACU, *The solution of the n-body problem*, The mathematical intelligencer, 18 (1996), pp. 66–70.
- [13] H. W. EVES, *A Survey of Geometry: Rev. Ed*, Allyn and Bacon, 1972.
- [14] R. GAVAZZI, C. ADAMI, F. DURRET, J.-C. CUILLANDRE, O. ILBERT, A. MAZURE, R. PELLO, AND M. P. ULMER, *A weak lensing study of the coma cluster*, Astronomy & Astrophysics, 498 (2009), pp. L33–L36.
- [15] H. GOLDSTEIN, C. POOLE, AND J. SAFKO, *Classical mechanics*, 2002.

- [16] A. C. HINDMARSH, *Odepack, a systematized collection of ode solvers*, Scientific computing, (1983), pp. 55–64.
- [17] E. JULLIARD-TOSEL, *Brun's theorem: The proof and some generalizations*, Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, 76 (2000), pp. 241–281.
- [18] P. S. LAPLACE ET AL., *Oeuvres complètes de Laplace*, Gautier-Villars, 1835.
- [19] I. NEWTON AND E. HALLEY, *Philosophiae naturalis principia mathematica*, vol. 62, Jussu Societatis Regiae ac typis Josephi Streater, prostant venales apud Sam . . . , 1780.
- [20] H. POINCARÉ, *Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique*, Acta mathematica, 13 (1890), pp. A3–A270.
- [21] H. POINCARÉ, *New methods of celestial mechanics*, vol. 13, Springer Science & Business Media, 1992.
- [22] H. POLLARD, *A sharp form of the virial theorem*, Bulletin of the American Mathematical Society, 70 (1964), pp. 703–705.
- [23] W. H. PRESS, S. A. TEUKOLSKY, W. T. VETTERLING, AND B. P. FLANNERY, *Numerical recipes 3rd edition: The art of scientific computing*, Cambridge university press, 2007.
- [24] W. QIU-DONG, *The global solution of the n-body problem*, Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, 50 (1990), pp. 73–88.
- [25] P. G. ROLL, R. KROTKOV, AND R. H. DICKE, *The equivalence of inertial and passive gravitational mass*, Annals of Physics, 26 (1964), pp. 442–517.
- [26] D. SOUAMI AND J. SOUCHAY, *The solar system's invariable plane*, Astronomy & Astrophysics, 543 (2012), p. A133.
- [27] M. F. STRUBLE AND H. J. ROOD, *A compilation of redshifts and velocity dispersions for aco clusters*, The Astrophysical Journal Supplement Series, 125 (1999), p. 35.
- [28] K. F. SUNDMAN, *Mémoire sur le problème des trois corps*, Acta Math., 36 (1913), pp. 105–179, <https://doi.org/10.1007/BF02422379>, <https://doi.org/10.1007/BF02422379>.
- [29] F. WILCZEK, *Whence the force of  $f=ma$ ? i: Culture shock*, Physics Today, 57 (2004), pp. 11–12.
- [30] F. ZWICKY, *On the Masses of Nebulae and of Clusters of Nebulae*, Astrophysical Journal, 86 (1937), p. 217, <https://doi.org/10.1086/143864>.