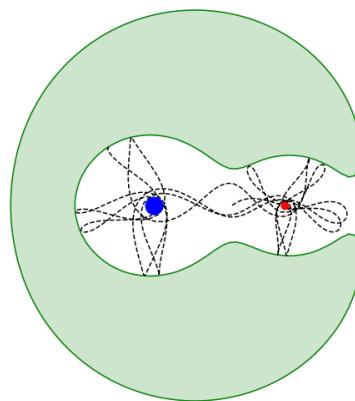


Mecánica Celeste y Analítica

Teoría, problemas y algoritmos



Jorge I. Zuluaga

Profesor titular de Física y Astronomía

Instituto de Física, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Antioquia

2 de octubre de 2019

BORRADOR

Índice general

1.	Prefacio	7
1.1.	¿Otro libro de mecánica celeste?	8
1.2.	Mecánica celeste y mecánica analítica	9
1.3.	Mecánica celeste en la era de la información	10
1.4.	Mecánica celeste en Python	10
1.5.	Mecánica celeste con SPICE	12
1.6.	¿Qué hace distinto a este libro?: un decálogo	13
2.	Agradecimientos	17
3.	Introducción	19
3.1.	¿Cómo se organiza este libro?	19
3.2.	¿Cómo usar este libro?	26
3.3.	Mecánica celeste en <i>libretas</i>	27
3.3.1.	Instalación de las libretas	28
3.4.	Idioma y Notación	28
3.4.1.	Extranjerismos y pronunciación	28
3.4.2.	Notación matemática	29
3.5.	Estructura del libro	30
3.5.1.	Cajas de texto	30
3.5.2.	Algoritmos	31
3.6.	Figuras interactivas y animaciones	34
4.	Fundamentos	37
4.1.	Mecánica Newtoniana	37
4.1.1.	Sistemas de coordenadas	38
4.1.2.	Propiedades cinemáticas	40
4.1.3.	La ecuación de movimiento (e.d.m.)	41
4.1.4.	Integración de la e.d.m.	43
4.1.5.	Integración por cuadraturas	43
4.1.6.	Integración numérica de la e.d.m.	46
5.	El Problema de los N cuerpos	55
5.1.	Formulación del problema	55
5.1.1.	Motivación	55
5.1.2.	Enunciado físico y matemático	56
5.2.	Constantes de movimiento	58

5.2.1.	Momentum lineal del centro de masa	59
5.2.2.	Posición del centro de masa	60
5.2.3.	Momentum angular	60
5.2.4.	Energía potencial de N cuerpos	63
5.2.5.	Conservación de la energía	66
5.2.6.	Síntesis y teorema de Bruns	69
5.3.	El teorema del Virial	70
5.3.1.	Aplicación: la masa de cúmulos de galaxias	73
5.4.	Solución numérica	75
5.4.1.	Unidades canónicas	76
5.4.2.	Las ecuaciones de movimiento de primer orden	78
5.4.3.	Algoritmo de solución	80
5.4.4.	Figuras interactivas	87
	Bibliografía	91

Índice de figuras

1.1.	Imagen procesada de Ultima Thule, el objeto transneptuniano sobrevolado por la sonda New Horizons en 2019 (crédito: NASA/Johns Hopkins University Applied Physics Laboratory/Southwest Research Institute/Roman Tkachenko.)	7
1.2.	Figura correspondiente al código 1.1.	12
3.1.	Retrato de Johanes Kepler, copia de un original de 1610 de pintor desconocido y que se conserva en el monasterio Benedictino de Kremsmünster	32
3.2.	Figura correspondiente al código 3.3.	34
3.3.	Gráfico de las funciones trigonométricas básicas, en el intervalo de interés (gráfico generado).	35
4.1.	Definición de los sistemas de coordenadas usadas en este texto	38
4.2.	Figura correspondiente al código 4.2. La figura muestra la solución numérica a la e.d.m. del sistema correspondiente al ejemplo 1.	50
4.3.	Figura correspondiente al código 4.3.	52
4.4.	Figura correspondiente al código 4.4. Gráfico de la coordenada x para el sistema del ejemplo 2.	53
5.1.	El problema de los N cuerpos: dadas las condiciones iniciales de un conjunto de N partículas puntuales, predecir la posición y velocidad de las partículas en cualquier instante futuro.	57
5.3.	Mosaico en falso color del cúmulo de Galaxias de Coma que combina imágenes en luz visible e infrarrojo. Crédito: NASA / JPL-Caltech / L. Jenkins (GSFC).	74
5.4.	Sistema de tres cuerpos de ejemplo (todas las cantidades están expresadas en unidades canónicas)::t	81
5.5.	Figura correspondiente al código 5.2.	84
5.6.	Figura correspondiente al código 5.3.	86
5.7.	Figura correspondiente al código 5.4.	87
5.2.	Fotografía de Henri Poincaré hacia el año 1886, unos años antes de realizar su trabajo histórico sobre el problema de los tres cuerpos (Foto: Eugène Pirou)	88

BORRADOR

Capítulo 1

Prefacio

En el mismo año en el que escribo estas palabras, celebramos el centenario de la histórica observación de un eclipse total de Sol, liderada por *Sir Arthur Eddington* y que permitió la primera confirmación experimental de las predicciones de la teoría general de la relatividad. Hace tan solo unos meses, una nave espacial, la sonda **New Horizons**, sobrevoló el cuerpo astronómico más remoto fotografiado por nuestra especie, el objeto transneptuniano **2014 (MU69) “Ultima Thule”**; la misma sonda, cinco años antes, había pasado “rozando” la superficie de Plutón, enviándonos imágenes inesperadas de un mundo sorprendente. Muy lejos de allí, y también en el año en el que escribo este prefacio, dos naves espaciales, una japonesa, la sonda **Hayabusa 2** y la otra estadounidense, **OSIRIS-REx**, transmitieron imágenes impactantes desde la superficie de dos pequeños asteroides, cuerpos que visitaron con el objeto de traer muestras a la Tierra.



Figura 1.1: Imagen procesada de Ultima Thule, el objeto transneptuniano sobrevolado por la sonda New Horizons en 2019 (crédito: NASA/Johns Hopkins University Applied Physics Laboratory/Southwest Research Institute/Roman Tkachenko.)

Todas estas hazañas de exploración y conocimiento fueron posibles gracias a la **Mecánica Celeste**. Esta disciplina científica, combinación asombrosa de astronomía, física y matemáticas, comenzó con el trabajo teórico pionero de *Johannes Kepler* a principios de los 1600; se estableció con la obra cumbre de *Sir Isaac Newton*, los *Principios Matemáticos de la Filosofía Natural* [12], publicada a finales de los 1600; y alcanzó su apogeo entre los 1700 y los 1800 con los trabajos de matemáticos y astrónomos como *Edmund Halley*, *Leonhard Euler*, *Pierre-Simon Laplace*, *Joseph-Louis Lagrange*, *William Rowan Hamilton* y *Henri Poincaré* (entre muchos otros que mencionaremos en este libro).

Este libro presenta una visión panorámica de la mecánica celeste y en general de la **mecánica analítica** o **mecánica clásica**, que se desarrolló de forma paralela a la primera, inspirada, en muchos casos, por sus problemas. El texto está dirigido especialmente a quiénes, por su formación o trabajo, están interesados en la aplicación de la mecánica celeste en astronomía o en ingeniería aeroespacial. Su extensión, énfasis y nivel de profundidad lo hace especialmente adecuado para estudiantes de pregrado (licenciatura o bachillerato, dependiendo del país) de cualquier programa científico o técnico, especialmente astronomía, física o ingeniería aeroespacial. Su enfoque computacional, lo podría hacer, además, útil como material de referencia para profesionales de estas disciplinas.

1.1. ¿Otro libro de mecánica celeste?

Al escribir este libro, no pretendo hacer un compendio exhaustivo de la Mecánica Celeste, que, durante más de 400 años de historia se ha convertido en una disciplina científica basta y en constante desarrollo.

Muchos textos en la materia han sido escritos desde los tiempos de Newton, la mayoría en las últimas décadas. Algunos presentan detallados y rigurosos desarrollos matemáticos. Otros están orientados específicamente al Sistema Solar o al movimiento de satélites y vehículos espaciales. Muchos más son buenos libros de texto, la mayoría dirigidos a estudiantes de posgrado (la mecánica celeste es considerada una línea de profundización, tanto en física como en astronomía.) También se han escrito algunos libros divulgativos y al alcance de aficionados.

La bibliografía de este libro recoge una lista de importantes referencias en la materia, que serán citados a lo largo de sus capítulos, y que, de antemano, invito a los lectores a explorar con curiosidad para no quedarse con la punta de el inmenso *iceberg* que apenas alcanzará a asomarse en estas páginas.

Siendo este el caso ¿para qué escribir un libro más de mecánica celeste? Existen dos razones fundamentales que me motivaron a emprender esta aventura.

La primera es que, como mencione antes, la mayoría de los libros de mecánica celeste están dirigidos a estudiantes con una formación media o avanzada en matemáticas, mecánica newtoniana y mecánica analítica. Como se acostumbra decir, tienen un nivel de posgrado. En contraste, el número de textos al “alcance” de estudiantes de los primeros años universitarios, no es muy grande. Escribo este libro para contribuir a enriquecer precisamente ese “nicho”.

Podría argumentarse que la mecánica celeste, como aplicación específica de la mecánica, es un tema especializado y de allí que sus textos estén dirigidos a estudiantes más avanzados. Sin embargo, la importancia de esta disciplina en la historia de la astronomía y de la física, así como su potencial para describir fenómenos

fascinantes, desde el movimiento de planetas y naves espaciales, hasta la colisión de agujeros negros, hace de la mecánica celeste un medio educativo excelente para introducir conceptos teóricos en física y astronomía, que, sin un contexto y motivación apropiado, son difíciles de digerir.

Un buen libro de mecánica celeste o mecánica analítica, sin importar su nivel, debería poder ser estudiado por cualquier estudiante, incluso de pregrado. Esa ha sido la premisa en muchos centros académicos. Pero la realidad es más compleja. Como cualquier profesor sensible sabe, para valorar realmente los logros intelectuales del pasado, entender las motivaciones que llevaron a los padres de una disciplina a introducir hipótesis o formular las leyes de la misma, se necesita experiencia académica. Experiencia que la mayoría de los estudiantes de pregrado no tienen. No es solo un problema de nivel matemático, es también un problema de falta de exposición a la materia.

Este libro, pretende ser un buen *primer* libro de mecánica celeste y mecánica analítica. Un primer escalón para abordar, ya con experiencia, libros más avanzados.

1.2. Mecánica celeste y mecánica analítica

La segunda razón, y la original para mi como profesor del pregrado de Astronomía en la Universidad de Antioquia, fue la necesidad de escribir un texto de mecánica celeste que permitiera además una formación en los principios y métodos de la mecánica analítica (mecánica teórica o mecánica clásica). Esos principios y métodos son instrumentales en la formulación de la mecánica cuántica y lo son además en versiones modernas de otras áreas de la física clásica, como la relatividad o la electrodinámica. La mecánica analítica es indispensable entonces en la formación de cualquier estudiante de ciencias físicas.

En la inmensa mayoría de los textos clásicos de mecánica celeste, los resultados se derivan usando, casi exclusivamente, los métodos de lo que llamaremos aquí el **formalismo vectorial o geométrico de la mecánica**. En este formalismo (originalmente introducido por Newton y desarrollado posteriormente por Euler) las fuerzas juegan el papel central en la descripción de la dinámica (*dime cuánto te halan y te diré cómo te mueves.*)

Desde los trabajos pioneros de matemáticos y “físicos” de los 1700 y 1800, tales como *Alambert*, *Lagrange*, *Hamilton* y *Jacobi*, se hizo evidente que algunos problemas complejos de mecánica celeste podían abordarse usando un **formalismo analítico de la mecánica**. En este formalismo, los sistemas se describen usando *funcionales* tales como el *Lagrangiano* o el *Hamiltoniano*, que contienen toda la información relevante del sistema, sus restricciones y simetrías (*dime cuál es tu hamiltoniano y no solo te diré para dónde vas sino también cómo eres.*)

Un caso ilustrativo, muy popular y reciente, de como el formalismo analítico de la mecánica es aplicado hoy, de forma generalizada, en mecánica celeste, es la “predicción” de un nuevo planeta en el Sistema Solar, más allá del cinturón de Kuiper, cuya existencia, a la fecha, no se ha confirmado, ni rechazado [5]. Este trabajo también es la punta de un inmenso “iceberg” de literatura científica en mecánica celeste en la que el formalismo analítico es protagonista.

Más allá entonces de la necesidad práctica de juntar a la mecánica celeste y a la mecánica analítica en un mismo texto, de modo que sirva a estudiantes de pro-

gramas académicos como astronomía o ingeniería aeroespacial, este libro presenta este particular “matrimonio” entre dos disciplinas clásicas de la astronomía y la física como lo que es: una relación estrecha entre dos cuerpos de conocimiento inseparables.

1.3. Mecánica celeste en la era de la información

Un ingrediente adicional hace a este libro diferente. Me refiero al enfasis especial que daremos a los algoritmos de la mecánica celeste a través de todo el libro.

Es un hecho reconocido que la complejidad de muchos problemas de mecánica celeste, en particular aquellos con un interés práctico tales como el diseño de trayectorias de vehículos espaciales, la predicción de la posición precisa de asteroides y cometas que pueden amenazar nuestro planeta o la predicción a largo plazo de la posición de los cuerpos del sistema solar y otros sistemas planetarios, ha exigido, casi desde los tiempos de Kepler, el desarrollo y aplicación de métodos numéricos y, más recientemente, su implementación en calculadores y computadores.

En este sentido, la relación de la mecánica celeste con *algoritmos* de toda clase, no es comparable con la relación, principalmente utilitaria, que tienen la mayoría de las áreas de la física con la computación. Podría decirse, que hoy, es casi impensable saber de mecánica celeste, sin estar familiarizado también con sus algoritmos.

Pensando en esto, todo el contenido del libro ha sido elaborado usando *libretas* o *notebooks* del Proyecto Jupyter¹. Estas libretas pueden ser obtenidas y usadas por el lector para interactuar con y modificar los algoritmos. Este medio tecnológico permite además aprovechar gráficos interactivos y animaciones (disponibles en la versión electrónica del texto) para entender mejor conceptos que pueden ser difíciles.

En la versión impresa, los algoritmos se presentarán en cajas especiales de texto como esta:

```
import math
e=0.3
M=0.5
E=M
Eo=2*M
while abs(E-Eo)>0.01:
    Eo=E
    E=M+e*math.sin(E)
```

¿Puede el lector adivinar qué hace este algoritmo? ¿sabe en qué lenguaje de programación está escrito?

1.4. Mecánica celeste en Python

Es casi imposible escribir un libro con algoritmos sin comprometerse con un lenguaje de programación específico (especialmente si queremos que los algoritmos funcionen.) En el caso de esta edición del libro, el lenguaje elegido es Python.

¹<https://jupyter.org>

Esta siempre será una apuesta arriesgada. Aunque la mecánica celeste y sus algoritmos no pasarán de “moda”, los lenguajes de programación van y vienen. Es un hecho (poco reconocido) que cientos de libros científicos acumulan polvo por haber comprometido su contenido con lenguajes de programación que hoy no son tan populares (BASIC o Pascal por ejemplo).

No sabemos si Python y este libro sufrirán la misma suerte. Pero hay tres hechos que *sugieren* que la popularidad de este lenguaje podría durar más de lo esperado (o al menos esa es mi esperanza).

El primero es que su sintaxis es muy similar a la del “lenguaje natural”. Consideré, por ejemplo, el algoritmo presentado antes (que ya lo sabe, está escrito en Python) o el siguiente algoritmo, aún más simple:

```
from math import pi
for n in range(1,5):
    print("pi a la",n,"es",pi**n)
```

```
pi a la 1 es 3.141592653589793
pi a la 2 es 9.869604401089358
pi a la 3 es 31.006276680299816
pi a la 4 es 97.40909103400242
```

Es difícil que estos algoritmos se escriban de manera tan natural en casi cualquier otro lenguaje de programación popular en ciencia (C, FORTRAN o Java.) Este hecho, no solo facilita el aprendizaje del lenguaje, sino también la legibilidad de los algoritmos.

El segundo hecho que demuestra el promisorio futuro de Python como lenguaje de la computación científica, es la creciente cantidad paquetes, en todas las disciplinas de la ciencia y la técnica, que se escriben permanentemente en este lenguaje y que están disponibles en [repositorios públicos](#)². Además, herramientas informáticas muy conocidas (bibliotecas de rutinas, bases de datos, sistemas de información, etc.) escritas originalmente en otros lenguajes, han sido ahora traducidas a Python (*pythonizadas* si quieren) con el único propósito de que puedan ser usadas por la creciente comunidad de desarrolladores en este lenguaje.

Python se está convirtiendo, y esta es una conjetaura mía, en depositario de décadas de experiencia en ciencia computacional. ¿Cambiará esta tendencia pronto? Lo dudo (o al menos así lo espero, por el bien de este libro).

Una última razón, pero no por ello, menos importante, para elegir Python como el idioma oficial de los algoritmos en este libro, es la existencia de una biblioteca gráfica, robusta y bien documentada, escrita para este lenguaje. Me refiero por supuesto a [matplotlib](#)³. Y es que, con la excepción de paquetes científicos que incluyen avanzadas facilidades de graficación, tales como Mathematica, Matlab, o IDL (todos ellos sujetos a un pago), la mayoría de los lenguajes de programación dependen, a veces, de complejas bibliotecas gráficas o programas de terceros para hacer, hasta los más sencillos gráficos.

En Python, hacer un gráfico elemental, es tan simple como escribir:

²<https://pypi.org/project/IPy>

³<https://matplotlib.org/>

(Algoritmo 1.1)

```
from matplotlib.pyplot import plot
plot([1,2,3,4],[1,4,9,16]);
```

ver Figura 1.2

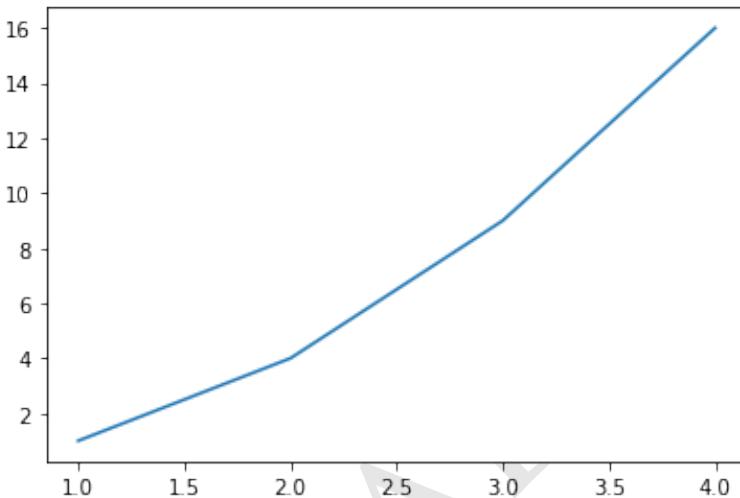


Figura 1.2: Figura correspondiente al código 1.1.

1.5. Mecánica celeste con SPICE

Con el temor de haberlos aburrido ya suficiente con este largo prefacio, no puedo dejar de mencionar aquí, una última herramienta que será protagonista en este libro. Se trata de SPICE, una aplicación desarrollado para la *NASA's Navigation and Ancillary Information Facility (NAIF)*⁴.

SPICE es un sistema de información de uso libre, formado basicamente por una biblioteca de rutinas para realizar cálculos en mecánica celeste y de datos (*kernels*) que permiten, usando esas mismas rutinas, la determinación de la posición y orientación precisa (pasada y futura) de muchos cuerpos del Sistema Solar y de algunos vehículos espaciales lanzados al espacio por nuestra especie.

Esta herramienta ha cobrado, en años recientes, una popularidad significativa en la comunidad académica. Sus rutinas y *kernels* están detrás de algunas de los servicios en línea más populares de NASA, tales como el sistema *NASA Horizons*⁵, que permite, a través de distintas interfaces, calcular la posición pasada y futura de cuerpos del sistema solar y naves espaciales; o del simulador *NASA's Eyes*⁶ que ofrece vistas en tiempo real de la posición de los cuerpos del sistema solar y de misiones espaciales de la agencia espacial estadounidense.

⁴<https://naif.jpl.nasa.gov/naif/>

⁵<https://ssd.jpl.nasa.gov/horizons.cgi>

⁶<https://eyes.nasa.gov/>

En este libro usaremos las rutinas y *kernels* de SPICE (a través de la biblioteca [spiceypy](#)⁷, desarrollada en Python) para ilustrar conceptos, desarrollar ejemplos y resolver problemas que, de otro modo, implicarían un gran esfuerzo algorítmico (el objetivo será no *reinventar la rueda redonda*.)

Al hacerlo, además, el lector, sin importar su nivel, se familiarizará con una herramienta que usan astrónomos e ingenieros aeroespaciales para resolver problemas reales de mecánica celeste. ¡De la teoría a la acción!

Como nos preguntamos en el caso de Python, ¿podría SPICE desaparecer o, mejor, ser reemplazada por un sistema diferente en los próximos años? No podemos asegurarlo, pero la cantidad de herramientas que hoy dependen de este sistema de información, hace difícil suponer que podría cambiar radicalmente en el futuro inmediato.

Un último aspecto hace de SPICE una opción muy estable para los propósitos de un libro de texto. La biblioteca de rutinas asociada con el sistema está disponible para un amplio conjunto de lenguajes de programación diferentes a Python. Familiarizarse con las rutinas y *kernels* de SPICE aquí, será suficiente para que pueda usarlo con lenguajes como C/C++, FORTRAN e IDL.

A continuación, y a modo de ilustración, presento un algoritmo, escrito con SPICE, para calcular la distancia de la Tierra al Sol durante el eclipse total de Sol del 29 de mayo de 1919 en el que se obtuvieron las primeras evidencias empíricas de la relatividad general y con el que abrimos este prefacio. Naturalmente, este algoritmo es mucho más complejo (y menos natural) que los que escribí antes, pero ilustra el poder de esta herramienta para obtener resultados interesantes con muy poco esfuerzo computacional.

```
import spiceypy as spy
spy.furnsh('pymcel/data/naif0012.tls')
spy.furnsh('pymcel/data/de430.bsp')
et=spy.str2et("05/29/1919 09:08:00 UTC-3")
sol,tluz=spy.spkgeo(10,et,"ECLIPJ2000",0)
tierra,tluz=spy.spkgeo(399,et,"ECLIPJ2000",0)
distancia=spy.vnorm(tierra-sol)
```

Distancia Tierra-Sol durante el eclipse de 1919: 151649284 km

1.6. ¿Qué hace distinto a este libro?: un decálogo

Para resumir, enumero a continuación las 10 cosas que hacen de este un libro distinto de los muchos que se han escrito en casi 400 años de historia de la mecánica celeste. Este decálogo, como la mayor parte de este prefacio, es, además de una descripción abreviada de las características únicas del libro, una lista de razones que justifican la existencia de un libro más en el “basto océano” de literatura en la materia.

1. ¿Ya les mencione que es un libro para estudiantes de pregrado? Para entender su contenido no es necesario haber visto previamente un curso de mecánica analítica o matemáticas especiales. Solo se necesita una fundamentación mínima en geometría, cálculo y física.

⁷<https://spiceypy.readthedocs.io/en/master>

2. El libro ha sido escrito, en la medida de las posibilidades, para ser autocontenido. Todo lo que un lector necesita saber de los fundamentos matemáticos (geometría, cálculo vectorial, ecuaciones diferenciales), los fundamentos físicos (mecánica newtoniana), astronómicos o de computación, ha sido incluido en los capítulos o en apéndices. Esto hace del libro, un texto que puede ser leído o estudiado por personas ajenas a la disciplina, incluso por aficionados.
3. El libro utiliza, como la mayoría de los textos en el área, el *formalismo geométrico y vectorial* de la mecánica para presentar y desarrollar los problemas centrales de la mecánica celeste. Pero también introduce el *formalismo analítico* (mecánica analítica o mecánica clásica) y lo aplica a la mecánica celeste. Es por tanto un libro de mecánica celeste y al mismo tiempo uno de mecánica analítica.
4. El libro no profundiza en todos los temas de la mecánica celeste o la mecánica analítica como lo hacen textos más avanzados. Pero, para un estudiante de pregrado, esta podría ser su primera lectura antes de abordar esos textos.
5. El texto hace un énfasis especial en los algoritmos de la mecánica celeste, que implementa usando códigos en Python, gráficas en matplotlib y, en ocasiones, las rutinas y datos del sistema SPICE de NASA.
6. Todo el libro está disponible como *notebooks* de Jupyter que pueden ser modificados por el lector o ejecutados durante una clase (¡es un libro para enseñar!) Los *notebooks* contienen gráficos interactivos y animaciones que ilustran conceptos que pueden resultar difíciles.
7. El libro no requiere conocimientos previos de programación en Python (aunque tenerlos puede ser muy útil.) En realidad, el libro podría utilizarse como una manera de aprender el lenguaje en contexto, algo que es difícil de conseguir en libros dedicados específicamente a la enseñanza de la programación.
8. Los temas no se desarrollan en el orden en el que aparecieron en la historia: problema de los dos cuerpos → teoría de perturbaciones → problema de los tres cuerpos → mecánica celeste relativística, etc. He preferido presentarlos como me hubiera gustado conocerlos desde el principio, siguiendo un orden más lógico y un poco atemporal. Esta es la manera en la que, creo, un viajero en el tiempo, que retrocediera a 1700, se lo explicaría a un sorprendido Newton.
9. A pesar de lo anterior, la historia es importante en el libro. A través de los capítulos y en recuadros especiales he incluido anécdotas y biografías que permitirán hacerse a una idea del contexto en el que surgieron las principales ideas de la mecánica celeste y la mecánica analítica y los personajes que las concibieron.
10. He incluido tópicos modernos, escasamente cubiertos por otros textos en el área a este nivel, tales como una fundamentación elemental en relatividad, útil para realizar cálculos postnewtonianos en mecánica celeste, que hoy, en la era de los viajes espaciales y las observaciones ultra precisas, han cobrado mucha relevancia.

Jorge I. Zuluaga
Medellín, Diciembre 31 de 2019

BORRADOR

BORRADOR

Capítulo 2

Agradecimientos

Así como no hay *vacas esféricas en el vacío*, tampoco existen los *autores cilíndricos en el vacío*. La elaboración de este libro ha sido determinada y afectada por una multitud de factores y personas a los que no puedo dejar de mencionar.

En primer lugar, quiero agradecer a todos **los estudiantes del pregrado de astronomía** que tomaron el curso de Mecánica Celeste durante los años en los que elaboré las notas que sirvieron de base para este libro. Agradezco su paciencia y sus preguntas en clase que me ayudaron a enriquecer el texto, concentrarme en puntos difíciles y escoger mejor los temas más interesantes. También fue de gran valor los errores que me ayudaron a detectar en las primeras versiones de los *notebooks*. Entre ellos, quiero resaltar a **Andrés Gómez**, quien fue mas lejos aún al revisar detalladamente el contenido de algunos *notebooks* y criticarlos como lo haría un colega o un editor. Adicionalmente, sus impecables soluciones de los problemas inspiraron una parte del material que he incluido en esta edición del libro.

Una buena parte de la primera versión de las notas del curso fue **escrita y transcrita a LaTeX** por el hoy Astrónomo **Bayron Portilla** (en ese entonces mi tallerista del curso). En un momento dado, nos propusimos, incluso, escribir juntos el libro. Sin embargo, nuestras ocupaciones fueron dilatando el proyecto hasta que decidí re escribir todo el material usando solamente *notebooks* de Jupyter. El resultado fue esta edición del libro. Aún así, reconozco y agradezco el esfuerzo que hizo en esas primeras notas, en las que además exploramos las mejores maneras de organizar los temas del curso. Tal vez en el futuro retome con Bayron algunas de esas notas iniciales con miras a un texto avanzado en la materia donde podamos, por ejemplo, abordar los tópicos que se quedaron por fuera de este libro.

Estoy también en deuda con **Miguel Vásquez**, el mejor de los talleristas que he tenido en mi carrera como profesor (ahora es un Astrónomo). Miguel realizó una juiciosa tarea de búsqueda de problemas, transcripción de los mismos al formato de Jupyter y, más importante, preparación en el mismo formato de su solución. Todo, mientras mantenía una estrecha relación con los estudiantes (mucho mejor que la mía como profesor, debo admitir) que le permitió entender sus necesidades, evaluar y ajustar el grado de dificultad de los problemas y recoger correcciones y sugerencias a las notas. **Muchos problemas** incluídos en este libro se basan en el

trabajo original de Miguel al que debo hacer un sentido reconocimiento aquí.

Agradezco también a los maestros que me motivaron a estudiar física teórica durante el pregrado y el posgrado, muy a pesar de mi monocromática pasión por la astronomía. Esto me permitió entender, apreciar y abordar mejor los aspectos teóricos de la mecánica celeste. En particular, mis agradecimientos van para los profesores **Lorenzo de la Torre, Alonso Sepúlveda, Jorge Mahecha, William Ponce y Boris Rodríguez**. A través de sus propios manuscritos, conocí (y espero haber aprendido con el ejemplo) el “arte” de escribir libros de texto. El estilo, profundidad y cuidado de sus **notas de clase, libros publicados e inéditos**, han sido imitados sistemáticamente en este libro.

Agradezco a la **Universidad de Antioquia** y en particular a las autoridades del **Instituto de Física y la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales**, por otorgarme el beneficio de un año sabático, durante el cuál pude, entre otras cosas maravillosas, escribir la primera versión completa de este libro. Mi reconocimiento y agradecimiento además para los **profesores del pregrado de Astronomía** que recibieron mi carga académica y de investigación durante ese año en el que estuve escribiendo.

Finalmente, pero no menos importante, quiero agradecer a mi familia, **Olga y Sofía**. A ellas les toco la peor parte, es decir, soportarme un año entero en la casa, escribiendo en pijamas (o mejor hablando solo, por yo no escribo sino que hablo con el computador) y prestándoles, a veces, menos atención de la que les presto incluso en situaciones normales. Este libro esta dedicado a ellas.

Capítulo 3

Introducción

3.1. ¿Cómo se organiza este libro?

Como mencionamos en la [Sección 1.6](#), una de las cosas hace a este libro diferente de otros textos de mecánica celeste, es la manera y el orden particular en el que se desarrollan los temas. El libro esta dividido en tres grandes partes:

- Los fundamentos matemáticos y físicos.
- Mecánica celeste usando vectores y geometría (formalismo vectorial de la mecánica).
- Mecánica analítica (formalismo lagrangiano y hamiltoniano) y su aplicación en mecánica celeste (clásica y postnewtoniana).

En los siguiente párrafos encontrarán una síntesis *narrada* del libro; algo así como una *tabla de contenido comentada* que le permitirá al lector, no solo orientarse en el texto, sino también entender la manera como se encadenan cada una de sus partes.

Y es que todo libro debería contar una *historia*. En los textos académicos, lamentablemente, esa “vocación” narrativa parece perderse en medio de figuras, teoremas y algoritmos. Esta sección puede ser entonces entendida, como un esfuerzo para esbozar la *historia* que se hila a través de sus capítulos.

- **Parte 1 ([Capítulo 4](#)): Fundamentos.** Antes de comenzar, respasaremos algunos temas de matemáticas y física necesarios para estudiar mecánica celeste. Si bien el lector debería estar familiarizado con la mayoría de estos temas, hemos decidio incluir este capítulo no solo para hacer al texto autocontenido, sino también con el propósito de compilar resultados útiles, definiciones y algoritmos, en el formato y notación del texto, que se usarán en capítulos posteriores.

- **???: Fundamentos de geometría analítica.** En este capítulo nos concentraremos en repasar (o presentar) las propiedades de las figuras cónicas, su definición y descripción geométrica más general, así como su descripción algebraica.

Las figuras cónicas juegan un papel central en la mecánica celeste y estar familiarizado con ellas, permitirá resolver más fácilmente problemas físicos relativamente complejos.

Estudiaremos las cónicas, tanto en el plano, como en el espacio de tres dimensiones. Con este propósito, introduciremos aquí el tema de las rotaciones en dos y tres dimensiones (ángulos de Euler) que son usados con frecuencia en la mecánica celeste.

- **??: Fundamentos de mecánica.** Como hizo Newton en los *Principia*, antes de resolver el problema del “movimiento planetario”, es necesario definir las cantidades físicas básicas, formular los principios fundamentales y obtener las leyes y teoremas que permiten entender el movimiento de los cuerpos en cualquier contexto (no solo en un contexto gravitacional).

Este capítulo es una breve síntesis de un texto de mecánica newtoniana. Tiene elementos distintivos: hace una presentación moderna de la teoría (con definiciones y leyes que se diferencian un poco de la formulación histórica, muy común en los textos universitarios); hace énfasis en una formulación basada en el cálculo vectorial y en distintos sistemas de coordenadas; introduce algoritmos para la solución numérica de las ecuaciones de movimiento de sistemas dinámicos (algoritmos que serán muy importantes en el resto del libro); y presenta una síntesis de algunos resultados importantes de la cinemática y dinámica en sistemas de referencia rotantes (que son de interés en el estudio del *problema circular restringido de los tres cuerpos*.)

- **??: Fundamentos de relatividad.** Como lo mencionamos en el prefacio, otro elemento que hace diferente a este libro, es la introducción de algunos tópicos modernos que han estado normalmente ausentes de los textos de mecánica celeste, al menos para el nivel al que esta dirigido. Para llegar a ese punto es necesario, sin embargo, presentar una fundamentación básica de la teoría de la relatividad (especial y general).

La síntesis presentada aquí es bastante breve y tiene dos propósitos prácticos: 1) introducir el concepto de métrica del espacio-tiempo y sus consecuencias para la cinemática; nos concentraremos específicamente en las métricas de Minkowski y de Schwarzschild. Y 2) a partir de las métricas, derivar resultados sobre las diferencias en los intervalos de tiempo medido por observadores inerciales y otros en campos gravitacionales. Ambos temas serán la base para presentar algunos resultados de *mecánica celeste postnewtoniana* en capítulos posteriores.

- **??: Fundamentos de astronomía.** Muchos de los ejemplos y problemas en el curso se refieren a sistemas físicos reales, dentro y afuera del Sistema Solar. La mecánica celeste, como área de la astronomía, se desarrolló para predecir, justamente, la posición en el cielo de los planetas o determinar la trayectoria de cometas y otros cuerpos errantes.

En este capítulo repasaremos algunos conceptos de Astronomía que serán de utilidad en el resto del texto: la organización general del Sistema Solar, algunos elementos de nomenclatura astronómica, la medida del tiempo y los sistemas de referencia usados para especificar la posición

tanto en el cielo como en el espacio de tres dimensiones, de cuerpo astronómicos o vehículos espaciales.

- **Parte 2: El formalismo vectorial de la mecánica.** Como veremos a lo largo del libro, la mecánica puede ser presentada usando dos enfoques matemáticas o *formalismos* diferentes. En esta parte del curso nos concentraremos en la formulación geométrica o vectorial de la mecánica celeste, la más popular y la que uso originalmente Newton en sus *Principia* y que fue desarrollada posteriormente por Euler.

- **Capítulo 5: El problema de Los N Cuerpos.** A diferencia de la mayoría de los textos en esta área, en este libro comenzamos por el más general de los problemas de la mecánica celeste: el problema de los N cuerpos. En este problema, el reto consiste en predecir la posición y velocidad de muchos cuerpos que interactúan gravitacionalmente. Si bien el problema de los N cuerpos fue el último en ser formulado y abordado rigurosamente en la historia, su presentación temprana en este libro, permitirá introducir resultados y métodos que serán de utilidad para el resto del texto.

De particular interés será la introducción en este capítulo de los algoritmos para resolver numéricamente el problema. Estos algoritmos y algunas herramientas computacionales relacionadas, serán muy importante en el resto del texto, para comparar y validar resultados de los modelos analíticos. Se presentará también aquí el concepto de integrales de movimiento o *cuadraturas*, uno de los métodos usados clásicamente para extraer información sobre un sistema dinámico sin resolverlo completamente. El método de las cuadraturas será central en lo que queda del texto.

- **?: El problema de los dos cuerpos.** Una de las idealizaciones más conocidas de la mecánica celeste consiste en suponer que cuando dos cuerpos astronómicos interactúan gravitacionalmente, el efecto del resto del Universo es completamente despreciable. Naturalmente, no existe ningún sistema astronómico real que cumpla cabalmente estas condiciones. Todos los sistemas del universo, en sentido estricto, son sistemas de N cuerpos.

En este capítulo mostraremos, a través de experimentos numéricos y ejemplos astronómicos reales, que la mayoría de los sistemas astronómicos se pueden analizar dinámicamente como *sistemas de N cuerpos jerárquicos*, es decir, sistemas en los que las partículas se agrupan por pares (pares de partículas, pares de pares, etc.) que se perturban mutuamente.

El problema de los dos cuerpos no es, sin embargo, el destino final de la mecánica celeste, sino su punto de partida. Es un resultado útil para estudiar sistemas mucho más complejos. Resolveremos en este capítulo el problema de los dos cuerpos usando el método de las cuadraturas (primeras integrales de movimiento) introducido en el capítulo anterior. Demostraremos que el movimiento relativo de dos cuerpos se realiza sobre una cónica y desarrollaremos en detalle las relaciones entre

las propiedades geométricas de esa cónica y las propiedades dinámicas del sistema. Resolveremos también, usando métodos geométricos primero y después métodos del cálculo, el denominado problema de los dos cuerpos en el tiempo, que conducirá a la famosa ecuación de Kepler.

- ??: **Aplicaciones del problema de los dos cuerpos.** Antes de abordar sistemas más complejos, nos ocuparemos en este capítulo de estudiar a fondo algunas aplicaciones de interés para la astronomía o la ingeniería aeroespacial, de los resultados del capítulo anterior: la descripción de la trayectoria de cuerpos astronómicos y vehículos espaciales usando elementos orbitales instantáneos (osculatrices); la transformación entre el denominado *vector de estado* y los elementos orbitales y viceversa; la determinación de las órbitas, usando información de la posición y el movimiento de un cuerpo.

Usaremos estos resultados para hacer predicciones, de primer orden, de la posición de algunos cuerpos astronómicos reales. Estudiaremos también los fundamentos de la teoría de perturbaciones, en la que no profundizaremos, sin embargo (este es un tema que se deja para libros más avanzados).

Nos aprovecharemos, además, de las capacidades del sistema de información SPICE de NASA para predecir la posición precisa de cuerpos astronómicos reales y para calcular con ellas efemérides astronómicas (condiciones de eclipses, ocultaciones, fases de la Luna y los planetas, etc.)

En síntesis, este será el más astronómico de todos los capítulos del texto.

- ??: **El problema de los tres cuerpos.** A pesar del poder que la teoría desarrollada en el capítulo anterior tiene para describir el movimiento de muchos sistemas astronómicos, existen situaciones que escapan a una descripción *kepleriana* del movimiento orbital (incluso, una que incluye perturbaciones). El caso de la Luna, el de algunos cometas perturbados por Júpiter y vehículos espaciales modernos, son especialmente significativos.

En este capítulo abordaremos, inicialmente, el problema general de los tres cuerpos, es decir, aquel en el que la dinámica no es jerárquica. A diferencia del problema de los dos cuerpos, no se conoce una solución general en términos de funciones analíticas o de series al problema de los tres cuerpos (aunque se sabe que existe una.)

Una versión restringida de este problema, a saber el *problema circular restringido de tres cuerpos* (CRTBP por su sigla en inglés), tiene propiedades teóricas que han resultado de interés en la descripción de sistemas astronómicos reales. Estudiaremos aquí en detalle el CRTBP, su descripción dinámica y cinemática, tanto en sistemas inerciales como no inerciales. Introduciremos algoritmos para la solución numérica del problema en el sistema rotante. Encontraremos su constante de movimiento, la *constante de Jacobi* y una aproximación astronómica en términos de elementos orbitales, el *parámetro de Tisserand*. Deduciremos las propiedades y visualizaremos las denominadas *regiones de exclusión* y *curvas de cero velocidad*.

ciudad (conceptos interesantes que permiten, si no predecir dónde estarán los cuerpos, al menos, donde no estarán). Finalmente se deducirán las propiedades de los *puntos de equilibrio de Lagrange* y algunas aplicaciones astronómicas y en mecánica orbital del problema.

■ **Parte 3: El formalismo analítico de la mecánica.** En esta parte del libro, introduciremos el *formalismo analítico de la mecánica* y su aplicación en la solución a la mecánica celeste. El formalismo analítico tiene una importancia central en la física que trasciende la mecánica celeste (se usa por ejemplo para estudiar la dinámica de cuerpos rígidos y sistemas oscilantes, el caos en sistemas dinámicos, la mecánica relativista, el electromagnetismo, la teoría de campos clásica y la mecánica cuántica.) Si bien ninguna aplicación del formalismo distinta a la mecánica celeste, se desarrollara en este texto (como si sucede en algunos textos avanzados de mecánica clásica) los fundamentos teóricos presentados en esta parte le permitirán al lector abordar el estudio de esas otras disciplinas.

- ??: **El formalismo lagrangiano.** En este capítulo se introducen los principios y teoremas centrales del formalismo analítico de la mecánica, en particular los principios de Alambert-Lagrange y de Hamilton. Haremos aquí, un especial énfasis en las motivaciones teóricas que llevaron a matemáticos y físicos de los 1700 a introducir este formalismo (un tema en el que los textos más avanzados de mecánica clásica, apenas si consideran.)

Se introducirá aquí la función lagrangiana, las ecuaciones de Lagrange y, a través de la aplicación del cálculo variacional (del que se hará una introducción breve y práctica), se deducirán las ecuaciones generales de Euler-Lagrange (que tienen una aplicación amplia en muchas áreas de la física).

Muchos de los ejemplos usados para ilustrar el formalismo Lagrangiano serán, como se usa en la mayoría de los textos avanzados de mecánica clásica, sistemas mecánicos simples (péndulos, bloques en movimiento, esferas y cilindros que ruedan, etc.) Sin embargo, a diferencia de esos textos, no profundizaremos demasiado en sistemas de este tipo (el interés central aquí son los problemas gravitacionales.) Este hecho, sin embargo, no compromete el rigor o la extensión en la que el formalismo lagrangiano será presentado y desarrollado aquí.

Como un elemento novedoso se presentarán en este capítulo algunos algoritmos aplicados al formalismo lagrangiano, y en particular a la comprensión mejor del principio de Hamilton y los métodos del cálculo variacional.

- ??: **Aplicaciones del formalismo lagrangiano.** Con los elementos básicos del formalismo lagrangiano a la mano, procederemos a aplicarlo en la solución de problemas concretos en mecánica celeste. Para ello presentaremos, primero, resultados importantes sobre la relación entre las simetrías de la función lagrangiana y las cantidades conservadas en el movimiento (teorema de Noether). A partir de allí, procederemos de

forma similar a como lo hicimos con el formalismo vectorial, a resolver el problema general de los N cuerpos y el de los dos cuerpos.

Deduciremos el lagrangiano de los N cuerpos y de sus simetrías obtendremos las cantidades conservadas en el sistema. Pero ¿de qué sirve deducir los mismos resultados que ya habíamos visto en el capítulo correspondiente de la segunda parte? Usaremos lo que sabemos de mecánica celeste para ilustrar el poder del formalismo lagrangiano frente al formalismo vectorial.

Posteriormente, abordaremos el problema de los dos cuerpos usando el formalismo lagrangiano. En este caso, a diferencia del problema de los N cuerpos, tendremos una novedad. En lugar de restringirnos al caso de la gravitación Newtoniana, estudiaremos aquí el problema más general de sistemas de dos cuerpos sometidos a fuerzas centrales con un potencial generalizado. Los resultados obtenidos aquí, tendrán un rango más amplio de aplicación. Podrán por ejemplo usarse para estudiar la física de sólidos, moléculas y átomos, pero también la mecánica celeste postnewtoniana.

Estudiaremos, en este contexto, el problema de fuerzas centrales reducido a una dimensión, el potencial efectivo (y las correspondientes zonas de exclusión). Para el caso del potencial newtoniano deduciremos la denominada ecuación de la forma orbital y resolveremos el problema de los dos cuerpos a partir de ella. Para el caso de un potencial general, pero no muy distinto del potencial Newtoniano, estudiaremos el denominado *avance del perihelio* como una introducción al capítulo siguiente.

- ??: **El problema de los dos cuerpos postnewtoniano.** Con los elementos desarrollados en el capítulo anterior, estaremos en posición de abordar la solución general a una versión restringida del problema de los dos cuerpos en el contexto de la relatividad general (la denominada *aproximación postnewtoniana*).

Para ello partiremos de la métrica de Schwarzschild y las ecuaciones de la geodésica (una versión geométrica de las ecuaciones de Euler Lagrange.) A partir de ellas y con argumentos de simetría, obtendremos las primeras integrales o cuadraturas y deduciremos el lagrangiano y su potencial efectivo, para el movimiento de una partícula muy ligera (partícula de prueba) en la métrica de Schwarzschild.

Usando estos elementos estudiaremos dos aplicaciones específicas: el avance del perihelio de Mercurio, el primer problema de mecánica celeste que resolvió la Relatividad General y la primera prueba de su superioridad frente a la teoría newtoniana del movimiento y la gravedad. Y el movimiento de partículas de prueba alrededor de cuerpos muy densos (estrellas de neutrones o agujeros negros.)

- ??: **El formalismo hamiltoniano.** En este capítulo abordamos el más general (y poderoso) formalismo analítico de la mecánica: el formalismo Hamiltoniano. Después de discutir las motivación para la introducción de este formalismo (motivaciones de naturaleza principalmente geométrica), deduciremos de forma heurística las ecuaciones canónicas (de primer orden) de Hamilton; introduciremos la función Hamiltoniana

y demostraríamos su equivalencia con las ecuaciones (de segundo orden) de Euler-Lagrange. Ilustraremos el poder del formalismo y la descripción de los sistemas en el denominado *espacio de fase*; para ello nos valdremos inicialmente de sistemas dinámicos simples (péndulos y bloques), como hicimos en el primer capítulo de esta parte.

Posteriormente abordaremos (sin el detalle en el que lo hicimos en el caso del formalismo Lagrangiano y por las obvias analogías entre los dos formalismos) el tema de las simetrías y las cantidades conservadas, e introduciremos los útiles *corchetes de Poisson*, como herramienta matemática para estudiar dichas simetrías.

Escribiremos los hamiltonianos del problema general de los N cuerpos, el del problema de los dos cuerpos y el del problema circular restringido de los tres cuerpos, y redescubriremos, usando los elementos de este nuevo formalismo, las propiedades ya conocidas de estos sistemas.

- ??: **El formalismo de Hamiltoniano-Jacobi.** Una de las formas más frecuentes en las que se aplica el formalismo Hamiltoniano en la mecánica celeste, es la de aprovechar las simetrías de los sistemas gravitacionales, para, a través de transformaciones de *coordenadas* en el espacio de fase, escribir formas simplificadas de los Hamiltonianos. Estas formas simplificadas, además, permiten aplicar de forma más directa la teoría de perturbaciones y así estudiar sistemas muy complejos (un tema que no está incluido en este libro.)

En este capítulo introduciremos, primero, el tema de las transformaciones canónicas, que son transformaciones de coordenadas en el espacio de fase que mantienen la *estructura hamiltoniana* de los sistemas (es decir, que hacen que los sistemas sigan siendo descritos con las ecuaciones canónicas). Nos concentraremos, especialmente en el formalismo de la función generatriz de las transformaciones canónicas.

A continuación, aplicando lo visto en el capítulo anterior y la teoría de transformaciones canónicas recién introducida, presentaremos el formalismo de Hamilton-Jacobi que permite, entre otras cosas, encontrar sistemas de coordenadas que simplifican significativamente la descripción de ciertos sistemas físicos. En particular utilizaremos este formalismo para deducir, en el problema de los dos cuerpos, el Hamiltoniano del sistema en términos de elementos orbitales; en particular, en términos de funciones específicas de esos elementos orbitales, que hacen lo más simple posible el hamiltoniano del sistema.

El resultado más importante de este capítulo será la deducción de las denominadas *variables de Dalaunay* que son de gran utilidad y poder en la mecánica celeste moderna y posiblemente el punto de partida de algunos textos de mecánica celeste avanzados.

Todos los capítulos hasta aquí contarán con un conjunto completo de preguntas, ejercicios y problemas, que permitirán al lector poner a prueba los conocimientos adquiridos y las habilidades desarrolladas, pero también, descubrir como estas ideas, métodos y herramientas, se aplican en otras situaciones específicas.

- **Apéndices.** La última parte del libro, presenta material complementario y de referencia, que puede ser de interés consultar durante su lectura.
 - **???: Python mínimo.** En este apéndice ofrecemos un breve tutorial introductorio al lenguaje Python y a la biblioteca de gráficos de Matplotlib que usaremos como herramientas para presentar los algoritmos de la mecánica celeste, desarrollar ejemplo y formular problemas (ver la [Sección 1.4](#)).
 - **???: El sistema de información SPICE.** Como comentamos en la [Sección 1.5](#), una de las herramientas prácticas de programación de las que nos apoyaremos en este libro, es el sistema de información SPICE del NAIFF de NASA. En este apéndice ofrecemos una guía de referencia básica a este sistema, que puede ser consultada para entender mejor algunos de los ejemplos desarrollados a lo largo del libro.
 - **???: Notación y glosario.** La notación en física y en astronomía, así como el vocabulario, puede cambiar mucho de unos textos a otros. En este apéndice encontrará una guía de referencia práctica a la notación y el vocabulario usado en este libro.
 - **???: La biblioteca pymcel.** Las rutinas útiles escritas a lo largo del libro se han compilado en un paquete de Python que acompaña este libro. En este apéndice se ofrece una lista completa de las rutinas del paquete.

3.2. ¿Cómo usar este libro?

Este libro puede ser utilizado de tres formas diferentes:

1. Como un texto para el *autoaprendizaje* de la mecánica celeste y analítica. Estudiantes y profesionales de muchas disciplinas, se pueden valer de él para acercarse a ellas.
2. Como el texto guía de un primer curso de mecánica celeste. Una fuente de lecciones y problemas útiles para organizar un curso de pregrado.
3. Como material de referencia para estudiantes y profesionales. Muchas fórmulas, algoritmos, e incluso anécdotas e historias interesantes, podrían resultar útiles para quiénes ya tienen una formación en el área.

Como **texto para el autoaprendizaje**, recomiendo **leerlo enteramente** incluyendo la primera parte de Fundamentación en la que se encuentran algunos elementos teóricos (matemáticos y físicos) requeridos para el resto del libro.

Para quiénes tengan una formación avanzada en física, astronomía o ingeniería, es posible que una buena fracción de los temas de esa primera parte resulten sencillos y puedan obviarse. Sin embargo, aunque los tópicos tratados allí aparezcan conocidos (al menos por los nombres), su tratamiento puede resultar novedoso; de modo que no deje de echarle una mirada. En particular recomiendo revisar, como mínimo, las secciones dedicadas a la solución numérica de las ecuaciones de movimiento, la dinámica en sistemas rotantes y los principios de relatividad, donde podrían encontrarse las diferencias más significativas respecto a los textos canónicos de matemáticas y física.

El uso ideal de este libro es como **texto guía** de un primer curso de mecánica celeste y analítica. El libro fue escrito a partir de la experiencia de más de 5 años ofreciendo el curso en el pregrado de astronomía de la Universidad de Antioquia; por la misma razón esta la extensión y organización particular del texto, se adapta de forma *precisa* a las condiciones propias de un curso universitario de un semestre de duración (cuatro meses efectivos de lecciones.) El curso se ofrece ha ofrecido exitosamente a estudiantes que han cursado los cursos básicos de física (hasta el curso de oscilaciones y ondas) y de cálculo (incluyendo cálculo vectorial y ecuaciones diferenciales.)

Todos los capítulos del libro han sido dictados dentro del plazo del curso. Sin embargo, dependiendo del nivel académico de los estudiantes y de su independencia intelectual, el curso puede dictarse sin incluir todos los temas de la primera parte.

Por mi experiencia dictando el curso, el repaso de los fundamentos puede resultar extenso (como mínimo toma un mes que es justamente el período en el que los estudiantes tienen una motivación y disposición mayor, además de menos distracciones de otros cursos.) Sugeriría, entonces, que de sacrificarse algunos temas de esa parte, se asigne la lectura independiente a los estudiantes de los temas mejor conocidos y se evalúe a través de la completa lista de problemas incluídos al final de esa parte.

Como se menciono en la [Sección 1.3](#), y se detallará abajo, el libro fue escrito usando *libretas de Jupyter*, una por cada clase (a lo sumo se pueden dictar dos clases con cada libreta). Es decir, el número de *libretas* y su organización puede ofrecer una idea del programación detallado de actividades del curso o del plan de lectura.

3.3. Mecánica celeste en *libretas*

El libro ha sido concebido, escrito y compilado enteramente usando *libretas* de *Jupyter*. Las libretas, que están disponibles en la versión electrónica del texto, son archivos en un formato especial (no son programa de Python, ni páginas web) que pueden ser visualizadas y ejecutadas usando un navegador de Internet.

El uso de las libretas no es indispensable para entender el contenido del libro, pero pueden ofrecer una experiencia interactiva muy enriquecedora, que a veces puede acelerar el proceso de aprendizaje. El uso de las libretas en clase puede, además, hacer más dinámica la interacción entre el profesor y los estudiantes.

Para hacer uso de las libretas se debe contar con un **computador de escritorio** que use cualquier sistema operativo (Windows, Linux o MacOS). Por la misma razón, en caso de usarla, recomiendo que el curso se desarrolle en una sala de computo. Para ejecutar las libretas es necesario instalar primero el interprete y la biblioteca base del lenguaje Python, un conjunto específico de paquetes y el sistema Jupyter, además de varias de sus extensiones (los detalles se presentan en la siguiente sección.)

La versión web de este libro, puede ser también una alternativa a las libretas de Jupyter. Tiene la ventaja de que solo requiere un dispositivo con conexión a Internet (de escritorio o móvil) y puede manipularse en cualquier contexto. Aunque la versión web carece de casi todas las características interactivas de las libretas de Jupyter, en ella encontraran, además de todos los algoritmos y gráficos, todas las

animaciones y otros elementos de *hipertexto*.

3.3.1. Instalación de las libretas

Para aquellos que deseen aprovechar las libretas de Jupyter como medio didáctico, se ofrece a continuación una guía básica de cómo preparar un computador para ejecutarlas. Instrucciones adicionales pueden encontrarse en la versión en línea del libro.

1. **Instalación del lenguaje Python y las bibliotecas básicas del lenguaje.** El primer requisito para utilizar las libretas es instalar el interprete y las bibliotecas del sistema del lenguaje Python. Existen diversas maneras para hacerlo en cada sistema operativo y abundante información en Internet. Mi recomendación es utilizar sel sistema [Anaconda](#)⁸ que ofrece en una plataforma completa de programación incluyendo los archivos del lenguaje Python, una amplia diversidad de paquetes científicos, el sistema Jupyter y todas las herramientas necesarias para la instalación de otros paquetes.
2. **Descarga las libretas.** Una vez haya instalado Python y Jupyter, puede descargar las libretas del libro los archivos adicionales requeridos por ellas del sitio web del libro. Para ello siga las instrucciones provistas allí.
3. **Ejecución de pruebas.** Para verificar si las libretas funcionan correctamente, una vez descargadas, busque y abra la libreta Pruebas.ipynb. Una vez abierta ejecute todas sus celdas (Cell / Run all). Si la ejecución se realiza completa, en la última celda aparecerá un reporte completo con los resultados de la prueba. Si alguna de las prueba individuales falla, es posible que sea necesario instalar paquetes, datos adicionales y otras dependencias.
4. **Instalación de dependencias.** Para instalar todas las dependencias del libro abra la libreta Instalacion.ipynb y siga las instrucciones descritas allí.

3.4. Idioma y Notación

3.4.1. Extranjerismos y pronunciación

El libro está escrito en castellano o español. Sin embargo, y como sucede con todas las ciencias, habrán muchos apartes en los que es necesario introducir términos técnicos y acrónimos procedentes de la lengua inglesaa. En estos casos las palabras y acrónimos se presentarán en itálica. Así por ejemplo al referirnos al problema matemático de resolver la ecuación de movimiento de una partícula o un sistema hablaremos de un *initial value problem* o a su acrónimo *IVP*, en contraposición a un *boundary condition problem*. En el ?? estudiaremos el *CRTBP* o *circular restricted three body problem*.

Muchos de los científicos (hombres y mujeres) que han contribuído con el desarrollo de la mecánica celeste en sus cuatro siglos de historia, tienen nombres y apellidos no hispanos. Su correcta pronunciación, especialmente en el caso de autores

⁸<https://www.anaconda.com>

franceses o de origen germano, es difícil para quienes no hablamos las lenguas de esos pueblos.

Un caso notable, por ejemplo, es el nombre de la matemática alemana *Emmy Noether*. En castellano la mayoría pronunciaríamos “emi noeter” o “emmi neder” (siguiendo la tradición inglesa con la que estamos más familiarizados)⁹ La pronunciación “correcta” (en alemán) es en realidad “emmi noutar”.

Para hacernos a una idea fonética más precisa nos apoyaremos a lo largo del libro en [este sitio web](#)¹⁰ que ofrece pronunciaciones en línea en decenas de idiomas de miles de nombres, palabras y frases. Allí encontrará el lector la pronunciación correcta de *Emmy Noether*¹¹.

3.4.2. Notación matemática

Todos los libros de ciencias físicas o matemáticas se “casan” con una notación específica. La elección de la notación, no es sin embargo una tarea sencilla, en tanto son muy comunes los casos de textos que en virtud de su notación se hacen prácticamente ilegibles, aunque traten los mismos temas o problemas de otros que usan notaciones más comunes.

Pensando justamente en esto, he tomado la decisión de utilizar, en la medida de las posibilidades, la misma notación de algunos textos clásicos de mecánica celeste, que se diferencia, a veces significativamente de la que utilizan libros de matemáticas e incluso de física, con los que el lector puede estar familiarizado.

A continuación enumero algunos aspectos de la notación matemática que usaré a lo largo del libro:

- Los vectores se representarán usando una *flecha* o un *gorro* encima de la letra que los representa, por ejemplo \vec{r} , \vec{F}_{ij} , \hat{e}_x , en lugar de usar la más frecuente notación que usa negrillas para estas cantidades.
- Un conjunto de cantidades, por ejemplo las masas de un sistema de partículas m_1, m_2, \dots, m_N , se representarán usando la convención $\{m_i\}_{i=1,2,\dots,N}$ o bien $\{m_i\}_N$ o la más compacta $\{m_i\}$ (siempre y cuando el número de cantidades este implícito en el contexto).
- Para representar la derivada total de una función, $f(x)$ se usará, generalmente la notación de Newton, esto es para la primera derivada $\dot{f}(x)$, para la segunda derivada $\ddot{f}(x)$ y así sucesivamente. En algunas expresiones, y para hacer más claros los procedimientos, se combinará la notación de Newton con la de Leibniz (que se pronuncia “laibnitz”¹²):

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \dot{x} + \frac{1}{2} \omega x^2 \right) = 0$$

⁹Note la forma en la que transliteraremos la pronunciación en castellano, indicando, entre comillas las letras y palabras más cercanas que un hispanohablante podría usar. Así por ejemplo “niuton” será la transliteración fonética de Newton.

¹⁰<http://forvo.com>

¹¹<https://es.forvo.com/search/Emmy%20Noether/de/>

¹²<https://es.forvo.com/search/Leibniz/de/>

Es claro que usar la notación de Newton en la anterior ecuación es muy inconveniente.

- Para representar las derivadas parciales de una función multivariada por ejemplo $f(x, y, z)$, usaremos la notación de Euler (que se pronuncia “*oi-lar*”¹³), esto es, para denotar la derivada parcial $\partial f / \partial x$ usaremos mientras sea posible $\partial_x f$. Para las derivadas parciales múltiples, usaremos:

$$\partial_{xyz} f \equiv \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z}$$

3.5. Estructura del libro

Para facilitar la lectura del libro y hacer de la experiencia de leerlo algo realmente excitante, el libro, además de toda la teoría que esperamos encontrar en un texto académico, contiene una serie de elementos gráficos con los que debemos familiarizarnos.

3.5.1. Cajas de texto

Mucha información importante en el texto se presenta en *cajas* independientes y cuyas características gráficas resaltan del resto del documento. En particular existen 3 tipos de cajas:

- **Resumen del capítulo.** Esta caja aparece normalmente al principio del libro y contiene una breve síntesis de cada capítulo. No deje de leer este resumen para identificar los temas centrales de cada parte del libro. El profesor podría usar la información contenida allí para definir los objetivos específicos de la evaluación.
- **Notas.** A veces es necesario desviarse un momento del hilo del texto para alcarar o ampliar asuntos relacionados con la notación, algunos detalles sobre los paquetes y algoritmos utilizados, o simplemente llamar la atención sobre un asunto importante. A continuación se muestra un ejemplo de una *caja de nota*.

Nota

El lenguaje Markdown. La mayor parte del texto de este libro, ha sido escrito en las celdas de libretas de Jupyter en un lenguaje de descripción de documentos conocido como *Markdown*. Puede explorar la sintaxis del lenguaje, o bien desplegando el contenido de las *celdas* de las libretas, o bien consultando la documentación.

- **Definiciones.** Muchas cantidades físicas y algunos conceptos claves requieren una definición rigurosa. Este es el rol justamente que juegan las *cajas de*

¹³<https://es.forvo.com/search/Leibniz/de/>

definición. A diferencia de las cajas de Resumen y Notas, las cajas de *Definición* están numeradas (como las figuras o las ecuaciones), de modo que sea más fácil referirse a ellas.

Definición 3.1

Mecánica celeste. Llamamos *Mecánica Celeste* a la disciplina científica que aplica las leyes de la mecánica para estudiar el movimiento de cuerpos bajo la acción dominante de la gravedad. Dado que solo en lugares lejanos a la superficie terrestre (normalmente fuera de su atmósfera), la gravedad es la fuerza dominante, la mecánica celeste normalmente describe el movimiento de cuerpos astronómicos (desde partículas de roca, hielo o polvo interestelar, hasta planetas y estrellas) y de vehículos espaciales. En este último caso se habla más de *Mecánica orbital*.

- **Teoremas y leyes.** Como las definiciones, en muchas ocasiones será indispensable separarnos un momento de una explicación para formular más rigurosamente un resultado, normalmente obtenido por razonamiento deductivo en el marco de una teoría (teoremas, colorarios) o por razonamiento inductivo a partir de la experiencia (leyes).

Teorema 3.1

Teorema de Danelin. Dada una esfera tangente a un cono y un plano que corta el cono en un determinado ángulo, el punto de tangencia de la esfera con el plano es uno de los focos de la cónica.

- **Mecánica celeste en la historia.** Finalmente, pero no menos importante, son las anécdotas e historias que contaremos a lo largo de todo el libro. Como se mencionó en el prefacio, la mecánica celeste tiene ya más de 400 años (aproximadamente 100 años más que la mecánica analítica) y cientos de libros y miles de artículos se han escrito en el tema. Es casi imposible hablar de mecánica celeste y analítica, sin mencionar de vez en cuando las historias que rodearon la invención de una técnica, la biografía de alguno de los grandes hombres y mujeres que concibieron las ideas contenidas en el libro o simplemente una anécdota curiosa relacionada con algún tema de interés.

3.5.2. Algoritmos

Como se ha insistido hasta aquí, una de las novedades más importantes de este libro, es el énfasis que se ha querido dar en los algoritmos y la aplicación de técnicas computacionales en la comprensión y aplicación de la mecánica celeste. A lo largo de todo el texto encontraremos *algoritmos* para realizar tareas de computo propias de cada uno de los temas abordados.

Existen en general tres tipos de *algoritmos* que encontraremos a lo largo del texto. En primer lugar están los algoritmos más sencillos, *retazos de código* (en inglés *code snippets*), que ejecutan tareas básicas de preparación para algoritmos más complejos. Este es un caso de ellos:

Mecánica celeste en la historia

¿Kepler o Newton? En el Prefacio daba a entender que la mecánica celeste posiblemente había comenzado con los trabajos pioneros de Johannes Kepler (ver Figura 3.1). Otros autores van más lejos y apuntan a los astrónomos de la antigüedad y la edad media, especialmente indios, chinos, árabes y griegos, que desarrollaron modelos complejos para la descripción del movimiento de los cuerpos celestes. Los más conservadores apuntan a Sir Isaac Newton, quien después de la publicación de su obra cumbre, los *Principia*, sentó las bases físicas, no solo para la mecánica celeste, sino también, en general, para toda la mecánica.



Figura 3.1: Retrato de Johanes Kepler, copia de un original de 1610 de pintor desconocido y que se conserva en el monasterio Benedictino de Kremsmünster

La razón en este libro para escoger a Kepler, como el *padre* de la disciplina (y en general de la astronomía física) fueron sus contribuciones decisivas y bastante bien conocidas, para esclarecer definitivamente la *cinemática* del movimiento planetario. En particular, el descubrimiento (o enunciado matemáticos) de sus conocidas *leyes del movimiento planetario*, representaron un cambio cualitativo en el desarrollo de la teoría del movimiento planetario e inspiraron en últimas el trabajo de Newton.

Adicionalmente, y esto es aún más importante, Kepler fue uno de los primeros astrónomos modernos (renacentistas europeos) en hacer consideraciones teóricas sobre la causa del movimiento planetario, más allá de ocuparse de su descripción, como lo hicieron la

mayoría de los astrónomos de la antigüedad y la edad media. Esto pone a Kepler, entre esos astrónomos, como el primer *astrofísico* de la historia.

```
a=1
b=-1
c=2
disc=b**2-4*a*c
```

Los algoritmos más complejos pueden, como las ecuaciones, venir numerados:

(Algoritmo 3.1)

```
def calcula_discriminante(a,b,c):
    """Calcula el discriminante de una ecuación de segundo grado.

    Argumentos:
    =====
    a, b, c (float): Coeficientes

    Retorna:
    =====
    d (float): Valor del discriminante

    """
    a=1
    b=-1
    c=2
    disc=b**2-4*a*c
    return disc
```

En este caso, además, el algoritmo representa una rutina o función, que podría ser usada más adelante, no solo en el mismo capítulo, sino en un capítulo posterior. Todas las rutinas como estas, hacen parte de un paquete que viene con el libro, el paquete `pymcel`.

Hay algoritmos que se ejecutan implícitamente pero para los cuáles, al menos en el libro impreso o en el libro para la web, no mostramos el código, bien sea por economía o porque es muy complejo e irrelevante para el libro. Un ejemplo común de este código oculto, es el código que usamos para mostrar los resultados de algunos cálculos. Por ejemplo:

(Algoritmo 3.2)

```
d=calcula_discriminante(1,2,3)
```

El valor del discriminante es: -7

Nótese que en el código (3.2) no hay ningón comando para mostrar el valor de la variable `discriminante` y mucho menos del mensaje asociado. Esa tarea se realiza en una celda de código oculta. En las libretas de clase, el lector encontrará todas las celdas.

También tenemos los códigos que dan como resultado figuras o gráficos. Estos están entre los más interesantes y útiles. Todos los códigos que producen figuras están numerados. Así mismo los gráficos que producen aparecen en el texto como figuras independientes. Incluso, en el texto impreso, y por razones de eficiencia del espacio, algunas de esos gráficos pueden estar en lugares lejanos de la posición del código. Es por esto que en todos los algoritmos que producen gráficos encontrarán (en la parte inferior) una referencia a la figura correspondiente.

(Algoritmo 3.3)

```
import matplotlib.pyplot as plt
from numpy import linspace,sin,pi

t=linspace(0,2*pi)
```

```
x=sin(t)

plt.figure()
plt.plot(t,x,'k-');

plt.xlabel("t");
plt.ylabel("x(t)");
```

ver Figura 3.2

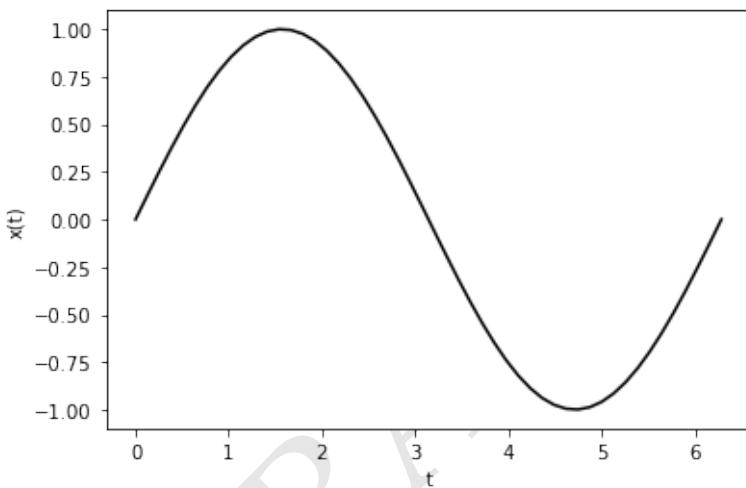


Figura 3.2: Figura correspondiente al código 3.3.

La mayoría de las figuras del libro han sido elaboradas usando software de diseño independientes. Sin embargo, algunas figuras, especialmente gráficos de datos o resultados de simulaciones, son generadas por las libretas con las que fue escrito el libro. Si bien los algoritmos con los que son creados esas figuras (que llamaremos *gráficos generados*) no aparecen en la versión impresa o en la versión web (pueden ser muy elaborados e irrelevantes para los fines del curso), ellos si pueden aparecer en las libretas de clase.

3.6. Figuras interactivas y animaciones

Uno de las cosas que hace poderosas a las libretas de Jupyter, como medios para compartir información o estudiar un tema, es la posibilidad de interactuar con la información que se está compartiendo o asimilando. Esto se consigue principalmente accediendo al contenido de las celdas de la libreta (código) y eventualmente modificándolas.

Pero hay otra posibilidad que ofrecen las libretas y es la de generar gráficos interactivos y animaciones, que permiten al lector o al estudiante, modificar de forma

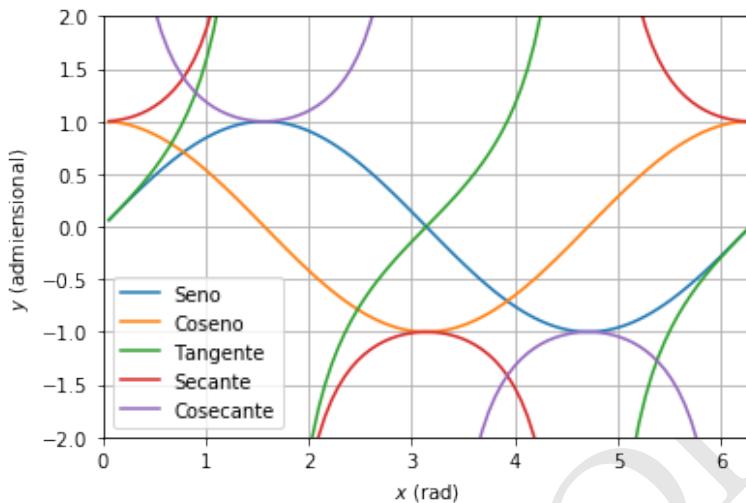


Figura 3.3: Gráfico de las funciones trigonométricas básicas, en el intervalo de interés (gráfico generado).

sencilla los parámetros de un algoritmo o una solución (gráficos interactivos) o ver en movimiento figuras que normalmente vemos estáticas en los libros.

Para ver las figuras interactivas y animaciones de esta parte del libro, debe dirigirse al sitio en línea del texto.

BORRADOR

Capítulo 4

Fundamentos

Resumen

En este capítulo haremos una síntesis práctica de los temas de matemáticas, física y astronomía que necesitaremos para desarrollar la mecánica celeste en el resto del libro. Repasaremos la geometría de las cónicas, (que son la base para describir la trayectorias de cuerpos celestes sometidos a la gavedad newtoniana), en el plano y en el espacio de tres dimensiones. Sintetizaremos, en un lenguaje moderno, los principios y leyes de la mecánica newtoniana, incluyendo la dinámica en sistemas de referencia rotantes. Presentaremos brevemente los fundamentos de la teoría de la relatividad (especial y general), especialmente el concepto de métrica y sus implicaciones cinemáticas básicas. Finalmente repasaremos a algunas conceptos y definiciones de astronomía que serán de relevancia en el texto, la organización y nomenclatura del sistema solar, los sistemas de medida de tiempo y los sistemas de referencia usados para especificar la posición de cuerpos en el cielo y en el espacio interplanetario.

4.1. Mecánica Newtoniana

Conocemos con el nombre de *mecánica* al conjunto de definiciones, principios y leyes físicas que permiten describir el movimiento de los cuerpos materiales (cinemática) y la relación con los agentes que los producen y perturban (dinámica).

El adjetivo newtoniano, que usaremos en esta sección, no significa que estas cantidades, principios y leyes hayan sido inventadas solo por Newton. Por un lado, además de sus ideas originales, Newton también compiló y sistematizó ideas que ya existían en su época; por el otro, mucha de sus ideas fueron también ampliadas después de la publicación de sus obras.

Lo *newtoniano* se refiere aquí al hecho de que en la definición de las cantidades básicas y en la formulación de las leyes, asumiremos, como lo hizo Newton en los *Principia* y lo hicieron sus sucesores hasta principios de los 1900, que el espacio y el tiempo son entidades independientes y no son afectadas por la materia.

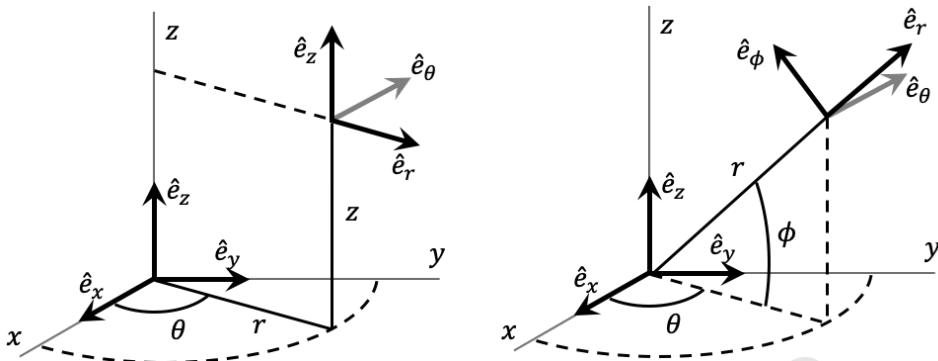


Figura 4.1: Definición de los sistemas de coordenadas usadas en este texto

4.1.1. Sistemas de coordenadas

Para describir el movimiento de un cuerpo, es necesario primero definir un sistema de coordenadas en el que se puedan expresar sus cantidades cinemáticas básicas.

A lo largo de este libro, usaremos los tres sistemas de coordenadas ortogonales clásicos (cartesianas, cilíndricas y esféricas, ver Figura 4.1) con algunas convenciones más propias de la astronomía y la mecánica celeste que del cálculo. A continuación, para clarificar nuestra notación, enumeraremos detalladamente las propiedades de cada sistema.

- **Sistema de coordenadas cartesiano.**

- Coordenadas: $x \in (-\infty, +\infty)$, $y \in (-\infty, +\infty)$, $z \in (-\infty, +\infty)$.
- Vectores unitarios: $\hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z$.
- Comentarios:
 - En todos los casos la orientación de los ejes obedecerá la *regla de la mano derecha*, es decir, los sistemas cartesianos usados en el texto y cuyos ejes están definidos por el conjunto de vectores unitarios ($\hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z$) forman un *conjunto de mano derecha*, a saber:

$$\begin{aligned}\hat{e}_x \times \hat{e}_y &= \hat{e}_z \\ \hat{e}_y \times \hat{e}_z &= \hat{e}_x \\ \hat{e}_z \times \hat{e}_x &= \hat{e}_y\end{aligned}\tag{4.1}$$

- **Sistema de coordenadas cilíndrico (ver ??).**

- Coordenadas: $r \in [0, +\infty)$, $\theta \in [0, 2\pi)$, $z \in (-\infty, +\infty)$.
- Conversión al sistema de coordenadas cartesianas:

$$\begin{aligned}x &= r \cos \theta \\ y &= r \sin \theta\end{aligned}\tag{4.2}$$

- Vectores unitarios expresados en el sistema de coordenadas cartesianas:

$$\begin{aligned}\hat{e}_r &= \cos \theta \hat{e}_x + \sin \theta \hat{e}_y \\ \hat{e}_\theta &= -\sin \theta \hat{e}_x + \cos \theta \hat{e}_y \\ \hat{e}_z &= \hat{e}_z\end{aligned}\quad (4.3)$$

- Comentarios:

- El conjunto de vectores unitarios ($\hat{e}_r, \hat{e}_\theta, \hat{e}_z$) forman un conjunto de mano derecha tal y como se definió en las Ecs. (4.1).
- Nótese que, a diferencia de la notación usada generalmente en los textos de cálculo, la coordenada cilíndrica r usa la misma letra que la coordenada esférica r y la magnitud del vector posición (ver siguiente sección). La distinción entre las tres, dependerá del contexto.
- Usaremos la letra griega θ para denotar el ángulo *acimutal*, a diferencia de la notación convencional que usa esta letra para la coordenada esférica polar (ángulo del vector posición respecto al eje z.)

■ **Sistema de coordenadas esférico** (ver ??).

- Coordenadas: $r \in [0, +\infty), \theta \in [0, 2\pi), \phi \in [-\pi/2, +\pi/2]$.
- Conversión al sistema de coordenadas cartesianas:

$$\begin{aligned}x &= r \cos \phi \cos \theta \\ y &= r \cos \phi \sin \theta \\ z &= r \sin \phi\end{aligned}\quad (4.4)$$

- Vectores unitarios expresados en el sistema de coordenadas cartesianas:

$$\begin{aligned}\hat{e}_r &= \cos \phi \cos \theta \hat{e}_x + \cos \phi \sin \theta \hat{e}_y + \sin \phi \hat{e}_z \\ \hat{e}_\theta &= -\sin \theta \hat{e}_x + \cos \theta \hat{e}_y \\ \hat{e}_\phi &= \cos \phi \cos \theta \hat{e}_x + \sin \phi \sin \theta \hat{e}_y - \sin \phi \hat{e}_z\end{aligned}\quad (4.5)$$

- Comentarios:

- El conjunto de vectores unitarios ($\hat{e}_r, \hat{e}_\theta, \hat{e}_\phi$) forman un conjunto de mano derecha tal y como se definió en las Ecs. (4.1).
- Nótese que, a diferencia de la notación usada generalmente en los textos de cálculo, la coordenada esférica ϕ se medirá respecto al plano $x - y$ (como una *latitud*) en lugar de hacerlo respecto al eje z (como una *colatitud*).

Una interesante página interactiva que permite visualizar mejor la definición de los sistemas de coordenadas y la orientación de los vectores coordenadas puede encontrarse en los siguientes enlaces, tanto para el [sistema de coordenadas cilíndrica](#)¹⁴ como para el [sistema de coordenadas esféricas](#)¹⁵.

¹⁴<http://dynref.engr.illinois.edu/rvy.html>

¹⁵<http://dynref.engr.illinois.edu/rvy.html>

4.1.2. Propiedades cinemáticas

Las propiedades cinemáticas son aquellas que se usan para describir el movimiento, tal y como ocurre, independiente de sus causas.

- **Tiempo, t :** Un número real que indica el *intervalo* transcurrido desde un *instante* de referencia. Esta cantidad es *independiente y absoluta* (ver recuadro de Notas abajo.)

- **Posición (o vector posición), \vec{r} :**

- Coordenadas cartesianas: $\vec{r} = x\hat{e}_x + y\hat{e}_y + z\hat{e}_z$.
- Coordenadas cilíndricas: $\vec{r} = r\hat{e}_r + z\hat{e}_z$.
- Coordenadas esféricas: $\vec{r} = r\hat{e}_r$.

- **Velocidad \vec{v} :**

- Definición general: $\vec{v} \equiv d\vec{r}/dt \equiv \dot{\vec{r}}$.
- Coordenadas cartesianas: $\vec{v} = \dot{x}\hat{e}_x + \dot{y}\hat{e}_y + \dot{z}\hat{e}_z$.
- Coordenadas cilíndricas: $\vec{v} = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta + \dot{z}\hat{e}_z$.
- Coordenadas esféricas: $\vec{v} = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta} \cos \phi \hat{e}_\theta + r\dot{\phi} \hat{e}_\phi$

- **Estado \vec{X} :** En el contexto de la cinemática en mecánica celeste, llamamos vector de estado \vec{X} , al vector columna formado por la unión de las componentes cartesianas de los vectores posición y velocidad, $\vec{X} : (x \ y \ z \ \dot{x} \ \dot{y} \ \dot{z})^T$ o en otras palabras:

$$\vec{X} : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

- **Aceleración \vec{a} :**

- Definición general: $\vec{a} \equiv d\vec{v}/dt \equiv \dot{\vec{v}} = d^2\vec{r}/dt^2 \equiv \ddot{\vec{r}}$.
- Coordenadas cartesianas: $\vec{a} = \ddot{x}\hat{e}_x + \ddot{y}\hat{e}_y + \ddot{z}\hat{e}_z$.
- Coordenadas cilíndricas: $\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{e}_\theta + \ddot{z}\hat{e}_z$.
- Coordenadas esféricas: $\vec{a} = (\ddot{r} - r\theta^2 \cos^2 \phi - r\dot{\phi}^2)\hat{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} \cos \phi + r\ddot{\theta} \cos \phi - 2r\dot{\theta}\dot{\phi} \sin \phi)\hat{e}_\theta + (2\dot{r}\dot{\phi} + r\dot{\phi}^2 \sin \phi \cos \phi + r\ddot{\phi})\hat{e}_\phi$

- **Tirón y otras:** Es posible definir propiedades que correspondan a derivadas superiores de la posición. Así por ejemplo, en algunos contextos es útil definir el *tirón* (*jerk* en inglés) o *sobreaceleración* $\vec{j} = d\vec{a}/dt \equiv d^3\vec{r}/dt^3$ o el *chasquido* o *rebote* (*jounce* en inglés), $\vec{s} \equiv d\vec{j}/dt \equiv d^4\vec{r}/dt^4$.

Las expresiones para \vec{v} y para \vec{a} en el sistema de coordenadas cilíndricas y esféricas, pueden obtenerse a partir de las derivadas de los vectores unitarios en cada sistema de coordenadas. Dejamos al lector estas deducciones (ver problemas al final del capítulo.)

Nota

Sobre las cantidades cinemáticas. Varias precisiones deben hacerse sobre la definición de las cantidades cinemáticas aquí:

- **Tiempo independiente y absoluto.** En la mecánica newtoniana el valor del tiempo t asociado a un evento, depende solo de las unidades y el origen escogido. Sin embargo, si dos sistemas de referencia, independiente de su estado de movimiento relativo, usan las mismas unidades y el mismo origen, obtendrán el mismo valor de t . Esta aproximación aunque útil es inexacta. Discutiremos esta idea más adelante en este capítulo (??.)
- **Notación del vector posición en coordenadas cilíndricas.** La notación del vector posición en coordenadas cilíndricas, $\vec{r} = r\hat{a}_r + z\hat{a}_z$ es inconsistente. En general, la magnitud de un vector se simboliza con su *letra asociada*, así $|\vec{r}|$ es $r = \sqrt{r^2 + z^2}$ que es una expresión sin sentido (el r del lado izquierdo - la magnitud del vector posición - no es el mismo r que aparece al lado derecho - la coordenada radial cilíndrica). En lo que resta del libro, el significado de r se precisara de acuerdo al contexto.
- **Velocidad, rapidez y componente radial de la velocidad.** Asegúrese de entender la diferencia entre $\dot{\vec{r}}$ (vector velocidad), v (magnitud de la velocidad o rapidez) y \dot{r} (componente radial de la velocidad en el sistema de coordenadas cilíndricas o esféricas).
- **Tirón y chasquido.** Aunque el tirón y el chasquido pueden ser de utilidad en algunos contextos mecánicos (por ejemplo en aplicaciones tecnológicas) e incluso en algunos contextos de física teórica, en mecánica celeste ninguno de los dos tiene una función específica (aunque es natural que puedan aparecer derivadas superiores de la posición en los desarrollos.) Por esta misma razón no profundizaremos en estas cantidades. Los interesados pueden encontrar en línea^a algunas lecturas interesantes^b al respecto.

^a[https://en.wikipedia.org/wiki/Jerk_\(physics\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Jerk_(physics))

^b<http://math.ucr.edu/home/baez/physics/General/jerk.html>

4.1.3. La ecuación de movimiento (e.d.m.)

Dada una partícula, una vez especificado el vector de estado inicial, es decir, la posición y velocidad en el tiempo t_0 , \vec{r}_0 y \vec{v}_0 , su estado futuro puede predecirse si se conoce la aceleración como función del tiempo o del estado de la partícula. Así, la igualdad

$$\ddot{\vec{r}} = \vec{a}, \quad (4.7)$$

puede verse como una definición o como una ecuación diferencial que permite calcular el estado del sistema en un tiempo $t \neq t_0$. A esta ecuación se la conoce en

mecánica como la **ecuación de movimiento**. Para referirnos a ella, en lo sucesivo, usaremos el acrónimo e.d.m. o el nombre **edm** en los algoritmos.

La e.d.m. es una ecuación diferencial vectorial de segundo orden con condiciones iniciales $\vec{r}(t_0) = \vec{r}_0$, $\dot{\vec{r}}(t = t_0) = \vec{v}_0$. En teoría de ecuaciones diferenciales, se dice que resolver la e.d.m. constituye un *problema de valor inicial* (en inglés *initial value problem* o IVP; en la siguiente sección volveremos sobre la importancia de esta clasificación.)

La aceleración \vec{a} en la Ec. (4.7) es en realidad una función puede depender de varias de las cantidades cinemáticas definidas en la sección previa. Para la mayoría de las situaciones consideradas en este texto, sin embargo, asumiremos, que en general la aceleración puede depender del tiempo o del estado de la partícula:

$$\vec{a} = \vec{a}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t).$$

La e.d.m. puede expresarse también como dos ecuaciones diferenciales vectoriales de primer orden:

$$\begin{aligned}\dot{\vec{r}} &= \vec{v} \\ \dot{\vec{v}} &= \vec{a}(\vec{r}, \vec{v}, t)\end{aligned}\tag{4.8}$$

Donde se ha introducido como variable auxiliar la velocidad $\vec{v} \equiv \dot{\vec{r}}$. En este sistema de ecuaciones diferenciales, las funciones incógnitas, son ahora dos $\vec{r}(t)$ y $\vec{v}(t)$ en lugar de una. El sistema ha ganado variables pero el orden se ha reducido. A esta manera de reescribir una ecuación diferencial se la conoce como *reducción de orden* y como veremos es una estrategia muy útil para su solución.

La e.d.m., tanto la de segundo orden (Ec. 4.7) como la de primero (Ec. 4.8) son ecuaciones diferenciales vectoriales. Es, decir, ambas representan, en realidad, una forma compacta de escribir un sistema de ecuaciones diferenciales escalares.

Así por ejemplo la e.d.m. de la Ec. (4.7), se puede escribir, en términos de las componentes cartesianas del vector posición, como:

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= a_x \\ \ddot{y} &= a_y \\ \ddot{z} &= a_z\end{aligned}\tag{4.9}$$

Por su lado la e.d.m. de primer orden de la Ec. (4.8), es en realidad un sistema de 6 ecuaciones diferenciales escalares de primer orden:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= v_x \\ \dot{y} &= v_y \\ \dot{z} &= v_z \\ \dot{v}_x &= a_x(x, y, z, v_x, v_y, v_z, y) \\ \dot{v}_y &= a_y(x, y, z, v_x, v_y, v_z, y) \\ \dot{v}_z &= a_z(x, y, z, v_x, v_y, v_z, y)\end{aligned}\tag{4.10}$$

En términos del vector de estado $\vec{X} : (\vec{r} \ \vec{v})^T$, la e.d.m. de primer orden (Ec. 4.10) se puede escribir como:

$$\dot{\vec{X}} = \begin{pmatrix} \vec{v} \\ \vec{a} \end{pmatrix}\tag{4.11}$$

Donde (abusando de la notación) $\vec{v} : (v_x \ v_y \ v_z)^T$ y $\vec{a} : (a_x \ a_y \ a_z)^T$

Nota

Ecuaciones de movimiento en otros sistemas de coordenadas. Ecuaciones análogas a la Ecs. (4.9,4.10) pueden escribirse en caso de que se conozca la función aceleración en coordenadas cilíndricas o esféricas. Para ello deben usarse las definiciones de velocidad y aceleración, en el sistema de coordenadas respectivo, que vimos en la Sección 4.1.2. La forma explícita de esas ecuaciones diferenciales, sin embargo, no será tan sencilla como la que escribimos en el caso de las coordenadas cartesianas. El lector podrá explorar estos casos a través de algunos de los problemas incluídos al final del capítulo.

4.1.4. Integración de la e.d.m.

La solución o *integración* de la e.d.m. constituye el problema matemático central de la cinemática y a la larga, el problema más importante de toda la mecánica incluyendo, naturalmente, la mecánica celeste.

En los cursos de mecánica newtoniana básica el problema se resuelve normalmente para dos casos simples:

1. $\vec{a} = \vec{0}$ que se conoce también como movimiento rectilíneo y uniforme o m.r.u.¹⁶
2. $\vec{a} = \vec{a}_0$ que se conoce como movimiento rectilíneo uniformemente acelerado, m.r.u.a.

Si bien estos dos casos son interesantes en un amplio rango de aplicaciones simples (p.e. el movimiento parabólico), en situaciones realistas y en particular en las que veremos en la mecánica celeste, la función \vec{a} puede ser mucho más compleja. En los próximos dos ejemplos consideraremos dos situaciones hipotéticas en las que \vec{a} depende del tiempo o del vector de estado.

4.1.5. Integración por cuadraturas

Ejemplo 1: movimiento con tirón constante

Considerese el caso simple de una partícula que está sometida a un tirón $\vec{j} : (j_0, 0, 0)$ constante (ver la Sección 4.1.2 para recordar la definición de tirón.) Suponga además que en $t = 0$ la aceleración de la partícula es nula.

En estas condiciones la función de aceleración, en cualquier tiempo, se puede escribir como:

$$\vec{a}(t) : (j_0 t, 0, 0),$$

y la componente x de la e.d.m. (Ec.4.9) será:

$$\ddot{x} = j_0 t \quad (4.12)$$

¹⁶En lo sucesivo usaremos el símbolo $\vec{0}$ para representar el vector nulo.

Si bien una solución a esta ecuación diferencial puede encontrarse fácilmente por tanteo, pe. $x(t) \propto j_0 t^3$, un procedimiento cuidadoso de solución nos permite descubrir algunas propiedades interesantes del sistema dinámico. Además, para el caso que nos interesa aquí, nos permitirá identificar un método que será de gran utilidad para el estudio de sistemas dinámicos en los siguientes capítulos.

Reescribamos la ecuación (4.12) en la forma:

$$\frac{d}{dt} \dot{x} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} c t^2 \right). \quad (4.13)$$

Aquí hemos decidido combinar dos notaciones diferentes para la derivada de una función f : una notación similar a la de Newton, \dot{f} (que usaremos de forma generalizada aquí) y la notación de Leibniz df/dt . Aunque el uso de dos notaciones no es conveniente, esta “inconsistencia” nos permitirá revelar mejor los pormenores de muchos de los procedimientos usados en el libro.

Si reunimos los términos en un mismo lado de la ecuación, la e.d.m. nos queda:

$$\frac{d}{dt} \left(\dot{x} - \frac{1}{2} c t^2 \right) = 0.$$

No hemos resuelto la ecuación todavía, pero está última manera de escribirla nos permite identificar una fórmula (la que aparece entre paréntesis) que combina la velocidad y el tiempo, y que, sin importar el estado de la partícula o el instante de tiempo, siempre es constante (su derivada con respecto al tiempo es cero).

Si llamamos I_x al valor constante al que es igual esta fórmula, podemos escribir:

$$\dot{x} - \frac{1}{2} c t^2 = I_x \quad (4.14)$$

Decimos que $f(\dot{x}, t) = \dot{x} - ct^2/2$ es una **integral del sistema**, una **cuadratura** o una **constante de movimiento** del sistema.

Es fácil verificar que otras constantes de movimiento del sistema son $\dot{y} = I_y$ y $\dot{z} = I_z$.

Definición 4.1

Constante de movimiento de un sistema dinámico. Si una función $f(\vec{r}, \vec{v}, t)$ que depende (o no) del tiempo y de una o todas las variables de estado de un sistema dinámico, es tal que:

$$f(\vec{r}, \vec{v}, t) = I$$

Donde I es una cantidad que solo depende de las condiciones iniciales, decimos que $f(\vec{r}, \vec{v}, t)$ es una **constante de movimiento**. Alternativamente la llamaremos una **integral** o **cuadratura** del sistema ^a.

^aEn términos rigurosos la *constante de movimiento* es la función $f(\vec{r}, \vec{v}, t)$ no su valor numérico I que por definición es un número real - o complejo - y por tanto constante.

Ejemplo 2: movimiento oscilatorio

Considere ahora el caso en el que una partícula tiene una aceleración dada por:

$$\vec{a}(t) : (-\omega x, 0, 0),$$

donde ω es una cantidad constante. Vemos que al alejarse del origen la aceleración de la partícula apuntará nuevamente hacia allí. Sabemos que este tipo de aceleración producirá un movimiento oscilatorio.

En este caso la e.d.m. para x será:

$$\ddot{x} = -\omega x.$$

La integración de esta ecuación por tanteo ya no es tan trivial. Tampoco lo es intentar expresar ambos lados de la ecuación como derivadas respecto al tiempo de otras funciones (como lo hicimos para encontrar la Ec. 4.13). Sin embargo, si multiplicamos ambos lados de la ecuación por la función \dot{x} :

$$\dot{x}\ddot{x} = -\omega\dot{x}x.$$

la nueva ecuación puede escribirse, convenientemente, de esta forma:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \dot{x}^2 \right) = \frac{d}{dt} \left(-\frac{1}{2} \omega x^2 \right),$$

de donde identificamos la constante de movimiento:

$$\frac{1}{2} \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \omega x^2 = I_x. \quad (4.15)$$

Dado que la multiplicación de la e.d.m. por la función \dot{x} , nos permitió encontrar una constante de movimiento o una integral de la ecuación, llamamos a \dot{x} , un *factor integrante*.

¿De qué sirve entonces encontrar las constantes de movimiento de un sistema si lo que queremos en realidad es encontrar formas explícitas (o representaciones en series) para las funciones $\vec{r}(t)$, $\vec{v}(t)$?

Las constantes de movimiento pueden ofrecernos información de la dinámica del sistema, incluso en situaciones en las que no es posible obtener una solución. Note, por ejemplo, cuan diferentes son las constantes de movimiento de los sistemas en los ejemplos 1 y 2. Aunque no resolvimos ninguno de los dos problemas, sus cuadraturas nos dan pistas sobre como se relacionan la posición y velocidad de la partícula en cualquier instante del tiempo. Más adelante mostraremos que es incluso posible dar una interpretación física a estas constantes (como la energía, el momentum lineal, el momentum angular, entre otras) y su relevancia para la comprensión del sistema, será aún mayor.

Ahora bien, siendo las cuadraturas $f(\vec{r}, \vec{v}, t)$ funciones de las variables que deseamos encontrar, si se obtienen suficientes constantes de movimiento (tantas como variables), habremos, técnicamente, recabado suficiente información para obtener la solución. En otras palabras, un número suficiente de cuadraturas o de constantes de movimiento permite convertir la solución de una ecuación diferencial, en la solución a un sistema algebraico de ecuaciones (aquel formado por las cuadraturas).

Para ilustrarlo volvamos a la e.d.m. del sistema en el ejemplo 1:

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= j_0 t \\ \ddot{y} &= 0 \\ \ddot{z} &= 0\end{aligned}$$

Es posible mostrar que este sistema tiene 6 constantes de movimiento (ya habíamos deducido tres de ellas, se deja al lector obtener las otras tres):

$$\begin{aligned}\dot{x} - \frac{1}{2}j_0 t^2 &= I_x \\ \dot{y} &= I_y \\ \dot{z} &= I_z \\ x - \frac{1}{6}j_0 t^6 - I_x t &= S_x \\ y - I_y t &= S_y \\ z - I_z t &= S_z\end{aligned}\tag{4.16}$$

Donde el valor de las cantidades $I_x, I_y, I_z, S_x, S_y, S_z$ se puede obtener del valor de las condiciones iniciales en el lado izquierdo de estas ecuaciones. La solución simultánea a este sistema de ecuaciones algebraicas permite encontrar de forma explícita la solución buscada al problema:

$$\begin{aligned}x(t) &= \frac{1}{6}j_0 t^6 + I_x t + S_x \\ y(t) &= I_y t + S_y \\ z(t) &= I_z t + S_z \\ \dot{x}(t) &= \frac{1}{2}j_0 t^2 + I_x \\ \dot{y}(t) &= I_y \\ \dot{z}(t) &= I_z\end{aligned}\tag{4.17}$$

Un procedimiento análogo puede usarse para encontrar la solución a la e.d.m. del sistema del ejemplo 2 (vea los problemas al final del capítulo.)

Es posible que nadie escoja un procedimiento tan elaborado para hayar la solución a la e.d.m. original de estos dos sistema, especialmente porque existen procedimiento más simples. Pero usarlo con sistemas conocidos, nos ha permitido ilustrar el poder que tiene este “nuevo” método, que llamaremos en lo sucesivo el *método de las cuadraturas* y que usaremos sistemáticamente a lo largo del texto al estudiar sistemas dinámicos mucho más complejos en mecánica celeste.

4.1.6. Integración numérica de la e.d.m.

En aquellos sistemas dinámicos en los que resolver la e.d.m. o encontrar *todas* las constantes de movimiento (resolver por cuadratura el sistema), sea imposible matemáticamente (o simplemente muy difícil), es posible buscar una solución aproximada usando métodos numéricos.

La mayoría de los métodos numéricos inventados desde los tiempos de Euler para resolver ecuaciones diferenciales con condiciones iniciales, IVP, tales como la e.d.m., suponen que la ecuación diferencial puede *reducirse* a un conjunto de ecuaciones diferenciales de primer orden de la forma:

$$\{\dot{Y}_k = f_k(t, \{y_i\}_M)\}_M\tag{4.18}$$

Donde Y_i ($i = 0, 1, 2, \dots, M - 1$) es el conjunto de funciones auxiliares que reemplaza a las cantidades claves del sistema dinámico. En física llamamos a las Ecs. (4.18) las *ecuaciones de movimiento reducidas* del sistema.

Nota

Numeración comenzando en cero. En lo sucesivo numeraremos todas las cantidades físicas y matemáticas (partículas, variables auxiliares, componentes de un vector o una matriz, etc.) comenzando en cero, tal y como se acostumbra en programación. Esta elección facilitará la implementación de las fórmulas resultantes en rutinas o programas de computador. Si bien la numeración comenzando en cero no es muy común en matemáticas o física existen justificaciones poderosas para su uso, algunas de las cuáles están enumeradas en “[Why numbering should start at zero](#)”^a del maestro de maestros de la programación científica, Edsger Wybe Dijkstra.

^a<https://www.cs.utexas.edu/users/EWD/transcriptions/EWD08xx/EWD831.html>

En la Sección 4.1.3 ya habíamos ilustrado este proceso de reducción cuando pasamos de la e.d.m. vectorial general (Ec. 4.7) al conjunto de ecuaciones de primer orden (Ec. 4.10). Ahora, si comparando estas últimas ecuaciones con la forma general del sistema en la Ec. (4.18), podemos hacer la siguiente identificación para las variables auxiliares Y_k :

$$\begin{aligned} Y_0 &= x, & Y_1 &= y, & Y_2 &= z \\ Y_3 &= v_x, & Y_4 &= v_y, & Y_5 &= v_z \end{aligned} \quad (4.19)$$

Por otro lado, las funciones f_k serán:

$$\begin{aligned} f_0 &= v_x, & f_1 &= v_y, & f_2 &= v_z \\ f_3 &= a_x, & f_4 &= a_y, & f_5 &= a_z \end{aligned}$$

En este caso, el número de ecuaciones de movimiento reducidas será $M = 6$.

Para escribir los algoritmos será útil expresar las ecuaciones de forma compacta. Esta es una forma posible de hacerlo:

$$\dot{Y}_k = \begin{cases} Y_{3+k} & , \quad 0 \leq k < 3 \\ a_{k-3} & , \quad 3 \leq k < 6 \end{cases} \quad (4.20)$$

Donde hemos introducido la notación $\{a_0, a_1, a_2\} = \{a_x, a_y, a_z\}$.

En este libro usaremos la rutina `odeint` de la biblioteca científica `scipy` (ver *Nota* abajo) para integrar numéricamente sistemas de ecuaciones diferenciales de la forma reducida. El lector puede leer la [documentación completa de `odeint`](#)¹⁷ para conocer los detalles de su aplicación.

Para ilustrar el uso de esta herramienta, volvamos sobre al ejemplo 1 de la Sección 4.1.4. Las ecuaciones reducidas del sistema serán las mismas de la Ec. (4.20), donde ahora $\{a_0, a_1, a_2\} = \{j_0 t, 0, 0\}$.

¹⁷<https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.integrate.odeint.html>

El primer paso para usar `odeint` es implementar las ecuaciones reducidas como una rutina:

(Algoritmo 4.1)

```
def edm_ejemplo1(Y,t,j0):
    dYdt=[0,0,0,0,0,0]

    dYdt[:3]=Y[3:]
    dYdt[3:]=[j0*t,0,0]

    return dYdt
```

Aunque parece sencilla, la importancia de rutinas de este tipo (que escribiremos en distintos apartes de este libro para simular numéricamente sistemas dinámicos complejos), exige que analicemos uno a uno, cada uno de sus partes:

- Como vemos, la función de la rutina es calcular la lista de los valores de las funciones f_k (lado derecho de las Ecs. 4.18) que son iguales a las derivada en el tiempo de las variables auxiliares \dot{Y}_k . En la rutina, para hacer más explícito el significado de esta lista, hemos decidido llamarla `dYdt` en lugar de `f`. Los nombres de las variables, no afectan la funcionalidad de las rutinas, pero pueden hacerla más legible y modificable.
- Los primeros dos argumentos de la rutina `Y` (que contiene una lista de los valores instantáneos de las variables auxiliares Y_k) y `t` (el tiempo en el que las variables auxiliares tienen ese valor) deben estar en ese orden (otros podrían encontrar más natural poner primero el tiempo, pero `odeint` esta diseñado para trabajar con rutinas con este *prototipo* particular.)
- Además de estos argumentos obligatorios, la rutina puede tener cualquier otro argumento adicional. En este caso aprovechamos esta libertad para proveer el valor de la constante `j0` que aparece en la e.d.m.
- Tanto las variables `Y` como `dYdt` pueden ser o bien *listas* o bien *arreglos* de NumPy. En este caso hemos escogido usar una lista para la variable `dYdt` porque hace a la rutina casi 10 veces más rápida. Sin embargo, en situaciones más complejas, puede ser una muy buena idea usar un arreglo en su lugar.
- Para asignar los valores de la lista `dYdt` hemos aprovechado el poder de Python para sacar *trozos*, *porciones* o *tajadas* (*slices* en inglés) de listas y arreglos. Así el trozo `dYdt[:3]` corresponde a las primeras tres componentes `dYdt[0]`, `dYdt[1]`, `dYdt[2]` (nótese que, por empezar en 0, este trozo no incluye la componente `dYdt[3]`). Por otra parte el trozo `Y[3:]` de esta lista, corresponde a las componentes `Y[3]`, `Y[4]`, `Y[5]`. Por tanto, la igualdad `dYdt[:3]=dYdt[3:]` equivale entonces a `dYdt[0]=Y[3]`, `dYdt[1]=Y[4]`, `dYdt[2]=Y[5]` que justamente implementa la ecuación $\dot{Y}_k = Y_{k+3}$ en la Ec. (4.20)

Para resolver este conjunto de ecuaciones diferenciales debemos, además de la rutina anterior, proveer:

1. Valores para los parámetros de la e.d.m. (en este caso la constante `j0`),

2. Una lista de condiciones iniciales, es decir de los valores iniciales de las variables auxiliares $\{Y_k(t = t_0)\}$
3. un conjunto de valores del tiempo (incluyendo el tiempo inicial t_0) para los cuales deseamos predecir el estado del sistema.

El siguiente algoritmo prepara estos insumos para `odeint`:

```
from numpy import array

j0=1

Y0s=array([1,0,0,-3,0,0])

ts=array([0.0,1.0,2.0,3.0,4.0,5.0])
```

Nótese que para las condiciones iniciales y los valores de tiempo (que son aquí arbitrarios, el lector podría escoger unos completamente diferentes) hemos escogido usar arreglos de NumPy (`array`) en lugar de listas planas. Aunque esto no es obligatorio, más adelante hará más fácil la manipulación matemática de estas variables.

Preste atención a la convención que usaremos en lo sucesivo de usar la letra `s` como sufijo del nombre de algunos arreglos y matrices (`s` por el plural). Así, en lo sucesivo (a no ser que se indique lo contrario) `t` denotará un tiempo individual, pero `ts` será un arreglo de tiempos.

La solución numérica al conjunto de ecuaciones diferenciales implementados en la rutina `edm_ejemplo1` se obtiene, finalmente, invocando `odeint`:

```
from scipy.integrate import odeint
Ys=odeint(edm_ejemplo1,Y0s,ts,args=(j0,))
```

Solución, `Ys`:

```
[[ 1.          0.          0.         -3.          0.          0.        ]
 [-1.8333333  0.          0.         -2.5         0.          0.        ]
 [-3.66666663 0.          0.         -1.          0.          0.        ]
 [-3.49999996 0.          0.          1.5         0.          0.        ]
 [-0.33333329 0.          0.          5.          0.          0.        ]
 [ 6.83333338 0.          0.          9.5         0.          0.        ]]
```

Las filas de la matriz `Ys` contiene el valor de las variables auxiliares $\{Y_k\}$ en cada uno de los tiempos provistos. Las columnas, naturalmente, corresponden a las componentes del vector de estado.

Así, la componente `Ys[0, 0]` corresponde al valor de la coordenada x de la partícula en t_0 (condición inicial). Por su parte, `Ys[0, 5]` es el valor inicial de v_z .

También es posible extraer tajadas de la matriz. Así, `Ys[:, 0]` (que podría leerse como *valores de cualquier fila, de la columna 0*) corresponde al valor de la coordenada x de la partícula en cada uno de los tiempos de integración.

Podemos, finalmente, visualizar la solución a la e.d.m. haciendo un gráfico de la coordenada x (columna `Ys[:, 0]` de la matriz de solución) como función del tiempo `ts`:

(Algoritmo 4.2)

```
import matplotlib.pyplot as plt
plt.figure();
plt.plot(ts,Ys[:,0]);
plt.show();
```

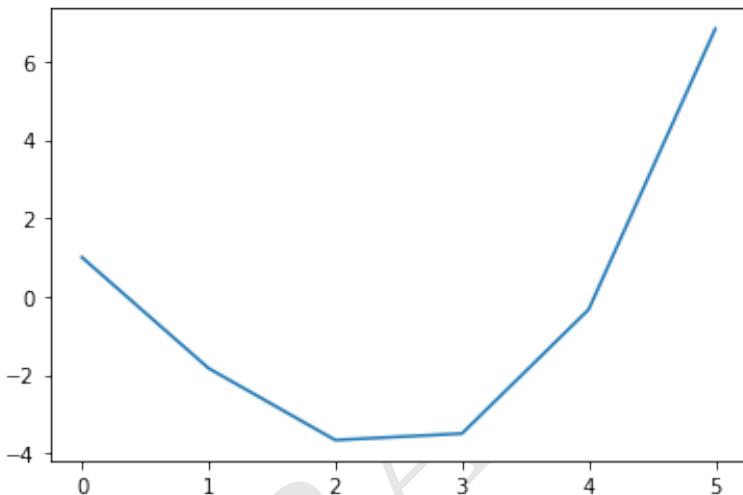
ver Figura 4.2

Figura 4.2: Figura correspondiente al código 4.2. La figura muestra la solución numérica a la e.d.m. del sistema correspondiente al ejemplo 1.

Nota

Algoritmos detrás de `odeint`. La rutina `odeint` es un *empaque de programación* en Python (*wrap* en inglés) de un complejo y robusto paquete de rutinas conocido como [ODEPACK](#)^a. Desarrollado por el *Center for Applied Scientific Computing* del *Lawrence Livermore National Laboratory*, las rutinas de ODEPACK están escritas en lenguaje FORTRAN77 (Python se usa únicamente para pasar los parámetros al paquete y para recuperar las salidas; ese es justamente el sentido del nombre “empaque de programación”). Han sido probadas y perfeccionadas durante varias décadas, en distintas aplicaciones científicas y de ingeniería [9].

Existen otras rutinas en el paquete `scipy` para resolver ecuaciones diferenciales con condiciones iniciales (IVP). Por ejemplo `ode` y `solve_ivp` pueden usarse también (esta última es, por ejemplo, la recomendada por los desarrolladores de `scipy`). Sin embargo, estas otras rutinas tienen una *interface* un poco más complicada y requieren conocimientos más avanzados de Python. Así por ejemplo, para integrar la e.d.m. del ejemplo 1, usando `solve_ivp`, el código **mínimo** en Python sería:

Nota (Cont.)

```
from scipy.integrate import solve_ivp
solucion=solve_ivp(fun=lambda t,y:edm_ejemplo1(y,t,j0),
                    t_span=[ts[0],ts[-1]],y0=Yos,t_eval=ts)
```

Como puede apreciarse la complejidad del código supera con creces la de aquel que usamos para invocar `odeint`. A esto se suma el hecho de que la solución, que en el caso de `odeint` es una matriz `Ys` fácil de interpretar, en el caso de `solve_ivp` es en realidad un *objeto* cuyo *atributo* `solucion.y` contiene la solución que buscamos. Un detalle final: para el tipo de ecuaciones diferenciales que usaremos en este libro `solve_ivp` es casi dos veces más lento que `odeint`. El lector, sin embargo puede explorar esas otras alternativas, especialmente si quiere, por ejemplo, comparar distintos métodos de solución (`odeint` escoge automáticamente el método.)

^a<https://computing.llnl.gov/casc/odepack>

¿Cómo saber si la solución obtenida con `odeint` y mostrada en la Figura 4.2 es la correcta? Podemos comprobarlo verificando que las posiciones y velocidades obtenidas satisfagan las constantes de movimiento que escribimos en las Ecs. (4.16). Así por ejemplo, podemos verificar que el valor de I_x y S_x sean efectivamente constantes:

```
xs=Ys[:,0]
xdots=Ys[:,3]

Ix=xdots-0.5*j0*ts**2
Sx=xs-(1./6)*j0*ts**3-Ix*ts
```

Valores de I_x = [-3. -3. -3. -3. -3. -3.]
 Valores de S_x = [1. 1. 1. 1. 1. 1.]

Efectivamente, para todos los tiempos en los que integramos la e.d.m., dos de las constantes de movimiento, tienen el mismo valor. La solución numérica, por tanto, coincide con nuestras expectativas matemáticas.

Una verificación más completa se consigue comparando la solución numérica, con la solución analítica para $x(t)$ escrita en las Ecs. (4.17):

$$x(t) = \frac{1}{6}j_0 t^3 + I_x t + S_x$$

Donde los valores de I_x y S_x pueden obtenerse de las condiciones iniciales. Una comparación gráfica entre ambas soluciones se consigue con este algoritmo:

(Algoritmo 4.3)

```
#Valor de las constantes de movimiento
Ix=Yos[3]-0.5*j0*ts[0]**2
Sx=Yos[0]-(1./6)*j0*ts[0]**3+Ix*ts[0]
```

```
#Solución analítica
xs=(1./6)*j0*ts**3+Ix*ts+Sx

#Gráfico
plt.figure();
plt.plot(ts,Ys[:,0],'ko',label="Numérico");
plt.plot(ts,xs,'r-',label="Analítico");
plt.legend();
plt.show();
```

ver Figura 4.3

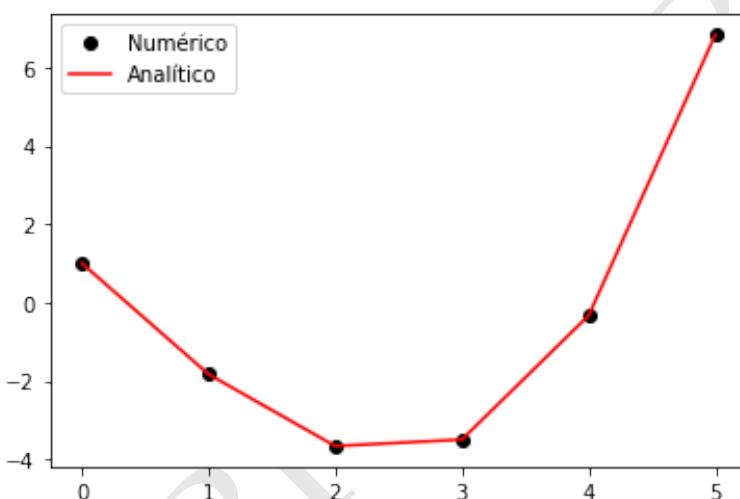


Figura 4.3: Figura correspondiente al código 4.3.

La coincidencia entre la solución analítica y la solución numérica mostrada en la [Figura 4.3](#) es casi perfecta.

Usando las mismas herramientas y algoritmos análogos a los usados antes, podemos ahora resolver el ejemplo 2 de la [Sección 4.1.4](#). De nuevo, las ecuaciones reducidas del sistema serán, como en el ejemplo 1, las mismas de la Ec. (4.20), pero ahora $\{a_k\} = \{-\omega Y_0, 0, 0\}$ (nótese que hemos reemplazado x por la variable auxiliar Y_0 de acuerdo a las reglas en Ec. 4.19). La rutina que implementa las `edm` en este caso será:

```
def edm_ejemplo2(Y,t,omega):
    dYdt=[0,0,0,0,0,0]

    dYdt[3:]=Y[3:]
    dYdt[3:]=-omega*Y[0],0,0

    return dYdt
```

La solución al sistema, una comprobación de que la constante I_x en la Ec. (4.15) es en realidad una constante, y una gráfica de la posición como función del tiempo, se muestra en el siguiente algoritmo:

(Algoritmo 4.4)

```
#Propiedades del sistema
omega=1
#Condiciones iniciales
Y0s=array([1,0,0,0,0,0])
#Tiempos
from numpy import linspace
ts=linspace(0,10.0,100)
#Solución
Ys=odeint(edm_ejemplo2,Y0s,ts,args=(omega,))

#Constante de movimiento
xs=Ys[:,0]
xdots=Ys[:,3]
Ix0=0.5*xdots**2+0.5*omega*xs**2

#Gráfico
plt.figure();
plt.plot(ts,Ys[:,0]);
plt.show();
```

ver Figura 4.4

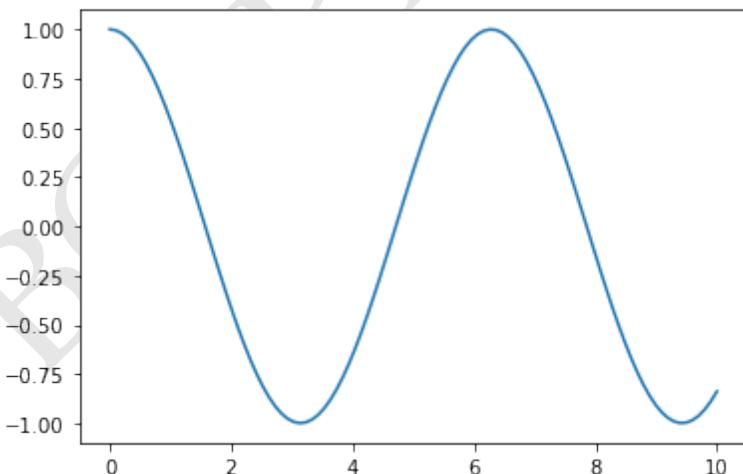


Figura 4.4: Figura correspondiente al código 4.4. Gráfico de la coordenada x para el sistema del ejemplo 2.

Primeros 10 valores de Ix: [0.5 0.5 0.5 0.5 0.5 0.5 0.5 0.5 0.5 0.5]...

Aquí podemos comprobar al examinar la ??, nuestra intuición inicial de que la

dinámica del sistema correspondía a la de un movimiento oscilatorio, es finalmente confirmada.

BORRADOR

Capítulo 5

El Problema de los N cuerpos

Resumen

En este capítulo abordaremos el que podría considerarse el problema central de la mecánica celeste: predecir la evolución futura de un sistema de cuerpos que se atraen gravitacionalmente (los planetas del sistema solar, las estrellas de un cúmulo globular o las galaxias de un cúmulo galáctico). A este problema se lo conoce históricamente como el *problema de los N cuerpos*. Formularemos física y matemáticamente el problema general, estudiaremos a continuación su “solución” aproximada usando algoritmos numéricos y finalmente exploraremos algunas de sus propiedades matemáticas más generales. Para todo ello, nos valdremos de los principios y leyes de la mecánica newtoniana y de su aplicación usando fuerzas, cálculo vectorial y geometría (un enfoque que llamaremos en lo sucesivo *formalismo vectorial* o *formalismo geométrico* de la mecánica celeste). Este capítulo sentará las bases numéricas y teóricas de los capítulos posteriores.

5.1. Formulación del problema

5.1.1. Motivación

El problema de los N cuerpos es uno de los más importantes problemas en la historia de la Física. En cierta forma, podría considerarse el primer problema serio de física teórica que se formuló en la historia de la ciencia.

Cuando Newton desarrolló su teoría mecánica con el propósito de describir el movimiento de los cuerpos del Sistema Solar, era claro que en el sistema existían cuerpos que dominaban el movimiento de otros, sin verse significativamente afectados por ellos.

Así por ejemplo, el Sol *domina* el movimiento de la Tierra, Júpiter por su lado *domina* el movimiento de sus lunas, mientras que Saturno lo hace para el movimiento de las partículas que componen sus anillos.

Cuando un cuerpo *domina* el movimiento de muchos otros cuerpos pequeños (o

ligeros para ser más precisos), el problema de describir y predecir los movimientos de esos cuerpos, es relativamente sencillo. La fuerza que ejercé el cuerpo *principal* sobre cada cuerpo pequeño es independiente de la posición o velocidad de todos los demás.

De ese modo, la solución al problema se obtiene resolviendo, independientemente, la ecuación de movimiento de cada cuerpo pequeño (como veremos en el ?? y en ??).

Al estudiar en algún detalle la dinámica de sistemas de muchos cuerpos en el Universo (un cúmulo de estrellas, el sistema Tierra-Luna, el sistema de Plutón y sus satélites), sistemas en los que puede haber uno o varios cuerpos que domina, se hace claro, sin embargo, que su dinámica es más compleja que la descrito en los párrafos anteriores.

Una prueba cercana de ello la ofrece el movimiento la Luna. Desde los primeros esfuerzos de Newton por describir el movimiento de nuestro satélite siguiendo un esquema simple como el esbozado anteriormente y en el que se asume que la Tierra (que es 81 veces más masiva) domina la dinámica, quedó claro que la Luna escapaba a estas descripciones simplificadas. La Tierra y la Luna no están aisladas y las fuerzas ejercidas por el Sol y otros planetas juegan un papel central en su dinámica.

Cuando se admite que en un sistema de muchas partículas, la posición y velocidad de todas ellas debe considerarse para obtener una descripción correcta de la dinámica del sistema, decimos que nos enfrentamos al **problema de los N cuerpos**

¹⁸

5.1.2. Enunciado físico y matemático

Históricamente, el problema de los N-cuerpos, puede formularse de la siguiente forma:

Definición 5.1

Problema de los N cuerpos. “Dado un sistema con un número arbitrario de partículas puntuales que se atraen mutuamente obedeciendo la leyes de Newton, encontrar, bajo la suposición de que ninguna de esas partículas colisiona, una representación de las coordenadas de cada partícula como una **serie** de una variable que sea una función conocida del tiempo, tal que para todos los valores de la variable, la serie **converga uniformemente**.^a”

^aTomado literalmente del prefacio del editor en [13], que a su vez reproduce el texto del concurso organizado por el rey Oscar II en 1889 (ver el recuadro *Historias de la Mecánica Celeste* en esta sección).

Esta formulación rigurosa (matemática) del problema, puede matizarse con algunos comentarios más físicos:

- Asumimos que en un momento dado del tiempo t_0 , las posiciones y

¹⁸En otras áreas de la física, a este problema se lo conoce también como el **problema de muchos cuerpos** y en general no se restringe únicamente a describir el movimiento del sistema (lo que es propio de la física clásica), sino también, por ejemplo, el estado cuántico de todo el sistema y su posible evolución en el tiempo.

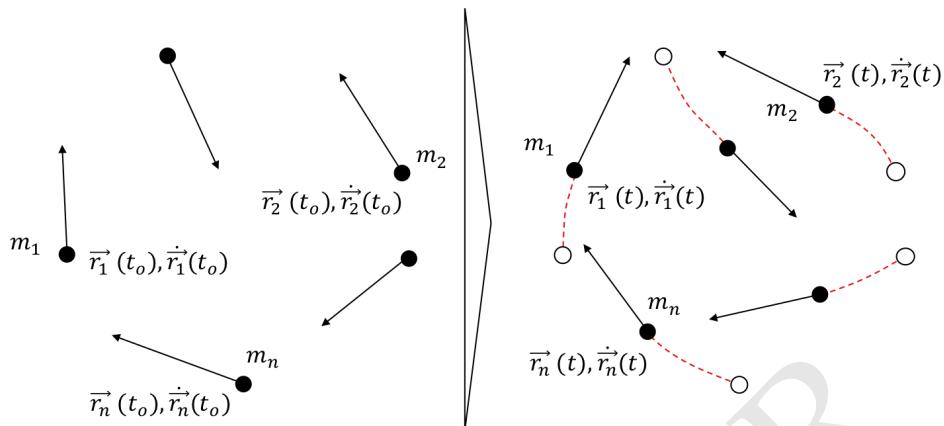


Figura 5.1: El problema de los N cuerpos: dadas las condiciones iniciales de un conjunto de N partículas puntuales, predecir la posición y velocidad de las partículas en cualquier instante futuro.

velocidades de todas las partículas (condiciones iniciales) son conocidas $\{\vec{r}_i(t_0), \dot{\vec{r}}_i(t_0)\}_N$ (ver Figura 5.1).

- El problema de los N cuerpos consiste entonces en encontrar las posiciones y velocidades de todas las partículas en un instante futuro de tiempo t , es decir $\{\vec{r}_i(t), \dot{\vec{r}}_i(t)\}_N$.
- Al decir que la solución puede encontrarse como una serie, el enunciado admite que no es necesario que las posiciones y velocidades deban expresarse en la forma de funciones analíticas (p.e. polinomios, funciones trigonométricas sin, cos, función logarítmos log, etc.)¹⁹
- Como lo admite implícitamente el enunciado, no se espera que sea posible predecir el estado del sistema en cualquier instante futuro. En el caso, por ejemplo, en el que las condiciones iniciales conduzcan a una colisión, al menos dos partículas en el sistema podrían situarse a una distancia nula una de otra (recordemos que asumimos que son puntuales) y se produciría una *situación singular* (fuerzas infinitas). Aún en esta situación, sin embargo, se espera que sea posible predecir la evolución del sistema entre el tiempo inicial y el tiempo de la primera colisión.
- La convergencia uniforme es una condición matemática rigurosa, aplicada a las sucesiones y series, que implica, palabras más, palabras menos, que las posiciones y velocidades calculadas con una serie sean tan cercanas como se desee a las posiciones y velocidades reales, sin importar el tiempo en el que se calculen.

¹⁹La idea de usar series para resolver problemas como estos, fue precisamente del francés Henri Poincaré (ver Historias de la Mecánica Celeste)

Matemáticamente, en el formalismo vectorial de la Mecánica, el problema de los N cuerpos es equivalente a encontrar la solución matemática al conjunto formado por las ecuaciones (diferenciales) de movimiento (e.d.m.) de todos los cuerpos del sistema, a saber:

$$\left\{ \ddot{\vec{r}}_i = \frac{1}{m_i} \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij} \right\}_N . \quad (5.1)$$

Aquí \vec{F}_{ij} es la fuerza ejercida *sobre* la partícula i *por* la partícula j . Se asume que no existen otras fuerzas (fricción con un medio, interacción con un campo externo, etc.) además de las interacciones entre ellas, actuando sobre las partículas del sistema.

La dificultad matemática más relevante del problema de los N cuerpos, estriba en el hecho de que las fuerzas entre las partículas dependen de las posiciones (y posiblemente de las velocidades) de todas las demás partículas, es decir

$$\vec{F}_{ij} = \vec{F}_{ij} (\{\vec{r}_k\}, \{\dot{\vec{r}}_k\}) .$$

De este modo, el conjunto de ecuaciones diferenciales que define el problema es altamente acoplado y en general *no lineal* (es decir, cada ecuación diferencial, depende de funciones no lineales de las posiciones o velocidades.)

De acuerdo a la formulación original del problema, asumimos que la única interacción entre las partículas es la interacción gravitacional newtoniana. De este modo, podemos escribir (ver Ec. ??):

$$\vec{F}_{ij} = -\frac{Gm_i m_j}{r_{ij}^3} \vec{r}_{ij} = -\frac{Gm_i m_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^3} (\vec{r}_i - \vec{r}_j) .$$

Es importante tener en cuenta aquí la dirección del vector relativo $\vec{r}_{ij} = \vec{r}_i - \vec{r}_j$, que, tal y como se usará en esta ecuación, apunta en la dirección que va de la partícula que produce la fuerza (partícula j) hacia la partícula que la experimenta (partícula i). Esta condición, es responsable del signo menos en la expresión para la fuerza.

En términos explícitos finalmente, el problema de los N cuerpos en mecánica celeste, consiste en resolver el conjunto de ecuaciones diferenciales:

$$\left\{ \ddot{\vec{r}}_i = - \sum_{j \neq i} \frac{\mu_j}{r_{ij}^3} \vec{r}_{ij} \right\}_N , \quad (5.2)$$

donde hemos introducido $\mu_j \equiv Gm_j$, que se conoce como el **parametro gravitacional** del cuerpo j (volveremos sobre esta cantidad en la [Sección 5.4.](#))

5.2. Constantes de movimiento

Como aprendimos en la [Sección 4.1.4](#), una manera posible para buscar la solución analítica a las $6N$ ecuaciones diferenciales del problema de los N cuerpos (Ec. 5.2), o al menos, aprender cosas sobre la dinámicas del sistema aunque no tenemos una solución, es la de buscar tantas constantes de movimiento (cuadraturas) como sea posible.

Como habíamos visto, para convertir el problema diferencial en uno algebraico determinado (igual numero de ecuaciones que de incognitas), es necesario encontrar $6N$ constantes, es decir, un número igual de constantes que el número de variables del sistema, a saber $x(t), y(t), z(t), \dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)$.

En esta sección usaremos los métodos introducidos en la [Sección 4.1.4](#) para encontrar las primeras integrales de movimiento del problema de los N cuerpos.

5.2.1. Momentum lineal del centro de masa

La primera cuadratura interesante resulta de aplicar un truco ingenioso: si multiplicamos la e.d.m. de cada una de las partículas en la Ec. (\ref{eq:ncuerpos_formulacion_ecuaciones}) y las sumamos, obtenemos

$$\sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i = - \sum_i \sum_j \frac{m_i \mu_j}{r_{ij}^3} \vec{r}_{ij} \quad (5.3)$$

En el lado derecho el término en el denominador es simétrico, $r_{ji} = r_{ij}$, mientras el término en el numerador, $\vec{r}_{ji} = \vec{r}_i - \vec{r}_j$ es *antisimétrico* (el signo cambia al cambiar el orden de los índices). Como resultado, por cada término en la doble sumatoria (por ejemplo el término $i = 1, j = 4$) habrá un término idéntico pero de signo contrario (el término con $i = 4, j = 1$). De este modo, el lado derecho de la Ec. (5.3) siempre será nulo (sin importar el número de partículas) y la suma de las e.d.m. de las partículas será:

$$\sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i = 0 \quad (5.4)$$

Esta ecuación puede expresarse de la forma (cuadratura):

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i \right) = 0,$$

siempre y cuando asumamos que la masa de todas las partículas del sistema $\{m_i\}$ son constantes.

De donde encontramos la primera constante (vectorial) de movimiento del problema de N cuerpos:

$$\sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i = \vec{P} \quad (5.5)$$

En realidad, por tratarse de una expresión vectorial, en esta cuadratura hay contenidas tres constantes de movimiento: $\sum_i m_i \dot{x}_i = P_x$, $\sum_i m_i \dot{y}_i = P_y$ y $\sum_i m_i \dot{z}_i = P_z$.

Es claro que \vec{P} no es otra cosa que el *momentum* lineal del centro de masa y la cuadratura obtenida simplemente expresa que en un sistema de N cuerpos, el *momentum* lineal total se conserva. Este resultado es consistente con la ley de conservación del *momentum* lineal para un sistema de partículas que habíamos enunciado en la [??](#). Dado que las partículas de nuestro sistema solo experimentan las fuerzas mutuas, no existe ninguna fuerza externa y por la misma razón su *momentum* lineal total debe mantenerse constante.

La constancia de \vec{P} en el problema de los N cuerpos, nos permite además introducir la idea de que siempre podemos describir la dinámica del sistema desde

un marco de referencia inercial, aquel con velocidad constante $\vec{V} = \vec{P}/M$ (donde $M = \sum m_i$), en el cuál el movimiento de las partículas es el más simple posible. En este sistema de referencia, $\vec{P} = \vec{0}$, lo que simplificará considerablemente los cálculos.

5.2.2. Posición del centro de masa

Una segunda constante de movimiento puede obtenerse aplicando cuadraturas a la primera integral (Ec. 5.5):

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_i m_i \vec{r}_i \right) = \frac{d}{dt} (\vec{P}t)$$

De donde podemos escribir:

$$\sum_i m_i \vec{r}_i - \vec{P}t = M\vec{R} \quad (5.6)$$

Para expresar esta última constante de movimiento, hemos elegido, arbitrariamente, llamar a su valor $M\vec{R}$, donde M es la masa total del sistema, que también es un valor constante y \vec{R} es también un vector constante. La elección de esta parametrización para el valor de esta integral, no modifica en nada el hecho que el lado derecho de la Ec. (\ref{eq:ncuerpos_centro_masa}) es constante también.

¿Cómo podemos interpretar físicamente la constante de movimiento en la Ec. (5.6)? Si dividimos la expresión de esta constante por la masa total del sistema M y la escribimos como:

$$\frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{M} = \vec{R} + \vec{V}t,$$

identificamos, del lado izquierdo, la posición del centro de masa del sistema en cualquier tiempo $R_{CM} = \sum m_i \vec{r}_i / M$. Del lado derecho encontramos $\vec{V}t$, que no es otra cosa que el desplazamiento que sufre el centro de masa al moverse con velocidad constante $\vec{V} = \vec{P}/M$.

De esta expresión, podemos entonces concluir que \vec{R} es el valor de la posición inicial del centro de masa, y que la Ec. (5.6) es la constante de movimiento asociada con ella.

De nuevo, por tratarse de una expresión vectorial, en realidad la Ec. (5.6) corresponde a tres constantes en lugar de una.

5.2.3. Momentum angular

Una nueva cuadratura del problema de los N cuerpos, puede obtenerse mediante el uso de un ingenioso factor integrante.

Si tomamos las e.d.m. del sistema de partículas (Ec. 5.2) y premultiplicamos, con el producto cruz (producto vectorial), por el vector posición de cada partícula y la masa de cada una de ellas (este será el factor integrante), el resultado será el conjunto de ecuaciones:

$$\left\{ m_i \vec{r}_i \times \ddot{\vec{r}}_i = -m_i \sum_j \frac{\mu_j}{r_{ij}^3} \vec{r}_i \times \vec{r}_{ij} \right\}$$

Por las propiedades del producto vectorial, el último término en el lado derecho será, $\vec{r}_i \times \vec{r}_{ij} = -\vec{r}_i \times \vec{r}_j$, que es también antisimétrico. Como consecuencia, si sumamos todas las ecuaciones diferenciales resultantes, obtendremos la ecuación:

$$\sum_i m_i \vec{r}_i \times \ddot{\vec{r}}_i = \vec{0}$$

Teniendo en cuenta esta propiedad (que será utilizada muchas veces en este libro):

$$\frac{d}{dt} (\vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i) = \vec{r}_i \times \ddot{\vec{r}}_i \quad (5.7)$$

Las e.d.m. sumadas después de ser transformada con el factor integrante introducido antes, conducirán a la forma en cuadratura:

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_i m_i \vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i \right) = \vec{0}$$

Y de aquí obtenemos una nueva constante de movimiento:

$$\sum m_i \vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i = \vec{L} \quad (5.8)$$

La interpretación física de esta constante de movimiento también es directa: se trata del *momentum angular* del sistema. La Ec. (5.8) indica que el *momentum angular* de un sistema de N cuerpos se mantiene constante. Este resultado, nuevamente, coincide con lo visto en la ??, en la que probabamos que si un sistema no está sometido a fuerzas externas (diferentes de las fuerzas de interacción) y se cumplía la ley de acción y reacción fuerte (que es el caso de la fuerza gravitacional newtoniana de acción instantánea a distancia) el momentum angular no debería cambiar.

Una interpretación geométrica muy interesante de esta constante de movimiento es la siguiente. Si nos ubicamos en el sistema de referencia del centro de masa del sistema, la dirección (constante) del momentum angular total define un plano invariable (en dirección perpendicular a él). No importa la posición de las partículas, ni el tiempo en el que se registren, dicho plano mantendrá siempre su orientación en el espacio. A este plano se lo conoce históricamente como el **plano invariable de Laplace** [11].

Definición 5.2

Plano invariable y sistema natural de referencia. Dado un sistema de N cuerpos $\{m_i\}$ y un marco de referencia inercial que se mueve con velocidad constante:

$$\vec{V} = \frac{m_i \dot{\vec{r}}_i}{M}$$

Llamamos **plano invariable** (de Laplace) a aquel que tiene vector normal

Definición (Cont.)

$\hat{n} = \vec{L}/L$, donde:

$$\vec{L} = \sum m_i \vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i$$

Las posiciones y velocidades de las partículas que definen \vec{L} se toman en un tiempo cualquiera (el vector es constante).

Llamamos **sistema natural de referencia** a aquel que tiene: 1) origen en el centro de masa del sistema;

$$\vec{R} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{M}$$

y 2) plano $x - y$ sobre el plano invariable.

Usando SPICE podemos intentar obtener una estimación de la inclinación del plano invariable del Sistema Solar, respecto al sistema de la eclíptica de J2000.0, asumiendo que el momentum angular total del sistema esta concentrado en el Sol y el planeta más masivo, Júpiter (entre los dos cuerpos concentran el 99.99 % de la masa del sistema).

(Algoritmo 5.1)

```
import spiceypy as spy

#Asumimos un tiempo cualquiera, en este caso t=J2000.0
et=0

#Carga kernels con posiciones (bsp) y masas (tpc)
spy.furnsh('pymcel/data/de430.bsp')
spy.furnsh('pymcel/data/de430.tpc')

#Parámetro gravitacional, posiciones y velocidades
musol=spy.bodvrd("SUN", "GM", 1)[1][0]
sol,tluz=spy.spkezr("SUN",et,"ECLIPJ2000","None","SSB")
rsol=sol[:3]
vsol=sol[3:]

mujupiter=spy.bodvrd("JUPITER_BARYCENTER","GM",1)[1][0]
jupiter,tluz=spy.spkezr("JUPITER_BARYCENTER",et,"ECLIPJ2000","None","SSB")
rjupiter=jupiter[:3]
vjupiter=jupiter[3:]
```

Sol:

```
mu = 132712440041.9394 km^3/s^2
Posición = [-1067598.50226456 -418234.39327422 30837.61810502] km
Velocidad = [ 0.00931257 -0.01282475 -0.00016333] km/s
```

Jupiter:

```
mu = 126712764.7999999 km^3/s^2
Posición = [ 5.97499980e+08 4.39186501e+08 -1.51960586e+07] km
Velocidad = [-7.90052522 11.14330827 0.13069904] km/s
```

Podrá encontrar algunos detalles sobre SPICE en el ??.

El momento angular total del sistema será:

```
from numpy import cross

#Constante de gravedad universal en km^3 / kg s^2
G=6.67e-20

#Momentum angular total
L=(musol/G)*cross(rsol,vsol)+(mujupiter/G)*cross(rjupiter,vjupiter)
```

$$L = [4.31661898e+35 \ 7.99455257e+34 \ 1.92754426e+37] \text{ kg m}^2/\text{s}^2$$

Nótese que hemos tenido que dividir por el valor de cada parámetro gravitacional μ por la constante G (en las unidades apropiadas) para obtener la masa de cada cuerpo.

Con este resultado, la inclinación estimada del plano invariable del Sistema Solar, se obtiene finalmente calculando el ángulo formado entre el momento angular total y el eje z (perpendicular al plano de la eclíptica de J2000.0), es decir $i = \cos^{-1}(L_z/L)$:

```
from numpy import arccos
from numpy.linalg import norm

i=arccos(L[2]/norm(L))

i = 1.3046988768626038 grados
```

Que es casi igual a la calculada con todos los cuerpos del Sistema Solar (ver el recuadro el *Mecánica Celeste en la Historia, el plano invariable del Sistema Solar*.) El lector podrá obtener una estimación mejor de esta inclinación, incluyendo muchos otros cuerpos, en uno de los problemas al final del capítulo.

5.2.4. Energía potencial de N cuerpos

Una manera alternativa de escribir la ecuación de movimiento del problema de los N cuerpos, es reconociendo que cada una las fuerzas gravitacionales que actúan sobre las partículas *derivaban* de un potencial (son fuerzas conservativas). Así:

$$\left\{ m_i \ddot{\vec{r}}_i = - \frac{\partial}{\partial \vec{r}_i} \left(\sum_{j \neq i} m_j V_j \right) \right\}_N ,$$

donde $V_j = -\mu_j/r_{ij}$ es el potencial gravitacional de la partícula j , medido en la posición de la partícula i , y la *derivada vectorial* $\partial/\partial \vec{r}_i$ es, por definición en este libro, una representación del operador gradiente, $\vec{\nabla}_i$, calculado con respecto a las coordenadas de la partícula i . Explícitamente, en coordenadas cartesianas, $\partial/\partial \vec{r}_i$ es:

$$\frac{\partial}{\partial \vec{r}_i} \equiv \frac{\partial}{\partial x_i} \hat{e}_x + \frac{\partial}{\partial y_i} \hat{e}_y + \frac{\partial}{\partial z_i} \hat{e}_z$$

Si introducimos lo que podemos llamar la *energía potencial gravitacional mutua* $U_{ij} \equiv m_i V_j$, la ecuación de movimiento se escribe:

$$\left\{ m_i \ddot{\vec{r}}_i = -\frac{\partial}{\partial \vec{r}_i} \sum_{j \neq i} U_{ij} \right\}_N , \quad (5.9)$$

Si bien, la función de energía potencia $\sum_{j \neq i} U_{ij}$, que aparece en el lado derecho de las Ecs. (5.9), es única para cada partícula del sistema, existe una interesante propiedad del problema de los N cuerpos (y otros de problemas de fuerzas centrales) que permite calcular las fuerzas en el sistema, como el gradiente de una única función de energía potencial. Aunque esta propiedad es presentada como un resultado trivial, en casi todos los libros de mecánica celeste, esta lejos de serlo por lo que profundizaremos un momento en ella.

Consideremos el caso particular de un sistema de tres cuerpos. La e.d.m. original de este sistema tiene la forma (Ecs. 5.2):

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{\vec{r}}_1 &= -\frac{m_1 \mu_2}{r_{12}^3} \vec{r}_{12} - \frac{m_1 \mu_3}{r_{13}^3} \vec{r}_{13} \\ m_2 \ddot{\vec{r}}_2 &= -\frac{m_2 \mu_1}{r_{21}^3} \vec{r}_{21} - \frac{m_2 \mu_3}{r_{23}^3} \vec{r}_{23} \\ m_3 \ddot{\vec{r}}_3 &= -\frac{m_3 \mu_1}{r_{31}^3} \vec{r}_{31} - \frac{m_3 \mu_2}{r_{32}^3} \vec{r}_{32} \end{aligned} \quad (5.10)$$

Nótese, por ejemplo, que las fuerzas $\vec{F}_{12} = -m_1 \mu_2 \vec{r}_{12} / r_{12}^3$ y $\vec{F}_{21} = -m_2 \mu_1 \vec{r}_{21} / r_{21}^3$, en realidad pueden obtenerse de una sola energía potencial, a saber, $U_{12} = -m_1 \mu_2 / r_{12}$. La fuerza \vec{F}_{12} se obtiene de U_{12} si se deriva esta cantidad respecto a \vec{r}_1 ; por su lado, la fuerza \vec{F}_{21} aparece deribando U_{12} respecto a \vec{r}_2 . Una situación similar ocurre con los pares de fuerzas $\vec{F}_{13}, \vec{F}_{31}$ y $\vec{F}_{23}, \vec{F}_{32}$. Es decir, 6 fuerzas diferentes derivan, en realidad, de solo 3 términos de energía potencial. Explícitamente:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{\vec{r}}_1 &= -\frac{\partial U_{12}}{\partial \vec{r}_1} - \frac{\partial U_{13}}{\partial \vec{r}_1} \\ m_2 \ddot{\vec{r}}_2 &= -\frac{\partial U_{12}}{\partial \vec{r}_2} - \frac{\partial U_{23}}{\partial \vec{r}_2} \\ m_3 \ddot{\vec{r}}_3 &= -\frac{\partial U_{13}}{\partial \vec{r}_3} - \frac{\partial U_{23}}{\partial \vec{r}_3} \end{aligned} \quad (5.11)$$

Dado que $\partial U_{23} / \partial \vec{r}_1 = \partial U_{13} / \partial \vec{r}_2 = \partial U_{12} / \partial \vec{r}_3$, las e.d.m. se pueden escribir como:

$$\begin{aligned}
 m_1 \ddot{\vec{r}}_1 &= -\frac{\partial U_{12}}{\partial \vec{r}_1} - \frac{\partial U_{13}}{\partial \vec{r}_1} - \frac{\partial U_{23}}{\partial \vec{r}_1} \\
 m_2 \ddot{\vec{r}}_2 &= -\frac{\partial U_{12}}{\partial \vec{r}_2} - \frac{\partial U_{13}}{\partial \vec{r}_2} - \frac{\partial U_{23}}{\partial \vec{r}_2} \\
 m_3 \ddot{\vec{r}}_3 &= -\frac{\partial U_{12}}{\partial \vec{r}_3} - \frac{\partial U_{13}}{\partial \vec{r}_3} - \frac{\partial U_{23}}{\partial \vec{r}_3}
 \end{aligned} \tag{5.12}$$

Allí identificamos una sola función de energía potencial:

$$U = U_{12} + U_{13} + U_{23}, \tag{5.13}$$

de la cual puede calcularse la fuerza sobre cualquier partícula del sistema usando:

$$\left\{ m_i \ddot{\vec{r}}_i = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}_i} \right\}_N \tag{5.14}$$

Esta es la forma más compacta de escribir las ecuaciones de movimiento del problema de los N cuerpos. Estudie cuidadosamente la diferencia entre esta forma de las ecuaciones, que usa una sola función de energía potencial y la menos económica forma de las Ecs. ({eq:ncuerpos_edm_potencial_individual}).

NOTA

Motivación física de la energía potencial de N cuerpos. La deducción que hicimos en esta sección de la energía potencial de tres cuerpos, es de naturaleza eminentemente matemática. Sin embargo, una vez obtenida, es posible dar a ella una interpretación que nos permite entender las razones físicas por las que tiene un número restringido de términos. Es claro, físicamente, que al cuantificar la energía total de interacción de un sistema, solo debemos tener en cuenta *una vez* la contribución que cada pareja de partículas hace al presupuesto energético total. Así, el sistema de partículas 1 y 2 contribuyen con U_{12} a la energía total. Resulta obvio entonces, que sumar a esa energía el término U_{21} sería redundante y físicamente incorrecto. Lo mismo pasa con las energías de interacción U_{13} que descartan la necesidad de incluir la U_{31} y la U_{23} que una vez sumada hace innecesario agregar la energía U_{32} .

Este razonamiento, es la razón *física* por la cual la función de energía potencial en la Ec. (5.13) total solo contiene tres términos (en lugar de 6 como podría intuirse de la forma de la Ec. 5.9).

¿Podría el lector generalizar este resultado a cuatro cuerpos? O más interesante ¿podría ofrecer una fórmula general para el número de términos que tiene la función de energía potencial de un sistema de N cuerpos? (intente encontrar la respuesta antes de mirar el pie de nota)

a

^aLa respuesta está en la teoría combinatoria: el número de términos de la energía

NOTA (Cont.)

potencial es igual al número de combinaciones $C_{N,k}$ en parejas ($k = 2$) de N números (las partículas del sistema). Es un resultado bien conocido que $C_{N,k} = N!/[k!(N-k)!]$. Con $N = 3$ y $k = 2$, el número de combinaciones es $C_{3,2} = 3!/2! = 3$ que coincide con nuestro resultado.

La energía potencial de N cuerpos U , que escribimos en la Ec. (5.13) para un sistema de tres partículas, puede ahora escribirse, en general, para un sistema de N cuerpos, de dos maneras diferentes:

1. Restringiendo las sumatorias:

$$U = - \sum_{i=1}^{i < j} \sum_{j=1}^{j=3} \frac{m_i \mu_j}{r_{ij}} \quad (5.15)$$

Esta expresión es relativamente simple, pero expandir las sumatorias, en la práctica, puede ser muy complicado (el lector puede intentar, por ejemplo, escribir la energía potencial de un sistema de cuatro cuerpos, usando la fórmula anterior y no el razonamiento físico que esbozamos en la última *Nota*.)

2. Sin restringir las sumatorias:

$$U = -\frac{1}{2} \sum_i \sum_{j \neq i} \frac{m_i \mu_j}{r_{ij}} \quad (5.16)$$

El factor $1/2$ en el lado derecho, viene del hecho de que al no restringir la sumatoria sobre la i , aparecerán los términos duplicados $m_i \mu_j / r_{ij}$ y $m_j \mu_i / r_{ji}$.

En lo que queda de este texto usaremos la parametrización de la Ec. (5.16).

5.2.5. Conservación de la energía

Si multiplicamos las Ecs. (5.14) por el factor integrante $m_i \vec{r}_i$ (usando el producto punto o producto escalar) y sumamos sobre todas las partículas (como lo hemos hecho para obtener las otras constantes de movimiento) obtenemos:

$$\sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \ddot{\vec{r}}_i = - \sum_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial U}{\partial \vec{r}_i}$$

El lado derecho de esta ecuación tiene una forma claramente reconocible en el cálculo vectorial. Recuerda la aplicación de la regla de la cadena para calcular la derivada total respecto del tiempo de la función de energía potencial $U(\{\vec{r}_i\})$:

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\partial U}{\partial \vec{r}_1} \cdot \frac{d\vec{r}_1}{dt} + \frac{\partial U}{\partial \vec{r}_2} \cdot \frac{d\vec{r}_2}{dt} + \dots + \frac{\partial U}{\partial \vec{r}_n} \cdot \frac{d\vec{r}_n}{dt}$$

Que coincide exactamente con el lado derecho de la suma de las e.d.m. Este resultado permite conseguir el objetivo del factor integrante: escribir la ecuación diferencial en cuadraturas:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i^2 \right) = -\frac{dU}{dt}$$

De donde podemos identificar, finalmente, una nueva constante de movimiento en el problema de los N cuerpos:

$$\frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i^2 + U(\{\vec{r}_i\}) = E \quad (5.17)$$

Con $U(\{\vec{r}_i\}) = (1/2) \sum_i \sum_{j \neq i} m_i m_j / r_{ij}$.

Físicamente el valor de E corresponde a la energía mecánica total del sistema de N cuerpos y esta primera integral no es otra cosa que una manifestación del hecho de que la energía total se conserva en este tipo de sistemas.

En un terreno más práctico, sería interesante, usar este resultado, para preguntarse, por ejemplo, ¿cuánta energía *mecánica* existe en el sistema Tierra-Luna?

Para ello podemos apoyarnos de SPICE, como lo hicimos antes para calcular el momentum angular del sistema Sol-Jupiter (ver Algoritmo 5.1):

```
import spiceypy as spy

#Constante de gravitación universal en km^3 / kg s^2
G=6.67e-20

#Asumimos un tiempo cualquiera, en este caso t=J2000.0
et=0

#Carga kernels con posiciones (bsp) y masas (tpc)
spy.furnsh('pymcel/data/de430.bsp')
spy.furnsh('pymcel/data/de430.tpc')

#Parámetro gravitacional, posiciones y velocidades
mutierra=spy.bodvrd("EARTH","GM",1)[1][0]
tierra,tluz=spy.spkezr("EARTH",et,"ECLIPJ2000","None","EARTH_BARYCENTER")
rtierra=tierra[:3]
vtierra=tierra[3:]

muluna=spy.bodvrd("MOON","GM",1)[1][0]
luna,tluz=spy.spkezr("MOON",et,"ECLIPJ2000","None","EARTH_BARYCENTER")
rluna=luna[:3]
vluna=luna[3:]
```

Una diferencia importante entre este algoritmo y el que vimos para el cálculo del momentum angular, es que las posiciones y velocidades de la Tierra y la Luna, son calculadas respecto a la posición del centro de masa del sistema (EARTH_BARYCENTER) en hacerlo respecto del baricentro del sistema solar (SSB).

La energía mecánica total del sistema, será entonces:

```
from numpy.linalg import norm

#Masas
```

```

mtierra=mutierra/G
mluna=muluna/G

#Energía potencial
U=-G*mluna*mtierra/norm(rtierra-rluna)

#Energía cinética
K=0.5*mutierra*norm(vtierra)**2+0.5*mluna*norm(vluna)**2

#Energía total
E=K+U

print(f"Energía potencial U: {U} kg km^2/s^2")
print(f"Energía cinética K: {K} kg km^2/s^2")
print(f"Energía total E: {E} kg km^2/s^2")

```

Energía potencial U: -7.369786503549795e+22 kg km²/s²
 Energía cinética K: 3.4021556025880696e+22 kg km²/s²
 Energía total E: -3.967630900961725e+22 kg km²/s²

¿Qué significa que la energía mecánica total del sistema Tierra-Luna sea negativa? Como lo comentamos en la ?? el signo negativo de la energía potencial gravitacional (responsable última del signo negativo de E en este caso) se debe a que consideramos (arbitrariamente) la distancia de referencia para calcular esta energía, como una distancia infinita. Es decir, si la Tierra y la Luna estuvieran a una distancia extremadamente grande (incluso para los parámetros astronómicos) tendrían una energía gravitacional muy cercana a cero.

Otra manera de interpretar el signo de la energía mecánica total, es decir que $-E$ es el trabajo *mínimo* requerido para separar a la Tierra y a la Luna a una distancia inmensa. O en términos *escatológicos*, $-E$ es la energía mínima necesaria para destruir la unión entre nuestro planeta y su eterna compañera. No es difícil mostrar (ver problemas al final del capítulo) que esta energía es igual a la energía cinética de un cuerpo con la masa de la Luna moviéndose a $\sim \$1$ km/s relativa al centro de masa del sistema. Una colisión con un cuerpo gemelo de la Luna, por ejemplo, podría hacer el trabajo de separarnos de ella²⁰.

Para hacernos a una idea más cercana del valor de esta energía, las unidades utilizadas aquí, $\text{kg km}^2/\text{s}^2$, que vienen del hecho que SPICE usa km como unidad de longitud base, no son las más convenientes. Para convertirlas a las unidades del sistema internacional, los joules, $J = \text{kg m}^2/\text{s}^2$, basta multiplicar las energías obtenidas anteriormente por un factor de conversión de 10^6 . En conclusión podemos decir que (el valor absoluto de) la energía mecánica total del sistema Tierra-Luna es 4×10^{28} J. Esta energía es aproximadamente igual a la energía consumida por toda la humanidad en casi 2 millones de años²¹.

²⁰En realidad una buena parte de la energía cinética de una colisión como estas se convertiría inicialmente en calor y además destruiría a la Luna y al impactor

²¹https://en.wikipedia.org/wiki/World_energy_consumption

5.2.6. Síntesis y teorema de Bruns

Hasta aquí hemos identificado las siguientes constantes de movimiento (cuadraturas) del problema de N cuerpos:

$$\begin{aligned} \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i &= \vec{P} \\ \sum_i m_i \vec{r}_i - \vec{P}t &= M\vec{R} \\ \sum_i m_i \vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i &= \vec{L} \\ \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i^2 + U(\{\vec{r}_i\}) &= E \end{aligned} \tag{5.18}$$

Las tres primeras son formas compactas (vectoriales) de expresar, cada una, tres constantes diferentes, de modo que, en total, tenemos hasta ahora 10 ecuaciones algebraicas (escalares) que relacionan las $6N$ cantidades desconocidas $\{x_i(t), y_i(t), z_i(t)\}_N, \{\dot{x}_i(t), \dot{y}_i(t), \dot{z}_i(t)\}_N$. Es claro que nos falta mucho trabajo por hacer si queremos resolver incluso el problema más simple (con $N=2$, necesitaríamos por lo menos 12 cadraturas para resolver el sistema.)

En el año 1887 el destacado matemático Ernst Heinrich Bruns, en un artículo titulado (en alemán) *Über die integrale des Vielkörper-Problems (Sobre las integral del problema de varios cuerpos)* [6] demostró que, al menos para el problema de los tres cuerpos, no existen otras primeras integrales de movimiento que puedan expresarse en términos de funciones algebraicas de las posiciones y velocidades de las partículas y que sean independientes de las 10 integrales escritas hasta ahora. En el año 2000, este resultado fue generalizado a sistemas con un número arbitrario de partículas, constituyéndose en lo que se conoce hoy como el **teorema de Bruns generalizado** [10]:

Teorema 5.1

Teorema de Bruns generalizado. En el problema newtoniano de $(N+1)$ cuerpos en \mathbb{R}^p , con $N \geq 2$ y $1 \leq p \leq N+1$, toda primera integral que es algebraica respecto a las posiciones, el momento lineal y el tiempo, es una función algebraica de las primeras integrales clásicas: la energía, las $p(p-1)/2$ componentes del momento angular, y las $2p$ constantes que vienen del movimiento lineal uniforme del centro de masa.

Nótese que este resultado es un poco desesperanzador, en el sentido de implicar que por mucho que lo intentemos, no podemos obtener el número de constantes necesarias para expresar el problema de los N cuerpos como un conjunto completo de cuadraturas.

Esto, sin embargo, no significa, de un lado, que las cuadraturas obtenidas no puedan enseñarnos cosas muy interesantes sobre el sistema (como ilustraremos en la siguiente sección); y del otro lado, y más importante, que el problema en realidad no tenga solución: el hecho de no encontrar cuadraturas suficientes solo significa que una solución algebraica es imposible.

En el año 1990, casi exactamente 100 años después de la formulación del problema de los N cuerpos en el concurso del Rey Oscar II, el matemático chino Wang Qiu-Dong [15] y, posiblemente, el ruso L. K. Babadzhaniants ([1], [2]) demostraron la existencia de una solución, con las condiciones expresadas en el problema original (ver la [Sección 5.1](#)), al menos para el caso de un sistema con momentum angular total nulo. Con este resultado, Wang extendió el otro resultado obtenido en 1912 por Karl Sundman, quién había probado que dicha solución existe en el caso de $N=3$, incluso en sistemas con un momento angular no nulo (ver recuadro *Mecánica Celestre en la Historia* al principio de este capítulo.) Esto es lo más cerca que la ciencia ha estado de resolver el problema de los N cuerpos (para una interesante síntesis de la historia de la solución al problema de los N-cuerpos ver [7].)

Lamentablemente, si bien Sundman y Wang demostraron la existencia de una solución (en series) para el problema, la forma explícita de esa solución es, por decir menos, inútil: las series convergen muy lentamente y se necesitan normalmente millones de términos para aproximar la posición de las partículas incluso en intervalos de tiempo extremadamente cortos [7]. Este obstáculo, nos llevará a explorar en la ?? formas alternativas y aproximadas de resolver el problema.

Antes de abandonar, sin embargo, la descripción analítica del problema de los N cuerpos, revisaremos un resultado general, derivado de las propiedades contenidas en las primeras integrales obtenidas hasta aquí y que tiene importantes aplicaciones en la mecánica celeste y en general en la física de sistemas de muchas partículas.

5.3. El teorema del Virial

En la última sección le pusimos números a una de las más importantes constantes de movimiento en el problema de los N cuerpos: la Energía. Para hacerlo, calculamos la energía mecánica total del sistema Tierra-Luna y encontramos, contra toda intuición, que era negativa. La interpretación de este resultado nos condujo a entender que el signo de la energía en el sistema indica que *hace falta* energía para separar a la Tierra y la Luna a una distancia enorme; o dicho en otros términos, que *el valor negativo de la energía de un sistema de dos partículas indica que la distancia entre las partículas está acotada y forman un sistema ligado*.

Este interesante resultado, aunque parece obvio, es evidencia de una afirmación que hemos repetido a lo largo de este capítulo: las constantes de movimiento o integrales en el problema de los N cuerpos, no necesariamente proveen toda la información necesaria para saber dónde estarán las cuerpos en el futuro, pero ofrecen pistas útiles sobre el destino del sistema.

¿Podríamos generalizar la interpretación del signo de la energía en el sistema Tierra-Luna a sistema formados por un número arbitrario de partículas?

Para responder a esta pregunta debemos identificar o definir primero una cantidad física que nos ayude a evaluar la afirmación “las partículas se encuentran a una distancia finita”.

No es difícil descubrir que el momento de inercia total del sistema puede cumplir esta función:

$$I \equiv \sum_i m_i \vec{r}_i^2$$

En términos de I , el sistema tenderá a disgregarse, si para $t \rightarrow \infty$, el momento de inercia $I \rightarrow \infty$. Al contrario, el sistema colapsará totalmente, si, en algún tiempo finito t_c , el momento de inercia $I \rightarrow 0$. Un sistema *ligado* (que no se disgrega, ni colapsa), será aquel que se encuentra entre estos dos extremos.

¿Cómo evoluciona I ? Podemos saberlo si encontramos sus primeras derivadas respecto al tiempo:

$$\dot{I} = 2 \sum_i m_i \vec{r}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i$$

Esta primera derivada no parece proveer mucha información. Podemos intentar con la segunda derivada:

$$\begin{aligned} \ddot{I} &= 2 \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i^2 + 2 \sum_i \vec{r}_i \cdot (m_i \ddot{\vec{r}}_i) \\ &= 2 \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i^2 - 2 \sum_i \vec{r}_i \cdot \frac{\partial U}{\partial \vec{r}_i} \end{aligned} \quad (5.19)$$

Esta parece más interesante, por cuanto reconocemos en ella cantidades físicas que habíamos encontrado antes, por ejemplo la energía cinética $K = \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i^2 / 2$ y la energía potencial.

En este punto es interesante introducir un resultado que será de utilidad en varias partes del libro y que se conoce como el **Teorema de funciones homogéneas de Euler**.

Teorema 5.2

Teorema de funciones homogéneas de Euler. Si una función multivariada $f(\{x_i\}_N)$ es tal que $f(\{\lambda x_i\}_N) = \lambda^k f(\{x_i\}_N)$, entonces es cierto que:

$$\sum_i x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = kf$$

A las funciones que cumplen esta condición se las conoce como *funciones homogéneas*.

Es fácil mostrar que la función de energía potencial newtoniana $U(\{\vec{r}_i\})$ definida en la Ec. (5.16) es una función homogénea con $k = -1$ y por tanto:

$$\sum_i \vec{r}_i \cdot \frac{\partial U}{\partial \vec{r}_i} = -U$$

Y con esta propiedad la Ec. (5.19) se convierte en la que es conocida como la **Identidad de Lagrange-Jacobi**:

$$\begin{aligned}\tilde{I} &= 4K + 2U \\ &= 4E - 2U \\ &= 2K + 2E\end{aligned}\tag{5.20}$$

Donde hemos usado el hecho que $E = K + U$ para escribir las dos últimas formas de la identidad.

Ahora consideremos la última forma de la identidad de Lagrange-Jacobi, $\tilde{I} = 2K + 2E$. Dado que por definición $K \geq 0$, si la energía mecánica total del sistema es $E \geq 0$, el valor (constante) de \tilde{I} será siempre positivo y por lo tanto I , independiente de su valor inicial, crecerá indefinidamente y el sistema tenderá a disgregarse (no será ligado)²²

Por otro lado si $E < 0$, el signo de \tilde{I} dependerá de la comparación entre K y $|E|$. Sin embargo como el valor de K es variable en el tiempo (recordemos que solo E es constante), no hay manera de predecir, trivialmente, si el sistema estará ligado o no. En otras palabras, $E < 0$ es una condición necesaria (puesto que $E \geq 0$ implica un sistema no ligado), mas no suficiente para que un sistema de N cuerpos sea ligado.

Puede que no sepamos cuánto vale la energía cinética de un sistema, pero podríamos averiguar si esta acotada por un valor máximo y si este es finito. Una manera de hacerlo podría ser calcular el *promedio asintótico* de $K(t)$, que definimos como:

$$\langle K \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T K(t) dt$$

Un sistema en el que la energía cinética tampoco esté acotada, para algún tiempo t , es decir $K \rightarrow \infty$, tendrá un valor promedio de la energía cinética $\langle K \rangle \rightarrow \infty$ y posiblemente, en virtud de las identidades de Lagrange-Jacobi no sea tampoco acotado.

No parece entonces un problema trivial. La definición de si un sistema es ligado o no, va más allá de solo limitar las posiciones de las partículas. También sus velocidades deben estar limitadas.

Con este propósito podemos definir una nueva cantidad, diferente de I que combine ambas propiedades y nos permita definir la condición para un sistema ligado. No es difícil reconocer que la siguiente cantidad, cumple ese propósito:

$$G = \sum_i m_i \vec{r}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i$$

En un intervalo de tiempo dado, si el sistema está ligado, el valor de G oscilará entre dos extremos finitos, G_{\max} y G_{\min} . ¿Pero cómo podemos convertir este hecho básico en alguna información sobre el hecho que la energía cinética o la energía potencial estén acotadas?

Es fácil mostrar que $G = 2\tilde{I}$ y por lo tanto que $\dot{G} = 2\ddot{I}$. Por lo tanto el valor promedio de \dot{G} está relacionado directamente con el valor promedio de K y U a través de las identidades de Lagrange-Jacobi (Ec. {eq:identidad_lagrange_jacobi}):

$$\langle \dot{G} \rangle = 8\langle \dot{K} \rangle + 4\langle \dot{U} \rangle$$

²²Es interesante anotar que para que I crezca indefinidamente, bastará que al menos una partícula, por ejemplo la partícula k , escape del sistema, esto es que $r_k \rightarrow \infty$ cuando $t \rightarrow \infty$.

Por otro lado:

$$\langle \dot{G} \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \dot{G} dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{G(T) - G(0)}{T} \right)$$

Donde hemos usado el teorema fundamental del cálculo.

Ahora bien si G esta acotada, es decir si $G_{\min} \leq G(t) \leq G_{\max}$

$$\langle \dot{G} \rangle \leq \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{G_{\max} - G_{\min}}{T} \right) = 0$$

Lo que conduce a uno de los más importantes resultados relacionados con la dinámica de sistemas de muchas partículas:

Teorema 5.3

Teorema del virial. Si en un sistema de N cuerpos se define la cantidad física $G \equiv \sum_i m_i \vec{r}_i \cdot \vec{\dot{r}}_i$, la condición $G_{\max} \leq G \leq G_{\min}$ (G esta acotada) es necesaria y suficiente^a para que el promedio asintótico de las funciones de energía potencial U y energía cinética K , satisfagan:

$$\langle U \rangle = -2\langle K \rangle$$

o equivalentemente:

$$E = -\langle K \rangle$$

Donde $\langle f \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} (1/T) \int_0^T f(t) dt$

^aLa condición de que G este acotada es demasiado restringida. Es posible mostrar, por ejemplo, que en el caso de un sistema de dos cuerpos que se mueven sobre una parábola, también se cumple el teorema del Virial. Por lo tanto, existe una condición mucho más general y satisfactoria para formular el teorema que puede encontrarse en [14, ?]

La conclusión es que de la misma manera que en un sistema de dos cuerpos (por ejemplo el sistema Tierra-Luna) una energía negativa es necesaria para que el sistema este ligado, en el caso de un sistema de N cuerpos, la energía también debe ser negativa, pero no tener cualquier valor, sino específicamente $E = -\langle K \rangle$.

Aunque las consecuencias del teorema del virial son interesantes, sus aplicaciones prácticas en mecánica celeste, especialmente al estudiar sistemas de pocas partículas, no son muchas. Sin embargo cuando se estudian, tanto en astronomía como en física, sistemas con un número significativo de partículas ($N \rightarrow \infty$), las implicaciones pueden ser muy útiles.

5.3.1. Aplicación: la masa de cúmulos de galaxias

En astronomía por ejemplo, el teorema del virial se usa para estudiar la distribución de masa en cúmulos de estrellas y galaxias.

Se dice que un cúmulo, formado por una cantidad significativa de galaxias, estrellas o “partículas” de materia oscura, está “virializado” (es estable o está ligado) si ha alcanzado un estado en el cuál es posible aplicar el teorema del virial para describir, estadísticamente sus propiedades.

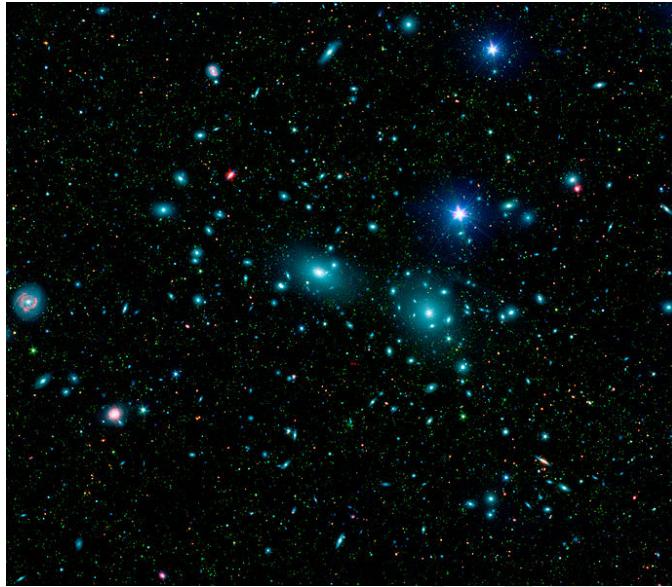


Figura 5.3: Mosaico en falso color del cúmulo de Galaxias de Coma que combina imágenes en luz visible e infrarrojo. Crédito: NASA / JPL-Caltech / L. Jenkins (GSFC).

Si asumimos que las partículas del cúmulo tienen una distribución esférica con una densidad aproximadamente uniforme y radio característico R_{vir} (dentro del cual hay una masa M_{vir}), la energía potencial promedio del cúmulo será igual a:

$$\langle U \rangle = -\frac{3GM_{\text{vir}}^2}{5R_{\text{vir}}}$$

Por su parte si asumimos que todas las partículas tienen la misma masa, el promedio de la energía cinética total será:

$$\langle K \rangle = \frac{1}{2}M_{\text{vir}}\langle v^2 \rangle$$

Usando el teorema del virial obtenemos:

$$\frac{3GM_{\text{vir}}}{5R_{\text{vir}}} = \langle v^2 \rangle$$

Si se puede estimar el radio del sistema y el promedio del cuadrado de las rapideces de las partículas, la masa del sistema se puede calcular usando:

$$M_{\text{vir}} = \frac{5R_{\text{vir}}\langle v^2 \rangle}{3G}$$

En el algoritmo a continuación estimamos la masa de virial del cúmulo de Coma (ver [Figura 5.3](#)) para el cuál se ha estimado que $R_{\text{vir}} \approx 2 \times 10^6$ pc (parsecs²³) y $\langle v^2 \rangle \approx (1,000 \text{ km/s})^2$ (datos tomados de [8] y [17] respectivamente):

²³1 parsec = 3.26 a.l., 1 año-luz = $9,46 \times 10^{12}$ km

```

#Constante gravitacional
G=6.67e-20 # km^3 / kg s^2

#Parsec y año-luz
pc=3.26
al=9.46e12 #km

#Radio del viral
Rvir=2e6*pc*al

#Dispersión de velocidades
v2=1000**2

#Masa del virial del cúmulo
Mvir=5*Rvir*v2/(3*G)

```

Masa del virial del cúmulo de Coma:

$1.5412093953023487 \times 10^{45}$ kg

Que equivale a $\sim 7 \times 10^{14} M_{\odot}$ ($1 M_{\odot} \approx 2 \times 10^{30}$ kg), o lo que es lo mismo a la masa de estrellas y gas de unas 10.000 galaxias típicas.

5.4. Solución numérica

Por mucho tiempo, desde su formulación su formulación implícita en los *Principia* en 1687, hasta su formulación oficial en 1889 para el concurso del Rey Oscar, la solución al problema de los N cuerpos para cualquier valor de N (solución global) escapó a matemáticos, físicos y astrónomos.

Como mencionamos en *Historias de la Mecánica Celeste* en Sección 5.1.2, la existencia de una solución para el caso N=3 fue demostrada definitivamente por F. K. Sundman en 1913, después del primer intento (parcialmente fallido) por Poincaré en 1889.

En 1991, el matemático americano de origen chino, Wang Qui-Dong [?], demostró que incluso para el caso de N>3 existe una solución global al problema, al menos cuando el momento angular total del sistema es cero (volveremos sobre el momento angular en el sistema de N cuerpos en ??)

En ninguno de los dos trabajos mencionados (el de Sundman o el de Qui-Dong), sin embargo, las series necesarias para calcular la posición futura de los cuerpos en sistemas de N cuerpos, fueron provistas explícitamente. Los trabajos demostraron la existencia de la solución, sin presentar formas explícitas de ella. Gran parte de este libro, y en general de la Mecánica Celeste como disciplina científica, consiste justamente en la búsqueda de soluciones específicas al problema o al menos de pistas físicas que nos permitan conocer la evolución futura de sistemas de pocas o muchas partículas. Solo de esta manera, el problema de los N cuerpos tiene un valor práctico en astronomía.

Hoy por hoy, la aproximación más utilizada para la solución del problema de los N cuerpos es la que se vale de algoritmos numéricos, implementados como programas de computadora que corren en poderosos ordenadores. En las próximas secciones exploraremos los fundamentos de esta aproximación a la solución del problema.

Si bien se podría pensar que, en el presente, la solución numérica agota el problema y no hace falta ninguna exploración teórica adicional, nada está más lejos de la realidad. La búsqueda de formalismos analíticos que permitan describir sistema con dos, tres o más cuerpos, o al menos conseguir información sobre ellos, ha sido un problema central en mecánica celeste, incluso hoy cuando los computadores parecen ofrecernos soluciones muy precisas al problema.

Si abordamos la solución numérica desde temprano en este texto es porque ella nos permitirá poner a prueba soluciones analíticas, conjeturas e intuiciones teóricas que presentaremos en lo que resta del texto. Adicionalmente, las herramientas algorítmicas desarrolladas en estas secciones nos servirán más adelante para estudiar y visualizar problemas mejor conocidos.

5.4.1. Unidades canónicas

La fuerza gravitacional es la fuerza más débil del Universo. Por esta razón el valor de la constante que determina su intensidad G es muy pequeño. Al menos en las unidades que hemos definido en la vida cotidiana para medir los patrones de longitud, tiempo y masa. En el Sistema Internacional $G \sim 10^{-10}$ (en lo sucesivo \sim no se usará para indicar el valor aproximado de una cantidad, sino *orden de magnitud*.)

De otro lado, en Astronomía, las cantidades involucradas en el cálculo de la fuerza gravitacional (Ecuación ??), es decir, las masas de los cuerpos m_j y sus distancias mutuas r_{ij} , tienen valores enormes en esas mismas unidades. Así por ejemplo en el sistema Tierra-Sol, $m \sim 10^{24} - 10^{30}$ kg y $r \sim 10^{11}$ m.

Con el propósito de evitar la combinación de cantidades muy grandes y muy pequeñas en las mismas ecuaciones, se ha convenido en utilizar un sistema de unidades en el cuál todas las cantidades implicadas tengan, por un lado, una magnitud similar y por el otro sus valores sean de orden uno.

Las dimensiones o unidades de la constante de gravitación universal G son:

$$[G] = \frac{L^3}{MT^2},$$

es decir, en esta constante están combinados los patrones usados para definir todas las cantidades físicas relevantes en problemas mecánicos. Si ajustamos el valor de estas tres unidades fundamentales, podemos obtener casi cualquier valor que deseemos para G .

Supongamos, por ejemplo, que definimos un sistema de unidades nuevo, \mathcal{L} , \mathcal{M} , \mathcal{T} (que denotan la unidad de longitud, masa y tiempo respectivamente), para el cual, en unidades del SI, los factores de conversión son iguales a U_L , U_M y U_T respectivamente. Esto es, para convertir, por ejemplo, de una distancia medida en \mathcal{L} a la misma distancia en m (metros) sería necesario multiplicar por U_L .

Así por ejemplo, en astronomía podríamos escoger medir las longitudes (y todas las cantidades derivadas) en *Unidades Astronómicas* (UA o AU, por sus siglas en inglés), en lugar de hacerlo en metros. Como sabemos que $1 \text{ AU} = 1,496 \times 10^8 \text{ km} = 1,496 \times 10^{11} \text{ m}$, entonces en este sistema de unidades, $\mathcal{L} = \text{AU}$ y $U_L = 1,496 \times 10^{11} \text{ m}$. Así mismo, podríamos escoger medir la masa en unidades de la masa del sol M_\odot (como se acostumbra hacerlo por ejemplo en astronomía estrelar). En este caso $\mathcal{M} = M_\odot$, $U_M = 1,98 \times 10^{30} \text{ kg}$

El propósito original de las unidades canónicas en mecánica celeste es conseguir que, en este nuevo sistema de unidades, el valor de la constante de gravedad universal sea pequeño y de orden 1. Dada la arbitrariedad de nuestra elección, podemos ir más lejos e imponer la condición de que la constante tenga un valor exactamente igual a 1 (los cálculos en los que aparezca la constante se simplificarán considerablemente).

En el sistema definido en el ejemplo antes, si escogemos una unidad de tiempo \mathcal{T} tal que $U_T = 5033865$ segundos (ver justificación abajo), el valor de la constante de gravedad será:

$$G = 6,67308 \times 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2} \times \left(\frac{\text{AU}}{1,496 \times 10^{11} \text{ m}} \right)^3 \left(\frac{1,98 \times 10^{30} \text{ kg}}{M_\odot} \right)^2 \left(\frac{5033865 \text{ s}}{\mathcal{T}} \right)$$

$$= 1 \frac{\text{AU}^3}{M_\odot \mathcal{T}^2}$$

Como vemos en este nuevo sistema de unidades el valor de la constante gravitacional es exactamente igual a 1, lo que simplificará considerablemente los cálculos en los que aparezca esta cantidad. Decimos que AU, M_\odot , \mathcal{T} forman un conjunto de unidades canónicas.

Definición 5.3

Unidades canónicas. A un conjunto de unidades $\mathcal{L}, \mathcal{M}, \mathcal{T}$ con factores de conversión U_L, U_M, U_T se los llama *unidades canónicas* en mecánica celeste, si se cumple que:

$$G \frac{U_M^2 U_T}{U_L^3} = 1$$

o equivalentemente:

$$G = \frac{U_L^3}{U_M^2 U_T} \quad (5.21)$$

Donde $G = 6,67308 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$.

En la práctica, en la Ec. (5.21), si fijamos el valor de dos de los factores de conversión, podemos encontrar el valor del tercer factor.

En el ejemplo anterior, si fijamos $U_L = 1,496 \times 10^{11} \text{ m}$ y $U_M = 1,98 \times 10^{30} \text{ kg}$, entonces

$$U_T = \sqrt{\frac{U_L^3}{G U_M}}.$$

Numéricamente:

```
G=6.67308e-11
UL=1.496e11
UM=1.98e30
```

$$UT = (UL^{**3} / (G * UM))^{**0.5}$$

```
UT = 5033865.755208481 segundos
    = 1398.296043113467 horas
    = 58.26233512972779 días
    = 0.15951080126450734 años
```

Es interesante anotar que el valor del factor de conversión de tiempo U_T obtenido con este procedimiento no es completamente arbitrario. Cuando U_T se expresa en años, su valor es diferente, por poco menos de un factor de 10, del período de revolución de la Tierra alrededor del Sol (1 año).

En física decimos que la **escala de tiempo** característica de la dinámica sistema Tierra-Sol (que podríamos considerar similar al período orbital de la Tierra) se puede estimar combinando apropiadamente la constante de gravitación universal (intensidad de la interacción) con la masa del sistema y la separación característica de los cuerpos que lo constituyen.

A partir del sistema de unidades canónicas introducidas, es posible definir los patrones de medida para todas las restantes cantidades mecánicas:

$$\begin{aligned} UV &= UL/UT \\ UP &= UM*UV \\ UH &= UM*UL*UP \\ UA &= UL/UT^{**2} \\ UE &= UM*UL^{**2}/UT^{**2} \end{aligned}$$

Velocidad, $UV = 29718.710683774327 \text{ m/s}$
Aceleración, $UA = 0.00590375111670335 \text{ m/s}^{**2}$
Momentum lineal, $UP = 5.884304715387317e+34 \text{ kg m/s}$
Momentum angular, $UH = 1.7429781311354465e+76 \text{ kg m}^{**2}/\text{s}$
Energía, $UE = 1.7487394941176467e+39 \text{ kg m}^{**2}/\text{s}^{**2}$

De nuevo, como sucede con la unidad de tiempo, estas unidades no son solo el producto de operaciones aritméticas entre cantidades “arbitrarias”. Sus valores nos dan una idea de las escalas (valores típicos) de cada cantidad en el sistema.

Así, por ejemplo, la unidad de velocidad, $U_V \approx 29,8 \text{ km/s}$ coincide con la velocidad orbital promedio de la Tierra alrededor del Sol; la unidad de aceleración es del orden de la aceleración de la gravedad del Sol medida a la distancia promedio de la Tierra al Sol, etc.

5.4.2. Las ecuaciones de movimiento de primer orden

En unidades canónica, las ecuaciones de movimiento del sistema de N cuerpos se escriben de la misma manera que en la Ec. (??):

$$\left\{ \ddot{\vec{r}}_i = - \sum_{j \neq i} \frac{\mu_j}{r_{ij}^3} \vec{r}_{ij} \right\}_N \quad (5.22)$$

La diferencia es que ahora $\mu_j = m_j$.

Nota

Unidades del parámetro gravitacional. El hecho de que en unidades canónicas el valor numérico del parámetro gravitacional de un cuerpo $\mu = Gm$ coincida con la masa m , no debe llevar a confundir las dos cantidades físicas. No debemos perder de vista que las unidades de μ son L^3/T^2 , mientras que la de m es, por definición, M . En la igualdad anterior, entonces, se ha oscurecido el efecto que tiene la constante gravitacional en el equilibrio dimensional de esta igualdad.

El problema de los N cuerpos es entonces descrito por un conjunto de ecuaciones diferenciales (vectoriales) no lineales (que incluye factores con potencias distintas de uno de las funciones) y de segundo orden (que van hasta las segundas derivadas de las mismas).

¿Cuántas ecuaciones diferenciales tenemos que resolver? Reconociendo la naturaleza vectorial de las funciones relevantes, $\vec{r}_i(t) : [x_i(t), y_i(t), z_i(t)]$, $\dot{\vec{r}}_i(t) : [\dot{x}_i(t), \dot{y}_i(t), \dot{z}_i(t)]$, es claro que es necesario resolver $3N$ ecuaciones diferenciales de segundo orden (una para $\dot{x}_i(t)$, otra para $\dot{y}_i(t)$ y así sucesivamente).

Con el propósito de resolver numéricamente este sistema de ecuaciones diferenciales, usando los métodos y herramientas que introdujimos en ??, es necesario convertir estas *reducir* el orden de estas ecuaciones diferenciales, es decir convertirlas en un sistema equivalente de ecuaciones de primer orden.

Para ello, primero debemos introducir las funciones auxiliares $Y_i(t)$ que identificaremos con las funciones relevantes en el problema $x_i(t), y_i(t), z_i(t), \dot{x}_i(t), \dot{y}_i(t), \dot{z}_i(t)$.

Una elección *posible* de esta identificación puede ser la siguiente:

$$\begin{aligned} Y_0 &= x_0, & Y_1 &= y_0, & Y_2 &= z_0 \\ Y_3 &= x_1, & Y_4 &= y_1, & Y_5 &= z_1 \\ &\dots &&&& \\ Y_{3N+0} &= \dot{x}_0, & Y_{3N+1} &= \dot{y}_0, & Y_{3N+2} &= \dot{z}_0 \\ Y_{3N+3} &= \dot{x}_1, & Y_{3N+4} &= \dot{y}_1, & Y_{3N+5} &= \dot{z}_1 \\ &\dots &&&& \end{aligned}$$

O, en general:

$$\begin{aligned} Y_{3i} &= x_i, & Y_{3i+1} &= y_i, & Y_{3i+2} &= z_i \\ Y_{3N+i} &= \dot{x}_i, & Y_{3N+i+1} &= \dot{y}_i, & Y_{3N+i+2} &= \dot{z}_i \end{aligned} \tag{5.23}$$

Con esta identificación, se hace claro que para $k < 3N$ (componentes de la posición), $\dot{Y}_k = Y_{3N+k}$.

Más difícil, sin embargo, es encontrar una fórmula general para \ddot{Y}_k para $k \geq 3N$ (derivadas de las componentes de la velocidad o componentes de la aceleración).

Sabemos que para la partícula i , la Ec. (5.22) se puede escribir como:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_i &= -\sum_{j \neq i} \mu_j (x_i - x_j) / r_{ij}^3 \\ \ddot{y}_i &= -\sum_{j \neq i} \mu_j (y_i - y_j) / r_{ij}^3 \\ \ddot{z}_i &= -\sum_{j \neq i} \mu_j (z_i - z_j) / r_{ij}^3 \end{aligned}$$

Con $r_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2}$.

En términos de las funciones auxiliares, se puede escribir:

$$\begin{aligned}\dot{Y}_{3N+i} &= -\sum_{j \neq i} \mu_j (Y_{3i} - Y_{3j}) / r_{ij}^3 \\ \dot{Y}_{3N+i+1} &= -\sum_{j \neq i} \mu_j (Y_{3i+1} - Y_{3j+1}) / r_{ij}^3 \\ \dot{Y}_{3N+i+2} &= -\sum_{j \neq i} \mu_j (Y_{3i+2} - Y_{3j+2}) / r_{ij}^3\end{aligned}$$

Con

$$r_{ij} = \sqrt{(Y_{3i} - Y_{3j})^2 + (Y_{3i+1} - Y_{3j+1})^2 + (Y_{3i+2} - Y_{3j+2})^2} \quad (5.24)$$

En general entonces, para $k \geq 3N$ las ecuaciones de movimiento en términos de las funciones auxiliares se pueden escribir como:

$$\dot{Y}_k = -\sum_{j \neq i} \mu_j (Y_{3i+l} - Y_{3j+l}) / r_{ij}^3$$

Donde $l = k \bmod 3$ (residuo de la división de k entre 3) e $i = \lfloor (k - 3N)/3 \rfloor$ (valor entero más pequeño que el número resultante de dividir $k - 3N$ por 3).

Con la asignación anterior, el conjunto de $3N$ ecuaciones diferenciales escalares de segundo orden que describe la dinámica de un sistema de N cuerpos, se convierte en el conjunto *reducido* de $6N$ ecuaciones diferenciales de primer orden (en las variables auxiliares) escrito a continuación:

$$\dot{Y}_k = \begin{cases} Y_{3N+k}, & 0 \leq k < 3N \\ -\sum_{j \neq i} \mu_j (Y_{3i+l} - Y_{3j+l}) / r_{ij}^3, & 3N \leq k < 6N \end{cases} \quad (5.25)$$

Donde $l = k \bmod 3$ e $i = \lfloor (k - 3N)/3 \rfloor$ y r_{ij} esta definido por Ec. (??).

En lo sucesivo llamaremos a este conjunto de ecuaciones diferenciales, las **ecuaciones de primer orden reducidas** o simplemente **ecuaciones reducidas** del problema de los N cuerpos.

5.4.3. Algoritmo de solucion

Para resolver numéricamente las ecuaciones reducidas de los N cuerpos debemos preparar una rutina que implemente la Ec. (5.25). El diseño de la rutina es similar al que hicimos con otras ecuaciones de movimiento, en ???. Esta rutina, que utilizaremos frecuentemente en lo queda de este texto, se presenta abajo. Aségrese de entender la manera como cada uno de los detalles de la Ec. (5.25) son expresados en el lenguaje de programación elegido.

```
def eom_ncuerpos(Y,t,N,mus):
    import numpy as np
    dYdt=np.zeros(6*N)

    #Primer conjunto de ecuaciones
    dYdt[:3*N]=Y[3*N:]

    #Segundo conjunto de ecuaciones
    for k in range(3*N,6*N):
```

```

l=k%3
i=int(np.floor((k-3*N)/3))
for j in range(N):
    if j==i:continue
    rij=(Y[3*i]-Y[3*j])**2+\n        (Y[3*i+1]-Y[3*j+1])**2+\n        (Y[3*i+2]-Y[3*j+2])**2
    dYdt[k]+=-mus[j]*(Y[3*i+1]-Y[3*j+1])/rij**1.5

return dYdt

```

Para ilustrar como puede usarse esta, supongamos que queremos predecir la posición en $t = 1$ (en unidades canónicas) de las partículas que conforman el sistema mostrado en la [Figura 5.4](#).

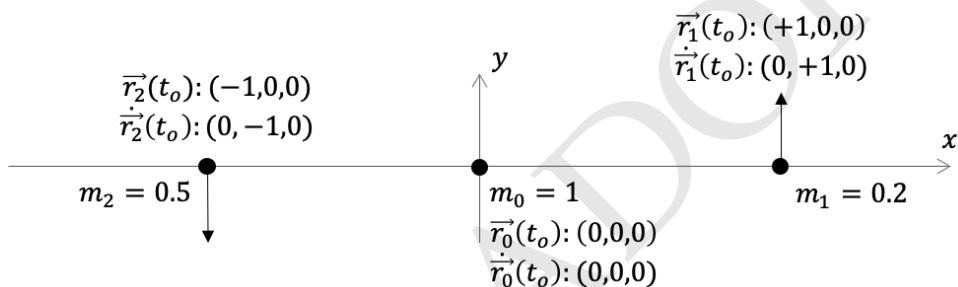


Figura 5.4: Sistema de tres cuerpos de ejemplo (todas las cantidades están expresadas en unidades canónicas):

Las propiedades del sistema (masas y número de partículas) y las condiciones iniciales indicadas en la Figura, pueden expresarse, en términos de las variables auxiliares $\{Y_k\}$, de la siguiente manera:

```

N=3
mus=[1,0.2,0.5]
Yo=[
    #Posición cuerpo 0
    0,0,0,
    #Posición cuerpo 1
    1,0,0,
    #Posición cuerpo 2
    -1,0,0,
    #Velocidad cuerpo 0
    0,0,0,
    #Velocidad cuerpo 1
    0,1,0,
    #Velocidad cuerpo 2
    0,-1,0,
]

```

Para encontrar la solución al sistema de ecuaciones diferenciales implemen-

tadas en la rutina `eom_ncuerpos`, nos valdremos aquí del integrador numérico `odeint` incorporado en la biblioteca `scipy`, tal y como lo hicimos en ??:

```
from scipy.integrate import odeint
solucion=odeint(eom_ncuerpos,Y0,[0.0,1.0],args=(3,mus))
```

Solución:

```
array([[ 0.          ,  0.          ,  0.          ,  1.          ,  0.          ,
        0.          , -1.          ,  0.          ,  0.          ,  0.          ,
        0.          ,  0.          ,  0.          ,  1.          ,  0.          ,
        0.          , -1.          ,  0.          ],
       [-0.15068697, -0.06168292,  0.          ,  0.49242022,  0.83105115,
        0.          , -0.49559416, -0.80905462,  0.          , -0.29283302,
       -0.20870151,  0.          , -0.91545262,  0.52712521,  0.          ,
       0.95184709, -0.39344707,  0.          ]])
```

La matriz resultante tiene, como filas, el estado de las partículas del sistema para cada uno de los instantes provistos en el vector de valores de tiempo (en este caso $[0.0, 1.0]$). Así, la fila 0 no es otra cosa que las mismas condiciones iniciales provista. Por otro lado, la fila 1 contiene el estado del sistema en el tiempo $t = 1$, que es justamente la información que necesitábamos obtener.

Las columnas de la matriz de solución, por otro lado, contienen los valores de la variable auxiliar Y_k , que a su vez corresponden a las posiciones y velocidades de las partículas, de acuerdo a las reglas definidas en Ec. (5.23). Así, las columnas 0, 1 y 2, contienen el vector posición de la partícula 0. Las columnas 3, 4 y 5, la posición de la partícula 1 y las columnas 6, 7 y 8, la posición de la partícula 2. De otro lado, las columnas 9, 10 y 11, contendrán las componentes de la velocidad de la partícula 1 y así sucesivamente.

Una forma más apropiada de manipular la matriz solución puede ser asignar el valor de sus columnas a vectores (o mejor, matrices) con nombres que nos recuerden el hecho que almacenan posiciones y velocidades. Así por ejemplo, las posiciones y velocidades de la partícula 0, en cada uno de los tiempos en los que se realiza la integración, $\vec{r}_0(t), \dot{\vec{r}}_0(t)$, pueden almacenarse usando las matrices `r0s` y `v0s` (en lo sucesivo el sufijo `s` en las variables, indicará que se trata de un vector o matriz con valores de la cantidad respectiva, en este caso `r0` y `v0`):

```
r0s=solucion[:,0:3]
v0s=solucion[:,9:12]

r_0(t)
= [[ 0.          ,  0.          ,  0.          ],
   [-0.15068697, -0.06168292,  0.          ]]
v_0(t)
= [[ 0.          ,  0.          ,  0.          ],
   [-0.29283302, -0.20870151,  0.          ]]
```

En general, las posiciones o velocidades de todas las partículas del sistema, $\vec{r}_i(t), \dot{\vec{r}}_i(t)$, pueden almacenarse en matrices `rs` o `vs`, tal que, para obtener para una partícula, el valor de una componente del vector posición o de la velocidad, en un determinado tiempo, la regla será:

```
rs[Partícula,Tiempo,Componente]
vs[Partícula,Tiempo,Componente]
```

Así, `rs[0,1,2]` corresponderá a la coordenada z (componente 2), en el tiempo 1, para la partícula 0. Por su parte `vs[:, :, 0]` serán todos los valores de la coordenada x (componente 0), para la partícula 1.

El algoritmo para convertir la matriz de solución en `rs` y `vs` se presenta a continuación:

```
import numpy as np
rs=np.zeros((N,2,3))
vs=np.zeros((N,2,3))
for i in range(N):
    rs[i]=solucion[:,3*i:3*i+3]
    vs[i]=solucion[:,3*N+3*i:3*N+3*i+3]

rs =
[[[ 0.          0.          0.          ]
 [-0.15068697 -0.06168292  0.          ]]
 [[ 1.          0.          0.          ]
 [ 0.49242022  0.83105115  0.          ]]
 [[-1.          0.          0.          ]
 [-0.49559416 -0.80905462  0.          ]]]
vs =
[[[ 0.          0.          0.          ]
 [-0.29283302 -0.20870151  0.          ]]
 [[ 0.          1.          0.          ]
 [-0.91545262  0.52712521  0.          ]]
 [[ 0.         -1.          0.          ]
 [ 0.95184709 -0.39344707  0.          ]]]
```

Finalmente, con la solución parametrizada apropiadamente, podemos escribir el algoritmo requerido para mostrar, gráficamente la posición de las partículas en el espacio:

(Algoritmo 5.2)

```
import matplotlib.pyplot as plt
fig=plt.figure()
ax=fig.gca()

for i in range(N):
    ax.plot(rs[i,:,:0],rs[i,:,:1],marker='o');

ax.set_aspect('equal','box')
```

ver Figura 5.5

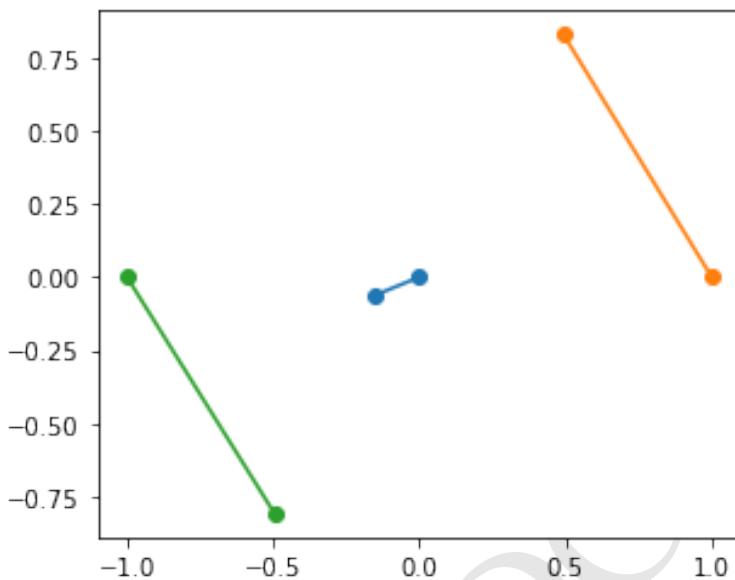


Figura 5.5: Figura correspondiente al código 5.2.

Nota

Rangos en gráficos dinámicos. Es muy importante que al graficar la posición de un sistema de partículas, el graficador ajuste los rangos de los ejes de modo que la escala de ambos sea igual. De este modo, las trayectorias no aparecerán artificialmente deformadas (p.e. un círculo puede aparecer como una elipse). Este es el papel, precisamente, que juega el comando `ax.set_aspect('equal', 'box')` en el algoritmo anterior.

Todo el procedimiento descrito en los códigos anteriores, puede condensarse en pocas líneas, si se diseñan rutinas adecuadas para convertir las condiciones iniciales de un sistema de partículas en el vector de valores iniciales de las variables auxiliares `Yo` o para convertir la matriz de solución en las matrices de posición `rs` y velocidad `vs`.

Podemos, por ejemplo, expresar las condiciones iniciales del sistema usando una estructura de datos más *legible*, p.e. una lista de diccionarios:

```
sistema_ejemplo=[  
    dict(m=1.0,r=[0.0,0.0,0.0],v=[0.0,0.0,0.0]),  
    dict(m=0.2,r=[1.0,0.0,0.0],v=[0.0,1.0,0.0]),  
    dict(m=0.5,r=[-1.0,0.0,0.0],v=[0.0,-1.0,0.0]),  
]
```

Para convertir esta estructura en el vector con las condiciones iniciales de las variables auxiliares usaremos la siguiente rutina:

```

def sistema_a_Y(sistema):
    import numpy as np
    mus=[]
    rs=[]
    vs=[]
    N=0
    for particula in sistema:
        m=particula['m']
        if m>0:
            mus+=[m]
            rs+=particula["r"]
            vs+=particula["v"]
            N+=1
    Y=rs+vs
    return N,np.array(mus),np.array(Y)

```

Por otro lado, para convertir la matriz solución en matrices de posición y velocidad, usaremos la siguiente rutina:

```

def solucion_a_estado(solucion,Nparticulas,Ntiempos):
    rs=np.zeros((Nparticulas,Ntiempos,3))
    vs=np.zeros((Nparticulas,Ntiempos,3))
    for i in range(N):
        rs[i]=solucion[:,3*i:3*i+3]
        vs[i]=solucion[:,3*N+3*i:3*N+3*i+3]
    return rs,vs

```

Con todos estos elementos a la mano, el algoritmo completo para expresar las condiciones iniciales, encontrar la solución numérica al problema de N cuerpos y visualizar la solución, será:

(Algoritmo 5.3)

```

# Definición de las condiciones iniciales
sistema_ejemplo=[
    dict(m=1.0,r=[0.0,0.0,0.0],v=[0.0,0.0,0.0]),
    dict(m=0.2,r=[1.0,0.0,0.0],v=[0.0,1.0,0.0]),
    dict(m=0.5,r=[-1.0,0.0,0.0],v=[0.0,-1.0,0.0]),
]
N,mus,Yo=sistema_a_Y(sistema_ejemplo)

#Tiempo de integración
import numpy as np
Nt=50
ts=np.linspace(0.0,5,Nt,endpoint=True)

# Solución al sistema de ecuaciones diferenciales
from scipy.integrate import odeint
solucion_ejemplo=odeint(eom_ncuerpos,Yo,ts,args=(N,mus))
rs,vs=solucion_a_estado(solucion_ejemplo,N,Nt)

# Componente gráfica del algoritmo

```

```

import matplotlib.pyplot as plt
fig=plt.figure()
ax=fig.gca()

for i in range(N):
    ax.plot(rs[i,:,0],rs[i,:,1],marker='o');

ax.set_aspect('equal','box')

```

ver Figura 5.6

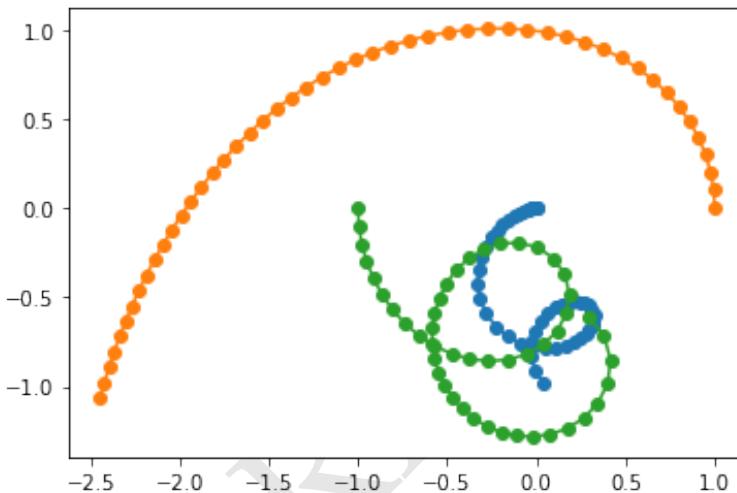


Figura 5.6: Figura correspondiente al código 5.3.

Puede encontrar una versión animada o interactiva de este gráfico en ??.

Dado que en general, el movimiento de los cuerpos en un sistema de muchas partículas, ocurre en el espacio de tres dimensiones, la componente gráfica del algoritmo anterior puede reemplazarse con este código:

(Algoritmo 5.4)

```

#Componente gráfica del algoritmo
from pymcel.plot import fija_ejes3d_proporcionales
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D

fig=plt.figure()
ax=fig.gca(projection='3d')

for i in range(N):
    ax.plot(rs[i,:,0],rs[i,:,1],marker='o');

fija_ejes3d_proporcionales(ax)
fig.tight_layout()

```

ver Figura 5.7

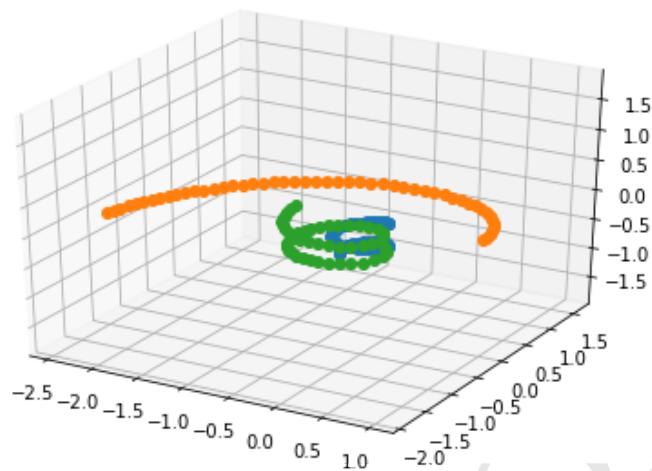


Figura 5.7: Figura correspondiente al código 5.4.

5.4.4. Figuras interactivas

Busque las figuras interactivas y las animaciones incluidas en el [sitio en línea del libro](#)²⁴.

²⁴[ELECTRONIC_BOOK](#)

Histórias de la mecánica celeste

Henri Poincaré y el premio del Rey Oscar. En 1889, el matemático sueco Mittag-Leffler convenció al rey Oscar II de Suecia de que, con motivo de la celebración de su cumpleaños número 60 ese mismo año, presentaría al mundo un nuevo concurso matemático. En este, se formularían un conjunto de problemas abiertos frente a los cuales los participantes deberían presentar artículos inéditos. De conseguir resolver el problema, los ganadores recibirían una suma sustancial por su descubrimiento.

Entre los problemas formulados en el concurso del rey Oscar II, se encontraba, precisamente, el problema de los N cuerpos. La formulación del problema presentada en este capítulo, es literalmente la que preparó el matemático alemán Karl Weierstrass (que se pronuncia “*Vierstrass*^a”), inspirado originalmente por las ideas del matemático alemán Peter Gustav Dirichlet. Uno de los participantes del concurso, fue el polímata Francés **Henri Poincaré** (que se pronuncia, “*Honri Poancré*^b”), que contaba para la época con 35 años (ver [Figura 5.2](#)).



Figura 5.2: Fotografía de Henri Poincaré hacia el año 1886, unos años antes de realizar su trabajo histórico sobre el problema de los tres cuerpos (Foto: Eugène Pirou)

Poincaré nació en Francia el 29 de abril de 1854. Después de una infancia marcada por la enfermedad y una juventud en la que sus maestros reconocieron su precocidad matemática, se graduó como doctor en matemáticas en 1879 bajo la orientación de Charles Hermite (que se pronuncia “*Charle ermit*^c”). Las mayores contribuciones de Poincaré, como matemático, se produjeron en la teoría de ecuaciones diferenciales. Sin embargo, por sus estudios posteriores de ingeniería, su posición como profesor de la Universidad de París (La Sorbona) en las áreas de Mecánica, Física Matemática, Teoría de la Probabilidad, Mecánica Celeste y Astronomía, además del reconocimiento público que lo llevó a ser miembro de la Oficina de Longitudes de Francia en 1897 y elegido presidente de la Academia Francesa de Ciencias en 1906, los conocimientos de Poincaré se extendieron a muchas otras disciplinas.

De allí que sea considerado un Polímata o un “hombre universal”, alguien que domina muchas disciplinas intelectuales o artísticas (una etiqueta que comparte con personajes como Aristóteles o Leonardo da Vinci).

El artículo presentado por Poincaré en el concurso del Rey Oscar II, titulado “Sobre el problema de los tres cuerpos y las ecuaciones de la dinámica”, fue declarado, sin lugar a dudas el ganador del concurso. Esto, a pesar de que no resolvía el problema original, sino que se restringía al caso particular de tres cuerpos. Aún así, y en palabras de los jurados, el trabajo de Poincaré “iniciaría una nueva era en la historia de la mecánica celeste”.

Hoy sabemos que el artículo de Poincaré de 1889 contenía errores (que no

Historias de la mecánica celeste (Cont.)

fueron detectados por los evaluadores), pero aún así los métodos utilizados por él en la búsqueda de su solución influenciarían de forma importante los intentos posteriores y serían la base para el desarrollo de la teoría del caos. El problema de los tres cuerpos, formulado a la manera del concurso del rey Oscar II, fue finalmente resuelto en 1912 por el matemático Finlandés Karl Sundman [18]. En este trabajo Sundman probó la existencia de series que describían la posición de los tres cuerpos y que convergían para tiempos arbitrarios. Una excelente síntesis histórica de la contribución (poco apreciada) de Sundman puede encontrarse en [3].

^a<https://es.forvo.com/search/Weierstrass/de/>

^b<https://es.forvo.com/search/Henri%20Poincare/>

^c<https://es.forvo.com/search/Charles%20Hermite/fr/>

Mecánica celeste en la historia

El plano invariable del Sistema Solar. Durante más de 100 años, los astrónomos han buscado encontrar la orientación del plano invariable del Sistema Solar. El esfuerzo no ha sido sencillo, en tanto durante en el mismo lapso, la masa de los cuerpos no siempre se ha conocido con precisión e incluso, cuerpos enteramente nuevos se descubren de vez en cuando.

La determinación más precisa de la orientación del plano invariable que se hizo recientemente [16] ha determinado que tiene una inclinación, respecto al sistema ICRF (ver la ??) de $23^\circ 0' 31''$.9 y una longitud del nodo ascendente de $3^\circ 51' 9''$.4 (para una definición de estos ángulos ver la ??). Esto implica, que el plano invariable del Sistema Solar esta inclinado respecto al plano de la eclíptica de J2000.0, que usamos en la Astronomía del Sistema Solar, en $1^\circ 34' 43''$.3.

Historias de la mecánica celeste

Unidades canónicas. La motivación presentada aquí para la introducción de las unidades canónicas no es la misma que la que se esboza en textos clásicos de la disciplina. En realidad en distintos tiempos, han sido otras las razones para usar un sistema de unidades propio en mecánica celeste. Particularmente interesantes, son las razones expuestas en el texto clásico de Roger Bate, Donald Mueller y Jerry White, “Fundamentals of Astrodynamics” [4].

Después de la segunda guerra mundial durante la que se desarrollaron los primeros misiles balísticos de largo alcance (los temidos V2), quedo claro que los humanos podríamos alcanzar el espacio y viajar por nuestro sistema planetario. Para navegar el Sistema Solar, sin embargo, era necesario conocer muy bien las masas y distancias relativas de los grandes cuerpos astronómicos que dominarían la dinámica de esos vehículos espaciales. Para la época, sin embargo (incluso para 1971, cuando fue escrito el texto de Bate y compañía) el valor de la distancia Tierra-Sol y la masa de nuestra estrella, no eran conocidas con gran precisión. Este hecho motivo a muchos a resolver los primeros problemas de mecánica celeste práctica, asignando a estas cantidades desconocidas un valor de 1 (unidades de masa y distancia) y calculando todas las propiedades relevantes del problema en términos de ellas. Este fue el origen del uso de unidades canónicas, al menos en el contexto de la mecánica orbital de finales del siglo xx.

Bibliografía

- [1] L. K. BABADZHANIANTS, *Existence of the Continuations in the N-Body Problem*, Celestial Mechanics, 20 (1979), pp. 43–57, <https://doi.org/10.1007/BF01236607>.
- [2] L. K. BABADZHANYANTS, *On the global solution of the N-body problem*, Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, 56 (1993), pp. 427–449, <https://doi.org/10.1007/BF00691812>.
- [3] J. BARROW-GREEN, *The dramatic episode of sundman*, Historia Mathematica, 37 (2010), pp. 164 – 203, <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.hm.2009.12.004>, <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0315086009001360>.
- [4] R. R. BATE, D. D. MUELLER, AND J. E. WHITE, *Fundamentals of astrodynamics*, Courier Corporation, 1971.
- [5] K. BATYGIN AND M. E. BROWN, *Evidence for a distant giant planet in the solar system*, The Astronomical Journal, 151 (2016), p. 22.
- [6] H. BRUNS, *Über die integrale des vielkörper-problems*, Acta Mathematica, 11 (1887), pp. 25–96.
- [7] F. DIACU, *The solution of the n-body problem*, The mathematical intelligencer, 18 (1996), pp. 66–70.
- [8] R. GAVAZZI, C. ADAMI, F. DURRET, J.-C. CUILLANDRE, O. ILBERT, A. MAZURE, R. PELLO, AND M. P. ULMER, *A weak lensing study of the coma cluster*, Astronomy & Astrophysics, 498 (2009), pp. L33–L36.
- [9] A. C. HINDMARSH, *Odepak, a systematized collection of ode solvers*, Scientific computing, (1983), pp. 55–64.
- [10] E. JULLIARD-TOSEL, *Brun's theorem: The proof and some generalizations*, Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, 76 (2000), pp. 241–281.
- [11] P. S. LAPLACE ET AL., *Oeuvres complètes de Laplace*, Gautier-Villars, 1835.
- [12] I. NEWTON AND E. HALLEY, *Philosophiae naturalis principia mathematica*, vol. 62, Jussu Societatis Regiae ac typis Josephi Streater, prostant venales apud Sam . . . , 1780.
- [13] H. POINCARÉ, *New methods of celestial mechanics*, vol. 13, Springer Science & Business Media, 1992.
- [14] H. POLLARD, *A sharp form of the virial theorem*, Bulletin of the American Mathematical Society, 70 (1964), pp. 703–705.

- [15] W. QIU-DONG, *The global solution of the n-body problem*, Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, 50 (1990), pp. 73–88.
- [16] D. SOUAMI AND J. SOUCHAY, *The solar system's invariable plane*, Astronomy & Astrophysics, 543 (2012), p. A133.
- [17] M. F. STRUBLE AND H. J. ROOD, *A compilation of redshifts and velocity dispersions for aco clusters*, The Astrophysical Journal Supplement Series, 125 (1999), p. 35.
- [18] K. F. SUNDMAN, *Mémoire sur le problème des trois corps*, Acta Math., 36 (1913), pp. 105–179, <https://doi.org/10.1007/BF02422379>, <https://doi.org/10.1007/BF02422379>.