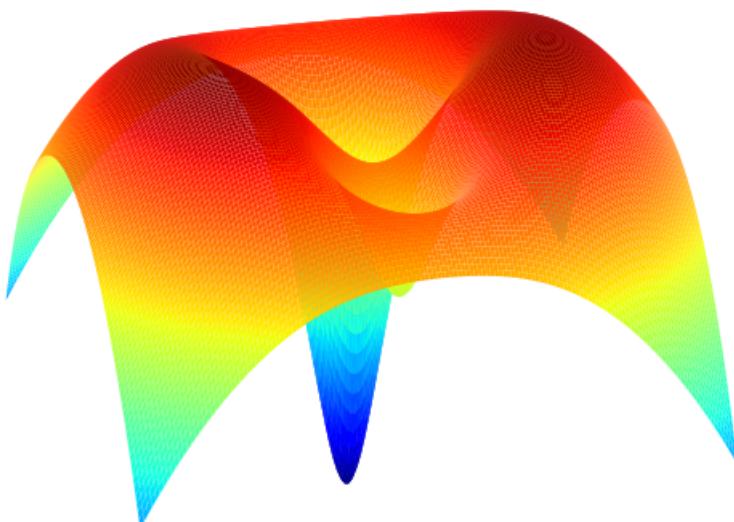


Mecánica Celeste

Teoría, algoritmos y problemas



Jorge I. Zuluaga

Profesor titular de Física y Astronomía

Instituto de Física, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Antioquia

23 de febrero de 2020

BORRADOR

Índice general

1.	Prefacio	19
1.1.	¿Otro libro de mecánica celeste?	20
1.2.	Mecánica celeste y mecánica analítica	21
1.3.	Mecánica celeste en la era de la información	22
1.4.	Mecánica celeste en Python	23
1.5.	Mecánica celeste con SPICE	24
1.6.	¿Qué hace distinto a este libro?: un decálogo	25
2.	Agradecimientos	29
3.	Introducción	31
3.1.	¿Cómo se organiza este libro?	31
3.2.	¿Cómo usar este libro?	36
3.3.	Mecánica celeste en <i>libretas</i>	37
3.3.1.	Instalación de las libretas	38
3.4.	Idioma y Notación	39
3.4.1.	Palabras extranjeras y guía de pronunciación	39
3.4.2.	Siglos y décadas	39
3.4.3.	Notación matemática	40
3.5.	Elementos no textuales	40
3.5.1.	Cajas de texto	40
3.5.2.	Algoritmos	42
3.6.	Figuras interactivas y animaciones	47
4.	Fundamentos matemáticos	49
4.1.	Vectores y cálculo	49
4.1.1.	Conjunto, tuplas y vectores	50
4.1.2.	Sistemas de coordenadas	56
4.1.3.	Funciones	58
4.1.4.	Derivadas	60
4.1.5.	Funciones homogéneas	62
4.1.6.	Derivada vectorial	63
4.1.7.	Integrales	65
4.1.8.	Integrales vectoriales	66
4.1.9.	Ecuaciones diferenciales	68
4.1.10.	Funcionales y cálculo de variaciones	74

4.1.11.	Gráficos interactivos	81
4.2.	Curvas cónicas	81
4.2.1.	Definición geométrica	82
4.2.2.	Del nombre al álgebra	82
4.2.3.	Directriz de las cónicas	85
4.2.4.	Síntesis geométrica	88
4.2.5.	Descripción algebraica	88
4.2.6.	Ecuación respecto al centro	89
4.2.7.	Eje mayor y menor de la elipse	90
4.2.8.	Parámetros de la hipérbola	91
4.2.9.	Rotación de las cónicas en el plano	93
4.2.10.	Ecuación general de las cónicas	95
4.2.11.	Gráfico de una cónica rotada en el plano	96
4.2.12.	Síntesis algebraica	100
4.2.13.	Cónicas en coordenadas cilíndricas	101
4.2.14.	Anomalías	105
4.2.15.	Área de las cónicas	108
4.2.16.	Cónicas en el espacio	112
4.2.17.	Ángulos de Euler	112
4.2.18.	Matrices de rotación generales	114
4.2.19.	Gráfico de una cónica rotada en el espacio	116
4.2.20.	Elementos orbitales	117
4.3.	Problemas seleccionados	121
5.	Mecánica newtoniana	135
5.1.	Introducción	135
5.2.	Cinemática	136
5.2.1.	Cantidades cinemáticas	136
5.2.2.	Sistemas de referencia	138
5.2.3.	La ecuación de movimiento (e.d.m.)	140
5.2.4.	Integración de la e.d.m.	141
5.2.5.	Integración por cuadraturas	142
5.2.6.	Integración numérica de la e.d.m.	145
5.3.	Dinámica	151
5.3.1.	Cantidades dinámicas	151
5.3.2.	Partículas y fuerzas	152
5.3.3.	Sistemas de referencia inerciales	153
5.3.4.	Postulado de fuerzas	155
5.3.5.	Fuerzas conservativas y no conservativas	157
5.3.6.	Energía mecánica	159
5.3.7.	¿Ley de inercia?	159
5.3.8.	Postulado de acción y reacción	160
5.3.9.	Postulado de gravitación universal	160
5.3.10.	La fuerza gravitacional de la Tierra, el Sol y la Luna	162
5.3.11.	El campo gravitacional	164
5.3.12.	Energía potencial gravitacional	165
5.3.13.	Masa y principio de equivalencia	167
5.4.	Sistemas de partículas	169

5.4.1.	Fuerzas y centro de masa	170
5.4.2.	Centro de masa de un sistema de dos partículas	175
5.4.3.	Teoremas de conservación	177
5.4.4.	Dinámica referida al centro de masa	180
5.5.	Dinámica en sistemas de referencia no inerciales	183
5.5.1.	Transformación entre sistemas de referencia	184
5.5.2.	Sistemas de referencia rotantes	187
5.5.3.	Adición de velocidades en sistemas rotantes	191
5.5.4.	Aceleraciones ficticias en sistemas rotantes	191
5.5.5.	Un ejemplo numérico	195
5.6.	Problemas seleccionados	203
6.	El Problema de los N cuerpos	209
6.1.	Formulación del problema	209
6.1.1.	Motivación	209
6.1.2.	Enunciado físico y matemático	210
6.2.	¿Solución analítica?	214
6.2.1.	Aplicación de los teoremas de conservación	214
6.2.2.	Momento lineal	214
6.2.3.	Posición del centro de masa	216
6.2.4.	Momentum angular	216
6.2.5.	Energía potencial de N cuerpos	220
6.2.6.	Conservación de la energía	223
6.2.7.	Caso de estudio: el sistema Tierra-Luna	224
6.2.8.	Síntesis y teorema de Bruns	226
6.3.	Energía y virial	228
6.3.1.	Momento de inercia	228
6.3.2.	El virial	229
6.3.3.	Identidad de Lagrange-Jacobi	229
6.3.4.	Teorema del virial	230
6.3.5.	Caso de estudio: el virial del Sistema Solar	232
6.3.6.	Caso de estudio: la masa de cúmulos de galaxias	234
6.4.	Solución numérica	237
6.4.1.	Unidades canónicas	238
6.4.2.	Las ecuaciones de movimiento reducidas	241
6.4.3.	Algoritmo de solución	243
6.4.4.	Figuras interactivas	250
6.4.5.	Constantes de movimiento y teorema del virial	251
6.4.6.	Una algoritmo general	254
6.5.	Problemas seleccionados	258
7.	El Problema de los dos cuerpos	261
7.1.	Motivación	261
7.2.	El problema relativo de dos cuerpos	265
7.3.	Constantes de movimiento	267
7.3.1.	Momento angular específico relativo	267
7.3.2.	Energía específica relativa	270
7.3.3.	El vector de excentricidad	271

7.4.	La ecuación de la trayectoria	272
7.5.	La velocidad relativa	275
7.6.	El hodográfo del problema de los dos cuerpos	277
7.7.	El teorema armónico	280
7.8.	Teoremas del movimiento orbital	282
7.9.	La órbita en el espacio	283
7.9.1.	Determinación de la órbita	284
7.9.2.	Predicción del vector de estado	287
7.9.3.	La órbita osculatrix	288
7.9.4.	Un ejemplo numérico	289
7.10.	El problema de los dos cuerpos en el tiempo	292
7.10.1.	La ecuación de Halley	294
7.10.2.	La ecuación de Kepler	297
7.10.3.	La función generalizada de Kepler	298
7.10.4.	Interpretación geométrica de la anomalía media	300
7.10.5.	Solución numérica a la ecuación de Kepler	303
7.10.6.	Solución analítica por aproximaciones sucesivas	313
7.10.7.	Solución por series de la ecuación de Kepler	315
7.10.8.	Eficiencia de los métodos de solución	317
7.11.	Una síntesis del problema de los dos cuerpos	317
7.11.1.	Un ejemplo numérico	320
7.12.	Variables universales	326
7.12.1.	Las funciones f y g	329
7.13.	Aproximación de dos cuerpos a sistemas jerárquicos	333
7.13.1.	Predicciones en el Sistema Solar	338
7.13.2.	Evolución de los elementos orbitales osculatrices	341
7.13.3.	Un ejemplo real: los elementos osculatrices de la Luna	345
7.14.	Introducción a la teoría de perturbaciones	345
7.14.1.	Perturbación del semieje mayor	347
7.14.2.	Perturbación de la excéntricidad	348
7.14.3.	Perturbaciones de la orientación	349
7.14.4.	Ecuación de la órbita osculatrix	349
7.14.5.	Un ejemplo numérico	350
7.15.	El problema de los dos cuerpos en SPICE	359
7.16.	Problemas seleccionados	364
8.	El problema restringido de los tres cuerpos	379
8.1.	Motivación	379
8.2.	El problema restringido de los tres cuerpos	382
8.3.	El problema circular restringido de los tres cuerpos (CRTBP)	383
8.4.	Las unidades canónicas del CRTBP	384
8.5.	Solución numérica al CRTBP	385
8.6.	Un algoritmo general para el CRTBP	388
8.7.	La constante de Jacobi	389
8.8.	El valor de la constante de Jacobi	391
8.9.	Cuadratura de Jacobi de un sistema simulado	393
8.10.	Cuadratura de Jacobi de un sistema real	395
8.11.	Las regiones de exclusión	400

8.12.	El potencial modificado	405
8.13.	Los puntos de equilibrio de Lagrange	412
8.13.1.	Puntos de equilibrio triangulares	414
8.13.2.	Puntos de equilibrio colineales	415
8.13.3.	Punto colineal de equilibrio, L_1	416
8.13.4.	Punto colineal de equilibrio, L_2	417
8.13.5.	Punto colineal de equilibrio, L_3	417
8.13.6.	Precisión de la aproximación analítica {crtbp_colineales_precision}	418
8.14.	Aplicaciones del CRTBP	421
8.14.1.	El radio de Hill y el lóbulo de Roche	421
8.14.2.	Órbitas periódicas cerca a los puntos de equilibrio	430
8.14.3.	El parámetro de Tisserand	438
8.14.4.	Clasificación de los objetos cercanos a la Tierra (NEOs)	447
8.14.5.	Clasificación de los objetos cercanos a Júpiter	451
8.15.	Problemas seleccionados	454
9.	El formalismo lagrangiano y la mecánica celeste	465
9.1.	Motivación	465
9.2.	El formalismo Lagrangiano	466
9.2.1.	Principio de los trabajos virtuales	467
9.2.2.	Principio de d'Alambert-Lagrange	469
9.3.	Restricciones y variables generalizadas	472
9.3.1.	Fuerzas de restricción	475
9.3.2.	Variables generalizadas	476
9.3.3.	Propiedades matemáticas de las reglas de transformación	479
9.4.	Las ecuaciones de Lagrange	481
9.4.1.	Un ejemplo: el péndulo elástico	483
9.5.	La función lagrangiana	490
9.5.1.	El potencial generalizado	492
9.5.2.	Un ejemplo: el Lagrangiano del péndulo elástico	492
9.6.	El principio de Hamilton	494
9.6.1.	Un ejemplo: el péndulo simple	495
9.7.	Simetrías y leyes de conservación	501
9.7.1.	Conservación del momento angular	504
9.7.2.	Conservación del momento lineal	505
9.7.3.	Variables cíclicas	506
9.7.4.	La función de Jacobi y la conservación de la energía	507
9.8.	Mecánica celeste en el formalismo Lagrangiano	510
9.8.1.	El Lagrangiano de N cuerpos	510
9.8.2.	Simetrías del lagrangiano de N cuerpos	511
9.8.3.	El lagrangiano de un sistema de N cuerpos jerárquico	512
9.8.4.	El problema general de los dos cuerpos	516
9.8.5.	El potencial efectivo y las regiones de exclusión	517
9.8.6.	Ecuación de movimiento de la variable radial	522
9.8.7.	Ecuación de la forma orbital	526
9.8.8.	El problema de los dos cuerpos con n arbitrario	530

9.9.	Problemas seleccionados	537
10.	El formalismo hamiltoniano y la mecánica celeste	565
10.1.	Motivación	565
10.1.1.	El problema de las ecuaciones de movimiento	566
10.1.2.	Degeneración del espacio de configuración	567
10.2.	Las ecuaciones de Hamilton	569
10.3.	Las ecuaciones canónicas de Hamilton	572
10.4.	El principio de Hamilton modificado	573
10.5.	Dinámica en el espacio de fase	575
10.5.1.	El péndulo simple en el espacio de fase	576
10.6.	Simetrías y candidatas conservadas	582
10.6.1.	Variables cíclicas	582
10.6.2.	Un ejemplo: el péndulo cónico	583
10.6.3.	Conservación del Hamiltoniano	587
10.6.4.	Cantidades conservadas y los corchetes de Poisson .	588
10.7.	Transformaciones canónicas	590
10.7.1.	La función generatriz	595
10.7.2.	Transformaciones canónicas básicas	597
10.8.	El método de Hamilton-Jacobi	600
10.8.1.	Ejemplo 1: el oscilador armónico en una dimensión	602
10.8.2.	Ejemplo 2: partícula en caída libre	606
10.9.	Mecánica celeste en el formalismo hamiltoniano	610
10.9.1.	El hamiltoniano del problema de los dos cuerpos	610
10.9.2.	Conservación del vector de excentricidad	612
10.9.3.	El método de Hamilton-Jacobi en mecánica celeste	614
10.9.4.	El espacio de fase de los elementos orbitales	617
10.9.5.	Las variables de Delaunay	619
10.10.	Problemas seleccionados	623
11.	Algoritmos y rutinas útiles	635
11.1.	Rutina útiles	635
Bibliografía		641

Índice de figuras

1.1.	Imagen procesada de Arrokoth, el objeto transneptuniano sobrevolado por la sonda New Horizons el 1 de enero 2019 (crédito: NASA/Johns Hopkins University Applied Physics Laboratory/- Southwest Research Institute/Roman Tkachenko.)	20
1.2.	Figura correspondiente al código 1.1.	24
3.1.	Ilustración esquemática del <i>teorema de Danelin</i>	42
3.2.	Retrato de Johanes Kepler, copia de un original de 1610 de pintor desconocido y que se conserva en el monasterio Benedictino de Kremsmünster (Alemania).	43
3.3.	Figura correspondiente al código 3.3.	47
3.4.	Gráfico de las funciones trigonométricas básicas, en el intervalo de interés (gráfico generado).	47
4.1.	Definición geométrica de vector espacial y de sus operaciones básicas (suma, resta y multiplicación por un escalar). Aunque la resta de $\vec{A} - \vec{B}$ es un caso particular de la suma, es importante aquí familiarizarse con la dirección que tiene este vector (va de la cabeza del sustraendo \vec{B} a la del minuendo \vec{A}).	51
4.2.	Definción de los sistemas de coordenadas usadas en este texto	56
4.3.	Figura correspondiente al código 4.3. Solución aproximada de la ecuación diferencial $d^2F/dt^2 = -kF$ con $k=1.5$	73
4.4.	El área bajo una curva es un funcional, en tanto depende de la función que represente la curva, $f(t)$ o $f_0(t)$ Se conoce como una variación δf a la diferencia entre dos funciones cercanas, parametrizada a través de un número real ϵ y una función plantilla (panel inferior.) En términos de variaciones el valor de cualquier función vecina a una función de referencia f_0 se puede calcular, en un intervalo de interés, como $f(t) = f_0(t) + \epsilon\eta(t)$	75
4.5.	Figura correspondiente al código 4.6. La curva continua indica una aproximación numérica al camino más corto entre los puntos $(0, 0)$ y $(0, \pi)$ del plano euclíadiano, encontrada al minimizar el funcional longitud de arco y usando como función de prueba $f_0 = (t/\pi)^n$ (línea punteada) y como función plantilla $\epsilon(t) = \sin t$. El valor de ϵ que corresponde a la solución se muestra en la etiqueta. Para comparación se muestra (línea rayada) la solución exacta, que corresponde a una línea recta.	81

4.6.	Definición geométrica original de las <i>curvas cónicas</i>	82
4.7.	Definición con <i>áreas aplicadas</i> de las <i>curvas cónicas</i> y el origen de sus nombres.	83
4.8.	Figura correspondiente al código 4.7.	85
4.9.	Definición de las cónicas usando la recta directriz y el foco.	86
4.10.	Parámetros geométricos de la elipse referidos al apside O, el foco F y el centro C: <i>a</i> semieje mayor, <i>b</i> semieje menor, <i>p semilatus rectum</i> , <i>e</i> excentricidad, <i>c</i> distancia foco-centro.	90
4.11.	Parámetros geométricos de la hipérbola referidos al apside O, el foco F y el vértice C: <i>a</i> distancia al vértice (llamado con frecuencia también semieje mayor aunque en la hipérbola no hay tal), β pendiente de la hipérbola, <i>p semilatus rectum</i> , <i>e</i> excentricidad, ψ angulo de semiapertura.	92
4.12.	Figura correspondiente al código 4.9.	98
4.13.	Figura correspondiente al código 4.11.	99
4.14.	Derivación de la ecuación de la cónica en coordenadas cilíndricas referidas al Foco. En la figura el ángulo f es la <i>anomalía verdadera</i>	102
4.15.	Figura correspondiente al código 4.13.	103
4.16.	Figura correspondiente al código 4.15.	106
4.17.	Definición de la anomalía excéntrica E y el método asociada a ella para determinar la posición de los puntos sobre una elipse.	107
4.18.	Anomalía verdadera f como función de la anomalía excéntrica E para una elipse. La línea rayada corresponde a la aproximación $f \approx \sqrt{(1+e)/(1-e)}E$ que es valida en el caso $f \ll 1$	108
4.19.	Anomalía excéntrica F como función de la anomalía verdadera f para una hipérbola. La línea punteada corresponde a la aproximación $F \approx \sqrt{(e-1)/(e+1)}f$	108
4.20.	Construcción geométrica usada aquí para deducir la relación entre las anomalías f , E y F y el área del sector de cónica (región sombreada).	110
4.21.	Secuencia de rotaciones que permiten pasar del sistema natural de ejes de la cónica $x - y - z$ a un sistema con una orientación arbitraria $x''' - y''' - z'''$	113
4.22.	Figura correspondiente al código 4.18.	117
4.23.	Figura correspondiente al código 4.20.	120
4.24.	Una elipse con algunos puntos resaltados.	121
4.25.	Definición de las coordenadas de latitud y longitud sobre la Tierra	132
5.1.	Construcción geométrica para deducir la regla de transformación de la posición \vec{r} de una partícula (circulo gris) entre dos sistemas de referencia inerciales (que se mueven uno respecto de otro con velocidad constante \vec{u}).	139
5.2.	Figura correspondiente al código 5.2. La figura muestra la solución numérica a la e.d.m. de un sistema sometido a un tirón constante $\vec{j} = j_0 \hat{e}_x$	147
5.3.	Figura correspondiente al código 5.3. Comparación de la solución numérica (puntos) y la solución analítica (línea continua) de la e.d.m. de un sistema con tirón constante $j_0 = 0,5$	149

- 5.4. Figura correspondiente al código 5.4. Solución numérica de la e.d.m. de un sistema dinámico con aceleración $\vec{a} : (-2,5x, 0, 0)$ 150
- 5.5. Fotografía de la copia persona de Newton de la primera edición de los *Principia*, incluyendo correcciones hechas a mano por el mismo Newton. Foto: Andrew Dunn, <http://bit.ly/2WugALe>. 155
- 5.6. Dos formas del postulado de acción y reacción: a la izquierda el postulado débil, en el que las fuerzas son iguales y de sentido contrario, pero no son paralelas a la línea que une las partículas; a la derecha el postulado fuerte en el que la acción y reacción actúan sobre la línea que une a las partículas. 161
- 5.7. Definición de los vectores de posición, vector relativo y vector de fuerza en el postulado de gravitación universal. 162
- 5.8. Robert Hooke (1635-1753). Crédito: Rita Greer (2004). 165
- 5.9. El único retrato disponible de Simon Stevin (ca. 1548). Crédito: Colección Universidad de Leiden. 169
- 5.10. Figura correspondiente al código 5.7. Un sistema de tres partículas. El tamaño del círculo que representa cada partícula es proporcional a su masa. La cruz y la flecha adherida a ella muestran la posición y velocidad del centro de masa. 175
- 5.11. Relación entre la posición del centro de masa \vec{R} , el vector relativo $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ y la posición de las partículas en un sistema de dos cuerpos. 176
- 5.12. Primera página de la obra cumbre de Kepler *Astronomía Nova*. 176
- 5.13. Construcción geométrica para deducir la regla de transformación de la posición \vec{r} de una partícula (círculo gris) entre un sistema de referencia inercial R y uno no inercial R' . Por construcción los orígenes de ambos sistemas coinciden en $t=0$. El origen de coordenadas de R' se mueve a lo largo de la trayectoria punteada con velocidad variable $\vec{u}(t')$ 185
- 5.14. Explicación de la experiencia de ingrávitez en el interior de un vehículo espacial, en este caso un módulo de la Estación Espacial Internacional. El módulo corresponde a un sistema de referencia no inercial con una aceleración \vec{u} igual a la aceleración de la gravedad \vec{g} a la altura de la estación. Una partícula (círculo gris) experimenta una fuerza aplicada $\vec{F} = m\vec{g}$ igual a su peso a la altura de la estación. Sin embargo, por encontrarse en un sistema de referencia no inercial a esa fuerza debe sumarse la fuerza ficticia $-m\vec{u}$ que es en magnitud idéntica al peso. Crédito: NASA/Tripulación de la misión STS-132. 187
- 5.15. Construcción geométrica usada para calcular el cambio en la dirección de los vectores unitarios coordenados de un sistema de coordenadas cuando se produce una rotación alrededor de un eje arbitrario \hat{n} 189

5.16.	Las rotaciones, representadas aquí por \hat{R} no son operaciones conmutativas. En la columna izquierda se muestra la aplicación consecutiva (“suma”) de las rotaciones \hat{R}_1 y \hat{R}_2 , que hemos representado de forma general como $\hat{R}_2 \oplus \hat{R}_1$. En la columna de la derecha se muestra la sucesión contraria de operaciones $\hat{R}_1 \oplus \hat{R}_2$ que da un resultado completamente distinto. Es por esta misma razón que en estricto no es posible definir una suma entre velocidades angulares y por lo tanto vectores de velocidad angular. La notación $\vec{\omega}$ es una licencia del lenguaje matemático usado aquí.	190
5.17.	Explicación esquemática del origen y dirección de las aceleraciones centrífuga y de Coriolis.	193
5.18.	Gaspard-Gustave Coriolis (1792-1843) en un retrato de 1841. Coriolis tuvo la suerte de que una de las más importantes aceleraciones ficticias que se producen en sistemas en rotación, y que habían sido identificada y descritas antes por varios físicos desde Laplace hasta Riccioli, llevara finalmente su nombre.	195
5.19.	Figura correspondiente al código 5.10.	197
5.20.	Figura correspondiente al código 5.11.	199
5.21.	Figura correspondiente al código 5.12.	202
5.22.	Geometría del lanzamiento de un proyectil desde la superficie de una Tierra en rotación.	203
5.23.	Figura correspondiente al código 5.13.	208
6.1.	El problema de los N cuerpos: dadas las condiciones iniciales de un conjunto de N partículas puntuales, predecir la posición y velocidad de las partículas en cualquier instante futuro.	211
6.2.	Fotografía de Henri Poincaré hacia el año 1886, unos años antes de realizar su trabajo histórico sobre el problema de los tres cuerpos (Foto: Eugène Pirou)	213
6.3.	Ilustración gráfica de la orientación del plano invariable de Laplace. El plano invariable está definido en el sistema de referencia inercial del centro de masa y se mueve con él con velocidad V_{CM} y tiene una orientación dada por el momento angular total \vec{L}' de las partículas respecto del centro de masa.	218
6.4.	Figura correspondiente al código 6.4.	234
6.5.	Mosaico en falso color del cúmulo de Galaxias de Coma que combina imágenes en luz visible e infrarrojo. Crédito: NASA / JPL-Caltech / L. Jenkins (GSFC).	235
6.6.	Sistema de tres cuerpos de ejemplo (todas las cantidades están expresadas en unidades canónicas)	244
6.7.	Figura correspondiente al código 6.8. Posiciones y velocidades de las partículas en el sistema de ejemplo, en el tiempo inicial y en $t = 1$ (en unidades canónicas).	247
6.8.	Figura correspondiente al código 6.11. Posiciones y velocidades de las partículas en el sistema de ejemplo, entre el tiempo inicial $t_0 = 0$ y $t = 5$ (en unidades canónicas).	249
6.9.	Figura correspondiente al código 6.13.	250
6.10.	Figura correspondiente al código 6.15.	252

6.11.	Figura correspondiente al código 6.17	257
7.1.	Figura correspondiente al código 7.1	263
7.2.	Figura correspondiente al código 7.2.	264
7.3.	Tipos de sistemas jerarquicos de N cuerpos.	265
7.4.	Configuración del problema de los dos cuerpos.	266
7.5.	El problema de los dos cuerpos puede reducirse al movimiento de su vector relativo \vec{r} , un vector libre sin un origen definido. Por simplicidad podemos suponer la existencia un punto imaginario \mathcal{O} alrededor del cual la punta del vector se mueve. La constancia de $\vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \vec{h}$ en el problema relativo de los dos cuerpos implica que el movimiento del sistema (trayectoria rayada) se realiza sobre un plano: aquel definido por el vector \vec{h} . Adicionalmente (panel inferior) la magnitud de este vector se puede relacionar con la razón de cambio del área barrida por el vector relativo (superficie coloreada en el panel inferior.)	268
7.6.	Izquierda: pintura de Pierre-Simon Laplace de James Posselwhite. Derecha: portada del Tomo I del Tratado de Mecánica Celeste de Laplace, el libro más importante en el área publicado después de los <i>Principia</i> (foto Colección <i>Heralds of Science from the Burnby Library</i>).	274
7.7.	Trayectorias del vector relativo (arriba) y de las partículas individuales (abajo). Las trayectorias tienen todas la misma excentricidad. El foco de la trayectoria del vector relativo es un punto arbitrario en el espacio \mathcal{O} , mientras que el foco de las trayectorias de las partículas es el centro de masa (CMD). El vector relativo se muestra en dos posiciones: en el apoapsis (flecha rayada) y en un punto cualquiera de la trayectoria (flecha continua.) Nótese que la anomalía verdadera f es igual en las tres trayectorias.	276
7.8.	Figura correspondiente al código 7.3.	280
7.9.	Izquierda: ilustración de Newton adaptada de la correspondencia con Hooke en 1679 y en la que explicaba la trayectoria que seguiría una partícula soltada desde el reposo en un punto A a una cierta altura sobre una Tierra que rota. Para esta trayectoria Newton asumía que la fuerza de gravedad era proporcional a la distancia al centro (que es lo que pasaría dentro de la Tierra sólida.) Derecha: trayectoria elíptica que seguiría la partícula si toda la masa de la Tierra estuviera concentrada en el punto C y la fuerza variara con el inverso del cuadrado de la distancia. Esta trayectoria fue sugerida por Robert Hooke e inspiró a Newton a demostrar la primera ley de Kepler usando su teoría de la gravedad.	284
7.10.	Pintura del holandés Lieve Verschuer que muestra la apariencia del gran cometa de 1680, llamado también el cometa de Newton. Crédito: Museo de Rotterdam.	285
7.11.	Construcción geométrica requerida para resolver el problema de la determinación de los elementos orbitales de la trayectoria del vector relativo a partir del vector de estado $\vec{X} = (\vec{r} \ \dot{\vec{r}})^T$	286

7.12.	Ilustración del concepto de órbita osculatriz. La trayectoria del cuerpo (curva continua) no es una cónica. Sin embargo por cada punto de la curva (p.e. los puntos P y Q) podemos encontrar una cónica que sea tangente a la curva (curvas rayadas) y que tenga como foco (F_P o F_Q) el origen de coordenadas.	288
7.13.	Figura correspondiente al código 7.4.	293
7.14.	Halley.	295
7.15.	Gráficos de la función generalizada de Kepler $k(G; M, e)$ para $M = \pi/2$ y para distintos valores de la excentricidad (elipses, líneas continuas e hipérbolas, líneas rayadas.) El intercepto de cada curva con el eje horizontal G (línea continua horizontal) provee el valor de la anomalía excéntrica G correspondiente a los valores de M y de e respectivos.	300
7.16.	Construcción geométrica original de Johannes Kepler para interpretar la anomalía media M o su suplemento $M' \equiv \pi - M$. Según Kepler M' es proporcional al área total de la región FRA que, a su vez la suma del área triángulo RCF, que es proporcional a $e \sin E'$ y el área del sector de círculo RCA, que es proporcional a E'	301
7.17.	Errores de la rutina semianalítica, es decir, aquella que resuelve la ecuación de Kepler sin usar iteraciones y solo hace un llamado a las funciones trigonométricas.	311
7.18.	Anomalía excéntrica como función de la anomalía verdadera para distintos valores de la excentricidad.	312
7.19.	Figura correspondiente al código 7.11.	324
7.20.	Figura correspondiente al código 7.12. Comparación de las componentes calculadas del vector de estado de cada partícula en un sistema de dos cuerpos, obtenidas con la teoría desarrollada en este capítulo y con la solución numérica de alta precisión conseguida con métodos numéricos. Cada curva representa una componente (x_1, y_1, z_1, v_{x1} , etc.) Para no recargar más la figura se ha evitado iniciar a que curva corresponde cada componente.	325
7.21.	Comparación entre la solución numérica a un problema de 3 cuerpos (líneas continuas) y su aproximación como un sistema jerárquico formado por dos subsistemas de dos cuerpos (cruces).	336
7.22.	Este grabado de 1598 muestra el gran cuadrante mural de Tycho Brahe en <i>Uraniborgo</i> , su observatorio astronómico en la isla Hven en Dinamarca. Con este y otra decena de enormes instrumentos, Tycho realizó por más de 20 años observaciones de gran precisión de planetas, estrellas y cometas, que a la larga revolucionarían, no solo la mecánica celeste, sino también la astronomía en general. Crédito: Royal Library.	339
7.23.	Error en la predicción de la posición de Marte en el cielo, tal y como es visto desde la Tierra, usando la teoría de los dos cuerpos como aproximación al movimiento de ambos planetas. El error es calculado a lo largo de un período sinódico completo del planeta rojo (780 días.).	342
7.24.	Figura correspondiente al código 7.18.	344

7.25.	Variaciones de los elementos orbitales osculatrices de la Luna respecto al baricentro del sistema Tierra-Luna.	346
7.26.	Fuerza perturbadora neta $\Delta\vec{f}$ actuando sobre el vector relativo en el problema de los dos cuerpos.	348
7.27.	Figura correspondiente al código 7.19.	351
7.28.	Figura correspondiente al código 7.20.	353
7.29.	Figura correspondiente al código 7.21.	354
7.30.	Figura correspondiente al código 7.22.	360
7.31.	Representación esquemática de la trayectoria elíptica de un satélite	366
8.1.	Figura correspondiente al código 8.1.	381
8.2.	Representación esquemática de la configuración del problema circular restringido de los tres cuerpos. Todas las cantidades están expresadas en el sistema de unidades canónicas en el que $a = 1$ (distancia entre las partículas más masivas) y $\mu_2 = \alpha$	385
8.3.	Figura correspondiente al código 8.2.	387
8.4.	Figura correspondiente al código 8.3.	388
8.5.	Figura correspondiente al código 8.4.	394
8.6.	Figura correspondiente al código 8.6.	396
8.7.	Figura correspondiente al código 8.7.	398
8.8.	Figura correspondiente al código 8.8. Valor de la constante de Jacobi para el sistema real de tres cuerpos simulado en el capítulo.	399
8.9.	Representación esquemática de las regiones de exclusión (área sombreada) en el CRTBP.	401
8.10.	Intercepto sobre el eje x de los límites de las regiones de exclusión (zonas blancas no sombreadas).	403
8.11.	Representación esquemática de la definición de los puntos colineales L_1 , L_2 y L_3 en el CRTBP al cambiar el valor de la constante de Jacobi C_J . Los valores críticos de la constante son aproximados y corresponden al caso de un sistema con $\alpha = 0,3$	404
8.12.	Figura correspondiente al código 8.9.	406
8.13.	Figura correspondiente al código 8.10.	410
8.14.	Figura correspondiente al código 8.11. Contornos del potencial modificado en el CRTBP (equipotenciales) y algunos puntos de interés para analizar.	411
8.15.	Ilustración esquemática de lo que significa que una partícula de prueba este en equilibrio en el sistema rotante del CRTBP. Cuando una partícula tiene velocidad cero y está en uno de los puntos de equilibrio del sistema, la partícula permanecerá en reposo allí. Sin embargo en el sistema inercial, en realidad, la partícula se mueve siguiendo una trayectoria circular con la misma velocidad angular relativa de las partículas masivas, manteniendo respecto a ella la misma distancia. Equilibrio en el CRTBP no significa reposo en el sistema de referencia inercial.	413

8.16.	Ubicación esquemática de los puntos de equilibrio de Lagrange: puntos colineales L_1 , L_2 y L_3 y puntos triangulares L_4 y L_5 . Para los puntos colineales se han indicado las distancias R_{L1} , R_{L2} y R_{L3} de cada uno a un punto de referencia vecino: la segunda partícula en el caso de L_1 y L_2 o el lado opuesto de una circunferencia imaginaria centrada en la partícula más masiva y con radio unitario (circunferencia rayada). Es importante entender que la circunferencia imaginaria representada aquí no es en general la trayectoria de la partícula 2 que debería estar centrada en el origen (centro de masa) y solo coincide con ella en el caso en que $\alpha \ll 1$.	415
8.17.	YOU MUST ADD A CAPTION.	416
8.18.	Distancia relativa de los puntos de equilibrio colineales en el CRTBP para un amplio rango de valores de α .	420
8.19.	Gráfico del potencial modificado en el CRTBP (mapa de colores) resaltando las curvas equipotenciales correspondientes al valor del potencial del punto de Lagrange L_1 (curva sólida negra), la posición de los puntos de Lagrange L_1 y L_2 (cruces blancas) y la esfera de Hill (circunferencia rayada).	423
8.20.	Representación artística de la transferencia de masa desde una estrella que ha llenado su lóbulo de Roche (a la derecha) tras alcanzar un estadío evolutivo tardío y un objeto compacto (compañera binaria) alrededor del cual se forma un disco de acreción (disco azul a la izquierda). Este tipo de sistemas puede emitir abundante rayos X lo que permite que la presencia del compañero invisible sea detectadas.	426
8.21.	Fotografía de la luna de Saturno <i>Pan</i> tomada por la sonda Cassini. <i>Pan</i> es una pequeña luna irregular con un <i>cinturón</i> de polvo en su ecuador, que reside entre las partículas de los anillos de Saturno. Crédito: NASA.	428
8.22.	Figura correspondiente al código 8.15.	432
8.23.	Figura correspondiente al código 8.16.	433
8.24.	Figura correspondiente al código 8.17.	434
8.25.	Figura correspondiente al código 8.19.	436
8.26.	Figura correspondiente al código 8.20.	437
8.27.	Figura correspondiente al código 8.21.	439
8.28.	Figura correspondiente al código 8.22.	441
8.29.	Figura correspondiente al código 8.23.	442
8.30.	Figura correspondiente al código 8.24. Valor de la constante de Jacobi para el sistema real de tres cuerpos simulado en el capítulo.	443
8.31.	Figura correspondiente al código 8.25.	447
8.32.	Figura correspondiente al código 8.26.	449
8.33.	Figura correspondiente al código 8.27.	451
8.34.	Figura correspondiente al código 8.28.	453

9.1.	Arriba: una barra de peso W (conocido) se encuentra apoyada sobre un pivote (triángulo) mientras se aplica sobre ella sendas fuerzas \vec{R} y \vec{F} . Si se conoce la magnitud de F ¿cuál es la magnitud de R ? Abajo: representación de los desplazamientos virtuales de la barra.	468
9.2.	Una partícula puntual de peso \tilde{W} conocido (representada aquí esquemáticamente como el disco gris) se suspende de una cuerda inextensible y rígida mientras se encuentra en una campo gravitacional uniforme. La partícula solo se mueve sobre el plano del dibujo. El desplazamiento virtual tangencial $\delta\vec{r}_T$ es compatible con las restricciones del sistema, mientras que el desplazamiento virtual horizontal $\delta\vec{r}_H$ no lo es.	470
9.3.	Un cuerpo desliza por la superficie de un cuenco invertido en presencia de un campo gravitacional uniforme. En algún punto en su descenso, el cuerpo puede desprenderse de la superficie.	474
9.4.	En el péndulo cónico generalizado, la partícula puede moverse libremente oscilando en y alrededor de la dirección vertical.	479
9.5.	Representación esquemática del péndulo elástico. Una partícula se suspende del extremo de un resorte y se deja oscilar bajo la acción de un campo gravitacional uniforme. La longitud del resorte cuando no se aplica ninguna fuerza es L . En un momento dado el resorte puede estar estirado una distancia e respecto a la longitud de equilibrio.	484
9.6.	Figura correspondiente al código 9.1.	488
9.7.	Figura correspondiente al código 9.2.	489
9.8.	Figura correspondiente al código 9.4.	499
9.9.	Figura correspondiente al código 9.5.	500
9.10.	Emmy Noether (1883-1935), considerada como una de las matemáticas más importantes de la historia, descubrió el teorema que lleva su nombre y que juega un papel fundamental en la física contemporánea. Crédito: Erlangen Konrad Jacobs (1930).	501
9.11.	Figura correspondiente al código 9.7.	520
9.12.	Regiones de exclusión y regiones permitidas en un problema de fuerzas centrales	521
9.13.	Figura correspondiente al código 9.8.	524
9.14.	Figura correspondiente al código 9.9.	526
9.15.	Figura correspondiente al código 9.10.	527
9.16.	Figura correspondiente al código 9.11.	533
9.17.	Albert Einstein durante una conferencia en Viena en 1921, seis años después de resolver uno de los problemas más esquivos de la mecánica celeste, la precesión anómala del perihelio de Mercurio. Crédito: *National Library of Austria.	536
9.18.	Tres masas unidas por barras deslizan por un aro.	541
9.19.	Un canal con forma de <i>dona</i> tiene un cuerpo adentro atado a un resorte.	548
9.20.	Dos cilindros en contacto.	550
9.21.	Dos masas unidas por resortes que pueden deslizar.	552
9.22.	Péndulo doble.	555

9.23.	Figura correspondiente al código 9.12	562
10.1.	Sistema mecánico usado para ilustrar la complejidad de las ecuaciones de movimiento en el formalismo Lagrangiano, incluso de sistemas relativamente simples.	566
10.2.	El espacio coordenado o espacio de configuración (panel de la izquierda) es degenerado: por un punto cualquier pasan en principio infinitas trayectorias posibles del sistema dinámico correspondiente. El espacio de posición-velocidad (o espacio de fase como definiremos más adelante) no es degenerado: por un punto, una vez provistas las fuerzas, pasa una y solo una trayectoria.	568
10.3.	Interpretación de las cantidades relevantes en el formalismo Hamiltoniano y de las ecuaciones canónicas en el espacio de fase.	576
10.4.	Figura correspondiente al código 10.1.	578
10.5.	Figura correspondiente al código 10.2.	581
10.6.	En el péndulo cónico generalizado, la partícula puede moverse libremente oscilando en y alrededor de la dirección vertical.	583
10.7.	Figura correspondiente al código 10.3.	587
10.8.	Ilustración del efecto en el espacio de fase y en la descripción de la dinámica de un sistema dinámico de una transformación canónica. En este caso se ilustra el oscilador armónico simple cuyo espacio de fase es tradicionalmente el de la izquierda, y el mismo sistema después de una transformación canónica convenientemente escogida (panel de la derecha).	594
10.9.	Figura correspondiente al código 10.4.	625

Capítulo 1

Prefacio

En 2019 celebramos el centenario de la histórica observación de un eclipse total de Sol, liderada por *Sir Arthur Eddington* y que permitió la primera confirmación experimental de las predicciones de la teoría general de la relatividad. El primer día de ese mismo año, una nave espacial, la sonda **New Horizons**, sobrevoló el cuerpo astronómico más remoto fotografiado por nuestra especie, el objeto transneptuniano (486958) **Arrokoth**; la misma sonda, cinco años antes, había pasado “rozando” la superficie de Plutón, enviándonos imágenes inesperadas de un mundo sorprendente. Muy lejos de allí, y también en 2019, dos naves espaciales, una japonesa, la sonda **Hayabusa 2** y la otra estadounidense, **OSIRIS-REx**, transmitieron imágenes impactantes desde la superficie de dos pequeños asteroides cercanos a la Tierra, cuerpos que visitaron con el objeto de traer muestras a la Tierra. Lo que aprendamos de esas muestras podría ayudarnos a evitar un impacto catastrófico futuro.

Todas estas hazañas de exploración y conocimiento fueron posibles, entre otras, gracias a la **Mecánica Celeste**. Esta disciplina científica, combinación asombrosa de astronomía, física y matemáticas, comenzó con el trabajo teórico pionero de *Johannes Kepler* a principios de los 1600¹; se estableció con la obra cumbre de *Sir Isaac Newton*, los *Principios Matemáticos de la Filosofía Natural* [37], publicada a finales de los 1600; y alcanzó su apogeo entre los 1700 y los 1800 con los trabajos de matemáticos y astrónomos como *Edmund Halley*, *Leonhard Euler*, *Pierre-Simon Laplace*, *Joseph-Louis Lagrange*, *William Rowan Hamilton* y *Henri Poincaré* (entre muchos otros que mencionaremos en este libro).

Este libro presenta una visión panorámica de la **mecánica celeste** y en general de la **mecánica analítica** o **mecánica clásica**, que se desarrolló de forma paralela a la primera, inspirada, en muchos casos, por sus problemas. El texto está dirigido especialmente a quienes, por su formación o trabajo, están interesados en la aplicación de la mecánica celeste en astronomía o en ingeniería aeroespacial. Su extensión, énfasis y nivel de profundidad lo hace especialmente adecuado para **estudiantes de pregrado** (licenciatura o bachillerato, dependiendo del país) de

¹En la [Capítulo 3](#) haremos claridad sobre la nomenclatura usada en el libro para referirnos a los siglos y decenios.

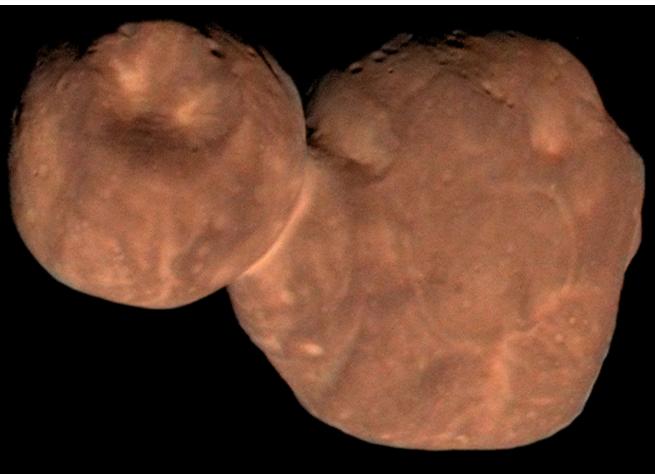


Figura 1.1: Imagen procesada de Arrokoth, el objeto transneptuniano sobrevolado por la sonda New Horizons el 1 de enero 2019 (crédito: NASA/Johns Hopkins University Applied Physics Laboratory/Southwest Research Institute/Roman Tkachenko.)

cualquier programa científico o técnico, especialmente astronomía, física o ingeniería aeroespacial. Su enfoque computacional, lo podría hacer, además, útil como material de referencia para profesionales de estas disciplinas.

1.1. ¿Otro libro de mecánica celeste?

Al escribir este libro, no pretendo hacer un compendio exhaustivo de los problemas de la Mecánica Celeste, que, durante más de 400 años de historia se ha convertido en una disciplina científica basta y en constante desarrollo.

Muchos textos en la materia han sido escritos desde los tiempos de Newton, la mayoría en las últimas décadas. Algunos presentan detallados y rigurosos desarrollos matemáticos. Otros están orientados específicamente al Sistema Solar o al movimiento de satélites y vehículos espaciales. Muchos más son buenos libros de texto, la mayoría dirigidos a estudiantes de posgrado (la mecánica celeste es considerada una línea de profundización, tanto en física como en astronomía.) También se han escrito algunos libros divulgativos y al alcance de aficionados.

La bibliografía de este libro recoge apenas una muestra de referencias en la materia, que serán citados a lo largo de sus capítulos, y que, de antemano, invito a los lectores a explorar con curiosidad para no quedarse con la punta de el inmenso *iceberg* que apenas alcanzará a asomarse en estas páginas.

Siendo este el caso ¿para qué escribir un libro más de mecánica celeste? Existen dos razones fundamentales que me motivaron a emprender esta aventura.

La primera es que, como mencione antes, la mayoría de los libros de mecánica celeste están dirigidos a estudiantes con una formación media o avanzada en matemáticas, mecánica newtoniana y mecánica analítica. Como se acostumbra decir, tienen un nivel de posgrado. En contraste, el número de textos al “alcance” de estudiantes de los primeros años universitarios, no es muy grande. Escribo este libro para contribuir a Enriquecer precisamente ese “nicho”.

Podría argumentarse que la mecánica celeste, como aplicación específica de la mecánica, es un tema especializado y de allí que sus textos estén dirigidos a estudiantes más avanzados. Sin embargo, la importancia de esta disciplina en la historia de la astronomía y de la física, así como su potencial para describir fenómenos fascinantes, desde el movimiento de planetas y naves espaciales, hasta la colisión de agujeros negros, hace de la mecánica celeste un medio educativo excelente para introducir conceptos teóricos en física y astronomía, que, sin un contexto y motivación apropiado, son difíciles de digerir.

Un buen libro de mecánica celeste o mecánica analítica, sin importar su nivel, debería poder ser estudiado por cualquier estudiante, incluso de pregrado. Esa ha sido la premisa en muchos centros académicos. Pero la realidad es más compleja. Como cualquier profesor sensible sabe, para valorar realmente los logros intelectuales del pasado, entender las motivaciones que llevaron a los padres de una disciplina a introducir hipótesis o formular las leyes de la misma, se necesita experiencia académica. Experiencia que la mayoría de los estudiantes de pregrado no tienen. No es solo un problema de nivel matemático, es también un problema de falta de exposición a la ciencia.

Este libro, pretende ser un buen *primer* libro de mecánica celeste, pero también de mecánica analítica, como explicaremos más adelante. Un primer escalón para abordar, ya con experiencia, libros más avanzados.

1.2. Mecánica celeste y mecánica analítica

La segunda razón, y la original para mi como profesor del **pregrado de Astronomía en la Universidad de Antioquia**, fue la necesidad de escribir un texto de mecánica celeste que permitiera además una formación en los principios y métodos de la mecánica analítica (mecánica teórica o mecánica clásica). Esos principios y métodos son instrumentales en la formulación de la mecánica cuántica y lo son además en versiones modernas de otras áreas de la física clásica, como la relatividad, la electrodinámica e incluso la óptica. La mecánica analítica es indispensable entonces en la formación de cualquier estudiante de ciencias físicas.

En la inmensa mayoría de los textos clásicos de mecánica celeste, los resultados se derivan usando, casi exclusivamente, los métodos de lo que llamaremos aquí el **formalismo vectorial o geométrico de la mecánica**. En este formalismo (originalmente introducido por Newton y desarrollado posteriormente por Euler) las fuerzas juegan el papel central en la descripción de la dinámica (*dime cuánto te halan y te diré cómo te mueves.*)

Desde los trabajos pioneros de matemáticos y “físicos” de los 1700 y 1800, tales como *Alambert*, *Lagrange*, *Hamilton* y *Jacobi*, se hizo evidente que algunos problemas complejos de mecánica celeste podían abordarse usando un **formalismo analítico o escalar de la mecánica**. En este formalismo, los sistemas se describen usando *funciones* tales como el *Lagrangiano* o el *Hamiltoniano*, que contienen toda la información relevante del sistema, sus restricciones y simetrías (*dime cuál es tu hamiltoniano y no solo te diré para dónde vas sino también cómo eres.*)

Un caso ilustrativo, muy popular y reciente, de como el formalismo analítico de la mecánica es aplicado hoy, de forma generalizada, en mecánica celeste, es la “predicción” de un nuevo planeta en el Sistema Solar, más allá del cinturón de Kuiper, cuya existencia, a la fecha, no se ha confirmado, ni rechazado [8]. Este

trabajo también es la punta de un inmenso “iceberg” de literatura científica en mecánica celeste en la que el formalismo analítico es protagonista.

Más allá entonces de la necesidad práctica de juntar a la mecánica celeste y a la mecánica analítica en un mismo texto, de modo que sirva a estudiantes de programas académicos como astronomía o ingeniería aeroespacial, este libro presenta este particular “matrimonio” entre dos disciplinas clásicas de la astronomía y la física como lo que es: una relación estrecha entre dos cuerpos de conocimiento inseparables.

1.3. Mecánica celeste en la era de la información

Un ingrediente adicional hace a este libro diferente. Me refiero al enfasis especial que daremos a los algoritmos de la mecánica celeste a través de todo el libro.

Es un hecho reconocido que la complejidad de muchos problemas de mecánica celeste, en particular aquellos con un interés práctico tales como el diseño de trayectorias de vehículos espaciales, la predicción de la posición precisa de asteroides y cometas que pueden amenazar nuestro planeta o la predicción a largo plazo de la posición de los cuerpos del sistema solar y otros sistemas planetarios, ha exigido, casi desde los tiempos de Kepler, el desarrollo y aplicación de métodos numéricos y, más recientemente, su implementación en calculadores y computadores.

En este sentido, la relación de la mecánica celeste con *algoritmos* de toda clase, no es comparable con la relación, principalmente utilitaria, que tienen la mayoría de las áreas de la física con la computación. Podría decirse, que hoy, es casi impensable saber de mecánica celeste, sin estar familiarizado también con sus algoritmos.

Pensando en esto, todo el contenido del libro ha sido elaborado usando *libretas* o *notebooks* del Proyecto Jupyter². Estas libretas pueden ser obtenidas y usadas por el lector para interactuar con y modificar los algoritmos (el material electrónico está disponible en el sitio en línea³ del libro). Estos medios tecnológicos permiten además aprovechar gráficos interactivos y animaciones para entender mejor conceptos que pueden ser difíciles.

En la versión impresa, los algoritmos se presentarán en cajas especiales de texto como esta:

```
import math
e=0.3
M=0.5
E=M
Eo=2*M
while abs(E-Eo)>0.01:
    Eo=E
    E=M+e*math.sin(E)
print("E = ",E)
```

E = 0.6886561865220447

¿Puede el lector adivinar qué hace este algoritmo? Si no lo hace, espero que sepa en qué lenguaje de programación está escrito.

²<https://jupyter.org>

³http://seap-udea.org/MecanicaCeleste_Zuluaga

1.4. Mecánica celeste en Python

Es casi imposible escribir un libro con algoritmos sin comprometerse con un lenguaje de programación específico (especialmente si queremos que los algoritmos funcionen.) En el caso de esta edición del libro, el lenguaje elegido es Python.

Esta siempre será una apuesta arriesgada. Aunque la mecánica celeste y sus algoritmos no pasarán de “moda”, los lenguajes de programación “van y vienen”. Es un hecho (poco reconocido) que cientos de libros científicos acumulan polvo por haber comprometido su contenido con lenguajes de programación que hoy no son tan populares (BASIC o Pascal por ejemplo).

No sabemos si Python y este libro sufrirán a la larga la misma suerte. Pero hay tres hechos que *sugieren* que la popularidad de este lenguaje podría durar más de lo esperado (o al menos esa es mi esperanza).

El primero es que su sintaxis es muy similar a la del “lenguaje natural”. Considere, por ejemplo, el algoritmo presentado antes (que ya lo sabe, está escrito en Python) o el siguiente algoritmo, aún más simple:

```
from math import pi
for n in range(1,5):
    print("pi a la",n,"es",pi**n)
```

```
pi a la 1 es 3.141592653589793
pi a la 2 es 9.869604401089358
pi a la 3 es 31.006276680299816
pi a la 4 es 97.40909103400242
```

Es difícil que estos algoritmos se escriban de manera tan natural en casi cualquier otro lenguaje de programación popular en ciencia (C, FORTRAN o Java) como se pueden escribir en Python. Este hecho, no solo facilita el aprendizaje del lenguaje, sino también la legibilidad de los algoritmos.

El segundo hecho que demuestra el promisorio futuro de Python como lenguaje de la computación científica, es la creciente cantidad paquetes, en todas las disciplinas de la ciencia y la técnica, que se escriben permanentemente en este lenguaje y que están disponibles en [repositorios públicos](#)⁴. Además, herramientas informáticas muy conocidas (bibliotecas de rutinas, bases de datos, sistemas de información, etc.) escritas originalmente en otros lenguajes, han sido ahora traducidas a Python (*pythonizadas* si quieren) con el único propósito de que puedan ser usadas por la creciente comunidad de desarrolladores en este lenguaje.

Python se está convirtiendo, y esta es una conjectura mía, en depositario de décadas de experiencia en ciencia computacional. ¿Cambiará esta tendencia pronto? Lo dudo (o al menos así lo espero, por el bien de este libro).

Una última razón, pero no por ello, menos importante, para elegir Python como el idioma oficial de los algoritmos en este libro es la existencia de una biblioteca gráfica, robusta y bien documentada, escrita para este lenguaje. Me refiero por supuesto a [matplotlib](#)⁵.

Con la excepción de paquetes científicos que incluyen avanzadas facilidades de graficación, tales como Mathematica, Matlab, o IDL (todos ellos sujetos a algún

⁴<https://pypi.org/project/IPy>

⁵<https://matplotlib.org>

tipo de pago), la mayoría de los lenguajes de programación dependen, a veces, de complejas bibliotecas gráficas o programas de terceros para hacer, hasta los más sencillos gráficos.

En Python, hacer un gráfico elemental, es tan simple como escribir:

(Algoritmo 1.1)

```
from matplotlib.pyplot import plot
plot([1,2,3,4],[1,4,9,16]);
```

ver Figura 1.2

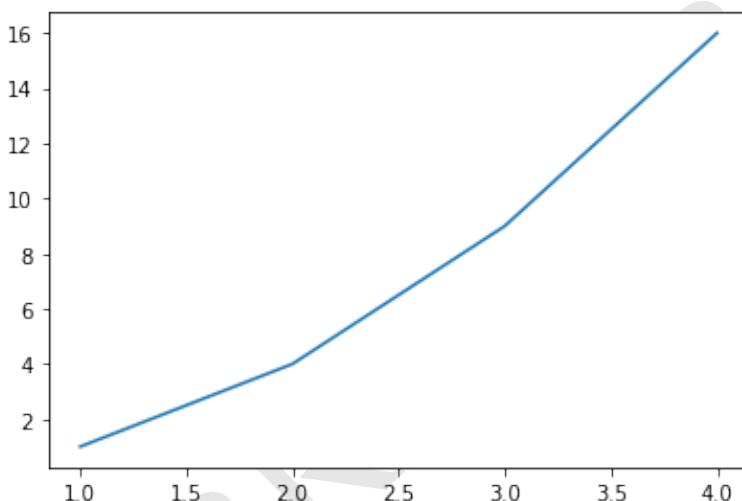


Figura 1.2: Figura correspondiente al código 1.1.

1.5. Mecánica celeste con SPICE

Con el temor de haberlos aburrido ya suficiente con este largo prefacio, no puedo dejar de mencionar aquí, una última herramienta que será protagonista en este libro. Se trata de SPICE, una aplicación desarrollada para la *NASA's Navigation and Ancillary Information Facility (NAIF)*⁶.

SPICE es un sistema de información de uso libre, formado básicamente por una biblioteca de rutinas para realizar cálculos en mecánica celeste y de datos (*kernels*) que permiten, usando esas mismas rutinas, la determinación de la posición y orientación precisa (pasada y futura) de muchos cuerpos del Sistema Solar y de algunos vehículos espaciales lanzados por nuestra especie.

Esta herramienta ha cobrado, en años recientes, una popularidad significativa en la comunidad académica. Sus rutinas y *kernels* están detrás de algunas de los servicios en línea más populares de NASA, tales como el sistema *NASA Horizons*⁷,

⁶<https://naif.jpl.nasa.gov/naif/>

⁷<https://ssd.jpl.nasa.gov/horizons.cgi>

que permite, a través de distintas interfaces, calcular la posición pasada y futura de cuerpos del sistema solar y naves espaciales; o del simulador *NASA's Eyes*⁸ que ofrece vistas en tiempo real de la posición de los cuerpos del sistema solar y de misiones espaciales de la agencia espacial estadounidense.

En este libro usaremos las rutinas y *kernels* de SPICE (a través de la biblioteca *spiceypy*⁹, desarrollada en Python) para ilustrar conceptos, desarrollar ejemplos y resolver problemas que, de otro modo, implicarían un gran esfuerzo algorítmico (el objetivo será no *reinventar la rueda redonda*.)

Al hacerlo, además, el lector, sin importar su nivel, se familiarizará con una herramienta que usan astrónomos e ingenieros aeroespaciales para resolver problemas reales de mecánica celeste. ¡De la teoría a la acción!

De la misma manera como nos preguntamos en el caso de Python, nos formulamos la siguiente pregunta: ¿podría SPICE desaparecer o, mejor, ser reemplazada por un sistema diferente en los próximos años? No podemos asegurarla, pero la cantidad de herramientas que hoy dependen de este sistema de información, hace difícil suponer que podría cambiar radicalmente en el futuro inmediato.

Un último aspecto hace de SPICE una opción muy estable para los propósitos de un libro de texto. La biblioteca de rutinas asociada con el sistema está disponible para un amplio conjunto de lenguajes de programación diferentes a Python. Familiarizarse con las rutinas y *kernels* de SPICE aquí, será suficiente para que pueda usarlo con lenguajes como C/C++, FORTRAN e IDL.

A continuación, y a modo de ilustración, presento un algoritmo, escrito con SPICE, para calcular la distancia de la Tierra al Sol durante el eclipse total de Sol del 29 de mayo de 1919 en el que se obtuvieron las primeras evidencias empíricas de la relatividad general y con el que abrimos este prefacio. Naturalmente, este algoritmo es mucho más complejo (y menos natural) que los que escribí antes, pero ilustra el poder de esta herramienta para obtener resultados interesantes con muy poco esfuerzo computacional.

```
import spiceypy as spy
spy.furnsh('pymcel/data/naif0012.tls')
spy.furnsh('pymcel/data/de430.bsp')
et=spy.str2et("05/29/1919 09:08:00 UTC-3")
sol,tluz=spy.spkgeo(10,et,"J2000",0)
tierra,tluz=spy.spkgeo(399,et,"J2000",0)
distancia=spy.vnrm(tierra-sol)
```

Distancia Tierra-Sol durante el eclipse de 1919: 151649284 km

1.6. ¿Qué hace distinto a este libro?: un decálogo

Para resumir, enumero a continuación las 10 cosas que hacen de este un libro distinto de los muchos que se han escrito en casi 400 años de historia de la mecánica celeste. Este decálogo, como la mayor parte de este prefacio, es, además de una descripción abreviada de las características únicas del libro, una lista de razones que justifican la existencia de un libro más en el “basto océano” de literatura en la

⁸<https://eyes.nasa.gov/>

⁹<https://spiceypy.readthedocs.io/en/master>

materia.

1. ¿Ya les mencione que es un libro para estudiantes de pregrado? Para entender su contenido no es necesario haber visto previamente un curso de mecánica analítica o matemáticas especiales. Solo se necesita una fundamentación mínima en geometría, cálculo y física.
2. El libro ha sido escrito, en la medida de las posibilidades, para ser autocontenido. Todo lo que un lector necesita saber de los fundamentos matemáticos (geometría, cálculo vectorial, ecuaciones diferenciales), los fundamentos físicos (mecánica newtoniana), astronómicos o de computación, ha sido incluído en los capítulos o en apéndices. Esto hace del libro, un texto que puede ser leído o estudiado por personas ajenas a la disciplina, incluso por aficionados.
3. El libro utiliza, como la mayoría de los textos en el área, el *formalismo geométrico y vectorial* de la mecánica para presentar y desarrollar los problemas centrales de la mecánica celeste. Pero también introduce el *formalismo analítico* (mecánica analítica o mecánica clásica) y lo aplica a la mecánica celeste. Es por tanto un libro de mecánica celeste y al mismo tiempo uno de mecánica analítica.
4. El libro no profundiza en todos los temas de la mecánica celeste o la mecánica analítica como lo hacen textos más avanzados. Pero, para un estudiante de pregrado, esta podría ser su primera lectura antes de abordar esos textos.
5. El texto hace un énfasis especial en los algoritmos de la mecánica celeste, que implementa usando códigos en Python, gráficas en matplotlib y, en ocasiones, usando algunas de las rutinas y datos del sistema SPICE de NASA.
6. Todo el libro está disponible como *notebooks* de Jupyter que pueden ser modificados por el lector o ejecutados durante una clase (¡es un libro para enseñar!) Los *notebooks* contienen gráficos interactivos y animaciones que ilustran conceptos que pueden resultar difíciles.
7. El libro no requiere conocimientos previos de programación en Python (aunque tenerlos puede ser muy útil.) En realidad, el libro podría utilizarse como una manera de aprender el lenguaje en contexto, algo que es difícil de conseguir en libros dedicados específicamente a la enseñanza de la programación.
8. Los temas no se desarrollan en el orden en el que aparecieron en la historia: problema de los dos cuerpos → teoría de perturbaciones → problema de los tres cuerpos → mecánica celeste relativística, etc. He preferido presentarlos como me hubiera gustado conocerlos desde el principio, siguiendo un orden más lógico y un poco atemporal. Esta es la manera en la que, creo, un viajero en el tiempo, que retrocediera a 1700, se lo explicaría a un sorprendido Newton.
9. A pesar de lo anterior, la historia es importante en el libro. A través de los capítulos y en recuadros especiales he incluido anécdotas y biografías que permitirán hacerse a una idea del contexto en el que surgieron las principales ideas de la mecánica celeste y la mecánica analítica y de los personajes, hombres y mujeres, que las concibieron.

10. Por muchas de las razones descritas arriba podría decirse que este es un libro “moderno” de mecánica celeste. uno que en lugar de ocuparse de llenar cientos de páginas con sesudos y rigurosos desarrollos matemáticos, le apunta directamente a dar vida a esas ideas y a ofrecer las herramientas prácticas para su aplicación.

El autor

Febrero 19 de 2020

BORRADOR

BORRADOR

Capítulo 2

Agradecimientos

Así como no hay *vacas esféricas en el vacío*, tampoco existen los *autores cilíndricos que escriben aislados*. La elaboración de este libro ha sido determinada y afectada por una multitud de factores y personas a los que no puedo dejar de mencionar.

En primer lugar, quiero agradecer a todos **los estudiantes del pregrado de astronomía** que tomaron el curso de Mecánica Celeste durante los años en los que elaboré las notas que sirvieron de base para este libro. Agradezco su paciencia y sus preguntas en clase que me ayudaron a enriquecer el texto, concentrarme en puntos difíciles y escoger mejor los temas más interesantes. También fue de gran valor los errores que me ayudaron a detectar en las primeras versiones de las *libretas* de Jupyter que son la base del texto. Entre ellos, quiero resaltar a **Andrés Gómez**, quien fue mas lejos aún al revisar críticamente el contenido de algunas *libretas* como lo haría un colega o un editor. Adicionalmente, sus impecables soluciones de los problemas inspiraron una parte del material que he incluido en esta edición del libro.

Una buena parte de la primera versión de las notas del curso fue **transcrita a LaTeX** por el hoy Astrónomo **Bayron Portilla** (en ese entonces mi tallerista del curso). En un momento dado, nos propusimos, incluso, escribir juntos el libro. Sin embargo, nuestras ocupaciones fueron dilatando el proyecto hasta que decidí emprender este proyecto en solitario y partiendo de las *libreta* de Jupyter que laboree posteriormente. Aún así, reconozco y agradezco el esfuerzo que hizo Bayron en esas primeras notas, en las que además exploramos las mejores maneras de organizar los temas del curso. Tal vez en el futuro retome con él algunas de esas notas iniciales con miras a un texto avanzado en la materia donde podamos, por ejemplo, abordar los tópicos que se quedaron por fuera de este libro. En el mismo sentido debo también agradecer al Doctor **Andrés Pérez**, ahora un exitoso astrónomo, quién en sus años como estudiante se ofreció también a transcribir en limpio muchas de mis notas de tablero. El documento resultante que nunca logramos editar apropiadamente todavía lo uso como material de consulta en mis clases. Gracias Andrés por tu dedicación durante esos meses a poner en limpio el sucio de mis tableros.

Estoy también en deuda con **Miguel Vásquez**, el mejor de los talleristas que he

tenido en mi carrera como profesor (ahora es un Astrónomo). Miguel realizó una juiciosa tarea de búsqueda de problemas, transcripción de los mismos al formato de Jupyter y, más importante, preparación en el mismo formato de su solución. Todo, mientras mantenía una estrecha relación con los estudiantes (mucho mejor que la mía como profesor, debo admitir) que le permitió entender sus necesidades, evaluar y ajustar el grado de dificultad de los problemas y recoger correcciones y sugerencias a las notas. **Muchos problemas** incluidos en este libro se basan en el trabajo original de Miguel al que debo hacer un sentido reconocimiento aquí.

Agradezco también a los maestros que me motivaron a estudiar física teórica durante el pregrado y el posgrado, muy a pesar de mi monocromática pasión por la astronomía. Esto me permitió entender, apreciar y abordar mejor los aspectos teóricos de la mecánica celeste. En particular, mis agradecimientos van para los profesores **Lorenzo de la Torre, Alonso Sepúlveda, Jorge Mahecha, William Ponce y Boris Rodríguez**. A través de sus propios manuscritos, conocí (y espero haber aprendido con el ejemplo) el “arte” de escribir libros de texto. El estilo, profundidad y cuidado de sus **notas de clase, libros publicados e inéditos**, han sido imitados sistemáticamente en este libro.

Agradezco a la **Universidad de Antioquia** y en particular a las autoridades del **Instituto de Física y la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales**, por otorgarme el beneficio de un año sabático, durante el cuál pude, entre otras cosas maravillosas, escribir la primera versión completa de este libro. Mi reconocimiento y agradecimiento además para los **profesores del pregrado de Astronomía**, en especial a mi *parcero* Pablo Cuartas, que recibió mi carga académica y de investigación durante ese año en el que estuve escribiendo.

Finalmente, pero no menos importante, quiero agradecer a mi familia, **Olga y Sofía**. A ellas les toco la peor parte; es decir, soportarme un año entero en la casa, escribiendo en pijamas (o mejor hablando solo, por yo no escribo sino que hablo con el computador) y prestándoles, a veces, menos atención de la que les presto incluso en situaciones normales. Este libro esta dedicado a ellas.

Capítulo 3

Introducción

3.1. ¿Cómo se organiza este libro?

Como mencionamos en la [Sección 1.6](#), una de las cosas hace a este libro diferente de otros textos de mecánica celeste, es la manera y el orden particular en el que se desarrollan los temas. El libro esta dividido en tres grandes partes:

- Los fundamentos matemáticos y físicos.
- Mecánica celeste usando vectores y geometría (formalismo vectorial de la mecánica).
- Mecánica analítica (formalismo lagrangiano y hamiltoniano) y su aplicación en mecánica celeste.

En los siguiente párrafos encontrarán una síntesis *narrada* del libro; algo así como una *tabla de contenido comentada* que le permitirá al lector, no solo orientarse en el texto, sino también entender la manera como se encadenan cada una de sus partes.

Y es que todo libro debería contar una *historia*. En los textos académicos, lamentablemente, esa “vocación” narrativa parece perderse en medio de figuras, teoremas y algoritmos. Esta sección puede ser entonces entendida, como un esfuerzo para esbozar la *historia* que se hila a través de sus capítulos.

- **Parte 1: Fundamentos matemáticos y físicos.** Antes de comenzar, respasaremos algunos temas de matemáticas y de física necesarios para estudiar mecánica celeste. Si bien el lector debería estar familiarizado con la mayoría de estos temas, he decidido incluir este capítulo no solo para hacer al texto autocontenido, sino también con el propósito de compilar resultados útiles, definiciones y algoritmos, en el formato y notación del texto, que se usarán en capítulos posteriores.

- **Capítulo 4.** Algunos consideran a la mecánica celeste un área de las matemáticas aplicadas. En ella confluyen técnicas matemáticas de todos los orígenes. Por esta misma razón para comprender incluso los aspectos

más básicos de la teoría es necesario contar con una sólida fundamentación matemática. Por razones de espacio no podemos cubrir todos los temas relevantes en esta sección, pero nos hemos concentrado en dos de particular importancia en todo el texto:

- ???: El cálculo infinitesimal fue *descubierto* por Isaac Newton a finales de los 1600 (y más tarde descubierto independientemente también por Gottfried Leibniz), inspirado, en parte en problemas mecánicos. Estos métodos matemáticos permitieron a Newton, sus contemporáneos y suscesores resolver los complicados problemas de la mecánica celeste que inauguraron la disciplina. Por la misma razón es indispensable que el lector repase las cantidades y resultados centrales de este método analítico, que es justamente el tema de esta sección. Al hacerlo aprovecharemos además para recoger algunas definiciones y resultados importantes de la geometría y el cálculo de vectores, los elementos básicos de la teoría de ecuaciones diferenciales y del más *exótico* cálculo de variaciones. Ninguno de los apartes de este capítulo cumple funciones *decorativas* o es completamente prescindible. A pesar de parecer una sección ajeno al libro, un material que debería dejarse solo a los autores expertos en el tema, en realidad todos los resultados expuestos aquí serán usados en el resto de capítulos.
- ???: En esta sección nos concentraremos en repasar (o presentar) las propiedades de las figuras cónicas, su definición y descripción geométrica más general, así como su descripción algebraica. Las cónicas juegan un papel central en la mecánica celeste y estar familiarizado con ellas, permitirá resolver más fácilmente problemas físicos relativamente complejos. Estudiaremos esta familia particular de curvas, tanto en el plano, como en el espacio de tres dimensiones. Con este propósito, introduciremos aquí el tema de las rotaciones en dos y tres dimensiones (ángulos de Euler) que son usados con frecuencia en la mecánica celeste pero también en la mecánica analítica.
- **Capítulo 5.** Es casi imposible presentar la mecánica celeste y menos aún la mecánica analítica, sin repasar primero las definiciones, postulados y proposiciones de la mecánica básica, o mecánica newtoniana, como se la llama comúnmente. Este capítulo está justamente dedicado a presentar el que llamaremos **formalismo vectorial o geométrico** de la mecánica, desarrollado a partir de las ideas mismas de Newton pero enriquecidas significativamente por sus sucesores en los siguientes dos siglos. Si bien, de nuevo, este podría parecer un tema *elemental* para tratar en otro libro, la manera en la que se presenta aquí es particularmente única. He tratado de formular las ideas de siempre en un orden más moderno y en algunos casos poco ortodoxo. No pretendo con ello producir *ninguna revolución*, pero al hacerlo, la presentación de los temas centrales del libro se hace más natural. El capítulo se concentra en la mecánica de partículas y sistemas de partículas, sin ocuparse de otros temas interesantes de la mecánica, la dinámica de cuerpos rígidos o de fluídos, que no serán

aplicados en el resto del texto.

- **Parte 2: El formalismo vectorial de la mecánica celeste.** Como veremos a lo largo del libro, la mecánica puede ser presentada usando dos enfoques matemáticas o *formalismos* diferentes. En esta parte del curso nos concentraremos en la formulación geométrica o vectorial de la mecánica celeste, la más popular y la que uso originalmente Newton en sus *Principia* y que fue desarrollada posteriormente por sus sucesores.

- **Capítulo 6.** A diferencia de la mayoría de los textos en mecánica celeste, en este libro comenzamos por abordar y estudiar con algún detalle, el más general de los problemas de esta disciplina: el problema de los N cuerpos. En este problema, el reto consiste en predecir la posición y velocidad de muchos cuerpos que interactúan gravitacionalmente. Si bien el problema de los N cuerpos fue posiblemente el último de los grandes problemas de mecánica celeste en ser formulado y abordado rigurosamente en la historia, su presentación temprana en este libro, permitirá introducir resultados y métodos que serán de utilidad para el resto del texto. De particular interés será la introducción en este capítulo de los algoritmos para resolver numéricamente el problema. Estos algoritmos y algunas herramientas computacionales relacionadas, serán muy importante en el resto del texto, para comparar y validar resultados de modelos analíticos. Se presentará también aquí el concepto de integrales de movimiento o *cuadraturas*, uno de los métodos usados clásicamente para extraer información sobre un sistema dinámico sin resolverlo completamente. Este método será usado regularmente en los demás capítulos.
- **??.** Una de las idealizaciones más conocidas de la mecánica celeste es aquella que consiste en suponer que cuando dos cuerpos astronómicos interactúan gravitacionalmente, el efecto del resto del Universo es completamente despreciable. Naturalmente, no existe ningún sistema astronómico real que cumpla cabalmente estas condiciones. Todos los sistemas del universo, en sentido estricto, son sistemas de N cuerpos. En este capítulo mostraremos, a través de experimentos numéricos y ejemplos astronómicos reales, que la mayoría de los sistemas astronómicos se pueden analizar dinámicamente como *sistemas de N cuerpos jerárquicos*, es decir, sistemas en los que las partículas se agrupan por pares (pares de partículas, pares de pares, etc.) que se perturban mutuamente. El problema de los dos cuerpos no es, sin embargo, el destino final de la mecánica celeste, sino su punto de partida. Es un resultado útil para estudiar sistemas mucho más complejos. Resolveremos en este capítulo el problema de los dos cuerpos usando el método de las cuadraturas (primeras integrales de movimiento) introducido en el capítulo anterior. Demostraremos que el movimiento relativo de dos cuerpos se realiza sobre una cónica y desarrollaremos en detalle las relaciones entre las propiedades geométricas de esa cónica y las propiedades dinámicas del sistema. Resolveremos también, usando métodos geométricos primero y después métodos del cálculo, el denominado problema de los

dos cuerpos en el tiempo, que conducirá a la famosa ecuación de Kepler.

- **Capítulo 8.** A pesar del poder que la teoría desarrollada en el capítulo anterior tiene para describir el movimiento de muchos sistemas astronómicos, existen situaciones que escapan a una descripción *kepleriana* del movimiento orbital (incluso, una que incluye perturbaciones). El caso de la Luna, el de algunos cometas perturbados por Júpiter y el de vehículos espaciales modernos, son especialmente significativos. En este capítulo abordaremos, inicialmente, el problema general de los tres cuerpos, es decir, aquel en el que la dinámica no es jerárquica. A diferencia del problema de los dos cuerpos, no se conoce una solución general en términos de funciones analíticas al problema de los tres cuerpos. Una versión restringida de este problema, a saber el *problema circular restringido de tres cuerpos* (CRTBP por su sigla en inglés), tiene propiedades teóricas que han resultado de interés en la descripción de sistemas astronómicos reales. Estudiaremos aquí en detalle el CRTBP, su descripción dinámica y cinemática, tanto en sistemas inerciales como no inerciales. Introduciremos algoritmos para la solución numérica del problema en el sistema rotante. Encontraremos su constante de movimiento, la *constante de Jacobi* y una aproximación astronómica en términos de elementos orbitales, el *parámetro de Tisserand*. Deduciremos las propiedades y visualizaremos las denominadas *regiones de exclusión* y *curvas de cero velocidad* (conceptos interesantes que permiten, si no predecir dónde estarán los cuerpos, al menos, donde no estarán). Finalmente se deducirán las propiedades de los *puntos de equilibrio de Lagrange* y algunas aplicaciones astronómicas y en mecánica orbital del problema.

- **Parte 3: El formalismo analítico de la mecánica.** En esta parte del libro, introduciremos el *formalismo analítico de la mecánica* y su aplicación en la solución de problemas de mecánica celeste. El formalismo analítico tiene una importancia central en la física que trasciende a la mecánica celeste (se usa por ejemplo para estudiar la dinámica de cuerpos rígidos y sistemas oscilantes, el caos en sistemas dinámicos, la mecánica relativista, el electromagnetismo, la teoría de campos clásica y la mecánica cuántica). Si bien pocas aplicaciones del formalismo, distintas a la mecánica celeste, se desarrollara en este texto (como si sucede en algunos textos avanzados de mecánica clásica) los fundamentos teóricos presentados en esta parte le permitiran al lector abordar el estudio de esas otras disciplinas en textos específicos de mecánica analítico o en textos más avanzados.

- **Capítulo 9.** En este capítulo se introducen los principios y teoremas centrales del formalismo analítico de la mecánica, en particular los principios de Alambert-Lagrange y de Hamilton. Haremos aquí, un especial énfasis en las motivaciones teóricas que llevaron a matemáticos y físicos de los 1700 a introducir este formalismo (un tema en el que los textos más avanzados de mecánica clásica, apenas si consideran.) Se introducirá aquí la función lagrangiana, las ecuaciones de Lagrange y, a través de la aplicación del cálculo variacional, se deducirán las ecuaciones generales de Euler-Lagrange (que tienen una aplicación amplia en muchas

áreas de la física). Como un elemento novedoso se presentarán en este capítulo algunos algoritmos aplicados al formalismo lagrangiano, y en particular a la comprensión mejor del principio de Hamilton y los métodos del cálculo variacional. Con los elementos básicos del formalismo lagrangiano a la mano, procederemos a aplicarlo en la solución de problemas concretos en mecánica celeste. Para ello presentaremos, primero, resultados importantes sobre la relación entre las simetrías de la función lagrangiana y las cantidades conservadas en el movimiento (teorema de Noether). A partir de allí, procederemos de forma similar a como lo hicimos con el formalismo vectorial, a resolver el problema general de los N cuerpos y el de los dos cuerpos. Deduciremos el lagrangiano de los N cuerpos y de sus simetrías obtendremos las cantidades conservadas en el sistema. Pero ¿de qué sirve deducir los mismos resultados que ya habíamos visto en el capítulo correspondiente de la segunda parte?. Usaremos lo que sabemos de mecánica celeste para ilustrar el poder del formalismo lagrangiano frente al formalismo vectorial. Posteriormente, abordaremos el problema de los dos cuerpos usando el formalismo lagrangiano. En este caso, a diferencia del problema de los N cuerpos, tendremos una novedad. En lugar de restringirnos al caso de la gravitación Newtoniana, estudiaremos aquí el problema más general de sistemas de dos cuerpos sometidos a fuerzas centrales con un potencial generalizado. Los resultados obtenidos aquí, tendrán un rango más amplio de aplicación. Podrán por ejemplo usarse para estudiar la física de sólidos, moléculas y átomos, pero también la mecánica celeste postnewtoniana. Estudiaremos, en este contexto, el problema de fuerzas centrales reducido a una dimensión, el potencial efectivo (y las correspondientes zonas de exclusión). Para el caso del potencial newtoniano deduciremos la denominada ecuación de la forma orbital y resolveremos el problema de los dos cuerpos a partir de ella. Para el caso de un potencial general, pero no muy distinto del potencial Newtoniano, estudiaremos el denominado *avance del perihelio* uno de los resultados teóricos de la mecánica celeste que a la larga serían de la mayor importancia histórica al ofrecer las primeras evidencias de la validez de la teoría general de la relatividad.

- **Capítulo 10.** En este capítulo abordamos el más general (y poderoso) formalismo analítico de la mecánica: el formalismo Hamiltoniano. Despues de discutir las motivación para la introducción de este formalismo (motivaciones de naturaleza principalmente geométrica), deduciremos de forma heurística las ecuaciones canónicas (de primer orden) de Hamilton; introduciremos la función Hamiltoniana y demostraremos su equivalencia con las ecuaciones (de segundo orden) de Euler-Lagrange. Ilustraremos el poder del formalismo y la descripción de los sistemas en el denominado *espacio de fase*; para ello nos valdremos inicialmente de sistemas dinámicos simples (péndulos y bloques), como hicimos en el primer capítulo de esta parte. Posteriormente abordaremos (sin el detalle en el que lo hicimos en el caso del formalismo Lagrangiano y por las obvias analogías entre los dos formalismos) el tema de las simetrías y las cantidades conservadas, e introduciremos los útiles *corchetes de Poisson*,

como herramienta matemática para estudiar dichas simetrías. Escribiremos los hamiltonianos del problema general de los N cuerpos, el del problema de los dos cuerpos y el del problema circular restringido de los tres cuerpos, y redescubriremos, usando los elementos de este nuevo formalismo, las propiedades ya conocidas de estos sistemas. Una de las aplicaciones más poderosas del formalismo Hamiltoniano, se consigue al aprovechar las simetrías de los sistemas gravitacionales, para, a través de transformaciones de *coordenadas* en el espacio de fase, escribir formas simplificadas de los Hamiltonianos. Estas formas simplificadas, además, permiten aplicar de forma más directa la teoría de perturbaciones y así estudiar sistemas muy complejos (un tema que no está incluido en este libro.) En este capítulo introduciremos, primero, el tema de las transformaciones canónicas, que son transformaciones de coordenadas en el espacio de fase que mantienen la *estructura hamiltoniana* de los sistemas (es decir, que hacen que los sistemas sigan siendo descritos con las ecuaciones canónicas). Nos concentraremos, especialmente en el formalismo de la función generatriz de las transformaciones canónicas. A continuación, aplicando la teoría de transformaciones canónicas presentaremos el método de Hamilton-Jacobi que permite, entre otras cosas, encontrar sistemas de coordenadas que simplifican significativamente la descripción de ciertos sistemas físicos. En particular utilizaremos este formalismo para deducir, en el problema de los dos cuerpos, el Hamiltoniano del sistema en términos de elementos orbitales; en particular, en términos de funciones específicas de esos elementos orbitales, que hacen lo más simple posible el hamiltoniano del sistema. El resultado más importante de este capítulo será la deducción de las denominadas *variables de Dalaunay* que son de gran utilidad y poder en la mecánica celeste moderna y posiblemente el punto de partida de algunos textos de mecánica celeste avanzados.

Todos los capítulos hasta aquí contarán con un conjunto completo de preguntas, ejercicios y problemas, que permitirán al lector poner a prueba los conocimientos adquiridos y las habilidades desarrolladas, pero también, descubrir como estas ideas, métodos y herramientas, se aplican en otras situaciones específicas.

3.2. ¿Cómo usar este libro?

Este libro puede ser utilizado de tres formas diferentes:

1. Como un texto para el *autoaprendizaje* de la mecánica celeste y la mecánica analítica. Estudiantes y profesionales de muchas disciplinas, se pueden valer de él para tener su primer acercamiento a estas disciplinas.
2. Como el texto guía de un primer curso de mecánica celeste y de mecánica analítica. El texto es una fuente de lecciones y problemas útiles para organizar un curso de pregrado.
3. Como material de referencia para estudiantes y profesionales. Muchas fórmulas, algoritmos, e incluso anécdotas e historias interesantes, podrían resultar útiles para quiénes ya tienen una formación en el área.

Como **texto para el autoaprendizaje**, recomiendo **leer el texto en su totalidad** incluyendo la primera parte de Fundamentación matemática y física, en la que se encuentran algunos elementos teóricos requeridos para el resto del libro.

Para quiénes tengan una formación avanzada en física, astronomía o ingeniería, es posible que una buena fracción de los temas de esa primera parte resulten sencillos y puedan obviarse. Sin embargo, aunque los tópicos tratados allí parezcan conocidos (al menos nominalmente), su tratamiento puede resultar novedoso. Si este es su caso, no deje de echarle una mirada a esos primeros capítulos. En particular recomiendo revisar, como mínimo, las secciones dedicadas a la solución numérica de ecuaciones diferenciales, incluyendo las ecuaciones de movimiento en mecánica newtoniana, los rudimentos de cálculo variacional y la dinámica en sistemas rotantes, donde podrían encontrarse las diferencias más significativas respecto a los textos canónicos de matemáticas y física, y donde además se introducen herramientas algorítmicas que serán de uso muy corriente en el resto del libro.

El uso ideal de este libro es como **texto guía** de un primer curso de mecánica celeste y mecánica analítica. El libro fue escrito a partir de la experiencia de más de 5 años ofreciendo el curso en el pregrado de astronomía de la Universidad de Antioquia (en Medellín, Colombia). Por la misma razón, la extensión y organización particular del texto, se adapta de forma *precisa* a las condiciones propias de un curso universitario de un semestre de duración (cuatro meses efectivos de lecciones.) El curso se ha ofrecido exitosamente a estudiantes que han aprobado los cursos básicos de física (hasta el tema de oscilaciones y ondas) y de cálculo (incluyendo cálculo vectorial y ecuaciones diferenciales.)

Todos los capítulos del libro han sido dictados dentro del plazo del curso. Sin embargo, dependiendo del nivel académico de los estudiantes y de su independencia intelectual, el curso puede dictarse sin incluir todos los temas de la primera parte.

Por mi experiencia dictando el curso, el repaso de los fundamentos puede resultar extenso (como mínimo toma un mes que es justamente el período en el que los estudiantes tienen una motivación y disposición mayor, además de menos distracciones de otros cursos.) Sugeriría, entonces, que de sacrificarse algunos temas de esa parte, se asigne la lectura independiente a los estudiantes de los temas mejor conocidos y se evalúe a través de la lista de problemas incluidos al final de los capítulos de esa parte.

Como mencioné en la [Sección 1.3](#), y se detallará abajo, el libro fue escrito usando *libretas de Jupyter*, una por cada clase (a lo sumo se pueden dictar dos clases con cada libreta). Es decir, el número de *libretas* y su organización puede ofrecer una idea del programa detallado de actividades del curso o del plan de lecturas.

3.3. Mecánica celeste en *libretas*

El libro ha sido concebido, escrito y compilado enteramente usando *libretas* de *Jupyter*. Las libretas, que están disponibles en la versión electrónica del texto, son archivos en un formato especial (no son programa de Python, ni páginas web) que pueden ser visualizadas y ejecutadas usando un navegador de Internet.

El uso de las libretas no es indispensable para entender el contenido del libro, pero puede ofrecer una experiencia interactiva muy enriquecedora y a veces acelerar el proceso de aprendizaje. El uso de las libretas en clase puede, además, hacer

más dinámica y amena la interacción entre el profesor y los estudiantes.

Para hacer uso de las libretas se debe contar con un **computador de escritorio** que use cualquier sistema operativo (Windows, Linux o MacOS). Por la misma razón, en caso de usarla, recomiendo que el curso se desarrolle en una sala de computo. Para ejecutar las libretas es necesario instalar primero el interprete y la biblioteca base del lenguaje Python, un conjunto específico de paquetes y el sistema Jupyter, además de varias de sus extensiones (los detalles se presentan en la siguiente sección.)

La **versión en línea**¹⁰ de este libro (páginas web), puede ser también una alternativa a las libretas de Jupyter. Este formato tiene la ventaja que solo requiere un dispositivo con conexión a Internet (de escritorio o móvil) y puede manipularse en cualquier contexto. Aunque la versión web carece de casi todas las características interactivas de las libretas de Jupyter, en ella encontrarán, además de todos los algoritmos y gráficos, animaciones y otros elementos de *hipertexto*.

3.3.1. Instalación de las libretas

Para aquellos que deseen aprovechar las libretas de Jupyter como medio didáctico, se ofrece a continuación una guía básica de cómo preparar un computador para ejecutarlas. Instrucciones adicionales pueden encontrarse en la versión en línea del libro.

1. **Instalación del lenguaje Python y las bibliotecas básicas del lenguaje.** El primer requisito para utilizar las libretas es instalar el interprete y las bibliotecas del sistema del lenguaje Python. Existen diversas maneras para hacerlo en cada sistema operativo y abundantes instrucciones en Internet. Mi recomendación es utilizar el sistema [Anaconda](#)¹¹ que ofrece, en una plataforma integrada, los archivos del lenguaje Python, una amplia diversidad de paquetes científicos, el sistema Jupyter y todas las herramientas necesarias para la instalación de otros paquetes.
2. **Descargar las libretas.** Una vez haya instalado Python y Jupyter, puede descargar las libretas del libro los archivos adicionales requeridos por ellas del sitio web del libro. Para ello siga las instrucciones provistas allí.
3. **Ejecución de pruebas.** Para verificar si las libretas funcionan correctamente, una vez descargadas, busque y abra la libreta Pruebas.ipynb. Una vez abierta ejecute todas sus celdas (Cell / Run all). Si la ejecución se realiza completa, en la última celda aparecerá un reporte completo con los resultados de la prueba. Si alguna de las prueba individuales falla, es posible que sea necesario instalar paquetes, datos adicionales y otras dependencias.
4. **Instalación de dependencias.** Para instalar todas las dependencias del libro abra la libreta Instalacion.ipynb y siga las instrucciones descritas allí.

¹⁰http://seap-udea.org/MecanicaCeleste_Zuluaga

¹¹<https://www.anaconda.com>

3.4. Idioma y Notación

3.4.1. Palabras extranjeras y guía de pronunciación

El libro está escrito en español. Sin embargo, y como sucede con todas las ciencias, habrán muchos apartes en los que es necesario introducir términos técnicos y acrónimos procedentes de la lengua inglesa. En estos casos las palabras y acrónimos se presentarán en itálica. Así por ejemplo, al referirnos al problema matemático de resolver la ecuación de movimiento de una partícula hablaremos del *initial value problem* o su acrónimo *IVP*, en contraposición al *boundary condition problem*. Por otro lado en el Capítulo 8 estudiaremos el *CRTBP* o *circular restricted three body problem*.

Muchos de los científicos (hombres y mujeres) que han contribuído con el desarrollo de la mecánica celeste en sus cuatro siglos de historia, tienen nombres y apellidos no hispanos. Su correcta pronunciación, especialmente en el caso de autores franceses o de origen germano, es difícil para quienes no hablamos las lenguas de esos pueblos.

Un caso notable, por ejemplo, es el nombre de la matemática alemana *Emmy Noether*. En castellano la mayoría pronunciaríamos “emi noeter” o “emmi neder” (siguiendo la tradición inglesa con la que estamos más familiarizados.) Como una primera guía para la correcta pronunciación de estos nombres, a lo largo del libro presentaremos “transliteraciones” al castellano, indicando, entre comillas las letras y palabras más cercanas que un hispanohablante podría usar. Así por ejemplo “niuton” será la transliteración fonética de Newton y la pronunciación “correcta” (en alemán) del nombre de Emmy Noether, será “emmi noutar”.

Para hacernos a una idea fonética más precisa nos apoyaremos a lo largo del libro de la increíble colección compilada en este sitio web¹² que ofrece pronunciaciones en línea, en decenas de idiomas, de miles de nombres, palabras y frases. Allí encontrará por ejemplo la pronunciación correcta, en su idioma original del nombre *Emmy Noether*¹³.

¿Es todo esto indispensable para entender la mecánica celeste o la mecánica analítica?. Ciertamente no. Pero no solo de teoría vivimos los humanos. La comunicación y socialización es central al proyecto científico y es bueno entender y hacerse entender especialmente en contextos internacionales.

3.4.2. Siglos y décadas

La historia de la mecánica celeste y analítica, así como la historia de las áreas de la física y las matemáticas con las que se relaciona, es fascinante. En el libro, como detallamos en la próxima sección, incluiremos abundantes referencias históricas sobre los personajes y los momentos claves en el desarrollo de las ideas de la mecánica celeste.

Para referirnos a los siglos, sin embargo, nos desviaremos de las reglas convencionales del español. Según esas reglas al período comprendido, por ejemplo, entre 1701 y 1800, se lo llama el siglo XVIII. Para este autor, la notación usando números romanos, si bien ampliamente aceptada, es confusa y exige realizar operaciones

¹²<http://forvo.com>

¹³<https://es.forvo.com/search/Emmy%20Noether/de/>

mentales innecesarias (número romano → número indoarabigo → restar uno → multiplicar por 100).

En los sucesivos para referirnos al período comprendido entre 1700 y 1799 (comenzando en el año cero y no en el año uno como dicta la regla) hablaremos de **los 1700**. Así mismo el siglo XX será **los 1900** y así sucesivamente.

Dado que en las reglas establecidas del español, los 1900 hacen referencia en realidad a la década entre 1901 y 1910, cuando queramos referirnos a un período de diez años siempre usaremos explícitamente la palabra **década**: década de 1680, decade de 1960, etc.

No pretendó, con este acto de rebeldía *idiomática*, cambiar el castellano. Pero sí, al menos en lo que respecta a este libro, facilitar la lectura de los períodos históricos.

3.4.3. Notación matemática

Todos los libros de ciencias físicas o matemáticas se “casan” con una notación específica. La elección de la notación, no es sin embargo una tarea sencilla, en tanto son muy comunes los casos de textos que en virtud de su notación se hacen prácticamente ilegibles aunque traten los mismos temas o problemas de otros que usan notaciones más comunes.

Pensando justamente en esto, he tomado la decisión de utilizar, en la medida de las posibilidades, la misma notación de algunos textos clásicos de mecánica celeste, que se diferencia, a veces significativamente, de la que utilizan libros de matemáticas e incluso de física, con los que el lector puede estar familiarizado.

El lector encontrará los detalles específicos de la notación usada en el libro en la [Sección 4.1](#).

3.5. Elementos no textuales

Para facilitar la lectura del libro y hacer de la experiencia de leerlo algo más agradable e incluso excitante, el texto contiene una serie de elementos gráficos con los que debemos familiarizarnos.

3.5.1. Cajas de texto

Mucha información importante texto se presenta en *cajas* independientes al texto principal y cuyas características gráficas resaltan del resto del documento. En particular existen 5 tipos de cajas:

- **Resumen del capítulo.** Esta caja aparece normalmente al principio de cada capítulo y contiene una breve síntesis del mismo. No deje de leer este resumen para identificar los temas centrales de cada parte del libro. El profesor podría usar la información contenida allí para definir los objetivos específicos de la evaluación.
- **Notas.** A veces es necesario desviarse un momento del hilo del texto para aclarar o ampliar asuntos relacionados con la notación, los paquetes y algoritmos utilizados, o simplemente llamar la atención sobre un asunto importante. A continuación se muestra un ejemplo de una *caja de nota*.



Nota

El lenguaje Markdown. La mayor parte del contenido textual de este libro, ha sido escrito en las celdas de libretas de Jupyter en un lenguaje de descripción de documentos conocido como *Markdown*. Puede explorar la sintaxis del lenguaje, o bien desplegando el contenido de las *celdas* de las libretas, o bien consultando la abundante [documentación en línea^a](#).

^a<https://markdown.es/>

- **Definiciones.** Muchas cantidades físicas y algunos conceptos claves requieren una definición rigurosa. Este es el rol justamente que juegan las *cajas de definición*. A diferencia de las cajas de Resumen y Notas, las cajas de *Definición* están numeradas (como las figuras o las ecuaciones), de modo que sea más fácil referirse a ellas.

Definición 3.1

Mecánica celeste. Llamamos *Mecánica Celeste* a la disciplina científica que aplica las leyes de la mecánica para estudiar el movimiento de cuerpos bajo la acción dominante de la gravedad. Dado que solo en lugares lejanos a la superficie terrestre (normalmente fuera de su atmósfera), la gravedad es la fuerza dominante, la mecánica celeste normalmente describe el movimiento de cuerpos astronómicos (desde partículas pequeñas, hielo o polvo interestelar, hasta planetas y estrellas) y de vehículos espaciales. En este último caso se habla normalmente de *Mecánica orbital*.

- **Teoremas, postulados y leyes.** Como las definiciones, en muchas ocasiones será indispensable separarnos un momento de una explicación para formular más rigurosamente un resultado, normalmente obtenido por razonamiento deductivo en el marco de una teoría (teoremas, lemas, colorarios) o por razonamiento inductivo a partir de la experiencia (leyes y postulados). Para hacerlo usaremos cajas de texto con una numeración independiente de aquella usada para las definiciones. Sin embargo, es importante aclarar que en el caso de los denominados *teoremas* me he abstenido de usar sistemáticamente esta palabra en el encabezado de los respectivos recuadros. En su lugar he decidido imitar a algunos autores clásicos (en particular a Euclides) que usaban sistemáticamente la palabra **proposición** en lugar de teorema para referirse a afirmaciones demostrables. Es decir, en este libro, una *proposición* será un resultado importante que puede estar o no demostrado en el texto. Al hacerlo quiero evitar posar aquí de matemático, una profesión a la que respeto profundamente¹⁴. Aún así, cuando una *proposición* dada corresponda a un teorema bien conocido, usaré la palabra teorema en el título interno

¹⁴Decía el matemático húngaro Paul Eördos (“pol érdos”) que un *matemático es una máquina para convertir café en teoremas*, una frase que aunque parece simplificar la naturaleza de los matemáticos, en realidad demuestra la importancia que tienen los teoremas para esta milenaria profesión.

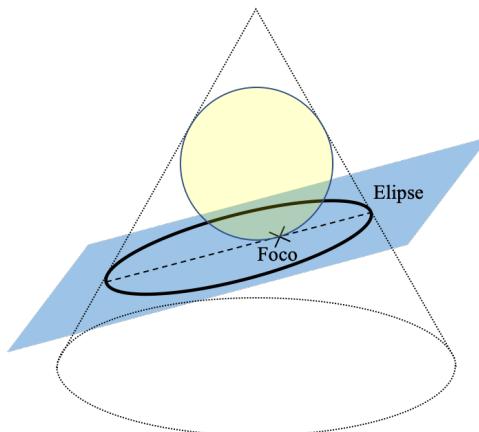


Figura 3.1: Ilustración esquemática del teorema de Danelin.

de la caja. Las dos *proposiciones* mostradas en las cajas a continuación ilustran estos conceptos.

Proposición 3.1

Sistemas de referencia inerciales. Si un sistema de referencia O' se mueve con velocidad constante con respecto a un sistema de referencia inercial O , entonces O' es también un sistema de referencia inercial.

Proposición 3.2

Teorema de Danelin. Dada una esfera tangente a un cono y un plano que corta el cono en un determinado ángulo, el punto de tangencia de la esfera con el plano es uno de los focos de la cónica correspondiente.

- **Un poco de historia.** Finalmente, pero no menos importante, están las anécdotas e historias que contaremos a lo largo de todo el libro. Como se mencionó en el prefacio, la mecánica celeste tiene ya más de 400 años (aproximadamente 100 años más que la mecánica analítica) y cientos de libros y miles de artículos se han escrito en el tema. Es casi imposible hablar de mecánica celeste y analítica, sin mencionar de vez en cuando las historias que rodearon la invención de una técnica, la biografía de alguno de los grandes hombres y mujeres que concibieron las ideas contenidas en el libro o simplemente una anécdota curiosa relacionada con algún tema de interés.

3.5.2. Algoritmos

Como he insistido hasta aquí, una de las novedades más importantes de este libro es el énfasis que he querido dar a los *algoritmos*. Por algoritmo entenderemos

Un poco de historia

¿Kepler o Newton? En el Prefacio daba a entender que la mecánica celeste posiblemente había comenzado con los trabajos pioneros de Johannes Kepler (ver [Figura 3.2](#)). Otros autores van más lejos y apuntan a los astrónomos de la antigüedad y la edad media, especialmente indios, chinos, árabes y griegos, que desarrollaron modelos complejos para la descripción del movimiento de los cuerpos celestes. Los más conservadores apuntan a Sir Isaac Newton, quien después de la publicación de su obra cumbre, los *Principia*, sentó las bases físicas, no solo para la mecánica celeste, sino también, en general, para toda la mecánica.

La razón en este libro para escoger a Kepler, como el *padre* de la disciplina (y en general de la astronomía física) fueron sus contribuciones decisivas y bastante bien conocidas para esclarecer definitivamente la *cinemática* del movimiento planetario. En particular, el descubrimiento (o el enunciado matemático) de sus conocidas *leyes del movimiento planetario* representaron un cambio cualitativo en el desarrollo de la teoría del movimiento planetario e inspiraron en últimas el trabajo de Newton y sus contemporáneos.

Adicionalmente, y esto es aún más importante, Kepler fue uno de los primeros astrónomos modernos (renacentistas europeos) en hacer consideraciones teóricas sobre la causa del movimiento planetario, más allá de ocuparse de su descripción, como lo hicieron la mayoría de los astrónomos de la antigüedad y la edad media. Esto pone a Kepler, entre esos astrónomos, como el primer *astrofísico* de la historia.



Figura 3.2: Retrato de Johannes Kepler, copia de un original de 1610 de pintor desconocido y que se conserva en el monasterio Benedictino de Kremsmünster (Alemania).

aquí pequeños (o no tan pequeños) fragmentos de código (*code snippet* en inglés) que realizan tareas numéricas específicas o son parte de un algoritmo mayor.

He evitado hablar de *programas* o *códigos* para resaltar el hecho de que lo importante en ellos es la lógica de las operaciones y no el lenguaje específico en el que están escritos. A pesar de este esfuerzo por mantener el tema lo más general posible, es virtualmente imposible escribir algoritmos que se puedan ejecutar realmente en las libretas, sin recurrir a ciertas particularidades del lenguaje en el que están descritos, Python.

Existen en general tres tipos de *algoritmos* que encontraremos a lo largo del texto. En primer lugar están los algoritmos más sencillos, aquellos que ejecutan tareas básicas de preparación de datos para algoritmos más complejos. Este es un caso de ellos:

```
a=1
b=-1
c=2
disc=b**2-4*a*c
```

Discriminante = -7.0

Muchos de estos algoritmos simples vienen seguidos del resultado más importante de las operaciones que codifican. En el caso anterior se muestra por ejemplo el valor del discriminante (el valor de la variable disc). El algoritmo (o código) para producir ese resultado:

```
print(f"Discriminante = {disc:.1f}")
```

Pero este algoritmo (y la celda correspondiente) no se muestra en el libro impreso para evitar la proliferación de código irrelevante.

Los algoritmos más complejos pueden, como las ecuaciones, estar numerados:

(Algoritmo 3.1)

```
def calcula_discriminante(a,b,c):
    disc=b**2-4*a*c
    return disc
```

En este caso, el algoritmo contiene una rutina o función, que podría ser usada más adelante, incluso en un capítulo posterior. Todas las rutinas como estas, hacen parte de un paquete incluído con las libretas llamado `pymcel`. Para usar la rutina en el Alg. (3.1) en otra parte del libro se usa:

```
from pymcel.export import calcula_discriminante
d=calcula_discriminante(1,2,3)
```

Cualquier lenguaje de programación moderno depende de numerosas bibliotecas en las que están codificados procedimientos de uso regular o muy especializados. En todos los algoritmos presentados en el libro, siempre que se use una rutina de una biblioteca externa, se presentará el código que hace referencia a la biblioteca de forma explícita. Consider por ejemplo este algoritmo:

(Algoritmo 3.2)

```
#Coeficientes de un polinomio de segundo grado
a=1
b=3
c=-2

#Calcula discriminante
from pymcel.export import calcula_discriminante
d=calcula_discriminante(a,b,c)

#Calcula raices
if d>=0:
    from numpy import sqrt
    x1=(-b+sqrt(d))/(2*a)
    x2=(-b-sqrt(d))/(2*a)
else:
    print("El polinomio no tiene raices reales")
```

En él hemos usado la rutina `sqrt` (raíz cuadrada) de la biblioteca NumPy para calcular, en este caso, las raíces de un polinomio de segundo grado. Para ello, antes de la línea que usa la raíz cuadrada hemos incluido la instrucción:

```
from numpy import sqrt
```

Aunque en los programas regulares, estas instrucciones se ponen al principio, he decidido colocarlas lo más cerca posible al lugar donde se usan de modo que los fragmentos de código funcionen fuera del contexto del libro. El lector poco familiarizado con el lenguaje Python puede hacer caso omiso a estas instrucciones, que nada le agregan a la lógica de los algoritmos.

Nota

las instrucciones `import` y la velocidad de los programas. Es importante advertir que en algunos algoritmos, usar muchas instrucciones del tipo `import` entre las líneas de código puede disminuir la velocidad del código. La recomendación general es la de poner este tipo de instrucciones al principio del programa. Así el Alg. (3.2) debería escribirse así:

```
from pymcel.export import calcula_discriminante
from numpy import sqrt

#Coeficientes de un polinomio de segundo grado
a=1
b=3
c=-2

#Calcula discriminante
```



Nota (Cont.)

```
d=calcula_discriminante(a,b,c)

#Calcula raíces
if d>=0:
    x1=(-b+sqrt(d))/(2*a)
    x2=(-b-sqrt(d))/(2*a)
else:
    print("El polinomio no tiene raíces reales")
```

Otro tipo de algoritmos frecuentes son aquellos que dan como resultado figuras o gráficos. Estos están entre los más interesantes y útiles, aunque pueden ser complicados y causar algo de estupor para los menos familiarizados con el lenguaje de programación. Les recomiendo a todos poner especial atención en estos algoritmos, tratar de entenderlos e imitarlos. Una buena parte de la ciencia que hacemos hoy día depende de producir bonitos productos gráficos que ilustren de forma compacta conceptos o resultados difíciles de describir de otra manera.

Todos los códigos que producen figuras están numerados. Así mismo los gráficos que producen aparecen en el texto, incluso en el impreso, como figuras independientes y numeradas. Por razones de eficiencia en el uso del espacio, algunas de esos gráficos pueden estar en lugares lejanos de la posición del código. Es por esto que en todos los algoritmos que producen gráficos encontraran (en la parte inferior) una referencia a la figura correspondiente.

(Algoritmo 3.3)

```
from numpy import linspace,sin,pi
t=linspace(0,2*pi)
x=sin(t)

import matplotlib.pyplot as plt
plt.figure()
plt.plot(t,x,'k-');

plt.xlabel("t");
plt.ylabel("x(t)");
```

ver Figura 3.3

La mayoría de las figuras del libro han sido elaboradas usando software de diseño independientes. Sin embargo, algunas figuras, especialmente gráficos de datos o resultados de simulaciones, son generadas por las libretas con las que fue escrito el libro. Si bien los algoritmos con los que son creados esas figuras (que llamaremos *gráficos generados*) no aparecen en la versión impresa o en la versión web porque pueden ser muy elaborados e irrelevantes para los fines del texto, si pueden aparecer en las libretas de clase.

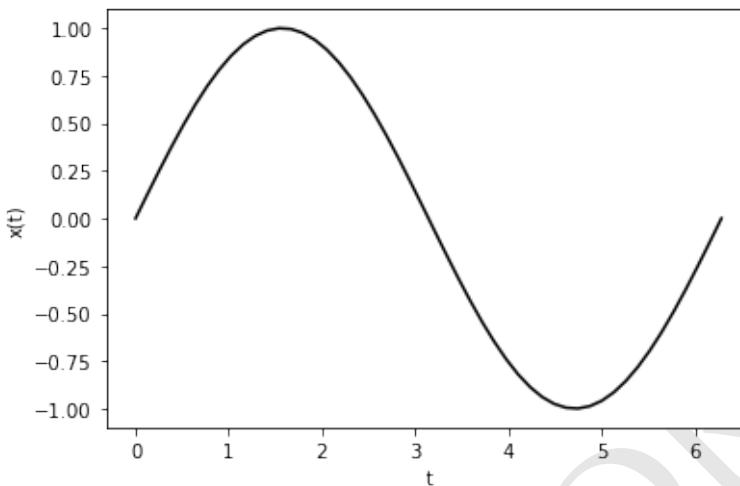


Figura 3.3: Figura correspondiente al código 3.3.

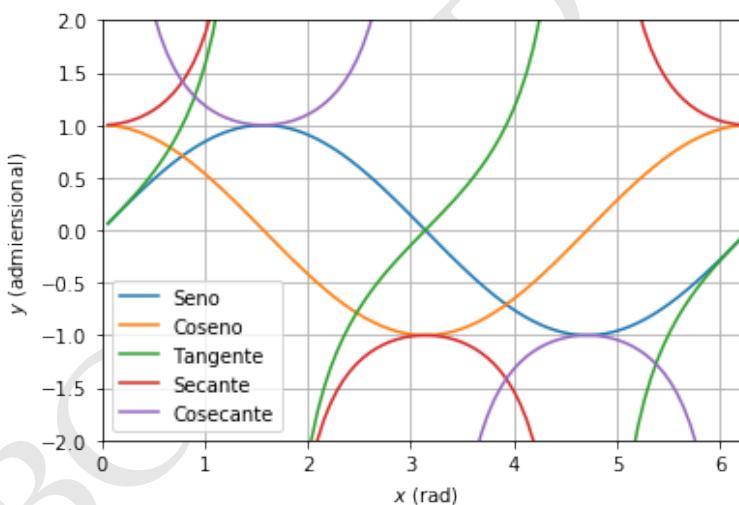


Figura 3.4: Gráfico de las funciones trigonométricas básicas, en el intervalo de interés (gráfico generado).

3.6. Figuras interactivas y animaciones

Uno de las cosas que hace poderosas a las libretas de Jupyter como medios para compartir información o estudiar un tema, es la posibilidad de interactuar directamente con esa información. Esto se consigue modificando el contenido de las celdas de las libretas (código) y ejecutándolas independientemente.

Pero hay otra posibilidad. En muchos apartes del libro se han creado gráficos interactivos y animaciones que permitirán al lector o al estudiante, modificar de forma gráfica (sin ir directamente al código) los parámetros de un algoritmo (gráfi-

cos interactivos) o ver en movimiento figuras que normalmente están estáticas en los libros.

Busque las figuras interactivas en la [versión en línea¹⁵](#) del libro.

BORRADOR

¹⁵http://seap-udea.org/MecanicaCeleste_Zuluaga

Capítulo 4

Fundamentos matemáticos

Resumen

En este capítulo haremos una síntesis práctica de los temas de matemáticas que usaremos en el resto del libro para presentar las teorías y métodos de la mecánica celeste. Repasaremos la geometría de las cónicas (que son la base para describir la trayectorias de cuerpos celestes sometidos a la gravidad newtoniana), en el plano y en el espacio de tres dimensiones. Haremos una síntesis muy práctica de las definiciones y proposiciones de la geometría vectorial, los sistemas de coordenadas, el cálculo diferencial, el cálculo integral y el más exótico pero muy importante cálculo de variaciones. También introduciremos algunos resultados útiles de la teoría de ecuaciones diferenciales y más importante los algoritmos para manipular todas estas cantidades que serán aplicadas a lo largo del texto.

4.1. Vectores y cálculo

En esta sección repasaremos, de manera práctica (y posiblemente poco rigurosa desde el punto de vista matemático), algunos resultados centrales del cálculo infinitesimal y la teoría de ecuaciones diferenciales que serán de utilidad en el resto del libro.

Para quienes conocen bien estos temas, puede servir de motivación para la lectura de esta sección, el hecho de que además de conceptos matemáticos ampliamente conocidos, hemos incluido aquí detalles sobre la **notación matemática, definiciones y teoremas** que usaremos en el resto del libro; escritos todos en un lenguaje muy propio del texto. Tal vez más interesante es el hecho de que a lo largo de esta sección ilustraremos también algunos de los conceptos claves usando **algoritmos**, con lo que sentaremos las bases para todos los desarrollos *computacionales* de los demás capítulos.

Sea que lea esta sección o sea que no lo haga, antes de pasar a los siguientes capítulos intente resolver los problemas al final de este capítulo que están directamente relacionados con los temas de esta sección. Este ejercicio le permitirá valorar

mejor las habilidades matemáticas y algorítmicas que tiene antes de comenzar y que serán indispensable en el resto del libro. Tal vez descubra que después todo no es mala idea hacer este repaso.

4.1.1. Conjunto, tuplas y vectores

Hay tres tipos de entidades matemáticas (además de los números reales y las funciones) que usaremos con frecuencia en este capítulo (y en general en todo el libro):

- **Conjuntos.** Muchas veces nos referiremos aquí a conjuntos (no necesariamente ordenados) de entidades que están relacionadas de alguna manera: las coordenadas de un punto en el espacio de fases, un conjunto de funciones, las ecuaciones diferenciales que describen el movimiento de un sistema dinámico, las partículas que interactúan gravitacionalmente en un sistema, etc. Los elementos de la mayoría de los conjuntos usados en este libro estarán numerados. Así por ejemplo, las masas de un sistema de N partículas, m_0, m_1, \dots, m_{N-1} se representarán como el conjunto:

$$\{m_i\}_{i=0,1,\dots,N-1}$$

Una versión sintética más común de esta notación será $\{m_i\}_N$. En el caso en el que el número de elementos sea claro en el contexto se usará simplemente $\{m_i\}$

Nota

Numeración comenzando en cero. En lo sucesivo numeraremos todas las cantidades físicas y matemáticas (partículas, variables auxiliares, componentes de un vector o una matriz, etc.) comenzando en cero, tal y como se acostumbra en programación. Esta elección facilitará la implementación de las fórmulas en algoritmos y programas de computadora. Si bien la numeración comenzando en cero no es muy común en matemáticas o física, existen justificaciones poderosas para su uso, algunas de las cuales están enumeradas en el documento “[Why numbering should start at zero](#)”^a del maestro de maestros de la programación científica, Edsger Wybe Dijkstra.

^a<https://www.cs.utexas.edu/users/EWD/transcriptions/EWD08xx/EWD831.html>

- **Tuplas.** Las tuplas (pares, tripletas, etc.) son conjuntos ordenados de números reales. Para las tuplas usaremos la notación convencional $(x_0, x_1, \dots, x_{N-1})$, donde los paréntesis, a diferencia de las llaves de los conjuntos más generales, nos permitirán reconocer el hecho de que el orden de los elementos es importante. Las tuplas forman, con el conjunto de los números reales, un *espacio vectorial*. En este espacio se definen las siguientes operaciones básicas:

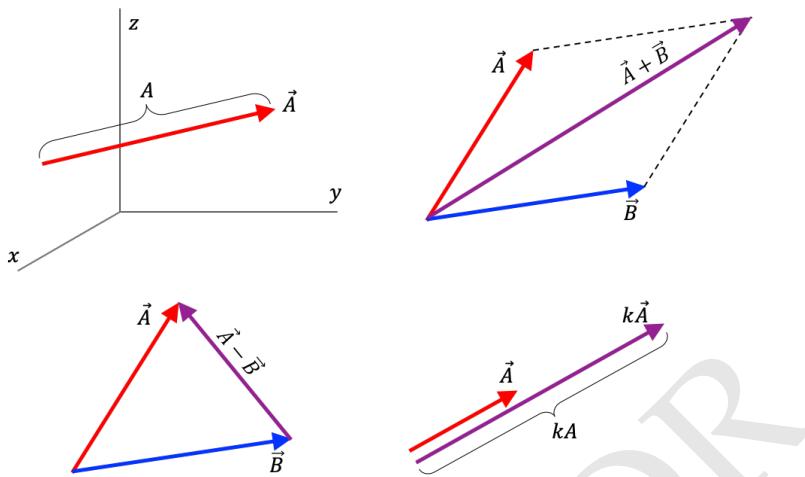


Figura 4.1: Definición geométrica de vector espacial y de sus operaciones básicas (suma, resta y multiplicación por un escalar). Aunque la resta de $\vec{A} - \vec{B}$ es un caso particular de la suma, es importante aquí familiarizarse con la dirección que tiene este vector (va de la cabeza del sustraendo \vec{B} a la del minuendo \vec{A} .)

- Suma:

$$(a_0, a_1, \dots) + (b_0, b_1, \dots) \equiv (a_0 + b_0, a_1 + b_1, \dots) \quad (4.1)$$

- Multiplicación por un escalar:

$$k(a_0, a_1, \dots) \equiv (ka_0, ka_1, \dots) \quad (4.2)$$

donde k es un número real.

- **Vectores geométricos (euclidianos).** Los vectores geométricos o en breve vectores, son *segmentos orientados* en el espacio de tres dimensiones (ver [Figura 4.1](#)) que tienen las siguientes propiedades:

- Se denotarán en este libro como \vec{A} o \hat{e} (este último es un vector unitario) en lugar de usar la notación más común con letras en negrilla.
- Todo vector tiene: 1) magnitud, A , igual a la longitud (euclíadiana) del segmento correspondiente y 2) una dirección en el espacio.
- Los vectores forman con los números reales, un espacio vectorial con operaciones definidas, geométricamente, como se muestra en la [Figura 4.1](#).
- El elemento neutro de la operación suma entre vectores, es el vector nulo, que representaremos como $\vec{0}$.

- Todo vector, por definición, se puede escribir como una combinación lineal de tres vectores de una base ortonormal: $\hat{e}_0, \hat{e}_1, \hat{e}_2$. Los coeficientes de la combinación se conocen como componentes del vector:

$$\vec{A} = A_0 \hat{e}_0 + A_1 \hat{e}_1 + A_2 \hat{e}_2. \quad (4.3)$$

- El espacio de vectores es *isomórfico* a el espacio vectorial de triplets. Por la misma razón nos referiremos al vector, o bien como la entidad abstracta \vec{A} , como su representación en términos de los vectores unitarios de una base ortonormal (ver ítem anterior) o aún mejor, en términos de la tripleta:

$$\vec{A} : (A_0, A_1, A_2)$$

En este caso usaremos el símbolo “:” en lugar de “=” para dar entender que el vector *no es* una tripleta sino una entidad geométrica más abstracta.

El isomorfismo implica también, que las componentes de los vectores en las operaciones geométricas definidas en la [Figura 4.1](#), cumplen la Ecs. [\(4.1\)](#) y [\(4.2\)](#).

- Además de la suma y la multiplicación por un escalar, que caracterizan el espacio vectorial, se definen dos productos adicionales:

- **Producto escalar o producto punto**, $\vec{A} \cdot \vec{B}$. El producto escalar se define, a partir los vectores unitarios de la base, como:

$$\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = \delta_{ij},$$

donde δ_{ij} es el “delta de kroenecker”:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (4.4)$$

Con esta esta definición y usando la representación de los vectores dada por la Ec. [\(4.3\)](#) puede probarse que:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_0 B_0 + A_1 B_1 + A_2 B_2$$

- **Producto vectorial o producto cruz**, $\vec{A} \times \vec{B}$. El producto vectorial se define, a partir los vectores unitarios de la base, como:

$$\hat{e}_i \times \hat{e}_j = \epsilon_{ijk} \hat{e}_k, \quad (4.5)$$

donde ϵ_{ijk} es el “simbolo de Levi-Civita” (“levi chivita”¹⁶):

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{si } (i, j, k) \text{ es } (0, 1, 2), (1, 2, 0) \text{ o } (2, 0, 1) \\ -1 & \text{si } (i, j, k) \text{ es } (2, 1, 0), (0, 2, 1) \text{ o } (1, 0, 2) \\ 0 & \text{de otro modo } i = j \text{ o } j = k \text{ o } k = i \end{cases} \quad (4.6)$$

¹⁶<https://forvo.com/word/levi-civita/#it>

Al conjunto de vectores unitarios de una base que se definen cumpliendo la Ec. (4.5) se lo llama un *conjunto de vectores de mano derecha*. Con esta definición y usando la representación de los vectores dada por la Ec. (4.3) puede probarse que:

$$\vec{A} \times \vec{B} = (A_1 B_2 - A_2 B_1) \hat{e}_0 + \\ -(A_0 B_2 - A_2 B_0) \hat{e}_1 + \\ (A_0 B_1 - A_1 B_0) \hat{e}_2 \quad (4.7)$$

Está última expresión es tan elaborada que con frecuencia se usa la regla mnemotécnica:

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{e}_0 & \hat{e}_1 & \hat{e}_2 \\ A_0 & A_1 & A_2 \\ B_0 & B_1 & B_2 \end{vmatrix} \quad (4.8)$$

Donde $|M|$ es el determinante de la matriz M .

- Otras identidades útiles:
 - Propiedad cíclica del **triple producto escalar**:

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A}) \quad (4.9)$$

- **Triple producto vectorial**:

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C} \quad (4.10)$$

Algoritmos para conjuntos y tuplas

Todos los lenguajes modernos de programación, definen tipos especiales para representar conjuntos y tuplas. En Python existen tres tipos de objetos básicos para este propósito: *listas*, *tuplas* y *diccionarios*. Existen sútiles diferencias entre las listas y las tuplas en Python y en general usaremos con más frecuencia las primeras. Para los algoritmos de este libro, es importante entender las *operaciones* entre listas, que son diferentes a las operaciones en el espacio vectorial de las tuplas matemáticas que definimos antes.

Así, por ejemplo, en el siguiente algoritmo se construye una lista con las componentes del vector de estado de una partícula, “sumando” las listas de las componentes de su vector posición y velocidad:

```
#Lista de componentes del vector posición
r=[1,0,3]
#Lista de componentes del vector velocidad
v=[0,-1,0]
#Lista de componentes del vector de estado
X=r+v
```

```
X = [1, 0, 3, 0, -1, 0]
```

El operador `+`, entre listas y tuplas de Python produce la unión de los elementos de las listas.

Usando este operador se pueden hacer algoritmos prácticos como el que se muestra a continuación:

```
def f(x):
    from math import sin
    y=sin(x)/x
    return y

valores_de_x=[1.0,2.0,3.0]
valores_de_f=[]
for x in valores_de_x:
    valores_de_f+=[f(x)]
```

valores de f = [0.8414709848078965, 0.45464871341284085, 0.0470400026866224]

aquí, comenzamos con un conjunto vacío, `valores_de_f=[]` y después, dentro de un ciclo, usamos el operador de acumulación `+=` para agregar elementos al conjunto. Este es un método muy común usado en el lenguaje para construir “tablas de valores”, que pueden, por ejemplo usarse para hacer gráficos de funciones.

Algoritmos para vectores

Los vectores forman un “capítulo” en la computación separado de las listas y las tuplas. La razón básica son sus propiedades matemáticas y las operaciones definidas entre ellos. Bibliotecas de rutinas muy completas existen en todos los lenguajes de programación para representar este tipo de entidades matemáticas.

En Python y a lo largo de este libro usaremos los objetos y rutinas de los paquetes NumPy y SPICE para definir y manipular vectores.

El ejemplo abajo muestra como se calcula el ángulo entre dos vectores θ_{AB} , a partir de la interpretación geométrica del producto punto $\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos \theta_{AB}$ (ver problemas al final del capítulo):

```
#Definimos los vectores
from numpy import array
A=array([1.0,0.0,2.0])
B=array([0.0,1.0,3.0])

#Calculamos el producto escalar y vectorial
from numpy import dot
ApuntoB=dot(A,B)

#El ángulo entre los vectores
from numpy import arccos
from numpy.linalg import norm
anguloAB=arccos(ApuntoB/(norm(A)*norm(B)))
```

AnguloAB = 31.948059431330062 grados



Nota

Radianes y grados en los algoritmos. Es importante entender que las funciones trigonométricas inversas como `arccos`, devuelven, en todos los lenguajes de programación, valores de los ángulos en radianes. En el caso anterior, por ejemplo, el valor de la variable `anguloAB` al final del algoritmo en realidad era 0.5575988266995369. Sin embargo, decidimos mostrar su valor en grados después de multiplicar `anguloAB` por el factor de conversión $\pi/180$ (esta operación no se muestra en el código.) Así lo seguiremos haciendo en el resto del libro. El lector que use los algoritmos no debe olvidar multiplicar por el factor de conversión para reconstruir los resultados mostrados aquí.

Un procedimiento similar, esta vez usando vectores y rutinas de SPICE (internamente SPICE usa vectores o arreglos de NumPy), puede usarse para calcular el triple producto vectorial:

```
from numpy import array
from spiceypy import vdot,vcrss

A=array([2.0,2.0,1.0])
B=array([0.0,-1.0,0.0])
C=array([0.0,0.0,2.0])

AxByC=vdot(A,B)*C-vdot(A,C)*B
```

$$A \times (B \times C) = [-0. \quad 2. \quad -4.]$$

También podemos usarlas para verificar la propiedad cíclica del triple producto escalar:

```
from numpy import array
from spiceypy import vnrm,vdot,vcrss
A=array([2.0,2.0,1.0])
B=array([0.0,-1.0,0.0])
C=array([0.0,0.0,2.0])

ABC=vdot(A,vcrss(B,C))
CAB=vdot(C,vcrss(A,B))
BCA=vdot(B,vcrss(C,A))
```

$$\begin{aligned} A \cdot (B \times C) &= -4.0 \\ C \cdot (A \times B) &= -4.0 \\ B \cdot (C \times A) &= -4.0 \end{aligned}$$

Con lo que se verifica la identidad (al menos para los vectores escogidos.)

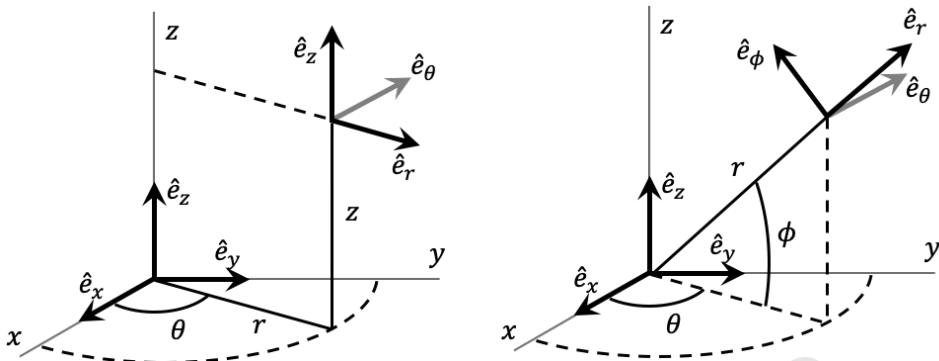


Figura 4.2: Definición de los sistemas de coordenadas usados en este texto

4.1.2. Sistemas de coordenadas

A lo largo de este libro, usaremos los tres sistemas de coordenadas ortogonales clásicos (cartesianas, cilíndricas y esféricas, ver Figura 4.2) con algunas convenciones más propias de la astronomía y la mecánica celeste que del cálculo.

A continuación, y en especial para clarificar nuestra notación, enumeramos detalladamente las propiedades de cada sistema.

- **Sistema de coordenadas cartesiano.**

- Coordenadas: $x \in (-\infty, +\infty)$, $y \in (-\infty, +\infty)$, $z \in (-\infty, +\infty)$.
- Vectores unitarios: $\hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z$.
- Comentarios:
 - En todos los casos la orientación de los ejes obedecerá la *regla de la mano derecha*, es decir, los sistemas cartesianos usados en el texto y cuyos ejes están definidos por el conjunto de vectores unitarios ($\hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z$) forman un *conjunto de mano derecha* (ver Ec. 4.5), a saber, en forma explícita:

$$\begin{aligned}\hat{e}_x \times \hat{e}_y &= \hat{e}_z \\ \hat{e}_y \times \hat{e}_z &= \hat{e}_x \\ \hat{e}_z \times \hat{e}_x &= \hat{e}_y\end{aligned}\tag{4.11}$$

- **Sistema de coordenadas cilíndrico** (ver Figura 4.2).

- Coordenadas: $r \in [0, +\infty)$, $\theta \in [0, 2\pi)$, $z \in (-\infty, +\infty)$.
- Conversión al sistema de coordenadas cartesianas:

$$\begin{aligned}x &= r \cos \theta \\ y &= r \sin \theta\end{aligned}\tag{4.12}$$

- Vectores unitarios expresados en el sistema de coordenadas cartesianas:

$$\begin{aligned}\hat{e}_r &= \cos \theta \hat{e}_x + \sin \theta \hat{e}_y \\ \hat{e}_\theta &= -\sin \theta \hat{e}_x + \cos \theta \hat{e}_y \\ \hat{e}_z &= \hat{e}_z\end{aligned}\quad (4.13)$$

- Comentarios:

- El conjunto de vectores unitarios ($\hat{e}_r, \hat{e}_\theta, \hat{e}_z$) forman un conjunto de mano derecha tal y como se definió en las Ecs. (4.11).
- Nótese que, a diferencia de la notación usada generalmente en los textos de cálculo, la coordenada cilíndrica r usa la misma letra que la coordenada esférica r y la magnitud del vector posición (ver siguiente sección). La distinción entre las tres, dependerá del contexto.
- Usaremos la letra griega θ para denotar el ángulo *acimutal*, a diferencia de la notación convencional que usa esta letra para la coordenada esférica polar (ángulo del vector posición respecto al eje z.)

- Sistema de coordenadas esférico (ver Figura 4.2).

- Coordenadas: $r \in [0, +\infty), \theta \in [0, 2\pi), \phi \in [-\pi/2, +\pi/2]$.
- Conversión al sistema de coordenadas cartesianas:

$$\begin{aligned}x &= r \cos \phi \cos \theta \\ y &= r \cos \phi \sin \theta \\ z &= r \sin \phi\end{aligned}\quad (4.14)$$

- Vectores unitarios expresados en el sistema de coordenadas cartesianas:

$$\begin{aligned}\hat{e}_r &= \cos \phi \cos \theta \hat{e}_x + \cos \phi \sin \theta \hat{e}_y + \sin \phi \hat{e}_z \\ \hat{e}_\theta &= -\sin \theta \hat{e}_x + \cos \theta \hat{e}_y \\ \hat{e}_\phi &= \cos \phi \cos \theta \hat{e}_x + \sin \phi \sin \theta \hat{e}_y - \sin \phi \hat{e}_z\end{aligned}\quad (4.15)$$

- Comentarios:

- El conjunto de vectores unitarios ($\hat{e}_r, \hat{e}_\theta, \hat{e}_\phi$) forman un conjunto de mano derecha tal y como se definió en las Ecs. (4.11).
- Nótese que, a diferencia de la notación usada generalmente en los textos de cálculo, la coordenada esférica ϕ se medirá respecto al plano $x - y$ (como una *latitud*) en lugar de hacerlo respecto al eje z (como una *colatitud*).

Una interesante página interactiva que permite visualizar mejor la definición de los sistemas de coordenadas y la orientación de los vectores coordenadas puede encontrarse en los siguientes enlaces, tanto para el [sistema de coordenadas cilíndrica](#)¹⁷ como para el [sistema de coordenadas esféricas](#)¹⁸.

¹⁷<http://dynref.engr.illinois.edu/rvy.html>

¹⁸<http://dynref.engr.illinois.edu/rvy.html>

4.1.3. Funciones

Una función es, en términos informales, una regla de correspondencia que asocia los elementos de un conjunto de partida o *dominio* (p.e. el conjunto de los números reales \mathbb{R} , el conjunto de puntos en un plano \mathbb{R}^2 o de eventos en el espacio tiempo \mathbb{R}^4) con los de otro conjunto, llamado rango, de modo a que cada elemento del dominio le corresponde **uno y solo un elemento del rango**.

Entre los distintos tipos de funciones que reconoce el análisis matemático, en este libro nos concentraremos en:

- **Funciones de variable real:** Dominio y rango \mathbb{R} . Ejemplo: $f(t) = t^2$.
- **Funciones de muchas variables o Campos escalares:** Dominio \mathbb{R}^n , rango \mathbb{R} . Ejemplos: $f(x, y) = x^2 + y^2$, $H(\{q_i\}_N) = \sum_i q_i^2$ (para la notación del conjunto $\{q_i\}$ ver la Sección 4.1.1).
- **Funciones vectoriales:** Dominio \mathbb{R} , rango \mathbb{R}^n . Ejemplo: $\vec{a}(t) = kr^{-n}\hat{\ell}_r$.
- **Funciones vectoriales de muchas variables o Campos vectoriales:** Dominio \mathbb{R}^n , rango \mathbb{R}^3 . Ejemplo: $\vec{F}(r, \theta, z) : -k(r \cos \theta, r \sin \theta, z)$.

Nota

t como variable genérica de las funciones. En todos los textos de matemáticas (incluso en los de física) se acostumbra usar x como el nombre preferido para representar, de forma genérica, la variable independiente de las funciones. En lo sucesivo cambiaremos esta convención al llamar t a la variable independiente genérica. La razón no puede ser más sencilla: en la mecánica t es el nombre que damos a la variable independiente por excelencia, el tiempo, de modo que muchas de las fórmulas que desarrollaremos en este capítulo, se trasladaran simbólicamente casi sin modificación a la mecánica.

Es obvio que la elección de la letra con la que representamos la variable independiente, no modifica en nada las definiciones y teoremas que veremos en esta sección, de modo que esperamos esta elección no moleste a los más conservadores ni confunda a quienes han estudiado ampliamente estos temas en otros textos.

Algoritmos para funciones

Hay dos maneras de definir una función en Python: 1) como una rutina o 2) como una función `lambda`.

Como una rutina, una función en Python puede recibir como “argumentos” de entrada no solo las variables de la función sino también argumentosopcionales.

La siguiente función, por ejemplo, permite calcular el valor de la energía potencial de un sistema físico usando la función de varias variables $U(\vec{r}) = kr^n$ (siendo $\vec{r} : x, y, z$ el vector posición y r su magnitud.)

(Algoritmo 4.1)

```
def U(x,y,z,k=1,n=-1):
    r=(x**2+y**2+z**2)**0.5
    return k*r**n
```

$U(1.0, 2.0, 0.0)$ con $k = 1$ y $n = -1$ (valores por defecto) = 0.4472135954999579
 $U(1.0, 2.0, 0.0)$ con $k = 6.67e-11$ y $n = -2$ = 1.334e-11

Nota

Argumentos obligatorios y argumentos opcionales. Toda rutina en Python puede tener unos argumentos obligatorios (que llamaremos variables) o unosopcionales.

Las variables son en estricto sentido una tupla de valores, por ejemplo x, y, z en la función U en el Alg. (4.1).

Los argumentosopcionales son, por otro lado, un diccionario de valores, que no es otra cosa que una lista de valores identificados con un nombre (también llamado clave o key). En la función U en el Alg. (??) los argumentosopcionales son $k=1, n=-1$.

En Python las variables y las opciones de una rutina pueden representarse usando los objetos especiales `*variables` y `**opciones`. El uso de estos objetos especiales no es muy común, pero en ciertas situaciones puede ser bastante útil.

Una forma alternativa de la rutina para U en el Alg. (??) es:

```
def U(*variables,**opciones):
    x,y,z=variables
    r=(x**2+y**2+z**2)**0.5
    return opciones["k"]*r**n
```

que se puede invocar usando:

```
var=1.0,2.0
opc=dict(k=1,n=-2)
U(*var,**opc)
```

No parece muy práctico, pero como veremos puede ser muy útil en ciertas situaciones especiales.

Las funciones `lambda` se usan para representar funciones muy abreviadas y no tienen argumentos distintos de las variables de las que dependen.

Así, por ejemplo, el siguiente algoritmo define una función `lambda`, U_x , basada en la función U del Alg. (??), que depende solo de la variable x cuando y asumes constante los valores de y y z (U_x será util para calcular más abajo la derivadas parcial de U respecto a x):

(Algoritmo 4.2)

```

y=1.0
z=1.0
k=1
n=-2
U_x=lambda x:U(x,y,z,k,n)

```

$U_x(0.0) = 0.4999999999999999$

4.1.4. Derivadas

La derivada de una función de variable real es en sí misma una función definida por el límite:

$$\frac{df}{dt} \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t) - f(t + \Delta t)}{\Delta t} \quad (4.16)$$

Si el límite no existe decimos que la función no es derivable en t .

Nota

Notación de la derivada. A lo largo de la historia la manera como se ha representado la función derivada ha cambiado. Existen al menos tres notaciones comunes:

- La **notación de Leibniz**, df/dt , d^2f/dt^2 . En esta notación la derivada se representa como si fuera la razón entre dos cantidades, pero no es así ¡mucho cuidado! Usaremos la notación de Leibniz especialmente para representar la derivada de funciones que se escriben de forma explícita, así por ejemplo:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} t^2 \right)$$

- La **notación de Newton**, \dot{f} , \ddot{f} . Esta será la forma que usaremos para denotar a lo largo del libro las derivadas respecto del tiempo (o el tiempo propio en relatividad).
- La **notación de Lagrange**, f' , f'' , $f^{(n)}$.
- La **notación de Euler**, Df , D^2f , $D^n f$, que no usaremos aquí pero es la notación menos común, pero puede aparecer en el contexto de la mecánica de fluidos.

La definición de derivada de las funciones de variable real como un límite, se extiende por analogía a campos escalares, funciones vectoriales o campos vectoriales. Para las funciones que dependen de varias variables, sin embargo, se usa

una notación y un nombre diferente: **derivada parcial**. La derivada parcial de un campo escalar se define como:

$$\frac{\partial f}{\partial q_k} = \lim_{\Delta q_k \rightarrow 0} \frac{f(q_1, q_2, \dots, q_k + \Delta q_k, \dots, q_N) - f(q_1, q_2, \dots, q_k, \dots, q_N)}{\Delta q_k}$$

La derivada parcial se calcula de la misma manera que la derivada de una variable, con la salvedad de que al hacerlo se asume que todas las demás variables de la función son constantes.

En muchas partes en este libro, y por economía usaremos la notación de Euler para las derivadas parciales, a saber:

$$\partial_x f \equiv \frac{\partial f}{\partial x}$$

En esta notación una derivada parcial múltiple se escribirá como:

$$\partial_{xyz} f(x, y, z) \equiv \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z}$$

A pesar de que la derivada parcial tiene una definición *numérica* análoga a la de la derivada total, existe una sutil diferencia entre ambas.

Imagine que tenemos una **variable independiente** t y definimos, a partir de ella, una nueva variable u que es función de t (variable dependiente).

¿Cómo podemos calcular la derivada de una función de la nueva variable $f(u)$ respecto de la variable independiente t ?

Proposición 4.1

Regla de la Cadena. Dada una función compuesta $f(u(t))$, la derivada de f respecto a t es:

$$\frac{df}{dt} = \frac{df}{du} \frac{du}{dt}$$

Decimos que la función f depende *implícitamente* de la variable independiente t . En este sentido la regla de la cadena es una regla de *derivación implícita*.

Usando la notación de Newton la expresión anterior se escribirá de forma abreviada:

$$\dot{f}(t) = \dot{u} \frac{df}{du}$$

¿Qué pasa en el caso en el que f depende de varias variables dependientes, por ejemplo $f(q_1(t), q_2(t), \dots, q_N(t)) \equiv f(\{q_i(t)\}_N)$?

En este caso la regla de la cadena se puede generalizar como:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial q_1} \frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial f}{\partial q_2} \frac{dq_2}{dt} + \dots + \frac{\partial f}{\partial q_N} \frac{dq_N}{dt} = \sum_i \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} = \sum_i \dot{q}_i \partial_{q_i} f$$

Ahora bien: ¿existirá, en este caso, la derivada parcial de f respecto de t ?

La respuesta a esta pregunta, ilustra, justamente, la diferencia sutil entre la derivada ordinaria o *derivada total* d/dt y la derivada parcial $\partial/\partial t$.

Hay dos situaciones posibles:

- Si la función f no depende explícitamente de t , es decir si la variable t no aparece en la fórmula de f , entonces $\partial f / \partial t = 0$. Este resultado es *independiente* de que f dependa implícitamente de t a través de otras variables dependientes.
- Ejemplo:** si $f(q, t) = q^2$, entonces: $\partial f / \partial t = 0$ aunque, por regla de la cadena, $df/dt = 2q\dot{q}$.
- Si la fórmula de la función f contiene la variable t , entonces su derivada parcial puede ser distinta de cero (dependiendo de la forma funcional de f).
- Ejemplo:** Si $f(q, t) = q^2 + \sin t$, entonces: $\partial f / \partial t = \cos t$ y $df/dt = 2q\dot{q} + \cos t$.

En este sentido la derivada parcial es como un “operador semántico”, es decir un operador sobre las “letras” que aparecen en la fórmula de la función.

Teniendo en cuenta esta propiedad, la forma más general de la regla de la cadena, para una función de varias variables (campo escalar o vectorial) será:

$$\frac{d}{dt}f(\{q_i\}, t) = \sum_i \dot{q}_i \partial_{q_i} f + \frac{\partial f}{\partial t} \quad (4.17)$$

4.1.5. Funciones homogéneas

Existe un interesante conjunto de funciones para las cuales hay una relación no trivial entre su derivada y el valor de la función misma. Se conocen como **funciones homogéneas**:

Definición 4.1

Funciones homogéneas. Una función general $f(\{q_i\})$ se llama homogénea si frente a una operación de escalado de sus variables (multiplicación por un escalar), la función *escala* también. En términos matemáticos:

$$f(\{\lambda q_i\}) = \lambda^k f(\{q_i\})$$

donde λ es un número real y k se conoce como el **orden** de la función.

Las funciones homogéneas son, generalmente polinomios y funciones racionales. Así por ejemplo $f(x, y) = x^2/a^2 + y^2/b^2$, con a y b constantes, y que representa la ecuación algebraica de una elipse, es una función homogénea de grado $k = 2$. De otro lado $f(x) = x^3y^2 + y^5$ es homogénea de grado $k = 5$.

Las funciones homogéneas más interesantes para nosotros en este libro son del tipo $f(\vec{r}) = kr^n$ que son homogéneas de grado $k = n$ (ver problemas al final del capítulo.)

Como mencionamos desde el principio, las derivadas de las funciones homogéneas tienen una propiedad muy importante:

Proposición 4.2

Teorema de funciones homogéneas de Euler. Si una función $f(\{q_i\}_N)$ es homogénea de grado k , entonces:

$$\sum_i q_i \frac{\partial f}{\partial q_i} = kf$$

Para funciones homogéneas definidas en el espacio de tres dimensiones, el teorema de Euler se puede escribir como:

$$\vec{r} \cdot \vec{\nabla} f = kf$$

4.1.6. Derivada vectorial

Para funciones de varias variables (especialmente aquellas con dominio en el espacio coordenado \mathbb{R}^3) se definen generalizaciones vectoriales de la derivada que tienen motivaciones e interpretaciones geométricas específicas.

El *operador diferencial vectorial* básico se conoce como el **gradiente**. Denotado comúnmente como $\vec{\nabla}$, en coordenadas cartesianas se define explícitamente como:

$$\vec{\nabla} f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x} \hat{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{e}_z \quad (4.18)$$

El operador gradiente en el sistema de coordenadas cilíndrico (con la notación definida anteriormente) está dado por:

$$\vec{\nabla} f(r, \theta, z) = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{e}_z \quad (4.19)$$

Donde el factor $1/h_\theta \equiv 1/r$ se conoce como *factor de escala*.

Por su parte en coordenadas esféricas (con la notación definida anteriormente):

$$\vec{\nabla} f(r, \theta, \phi) = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{e}_\theta + \frac{1}{r \cos \phi} \frac{\partial f}{\partial \phi} \hat{e}_\phi \quad (4.20)$$

En este caso se ha introducido un nuevo factor de escala: $h_\phi \equiv r \cos \phi$.

Nota

Una notación para el gradiente. Como lo hicimos con la derivada parcial, a lo largo de este libro, abreviaremos el gradiente usando la notación especial:

$$\partial_{\vec{r}} f \equiv \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} \equiv \vec{\nabla} f$$

Aunque no es una notación muy rigurosa, permite abreviar expresiones que de otra manera serían muy elaboradas. Así por ejemplo, la re-

Nota (Cont.)

gla de la cadena (Ec. 4.17) para funciones definidas en el espacio coordenado, se puede escribir de forma compacta como:

$$\dot{f}(x, y, z, t) = \partial_{\vec{r}} f \cdot \dot{\vec{r}} + \partial_t f \quad (4.21)$$

Existen otros operadores vectoriales (laplaciano, divergencia, rotacional) sobre los que no profundizaremos aquí por no ser de mucha utilidad práctica en la mecánica celeste (al menos no al nivel de este libro.)

Algoritmos para la derivada

Existen diversos algoritmos para calcular la derivada de una función en una o varias variables. En este libro, en donde sea necesario, nos apoyaremos de la biblioteca científica `scipy` y su rutina `derivative` que permite calcular, numéricamente, derivadas de cualquier orden.

El siguiente algoritmo ilustra el uso de `derivative` y sus opciones:

```
def f(t):
    from math import sin
    return sin(t)/t

#Valor de la variable independiente donde queremos la derivada
t=2.0

from scipy.misc import derivative

#Primera derivada usando un dx=0.01 y 3 puntos
dfdt=derivative(f,t,dx=1e-2,n=1,order=3)

#Segunda derivada en t
d2fdt2=derivative(f,t,dx=1e-2,n=2,order=5)

dfdt : Numérica = -0.4353938258295498, Exacta = -0.43539777497999166
d2fdt2 : Numérica = -0.019250938436687903, Exacta = -0.01925093843284925
```

Usando `derivative` es posible diseñar funciones para calcular derivadas parciales e incluso gradientes (para los cuales no existen funciones en la biblioteca `scipy`). Así por ejemplo:

```
def f(x,y,z):
    from math import sin
    return sin(x*y*z)/(x*y*z)

def partial_derivative_x(f,x,y,z,**opciones):
    f_solo_x=lambda x:f(x,y,z)
    dfdx=derivative(f_solo_x,x,**opciones)
    return dfdx
```

```
x=1.0
y=2.0
z=3.0
dfdx=partial_derivative_x(f,x,y,z,dx=0.01)
```

`dfdx: Numérica = 1.0061803563982654, Exacta = 1.006739536350187`

Nótese como usamos aquí la función `lambda f_solo_x`, de la manera que lo hicimos en el Algoritmo (4.2) para conseguir el resultado deseado.

4.1.7. Integrales

Se llama **antiderivada** de una función de variable real $f(t)$, a la función $F(t)$ cuya derivada es igual a la función original:

$$\dot{F}(t) = f(t)$$

O en notación *integral*:

$$F(t) \equiv \int f(t) dt$$

A $F(t)$ o equivalentemente $\int f(t) dt$ se la llama también la **integral indefinida** de $f(t)$.

La antiderivada permite calcular la **cuadratura de una función**, que no es otra cosa que el área encerrada por la curva en el plano cartesiano definido por la variable independiente y los valores de la función:

Proposición 4.3

Fórmula de Newton-Leibniz.^a Dada una función $f(t)$ que tiene antiderivada $F(t)$ definida en el intervalo $[a, b]$, el área o cuadratura de la función en el mismo intervalo está dado por:

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$$

A la cantidad $\int_a^b f(t) dt$ se la llama **integral definida** de $f(t)$.

^aA esta fórmula se la llama a menudo *segundo teorema fundamental del cálculo*

En términos de la integral definida podemos definir una nueva función:

$$I(t) = \int_a^t f(\tau) d\tau$$

Nótese que para ser rigurosos hemos cambiado el nombre de la “variable de integración” τ para no confundirla con el límite superior de la integral t .

Esta nueva función tiene una importante propiedad:

Proposición 4.4

Teorema fundamental del cálculo. Dada una función $f(t)$ integrable en el intervalo $[a, b]$, si definimos la función $I(t) = \int_a^t f(\tau) d\tau$, entonces:

$$\frac{dI}{dt} = f(t)$$

o bien,

$$\frac{d}{dt} \int_a^t f(\tau) d\tau = f(t) \quad (4.22)$$

Es interesante anotar que aunque la antiderivada $F(t)$ y la función $I(t)$ tienen la misma derivada en t , es decir $dF/dt = dI/dt = f(t)$, no son necesariamente la misma función. Considere, por ejemplo, el hecho elemental de que $I(a) = 0$ (por definición) mientras que $F(a)$ podría ser cualquier número (incluyendo cero por supuesto.)

4.1.8. Integrales vectoriales

Una extrapolación del concepto de integral a funciones de varias variables (campos escalares y campos vectoriales) conduce a algunas operaciones integrales de gran importancia en la física. Para los propósitos de lo que veremos en este libro, son de particular interés las integrales del tipo:

$$\int \vec{F} \cdot d\vec{r},$$

que se define sobre todos los valores de \vec{r} de una curva en el espacio coordenado. A esta integral se la conoce como **integral de línea**. Si la trayectoria es cerrada, escribiremos:

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{r},$$

que no se diferencia (matemáticamente) en nada de una integral de línea. A esta integral la llamaremos **circulación** del campo vectorial \vec{F} .

Otro tipo de integral vectorial de interés es:

$$\int_{\Sigma} \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

Donde $d\vec{S}$ tiene dirección normal a la superficie Σ (formada por el lugar geométrico de todos los puntos que la definen) y magnitud igual al área de una fracción infinitesimal de la superficie.

Proposición 4.5

teorema de Stokes. Si $\vec{F}(\vec{r})$ es un campo vectorial diferenciable en todos los puntos del espacio, entonces:

Proposición 4.5 (Cont.)

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\Sigma} (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot d\vec{S}$$

Donde Σ es cualquier superficie que tenga como frontera la trayectoria sobre la que se define la circulación.

Un importante corolario del teorema de Stokes es el siguiente:

Proposición 4.6

Corolario de Stokes. Si el campo vectorial $\vec{F}(\vec{r})$ tiene circulación nula:

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

Entonces existe un campo escalar $U(\vec{r})$ tal que:

$$\vec{F} = \vec{\nabla} U$$

Llamamos a U la función *potencial* de \vec{F} .

Algoritmos para la integral

El cálculo numérico de integrales es una basta área del análisis numérico. En cada lenguaje de programación es posible encontrar bibliotecas completas con rutinas para el cálculo de aproximaciones numéricas de integrales definidas e integrales vectoriales.

Para los propósitos de este libro, usaremos la rutina `quad` de la biblioteca SciPy para calcular numéricamente integrales definidas de funciones de variable real.

En el algoritmo provisto a continuación, calculamos, por ejemplo, el trabajo $W \equiv \int F(x) dx$ sobre una partícula que se mueve en una dimensión sometida a una fuerza del tipo $F(x) = -kx$, asumiendo que $k = 0,1$ y que la partícula se desplaza entre $x = 1,0$ y $x = 5,0$:

```
#El integrando debe definirse como una rutina
def F(x,k=1):
    return -k*x

from scipy.integrate import quad
k=0.1
x0=1.0
x1=5.0
integral=quad(F,x0,x1,args=(k,))
```

Integral: Numérica = (-1.2, 1.3322676295501878e-14), Exacta = -1.2

Nótese que los argumentos opcionales del integrando se pasan como la tupla `args` que en este caso, dado que la función solo depende de un parámetro opcio-

nal, se escribe de forma poco intuitiva como `args=(k,)` donde la coma final es obligatoria.

El resultado de la función quad es una tupla con dos números: el valor de la integral y el error estimado de la misma. Como vemos, en el ejemplo arriba, la integral es prácticamente exacta.

Nota

Cuadraturas Gaussianas. El método usado por quad para calcular la integral se conoce como *cuadraturas gaussianas* y approxima la integral como una serie de pocos términos del valor de la función definido en algunos puntos específicos [45]. Las cuadraturas gaussianas permiten calcular la integral de funciones polinómicas de forma *exacta*. Esta es la razón por la cual la integral en el ejemplo dado aquí, es idéntica al valor esperado.

4.1.9. Ecuaciones diferenciales

Encontrar la antiderivada de una función (ver [Sección 4.1.7](#)), se puede formular, de forma general, como el problema de encontrar una función $F(t)$ tal que:

$$\frac{dF(t)}{dt} = f(t) \quad (4.23)$$

La solución a este problema es, por definición:

$$F(t) = \int f(t) dt$$

La integral indefinida en el lado derecho de la anterior ecuación y los métodos numéricos o exactos (analíticos) para obtenerla (no cubiertos en este corto resumen) representan unas de las herramientas matemáticas más útiles de la física.

Pero, existen situaciones en las que el cálculo de una antiderivada no se reduce simplemente a una integral indefinida. Considere por ejemplo el siguiente problema:

$$\frac{d^2F(t)}{dt^2} = -kF(t) \quad (4.24)$$

que, en palabras, se formularía como: encontrar la función cuya segunda derivada es proporcional (k se supone constante) al negativo de ella misma.

Ambas, las Ecs. (4.23) y (4.24) se conocen como **ecuaciones diferenciales**.

Las ecuaciones diferenciales se clasifican según:

- **Su orden.** El orden de una ecuación diferencial es igual al máximo orden de la derivada de la función objetivo (antiderivada) que aparece en la ecuación. La ecuación diferencial básica (4.23) es, por ejemplo, de *primer orden* porque solo involucra la *primera* derivada de la función $F(t)$. Por su parte, la ecuación diferencial (4.24) es una ecuación diferencial de *segundo orden*.

- **Su linealidad.** Una ecuación diferencial que solo depende de primeras potencias de la función y sus derivadas se dice que es lineal. En caso contrario tenemos una *ecuación diferencial no lineal*. Las ecuaciones (4.23) y (4.24) son lineales, pero la siguiente ecuación diferencial de primer orden, no lo es:

$$\frac{dF(t)}{dt} = \frac{h}{F(t)},$$

donde h es una constante.

- **El número de variables independientes.** Una ecuación diferencial en la que la función depende de una sola variable real se conoce como una **ecuación diferencial ordinaria** (*ODE* por la sigla en inglés de *ordinary differential equation*). Si, por otro lado, la función es un campo escalar o vectorial y la ecuación diferencial se expresa en términos de derivadas parciales (y totales) hablamos de una **ecuación diferencial parcial** (*PDE* por sus siglas en inglés).
- **El número de funciones o variables dependientes.** Es posible que un problema implique encontrar más de una antiderivada. En ese caso hablamos de un **sistema de ecuaciones diferenciales**. Un caso común de sistemas de ecuaciones diferenciales se produce cuando queremos encontrar la antiderivada de una función vectorial (cada componente de una función vectorial es una función en sí misma). El caso más importante en la física de un sistema de ecuaciones diferenciales es la *ecuación de movimiento de una partícula* (que exploraremos a fondo en la ??):

$$\frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} = \vec{a}$$

Esta ecuación es una forma abreviada de escribir el sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned}\frac{d^2x(t)}{dt^2} &= a_x \\ \frac{d^2y(t)}{dt^2} &= a_y \\ \frac{d^2z(t)}{dt^2} &= a_z\end{aligned}\tag{4.25}$$

Como las cantidades a_x , a_y y a_z pueden ser a su vez funciones del tiempo, de las funciones x , y , z y de sus derivadas, se habla, además, de un **sistema de ecuaciones diferenciales acopladas**.

- **Las condiciones que deben proveerse para resolverla.** La solución abstracta de una ecuación diferencial, es decir, el problema de encontrar la antiderivada general, es el equivalente a la integral indefinida. Las integrales definidas, por su lado, equivalen en la teoría de ecuaciones diferenciales a los que se

conocen como **problemas de valor inicial** (*IVP* por el acrónomimo en inglés de *initial value problem*.) En este tipo de problemas la solución a la ecuación diferencial consiste en encontrar el valor de la función para cualquier valor de la variable independiente una vez se ha provisto el valor de la función (o funciones) y de sus derivadas, en un valor específico o inicial de la variable independiente. Así por ejemplo:

$$\frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} = \vec{a}, \text{ con } \vec{r}(0) : (0, 0, 0) \text{ y } \dot{\vec{r}}(0) : (1, 0, 0)$$

es un IVP.

Por otro lado un **problema de condiciones de frontera** (*BVP* por la sigla en inglés de *boundary value problem*) es aquel en el que el valor de la función dependiente (no de sus derivadas necesariamente) se provee para varios valores de la variable independiente. Así por ejemplo:

$$\frac{d^2F(t)}{dt^2} = -F(t), \text{ con } F(0) = 0 \text{ y } F(\pi/2) = 1,0,$$

es un BVP.

Como se intuye fácilmente, la dificultad en la solución a una ecuación diferencial, como sucede también con las ecuaciones algebraicas, puede aumentar con su orden. Sin embargo, usando variables auxiliares, siempre es posible escribir una ecuación diferencial de orden M como un sistema de M ecuaciones diferenciales de primer orden.

Por ejemplo, si en la Ec. (4.24) llamamos $G(t) \equiv dF(t)/dt$, esa ecuación diferencial de segundo orden se puede escribir como el sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dt} &= G \\ \frac{dG}{dt} &= -kF \end{aligned} \tag{4.26}$$

A esta sistema de ecuaciones, lo llamamos el *sistema de ecuaciones diferenciales reducido*.

La reducción del orden será un método muy utilizado en este libro para abordar la solución a las ecuaciones diferenciales de la mecánica celeste y analítica.

Algoritmos para la solución de ODE

La solución aproximada de ecuaciones diferenciales es una de las áreas de mayor interés en el análisis numérico. Sus beneficios prácticos se extienden desde la física teórica y la economía hasta la climatología y la simulación del vuelo de aviones y vehículos espaciales. A lo largo de los últimos 350 años (y en paralelo con la evolución de la mecánica), se han desarrollado métodos numéricos para aproximar la solución de todos los tipos de ecuaciones diferenciales que hemos mencionado hasta aquí.

En este libro, sin embargo, nos concentraremos en la solución de sistemas ecuaciones diferenciales ordinarias con valores iniciales o *IVP*.

Los métodos numéricos generales, desarrollados para resolver este tipo de problemas (ver [45] para detalles sobre los métodos y algoritmos explícitos), suponen que la ecuación o sistema de ecuaciones diferenciales que queremos resolver puede escribirse como un sistema reducido de ecuaciones diferenciales de primer orden de la forma:

$$\{\dot{Y}_i = f_i(\{Y_k\}, t)\}_{i=0,1,\dots,M} \quad (4.27)$$

Donde Y_i ($i = 0, 1, 2, \dots, M - 1$) es el conjunto de funciones auxiliares que reemplaza a las funciones dependientes y sus derivadas de orden inferior y f_i son las función que proveen el valor de la primera derivada de la variable auxiliar Y_i .

Así por ejemplo, para resolver la ecuación diferencial (4.24), que ya habíamos reducido como las ecuaciones (4.26), las variables auxiliares y sus derivadas serían:

$$\begin{aligned} Y_0 &= F & f_0(t, Y_0, Y_1) &= Y_1 \\ Y_1 &= G & f_1(t, Y_0, Y_1) &= -kY_0 \end{aligned} \quad (4.28)$$

Con esta identificación, el problema original puede escribirse, de forma general como la Ec. (4.27).

En este libro usaremos la rutina `odeint` de la biblioteca científica SciPy (ver *Nota* abajo) para integrar numéricamente sistemas de ecuaciones diferenciales de la forma reducida. El lector puede leer la [documentación completa de `odeint`](#)¹⁹ para conocer los detalles de su aplicación.

El primer paso para usar `odeint` es implementar las ecuaciones reducidas como una rutina. En nuestro ejemplo (Ec. 4.28) la rutina sería:

```
def ode_simple(Y, t, k=1):
    f=[0, 0]
    f[0]=Y[1]
    f[1]=-k*Y[0]
    return f
```

Los primeros dos argumentos de esta rutina (ver Sección 4.1.3), es decir Y (que contiene una lista de los valores instantáneos de las variables auxiliares Y_i) y t (el tiempo en el que las variables auxiliares tienen ese valor) deben estar, estrictamente en ese orden. Otros podrían encontrar más natural poner de primero el tiempo, pero `odeint` está diseñado para trabajar con rutinas con este *prototipo* particular. Además de estos argumentos obligatorios, la rutina puede tener cualquier otro argumento opcional. En este caso aprovechamos esta libertad para proveer el valor de la constante k , que aparece en la ecuación diferencial, y para el cual hemos asumido un valor por defecto $k=1$ (naturalmente el usuario de la rutina podrá especificar un valor distinto cuando la llame.)

Para resolver este conjunto de ecuaciones diferenciales debemos, además de la rutina anterior, proveer:

1. Valores específicos para los parámetros de la ecuación diferencial (en este caso la constante k),
2. Una lista de condiciones iniciales, es decir de los valores iniciales de las variables auxiliares $\{Y_i(t = t_0)\}$

¹⁹<https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.integrate.odeint.html>

3. un conjunto de valores del tiempo (incluyendo el tiempo inicial t_0) para los cuales deseamos predecir el valor de la antiderivada (función o funciones dependientes.)

El siguiente algoritmo prepara estos insumos para `odeint` en nuestro ejemplo particular:

```
from numpy import array

k=1.5

Y0s=array([1.0,0.0])

ts=array([0.0,1.0,2.0,3.0,4.0,5.0])
```

Nótese que para las condiciones iniciales y los valores de tiempo (que son aquí arbitrarios, el lector podría escoger unos completamente diferentes) hemos escogido usar arreglos de NumPy (`array`) en lugar de listas planas (ver [Sección 4.1.1](#)). Aunque esto no es obligatorio, más adelante hará más fácil la manipulación matemática de estas variables.

Nota

El plural en los algoritmos. Preste atención a la convención que usaremos en lo sucesivo de usar la letra `s` como sufijo del nombre de algunos arreglos y matrices (p.e. `Y0s`, `ts`). En lo sucesivo (a no ser que se indique lo contrario) `t` denotará un valor individual de la variable, pero `ts` será un arreglo de valores de `t`.

La solución numérica al conjunto de ecuaciones diferenciales implementados en la rutina `ode_simple` se obtiene, finalmente, invocando `odeint`:

```
from scipy.integrate import odeint
Ys=odeint(ode_simple,Y0s,ts,args=(k,))
```

Solución, `Ys` =

```
[[ 1.          0.        ]
 [ 0.33918602 -1.15214115]
 [-0.76990562 -0.78158038]
 [-0.86146852  0.6219388 ]
 [ 0.18550948  1.20348632]
 [ 0.987313   0.1944726 ]]
```

Las filas de la matriz solución `Ys`, contienen el valor de las variables auxiliares $\{Y_i\}$ en cada uno de los tiempos provistos. Las columnas, naturalmente, corresponden a los valores instantáneos de cada una de esas variables auxiliares. Así, la componente `Ys[0,0]` corresponde al valor de Y_0 (es decir el valor de la función F de nuestro ejemplo) en t_0 (condición inicial).

También es posible extraer tajadas de la matriz. Así, $\text{Ys}[:, 1]$ (que podría leerse como *el segundo valor de cualquier fila* o simplemente *la columna 1*), corresponde al valor de la función auxiliar G en cada uno de los tiempos de integración (recuerde que $G = Y_1$, ver la identificación en la Ec. 4.28).

Usando la matriz de solución Ys es posible, finalmente, hacer el gráfico de la función $F(t)$ que estabamos buscando:

(Algoritmo 4.3)

```
import matplotlib.pyplot as plt

#Extraemos los valores de la función F
Fs=Ys[:,0]

plt.figure();
plt.plot(ts,Fs,marker='o', linewidth=0);

#--hide--
plt.xlabel("$t$");
plt.ylabel("$F(t)$");
```

ver Figura 4.3

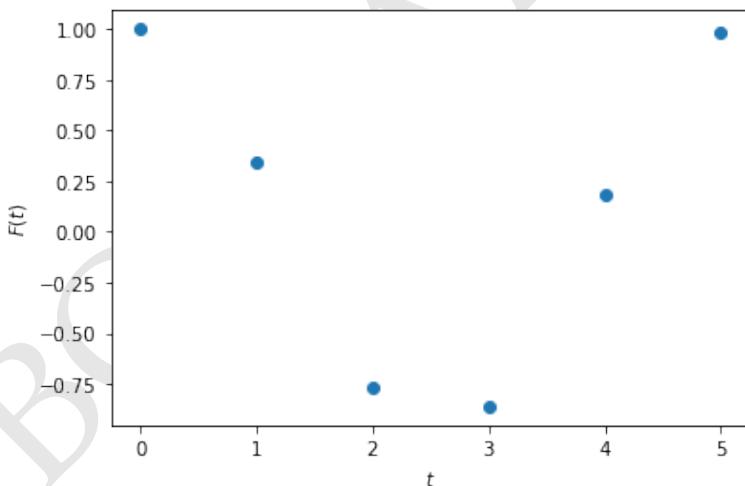


Figura 4.3: Figura correspondiente al código 4.3. Solución aproximada de la ecuación diferencial $d^2F/dt^2 = -kF$ con $k=1.5$.

Naturalmente la resolución de este gráfico es bastante pobre porque hemos pedido al algoritmo encontrar únicamente los valores de $F(t)$ en 5 valores del tiempo (arreglo ts .) Si se incrementa el número de componentes de este vector el resultado será mucho más cercano al que esperamos de una función.



Nota

Los algoritmos detrás de `odeint`. La rutina `odeint` es un *empaque* en Python (*wrap* en inglés) de un complejo y robusto paquete de rutinas conocido como **ODEPACK**^a. Desarrollado por el *Center for Applied Scientific Computing* del *Lawrence Livermore National Laboratory*, las rutinas de ODEPACK están escritas en lenguaje FORTRAN77 (Python se usa únicamente para pasar los parámetros al paquete y para recuperar las salidas; ese es justamente el sentido del nombre “empaque”) y han sido probadas y perfeccionadas durante varias décadas en distintas aplicaciones científicas y de ingeniería [32].

Existen otras rutinas en el paquete SciPy para resolver ecuaciones diferenciales con condiciones iniciales (IVP). Por ejemplo `ode` y `solve_ivp` pueden usarse también (esta última es, por ejemplo, la recomendada por los desarrolladores de SciPy). Sin embargo, estas otras rutinas tienen una *interface* un poco más complicada. Así por ejemplo, para integrar la e.d.m. del ejemplo visto aquí, usando `solve_ivp`, el código **mínimo** en Python sería:

```
from scipy.integrate import solve_ivp
solucion=solve_ivp(fun=lambda t,Y:ode_simple(Y,t,k),
                    t_span=[ts[0],ts[-1]],y0=Y0,t_eval=ts)
```

Como puede apreciarse la complejidad del código supera con creces la de aquel que usamos para invocar `odeint`. A esto se suma el hecho de que la solución, que en el caso de `odeint` es una matriz `Y` fácil de interpretar, en el caso de `solve_ivp` es en realidad un *objeto* cuyo *atributo* `solucion.y` contiene la solución que buscamos. Y finalmente, pero no menos importante: para el tipo de ecuaciones diferenciales que usaremos en este libro `solve_ivp` es casi dos veces más lento que `odeint`. El lector sin embargo puede explorar esas otras alternativas, especialmente si quiere, por ejemplo, comparar distintos métodos de solución (a diferencia de `odeint`, `solve_ivp` escoger el método de solución.)

^a<https://computing.llnl.gov/casc/odepack>

4.1.10. Funcionales y cálculo de variaciones

Un tema poco cubierto en los textos básicos de cálculo, pero de gran utilidad en la mecánica, es el denominado **cálculo de variaciones**. Si bien en esta sección de “repaso” no pretendemos ofrecer una introducción detallada a esta importante área del análisis matemático, es necesario presentar aquí algunos resultados básicos que serán de utilidad para el resto del libro.

Si el cálculo infinitesimal, que repasamos en las secciones anteriores, trata sobre la variación continua de funciones de variable real, el cálculo de variaciones se ocupa de la variación de los que se conocen como **funcionales**.

En términos informales, un funcional es una “función de funciones”, es decir,

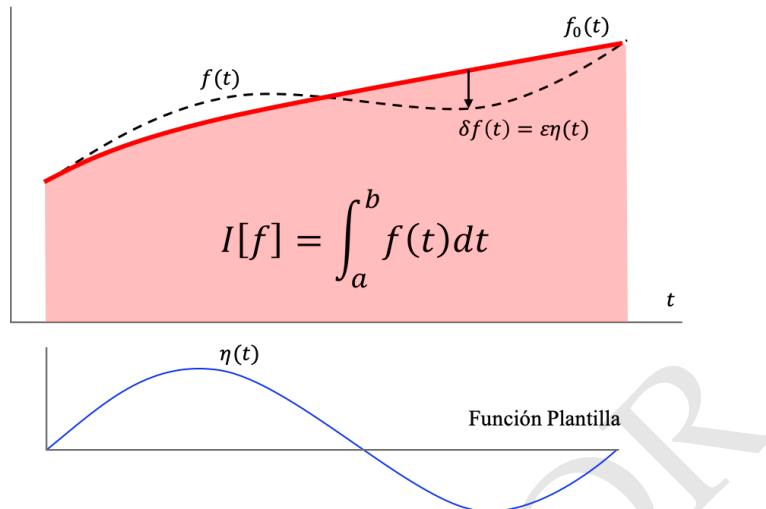


Figura 4.4: El área bajo una curva es un funcional, en tanto depende de la función que represente la curva, $f(t)$ o $f_0(t)$. Se conoce como una variación δf a la diferencia entre dos funciones cercanas, parametrizada a través de un número real ϵ y una función plantilla (panel inferior.) En términos de variaciones el valor de cualquier función vecina a una función de referencia f_0 se puede calcular, en un intervalo de interés, como $f(t) = f_0(t) + \epsilon\eta(t)$.

una regla de correspondencia entre el conjunto de las funciones y el de los números reales.

Un ejemplo, muy interesante e ilustrativo de un funcional, es la integral definida de una función de variable real:

$$I[f] = \int_a^b f(t) dt$$

La notación $I[f]$, en lugar de $I(b)$ como lo usamos en [Sección 4.1.7](#), trata de poner en evidencia el hecho de que lo que nos interesa aquí no es el valor mismo de la integral definida, sino cómo el valor de esta cantidad cambia si modificamos la función f . En la [Figura 4.4](#) se muestra la interpretación gráfica de la integral definida. Sabemos que el área bajo la curva, el valor de nuestro funcional, dependerá de si usamos la función $f(t)$ o $f_0(t)$.

De la misma manera en la que se puede estudiar el efecto que un cambio muy pequeño Δt en el valor de la variable independiente t tiene en una función de variable real $f(t)$, como lo hicimos por ejemplo para definir la derivada (ver [Sección 4.1.4](#)), en el cálculo variacional es posible estudiar el efecto que un cambio pequeño δf de una función f tiene en el funcional $I[f]$.

Para hacerlo debemos primero definir otra función η que sirve de “plantilla” para el cambio. Al cambio en f se lo llama **variación** y se escribe como:

$$\delta f \equiv \epsilon\eta \tag{4.29}$$

Una ilustración del concepto de *variación* se muestra en la [Figura 4.4](#). Allí reconocemos una importante propiedad de la función de plantilla $\eta(t)$ y es que vale

cero en los extremos del intervalo considerado $[a, b]$.

El cálculo variacional surgió originalmente para resolver problemas prácticos en física, tales como hallar las funciones que maximan o minimizan (extremos) funcionales de alguna utilidad.

Así por ejemplo, considere la siguiente pregunta: ¿cuál es la curva más corta que conecta dos puntos en el plano de euclíadiano?

Para responder a esta pregunta debemos primero construir el funcional “distancia a lo largo de una curva”, también llamado, longitud de arco ([2]):

$$I[f] = \int_a^b \sqrt{1 + \left| \frac{df}{dt} \right|^2} dt \quad (4.30)$$

Queremos encontrar la función f_0 tal que $I[f_0]$ tenga el mínimo valor entre todas las posibles funciones f .

Para encontrar la función que minimiza este funcional debemos, como se acostumbra en el cálculo ([1]), derivar el funcional respecto a la cantidad que parametriza la variación: ϵ .

Escribamos el funcional de forma más general, en términos de una función cercana al mínimo escrita como $f = f_0 + \epsilon\eta$:

$$I[f] = \int_a^b L(f(t), \dot{f}(t), t) dt \quad (4.31)$$

Nótese que hemos escrito el integrando como una función general L que depende del valor de la función $f(t)$, de su derivada $\dot{f}(t)$ y de la variable independiente t . Implícitamente, el funcional depende también del parámetro ϵ dado que $f = f_0 + \epsilon\eta$.

Si derivamos el funcional respecto de ϵ , obtenemos:

$$\frac{dI[f]}{d\epsilon} = \int_a^b \frac{d}{d\epsilon} L(f(t), \dot{f}(t), t) dt$$

Aplicando la regla de la cadena, la integral del lado derecho nos queda:

$$\frac{dI[f]}{d\epsilon} = \int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial f} \frac{df}{d\epsilon} + \frac{\partial L}{\partial \dot{f}} \frac{d\dot{f}}{d\epsilon} \right) dt$$

Como $f(t) = f_0(t) + \epsilon\eta(t)$, entonces $df/d\epsilon = \eta$, mientras que $d\dot{f}/d\epsilon = \dot{\eta}$. Así la integral anterior se desarrolla como:

$$\frac{dI[f]}{d\epsilon} = \int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial f} \eta + \frac{\partial L}{\partial \dot{f}} \dot{\eta} \right) dt \quad (4.32)$$

El término $\int_a^b (\partial L / \partial \dot{f}) \dot{\eta} dt$ se puede integrar por partes, si se hace $u = \partial L / \partial \dot{f}$ y $dv = \dot{\eta} dt$:

$$\int_a^b \frac{\partial L}{\partial \dot{f}} \dot{\eta} dt = \frac{\partial L}{\partial \dot{f}} \eta \Big|_a^b - \int_a^b \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{f}} \right) \eta dt$$

El primer término del lado derecho de la ecuación anterior es cero, en tanto, por definición $\eta(a) = \eta(b) = 0$.

Reemplazando en la Ec. (4.32), la derivada del funcional respecto de epsilon queda finalmente:

$$\frac{dI[f]}{d\epsilon} = \int_a^b \eta(x) \left(\frac{\partial L}{\partial f} - \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial \dot{f}} \right) dx$$

Para que $I[f]$ sea mínima en $f = f_0$ su derivada $dI[f]/d\epsilon$ debe ser cero en $\epsilon = 0$. Esto equivale a la *ecuación integral*:

$$\int_a^b \eta(x) \left(\frac{\partial L}{\partial f} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{f}} \right) dt = 0 \quad (4.33)$$

que lamentablemente no es muy útil para resolver nuestro problema original. Para acercarnos a la solución necesitamos de un poderoso teorema:

Proposición 4.7

Lema fundamental del cálculo de variaciones. Si una función continua $f(t)$ en el intervalo abierto (a, b) satisface la igualdad:

$$\int_a^b f(t)h(t) dt = 0$$

para toda función $h(t)$ continuamente diferenciable (todas sus derivadas son continuas) y con *soporte compacto* (acotada), entonces $f(t) = 0$.

De acuerdo con este teorema, y suponiendo que $\eta(t)$ es continuamente diferenciable y acotada, la función entre paréntesis la ecuación integral (4.33) es:

$$\frac{\partial L}{\partial f} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{f}} = 0 \quad (4.34)$$

Esta ecuación es una versión particular (para funciones de una sola variable) de la que se conoce en la historia como la **ecuación de Euler-Lagrange** y que será de importancia central en este libro.

Volviendo a nuestro problema original, es decir, encontrar la curva con la menor longitud entre dos puntos, y reconociendo que:

$$L(f(t), \dot{f}(t), t) = \sqrt{1 + |\dot{f}(t)|^2},$$

Entonces $\partial L/\partial f = 0$ (no aparece el símbolo f en la fórmula de L) y $\partial L/\partial \dot{f} = \dot{f}/\sqrt{1 + |\dot{f}(t)|^2}$. De allí, la ecuación de Euler-Lagrange (4.34) en este problema se convierte en:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{f}}{\sqrt{1 + |\dot{f}(t)|^2}} \right) = 0$$

Esta ecuación significa que el término entre paréntesis es constante. Después de un poco de álgebra, la expresión resultante, se puede integrar para obtener:

$$f(t) = At + B,$$

donde A, B son constantes.

La respuesta final a la pregunta original es ahora clara: la curva más corta entre dos puntos en el plano euclíadiano es una línea recta.

Algoritmos en el cálculo variacional

Si el cálculo variacional es poco común en los textos básicos de cálculo infinitesimal, los algoritmos relacionados con él son aún más escasos en los textos de análisis numérico.

Dada la importancia del cálculo variacional en la mecánica nos detendremos un momento aquí para explorar desde la algoritmia, al menos la solución al problema de cálculo variacional que expusimos en la sección anterior: el cálculo de la curva más corta entre dos puntos en el plano euclíadiano.

Para ello escribamos primero la rutina que servirá en nuestro caso como funcional (y que implementa la Ec. 4.30):

(Algoritmo 4.4)

```
def funcional_integral(f0,eta,epsilon,a,b,**opciones_de_f0):

    #Definimos las función con su variación
    f=lambda t:f0(t,**opciones_de_f0)+epsilon*eta(t)

    #La derivada de f la calculamos con derivative
    from scipy.misc import derivative
    dfdt=lambda t:derivative(f,t,0.01)

    #Este es el integrando del funcional
    from numpy import sqrt
    L=lambda t:sqrt(1+abs(dfdt(t))**2)

    #El funcional es la integral definida del integrando
    from scipy.integrate import quad
    integral=quad(L,a,b)
    longitud=integral[0]

    return longitud
```

Nótese que un *funcional* en el lenguaje de la algoritmia es una rutina que recibe como parámetros otras rutina (en este caso f_0 y η) y devuelve un valor numérico (en este caso $longitud$.)

La rutina en el Alg. (4.4), si bien parece compleja, recoje todos los elementos que hemos aprendido en esta sección: los parámetros opcionales de una rutina expresados como `**opciones_de_f0` y que vimos en una nota de la Sección 4.1.3, las funciones `lambda` que vimos en la misma sección, la derivada numérica calculada usando `derivative` que conocimos en la Sección 4.1.4 y la integral por cuadraturas usando `quad` de la Sección 4.1.7.

Más importante aún es el hecho que esta rutina puede usarse para cualquier

funcional que se exprese como una integral definida de la forma de la Ec. (4.31). Para adaptarla a otras situaciones, simplemente se debe cambiar la función L. En la sección de problemas al final de este capítulo se pone a prueba esta rutina en otros contextos.

Supongamos ahora que queremos calcular la curva más corta que une los puntos del plano cartesiano $(0,0)$ y $(\pi, 1)$ (es decir $a = 0$ y $b = \pi$). Para ello proponemos una función de referencia $f_0(t) = (t/\pi)^n$. Esta función pasa por ambos puntos para todo n . Como función de plantilla $\eta(t)$, que debe ser una función acotada de acuerdo al lema fundamental del cálculo de variaciones, usaremos la función trigonométrica seno (que cumple la condición $\eta(a) = \sin 0 = 0$ y $\eta(b) = \sin \pi = 0$).

El siguiente algoritmo implementa estas elecciones:

```
#Intervalo entre los puntos
from numpy import pi
a=0
b=pi

#Función de referencia
def curva(t,n=1):
    return (t/pi)**n

#Función plantilla
from numpy import sin
eta=sin
```

Para ilustrar el uso de la rutina en el Alg. (4.4), calculemos la longitud de arco para el caso en el que $n = 2$ y $\epsilon = 0,5$:

```
n=2
If=funcional_integral(curva,eta,0.5,a,b,n=n)

I[f] = 3.337162809417341
```

Para encontrar la trayectoria más corta entre los puntos seleccionados, debemos minimizar una función del tipo `longitud_arco(epsilon)` que llame a la rutina `funcional_integral`, pero que solo dependa de la variable que queremos minimizar, es decir de `epsilon`. Para ello podemos definir la función `lambda`:

```
longitud_arco=lambda epsilon:funcional_integral(curva,eta,epsilon,
                                                a,b,n=n)
```

La minimización, finalmente, se consigue usando la rutina `minimize` del paquete SciPy, capaz de encontrar el mínimo de funciones escalares con un número arbitrario de variables. Lo único que necesita `minimize` para lograr su cometido es que le pasemos una rutina que tenga un solo parámetro, en nuestro caso `longitud_arco` y un valor de prueba para la variable independiente (en nuestro caso usaremos $\epsilon = 0$):

(Algoritmo 4.5)

```
from scipy.optimize import minimize
solucion=minimize(longitud_arco,0.0)
```

Resultado de la minimización:

```
fun: 3.2975722013512403
hess_inv: array([[0.73687233]])
jac: array([1.1920929e-06])
message: 'Optimization terminated successfully.'
nfev: 12
nit: 3
njev: 4
status: 0
success: True
x: array([0.25801323])
```

Nótese que el resultado de la rutina `minimize` es un *objeto* entre cuyos atributos se encuentra el valor de la variable independiente `x` que hace mínima la función de nuestro interés, en este caso `longitud_de_arco`.

Puesto en términos de nuestro problema el resultado anterior indica que para curvas del tipo $f_0(t) = (t/\pi)^2$, que sufren variaciones con una función plantilla $\eta(t) = \sin t$, la curva de mínima longitud entre el punto $(0,0)$ y el punto $(0,\pi)$, corresponde a una variación con $\epsilon = 0,258$.

Hagamos un gráfico de la función resultante y de su comparación con la solución analítica:

(Algoritmo 4.6)

```
import matplotlib.pyplot as plt
plt.figure()

from numpy import linspace,pi
ts=linspace(0,pi)

#Valor de epsilon proveniente de la minimización
epsilon=solucion.x[0]

plt.plot(ts,curva(ts,n=n), 'r.',
         label=f"Curva de referencia")
plt.plot(ts,curva(ts,n=n)+epsilon*eta(ts), 'b-',
         label=f"Curva variada con $\epsilon$={epsilon:g}")
plt.plot(ts,curva(ts,n=1), 'k--',
         label=f"Línea recta")

plt.legend();

---hide---
plt.xlabel("t");
```

ver Figura 4.5

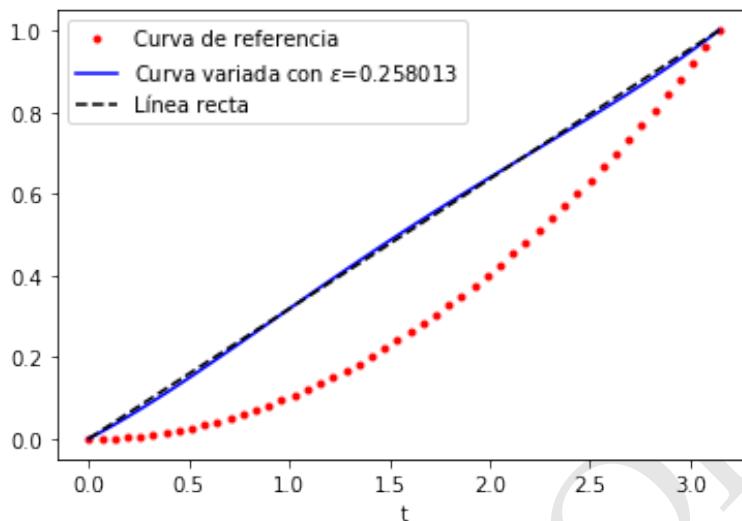


Figura 4.5: Figura correspondiente al código 4.6. La curva continua indica una aproximación numérica al camino más corto entre los puntos $(0,0)$ y $(0,\pi)$ del plano euclíadiano, encontrada al minimizar el funcional longitud de arco y usando como función de prueba $f_0 = (t/\pi)^n$ (línea punteada) y como función plantilla $\epsilon(t) = \sin t$. El valor de ϵ que corresponde a la solución se muestra en la etiqueta. Para comparación se muestra (línea rayada) la solución exacta, que corresponde a una línea recta.

4.1.11. Gráficos interactivos

Para ver los gráficos interactivos use a las libretas de Jupyter que están disponibles en la versión electrónica del libro.

4.2. Curvas cónicas

En el año 1609, Johannes Kepler descubrió uno de los secretos mejor guardados del Universo: el camino que seguía el planeta Marte alrededor del Sol no era un círculo, como lo “mandaban” siglos de tradición filosófica y astronómica, sino una *elipse*.

Durante meses el astrónomo Prusiano había estado luchando, sin mucha suerte, por ajustar las precisas observaciones del astrónomo Danés Tycho Brahe (“[tycho braja](#)²⁰”) del planeta en cuestión, al modelo que Nicolás Copérnico había desarrollado unos 60 años antes y en el que se suponía que los planetas se movían “alrededor” del Sol sobre trayectorias circulares descentradas (el Sol no ocupaba realmente el centro en el sistema Copérnico.)

Después de muchos intentos fallidos Kepler relata, en la que hoy se considera su obra cumbre “*Astronomía Nueva*”, que desesperado empezó a considerar la posibilidad de que la órbita de Marte fuera “ovalada” (con forma de huevo) en lugar de circular. Finalmente, después de muchos intentos, Kepler “adivinó” que el ovalo no podía ser otra cosa sino una elipse, una figura geométrica que había

²⁰https://es.forvo.com/word/tycho_brahe

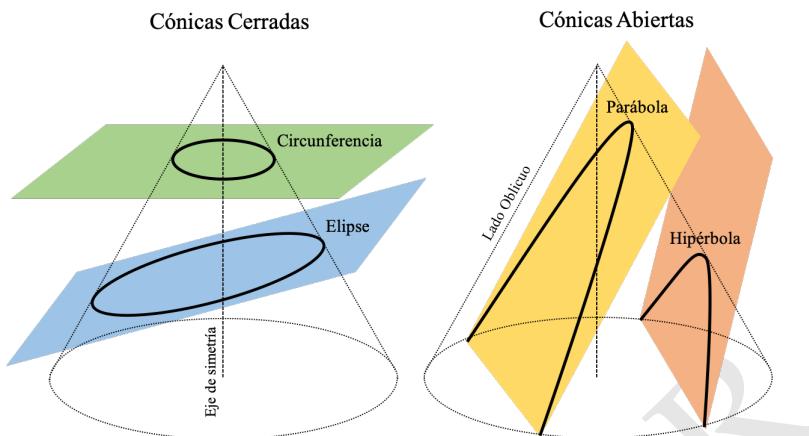


Figura 4.6: Definición geométrica original de las curvas cónicas.

sido ampliamente estudiada por los geómetras de la antigüedad y la edad media, pero cuyo papel en la astronomía no había sido considerado hasta ese momento.

Esta historia marcó el inicio de la mecánica celeste y el renacimiento del interés astronómico por la elipse y las curvas emparentadas con ella y que hoy llamamos *curvas cónicas*. En las próximas sesiones repasaremos las propiedades geométricas de las cónicas, desde su definición original hasta su descripción algebraica moderna, en preparación para su aplicación en el estudio de la trayectoria de los cuerpos en mecánica celeste.

4.2.1. Definición geométrica

Desde los primeros trabajos geométricos griegos, compilados y organizados por Euclides de Alejandría (323 a 283 a.e.c.) en su libro “*Elementos*”, se sabe que la familia de curvas que resultan de intersectar un plano con un cono (una figura que se forma al hacer rotar en el espacio un triángulo alrededor de uno de sus lados, ver ??) tienen propiedades geométricas especiales. Es a esta familia de curvas a las que llamamos *cónicas*, en clara referencia a su definición geométrica original.

La **circunferencia**, que es una cónica, resulta por ejemplo de intersectar el cono con un plano perpendicular a su eje de simetría. Si el plano, sin embargo, forma un ángulo distinto de 90 grados con el eje de simetría, pero no es paralelo a los lados del cono, la figura resultante, que es también cerrada como la circunferencia, se llama una **elipse**. Si el plano es paralelo a los lados oblicuos del cono la figura resultante es abierta y la llamamos una **parábola**. Finalmente, si el plano no es paralelo a los lados del cono, pero por su ángulo nunca intersecta el eje de simetría, decimos que la figura que se forma es una **hipérbola**.

4.2.2. Del nombre al álgebra

La palabra “parábola” viene del griego $\pi\alpha\rho\alpha\beta\alpha\lambda\lambda\epsilon\nu$ (“parabalei”) que significa “poner al lado”, “igualar”, “comparar” (de allí que una parábola en español sea también una historia que donde se narran hechos que pueden servir como mode-

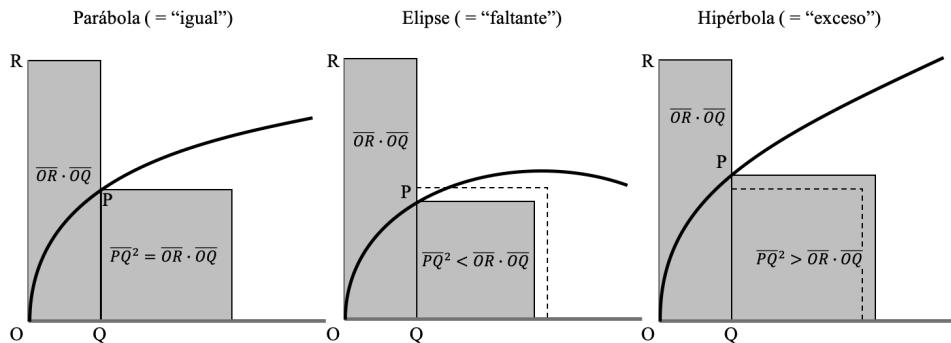


Figura 4.7: Definición con áreas aplicadas de las curvas cónicas y el origen de sus nombres.

los de comportamiento.) Este curioso nombre tiene su origen en la manera como este tipo de curva fue definida de forma más rigurosa a como lo hicimos en la sección anterior, por uno de los más grandes matemáticos de la antiguedad, Apolonio de Perga (ca. 262 a ca. 190 a.e.c.) en su tratado clásico *Conicas*.

En la [Figura 4.7](#) se ilustra la construcción de Apolonio y la razón para el nombre que dió a cada cónica. Para ello ubicamos las curvas sobre el plano de modo que su eje de simetría quede alineado con una semirrecta horizontal que comienza en el punto O que llamaremos *apside* de la cónica (la elipse tiene dos *apsides*.) Todas las cónicas de la figura tienen asociado un parámetro que define su tamaño y que es igual a la longitud de un segmento \overline{OR} perpendicular al eje de simetría. Si aumentamos o disminuimos la longitud de este segmento las cónicas serán más grandes o más pequeñas de las representadas en la figura. Por cada punto P de las cónicas existe un punto Q que es su proyección sobre el eje de simetría.

La propiedad descubierta por Apolonio (y posiblemente por Euclides y otros matemáticos anteriores a él) es que el área del rectángulo que tiene como base el segmento \overline{OQ} y como altura el parámetro de tamaño, es decir, la longitud del segmento \overline{OR} puede ser (dependiendo de la cónica) igual, menor o mayor al área del cuadrado que tiene como lado la longitud del segmento \overline{PQ} . En la geometría clásica a esta operación se la llama la *aplicación de un rectángulo* o la *cuadratura del rectángulo*.

La parábola es entonces la figura en la que esas áreas son exactamente iguales. De allí su nombre en griego. Por otra parte la elipse, cuyo nombre viene del griego *ελειπεῖν* (“eleipeín”) que significa “faltante”, es tal que el área del cuadrado no alcanza a ser igual a la del rectángulo. Y en la hipérbola, cuyo nombre viene del griego *ὑπερβαλλεῖν* (“hiperbalein”) que significa “exceso”, el área del cuadrado supera la del rectángulo aplicado.

En términos algebraicos (geometría analítica), si construimos un sistema de coordenadas cartesianas con origen en el apside O, eje x_a (el subíndice indica precisamente que el origen está en al apside) en la dirección del eje de simetría y eje y_a en dirección del segmento \overline{OR} (cuya longitud llamaremos L), las coordenadas (x_a, y_a) de los puntos sobre las cónicas se relacionan de acuerdo con [24]:

$$y_a^2 = Lx_a + \eta x_a^2 \quad (4.35)$$

Aquí η es un parámetro que define la “forma” de la cónica, siendo:

- $\eta = 0$ en el caso de un **parábola**.
- $\eta < 0$ en el caso de una **elipse**.
- $\eta > 0$ en el caso de una **hipérbola**.

Por su origen llamaremos a η el parámetro de Apolonio de la cónica.

En el algoritmo a continuación usamos estas definiciones para dibujar las cónicas y ver el efecto que tienen los parámetros L y η en su tamaño y forma.

(Algoritmo 4.7)

```
#Definimos el algoritmo como una rutina
def conicas_apolonio(eta=-0.5):

    #Escala
    L=10.0
    #Forma
    eta=float(eta)

    #Máximo valor de x
    xamax=L/abs(eta) if abs(eta)>0 else L

    #Valores de x en los que graficaremos
    from numpy import sqrt,linspace
    xas=linspace(0,xamax,100)

    #Ecuaciones de las cónicas referidas al apside
    from numpy import append
    yas_par=sqrt(L*xas)
    yas=sqrt(L*xas+float(eta)*xas**2)

    #Gráfica
    import matplotlib.pyplot as plt
    fig=plt.figure(figsize=(6,6))
    ax=fig.gca()

    ax.plot(xas,yas_par,'k--')
    ax.plot(xas,-yas_par,'k--')
    ax.plot(xas,yas,'b')
    ax.plot(xas,-yas,'b')

    #Decoración
    ax.grid()
    ax.set_title(f"Cónica con $L = {L}$, $\eta={eta}$")

    #Fijamos la misma escala en los ejes
    from pymcel.plot import fija_ejes_proporcionales
    valores=(xas,yas_par,-yas_par,yas,-yas),
    fija_ejes_proporcionales(ax,valores,
```

```
xmin=-xamax/2,ycm=0);  
  
#Invocamos la rutina  
conicas_apolonio()
```

ver Figura 4.8

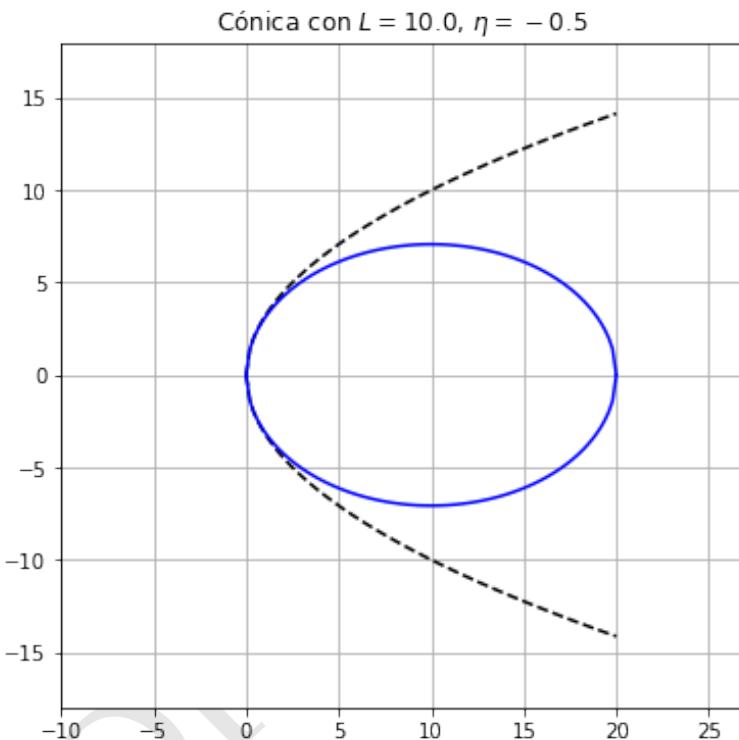


Figura 4.8: Figura correspondiente al código 4.7.

Trate de demostrar usando el algoritmo o manipulando la Ec. (4.35) que la circunferencia, que en la definición original se considera una cónica más, no es más que una elipse para la cuál el parámetro de forma η es igual a -1.

Para ver esta una versión interactiva de esta figura por favor use las libretas disponibles en la [versión electrónica del libro](#)²¹.

4.2.3. Directriz de las cónicas

La definición de Apolonio de las cónicas provista en la sección anterior, no solo nos permite introducir la primera fórmula algebraica para describirlas (Ec. ??) y tal vez la primera en la historia que lo hizo, sino que además nos ayudó a entender el origen de sus nombres.

²¹http://seap-udea.org/MecanicaCeleste_Zuluaga

Sin embargo, esta definición adolece de algunas características que nos resultarán muy útiles en lo sucesivo. No es claro, por ejemplo, la relación entre los parámetros de tamaño L y forma η con otras propiedades de la cónica (en el caso de una elipse por ejemplo con su diámetro.)

Una definición más conveniente es la de Arquímedes (introducida posiblemente unos años antes que Apolonio y usada más frecuentemente en la edad media y tiempos modernos.) Esta definición se basa en proporciones más que en áreas.

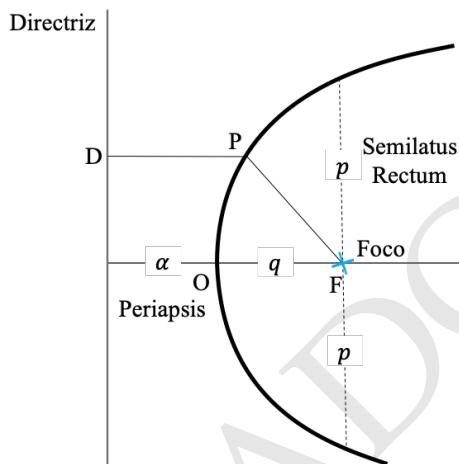


Figura 4.9: Definición de las cónicas usando la recta directriz y el foco.

Según esta definición, toda cónica se puede construir partiendo de una recta a la que se llama *recta directriz* y un punto o *foco* (ver Figura 4.9.) Las cónicas son el lugar geométrico de los puntos tal que la razón de la distancia del punto al foco y la distancia del punto a la directriz es constante:

$$\frac{\overline{PF}}{\overline{PD}} \equiv e \quad (4.36)$$

donde $e > 0$. A este parámetro lo llamamos la *excentricidad* de la cónica.

Si definimos un sistema de coordenadas tal que el eje y_d pase por la recta directriz (el subíndice d indica que el sistema de coordenadas esta precisamente referido a la directriz) y el eje x_d por el foco, en términos de las coordenadas (x_d, y_d) de cada punto de la cónica, la condición en la Ec. (4.36) se puede escribir como:

$$\frac{\sqrt{(F - x_d)^2 + y_d^2}}{x_d} = e \quad (4.37)$$

donde F es la distancia del Foco a la directriz.

Despejando y obtenemos:

$$y_d^2 = (e^2 - 1)x_d^2 + 2Fx_d - F^2 \quad (4.38)$$

Una comparación de esta ecuación con la Ec. (4.35) revela inmediatamente que el valor de la excentricidad dependerá de la cónica así:

- $e = 1$ en el caso de la **parábola**.
- $0 < e < 1$ en el caso de una **elipse**.
- $e > 1$ en el caso de una **hipérbola**.

Estudiemos ahora la posición de dos puntos sobre la cónica que merecen alguna atención. El primero es el punto que se encuentra justo encima del foco, es decir $x = F$. La distancia vertical del eje de simetría a este punto se conoce como el *semilatus rectum* p y se denota como p . Reemplazando en la Ec. (4.38):

$$p^2 = (e^2 - 1)F^2 + 2F^2 - F^2$$

de donde se obtiene:

$$p = eF$$

El otro punto es el apside más cercano a la directriz. Si llamamos α a la distancia de ese punto a la directriz y usamos la definición de la cónica en la Ec. (4.37) obtenemos:

$$\alpha = \frac{F}{1 + e} \quad (4.39)$$

Por otro lado la distancia del foco al apside más cercano, que llamaremos **periapsis** q , viene dada en términos de F, e por:

$$\begin{aligned} q &= F - \alpha \\ &= eF / (1 + e) \end{aligned}$$

o bien,

$$q = \frac{p}{1 + e} \quad (4.40)$$

Si trasladamos ahora la Ec. (4.38) el origen de coordenadas en el punto O, es decir si reemplazamos $x_d = x_a + \alpha, y_d = y_a$ obtenemos:

$$y_a^2 = 2eFx_a + (e^2 - 1)x_a^2 \quad (4.41)$$

que comparando con la Ec. (4.35) nos permite escribir los parámetros de tamaño L y forma η en la definición de Apolonio, en función de la excentricidad e y *semilatus rectum* p :

$$L = 2p$$

$$\eta = e^2 - 1 \quad (4.42)$$

De esta última relación y de la frase final de la Sección 4.2.2 en la que identificamos a la circunferencia como la cónica con $\eta = -1$, concluimos nuevamente que la circunferencia no es más que una elipse para la cuál $e = 0$.

4.2.4. Síntesis geométrica

En resumen podemos decir que las curvas cónicas, o al menos sus principios de construcción, eran conocidas en Grecia posiblemente desde el tiempo de los pitagóricos. Sin embargo, fue Apolonio de Perga quién profundizó en las propiedades geométricas y “algebraicas” de estas curvas. Su aplicación astronómica, sin embargo, era desconocida y fue descubierta solo hasta los trabajos de Kepler en los 1600.

En términos geométricos simples las cónicas con el resultado de la intersección de un cono con un plano con cuatro posibles inclinaciones respecto a su eje de simetría. A pesar de que esto implicaría que existen cuatro posibles cónicas, las definiciones posteriores demuestran que en realidad la circunferencia es un caso particular de la elipse ($\eta = -1$ o $e = 0$.)

Toda cónica tiene: un eje de simetría, una recta directriz, un foco, un áplice (el periapsis o punto más cercano al foco) y un *latus rectum* (segmento perpendicular al eje y que pasa por el foco.) Las elipses tienen un segundo eje de simetría, perpendicular al primero y a distancias iguales de dos apses y por la misma razón un segundo foco y un segundo *latus rectum*.

Las dimensiones y forma de una cónica se pueden describir, en general, en términos de dos parámetros:

- **Parametrización de Apolonio.** Los parámetros son la longitud del *latus rectum* $L > 0$ y el parámetro de Apolonio $-\infty < \eta < \infty$. De acuerdo con η las cónicas se clasifican en: parábola ($\eta = 0$), circunferencia o elipse ($\eta < 0$) e hipérbola ($\eta > 0$).
- **Parametrización de Arquímedes.** Los parámetros son el *semilatus rectum* $p > 0$ y la excentricidad $0 \leq e < 1$. De acuerdo con e las cónicas se clasifican en: parábola ($e = 1$), circunferencia y elipse ($0 \leq e < 1$) e hipérbola ($e > 1$).

Se acostumbra usar más la parametrización de Arquímedes y es la que utilizaremos en lo sucesivo en el libro.

Si se construye un sistema de coordenadas en el plano de la cónica, con eje x en la dirección del eje de simetría, dependiendo de la localización del origen, las coordenadas cartesianas de los puntos sobre la cónica obedecen las ecuaciones:

- **Origen en el áplice:** $y_a^2 = 2px_a + (e^2 - 1)x_a^2$.
- **Origen en la directriz:** $y_d^2 = (e^2 - 1)x_d^2 + (2p/e)x_d - (p/e)^2$

Esta última ecuación no es conveniente para describir la circunferencia.

4.2.5. Descripción algebraica

Si bien en las secciones anteriores adscribimos a Apolonio y a Arquímedes (y a sus contemporáneos griegos) la descripción de las cónicas en términos de ecuaciones algebraicas con sus coordenadas como variables, en realidad esta descripción solo apareció en la historia con el surgimiento de la moderna Geometría analítica en los 1600 y de la mano de René Descartes (“René decart”²²) y Pierre de Fermat (“pier de fermat”).

²²https://es.forvo.com/word/ren%C3%A9_descartes/#fr

Ahora bien, la forma algebraica general que vimos en la Ec. (4.35)

$$y_a^2 - 2px_a - (e^2 - 1)x_a^2 = 0 \quad (4.43)$$

no es precisamente ni la fórmula más simple, ni la más general.

En esta sección exploraremos a fondo las propiedades algebraicas de las cónicas y al hacerlo descubriremos algunas propiedades importantes que usaremos en la mecánica celeste.

Si queremos escribir la ecuación de la cónica en otras formas, podemos, como lo hicimos en el caso de la Eq. 4.41, aplicar dos tipos de transformaciones al sistema de coordenadas:

- Una **traslación**, que implica simplemente modificar la posición del origen de coordenadas, tal y como hicimos en la Sección 4.2.3 al pasar del origen en la directriz a un origen en el ápide.
- Una **rotación**, que implica modificar la dirección de los ejes coordinados. Esta es una transformación más compleja pero que resultará particularmente útil en la aplicación de las cónicas en mecánica celeste.

4.2.6. Ecuación respecto al centro

Para encontrar una forma más simple de la ecuación de la cónica, podemos realizar una traslación del origen, del apside (respecto al cuál esta escrita la Ec. 4.35) a un punto C en el cuál la forma algebraica, por ejemplo solo contenga términos cuadráticos en las coordenadas.

Una traslación a lo largo del eje x se escribe como:

$$\begin{aligned} x_a &= x_c + a \\ y_a &= y_c \end{aligned} \quad (4.44)$$

donde a es la distancia del origen de las nuevas coordenadas x_c, y_c (punto C), al origen de las coordenadas x_a, y_a (apside).

Reemplazando las Ecs. (4.44) en la ecuación de la cónica obtenemos:

$$y_a^2 - 2p(x_c + a) + (1 - e^2)(x_c + a)^2 = 0$$

que después de una manipulación algebraica se puede escribir en la forma:

$$y_c^2 + (1 - e^2)x_c^2 + 2[(1 - e^2)a - p]x_c = 2pa - (1 - e^2)a^2$$

Como el valor de a es libre, podemos escogerlo de modo el término lineal en x_c desaparezca. Con esta elección el valor de esta constante queda:

$$a = \frac{p}{1 - e^2} \quad (4.45)$$

Descubrimos aquí que el desplazamiento al punto C solo tiene el efecto deseado en el caso en el que $e \neq 1$ (elipse e hipérbola). Para el caso de la parábola, en realidad la forma más simple de la ecuación sigue siendo aquella referida al apside (Ec. 4.35), $y_d^2 = 2px_d$.

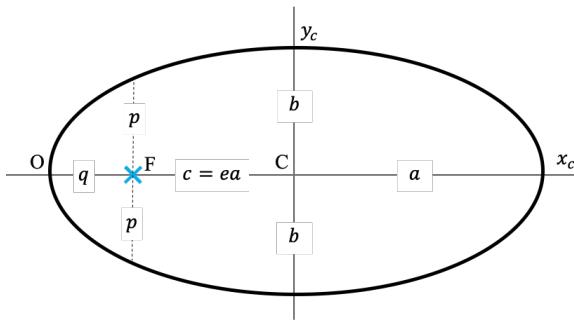


Figura 4.10: Parámetros geométricos de la elipse referidos al apside O , el foco F y el centro C : a semieje mayor, b semieje menor, p semilatus rectum, e excentricidad, c distancia foco-centro.

La ecuación de la elipse o de la hipérbola se puede escribir entonces como:

$$\frac{x_c^2}{p^2/(1-e^2)^2} + \frac{y_c^2}{p^2/(1-e^2)} = 1$$

o en términos del parámetro a :

$$\frac{x_c^2}{a^2} + \frac{y_c^2}{b^2} = 1 \quad (4.46)$$

en el que se ha definido:

$$b^2 \equiv a^2(1 - e^2) \quad (4.47)$$

4.2.7. Eje mayor y menor de la elipse

La ecuación (4.46) es la forma más simple y simétrica de una elipse o una hipérbola. Pero ¿qué interpretación geométrica tienen los parámetros a , b y el punto C .

En el caso de la elipse, podemos ver que cuando $y_c = 0$ (apsides), $x_c = \pm a$ (ver Figura 4.11), es decir a es la distancia de los apsides al punto C , alrededor del cual la elipse es simétrica. Llamamos a la constante a en este caso el **semieje mayor** de la elipse y C es el centro geométrico de la figura.

También en el caso de la elipse, haciendo $x_c = 0$ resulta $y_c = \pm b$, de donde interpretamos a $b = a\sqrt{1 - e^2}$ como la distancia a los extremos del **eje menor** al centro de la elipse. Por esta misma razón llamamos a la constante b el **semieje menor**.

Un resultado interesante, que podemos agregar a las definiciones geométricas de Apolonio y Democrito, resulta al combinar la definición de a con la distancia de un apside al foco más cercano q . Es claro de la ?? que la distancia entre el centro y el foco de la elipse, que llamaremos en lo sucesivo c es:

$$\begin{aligned}c &= a - q \\&= \frac{p}{1 - e^2} - \frac{p}{1 + e}\end{aligned}$$

o en términos simples:

$$c = ae \quad (4.48)$$

Este resultado se puede interpretar diciendo que la excentricidad de una elipse $e = c/a$ es el grado en el que el foco está desplazado a partir del centro geométrico de la figura y medido en unidades del semieje mayor a . De allí precisamente el nombre de este parámetro.

Uno podría entonces cuantificar la excentricidad de una elipse como un porcentaje. Así por ejemplo, la órbita *osculatriz* de Marte (volveremos sobre este concepto en el [Capítulo 7](#)), que fue el planeta utilizado por Kepler para descubrir que las órbitas planetarias eran elipses, es una elipse con una excentricidad de 9,3 %.

Es decir, el centro geométrico de la órbita de Marte está desplazado respecto a su foco (donde se ubica el Sol o más precisamente el centro de masa del Sistema Solar) un 9,3 % del eje mayor (la distancia promedio de Marte al Sol.) Este desplazamiento (que es significativo) fue la clave precisamente de porque fue más fácil para Kepler deducir la elipticidad de la trayectoria de ese planeta, de lo que lo fue para todos los astrónomos antes que él deducirlo usando la trayectoria de todos los demás planetas (en comparación las excentricidades de las órbitas osculatrices de la Tierra y de Júpiter, por ejemplo, son 1,6 % y 4,8 %, respectivamente.)

Utilice el código interactivo que viene con las libretas en la [versión electrónica del libro²³](#) para visualizar la forma de las órbitas de los planetas mencionados y ver realmente, que tan diferentes de una circunferencia son.

4.2.8. Parámetros de la hipérbola

La interpretación geométrica de a y b en el caso de la hipérbola ($e > 1$) es un poco más complicada (ver la ??).

Para empezar el valor del parámetro $a = p/(1 - e^2)$ es negativo. Esto implica que el punto C , que hace la ecuación de la hipérbola la más sencilla posible, está a la izquierda del apside, contrario a lo que pasa con la elipse. Llamamos a C , no el centro de la hipérbola sino su *vértice*.

No debemos confundir sin embargo el eje y_c en la ?? con la directriz de la hipérbola (ver [Figura 4.9](#)) que en realidad está situada a una distancia $\alpha = a(1 - e)/e$ (ver Ec. 4.39.) La directriz y el eje y_c se aproximan una a otra cuando $e \rightarrow \infty$.

El parámetro $b^2 = a^2(1 - e^2)$ es inconveniente dado que en este caso $e > 1$ y por lo tanto b debería ser un número imaginario. Para evitar este inconveniente reescribimos la ecuación de la hipérbola Ec. (4.46) como:

$$\frac{x_c^2}{a^2} - \frac{y_c^2}{\beta^2} = 1 \quad (4.49)$$

²³http://seap-udea.org/MecanicaCeleste_Zuluaga

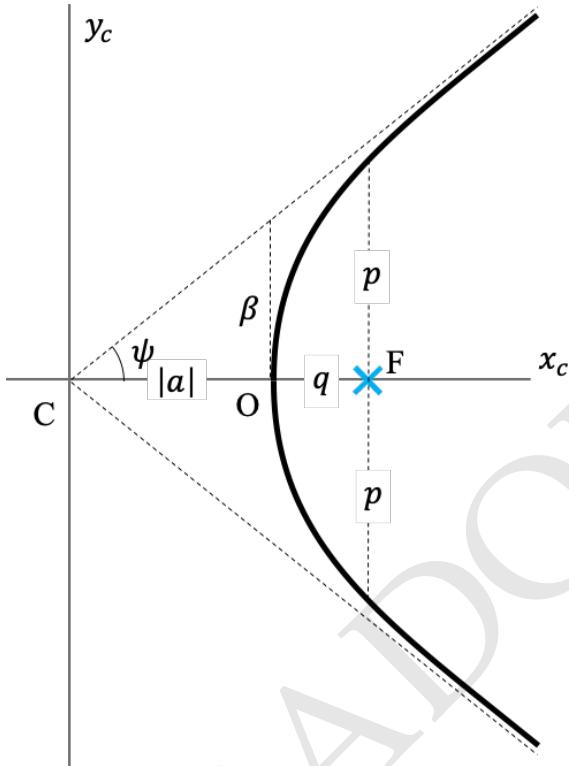


Figura 4.11: Parámetros geométricos de la hipérbola referidos al apside O , el foco F y el vértice C : a distancia al vértice (llamado con frecuencia también semieje mayor aunque en la hipérbola no hay tal), β pendiente de la hipérbola, p semilatus rectum, e excentricidad, ψ angulo de semiapertura.

y definimos:

$$\beta \equiv |a| \sqrt{e^2 - 1} \quad (4.50)$$

¿Cuál es la interpretación geométrica de β ? Si despejamos y_c de la Ec. (4.49) tenemos:

$$y_c = \pm \beta \sqrt{\frac{x_c^2}{a^2} - 1}$$

donde los signos \pm corresponden a las “ramas” superior e inferior de la hipérbola.

Aquí descubrimos una interesante propiedad de esta cónica: cuando $x_c \rightarrow \infty$, la hipérbola se approxima a las rectas:

$$y_c \rightarrow \pm \frac{\beta}{|a|} x_c$$

que llamamos *asíntotas*. La pendiente de las asíntotas, $\beta/|a|$ nos permite identificar a β como una cantidad que cuantifica el grado de *apertura* de la hipérbola respecto

a su eje de simetría: a mayor β (mayor excentricidad), mayor es la pendiente de las asíntotas y más cerca está la hipérbola de una línea recta paralela a la directriz.

Otra manera de cuantificar la pendiente de las asíntotas es usar el ángulo ψ :

$$\tan \psi \equiv \frac{\beta}{|a|}$$

No es difícil mostrar (ver problemas al final del capítulo), a partir de la definición anterior, que:

$$\cos \psi = \frac{1}{e} \quad (4.51)$$

Para poner en un contexto astronómico este resultado, podemos mencionar que en 2019 fue descubierto un cometa proveniente del espacio interestelar, hoy conocido como el 2I/Borisov, cuya trayectoria respecto al centro de masa del sistema solar es una hipérbola con $e = 3.35$. Usando la Ec. (4.51) podemos calcular que las asíntotas de su órbita se abren en un ángulo extremo de

```
#Cometa interestelar 2I/Borisov
e=3.35

from numpy import arccos
psi=arccos(1/e)
```

$\Psi = 72.63202008811639$ grados

Utilice el código interactivo que viene con las libretas en la [versión electrónica del libro](#)²⁴ para visualizar la forma de la órbita del 2I/Borisov.

4.2.9. Rotación de las cónicas en el plano

Al comenzar la ??, habíamos mencionado dos posibles transformaciones que nos conducían a la forma algebraica más simple (la que obtuvimos en la [Sección 4.2.6](#)) y a la más general. La primera la obtuvimos simplemente aplicando una traslación de los ejes coordenados:

$$\begin{aligned} x_c &= x_a - c \\ y_c &= y_a \end{aligned}$$

Para obtener la forma más general, nos proponemos ahora realizar una rotación.

Si llamamos x' , y' , z' a las coordenadas de un punto con respecto a los ejes rotados, puede demostrarse (ver problemas al final del capítulo) que estas se relacionan con las coordenadas del mismo punto en el sistema alineado con la cónica (eje x en dirección del eje de simetría) a través de:

$$\begin{aligned} x' &= x \cos \theta + y \sin \theta \\ y' &= -x \sin \theta + y \cos \theta \\ z' &= z \end{aligned} \quad (4.52)$$

²⁴http://seap-udea.org/MecanicaCeleste_Zuluaga

donde θ es el ángulo que forma el eje x' con el eje x (ver ??.).

Matricialmente estas relaciones se pueden escribir como:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = R_z(\theta) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (4.53)$$

donde la matriz $R_z(\theta)$ esta dada por:

$$R_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.54)$$

y el subíndice z indica que la rotación se realiza alrededor de este eje.

La matriz de rotación $R_z(\theta)$ es una matriz *unitaria* que tiene las siguientes propiedades:

- Determinante, $\det R_z = 1$.
- Inversa, $R_z^{-1} = R_z^T$

Esta última propiedad implica que:

$$R_z^{-1}(\theta) = R_z(-\theta) \quad (4.55)$$

que será muy conveniente para lo que viene.

Usando las propiedades de R_z podemos encontrar la transformación inversa a la Ec. (4.52):

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = R_z(-\theta) \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \quad (4.56)$$

o explícitamente:

$$\begin{aligned} x &= x' \cos \theta - y' \sin \theta \\ x &= x' \sin \theta + y' \cos \theta \\ z &= z' \end{aligned} \quad (4.57)$$

El sistema SPICE contiene una rutina útil para definir de manera sencilla una matriz de rotación dado un ángulo y un eje respecto al que se realiza la rotación:

(Algoritmo 4.8)

```
from spiceypy import rotate
from numpy import pi
Rz=rotate(pi/6,3)

Rz(30 grados) =
[[ 0.8660254  0.5           0.          ]
 [-0.5         0.8660254  0.          ]
 [ 0.          0.            1.          ]]
```

Que coincide con la definición dada por la Ec. (4.54).

4.2.10. Ecuación general de las cónicas

Qué pasa entonces si, partiendo de la ecuación general respecto al apside (Ec. 4.43) hacemos primero una traslación a un punto con coordenadas (t_x, t_y) :

$$(y + t_y)^2 - 2p(x + t_x) - (e^2 - 1)(x + t_x)^2 = 0$$

y una vez trasladados al nuevo origen, realizamos una rotación a unos nuevos ejes (x', y') realizando para ello la transformación dada por las Ecs. (4.57):

$$[(x' \sin \theta + y' \cos \theta) + t_y]^2 - 2p[(x' \cos \theta - y' \sin \theta) + t_x] - (e^2 - 1)[(x' \cos \theta - y' \sin \theta) + t_x]^2 = 0$$

Expandiendo y recogiendo términos comunes, la ecuación general de una cónica trasladada y rotada será:

$$\begin{aligned} x'^2(1 - e^2 \cos^2 \theta) + x'y'(e^2 \sin 2\theta) + y'^2(1 - e^2 \sin^2 \theta) &+ \\ x'[2t_y \sin \theta - 2p \cos \theta + 2t_x \cos \theta(1 - e^2)] &+ \\ y'[2t_y \cos \theta + 2p \sin \theta - 2t_x \sin \theta(1 - e^2)] &+ \\ t_x^2(1 - e^2) - 2pt_x + t_y^2 &= 0 \end{aligned} \quad (4.58)$$

que puede escribirse de forma general, como:

$$Ax'^2 + Bx'y' + Cy'^2 + Dx' + Ey' + F = 0 \quad (4.59)$$

con:

$$\begin{aligned} A &= 1 - e^2 \cos^2 \theta \\ B &= e^2 \sin 2\theta \\ C &= 1 - e^2 \sin^2 \theta \\ D &= 2t_y \sin \theta - 2p \cos \theta + 2t_x \cos \theta(1 - e^2) \\ E &= 2t_y \cos \theta + 2p \sin \theta - 2t_x \sin \theta(1 - e^2) \\ F &= t_x^2(1 - e^2) - 2pt_x + t_y^2 \end{aligned} \quad (4.60)$$

Es decir, cualquier curva en el plano cuyos puntos obedezcan una ecuación cuadrática general de la forma Ec. (4.59) es una cónica con una orientación, tamaño, forma y posición de los apsides que dependerá de los coeficientes A, B, C, D, E y F .

Dada la ecuación algebraica de una cónica, expresada en la forma cuadrática general (Ec. 4.59), es posible, usando los coeficientes A, B y C determinar qué tipo de cónica y su orientación en el espacio.

Para ello es posible, combinando algunas de las Ecs. (??), demostrar que:

$$\eta = 1 - (A + C) \quad (4.61)$$

y por otro lado:

$$\tan 2\theta = \frac{B}{C - A} \quad (4.62)$$

Si además se usan los valores de los coeficientes D y E , es posible determinar la ordenada del vértice de la cónica:

$$t_y = \frac{D \sin \theta + E \cos \theta}{2} \quad (4.63)$$

Expresiones mucho más complejas pueden derivarse para t_x y para p en función de los coeficientes D , E y F , que también dependen de ellos (ver problemas al final del capítulo.) Sin embargo, una vez el apside de la cónica ha sido localizada sobre el eje de las abcisas (realizando la traslación inversa $-t_y$) y ha sido rotada en un ángulo θ dado por la Ec. (4.62) para que su eje de simetría coincida con el eje x , las demás propiedades de la curva pueden obtenerse más fácilmente.

4.2.11. Gráfico de una cónica rotada en el plano

Podemos poner en práctica algunos de los resultados de las secciones anteriores (siempre es importante hacerlo para garantizar que todo se ha entendido bien), construyendo numéricamente una cónica con la Ec. (4.43) y aplicando traslaciones y rotaciones a la misma para ver el efecto y escribir la ecuación general cuadrática (Ec. 4.59) que la describe.

Comencemos, escogiendo las propiedades de nuestra cónica y determinando, el rango de valores de las coordenadas x_a de los puntos sobre la cónica, en el sistema de coordenadas que tiene origen en el ápide:

```

p=10.0
e=0.8

#Parametro eta
eta=e**2-1

#Conjunto de valores de x de la cónica
from numpy import linspace
if e==1:
    a=p
else:
    a=p/(1-e**2)

#Rango de valores de x
xs=linspace(0,2*abs(a),100)

```

Nótese que a no está definido en el caso de una parábola $e = 1$ (para una elipse y una hipérbola $a = p/(1 - e^2)$, ver Ec. 4.45.) Por esa razón en el algoritmo anterior hemos escogido definir $a \equiv p$ cuando $e = 1$, únicamente con el propósito de usar una sola expresión `xs=linspace(0,2*abs(a),100)` para calcular el rango de valores de las abcisas de la cónica.

Si bien sabemos que en el caso de paráolas e hipérbolas, los valores de las abcisas son $x_a \in [0, \infty)$ (ver Figura 4.7), para una elipse es claro que $x_a \in [0, 2a]$ (ver Figura 4.11.)

Con los valores de x podemos ahora usar la Ec. (4.43) para calcular los valores de la ordenada, tanto para la rama superior de la cónica (por encima del eje de simetría) como para la inferior:

```
#Ecuación de la cónica
from numpy import sqrt
ys_sup=sqrt(2*p*xs+eta*xs**2)
ys_inf=-sqrt(2*p*xs+eta*xs**2)
```

Para los propósitos de graficar la cónica, debemos duplicar los valores de la lista `xs`. Sin embargo, y por razones que veremos abajo, lo haremos ordenando de forma especial las coordenadas de los puntos, comenzando primero con el punto más lejano al origen ($x = 2a$ o $xs[-1], ys[-1]$), llegando hasta el origen mismo $xs[0], ys[0]$ y de allí regresando de nuevo al punto más lejano.

En Python esta “compleja” operación puede abreviarse usando la sintaxis general para extraer tajadas de los arreglos:

```
from numpy import append,zeros_like
xs=append(xs[::-1],xs)
ys=append(ys_sup[::-1],ys_inf)
zs=zeros_like(xs)
```

Un gráfico de los puntos de la cónica en el sistema de referencia del áplice srá:

(Algoritmo 4.9)

```
import matplotlib.pyplot as plt
fig=plt.figure()
ax=fig.gca()

ax.plot(xs,ys, 'b-')

from pymcel.plot import fija_ejes_proporcionales
valores=(xs,ys)
fija_ejes_proporcionales(ax,valores,xmin=0,ycm=0);
ax.grid()
```

ver Figura 4.12

Ahora podemos trasladar la cónica:

```
#Parámetros de la traslación
tx=15.0
ty=-10.0

#Coordenadas trasladadas
xs=xs-tx
ys=ys-ty
```

Construimos la matriz de rotación usando las rutinas de SPICE (ver Alg. 4.8):

```
from spiceypy import rotate
from numpy import pi
teta=pi/6
```

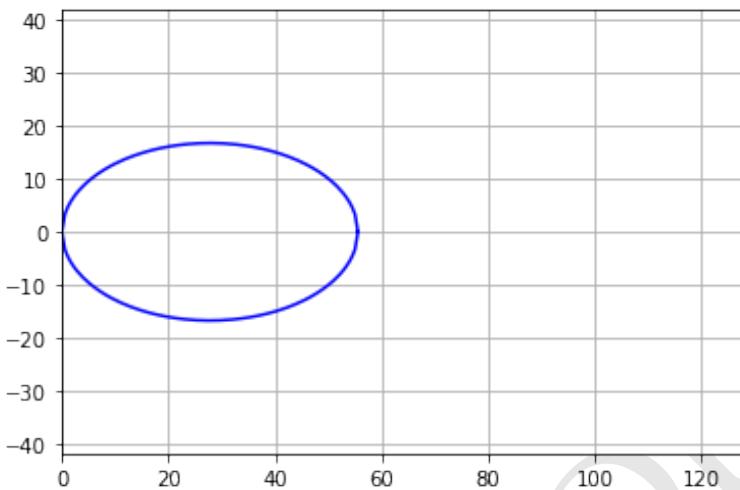


Figura 4.12: Figura correspondiente al código 4.9.

```
Rz=rotate(teta,3)
```

La rotación de los puntos de la cónica contenidos en las listas `xs`, `ys` usando la Ec. (4.53), no es tan trivial en Python. Para ello definiremos una rutina general que usaremos más adelante en el libro:

(Algoritmo 4.10)

```
def rota_puntos(R,x,y,z):
    from spiceypy import mxv
    from numpy import zeros_like
    N=len(x)
    xp=zeros_like(x)
    yp=zeros_like(y)
    zp=zeros_like(z)
    for i in range(N):
        xp[i],yp[i],zp[i]=mxv(R,[x[i],y[i],z[i]])
    return xp,yp,zp
```

Los puntos rotados de la cónica serán:

```
xps,yps,zps=rota_puntos(Rz,xs,ys,zs)
```

Y una gráfica de los puntos rotados:

(Algoritmo 4.11)

```
import matplotlib.pyplot as plt
fig=plt.figure()
ax=fig.gca()
```

```

ax.plot(xps,yps, 'b-')
from pymcel.plot import fija_ejes_proporcionales
valores=(xps,yps)
fija_ejes_proporcionales(ax,valores);
ax.grid()

```

ver Figura 4.13

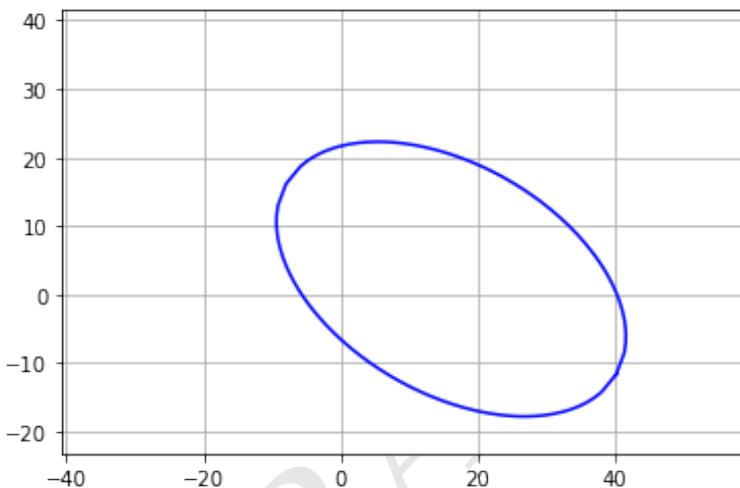


Figura 4.13: Figura correspondiente al código 4.11.

Los valores de los coeficientes del polinomio de segundo grado $P(x,y) = Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F$ que describe los puntos del gráfico anterior, son (Ec. 4.60):

```

from numpy import sin,cos
A=1-e**2*cos(teta)**2
B=e**2*sin(2*teta)
C=1-e**2*sin(teta)**2
D=2*ty*sin(teta)-2*p*cos(teta)+2*tx*cos(teta)*(1-e**2)
E=2*ty*cos(teta)+2*p*sin(teta)-2*tx*sin(teta)*(1-e**2)
F=tx**2*(1-e**2)-2*p*tx+ty**2

```

A = 0.5199999999999998
B = 0.5542562584220408
C = 0.84
D = -17.967433714816835
E = -12.720508075688773
F = -119.00000000000003
Ecuación: (0.52)x^2+(0.55)xy+(0.84)y^2+(-18)x+(-13)y+(-119.0)=0

Podemos ahora verificar la afirmación que los puntos de la cónica satisfacen

la ecuación $P(x, y) = 0$ (Ec. 4.59), construyendo primero una rutina para calcular, dado cualquier punto (x, y) el valor del polinomio $P(x, y)$:

(Algoritmo 4.12)

```
def polinomio_segundo_grado(coeficientes,x,y):
    A,B,C,D,E,F=coeficientes
    P=A*x**2+B*x*y+C*y**2+D*x+E*y+F
    return P
```

Si calculamos el valor de $P(x, y)$ para todos los puntos xps y yps verificamos la afirmación:

```
coeficientes=A,B,C,D,E,F
```

```
Pxpsyps=polinomio_segundo_grado(coeficientes,xps,yps)
```

```
print(f"P(xps,yps):\n{Pxpsyps[:5]}...")
```

```
P(xps,yps):
[ 2.84217094e-14 -1.13686838e-13 -1.13686838e-13 -7.10542736e-14
-5.68434189e-14]...
```

O para verificarlo en todos los puntos, podemos sumar el valor absoluto de los valores de $Pxpsyps$:

```
Psum=sum(abs(Pxpsyps))
```

```
Sum |P(xps,yps)| = 1.1738165994756855e-11
```

Finalmente podemos poner a prueba las Ecs. (??), (4.62) y (4.63):

```
#Parámetro de forma
eta_num=1-(A+C)

#Ángulo
from numpy import arctan,sin,cos
teta_num=0.5*arctan(B/(C-A))

#Desplazamiento vertical
ty_num=(D*sin(teta_num)+E*cos(teta_num))/2
```

```
eta original = -0.36, eta numérico = -0.36
teta original = 30, teta numérico = 30
ty original = -10, ty numérico = -10
```

Como era de esperarse, la coincidencia es perfecta.

4.2.12. Síntesis algebraica

En la Sección 4.2.2 mostramos como las definiciones abstractas de la antigüedad, basadas en áreas y proporciones, se convirtieron en la edad baja edad media

y el renacimiento, en ecuaciones algebraicas. Las representaciones algebraicas permiten describir de forma sintética y poderosa el lugar geométrico de las cónicas.

En las secciones precedentes hemos visto como la descripción algebraica de las cónicas depende de donde coloquemos el origen o en que dirección escojamos los ejes del sistema de coordenadas. De acuerdo a estas elecciones reconocimos hasta ahora 4 formas distintas de describir algebraicamente cualquier cónica, una vez especificados un parámetro de tamaño, por ejemplo el *semilatus rectum* p y uno de forma, por ejemplo la excentricidad e :

- Ecuación respecto al apside (origen en el ápice, eje x sobre el eje de simetría, Ec. 4.35):

$$y_a^2 - 2px_a - (e^2 - 1)x_a^2 = 0$$

- Ecuación respecto a la directriz (origen en la directriz, eje x sobre el eje de simetría, Ec. ??):

$$y_d^2 - 2pex_d - (e^2 - 1)x_d^2 + e^2 p^2 = 0$$

- Ecuación respecto al centro (origen en el centro de simetría, eje x sobre el eje de simetría, Ec. 4.46, solo valida para $e \neq 1$):

$$\frac{x_c^2}{a^2} \pm \frac{y_c^2}{b^2} = 1$$

donde $a^2 = p/(1 - e^2)$, el signo “+” es para elipses ($e < 1$) en cuyo caso $b^2 = a^2(1 - e^2)$ y el signo “-” es para hipérbola ($e > 1$) para el cuál $b^2 = \beta^2 = a^2(e^2 - 1)$.

- Ecuación general (origen en t_x, t_y y eje x' rotado un ángulo θ respecto al eje de simetría, Ec. 4.59):

$$Ax'^2 + Bx'y' + Cy'^2 + Dx' + Ey' + F = 0$$

con:

$$\begin{aligned} A &= 1 - e^2 \cos^2 \theta \\ B &= e^2 \sin 2\theta \\ C &= 1 - e^2 \sin^2 \theta \\ D &= 2t_y \sin \theta - 2p \cos \theta + 2t_x \cos \theta (1 - e^2) \\ E &= 2t_y \cos \theta + 2p \sin \theta - 2t_x \sin \theta (1 - e^2) \\ F &= t_x^2 (1 - e^2) - 2pt_x + t_y^2. \end{aligned}$$

4.2.13. Cónicas en coordenadas cilíndricas

Nos proponemos ahora a escribir la ecuación de la cónica, en coordenadas cilíndricas con origen en uno de los focos. La ecuación resultante y los resultados geométricos que se derivan de ella, es de primera importancia para la mecánica celeste.

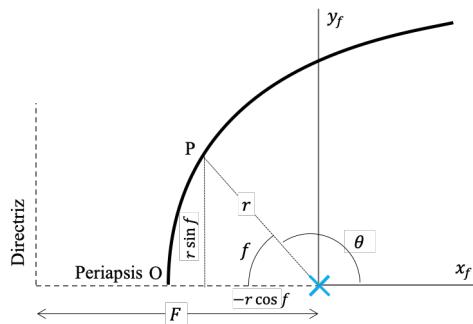


Figura 4.14: Derivación de la ecuación de la cónica en coordenadas cilíndricas referidas al Foco. En la figura el ángulo f es la anomalía verdadera.

Comenzando con la ecuación de la cónica referida a la directriz (Ec. 4.38) podemos aplicar una traslación al foco haciendo $x_d = x_f + F$ y $y_d = y_f$:

$$y_f^2 - (e^2 - 1)(x_f + F)^2 - 2F(x_f + F) + F^2 = 0 \quad (4.64)$$

Si escribimos x_f, y_f en coordenadas cilíndricas como (ver Ecs. 4.12):

$$\begin{aligned} x_f &= -r \cos f \\ y_f &= r \sin f \end{aligned} \quad (4.65)$$

donde f , en lugar de la coordenada cilíndrica acimutal convencional θ (que es un ángulo referido al semi eje $x+$) el ángulo entre la dirección del periapsis y el radio vector del punto (ver ??), la Ec. (4.64), después de algunas manipulaciones algebraicas se convierte en:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos f} \quad (4.66)$$

que es la ecuación fundamental de la cónica y que veremos aparecer con mucha frecuencia en la mecánica celeste.

Las ecuaciones (??) y (4.66) evidencian un hecho interesante: el ángulo f se puede usar para describir matemáticamente, usando un sólo parámetro, las coordenadas cartesianas de los puntos sobre la cónica. Esto hace mucho más sencillo encontrar la posición de los puntos sobre estas curvas, en comparación como lo teníamos que hacer al usar las ecuaciones algebraicas en x, y de las secciones anteriores.

Para ilustrar el poder de este resultado considere el siguiente algoritmo para graficar una elipse y compárela con el visto en la ??:

(Algoritmo 4.13)

```
#Parámetros
p=10.0
e=0.8

#Valores del ángulo
from numpy import linspace,pi
```

```
fs=linspace(0,2*pi,100)

#Distancias
from numpy import cos
rs=p/(1+e*cos(fs))

#Coordenadas
from numpy import sin
xs=rs*cos(fs)
ys=rs*sin(fs)

#Gráfica
import matplotlib.pyplot as plt
fig=plt.figure()
ax=fig.gca()

#Puntos cónica
ax.plot(xs,ys,'b-')
#Foco
ax.plot([0],[0], 'cx', markersize=10)

#Decoración
ax.set_xlabel(f"${x_f}$")
ax.set_ylabel(f"${y_f}$")
from pymcel.plot import fija_ejes_proporcionales
valores=(xs,ys),
fija_ejes_proporcionales(ax,valores);
ax.grid();
```

ver Figura 4.15

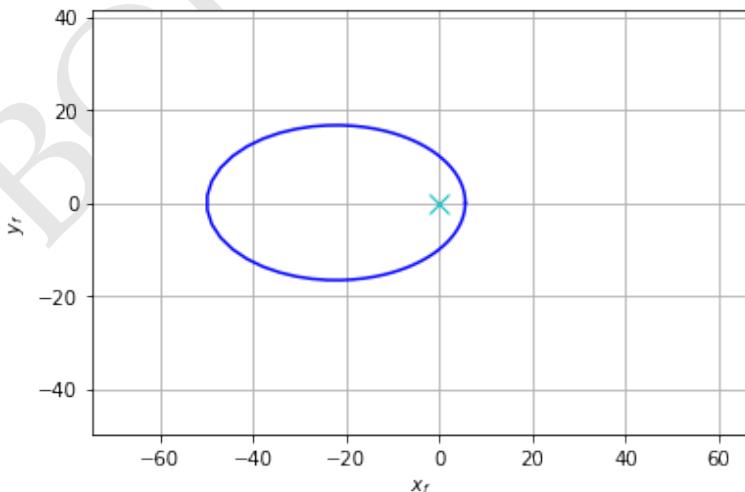


Figura 4.15: Figura correspondiente al código 4.13.

Este será el método que utilizaremos en lo sucesivo para generar los puntos sobre cualquier cónica.

Un hecho interesante sobre el Alg. (4.13) es que no se generaliza fácilmente para el caso de una parábola o una hipérbola. La razón es que en los casos de conicas abiertas el valor del ángulo f esta limitado a un intervalo diferente al de la elipse en la que $f \in [0, 2\pi]$ o $f \in [-\pi, \pi]$.

En este caso si despejamos $\cos f$ de la Ec. (??):

$$\cos f = \frac{1}{e} \left(\frac{p}{r} - 1 \right)$$

cuando $r \rightarrow \infty$ el ángulo f adopta valores extremos dados por:

$$\cos f \rightarrow -\frac{1}{e}$$

Para el caso de la parábola esto implica que $f \in (-\pi, \pi)$, que es idéntico al caso de la elipse pero con el extremo inferior del intervalo abierto. En el caso de la hipérbola:

$$f \in (-\pi + \psi, \pi - \psi)$$

donde $\psi = \cos^{-1}(1/e)$ es el ángulo de apertura introducido en la Ec. (4.51).

Un algoritmo más general entonces, para generar los puntos sobre una cónica se presenta en la rutina a continuación:

(Algoritmo 4.14)

```
def puntos_conica(p,e,df=0.1):

    #Compute fmin,fmax
    from numpy import pi
    if e<1:
        fmin=-pi
        fmax=pi
    elif e>1:
        from numpy import arccos
        psi=arccos(1/e)
        fmin=-pi+psi+df
        fmax=pi-psi-df
    else:
        fmin=-pi+df
        fmax=pi-df

    #Valores del ángulo
    from numpy import linspace,pi
    fs=linspace(fmin,fmax,500)

    #Distancias
    from numpy import cos
    rs=p/(1+e*cos(fs))

    #Coordenadas
    from numpy import sin
```

```

xs=rs*cos(fs)
ys=rs*sin(fs)
from numpy import zeros_like
zs=zeros_like(xs)

return xs,ys,zs

```

Y un gráfico de la cónica, usando la rutina anterior sería:

(Algoritmo 4.15)

```

#Genera puntos
p=10.0
e=1.5
xs,ys,zs=puntos_conica(p,e)

#Gráfica
import matplotlib.pyplot as plt
fig=plt.figure()
ax=fig.gca()

ax.plot(xs,ys,'b-')
ax.plot([0],[0],'cx',markersize=10)

#Decoración
ax.set_xlabel(f"${x}_f$")
ax.set_ylabel(f"${y}_f$")
from pymcel.plot import fija_ejes_proporcionales
valores=(xs,ys),
fija_ejes_proporcionales(ax,valores);
ax.grid()

```

ver Figura 4.16

4.2.14. Anomalías

Además de las Ecs. (4.66) y (4.65) en las que describimos las coordenadas de los puntos sobre una cónica arbitraria como función de un único parámetro f (ecuaciones paramétricas), existe una segunda manera de expresar las ecuaciones de la elipse y de la hipérbola, en términos de otro parámetro.

En el caso de la ellipse, por ejemplo, si partimos de la ecuación respecto al centro (Ec. 4.46):

$$\frac{x_c^2}{a^2} + \frac{y_c^2}{b^2} = 1$$

es posible escribir una forma parámetrica para las coordenadas:

$$\begin{aligned} x_c &= a \cos E \\ y_c &= b \sin E \end{aligned} \tag{4.67}$$

donde E es el nuevo parámetro.

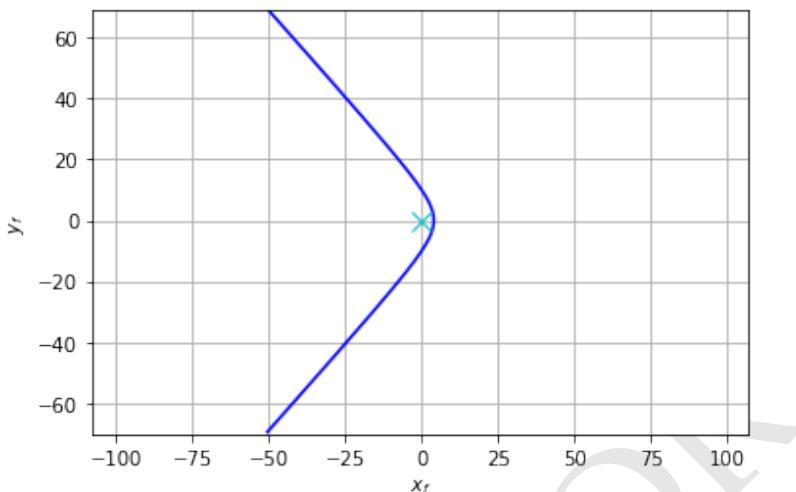


Figura 4.16: Figura correspondiente al código 4.15.

La interpretación del parámetro f en la ecuación en coordenadas cilíndricas de la cónica era clara: el valor f para un punto dado, es al ángulo formado por la línea que va del foco al periapsis y la dirección del radio vector del punto. Por ser un ángulo que especifica la posición del punto respecto al foco (en el que se encuentra el Sol, en la teoría de Kepler del movimiento planetario), llamamos a f la **anomalía verdadera** del punto.

Un poco de historia

Kepler y las anomalías. El nombre de anomalías viene de Kepler.

¿Qué interpretación tiene por su parte el parámetro E en las Ecs. (4.67)?

En la construcción de la Figura 7.16 identificamos a E como un nuevo ángulo, esta vez medido respecto al centro de la elipse y cuyo radio asociado al cortar dos círculos imaginarios de radios a y b , permiten encontrar la abscisa y la ordenada de los puntos de la elipse, respectivamente.

Por el hecho de medirse respecto al centro del círculo y no respecto del foco (en el que en la teoría de Kepler se encuentra el Sol, centro del Sistema Solar), llamamos a E la **anomalía excéntrica**.

¿Podemos escribir una ecuación para r en términos del parámetro E análoga a la Ec. (4.66) que nos da r en función de f ? ¡Sin duda alguna!

Considere el triángulo entre los puntos FPQ en la Figura 7.16. El teorema de Pitágoras en ese triángulo se escribe:

$$r^2 = (a \cos E - ae)^2 + b^2 \sin^2 E$$

Teniendo en cuenta que $b^2 = a^2(1 - e^2)$ y después de un poco de álgebra obtenemos:

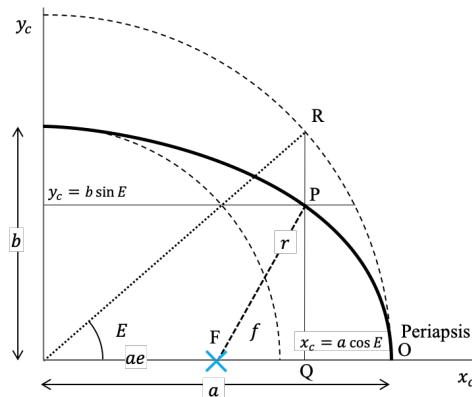


Figura 4.17: Definición de la anomalía excéntrica E y el método asociada a ella para determinar la posición de los puntos sobre una elipse.

$$r = a(1 - e \cos E) \quad (4.68)$$

que será una forma para representar la cónica alternativa a la Ec. (4.68) y que usaremos con frecuencia en el libro.

Finalmente, la manipulación adecuada de las ecuaciones anteriores permite escribir una relación explícita entre las anomalías verdadera f y excéntrica E que será muy utilizada a lo largo de este libro (ver problemas al final del capítulo):

$$\tan \frac{f}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{E}{2} \quad (4.69)$$

Un procedimiento similar al anterior, pero en el caso de la hipérbola, permite escribir las coordenadas de los puntos de la curva en términos de un nuevo parámetro F :

$$\begin{aligned} x_c &= a \cosh F \\ y_c &= a \sinh F \end{aligned} \quad (4.70)$$

Por analogía con la elipse, F también es llamada la anomalía excéntrica (aunque en este caso la interpretación geométrica de F no es tan directa como en el caso de E .)

La distancia al foco se puede escribir en términos de F como:

$$r = a(e \cosh F - 1) \quad (4.71)$$

y la relación entre la anomalía verdadera f y la anomalía excéntrica F resulta ser:

$$\tanh \frac{f}{2} = \sqrt{\frac{e+1}{e-1}} \tanh \frac{F}{2} \quad (4.72)$$

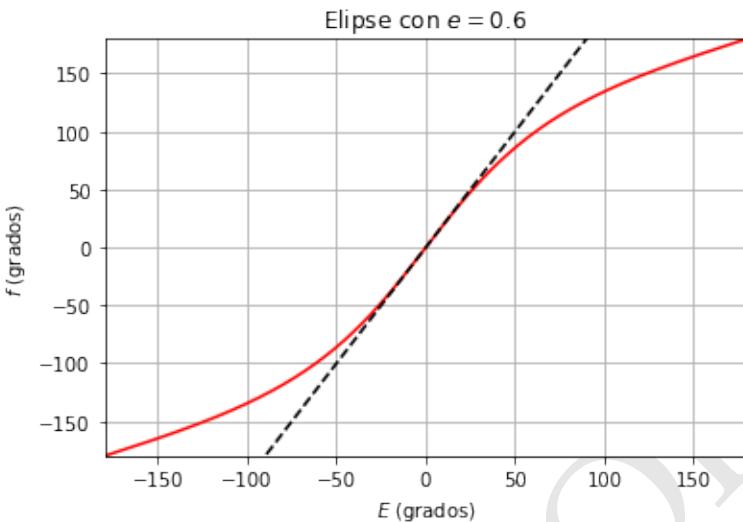


Figura 4.18: Anomalía verdadera f como función de la anomalía excéntrica E para una elipse. La línea rayada corresponde a la aproximación $f \approx \sqrt{(1+e)/(1-e)}E$ que es válida en el caso $f \ll 1$.

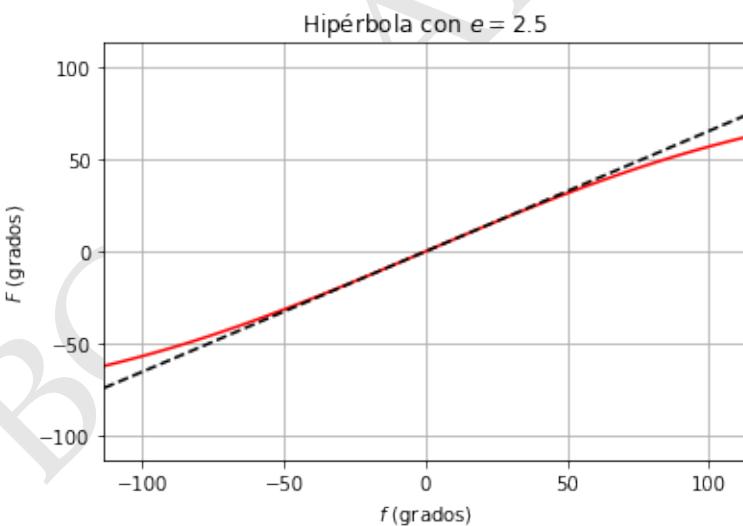


Figura 4.19: Anomalía excéntrica F como función de la anomalía verdadera f para una hipérbola. La línea punteada corresponde a la aproximación $F \approx \sqrt{(e-1)/(e+1)}f$.

4.2.15. Área de las cónicas

Existe un último resultado de la geometría analítica de las cónicas que es de interés para la mecánica celeste: el área encerrada por estas curvas. Como veremos en el [Capítulo 7](#), el área es la única cantidad geométrica cuyo valor puede predi-

cerse de forma exacta como función del tiempo cuando describimos el movimiento de un cuerpo respecto a un centro de atracción.

Un poco de historia

Newton, el área debajo de la hipérbola y la invención del cálculo. El cálculo del área encerrada por curvas arbitrarias (cuadratura) es uno de los problemas clásicos de la geometría y en los 1600 uno de los que motivó la invención del cálculo infinitesimal (ver Sección 4.1.7.)

En la Figura 4.20 se muestran las construcciones geométricas que usaremos en las próximas sesiones para calcular el área encerrada por elipses, hipérbolas y parábolas en función de las anomalías definidas en las secciones anteriores y otros parámetros geométricos de esas mismas cónicas.

En los tres casos el área del *sector de cónica* PQF, que es el área de interés para nosotros en la mecánica celeste, se puede siempre escribir como la suma del segmento PQQ y del triángulo PFQ:

$$\Delta A \equiv A_{PQF} = A_{PFQ} + A_{PQQ} \quad (4.73)$$

El problema, en las tres cónicas consiste en calcular estas dos áreas como función de las anomalías excéntricas (en el caso de la elipse y la hipérbola y de la anomalía verdadera en el caso de la parábola).

Área de un sector de elipse

El área del triángulo en PFQ en la elipse (ver panel superior en Figura 4.20) se puede escribir en términos de la anomalía excéntrica E como:

$$\begin{aligned} A_{PFQ} &= \frac{1}{2} b \sin E (a \cos E - ae) \\ &= \frac{1}{2} ab \sin E \cos E - abe \sin E \end{aligned} \quad (4.74)$$

Por otro lado, el área del segmento de elipse PQQ se puede expresar como la integral definida:

$$A_{PQQ} = \int_{-a}^{x_c} y_c(x) dx$$

Por las propiedades geométricas de la elipse (ver Sección 4.2.14) la ordenada del punto P es $y_c(x) = (b/a)Y(x)$, donde Y es la correspondiente ordenada del punto R sobre la circunferencia circunscrita en la elipse de radio a . De esta manera el área del segmento de elipse se puede expresar en términos del área de segmento de círculo RQQ como:

$$A_{PQQ} = \frac{1}{2} A_{RQQ} \quad (4.75)$$

Por su parte:

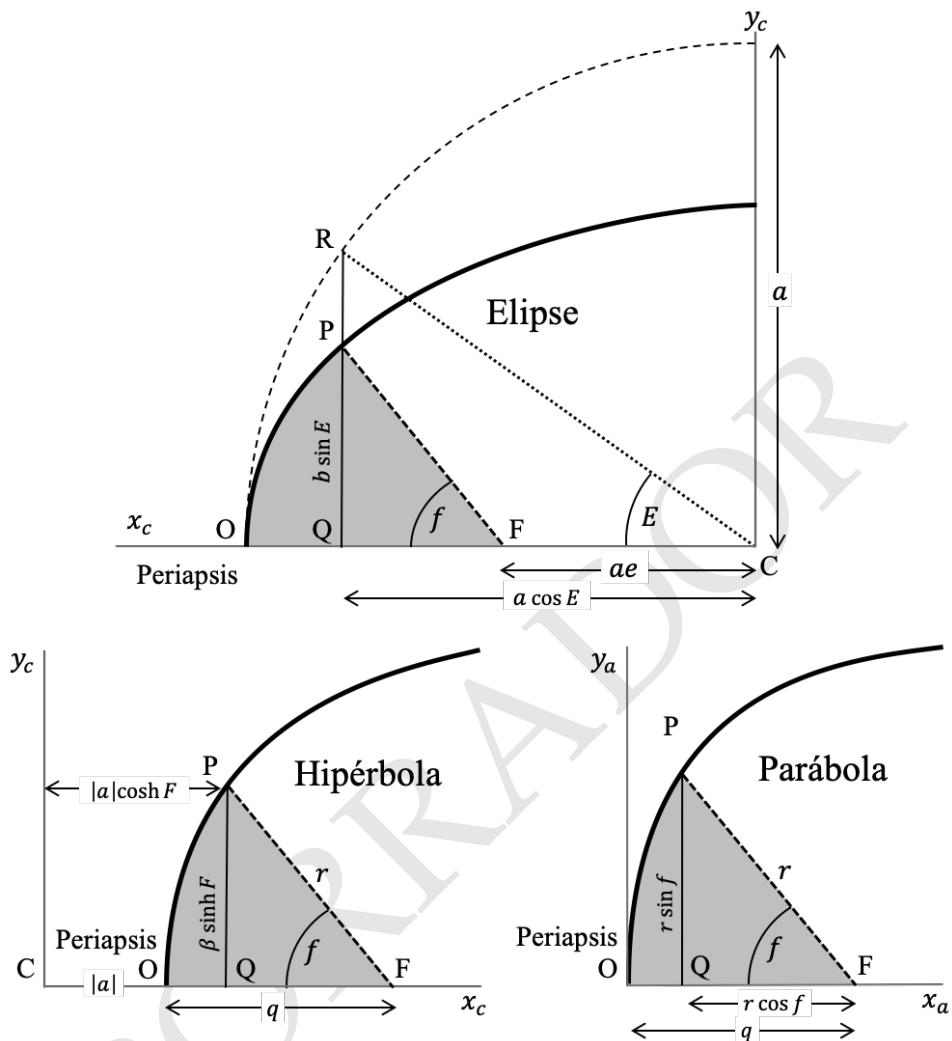


Figura 4.20: Construcción geométrica usada aquí para deducir la relación entre las anomalías f , E y F y el área del sector de cónica (región sombreada).

$$A_{RQO} = A_{RCO} - A_{RCQ}$$

que a su vez se escriben en términos de E como:

$$A_{RQO} = \frac{1}{2}a^2E - \frac{1}{2}a^2 \sin E \cos E \quad (4.76)$$

Reemplazando la Ec. (4.76) en la (4.75) y esta última junto con la Ec. (4.74) en la fórmula original (Ec. 4.73) obtenemos finalmente:

$$\Delta A_{\text{elipse}} = \frac{1}{2}ab(E - \sin E) \quad (4.77)$$

Siendo la elipse la única figura cerrada entre las cónicas, es posible calcular el área total encerrada por ella haciendo en la última ecuación $E = 2\pi$:

$$A_{\text{elipse}} = \pi abE \quad (4.78)$$

Área de un sector de hipérbola

La construcción en la ?? permite, en el caso de la hipérbola (ver panel inferior izquierdo) escribir las áreas de interés en la Ec. (4.73) como:

$$\begin{aligned} A_{\text{PFQ}} &= \frac{1}{2}\beta \sinh F(|a| + q - |a| \cosh F) \\ A_{\text{PQO}} &= \int_{|a|}^{|a| \cosh F} \beta \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1} dx \end{aligned}$$

Para la última expresión usamos la ecuación de la hipérbola referida al centro (ver Ec. 4.49).

Resolviendo la integral (ver problemas al final del capítulo), sumando las dos áreas y teniendo en cuenta que $q = |a|(e - 1)$ obtenemos finalmente el área del sector de hipérbola:

$$\Delta A_{\text{hipérbola}} = \frac{1}{2}|a|\beta(e \sinh F - F) \quad (4.79)$$

Área de un sector de parábola

De forma análoga a como lo hicimos con la hipérbola, podemos escribir las áreas que componen el sector de parábola en términos de la anomalía verdadera f (ver panel inferior derecho en la ??):

$$\begin{aligned} A_{\text{PFQ}} &= \frac{1}{2}r^2 \sin f \cos f \\ A_{\text{PQO}} &= \int_0^{q-r \cos f} \sqrt{2px} dx \end{aligned}$$

donde en la integral hemos usado la ecuación de la parábola con origen en el ápice $y_a(x_a)^2 = 2px_a$ (ver Ec. 4.43).

A pesar de que estas expresiones parecen más fáciles de desarrollar matemáticamente, en realidad encontrar una versión simplificada del área del sector de parábola es más complicado de lo que es para el caso del sector de elipse y el de hipérbola.

En términos llanos (sin simplificaciones trigonométricas), el área del sector, que es la suma de las ecuaciones anteriores resulta ser:

$$\Delta A_{\text{parabola}} = \frac{1}{2} \frac{p^2 \sin f \cos f}{(1 + \cos f)^2} + \frac{p^2}{3} \left(\frac{1 - \cos f}{1 + \cos f} \right)^{3/2}$$

donde hemos usado la ecuación de la parábola en coordenadas cilíndricas, $r = p/(1 + \cos f)$ y el hecho que $q = p/2$.

La fracción en el segundo término del lado derecho se puede escribir como:

$$\frac{1 - \cos f}{1 + \cos f} = \tan \frac{f}{2}$$

y esto nos ofrece una clave de cómo simplificar el primer término: escribiéndo $\sin f$ y $\cos f$ en términos de $\tan(f/2)$:

$$\sin f = \frac{2 \tan \frac{f}{2}}{1 + \tan^2 \frac{f}{2}} \quad (4.80)$$

$$\cos f = \frac{1 - \tan^2 \frac{f}{2}}{1 + \tan^2 \frac{f}{2}} \quad (4.81)$$

(4.82)

Reemplazando, el área del sector de parábola queda:

$$\Delta A_{\text{parabola}} = \frac{1}{4} p^2 \tan \frac{f}{2} \left(1 - \tan^2 \frac{f}{2} \right) + \frac{p^2}{6} \tan^3 \frac{f}{2}$$

y simplifando obtenemos finalmente:

$$\Delta A_{\text{parabola}} = \frac{1}{4} p^2 \left(\tan \frac{f}{2} + \frac{1}{3} \tan^3 \frac{f}{2} \right) \quad (4.83)$$

4.2.16. Cónicas en el espacio

En las secciones anteriores desarrollamos todas las posibles representaciones algebraicas de las curvas cónicas sobre el plano en el que están definidas. En esta sesión daremos el salto a tres dimensiones y resolveremos la pregunta de ¿cuál es la representación algebraica o geométrica más general de las cónicas en el espacio?

En la [Sección 4.2.9](#) habíamos visto que es posible, partiendo de la descripción algebraica de la cónica en un sistema de coordenadas referido a su eje de simetría y que llamaremos en lo sucesivo el *sistema de referencia natural de la cónica*, aplicar una rotación sobre el plano para obtener la ecuación más general de la cónica sobre ese mismo plano. El salto al espacio de tres dimensiones es simplemente una generalización de este procedimiento.

4.2.17. Ángulos de Euler

Partiendo del sistema de referencia natural de la cónica, es posible orientar de forma arbitraria la curva en el espacio realizando en total tres rotaciones *independientes* (ver [Figura 4.21](#).) Los ángulos en los que se realizan esas rotaciones, y que llamaremos en este texto (Ω, i, ω) , se conocen universalmente como los **ángulos de Euler**.

La secuencia de rotaciones mostradas en la ?? se puede describir cualitativamente como:

1. Rotación del sistema original $x - y - z$ (sistema natural) en un ángulo Ω alrededor del eje z , para obtener un nuevo sistema de ejes $x' - y' - z'$

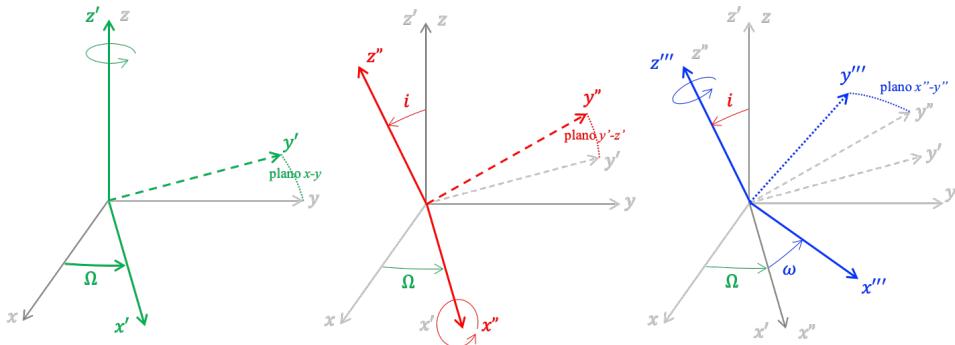


Figura 4.21: Secuencia de rotaciones que permiten pasar del sistema natural de ejes de la cónica $x - y - z$ a un sistema con una orientación arbitraria $x''' - y''' - z'''$

2. Rotación del sistema $x' - y' - z'$ en un ángulo i alrededor del eje z' , para obtener un nuevo sistema de ejes $x'' - y'' - z''$
3. Rotación del sistema $x'' - y'' - z''$ en un ángulo ω alrededor del eje z'' , para obtener un nuevo sistema de ejes $x''' - y''' - z'''$.

Al sistema de ejes final lo llamamos el *sistema de coordenadas del observador*.

Usando la representación matricial de las rotaciones en el plano de la Ec. (4.53), la relación entre las coordenadas del observador y las coordenadas naturales de las cónicas será:

$$\begin{pmatrix} x''' \\ y''' \\ z''' \end{pmatrix} = R_z(\omega)R_x(i)R_z(\Omega) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (4.84)$$

Si usamos la definición de las matrices de rotación de la Ec. (4.54):

$$\begin{pmatrix} x''' \\ y''' \\ z''' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c\omega & s\omega & 0 \\ -s\omega & c\omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & ci & si \\ 0 & -si & ci \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c\Omega & s\Omega & 0 \\ -s\Omega & c\Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

donde se ha abreviado $c\theta \equiv \cos \theta$ y $s\theta \equiv \sin \theta$.

Al realizar las multiplicaciones matriciales explícitas queda:

$$\begin{pmatrix} x''' \\ y''' \\ z''' \end{pmatrix} = \mathcal{M}(\Omega, i, \omega) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (4.85)$$

donde la matriz de rotación en tres dimensiones,

$$\mathcal{M}(\omega, i, \Omega) \equiv R_z(\omega)R_x(i)R_z(\Omega) \quad (4.86)$$

se escribe explícitamente como:

$$\mathcal{M}(\omega, i, \Omega) = \begin{pmatrix} c\omega c\Omega - ci s\omega s\Omega & c\omega s\Omega + c\Omega ci s\omega & si s\omega \\ -c\Omega s\omega - s\Omega ci c\omega & -s\Omega s\omega + c\Omega ci c\omega & si c\Omega \\ s\Omega si & -c\Omega si & ci \end{pmatrix} \quad (4.87)$$

Por ser \mathcal{M} el producto de matrices de unitarias (Ec. 4.86), ella es en sí misma una matriz unitaria, es decir $\det \mathcal{M} = 1$, pero más importante:

$$\mathcal{M}^{-1} = \mathcal{M}^T$$

explícitamente,

$$\mathcal{M}(\omega, i, \Omega)^T = \begin{pmatrix} c\omega c\Omega - ci s\Omega & sw & -c\Omega sw - c\omega ci s\Omega & si s\Omega \\ c\omega s\Omega + sw ci c\Omega & -s\Omega sw + c\omega ci c\Omega & si c\omega & \\ sw si & & c\omega si & ci \end{pmatrix} \quad (4.88)$$

A la inversa, las coordenadas naturales de la cónica (x, y, z) se pueden obtener de las coordenadas del observador, invirtiendo la Ec. (??):

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = R_z(-\Omega)R_x(-i)R_y(-\omega) \begin{pmatrix} x''' \\ y''' \\ z''' \end{pmatrix} \quad (4.89)$$

o equivalentemente, usando la forma explícita en la Ec. (4.85) y aprovechando las propiedades de la matriz de rotación en tres dimensiones \mathcal{M} :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathcal{M}^T \begin{pmatrix} x''' \\ y''' \\ z''' \end{pmatrix} \quad (4.90)$$

4.2.18. Matrices de rotación generales

Usando SPICE podemos construir la matriz de rotación en tres dimensiones \mathcal{M} por dos medios distintos. El primero es usar la rutina `rotate` que habíamos introducido en el Alg. (4.8):

```
#Angulos
from numpy import pi
Omega=pi/6
omega=pi/3
i=pi/4

#Matrices individuales
from spiceypy import rotate
RzOmega=rotate(Omega,3)
Rxi=rotate(i,1)
Rzomega=rotate(omega,3)
```

La matriz de rotación en tres dimensiones \mathcal{M} , de acuerdo con su definición en la Ec. (4.86), puede obtenerse aplicando sucesivamente la rutina de multiplicación de matrices `mxm`:

(Algoritmo 4.16)

```
from spiceypy import mxm
M=mxm(Rzomega, mxm(Rxi, RzOmega))
```

```
M =
[[ 0.12682648  0.78033009  0.61237244]
 [-0.9267767 -0.12682648  0.35355339]
 [ 0.35355339 -0.61237244  0.70710678]]
```

Existe sin embargo una rutina compacta y mucho más general en SPICE que permite calcular la matriz rotación de cualquier sucesión de rotaciones en el espacio, no solamente la que usamos aquí.

Para ello podemos definir una matriz de rotación general \mathcal{R} resultante de aplicar rotaciones sucesivas θ_i alrededor del eje \hat{e}_k , θ_j alrededor del eje \hat{e}_j y θ_i alrededor del eje \hat{e}_i como:

$$\mathcal{R}(\theta_i, \theta_j, \theta_k, i, j, k) \equiv R_i(\theta_i)R_j(\theta_j)R_k(\theta_k)$$

En términos de esta matriz general, la matriz de rotación *canónica* \mathcal{M} presentada en la [Sección 4.2.17](#) se escribe:

$$\mathcal{M} = \mathcal{R}(\omega, i, \Omega, 3, 1, 3)$$

En el paquete SPICE la rotación general \mathcal{R} se implementa con la rutina `eul2m` que podemos usar para obtener \mathcal{M} como:

(Algoritmo 4.17)

```
from spiceypy import eul2m
M=eul2m(omega,i,Omega,3,1,3)

M =
[[ 0.12682648  0.78033009  0.61237244]
 [-0.9267767 -0.12682648  0.35355339]
 [ 0.35355339 -0.61237244  0.70710678]]
```

Naturalmente el resultado coincide con el obtenido en el Alg. (4.16). Podemos ahora verificar la unitariedad de \mathcal{M} calculando su determinante, su inversa (calculada numérica y usando la propiedad en la Ec. 4.89) y su transpuesta:

```
#Determinante
from numpy.linalg import det
detM=det(M)

#Inversa
from numpy.linalg import inv
Minv=inv(M)

#Inversa por definicion
Minv_def=eul2m(-Omega,-i,-omega,3,1,3)

#Transpuesta
MT=M.transpose()

print(f"det(M) = {detM:g}")
print(f"inversa M (numérica) = \n{Minv}")
```

```

print(f"inversa M (definición) = \n{Minv_def}")
print(f"transpuesta M = \n{MT}")

det(M) = 1
inversa M (numérica) =
[[ 0.12682648 -0.9267767  0.35355339]
 [ 0.78033009 -0.12682648 -0.61237244]
 [ 0.61237244  0.35355339  0.70710678]]
inversa M (definición) =
[[ 0.12682648 -0.9267767  0.35355339]
 [ 0.78033009 -0.12682648 -0.61237244]
 [ 0.61237244  0.35355339  0.70710678]]
transpuesta M =
[[ 0.12682648 -0.9267767  0.35355339]
 [ 0.78033009 -0.12682648 -0.61237244]
 [ 0.61237244  0.35355339  0.70710678]]

```

4.2.19. Gráfico de una cónica rotada en el espacio

Con estos elementos a la mano podemos escribir algoritmos para, usando las ecuaciones encontradas en la Sección 4.2.11 y los algoritmos de la Sección 4.2.11, representar gráficamente una cónica en el espacio.

Comenzamos por obtener los puntos de la cónica en su sistema natural de coordenadas (plano de la cónica, origen en el foco, semieje $x+$ apuntando hacia el periapsis) usando para ello la rutina `puntos_conica` que habíamos introducido en el Alg. (4.14):

```

from pymcel.export import puntos_conica
p=10.0
e=0.8
xs,ys,zs=puntos_conica(p,e)

```

Ahora podemos rotar los puntos de la cónica usando la matriz M calculada en el Alg. (4.17). Para hacerlo nos apoyaremos nuevamente en la rutina general `rota_puntos` que habíamos introducido antes en el Alg. (??):

```

from pymcel.export import rota_puntos
xppps,yppps,zppps=rota_puntos(M,xs,ys,zs)

```

Una gráfica en tres dimensiones de la cónica en su plano natural y en los ejes rotados se puede realizar usando el siguiente código:

(Algoritmo 4.18)

```

import matplotlib.pyplot as plt
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
fig=plt.figure()
ax=fig.gca(projection='3d')

#Gráfica de los puntos originales

```

```

ax.plot(xs,ys,zs, 'k--')

#Gráfica de la cónica rotada
ax.plot(xppps,yppps,zppps, 'b-')

#Decoración
ax.set_xlabel("x")
ax.set_ylabel("y")
ax.set_zlabel("z")

from pymcel.plot import fija_ejes3d_proporcionales
fija_ejes3d_proporcionales(ax);
fig.tight_layout();

```

ver Figura 4.22

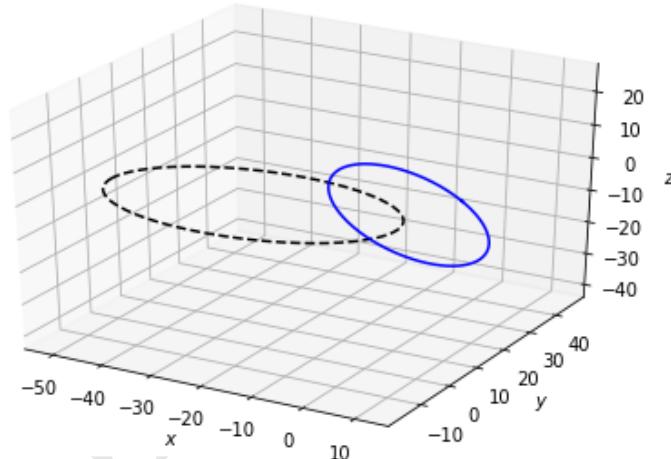


Figura 4.22: Figura correspondiente al código 4.18.

4.2.20. Elementos orbitales

Partiendo de las ecuaciones paramétricas de la cónica en su plano natural (Ecs. 4.65 y 4.66):

$$\begin{aligned} x''' &= \frac{p \cos f}{1 + e \cos f} \\ y''' &= \frac{p \sin f}{1 + e \cos f} \\ z''' &= 0 \end{aligned}$$

y usando las expresiones explícitas para la rotación en tres dimensiones dadas por las Ecs. (4.90) y (4.88), podemos escribir las ecuaciones paramétricas generales de

una cónica en el espacio:

$$\begin{aligned}x &= r[\cos \Omega \cos(\omega + f) - \cos i \sin \Omega \sin(\omega + f)] \\y &= r[\sin \Omega \cos(\omega + f) + \cos i \cos \Omega \sin(\omega + f)] \\z &= r[\cos f \sin \omega \sin i + \sin f \cos \omega \sin i]\end{aligned}\quad (4.91)$$

donde $r = p / (1 + e \cos f)$

Vemos aquí entonces que para especificar la posición de cualquier punto sobre una cónica, independiente de su orientación espacial, hace falta indicar el valor de 6 parámetros: p, e, i, Ω, ω y f . A estas cantidades las llamamos en mecánica celeste los **elementos orbitales clásicos** y volveremos sobre ellos en el [Capítulo 7](#).

En realidad, de los 6 elementos orbitales clásicos, 5 de ellos (p, e, i, Ω, ω) permiten especificar el tamaño, forma y orientación de la cónica y son compartidos por todos los puntos que definen la curva. El último elemento, f permite especificar la posición de un punto específico.

Usando los elementos orbitales clásicos podemos dibujar una cónica en el espacio usando un algoritmo más directo que el que usamos en la [Sección 4.2.19](#). Para ello hemos diseñado la rutina `conica_de_elementos`:

(Algoritmo 4.19)

```
def conica_de_elementos(p=10.0,e=0.8,i=0.0,Omega=0.0,omega=0.0,
                        df=0.1,
                        elev=30,azim=60,
                        figreturn=False):

    #Convierte elementos angulares en radianes
    from numpy import pi
    p=float(p)
    e=float(e)
    i=float(i)*pi/180
    Omega=float(Omega)*pi/180
    omega=float(omega)*pi/180

    #Compute fmin,fmax
    if e<1:
        fmin=-pi
        fmax=pi
    elif e>1:
        from numpy import arccos
        psi=arccos(1/e)
        fmin=-pi+psi+df
        fmax=pi-psi-df
    else:
        fmin=-pi+df
        fmax=pi-df

    #Valores del ángulo
    from numpy import linspace,pi
    fs=linspace(fmin,fmax,500)

    #Distancia al periapsis
```

```
q=p/(1+e)

#Distancia al foco
from numpy import sin,cos
rs=p/(1+e*cos(fs))

#Coordenadas
xs=rs*(cos(Omega)*cos(omega+fs)-cos(i)*sin(Omega)*sin(omega+fs))
ys=rs*(sin(Omega)*cos(omega+fs)+cos(i)*cos(Omega)*sin(omega+fs))
zs=rs*(cos(fs)*sin(omega)*sin(i)+sin(fs)*cos(omega)*sin(i))

#Posición del periapsis (f=0)
xp=q*(cos(Omega)*cos(omega)-cos(i)*sin(Omega)*sin(omega))
yp=q*(sin(Omega)*cos(omega)+cos(i)*cos(Omega)*sin(omega))
zp=q*sin(omega)*sin(i)

#Posición del nodo ascendente
rn=p/(1+e*cos(omega))
xn=rn*cos(Omega)
yn=rn*sin(Omega)
zn=0

#Gráfico
import matplotlib.pyplot as plt
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
plt.close("all")
fig=plt.figure()
ax=fig.gca(projection='3d')

#Gráfica de los puntos originales
ax.plot(xs,ys,zs,'b-')

#Posición del periapsis
ax.plot([0,xp],[0,yp],[0,zp], 'r-')

#Posición del nodo ascendente
ax.plot([0,xn],[0,yn],[0,zn], 'g-')

#Fija punto de vista
ax.view_init(elev=elev,azim=azim)

#Decoración
from pymcel.plot import fija_ejes3d_proporcionales
xrange,yrange,zrange=fija_ejes3d_proporcionales(ax);

ax.set_title(f"Cónica con:{p:.2f}, {e:.2f}, {i:.2f},\n"
            f"\Omega={Omega:.1f}, \omega={omega:.1f}")
)
```

```
#Dibuja Ejes
ax.plot([0,xrange[1]],[0,0],[0,0], 'k-')
ax.plot([0,0],[0,yrange[1]],[0,0], 'k-')
ax.plot([0,0],[0,0],[0,zrange[1]], 'k-')
ax.text(xrange[1],0,0,"$x$",ha='left',va='top')
ax.text(0,yrange[1],0,"$y$",ha='left',va='top')
ax.text(0,0,zrange[1],"$z$",ha='left',va='bottom')

fig.tight_layout();

if figreturn: return fig
```

El gráfico de la cónica sería:

(Algoritmo 4.20)

```
from numpy import pi
conica_de_elementos(p=10.0,e=0.5,Omega=60.0,i=30.0,omega=20.0);
```

ver Figura 4.23

Cónica con: $p = 10.00$, $e = 0.50$, $i = 30.00$, $\Omega = 60.0$, $\omega = 60.0$

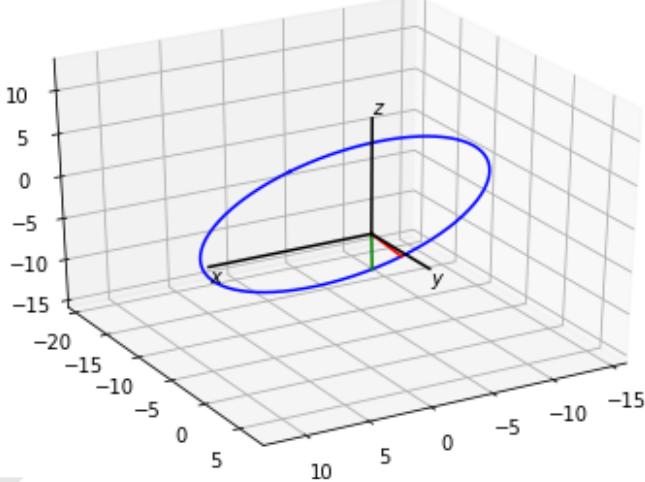


Figura 4.23: Figura correspondiente al código 4.20.

Para ver una versión interactiva de esta gráfica vaya a las libertas disponibles en la [versión electrónica el libro²⁵](#).

²⁵http://seap-udea.org/MecanicaCeleste_Zuluaga

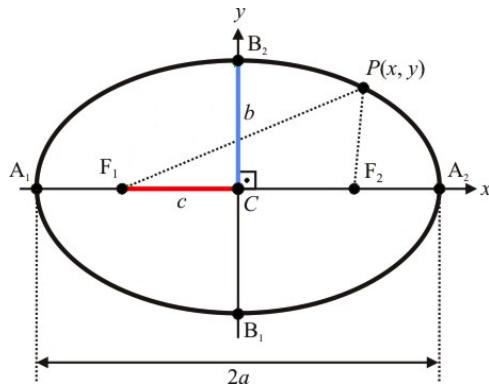


Figura 4.24: Una elipse con algunos puntos resaltados.

4.3. Problemas seleccionados

1. **Otra definición de una elipse.** Una elipse se puede definir como el lugar geométrico de los puntos cuya suma de las distancias a dos puntos fijos llamados focos es constante (esto es, en la figura de abajo, que $\overline{F_1P} + \overline{F_2P} = \text{constante}$). A partir de esta definición y de los parámetros descritos en el punto anterior:

- Muestre que la constante a la que es igual dicha suma es $2a$.
- Muestre que a , b y la *distancia focal* —definida como la distancia entre el centro C de la elipse y cualquiera de sus focos—, c , satisfacen el teorema de pitágoras $a^2 = b^2 + c^2$.
- Demuestre a partir de esta definición que la ecuación de la elipse horizontal centrada en $C = (0, 0)$ es:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

- A partir de las relaciones dadas entre a , b , e y F , muestre que e también se puede calcular como $e = c/a$.
- A partir de la definición conceptual de p dada en el punto 1, muestre que el *semilatus rectum* también se puede calcular como $p = b^2/a$.

1. Solución

- a) Dada la Figura 1, por simetría, se puede ver claramente que $\overline{A_1F_1} = \overline{A_2F_2}$, por lo que la suma de las distancias de A_1 a los focos sería

$$\overline{A_1F_1} + \overline{A_1F_2} = \overline{A_2F_2} + \overline{A_1F_2} = 2a.$$

Dado que, por definición, esa distancia es una constante para cualquier punto, entonces esa constante debe ser igual a $2a$.

- b) Si nos paramos, por ejemplo, en el punto B_2 , ya sabemos que $\overline{F_1B_2} + \overline{B_2F_2} = 2a$. Pero, por simetría, $\overline{F_1B_2} = \overline{B_2F_2} = a$. Se hace claro, entonces, que

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

- c) Por definición, considerando el punto generalizado de la elipse $P(x, y)$ medido desde $C(0, 0)$, tenemos

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a.$$

Elevando al cuadrado:

$$(x+c)^2 + y^2 + (x-c)^2 + y^2 + 2\sqrt{(x+c)^2 + y^2}\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 4a^2.$$

Expandiendo y organizando:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2}\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a^2 - x^2 - c^2 - y^2.$$

Elevando de nuevo al cuadrado:

$$(x^2 + 2cx + c^2 + y^2)(x^2 - 2cx + c^2 + y^2) = (2a^2 - x^2 - c^2 - y^2)^2.$$

Expandiendo y sumando términos semejantes, se llega a

$$4a^2x^2 + 4a^2y^2 - 4c^2x^2 = 4a^4 - 4a^2c^2.$$

Factorizando, obtenemos

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

Por el resultado del punto anterior, tenemos que $a^2 - c^2 = b^2$, por lo que tenemos

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2.$$

Dividiendo entre a^2b^2 :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

que era a lo que queríamos llegar.

- d) Dado que sabemos que a , b y e se pueden relacionar mediante $b = a\sqrt{1 - e^2}$, podemos escribir el teorema de pitágoras como >

$$a^2 = a^2(1 - e^2) + c^2.$$

> Sumando términos semejantes, llegamos a que >

$$e^2 = \frac{c^2}{a^2}.$$

> Debido a que a , b y e se definen como reales positivos, obtenemos >

$$e = \frac{c}{a},$$

> que era lo que queríamos.

- e) El semilatus rectum hace parte de un triángulo rectángulo con F_1 y F_2 como los vértices de la base. Así, por la definición de todos los parámetros geométricos y de elipse como lugar geométrico, podemos escribir la relación >

$$(2a - p)^2 = (2c)^2 + p^2.$$

> Expandiendo, simplificando y despejando, obtenemos >

$$p = \frac{a^2 - c^2}{a}.$$

> Pero como $a^2 - c^2 = b^2$, entonces obtenemos >

$$p = \frac{b^2}{a},$$

> que era lo que queríamos.

2. **Ecuación de una elipse.** Encuentre la ecuación general de la elipse cuyo semilatus rectum valga 9 y excentricidad sea 0.5.

2. **Solución.** Ya hemos demostrado que $p = b^2/a$, $b^2 = a^2 - c^2$ y $c = ea$. Reemplazando la tercera en la segunda y ésta en la primera, se sigue

$$9a = a^2 - 0,25a^2.$$

Dado que $a \neq 0$, obtenemos $a = 12$, $c = 6$ y $b = \sqrt{108}$. Así, la ecuación ordinaria de la elipse sería

$$\frac{x'^2}{144} + \frac{y'^2}{108} = 1,$$

que al multiplicar por 432 obtendríamos la ecuación general

$$3x'^2 + 4y'^2 - 432 = 0.$$

3. **Parámetros geométricos.** Defina conceptualmente a qué corresponden cada uno de los siguientes parámetros en el caso de una elipse: a) defina F , b) defina e , c) defina p , d) defina C , e) defina a , f) defina b , g) defina r , h) defina f , i) defina E .

3. Solución.

- a) F corresponde a la distancia entre la directriz de la elipse y su foco. Es una distancia, pero no necesariamente es la *distancia focal* (depende del sistema coordenado elegido). En el sistema coordenado «natural», coincide con la coordenada x del foco como punto del plano.
- b) e cooresponde a la excentricidad de la elipse, definida como la razón constante entre la distancia de cualquier punto de la elipse a su foco y la distancia de ese punto a la directriz. Indica qué tan achatada es la elipse. Entre más cercano sea e a 1, más achatada es la elipse. Entre más cercano a 0, más «circular» es.
- c) p corresponde al semilatus rectum de la elipse, la distancia entre su foco y un punto de la elipse sobre la perpendicular a su eje mayor que pasa por el foco.
- d) C corresponde al centro geométrico de la elipse. Puede considerarse una coordenada o una distancia. En el sistema coordenado «natural» corresponde a la coordenada x del centro de la elipse.
- e) a corresponde al semieje mayor de la elipse. Es la distancia entre el centro geométrico de la elipse y uno de los puntos más alejados de éste.
- f) b corresponde al semieje menor de la elipse. Es la distancia entre el centro geométrico de la elipse y uno de los puntos más cercanos a éste.
- g) r corresponde a la coordenada radial en coordenadas polares de un punto de la elipse medido desde el foco de la misma.
- h) f corresponde a la coordenada angular en coordenadas polares (llamada anomalía verdadera) de un punto de la elipse medido desde el foco como polo y el eje mayor como eje polar.
- i) E corresponde a la anomalía excéntrica y es la coordenada angular de un punto de una circunferencia de radio a verticalmente superior al punto sobre la elipse con anomalía verdadera f .

4. **Traslación de las cónicas.** A partir de una completación de cuadrados, demuestre que la ecuación general de las cónicas sin términos acoplados

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + G = 0$$

con $A, C \neq 0$ se puede escribir, en su forma ordinaria, como

$$\frac{x'^2}{q} + \frac{y'^2}{t} = 1,$$

donde x' y y' son las coordenadas de un punto en el sistema trasladado dadas por

$$x' = x + \frac{D}{2A},$$

$$y' = y + \frac{E}{2C}$$

y q, t están dadas por

$$q = -\frac{G}{A} + \frac{D^2}{4A^2} + \frac{E^2}{4AC},$$

$$t = -\frac{G}{C} + \frac{D^2}{4AC} + \frac{E^2}{4C^2}.$$

¿Qué condiciones se deben dar para que dicha cónica sea una circunferencia, una elipse o una hipérbola? Dé un ejemplo numérico sencillo de cada una.

4. Solución.

Tomando la ecuación y sacando factor «común» A para los términos con x y B para los términos con y , se tiene

$$A \left(x^2 + \frac{D}{A}x \right) + C \left(y^2 + \frac{E}{C}y \right) = -G.$$

Sumando a ambos lados de la ecuación los términos $D^2/4A$ y $E^2/4C$ convenientemente, se sigue que

$$A \left(x^2 + \frac{D}{A}x + \frac{D^2}{4A^2} \right) + C \left(y^2 + \frac{E}{C}y + \frac{E^2}{4C^2} \right) = -G + \frac{D^2}{4A} + \frac{E^2}{4C}.$$

Factorizando los trinomios cuadrado perfecto y dividiendo la ecuación por todo el lado derecho, obtenemos

$$\frac{\left(x + \frac{D}{2A} \right)^2}{-\frac{G}{A} + \frac{D^2}{4A^2} + \frac{E^2}{4AC}} + \frac{\left(y + \frac{E}{2C} \right)^2}{-\frac{G}{C} + \frac{C^2}{4AC} + \frac{E^2}{4C^2}} = 1.$$

Haciendo

$$\begin{aligned}x' &= x + \frac{D}{2A}, \\y' &= y + \frac{E}{2C}, \\q &= -\frac{G}{A} + \frac{D^2}{4A^2} + \frac{E^2}{4AC}, \\t &= -\frac{G}{C} + \frac{D^2}{4AC} + \frac{E^2}{4C^2},\end{aligned}$$

tenemos la ecuación de la cónica en su forma ordinaria pedida. Para que esta cónica sea una circunferencia, debe suceder que $q = t$ y que $q, t > 0$; para que sea una elipse, debe suceder que $q \neq t$ y que $q, t > 0$; y para que sea una hipérbola, debe suceder que $q > 0$ y $t < 0$ o viceversa. Nótese que $t = \frac{C}{A}q$, lo que significa que la ecuación pertenece a una circunferencia, también, cuando $A = C$; a una elipse cuando $A \neq C$ pero $A, C > 0$; y a una hipérbola cuando $A > 0$ y $C < 0$ o viceversa. Un ejemplo sencilla de cada una, en orden, sería

$$x'^2 + y'^2 = 1, \quad \frac{x'^2}{2} + y'^2 = 1, \quad x'^2 - y'^2 = 1.$$

5. Rotación de cónicas. A partir de la ecuación general de la cónica con términos acoplados

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + G = 0$$

aplique una rotación de la forma

$$x = x' \cos \theta - y' \sin \theta$$

$$y = x' \sin \theta + y' \cos \theta$$

y demuestre que si se rota el sistema de coordenadas original un ángulo θ que satisface

$$\tan 2\theta = \frac{B}{A - C},$$

los nuevos ejes estarán alineados con los ejes de simetría.

5. Solución

Al aplicar la rotación:

$$A(x' \cos \theta - y' \sin \theta)^2 + B(x' \cos \theta - y' \sin \theta)(x' \sin \theta + y' \cos \theta) + C(x' \sin \theta + y' \cos \theta)^2 + D(x' \cos \theta - y' \sin \theta) + E(x' \sin \theta + y' \cos \theta) + G = 0.$$

Para que los nuevos ejes estén alineados con los ejes de simetría, es necesario que los términos acoplados se anulen. Esto es, al expandir, que suceda que

$$-2Ax'y' \cos \theta \sin \theta + Bx'y' \cos^2 \theta - Bx'y' \sin^2 \theta + 2Cx'y' \sin \theta \cos \theta = 0.$$

Dado que $\cos^2 \theta - \sin^2 \theta = \cos 2\theta$ y $2 \sin \theta \cos \theta = \sin 2\theta$, la condición se reduce a que

$$-\sin 2\theta(A - C) + B \cos 2\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \tan 2\theta = \frac{B}{A - C},$$

que era lo que queríamos demostrar.

6. Órbitas de cometas. El semieje mayor de un cometa es de 20 AU y la distancia entre el foco y el perihelio es de 1 AU.

- a) ¿Cuál es la excentricidad de la órbita?
- b) ¿Cuánto vale el semieje menor?
- c) ¿Cuánto vale el semilatus rectum?
- d) Escriba la ecuación de este cometa en coordenadas polares.
- e) Haga un bosquejo de la situación medianamente a escala.

6. Solución

- a) Claramente, la distancia entre el foco y el perihelio debe ser $r_1 = a - c$. Dado que $r_1 = 1$ AU y que $a = 20$ AU, entonces $c = 19$ AU y, por lo tanto, $e = c/a = 19/20 = 0,95$.
- b) Dado que $a^2 = b^2 + c^2$, entonces $b = \sqrt{39} = 6,2$ AU.
- c) Dado que $p = b^2/a$, entonces $p = 39/20 = 1,9$ AU.
- d) La ecuación de la órbita de este cometa en coordenadas polares sería de la forma

$$r = \frac{39/20 \text{ AU}}{1 + \frac{19}{20} \cos f} = \frac{1,9 \text{ AU}}{1 + 0,95 \cos f}$$

7. Órbita lunar. Sobre una órbita lunar, el punto más cercano al satélite se conoce como periselenio y el más lejano como aposelenio. La nave Apolo 11 fue puesta en una órbita elíptica alrededor de la luna con una altitud (respecto a la superficie lunar) en el periselenio de 110 km y de 314 km en el aposelenio. Encuentre la ecuación de esta elipse en coordenadas polares si el radio de la luna es de 1728 km y el centro de la luna se encuentra en uno de los focos de la elipse. Haga un bosquejo de la situación medianamente a escala.

7. Solución

En primer lugar, sabemos que la distancia entre el periselenio y el aposelenio debe ser 2 veces el semieje mayor de la órbita del satélite. Así

$$a = \frac{110 + 2 \times 1728 + 314}{2} \text{ km} = 1940 \text{ km.}$$

Además, la distancia entre el centro de la luna (foco) y el periselenio es, como ya se había dicho, $a - c = 1728 \text{ km} + 110 \text{ km}$, por lo que $c = 102 \text{ km}$. Así, $e = c/a = 0,053$, $b^2 = a^2 - c^2 = 3753196 \text{ km}^2$ y $p = b^2/a = 1935 \text{ km}$. Y, por lo tanto, la ecuación de esta elipse en coordenadas polares sería

$$r = \frac{1935 \text{ km}}{1 + 0,053 \cos f}.$$

8. Anomalías.

- a) Demuestre que, para una elipse, la distancia radial, r , está relacionada con la anomalía excéntrica, E , por medio de la expresión

$$r = a(1 - e \cos E).$$

- b) Demuestre, además, que la anomalía verdadera se relaciona con la anomalía excéntrica a través de

$$\tan \frac{f}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{E}{2}.$$

8. Solución

- a) Si definimos la elipse como el lugar geométrico de los puntos tal que están a una distancia del eje x en proporción b/a de la distancia de los puntos de una circunferencia de radio a que se muestra en la Figura ??, entonces

$$\frac{\overline{PD}}{\overline{QD}} = \frac{b}{a}$$

Si usamos el teorema de Pitágoras para relacionar r con los distintos segmentos de la figura obtenemos

$$r^2 = (\overline{DF})^2 + (\overline{PD})^2 = (\overline{CF} - \overline{CD})^2 + \left(\frac{b}{a}\overline{QD}\right)^2$$

Por la geometría de la elipse sabemos sin embargo que $\overline{CD} = a \cos E$, $\overline{QD} = a \sin E$ y que la distancia focal $\overline{CF} = ea$. Así,

$$r^2 = (ea - a \cos E)^2 + \left(\frac{b}{a}a \sin E\right)^2$$

$$\text{expandiendo } \rightarrow = e^2 a^2 - 2ea^2 \cos E + a^2 \cos^2 E + b^2 \sin^2 E$$

$$\sin^2 E = 1 - \cos^2 E \rightarrow = e^2 a^2 - 2ea^2 \cos E + a^2 \cos^2 E + b^2 - b^2 \cos^2 E$$

$$\text{agrupando } \rightarrow = (e^2 a^2 + b^2) - 2ea^2 \cos E + (a^2 - b^2) \cos^2 E$$

$$c = e/a \text{ y } a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow = a^2 - 2ea^2 \cos E + e^2 a^2 \cos^2 E$$

$$\text{factorizando } \rightarrow = a^2 (1 - e \cos E)^2$$

$$r = a (1 - e \cos E).$$

- b) Primero, nótese que para cualquier ángulo θ se satisface la identidad

$$\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\sin(\theta/2)}{\cos(\theta/2)} = \frac{\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}}{\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}} = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}} \times 1 = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}} \times \frac{1+\cos\theta}{1+\cos\theta} = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{(1+\cos\theta)^2}} = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1-2\cos\theta+\cos^2\theta}} = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{\sin^2\theta}} = \frac{1-\cos\theta}{|\sin\theta|}$$

por lo que, entonces,

$$\tan\frac{f}{2} = \frac{\sin f}{1 + \cos f}.$$

Se puede ver que $\sin f = \overline{PD}/r$ y que $\cos f = (a \cos E - ae)/r$, por lo que

$$\tan\frac{f}{2} = \frac{\overline{PD}}{r + a \cos E - ae}.$$

Debido a que tenemos que $\overline{PD} = b \sin E$, $r = a (1 - e \cos E)$ y que $b = a\sqrt{1 - e^2}$, entonces, factorizando y racionalizando, se obtiene

$$\tan \frac{f}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \frac{\sin E}{1+\cos E}.$$

Pero como

$$\frac{\sin E}{1+\cos E} = \tan \frac{E}{2},$$

entonces

$$\tan \frac{f}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{E}{2}.$$

- 9. Parámetros de elipse.** Dada la ecuación de la elipse $x^2 + 2y^2 + 2x + y - 6 = 0$ complete cuadrados y llévela a su forma ordinaria, para determinar la posición del centro, el semieje mayor, semieje menor, distancia focal y semilatus rectum.

9. Solución

Agrupemos las x y las y :

$$(x^2 + 2x) + 2\left(y^2 + \frac{y}{2}\right) = 6.$$

Completemos cuadrados:

$$(x^2 + 2x + 1) + 2\left(y^2 + \frac{y}{2} + \frac{1}{16}\right) = 6 + 1 + \frac{1}{8}.$$

Factoricemos y dividamos ambos lados entre $57/8$:

$$\frac{(x+1)^2}{57/8} + \frac{\left(y + \frac{1}{4}\right)^2}{57/16} = 1.$$

Tenemos, entonces, que el centro de la elipse es el punto $C(-1, -1/4)$, los semiejes mayor y menores son $a = \sqrt{57/8} = 2,7$ y $b = \sqrt{57/16} = 1,9$, la distancia focal es $c = \sqrt{a^2 - b^2} = b$ y el semilatus rectum es $p = b^2/a = 1,3$. Grafiquemos:

- 10. Elementos orbitales.** Para un satélite en órbita alrededor de la Tierra se tienen los siguientes elementos orbitales: $a = 8016,0$ km, $e = 0,06$, $I = 50^\circ$, $\Omega = 0,0^\circ$, $\omega = 30^\circ$ y $f = 20^\circ$. Encuentre el vector de posición en el plano fundamental del ecuador terrestre.

10. Solución

Es claro que, en el plano de la órbita del satélite, se satisface $z''' = 0$ y que

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos f} \quad \Rightarrow \quad x''' = r \cos f \quad y \quad y''' = r \sin f.$$

```
import numpy as np
GRADOS=np.pi/180
a = 8016.
e = 0.06
f = 20*GRADOS

r = a*(1-e*e)/(1+e*np.cos(f))
xppp = r*np.cos(f)
yppp = r*np.sin(f)
zppp = 0
rppp=np.array([[xppp], [yppp], [zppp]])
print('El vector posición en el plano orbital es, en km,\n',rppp)
```

El vector posición en el plano orbital es, en km,
[[7104.87486548]
[2585.96296922]
[0.]]

Recordemos que SPICE tiene una rutina predefinida para calcular una matriz de rotación a partir de tres ángulos de Euler: `eul2m`. Usando la matriz para pasar del sistema no primado al primado quedaría:

```
import spiceypy as spy
i = 50*GRADOS
Omega = 0*GRADOS
omega = 30*GRADOS

R3d=spy.eul2m(omega,i,Omega,3,1,3)
R3d
```

Out[81]: array([[0.8660254 , 0.3213938 , 0.38302222] ,
[-0.5 , 0.5566704 , 0.66341395] ,
[0. , -0.76604444, 0.64278761]])

Pero queremos pasar del sistema primado al no primado, entonces sacamos la inversa (o traspuesta, que es lo mismo para matrices de rotación):

```
R3D = np.transpose(R3d)
R3D
```

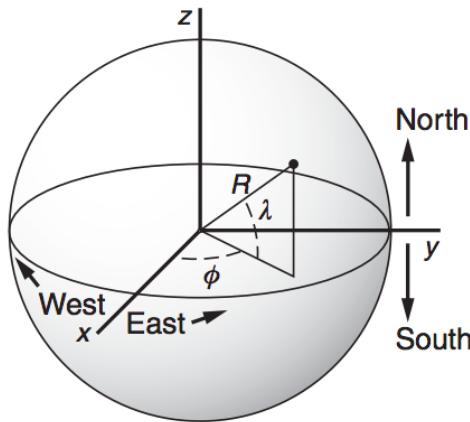


Figura 4.25: Definición de las coordenadas de latitud y longitud sobre la Tierra

```
Out[82]: array([[ 0.8660254 , -0.5        ,  0.        ],
   [ 0.3213938 ,  0.5566704 , -0.76604444],
   [ 0.38302222,  0.66341395,  0.64278761]])
```

Así, el vector posición está dado por

```
R3D.dot(rppp)
```

```
Out[83]: array([4860.02063961,
   [3722.99180441],
   [4436.88885811]])
```

11. **Circunferencia máxima.** La posición de un punto sobre la Tierra se especifica por su longitud ϕ y latitud λ , como se muestra en la [Figura 4.25](#).

Sean los vectores desde el centro de la Tierra hacia dos puntos \vec{r}_1 y \vec{r}_2 . El coseno del ángulo θ entre ellos puede ser hallado a partir de su producto escalar (producto punto), de tal manera que la distancia a lo largo del círculo máximo entre los dos puntos es $R\theta$.

Encuentre una expresión para θ en términos de las coordenadas de los dos puntos.

11. Solución

El vector posición \vec{r}_i sobre la superficie de la Tierra tendrá coordenadas cartesianas $x_i = R \cos \lambda_i \cos \phi_i$, $y_i = R \cos \lambda_i \sin \phi_i$ y $z_i = R \sin \lambda_i$. Así, el producto punto entre \vec{r}_1 y \vec{r}_2 se puede calcular como $R^2 \cos \theta$ y, a la vez, como la suma de los productos de las componentes $x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$, de tal forma que

$$R^2 \cos \theta = R^2 (\cos \lambda_1 \cos \phi_1 \cos \lambda_2 \cos \phi_2 + \cos \lambda_1 \sin \phi_1 \cos \lambda_2 \sin \phi_2 + \sin \lambda_1 \sin \lambda_2).$$

Sacando factor común $\cos \lambda_1 \cos \lambda_2$ en los primeros dos términos y teniendo en cuenta la identidad $\cos \phi_1 \cos \phi_2 + \sin \phi_1 \sin \phi_2 = \cos(\phi_1 - \phi_2)$, obtenemos la expresión para θ pedida:

$$\theta = \arccos(\cos \lambda_1 \cos \lambda_2 \cos(\phi_1 - \phi_2) + \sin \lambda_1 \sin \lambda_2)$$

- 12. Derivada temporal de los vectores unitarios.** La figura muestra la configuración de un sistema de coordenadas polares definido por $(\hat{r}, \hat{\theta})$ relativo a un sistema cartesiano. Los conjuntos de vectores $(\hat{r}, \hat{\theta})$ y (\hat{i}, \hat{j}) son constantes en magnitud pero solamente los vectores cartesianos lo son también en dirección. Conforme la partícula de vector posición \vec{r} se desplaza, los vectores $(\hat{r}, \hat{\theta})$ cambian de dirección, de forma tal que es posible definir una derivada temporal de estos.

- a) Muestre que

$$\frac{d\hat{r}}{dt} = \dot{\theta}\hat{\theta}$$

$$\frac{d\hat{\theta}}{dt} = -\dot{r}\hat{r}$$

- b) Usando los resultados del punto anterior, muestre que el vector aceleración en coordenadas polares viene dado por

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\theta}$$

12. Solución

En primer lugar, se puede ver claramente de la figura dada que el vector unitario \hat{r} se puede escribir como una suma de $\cos \theta$ en \hat{i} y de $\sin \theta$ en \hat{j} , al igual que el vector unitario $\hat{\theta}$ se puede escribir como una suma de $-\sin \theta$ en \hat{i} y de $\cos \theta$ en \hat{j} .

- a. Así,

$$\frac{d\hat{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(\cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j})$$

Pero como $d(\sin \theta)/dt = \dot{\theta} \cos \theta$, $d(\cos \theta)/dt = -\dot{\theta} \sin \theta$ y los vectores unitarios \hat{i} y \hat{j} no cambian en el tiempo, entonces

$$\frac{d\hat{r}}{dt} = -\dot{\theta} \sin \theta \hat{i} + \dot{\theta} \cos \theta \hat{j} = \dot{\theta}\hat{\theta}$$

De igual forma,

$$\frac{d\hat{\theta}}{dt} = \frac{d}{dt}(-\sin\theta\hat{i} + \cos\theta\hat{j}) = -\dot{\theta}\cos\theta\hat{i} - \dot{\theta}\sin\theta\hat{j} = -\dot{\theta}\hat{r}$$

b. Dado que $\vec{r} = r\hat{r}$, entonces

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r}\hat{r} + r\frac{d\hat{r}}{dt} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}$$

Y por lo tanto

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{r}\hat{r} + \dot{r}\dot{\theta}\hat{\theta} + \dot{r}\theta\hat{\theta} + r\ddot{\theta}\hat{\theta} - r\dot{\theta}^2\hat{r}$$

Agrupando,

$$\ddot{\vec{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{\theta}$$

c. Volviendo a derivar:

$$\dddot{\vec{r}} = \ddot{r}\hat{r} + \dot{r}\dot{\theta}\hat{\theta} + 2\dot{r}\theta\hat{\theta} + 2\ddot{r}\hat{\theta} + 2\dot{r}\ddot{\theta}\hat{\theta} - 2r\dot{\theta}^2\hat{r} + \dot{r}\ddot{\theta}\hat{\theta} + r\ddot{\theta}\hat{\theta} - r\ddot{\theta}\dot{\theta}\hat{r} - \dot{r}\dot{\theta}^2\hat{r} - 2r\dot{\theta}\dot{\theta}\hat{r} - r\dot{\theta}^3\hat{\theta}$$

Agrupando,

$$\dddot{\vec{r}} = (\ddot{r} - 3\dot{r}\dot{\theta}^2 - 3r\dot{\theta}\ddot{\theta})\hat{r} + (3\dot{r}\dot{\theta} + 3\dot{r}\ddot{\theta} + r\ddot{\theta} - r\dot{\theta}^3)\hat{\theta}$$

En el caso de una partícula moviéndose en una circunferencia de radio R ($r = R$, $\dot{r} = \ddot{r} = 0$) con rapidez angular ω ($\dot{\theta} = \omega$, $\ddot{\theta} = \dot{\theta} = 0$), el tirón sería

$$\ddot{\vec{r}} = -R\omega^3\hat{\theta}$$

Capítulo 5

Mecánica newtoniana

Resumen

En este capítulo presentaremos una síntesis moderna de los mecanismos newtonianos, aplicada específicamente a partículas (puntuales). Sobre la base de los principios, postulados y proposiciones de la mecánica newtoniana formularemos los principales resultados de la mecánica celeste que desarrollamos en este libro. Daremos un especial énfasis a la mecánica de sistemas de partículas interactantes, descritos tanto en sistemas de referencia iniciales como no iniciales. En este último caso nos concentraremos en los sistemas de referencia rotante, que son importantes para la descripción del problema restringido de los tres cuerpos que estudiaremos más adelante.

5.1. Introducción

Conocemos con el nombre de **mecánica** al conjunto de definiciones, principios y leyes físicas que permiten describir el movimiento de los cuerpos materiales (cinemática) y la relación con los agentes que los producen y perturban (dinámica).

La mecánica se ha desarrollado históricamente durante dos períodos. El primero período está comprendido entre la publicación de los *Principia Mathematica* por Sir Isaac Newton [37] y los artículos fundamentales de la teoría de la relatividad de 1905. A la mecánica de este período la llamaremos **mecánica prerrelativística** o **mecánica newtoniana**. El segundo período cubre el tiempo entre 1905 y el presente. A la mecánica que se desarrolló después de los trabajos originales de Einstein la llamaremos **mecánica relativística** e incluye las teorías especial (mecánica en espacio-tiempo plano) y general de la relatividad (gravitación moderna).

El adjetivo newtoniano, que usaremos a lo largo de este capítulo, no significa que las cantidades, principios y leyes que formularemos aquí fueron todas inventadas por Newton. Por un lado, además de sus ideas originales, Newton también compiló y sistematizó ideas que ya existían en su época; por el otro, mucha de sus ideas fueron también ampliadas durante casi 200 años después de la publicación

de sus obras.

Lo *newtoniano* se refiere aquí al hecho de que en la definición de las cantidades básicas y en la formulación de las leyes, asumiremos, como lo hizo Newton en los *Principia* y lo hicieron sus sucesores hasta principios de los 1900, que: (1) el espacio y el tiempo son entidades independientes y no son afectadas por la materia y (2) la gravedad es una fuerza de acción instantánea a distancia.

Aunque hoy nos parezca increíble, casi toda la mecánica celeste de los últimos 350 años se ha formulado sobre la base de estos principios que hoy sabemos no describen la realidad fundamental del Universo.

La mecánica es una teoría muy amplia que se usa para describir no solo el movimiento de cuerpos o partículas individuales, sino también el movimiento, rotación y deformación de cuerpos materiales continuos (cuerpos rígidos y fluidos.) En este capítulo (y en lo que resta del libro) nos concentraremos, sin embargo, en la mecánica de partículas o sistemas de partículas (nubes de partículas que interactúan débilmente y a distancia entre ellas.)

Antes de proceder a formular los principios (axiomas) y postulados (leyes) en los que se fundamenta la mecánica newtoniana, es necesario definir primero, las cantidades físicas que requerimos en esta tarea. Definir estas cantidades en todo rigor, no solo es un ejercicio intelectual indispensable en la formulación de una teoría, sino, como veremos, puede ser la fuente misma de algunas ideas claves.

5.2. Cinemática

5.2.1. Cantidades cinemáticas

Las cantidades cinemáticas son aquellas que se usan para describir el movimiento, tal y como ocurre, independiente de sus causas.

Para detalles sobre las convenciones y la notación de las cantidades definidas abajo se recomienda leer la [Sección 4.1.1](#), [Sección 4.1.2](#) y [Sección 4.1.4](#).

- **Tiempo, t :** Un número real que indica el *intervalo* transcurrido desde un *instante* de referencia. Esta cantidad es *independiente y absoluta* (ver comentarios abajo.)
- **Posición (o vector posición), \vec{r} :** Es el vector que va del origen de coordenadas a un lugar del espacio.
 - Coordenadas cartesianas: $\vec{r} = x\hat{e}_x + y\hat{e}_y + z\hat{e}_z$.
 - Coordenadas cilíndricas: $\vec{r} = r\hat{e}_r + z\hat{e}_z$.
 - Coordenadas esféricas: $\vec{r} = r\hat{e}_r$.
- **Velocidad \vec{v} :**
 - Definición general: $\vec{v} \equiv d\vec{r}/dt = \dot{\vec{r}}$.
 - Coordenadas cartesianas: $\vec{v} = \dot{x}\hat{e}_x + \dot{y}\hat{e}_y + \dot{z}\hat{e}_z$.
 - Coordenadas cilíndricas: $\vec{v} = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta + \dot{z}\hat{e}_z$.
 - Coordenadas esféricas: $\vec{v} = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta} \cos \phi \hat{e}_\theta + r\dot{\phi} \hat{e}_\phi$
- **Estado \vec{X} :** En el contexto de la cinemática en mecánica celeste, llamamos vector de estado \vec{X} , al vector formado por la unión de las componentes cartesianas de los vectores posición y velocidad, $\vec{X} : (x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$. En distintos

contextos será más conveniente denotar al vector de estado usando *notación matricial*, como un vector columna (matriz 6×1) $\vec{X} : (x \ y \ z \ \dot{x} \ \dot{y} \ \dot{z})^T$ o explícitamente:

$$\vec{X} : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} \quad (5.1)$$

■ **Aceleración \vec{a} :**

- Definición general: $\vec{a} \equiv d\vec{v}/dt = \dot{\vec{v}} = d^2\vec{r}/dt^2 = \ddot{\vec{r}}$.
- Coordenadas cartesianas: $\vec{a} = \ddot{x}\hat{e}_x + \ddot{y}\hat{e}_y + \ddot{z}\hat{e}_z$.
- Coordenadas cilíndricas:

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{e}_r(r\ddot{\theta} + 2r\dot{\theta}\dot{\phi})\hat{e}_\theta + \ddot{z}\hat{e}_z \quad (5.2)$$

- Coordenadas esféricas:

$$\begin{aligned} \vec{a} = & (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \cos^2 \phi - r\dot{\phi}^2)\hat{e}_r + \\ & (2r\dot{\theta} \cos \phi + r\ddot{\theta} \cos \phi - 2r\dot{\theta}\dot{\phi} \sin \phi)\hat{e}_\theta + \\ & (2r\dot{\phi} + r\dot{\phi}^2 \sin \phi \cos \phi + r\ddot{\phi})\hat{e}_\phi \end{aligned} \quad (5.3)$$

■ **Tirón y otras:** Es posible definir propiedades que correspondan a la derivada tercera e incluso derivadas superiores del vector posición.

Así por ejemplo, en algunos contextos es útil definir el *tirón* o *sobreaceleración*(*jerk* en inglés):

$$\vec{j} = d\vec{a}/dt = \frac{d^3\vec{r}}{dt^3},$$

el *chasquido* o *rebote* (*jounce* en inglés):

$$\vec{s} \equiv d\vec{j}/dt = \frac{d^4\vec{r}}{dt^4}.$$

Aunque estas cantidades pueden ser de utilidad en algunos contextos mecánicos (por ejemplo en aplicaciones tecnológicas) e incluso en algunos contextos de física teórica, en mecánica celeste ninguno de los dos tiene una función específica (aunque es natural que puedan aparecer derivadas superiores de la posición en los desarrollos.) Por esta misma razón no profundizaremos en estas cantidades. Los interesados pueden encontrar en línea²⁶ algunas *lecturas interesantes*²⁷ al respecto.

²⁶[https://en.wikipedia.org/wiki/Jerk_\(physics\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Jerk_(physics))

²⁷<http://math.ucr.edu/home/baez/physics/General/jerk.html>

Las expresiones para \vec{v} y para \vec{a} en el sistema de coordenadas cilíndricas y esféricas, provistas en la enumeración anterior, pueden obtenerse a partir de las derivadas respecto al tiempo de los vectores unitarios en cada sistema de coordenadas. Dejamos al lector estas deducciones (ver problemas al final del capítulo.)

Varias precisiones deben hacerse sobre la definición de las cantidades cinemáticas presentadas arriba:

- **Tiempo independiente y absoluto.** En la mecánica newtoniana, el valor del tiempo t asociado a un evento depende solo de las unidades y el instante de referencia escogido. Si dos sistemas de referencia, independiente de su estado de movimiento relativo, usan las mismas unidades y el mismo instante de referencia, obtendrán el mismo valor de t . Este postulado (que formularemos rigurosamente en el siguiente aparte) aunque bastante útil, es inexacto como se comprobaría a principios de los 1900.
- **Notación del vector posición en coordenadas cilíndricas.** La notación del vector posición en coordenadas cilíndricas, $\vec{r} = r\hat{a}_r + z\hat{a}_z$ es “inconsistente” porque usa la misma letra para referirse a cantidades diferentes. Así, en este sistema de coordenadas la magnitud del vector posición es $r = \sqrt{r^2 + z^2}$, una expresión que carece de sentido (parece indicar que todos los puntos tienen $z = 0$). Para subsanar esta dificultad es común que en los libros de cálculo se use la letra griega ρ para denotar la componente radial del vector posición en coordenadas cilíndricas. ¿Por qué no hacer lo mismo aquí? Como sucede con muchas elecciones no muy sensatas en astronomía, lo haremos simplemente porque es tradición en mecánica celeste usar la letra r para referirse a la coordenada radial sobre un plano. En lo que resta del libro, el significado de las cantidades que denotemos como r se precisará de acuerdo al contexto en la que se usen.
- **Velocidad, rapidez y componente radial de la velocidad.** Asegurese de entender la diferencia conceptual y matemática entre las cantidades: \vec{r} (vector velocidad), $v = |\dot{\vec{r}}|$ (magnitud de la velocidad o rapidez) y \dot{r} (componente radial de la velocidad en el sistema de coordenadas cilíndricas o esféricas).

5.2.2. Sistemas de referencia

Como hemos sugerido antes, el valor de las cantidades cinemáticas definidas arriba, dependerá, por ejemplo, de cómo elijamos el instante de referencia para medir el tiempo o el origen del sistema de coordenadas. Estas elecciones (arbitrarias) definen lo que en física se conoce como el **sistema de referencia**.

Vale la pena aclarar que el sistema de referencia no es lo mismo que el sistema de coordenadas: en un mismo sistema de referencia se pueden usar distintos sistemas de coordenadas.

¿Cómo se relacionan las cantidades cinemáticas medidas en dos sistemas de referencia diferentes?

Esta pregunta fue importante en los albores de la mecánica, especialmente en los trabajos de Galileo. En aquel entonces, sin embargo, tenía un valor más bien filosófico e incluso retórico (como herramienta de argumentación), pero una relevancia física menor. A principios de los 1900, especialmente en los trabajos de Albert Einstein y colaboradores, la pregunta por la relación entre las observaciones

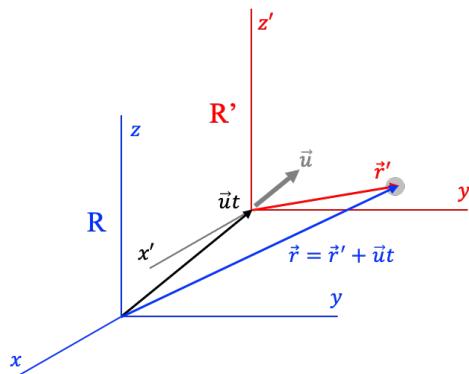


Figura 5.1: Construcción geométrica para deducir la regla de transformación de la posición \vec{r} de una partícula (circulo gris) entre dos sistemas de referencia inerciales (que se mueven uno respecto de otro con velocidad constante \vec{u}).

realizadas en distintos sistemas de referencia, se convirtió en la base de la formulación de una nueva teoría física (la teoría de la relatividad).

Toda la mecánica newtoniana que veremos a continuación, y sobre la base de ella, los resultados de la mecánica celeste que desarrollaremos en este libro, se apoyan en el postulado de que las observaciones realizadas en sistemas de referencias diferentes se pueden conectar a través de las denominadas **transformaciones de Galileo**:

Postulado 5.1

Transformaciones de Galileo. Si dos sistemas de referencia, R y R' usan las mismas unidades y el origen de sus sistemas de coordenadas coincide en $t = 0$, las siguientes relaciones entre las propiedades cinemáticas básicas medidas en los dos sistemas de referencia, se consideran válidas (ver [Figura 5.1](#)):

$$\begin{aligned} t &= t' \\ \vec{r} &= \vec{r}' + \vec{u}t \end{aligned} \tag{5.4}$$

Donde \vec{u} es la velocidad (constante) del origen de coordenadas del sistema R' respecto del sistema R .

Estas transformaciones fundamentales, permiten escribir las reglas de transformación para cualquier otra propiedad cinemática, por ejemplo, para la velocidad y la aceleración:

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{u} \tag{5.5}$$

$$\vec{a} = \vec{a}' \tag{5.6}$$

La Ec. (5.5) se conoce como la **ley de adición de velocidades galileana** y tiene una importancia histórica en el desarrollo de los postulados de la teoría de la re-

latividad. La Ec. (5.65) será importante en la definición, en las próximas secciones, del concepto de **sistema de referencia inercial**.

5.2.3. La ecuación de movimiento (e.d.m.)

La posición y velocidad de una partícula en cualquier instante futuro puede predecirse si se resuelve la siguiente ecuación diferencial:

$$\ddot{\vec{r}} = \vec{a}. \quad (5.7)$$

A esta ecuación se la conoce en mecánica como la **ecuación de movimiento** y para referirnos a ella, en lo sucesivo, usaremos el acrónimo e.d.m. o el nombre **edm** en los algoritmos.

La solución general de esta ecuación es la función de posición de la partícula $\vec{r}(t)$, de la que se pueden deducir posteriormente las demás cantidades cinemáticas.

La e.d.m. es una ecuación diferencial vectorial de segundo orden con condiciones iniciales $\vec{r}(t_0) = \vec{r}_0$, $\dot{\vec{r}}(t = t_0) = \vec{v}_0$, es decir, matemáticamente y como explicamos en la [Sección 4.1.9](#), es un problema de valor inicial (IVP).

La aceleración \vec{a} en la Ec. (5.7) es una función que puede depender de varias de las cantidades cinemáticas definidas en la sección previa. Para la mayoría de las situaciones consideradas en este texto, sin embargo, asumiremos que la aceleración depende solamente del tiempo y del estado de la partícula, es decir:

$$\vec{a} = \vec{a}(t, \vec{r}, \dot{\vec{r}}).$$

La e.d.m. puede expresarse también como dos ecuaciones diferenciales vectoriales de primer orden (*reducción de orden*):

$$\begin{aligned}\dot{\vec{r}} &= \vec{v} \\ \dot{\vec{v}} &= \vec{a}(t, \vec{r}, \vec{v})\end{aligned} \quad (5.8)$$

Aquí se ha introducido como variable auxiliar la velocidad misma $\vec{v} \equiv \dot{\vec{r}}$. Escrita de esta manera, la solución al sistema de ecuaciones diferenciales de la e.d.m. provee simultáneamente las funciones $\vec{r}(t)$ y $\vec{v}(t)$. El sistema gana variables, pero el orden se reduce.

La e.d.m., tanto en la forma (5.7) como (5.8) representa, en realidad, una forma compacta de escribir un sistema de ecuaciones diferenciales escalares.

En términos de las componentes cartesianas, la e.d.m. de la Ec. (5.7) es en realidad un sistema de tres ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden:

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= a_x \\ \ddot{y} &= a_y \\ \ddot{z} &= a_z\end{aligned} \quad (5.9)$$

Por su lado la e.d.m. de la Ec. (5.8) corresponde a un sistema de 6 ecuaciones diferenciales escalares de primer orden:

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= v_x \\
 \dot{y} &= v_y \\
 \dot{z} &= v_z \\
 \ddot{v}_x &= a_x(t, x, y, z, v_x, v_y, v_z, y) \\
 \ddot{v}_y &= a_y(t, x, y, z, v_x, v_y, v_z, y) \\
 \ddot{v}_z &= a_z(t, x, y, z, v_x, v_y, v_z, y)
 \end{aligned} \tag{5.10}$$

En esta última expresión hemos escrito explícitamente la dependencia de la aceleración de las componentes del vector de estado, para resaltar el hecho que el sistema de ecuaciones diferenciales puede ser altamente *acoplado*.

En términos del vector de estado $\vec{X} : (\vec{r} \ \vec{v})^T$, la e.d.m. de primer orden (Ec. 5.10) se puede escribir como:

$$\dot{\vec{X}} = \begin{pmatrix} \vec{v} \\ \vec{a} \end{pmatrix} \tag{5.11}$$

donde (abusando de la notación) $\vec{v} : (v_x \ v_y \ v_z)^T$ y $\vec{a} : (a_x \ a_y \ a_z)^T$

Nota

Ecuaciones de movimiento en otros sistemas de coordenadas. Ecuaciones análogas a la Ecs. (5.9, 5.10) pueden escribirse en caso de que la aceleración sea provista en los sistema coordenadas cilíndricas o esféricas. Para ello deben usarse las definiciones de velocidad y aceleración, en el sistema de coordenadas respectivo, que vimos en la Sección 5.2.1. La forma explícita de esas ecuaciones diferenciales, sin embargo, no será tan sencilla como la que escribimos en el caso de las coordenadas cartesianas. El lector podrá explorar estos casos a través de algunos de los problemas incluidos al final del capítulo.

5.2.4. Integración de la e.d.m.

La solución o *integración* de la e.d.m. constituye el problema matemático central de la cinemática y a la larga, el problema más importante de toda la mecánica incluyendo, naturalmente, la mecánica celeste.

En los cursos de mecánica newtoniana básica el problema se resuelve normalmente para dos casos simples:

1. $\vec{a} = \vec{0}$ que se conoce también como *movimiento rectilíneo y uniforme*.
2. $\vec{a} = \vec{a}_0$, donde \vec{a}_0 es un vector constante y que se conoce como *movimiento rectilíneo uniformemente acelerado*.

Si bien estos dos casos son interesantes en la descripción de un amplio rango de aplicaciones simples (p.e. en el movimiento parabólico), en situaciones realistas y en particular en las que veremos en la mecánica celeste, la función \vec{a} puede ser mucho más compleja.

En los ejemplos desarrollados a continuación, y que nos servirán para ilustrar algunos conceptos físicos y matemáticos que usaremos con regularidad en el resto del libro, consideramos dos situaciones hipotéticas comunes, a saber que la \vec{a} depende exclusivamente del tiempo o que esta cantidad depende del vector de estado.

5.2.5. Integración por cuadraturas

Ejemplo 1: movimiento con tirón constante

Considerese el caso simple de una partícula que está sometida a un tirón \vec{j} : $(j_0, 0, 0)$ constante en el tiempo. Suponga además que en $t = 0$ la aceleración de la partícula es nula.

En estas condiciones la función de aceleración, en cualquier tiempo, se puede escribir como:

$$\vec{a}(t) : (j_0 t, 0, 0),$$

Por tanto, la a.e.d.m., escrita en términos de las componentes del vector posición (Ec. 5.9) será:

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= j_0 t \\ \ddot{y} &= 0 \\ \ddot{z} &= 0\end{aligned}\tag{5.12}$$

Si bien una solución a esta ecuación diferencial puede encontrarse fácilmente por tanteo, p.e. $x(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$, un procedimiento cuidadoso de solución nos permitirá a continuación revelar algunas propiedades interesantes del sistema dinámico y, más importante aquí, ilustrar un método de solución de ecuaciones diferenciales que será de gran utilidad en los siguientes capítulos.

Reescribamos la ecuación para x en el sistema de Ecs. (5.12) de la forma:

$$\frac{d}{dt} \dot{x} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} ct^2 \right).\tag{5.13}$$

La clave de este procedimiento de solución está en la posibilidad de escribir, en función de sus respectivas antiderivadas, ambos lados de la ecuación diferencial. Esta es la razón por la que llamaremos a este método, **método de las cuadraturas** en referencia al término que introdujimos en la Sección 4.1.7 para referirnos a la integral definida de una función.

Reuniendo los términos de la Ec. (5.13) en un mismo lado obtenemos:

$$\frac{d}{dt} \left(\dot{x} - \frac{1}{2} ct^2 \right) = 0.$$

Si bien no hemos resuelto la ecuación todavía, está última manera de escribirla nos permite que la *fórmula* que aparece entre paréntesis y que combina la velocidad y el tiempo, sin importar el estado de la partícula o el instante de tiempo, siempre será constante (su derivada con respecto al tiempo es cero):

$$\dot{x} - \frac{1}{2} ct^2 = I_x\tag{5.14}$$

Decimos que $C_{Ix}(t, \dot{x}) \equiv \dot{x} - ct^2/2$ es una **integral**, una **cuadratura** o una **constante de movimiento** del sistema. En este caso I_x es el valor que esta constante adopta para un conjunto específico de condiciones iniciales.

Definición 5.1

Constante de movimiento de un sistema dinámico. Si una función $f(t, \vec{r}, \vec{v})$ es tal que:

$$C_I(t, \vec{r}, \vec{v}) = I$$

Donde I es una cantidad que solo depende de las condiciones iniciales, decimos que $C_I(t, \vec{r}, \vec{v})$ es una **constante de movimiento**. La llamaremos también una **integral** o **cuadratura** del sistema ^a.

^aEn términos rigurosos la *constante de movimiento* es la función $C_I(t, \vec{r}, \vec{v})$ no su valor numérico I que por definición es un número real y por lo tanto es constante.

Es fácil verificar que otras constantes de movimiento de este sistema son $\dot{y} = I_y$ y $\dot{z} = I_z$.

Ejemplo 2: movimiento oscilatorio

Considere ahora el caso en el que una partícula tiene una aceleración dada por:

$$\vec{a}(t) : (-\omega x, 0, 0),$$

donde ω es una cantidad constante. Como vemos, cuando la partícula se aleja del origen la aceleración apuntá de nuevo hacia allí. Sabemos que este tipo de aceleración producirá un movimiento oscilatorio.

En este caso la e.d.m. para la componente x será:

$$\ddot{x} = -\omega x.$$

La integración de esta ecuación por tanteo ya no es tan trivial. Tampoco lo es intentar expresar ambos lados de la ecuación como derivadas respecto al tiempo de otras funciones (como lo hicimos para encontrar la Ec. 5.13).

Sin embargo, si multiplicamos ambos lados de la ecuación por la función \dot{x} :

$$\dot{x}\ddot{x} = -\omega\dot{x}x,$$

la nueva ecuación puede escribirse, convenientemente, de la forma:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \dot{x}^2 \right) = \frac{d}{dt} \left(-\frac{1}{2} \omega x^2 \right).$$

Allí podemos identificar una constante de movimiento del sistema:

$$\frac{1}{2} \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \omega x^2 = I_x. \quad (5.15)$$

Como la multiplicación de la e.d.m. original por la función \dot{x} nos permitió encontrar una integral de la ecuación, llamamos a \dot{x} , un *factor integrante*.

¿De qué sirve encontrar las constantes de movimiento de un sistema si lo que queremos en realidad es hallar la forma explícitas para las funciones $\vec{r}(t)$, $\vec{v}(t)$?

Las constantes de movimiento pueden ofrecernos información sobre la dinámica del sistema, incluso en situaciones en las que no es posible obtener una solución. Note, por ejemplo, cuan diferentes son las constantes de movimiento de los sistemas en los ejemplos 1 y 2. Aunque no resolvimos ninguno de los dos problemas, sus cuadraturas nos dan pistas sobre como se relacionan la posición y velocidad de la partícula en cualquier instante del tiempo. Más adelante mostraremos que es incluso posible dar una interpretación física a estas constantes (en términos de cantidades dinámicas conocidas tales como la energía, el momentum lineal, el momentum angular, o incluso de cantidades desconocidas pero útiles) y su relevancia para la comprensión del sistema será aún mayor.

Ahora bien, siendo las cuadraturas $C(t, \vec{r}, \vec{v})$ funciones de las variables que deseamos encontrar, si se obtienen suficientes constantes de movimiento (tantas como variables), habremos, técnicamente, obtenido la solución.

En otras palabras, un número suficiente de cuadraturas o de constantes de movimiento permite convertir la solución de una ecuación diferencial, en la solución a un sistema algebraico de ecuaciones (aquel formado por las cuadraturas).

Para ilustrarlo volvamos a la e.d.m. del sistema en el ejemplo 1:

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= j_0 t \\ \ddot{y} &= 0 \\ \ddot{z} &= 0\end{aligned}$$

Es posible mostrar que este sistema tiene 6 constantes de movimiento (ya habíamos introducido tres de ellas):

$$\begin{aligned}\dot{x} - \frac{1}{2}j_0 t^2 &= I_x \\ \dot{y} &= I_y \\ \dot{z} &= I_z \\ x - \frac{1}{6}j_0 t^6 - I_x t &= S_x \\ y - I_y t &= S_y \\ z - I_z t &= S_z\end{aligned}\tag{5.16}$$

El valor de las cantidades $I_x, I_y, I_z, S_x, S_y, S_z$ se obtiene reemplazando las condiciones iniciales en el lado izquierdo de estas ecuaciones.

Si se resuelve simultáneamente el sistema de ecuaciones algebraicas (5.16) se obtiene, finalmente, la solución al problema original:

$$\begin{aligned}x(t) &= \frac{1}{3}j_0 t^3 + I_x t + S_x \\ y(t) &= I_y t + S_y \\ z(t) &= I_z t + S_z \\ \dot{x}(t) &= \frac{1}{2}j_0 t^2 + I_x \\ \dot{y}(t) &= I_y \\ \dot{z}(t) &= I_z\end{aligned}\tag{5.17}$$

Un procedimiento análogo puede usarse para encontrar la solución a la e.d.m. del sistema del ejemplo 2 (vea los problemas al final del capítulo.)

Es posible que nadie escoja un procedimiento tan elaborado para encontrar la solución a la e.d.m. de estos dos sistemas dinámicos simples. Claramente, existen

procedimiento más sencillos (incluyendo una solución por tanteo.) Sin embargo, usar el método de las cuadraturas aquí, con sistemas cuya solución se puede obtener con métodos más directos, nos permite ilustrar el poder que tiene el método de las cuadraturas, que será el preferido para encontrar la solución de la e.d.m. de sistemas dinámicos mucho más complejos en mecánica celeste.

5.2.6. Integración numérica de la e.d.m.

En aquellos sistemas dinámicos en los que resolver la e.d.m. o encontrar *todas* las constantes de movimiento (resolver por cuadratura el sistema), sea imposible matemáticamente o simplemente muy difícil, es posible buscar una solución aproximada usando los métodos numéricos que estudiamos al final de la [Sección 4.1.9](#).

Como vimos allí, para hacerlo, es necesario primero escribir la e.d.m. como el conjunto de 6 ecuaciones diferenciales de primer orden con la forma general (Ec. 4.27):

$$\{\dot{Y}_i = f_i(t, \{Y_k\})\}_{6} \quad (5.18)$$

Donde Y_i ($i = 0, 1, 2, \dots, 5$) son las denominadas funciones auxiliares que reemplazan aquí a las cantidades claves del sistema dinámico (las componentes de \vec{r} y \vec{v}). En física, llamaremos a las Ecs. (5.18), *ecuaciones de movimiento reducidas del sistema o e.d.m.r.*

Si comparamos la forma general de las e.d.m.r. en la Ec. (5.18) con las ecuaciones de primer orden (5.10), podemos hacer la siguiente identificación para las variables auxiliares Y_i :

$$\begin{aligned} Y_0 &= x, & Y_1 &= y, & Y_2 &= z \\ Y_3 &= v_x, & Y_4 &= v_y, & Y_5 &= v_z \end{aligned} \quad (5.19)$$

Por otro lado, las funciones f_i serán:

$$\begin{aligned} f_0(t, \{Y_k\}) &= v_x = Y_3, & f_1(t, \{Y_k\}) &= v_y = Y_4, & f_2(t, \{Y_k\}) &= v_z = Y_5 \\ f_3(t, \{Y_k\}) &= a_x, & f_4(t, \{Y_k\}) &= a_y, & f_5(t, \{Y_k\}) &= a_z \end{aligned}$$

Con esta identificación, una forma compacta de escribir las e.d.m.r., muy útil a la hora de preparar algoritmos, es:

$$\dot{Y}_i = \begin{cases} Y_{3+i} & , \quad 0 \leq i < 3 \\ a_{i-3} & , \quad 3 \leq i < 6 \end{cases} \quad (5.20)$$

Donde hemos introducido la notación $\{a_0, a_1, a_2\} \equiv \{a_x, a_y, a_z\}$.

Integración numérica de las e.d.m. del ejemplo 1

El sistema dinámico del ejemplo 1 introducido en [Sección 5.2.5](#) se caracteriza por tener una aceleración del tipo $\vec{a} : (j_0 t, 0, 0)$. En términos de la parametrización de la e.d.m.r. en la Ec. (5.20), esto significa que $\{a_0, a_1, a_2\} = (j_0 t, 0, 0)$.

El sistema de ecuaciones diferenciales que describe el sistema puede implementarse en Python usando la rutina:

(Algoritmo 5.1)

```
def edm_ejemplo1(Y,t,j0=1):
    dYdt=[0,0,0,0,0,0]

    dYdt[:3]=Y[3:]
    dYdt[3:]=[j0*t,0,0]

    return dYdt
```

Aunque al final de la [Sección 4.1.9](#) nos habíamos familiarizado con este tipo de rutinas, el diseño de esta en particular merece algunos comentarios:

- Como sabemos, el propósito de esta rutina es calcular la lista de los valores de las funciones f_i (lado derecho de las Ecs. 5.18) que son iguales a las primeras derivadas en el tiempo de las variables auxiliares \dot{Y}_i . En la rutina, para hacer más explícito su significado, hemos decidido llamar a esta lista `dYdt` en lugar de `f`. Los nombres de las variables no afectan la funcionalidad de las rutinas, pero pueden hacerla más legible y modificable.
- Para asignar los valores de la lista `dYdt` hemos aprovechado el poder de Python para sacar *trozos, porciones o tajadas* (*slices* en inglés) de listas y arreglos. Así el trozo `dYdt[:3]` corresponde a las primeras tres componentes `dYdt[0]`, `dYdt[1]`, `dYdt[2]` (nótese que, por empezar en 0, este trozo no incluye la componente `dYdt[3]`.) Por otra parte el trozo `Y[3:]` de esta lista, corresponde a las componentes `Y[3]`, `Y[4]`, `Y[5]`. Por tanto, la igualdad `dYdt[:3]=dYdt[3:]` equivale a escribir explícitamente `dYdt[0]=Y[3]`, `dYdt[1]=Y[4]`, `dYdt[2]=Y[5]` que justamente implementa la parte $\dot{Y}_i = Y_{i+3}$ de la Ec. (5.20)

Una vez escrita la rutina, la solución se obtiene siguiendo los algoritmos introducidos al final de la [Sección 4.1.9](#):

```
#Valor del tiron
j0=0.5

#Condiciones iniciales
from numpy import array
Y0=array([1,0,0,-3,0,0])

#Tiempos para obtener la solución
from numpy import linspace
ts=linspace(0.0,5.0,20)

#Solución con odeint
from scipy.integrate import odeint
Ys=odeint(edm_ejemplo1,Y0,ts,args=(j0,))
```

Solucion, Ys:

[[1.	0.	0.	-3.	0.	0.]
[0.21204503	0.	0.	-2.98268698	0.	0.]
[-0.56679785	0.	0.	-2.93074792	0.	0.]

```

[-1.32741651  0.          0.          -2.84418283  0.          0.          ]
[-2.06069881  0.          0.          -2.72299169  0.          0.          ]
...

```

Podemos, finalmente, visualizar la solución a la e.d.m.r. haciendo un gráfico de la coordenada x (columna $Y_s[:, 0]$ de la matriz de solución) como función del tiempo ts :

(Algoritmo 5.2)

```

import matplotlib.pyplot as plt
plt.figure();
plt.plot(ts,Ys[:,0], 'ko');

plt.xlabel("$t$");
plt.ylabel("$x$");
plt.show();

```

ver Figura 5.2

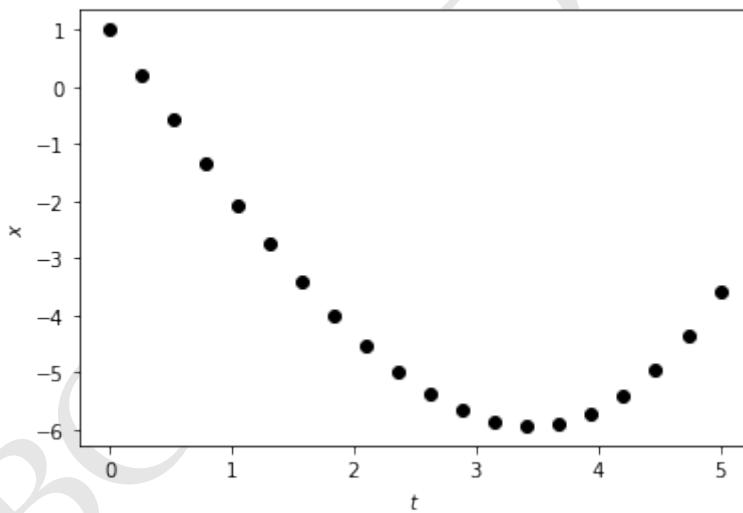


Figura 5.2: Figura correspondiente al código 5.2. La figura muestra la solución numérica a la e.d.m. de un sistema sometido a un tirón constante $\vec{f} = j_0 \hat{e}_x$.

¿Cómo saber si la solución obtenida con `odeint` y mostrada en la Figura 5.2 es la correcta?

Existen dos maneras de comprobarlo. La primera es verificar que las posiciones y velocidades obtenidas satisfagan las constantes de movimiento que escribimos en las Ecs. (5.16).

Así por ejemplo, podemos verificar que el valor de I_x y S_x sean efectivamente constantes:

```
#Extraemos los valores de x y dxdt de la solución
xs=Ys[:,0]
xdots=Ys[:,3]

#Fórmula de la constante C_Ix
C_Ixs=xdots-0.5*j0*ts**2

#Fórmula de la constante C_Sx
C_Sxs=xs-(1./6)*j0*ts**3-C_Ixs*ts
```

Valores de C_{Ix} = [-3. -3. -3. -3. -3.]...

Valores de C_{Sx} = [1. 1. 1. 1. 1.]...

Comprobamos así que las fórmulas $C_{Ix} = \dot{x} - j_0 t^2 / 2$ y $C_{Sx} = x - j_0 t^3 / 6 - I_x t$, tienen el mismo valor para todos los tiempos en los que integramos la e.d.m.r., es decir, son, por definición, constantes de movimiento. La solución numérica, por tanto, satisface nuestras expectativas matemáticas.

La segunda manera de verificar que nuestra solución numérica coincide con la analítica es compararla con la solución explícita escrita en las Ecs. (5.17):

$$x(t) = \frac{1}{6} j_0 t^3 + I_x t + S_x$$

Aquí, los valores de I_x y S_x pueden obtenerse de las condiciones iniciales.

Una comparación gráfica entre ambas soluciones se consigue con este algoritmo:

(Algoritmo 5.3)

```
#Valor de las constantes de movimiento
Ix=Ys[3]-0.5*j0*ts[0]**2
Sx=Ys[0]-(1./6)*j0*ts[0]**3+Ix*ts[0]

#Lista más completa de valores del tiempo
from numpy import linspace
tas=linspace(ts[0],ts[-1],100)

#Solución analítica
xs=(1./6)*j0*tas**3+Ix*tas+Sx

#Gráfico
plt.figure();
plt.plot(ts,Ys[:,0],'ko',label="Solución numérica");
plt.plot(tas,xs,'r-',label="Solución analítica");

plt.xlabel("$t$")
plt.ylabel("$x$")
plt.legend();
plt.show();
```

ver Figura 5.3

La coincidencia entre la solución analítica y la solución numérica mostrada en la Figura 5.3 es casi perfecta.

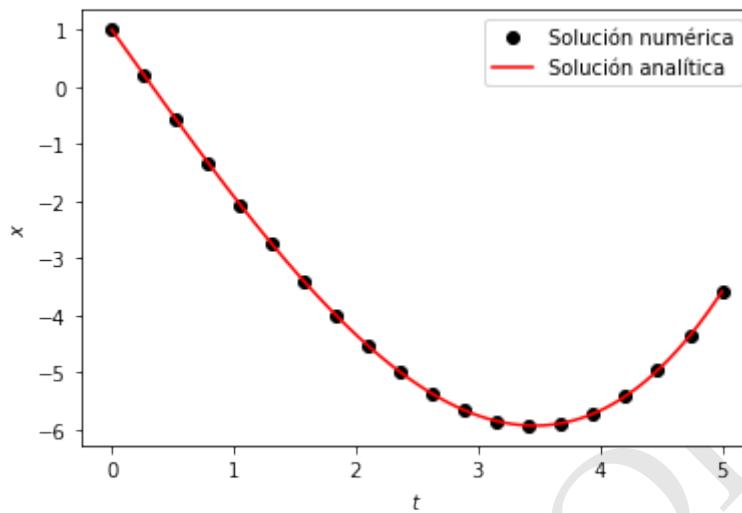


Figura 5.3: Figura correspondiente al código 5.3. Comparación de la solución numérica (puntos) y la solución analítica (línea continua) de la e.d.m. de un sistema con tirón constante $j_0 = 0,5$.

Integración numérica de las e.d.m. del ejemplo 2

Usando las mismas herramientas y algoritmos análogos a los usados antes, podemos ahora resolver el ejemplo 2 de la Sección 5.2.4.

De nuevo, las ecuaciones reducidas del sistema serán, como en el ejemplo 1, las mismas de la Ec. (5.20), pero ahora $\{a_i\} = \{-\omega Y_0, 0, 0\}$ (nótese que hemos reemplazado x por la variable auxiliar Y_0 de acuerdo a las reglas en Ec. 5.19).

La rutina que implementa las edm en este caso será:

```
def edm_ejemplo2(Y, t, omega):
    dYdt=[0,0,0,0,0,0]

    dYdt[3:] = Y[3:]
    dYdt[3:] = [-omega*Y[0], 0, 0]

    return dYdt
```

La solución al sistema, una comprobación de que la constante C_{Ix} en la Ec. (5.15) es en realidad una constante, y una gráfica de la posición como función del tiempo, se muestra en el siguiente algoritmo:

(Algoritmo 5.4)

```
#Propiedades del sistema
omega=2.5

#Condiciones iniciales
from numpy import array
```

```

Yos=array([1,0,0,0,0,0])

#Tiempos
from numpy import linspace
ts=linspace(0,10.0,100)
#Solución
Ys=odeint(edm_ejemplo2,Yos,ts,args=(omega,))

#Constante de movimiento
xs=Ys[:,0]
xdots=Ys[:,3]
C_Ixs=0.5*xdots**2+0.5*omega*xs**2

#Gráfico
fig=plt.figure();
plt.plot(ts,Ys[:,0]);

plt.xlabel("$t$");
plt.ylabel("$x$");
plt.show();

```

ver Figura 5.4

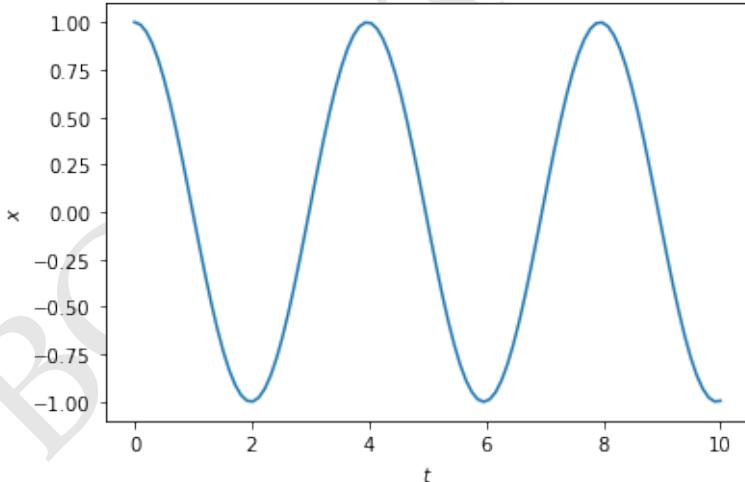


Figura 5.4: Figura correspondiente al código 5.4. Solución numérica de la e.d.m. de un sistema dinámico con aceleración $\vec{a} : (-2,5x, 0, 0)$.

Valores de C_Ix: [1.25 1.25 1.25 1.25 1.25]...

Podemos comprobar al examinar la [Figura 5.4](#) nuestra intuición inicial de que la dinámica del sistema correspondía a la de un movimiento oscilatorio.

5.3. Dinámica

5.3.1. Cantidades dinámicas

Las cantidades dinámicas son aquellas que son requeridas para describir la relación entre las causas del movimiento y su descripción. Las más usadas se describen a continuación:

■ Masa, m :

- Definición: Escalar que mide (en el contexto de la mecánica Newtoniana): (1) la cantidad de materia contenida en un cuerpo, $m = \int \rho dV$ donde ρ es la densidad y la integral se realiza sobre el volumen del cuerpo, (2) la *inercia* o resistencia del cuerpo a moverse y (3) la intensidad de la atracción gravitacional que experimenta o produce en otros cuerpos (ver la Sección 5.3.13).
- Patrón: $[m] = \text{M}$.
- Unidad del SI²⁸: kg.

■ Momento lineal, p :

- Definición: $\vec{p} \equiv m\vec{v} = m\dot{\vec{r}}$.
- Patrón: $[p] = \text{M L T}^{-1}$.
- Unidad del SI: kg m s^{-1} .

■ Momentum angular, L :

- Definición: $\vec{L} \equiv \vec{r} \times \vec{p}$.
- Una propiedad para partículas puntuales (m constante): $\vec{L} = m\vec{r} \times \dot{\vec{r}}$.
- Patrón: $[L] = \text{M L}^2 \text{T}^{-1}$.
- Unidad del SI: $\text{kg m}^2 \text{s}^{-1}$.

■ Fuerza resultante, \mathcal{F} :

- Definición: $\vec{\mathcal{F}} \equiv \dot{\vec{p}}$.
- Una propiedad para partículas puntuales (m constante), $\vec{\mathcal{F}} = m\ddot{\vec{r}}$.
- Patrón: $[\mathcal{F}] = \text{M L T}^{-2}$.
- Unidad del SI: $\text{kg m s}^{-2} \equiv \text{N}$ (Newton).

■ Momento de fuerza o torca, $\vec{\tau}$:

- Definición: $\vec{\tau} \equiv \vec{r} \times \vec{\mathcal{F}}$.
- Una propiedad para partículas puntuales (m constante): $\vec{\tau} = \dot{\vec{L}}$.
- Patrón: $[\tau] = \text{M L}^2 \text{T}^{-2}$.
- Unidad del SI: $\text{kg m}^2 \text{s}^{-2}$.

■ Energía cinética o *vis viva*, K :

- Definición: $K \equiv m\vec{v}^2/2$.
- Patrón: $[K] = \text{M L}^2 \text{T}^{-2}$.

²⁸Sistema Internacional de Unidades

- Unidad del SI: $\text{kg m}^2 \text{s}^{-2} \equiv \text{J}$ (*Joule*, pronunciado “syul”²⁹).

■ **Trabajo, W :**

- Definición: $W = \int \mathcal{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$.
- Patrón: $[W] = \text{M L}^2 \text{T}^{-2}$.
- Unidad del SI: J.

5.3.2. Partículas y fuerzas

Hay tres conceptos centrales en la dinámica newtoniana: partícula, fuerza y masa.

Entenderemos aquí por partícula o **partícula puntual** a una entidad material de tamaño insignificante, sin estructura, ni volumen (independientemente de que se las represente gráficamente como esferas.)

Un sistema de muchas partículas puntuales puede formar: una “nube”, un cuerpo (rígido o elástico) o un fluído. En lo que resta de este libro nos concentraremos únicamente en la dinámica de partículas individuales o “nubes” de partículas.

Nota

Masa constante para partículas puntuales. A diferencia de lo que pasa con un sistema de partículas, en la que el número de constituyentes puede variar debido al intercambio de materia con otros sistemas, en lo sucesivo asumiremos que la masa de las partículas puntuales es constante en el tiempo e independiente del sistema de referencia.

El concepto de fuerza es uno de los más esquivos de la Física [51]. Para los propósitos de este libro nos apegaremos a “definiciones” prácticas del concepto, cercanas pero no en exceso a las introducidas originalmente por Newton en los *Principia*.

Distinguemos dos cantidades físicas a las que llamaremos *fuerza*:

- La **fuerza resultante**, $\vec{\mathcal{F}}$ es el nombre que daremos aquí a la razón instantánea de cambio en el momento lineal, $\mathcal{F} \equiv \dot{\vec{p}}$, independiente de cuál sea la causa de ese cambio.
- La **fuerza aplicada**, \vec{F} , es un concepto eminentemente newtoniano y, en términos modernos, pobemente definido. En general, la fuerza aplicada es una medida la intensidad de la *interacción* entre una partícula y su entorno (otras partículas, medios materiales o campos). El valor de la fuerza aplicada difícilmente puede derivarse de primeros principios y normalmente se postula (p.e. la fuerza gravitacional) o se construye a partir de modelos simplificados de las interacciones (p.e. las fuerzas de fricción.)

En la mecánica Newtoniana se reconocen dos tipos básicos de *fuerza aplicada*:

²⁹<https://forvo.com/search/Joule/fr/>

- **Fuerzas de contacto:** Fuerzas que resultan de la interacción por contacto de una partícula con otras partículas (p.e. fuerzas en choques), con medios (p.e. fricción en un fluido) o con fronteras materiales (p.e. fuerzas normales o de fricción).
- **Fuerzas de campo o de acción a distancia:** Fuerzas que resultan de la interacción de las partículas con otras partículas o cuerpos materiales, sin que medie el contacto directo (a distancia); también están en este grupo las fuerzas que resultan de la interacción con un *campo* (por ejemplo los campos electromagnéticos).

Existe una tercera categoría de fuerzas, pero a diferencia de las anteriores no corresponden a *fuerzas aplicadas* sino un tipo específico de *fuerzas resultantes*:

- **Fuerzas ficticias:** Son fuerzas resultantes que se manifiestan al estudiar la dinámica en ciertos sistemas de referencia (por ejemplo en sistemas de referencia rotantes). Entre ellas están la *fuerza centrífuga* y la *fuerza de Coriolis* que estudiaremos en la ???. El adjetivo de *ficticias* viene precisamente del hecho de que no son producto de interacciones con otras partículas o cuerpos materiales.

5.3.3. Sistemas de referencia iniciales

La introducción del concepto de fuerza ficticia permite definir un concepto central en la mecánica newtoniana:

Definición 5.2

Sistema de referencia inercial. Decimos que un sistema de referencia es inercial si todas las fuerzas resultantes en el sistema son causadas por fuerzas aplicadas, es decir si todos los cambios en los momentos lineales de las partículas pueden rastrearse hasta interacciones entre ellas, con medios materiales o con campos.

Demostrar en la práctica que un sistema de referencia es inercial, que implica rastrear todas las causas físicas de los cambios en los momentos lineales de las partículas de un sistema de prueba, puede ser muy complicado sino imposible. Existe, sin embargo, un teorema que puede ser de gran utilidad para este propósito:

Proposición 5.1

Sistemas de referencia con velocidad relativa constante. Si un sistema de referencia R se mueve con velocidad constante respecto a un sistema de referencia inercial I , entonces R es también un sistema de referencia inercial.

Este teorema es una consecuencia directa de las transformaciones de Galileo que postulamos en la [Sección 5.2.2](#) (ver sección de problemas al final del capítulo).

Para los propósitos de la mecánica Newtoniana, basta que identifiquemos al menos un sistema de referencia inercial en el Universo para que, midiendo la ve-

locidad relativa respecto a él, podemos determinar si otros sistemas de referencia son también inerciales.

En la práctica la “inercialidad” de un sistema de referencia (el centro de masa del sistema solar, el centro de la galaxia, la radiación cósmica de fondo) se postula (o se considera como una aproximación en los modelos) y a partir de ellos a través del Teorema (??) se construyen otros sistemas de referencia inerciales.

Un pooco de historia

Los Principia de Newton. En abril de 1687 y después de trabajar tan solo durante 18 meses, Newton completo las 550 páginas del manuscrito que se convertiría en la primera edición de sus *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica* (Principios Matemáticos de la Filosofía Natural, ver [Figura 5.5](#))⁹. A pesar del breve lapso de tiempo en el que escribió el libro, la obra recogía ideas acumuladas durante toda su carrera como filósofo natural.

Los *Principia* (como se los llama de forma abreviada) es una obra revolucionaria e influyente que buscaba en últimas presentar y desarrollar las implicaciones una teoría general para explicar el movimiento de los cuerpos bajo la influencia de la omnipresente fuerza de gravedad (postulada en la obra.) Fue motivada y tenía como fin último el de resolver el problema de más de 2.000 años de explicar el movimiento de los planetas, sus lunas y los cometas partiendo de las causas que los producen. En una palabra los *Principia* son el primer libro de Mecánica Celeste en la historia.

Los *Principia* se dividen en tres libros. El Libro I trata sobre los fundamentos de la mecánica de partículas. En él, Newton introduce los conceptos relativamente novedosos de masa, cantidad de movimiento, fuerza centrípeta y el original postulado de acción y reacción. Muchas de las ideas en este libro, como el mismo Newton lo reconocerían, en realidad compilaban y sistematizaban de ideas que venían discutiéndose entre los filósofos naturales por más de un siglo. Así por ejemplo, la denominada ley de inercia, que Newton formula como su primera ley, en realidad había sido planteada primero por Galileo y después por Pierre Gassendi y René Descartes. Por su parte, el postulado de fuerza había sido sugerido primero por Galileo Galilei.

El libro II aborda el problema del movimiento de los cuerpos en los fluidos (aire, agua, etc.) Tenía el propósito original de refutar la teoría Cartesiana del movimiento, que proponía, por ejemplo, que los planetas se movían alrededor del Sol impulsados hacia adelante por la fuerza de vórtices creados en una sustancia omnipresente, el éter. En este libro Newton, entre otras cosas demuestra que las fuerzas experimentadas por los cuerpos en un fluido no podrían explicar las leyes del movimiento planetario formuladas por Kepler en 1609 (y sobre las que volveremos en el [Capítulo 7](#).)

El libro III titulado “Sobre el Sistema del Mundo” y el más importante para nosotros aquí, desarrolla en detalle la teoría de la gravedad. En un sucesión de teoremas, aplicados primero a las lunas de Júpiter, a las lunas de Saturno, a la Luna y finalmente a los planetas, Newton introduce su ley de gravitación universal en la forma presentada aquí en el Pos. [5.4](#). A continuación demuestra a partir de esta ley la validez de las leyes empíricas de Kepler (movimiento en elipses, ley de áreas y ley armónica.) Más adelante desarrolla en algún detalle su teoría del movimiento lunar, incluyendo las perturbaciones producidas por el Sol y desarrolla la teoría de las mareas que hoy aceptamos como correcta, y explica y describe el fenómeno de precesión de los equinoccios, que si bien se había descubierto desde el tiempo de los griegos no había recibido ninguna explicación satisfactoria en casi 2.000 años.

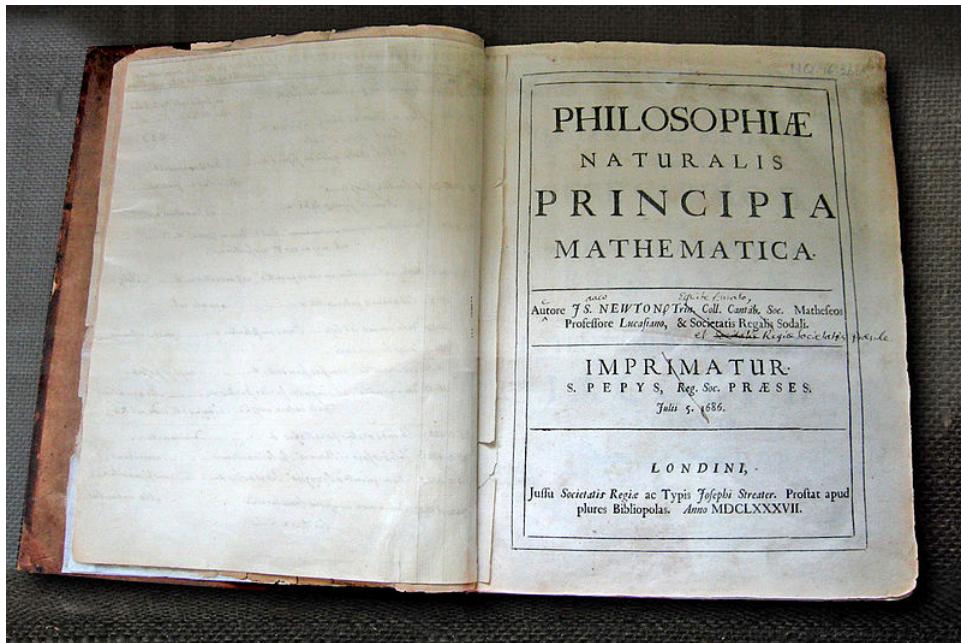


Figura 5.5: Fotografía de la copia personal de Newton de la primera edición de los Principia, incluyendo correcciones hechas a mano por el mismo Newton. Foto: Andrew Dunn, <http://bit.ly/2WugALe>.

Un pooco de historia (Cont.)

Finalmente, yendo más allá de la teoría del movimiento orbital de Kepler, y usando su ley de gravitación universal, Newton explica el movimiento de los cometas que se mueven, según él en órbitas aproximadamente parabólicas, resolviendo de una vez por todas la discusión sobre la naturaleza celeste de estos cuerpos.

^aLa copia digital de una primera edición del libro puede leerse en línea en la biblioteca digital de la Universidad de Cambridge <http://cudl.lib.cam.ac.uk/view/PR-ADV-B-00039-00001/1>

5.3.4. Postulado de fuerzas

La manera original en la que Newton formuló sus postulados clásicos sobre la relación entre las fuerzas aplicadas y el movimiento resultante, ha cambiado mucho en los 350 años que nos separan de la publicación de los *Principia*. Hoy, existen maneras alternativas de formular estos principios y leyes (algunas de las cuales serán desarrolladas en el libro) manteniendo los efectos prácticos de la teoría.

A continuación usaremos una presentación de la mecánica newtoniana muy propia del estilo de este libro y que sintetiza en un esquema formal, sobre la base de los conceptos y cantidades definidas en las secciones anteriores, sus postulados (leyes) y teoremas.

Nota

Una formulación original. El lector puede encontrar relativamente extraña nuestra formulación (muy diferente a la que encontrará en los textos de mecánica básica.) La razón de fondo estriba esencialmente en la manera como hemos definido antes el concepto de fuerza. Esta formulación sin embargo, como veremos a lo largo del libro, además de contener los resultados básicos de la teoría conocidos por todos, ofrece algunas ventajas para su formulación en teorías del movimiento más general como la teoría de la relatividad.

La ley física en el corazón de la mecánica newtoniana se conoce como el **postulado de fuerza**:

Postulado 5.2

Postulado de Fuerzas. Si en un sistema de referencia inercial, una partícula está sometida a una fuerza neta aplicada \vec{F} (suma vectorial de las fuerzas aplicadas correspondientes a cada interacción que sufre la partícula en ese instante) su momento lineal cambiará instantáneamente a razón de:

$$\dot{\vec{p}} = \vec{F}$$

En otros términos, la fuerza resultante es siempre igual la fuerza neta aplicada:

$$\vec{F} = \vec{F}$$

Aunque esta última expresión parece obvia y universal, no lo es. Recordemos que la fuerza aplicada \vec{F} es una propiedad de las interacciones y su valor se calcula a partir de los modelos específicos que las describen. En contraposición, la fuerza resultante \vec{F} (la razón de cambio del momento lineal) es un efecto observado en el movimiento de la partícula. El postulado fuerzas básicamente plantea que en todas las interacciones a las que se somete una partícula, la causa (fuerza aplicada) y el efecto (fuerza resultante o razón de cambio del momento lineal) tienen el mismo valor.

Es importante resaltar la condición de que el sistema de referencia sea inercial para que el postulado de fuerzas sea válido. En otras palabras, en sistemas de referencia *no* inerciales, la fuerza resultante no es igual a la fuerza aplicada. Volveremos sobre este caso en la ??.

Por la suposición que hemos hecho desde el principio de que la masa de las partículas es constante, el postulado de fuerzas nos permite calcular la función de aceleración de las partículas que usamos en la e.d.m. (ver Ec. 5.7). Si reconocemos que por definición para una partícula $\dot{\vec{p}} = m\vec{a}$, el postulado de fuerzas se puede escribir como:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$$

La e.d.m. de una partícula en función de las fuerzas aplicadas queda:

$$\ddot{\vec{r}} = \frac{\vec{F}}{m}. \quad (5.21)$$



Nota

Ecuación de movimiento con fuerzas resultantes. Una relación idéntica a la Ec. (5.21) es válida en el caso de las fuerzas resultantes:

$$\ddot{\vec{r}} = \frac{\vec{\mathcal{F}}}{m} \quad (5.22)$$

Esta ecuación sin embargo no es un postulado de la mecánica, sino una forma de la definición misma de fuerza aplicada $\vec{\mathcal{F}}$ que introdujimos en la Sección 5.3.1.

Aunque la identidad matemática de las Ecs. (5.21) y (5.22) nos permite escribir la ecuación de movimiento sin distinguir qué tipo de fuerzas están involucradas, no debemos olvidar la diferencia conceptual entre una aceleración producto de las interacciones (fuerza aplicada, Ec. 5.21) y aquella que es simplemente una manifestación del cambio en el momento lineal (fuerza aplicada, Ec. 5.22).

La igualdad matemática, en sistemas inerciales, postulada entre la fuerza neta aplicada sobre una partícula y la fuerza resultante, permite extraer la definición de trabajo que presentamos en la Sección 5.3.1 y derivar un importante teorema de la mecánica newtoniana:

Proposición 5.3

Teorema del trabajo y la energía. Si una partícula que en un sistema de referencia inercial, se mueve sobre una trayectoria entre dos puntos \vec{r}_1 (donde tiene velocidad \vec{v}_1) y \vec{r}_2 (donde tiene velocidad \vec{v}_2), esta sometida a una fuerza neta aplicada \vec{F} que cambia de acuerdo a una función conocida y continua sobre la trayectoria, entonces, el trabajo realizado por la fuerza aplicada es $W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}$ y la siguiente igualdad es válida:

$$W = \Delta K$$

Donde $K = mv^2/2$.

5.3.5. Fuerzas conservativas y no conservativas

Una clasificación adicional de las fuerzas (tanto resultantes como aplicadas) surge al estudiar su circulación $\oint \vec{F} \cdot d\vec{r}$ (ver Sección 4.1.7.) En términos físicos, la

circulación de una fuerza (resultante o aplicada) es el trabajo total realizado por ella a lo largo de una trayectoria cerrada.

De acuerdo con la circulación las fuerzas se clasifican en:

- **Fuerzas conservativas:** Una fuerza es conservativa si y solo si, su circulación es nula:

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 \quad (5.23)$$

Una manera más frecuente (y física) de expresar esta propiedad (ver problemas al final del capítulo) es diciendo que el trabajo realizado por una fuerza conservativa entre dos puntos del espacio, es independiente de la trayectoria que esta siga entre esos puntos.

Por el teorema del trabajo y la energía, la circulación nula implica que la energía cinética de una partícula sometida a una fuerza conservativa, es la misma antes y después de recorrer una trayectoria cerrada. Este es precisamente el origen del adjetivo *conservativo*.

- **Fuerzas no conservativas o disipativas:** Una fuerza es *no conservativa* si su circulación es distinta de cero. En este caso, en virtud del teorema del trabajo y la energía, la energía cinética de la partícula antes y después de realizar el recorrido cerrado, será diferente. Es por esta razón que a este tipo de fuerzas se las llama también *fuerzas disipativas*.

Nota

La fuerza como campo vectorial. Nótese que al definir la circulación o al hablar aquí del trabajo realizado sin importar el camino seguido por la partícula, estamos asumiendo que en todos los puntos del espacio a los que tiene acceso la partícula, podemos calcular el valor de la fuerza \vec{F} . En este sentido la fuerza ya no es simplemente un vector más, sino que se convierte en lo que en el cálculo se conoce como un *campo vectorial*, es decir, una función que asocia a cada punto del espacio un vector (ver Sección 4.1.3.)

La propiedad expresada en la Ec. (5.23) implica, por el corolario al teorema de Stokes (Cor. 4.6) que las fuerzas conservativas se pueden escribir como:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U = -\partial_r U \quad (5.24)$$

donde el signo menos, que parece arbitrario, es una convención usada frecuentemente en física (y que se justificará en la siguiente sección.)

En mecánica llamamos a U la **función de energía potencial** de la fuerza conservativa.

Las fuerzas conservativas pueden describirse o bien usando un campo escalar U (el campo de energía portencial) o bien usando un campo vectorial \vec{F} (como se acostumbra con todas las fuerzas, conservativas o no). El uso de una descripción o de la otra dependerá de la situación que estemos considerando.

5.3.6. Energía mecánica

Con la definición de la función de energía potencial, el trabajo realizado por una fuerza conservativa se puede escribir como:

$$\begin{aligned}\int \vec{F} \cdot d\vec{r} &= - \int \partial_{\vec{r}} U \cdot d\vec{r} \\ &= - \int dU \\ &= -[U(\vec{r}_2) - U(\vec{r}_1)] \\ &= -\Delta U\end{aligned}$$

donde hemos usado, en su orden, la regla de la cadena (Teo. 4.1) y la regla de Newton-Leibniz (Teo. ??).

El teorema del trabajo y la energía (Teo. ??) para una fuerza conservativa se escribe entonces como:

$$\begin{aligned}-\Delta U &= \Delta K \\ \Delta(K + U) &= 0.\end{aligned}\tag{5.25}$$

Este último resultado implica que la cantidad $E \equiv K + U$ se conserva durante el movimiento de una partícula bajo la acción de una fuerza conservativa. Llamaremos a esta cantidad en lo sucesivo **energía mecánica** y a esta interesante propiedad (que es producto del teorema del trabajo y la energía), **conservación de la energía mecánica**.

El resultado anterior puede generalizarse cuando sobre la partícula actúan todo tipo de fuerzas, aplicadas o resultantes, conservativas o no conservativas:

Proposición 5.2

Conservación de la energía. Si una partícula se mueve en el espacio mientras esta sometida a fuerzas conservativas y no conservativas, el trabajo total realizado por las fuerzas no conservativas W_{NC} entre dos puntos cualquiera de la trayectoria es:

$$W_{NC} = \Delta E$$

Donde $E \equiv K + \sum U_i$, siendo $\{U_i\}$ las funciones de energía potencial asociadas a todas las fuerza conservativas que actúan sobre la partícula. Llamamos a E la energía mecánica total de la partícula.

5.3.7. ¿Ley de inercia?

En la historia de la mecánica, el concepto de *inercia* o *movimiento inercial*, y la *ley de inercia* de Newton, jugaron un papel fundamental en la ruptura con los conceptos dinámicos de la física Aristotélica que postulaban que todo movimiento necesitaba una *causa motriz* (una *fuerza aplicada* en nuestro caso.)

En los Principia y en sus reformulaciones posteriores [12], la inercia aparece postulada como la primera ley movimiento.

En el esquema con el que hemos sintetizado la mecánica newtoniana aquí, la inercia no tiene que postularse, sino que en realidad es un teorema muy sencillo que se sigue (casi trivialmente) del postulado de fuerzas:

Proposición 5.3

Teorema de inercia. Si la fuerza resultante o la fuerza neta aplicada sobre una partícula es nula durante un cierto intervalo de tiempo $[t_1, t_2)$ ^a, su momento lineal en ese intervalo será constante e igual al momento lineal que tenía en t_1 :

$$\vec{F}(t \in [t_1, t_2)) = \vec{0} \iff \vec{p}(t \in [t_1, t_2)) = \vec{p}(t_1)$$

En otras palabras durante el intervalo considerado la partícula estará en reposo (si $\vec{p}(t_1) = \vec{0}$) se moverá siguiendo una trayectoria rectilínea y con velocidad constante $\vec{v} = \vec{p}(t_1)/m$.

^aEl intervalo es cerrado en t_1 en tanto en algún momento tiene que comenzar la condición de movimiento libre de fuerzas, mientras que es abierto en t_2 en tanto esa condición podría extenderse para siempre

5.3.8. Postulado de acción y reacción

Postulado 5.3

Acción y reacción. En un sistema de referencia inercial en el que dos partículas 1 y 2 interactúan mutuamente, sea a través de fuerzas de contacto o de campo, se cumple que:

- (**Forma débil del postulado de acción y reacción**) la fuerza \vec{F}_{12} que la partícula 1 experimenta por la interacción con la partícula 2 (que llamaremos *acción*), es igual pero de sentido contrario a la fuerza \vec{F}_{21} que la partícula 2 experimenta por la interacción con la partícula 1 (que llamaremos *reacción*; ver panel izquierdo de la Figura 5.6.)

o bien,

- (**Forma fuerte de la ley de acción y reacción**) las fuerzas de acción y reacción, definidas arriba, son además paralelas a la línea que une las posiciones de las partículas (ver panel derecho de la Figura 5.6).

Las consecuencias de este postulado son fundamentales en la mecánica y serán discutidas en la ??.

5.3.9. Postulado de gravitación universal

Una de los más atrevidos y visionarios postulados de Newton sobre la naturaleza del movimiento de los cuerpos y en general del Universo, se conoce como la **ley o postulado de gravitación universal** que en su forma moderna propone:

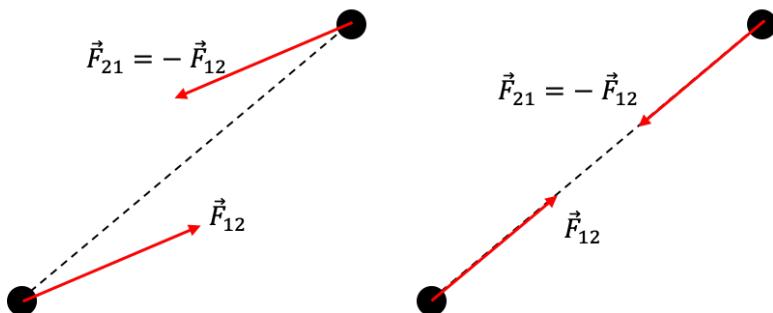


Figura 5.6: Dos formas del postulado de acción y reacción: a la izquierda el postulado débil, en el que las fuerzas son iguales y de sentido contrario, pero no son paralelas a la línea que une las partículas; a la derecha el postulado fuerte en el que la acción y reacción actúan sobre la línea que une a las partículas.

5.4

Postulado de gravitación universal. Una partícula de masa m_1 situada en \vec{r}_1 ejerce sobre cualquier otra partícula de masa m_2 situada en un \vec{r}_2 , una fuerza instantánea a distancia dada por:

$$\vec{F} = -\frac{Gm_1m_2}{r^2}\hat{r}$$

donde $\vec{r} \equiv \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ y $G = 6,67408(31) \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2} = (6,67408 \pm 0,00031) \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$ es una constante de la naturaleza conocida como la *constante de gravitación universal o constante de Cavendish*.

En lo sucesivo usaremos la notación más precisa y consistente (ver Figura 5.7):

$$\vec{F}_{12} = -\frac{Gm_1m_2}{r_{12}^3}\vec{r}_{12} \quad (5.26)$$

Donde $\vec{r}_{12} \equiv \vec{r}_1 - \vec{r}_2$.

Nótese que esta forma del postulado de gravitación universal, ofrece una expresión para la fuerza *sobre* la partícula 1 en lugar de la que ella ejerce sobre la partícula 2 (aunque por el postulado de acción y reacción son iguales). Además, el vector relativo \vec{r}_{12} (ver Figura 5.7) va de la partícula 2 a la partícula 1 (en lugar de \vec{r} que en el enunciado del postulado que va de la 1 a la 2). Asegúrese de entender claramente la definición y el sentido de estos vectores que serán usados con mucha frecuencia a lo largo del texto.

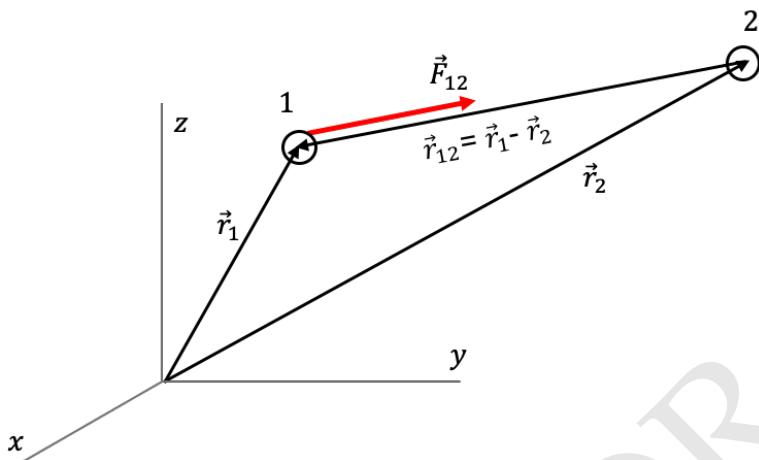


Figura 5.7: Definición de los vectores de posición, vector relativo y vector de fuerza en el postulado de gravitación universal.

Nota

La fuerza de gravedad y la ley de acción y reacción. Como puede verse de la definición matemática de la fuerza de gravitación (Ec. 5.26), tanto ella como su reacción, satisfacen las condiciones del postulado fuerte de acción y reacción, lo que tendrá consecuencias fundamentales cuando estudiemos las simetrías y cantidades conservadas en sistemas de varias partículas interactuando gravitacionalmente.

5.3.10. La fuerza gravitacional de la Tierra, el Sol y la Luna

Para poner en un contexto práctico las ideas de la sección anterior, calcularemos aquí la fuerza gravitacional ejercida por el Sol y la Tierra sobre la Luna.

Si bien el postulado de gravitación universal (Ec. 5.26), aplica solamente para partículas puntuales, como se explico desde el principio, dadas las dimensiones del Sistema Solar, podemos asumir que los tres cuerpos en cuestión son muy pequeños.

El cálculo de la Fuerza requiere que compilemos primero la información sobre las masas y distancias de estos cuerpos:

```
# Constante de gravitación
G=6.67408e-11 #m^3/kg s^2
```

```
#Masa de los cuerpos
M_tierra=5.97e24 #kg
M_luna=7.34e22 #kg
M_sol=1.98e30 #kg
```

```
#Distancia entre ellos
d_sol_tierra=149600000*1000 #m
d_tierra_luna=385000*1000 #m
d_sol_luna=d_sol_tierra-d_tierra_luna
```

Aunque la distancia entre el Sol y la Luna cambia continuamente debido al complejo movimiento de nuestro satélite, asumiremos, para nuestro sencillo cálculo, la mínima distancia entre ellos, es decir la distancia a la que se encuentran en la fase de Luna Nueva (cuando la Luna está entre la Tierra y el Sol.)

Las fuerzas entre ellos serán por tanto:

```
F_sol_tierra=G*M_sol*M_tierra/d_sol_tierra**2
F_sol_luna=G*M_sol*M_luna/d_sol_luna**2
F_tierra_luna=G*M_tierra*M_luna/d_tierra_luna**2

F_sol_tierra = 3.525069974834854e+22 N
F_sol_luna = 4.356399422118894e+20 N
F_tierra_luna = 1.9730602178040146e+20 N
```

Si bien, fuerzas tan grandes son difíciles de interpretar en términos cotidianos (la fuerza gravitacional que ejerce la Tierra sobre una persona con una masa de 60 kg es de apenas 590 N), un hecho “inesperado” llama la atención: la fuerza que ejerce el Sol sobre la Luna es más del doble que la que ejerce la Tierra sobre ella. ¿Será porque usamos la distancia de la Luna en la fase de nueva cuando está más cerca al Sol? ¿Cuánto disminuirá la fuerza del Sol sobre la Luna si la ponemos en una posición cercana la fase de Luna Llena? ¿A qué distancia debería estar la Luna de la Tierra para que la fuerza de nuestro planeta sobre la primera igualará a la que siente del Sol? ¿Órbita entonces la Luna al Sol o a la Tierra? y si ese es el caso ¿por qué la hemos considerado siempre nuestro “satélite”?

Dejamos al lector la discusión y solución de estas preguntas (algunas de las cuales serán ampliadas en la sección de problemas al final del capítulo), pero no podemos dejar de mencionar que una importante motivación para los desarrollos de la mecánica celeste posteriores a los tiempos de Newton, fue precisamente resolver la última de esas preguntas. Volveremos a este asunto en un capítulo posterior.

Un poco de historia

Hooke y el postulado de gravitación. Si bien Newton es recordado por ser el padre intelectual de la teoría de gravitación universal, una de sus contribuciones fundamentales a la física y el punto de partida de la mecánica celeste moderna, la idea de que el movimiento de los planetas se debía a una fuerza dirigida hacia el Sol (no hacia adelante en sus órbitas, como habían propuesto Kepler y Descartes) fue presentada por primera vez ante la Royal Society por Robert Hooke (“Huk”, ver Figura 5.8).

En 1666 (el mismo año en el que un Newton de 22 años, recién graduado, comenzaba sus propias reflexiones sobre el fenómeno gravitacional sin comunicarselo a nadie), Hooke escribió:

Un poco de historia (Cont.)

"Explicaré un sistema del mundo que difiere en muchos particulares de cualquier otro conocido hasta ahora [...] Este sistema depende de tres supuestos. Primero, que todos los cuerpos celestes posean un poder atractivo o gravitatorio hacia sus propios centros, de modo que no tan solo a sus partes, impidiendo que se alejen de ellos, como observamos hace la Tierra, sino que también atraigan a todos los demás cuerpos celestes que hallen dentro de su zona de actividad [...] La segunda suposición es que todos los cuerpos que son puestos en movimiento simple y directo continúen moviéndose hacia delante en una línea recta, hasta que se encuentre con alguna otra fuerza efectiva que los desvíe e incline en un movimiento que describa un círculo, una elipse o cualquier otra línea curva compuesta. La tercera suposición es que esas fuerzas de atracción sean tanto más poderosas en su acción cuanto el cuerpo que debe sentir su influencia se halle más cerca de su centro." [13]

Como puede leerse en este extracto, en los escritos de Hooke, que a diferencia de Newton no desarrolló mucho más allá de esta sencilla formulación, estaba la semilla no solo de la idea de la gravedad, sino que también se presentaba una versión de la ley de inercia y el principio de disminución de la intensidad gravitacional con la distancia. Más adelante Hooke iría más lejos y propondría que la intensidad de la fuerza disminuía específicamente con el cuadrado del inverso de la distancia, en una carta dirigida a Newton y fechada en enero de 1680.

Después de que Newton presentaría en sus escritos de esa misma década de 1680, incluyendo los *Principia*, su postulado de gravitación universal, comenzó con Hooke una penosa disputa de prioridad. Hooke acusó a Newton hasta su muerte de haberle robado las ideas de la gravitación universal y Newton despreció profundamente Hooke por sugerir que su contribución más grande a la historia de la ciencia había sido copiada de otro. Hoy la historia le reconoce a Hooke su prioridad (o al menos simultaneidad) en dos ideas: la idea de la atracción universal (que concibió simultáneamente e independientemente con Newton) y la idea (planteada como una hipótesis sin demostración matemática) de que los cuerpos sometidos a una fuerza gravitacional se mueven sobre elipses, un asunto sobre el que volveremos en el Capítulo 7.

5.3.11. El campo gravitacional

Otra forma de escribir el postulado de gravitación, es reconocer que la fuerza gravitacional que produce una partícula de masa M sobre cualquier otra partícula de masa m situada en un punto arbitrario con posición relativa \vec{r} (donde \vec{r} es el vector que va de la posición de M a la del punto arbitrario) es:

$$\vec{F} = m \left(-\frac{GM}{r^3} \vec{r} \right) \quad (5.27)$$

De aquí podemos postular que el *campo vectorial*:

$$\vec{g} \equiv -\frac{GM}{r^3} \vec{r}, \quad (5.28)$$

existe independiente de si hay una masa m que pueda sentirlo. A esta cantidad

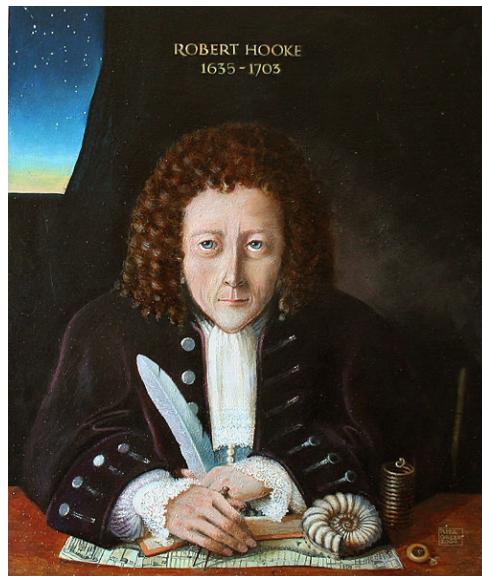


Figura 5.8: Robert Hooke (1635-1703). Crédito: Rita Greer (2004).

vectorial (¿entidad física?) la llamaremos en lo sucesivo el **campo gravitacional** producido por la partícula puntual M .

En términos del campo gravitacional, la fuerza que experimenta una partícula de prueba situada en \vec{r} respecto a M se escribe:

$$\vec{F} = m\vec{g} \quad (5.29)$$

Esta última relación está lejos de ser trivial. En realidad la extenderemos para denotar, de manera general, la fuerza gravitacional experimentada por una partícula en un campo gravitacional \vec{g} , independientemente de si el campo es producido por una partícula puntual, por un sistema de partículas, un cuerpo rígido o un fluido.

5.3.12. Energía potencial gravitacional

Es posible demostrar (ver problemas al final de este capítulo) que la fuerza gravitacional de la Ec. (5.27), es una fuerza conservativa con función de energía potencial igual a:

$$U = -\frac{GMm}{r}, \quad (5.30)$$

Nota

Energía potencial gravitacional negativa. En términos rigurosos la función de energía potencial más general de la que podemos derivar



Nota (Cont.)

la fuerza gravitacional es

$$U = -\frac{GMm}{r} + C$$

siendo C una constante arbitraria. Esta libertad implica que el valor de la energía gravitacional no tiene en realidad un significado físico relevante. Lo importante en la dinámica es la diferencia de energía potencial entre dos puntos del espacio ΔU y que determina, por ejemplo, el cambio en la energía cinética a través de la Ec. (5.25.) Naturalmente para el cálculo de ΔU el valor de C es irrelevante.

La elección arbitraria de $C = 0$ que hicimos al escribir la Ec. (5.30), sin embargo, tiene una interpretación interesante, que podemos obtener al aplicar la conservación de la energía $\Delta K = -\Delta U$ en una situación hipotética.

Imaginemos que cuando dos partículas están a una distancia r finita, su energía cinética total es 0 (están en reposo relativo) y su energía potencial $U_0 < 0$. Por efecto de la acción instantánea de un agente externo, una de las partículas se acelera (el sistema recibe una inyección de energía mecánica $\Delta E > 0$) hasta que las dos partículas terminan separadas a una distancia enorme $r \rightarrow \infty$ donde su velocidad vuelve a ser casi nula $v \rightarrow 0$ (podría ser mayor, pero asumiremos este caso extremo).

A esa distancia, el sistema tiene energía cinética total $K \rightarrow 0$ y dado que $C = 0$, su energía potencial será también $U \rightarrow 0$. Aplicando la conservación de la energía mecánica total:

$$\begin{aligned}\Delta K &= -\Delta U \\ 0 - (0 + \Delta E) &= -(0 - U_0) \\ \Delta E &= -U_0\end{aligned}$$

En conclusión: *El valor absoluto de la energía potencial U_0 se puede interpretar como la energía mecánica adicional que necesita un sistema para apenas escapar de su mutua interacción gravitacional.*

En otros términos, el signo negativo de la energía potencial podría interpretarse no solamente como una elección arbitraria de una constante matemática sino también como una *deuda energética*, es decir como la energía que debe aportar un agente externo para liberar a las partículas de su “esclavitud” gravitacional.

Dado que la energía potencial de cualquier partícula, sometida a la fuerza gravitacional de M es proporcional a su masa m , es posible definir la **función de potencial gravitacional** o simplemente el **potencial gravitacional**:

$$V \equiv \frac{U}{m} = -\frac{GM}{r} \quad (5.31)$$

V es un campo escalar (de acuerdo a las definiciones de Sección 4.1.3) y como sucede con el campo vectorial \vec{g} , en muchas aplicaciones es la representación matemática del *campo gravitacional* producido por una partícula. En términos de V , la energía potencial de una partícula de masa m sumergida en un campo gravitacional y la fuerza experimentada por ella, se pueden escribir como:

$$\begin{aligned} U &= mV \\ \vec{F} &= -m \partial_{\vec{r}} V \end{aligned} \quad (5.32)$$

De nuevo, junto con la Ec. (5.29) estas relaciones aplican, independientemente de si el campo gravitacional, cuantificado por V o \vec{g} , es producido por una partícula o un cuerpo extendido. Una última relación interesante que resulta de comparar la Ec. (5.32) con la Ec. (5.29) es la siguiente:

$$\vec{g} = -\partial_{\vec{r}} V \quad (5.33)$$

que es análoga a la definición de U (ver Ec. 5.24), $\vec{F} = -\partial_{\vec{r}} U$.

5.3.13. Masa y principio de equivalencia

La masa, como aparece en la Ec. (5.31), es tanto una medida de las capacidades de un cuerpo para producir campo gravitacional (y afectar a otras partículas), o, como se expresa en 5.29, una medida de su “sensibilidad” al campo gravitacional producido por otros cuerpos³⁰.

La masa, así concebida, es muy diferente, conceptualmente, a la que usamos (y uso Newton originalmente) para definir las cantidades dinámicas en la Sección 5.3.1. Por ello es necesario precisar la diferencia entre esos dos tipos de masa con una definición:

Definición 5.4

Masa inercial y masa gravitacional. En mecánica Newtoniana distinguimos dos tipos de masa conceptualmente diferentes:

Llamamos **masa inercial m_I** a la razón entre las magnitudes del momento lineal de una partícula y su velocidad, a saber $m_I = p/v$. La masa inercial de una partícula es la que aparece en la ecuación de movimiento $\ddot{\vec{r}} = \vec{F}/m_I$ y en la energía cinética $K = m_I v^2/2$.

Por otro lado la **masa gravitacional m_G** es la masa que determina la intensidad del campo gravitacional producido por una partícula $V = Gm_G/r$ (*masa gravitacional activa*) o la intensidad de la fuerza que ella experimenta en un campo gravitacional de otro cuerpo, $\vec{F} = m_G \vec{g}$ (*masa gravitacional pasiva*).

Si usamos el postulado de fuerza (Ec. ??) y la expresión para la fuerza gravitacional escrita en la Ec. (5.29), encontramos que la aceleración que sufre una partícu-

³⁰En términos estrictos, la masa que produce el campo y la masa que lo siente, deberían diferenciarse también. La primera sería una masa gravitacional activa y la segunda una masa gravitacional pasiva. En lo que sigue nos ocuparemos únicamente de la masa gravitacional pasiva, o para acortar, la masa gravitacional.

la de masa inercial m_I y masa gravitacional (pasiva) m_G en un campo gravitacional \vec{g} es:

$$\ddot{\vec{r}} = \frac{m_G}{m_I} \vec{g} \quad (5.34)$$

La razón m_G/m_I , ha sido medida cuidadosamente en el laboratorio desde finales del siglo 1500 (ver recuadro **Un poco de historia: El experimento de Eötvos**), con un resultado ampliamente conocido: el valor numérico de la masa gravitacional (pasiva) coincide con el de la masa inercial hasta la onceava cifra significativa [47].

La igualdad entre la masa gravitacional e inercial ha sido elevada hoy a la altura de un principio fundamental de la mecánica, el **principio de equivalencia**:

Principio 5.1

Principio de equivalencia (versión débil). ^a La aceleración de una partícula puntual en un campo gravitacional depende únicamente del valor del campo y es independiente de la masa y composición de la partícula. En términos matemáticos, en la mecánica newtoniana, $m_G = m_I$.

^aEl adjetivo débil, hace referencia al hecho de que existe un principio de equivalencia más fundamental sobre el que se sustenta la teoría de la relatividad general.

Por la igualdad numérica (mas no conceptual) entre la masa gravitacional (pasiva) y la mas inercial, en el contexto de la mecánica newtoniana, usaremos en lo sucesivo el símbolo m para referirnos a la masa sin distinguir si se trata de la una o la otra.

Un poco de historia

El experimento de Eötvos. La pregunta de si dos cuerpos de distinta masa caen al mismo tiempo cuando son lanzadas desde la misma altura (que, en términos modernos, es igual a la pregunta de si tienen la misma aceleración), ha ocupado a pensadores desde la antigüedad.

El primer experimento preciso de este tipo fue realizado por Simon Stevin (1548-1620, ver [Figura 5.9](#)), un matemático, filósofo e ingeniero flamenco (es decir de la región que hoy llamamos Bélgica) que hizo importantes contribuciones tempranas a la mecánica prenewtoniana.

En 1586, Stevin lanzó dos esferas de acero que tenían una masa diferente por un factor de 10, desde una altura de aproximadamente 10 metros. Registro la diferencia en el tiempo de caída escuchando el golpe que hacían las esferas al golpear el suelo [21]. El resultado fue contundente: las dos esferas caían casi exactamente al mismo tiempo (al menos dentro de la sensibilidad del experimento.)

Posteriormente Galileo (quien citaría a Stevin en sus libros) realizó comprobaciones similares usando planos inclinados ^a. Newton y Bessel intentaron resolver también la cuestión, esta vez usando péndulos (el período de un péndulo depende también de la aceleración que sufre el cuerpo) con resultados similares a Stevin: todos los cuerpos sin importar su masa y composición, tienen la misma aceleración en el campo gravitacional de la Tierra. En términos de la Ec. (5.34), $m_G/m_I = 1$.



Figura 5.9: El único retrato disponible de Simon Stevin (ca. 1548). Crédito: Colección Universidad de Leiden.

Un poco de historia (Cont.)

Las medidas más precisas de la razón entre las masas gravitacional e inercial fueron realizadas entre 1889 y 1909 por el físico húngaro Roland von Eötvos (“[fon otfosh](#)”^b) y sus colaboradores, usando para ello un instrumento conocido como la balanza de torsión (similar al usado para medir la constante de gravedad universal.) Los experimentos probaron la igualdad entre la masa gravitacional y la masa inercial hasta la octava cifra significativa y fueron repetidos en la segunda mitad de los 1900 hasta alcanzar la precisión mencionada en el texto: once dígitos significativos [47].

^aLa idea de que Galileo realizó un experimento similar al de Stevin, lanzando objetos desde lo alto de la Torre de Pisa no ha podido ser confirmado y podría tratarse de una anécdota apócrifa.

^b<https://es.forvo.com/search/E%C3%B6tv%C3%B6s/hu/>

5.4. Sistemas de partículas

Una vez definidas las cantidades y conceptos básicos de la mecánica y formulados los principios, postulados y teoremas que nos permiten describir el movimiento de partículas puntuales, tenemos los elementos necesarios para abordar la cinemática y dinámica de sistemas formados por muchas partículas.

Los sistemas considerados aquí, sin embargo, estarán constituidos por partícu-

las que interactúan a distancia, con fuerzas relativamente débiles y en números relativamente pequeños. La mecánica de sistemas con partículas unidas por fuerzas intensas y que mantienen su posición relativa de forma estable (cuerpos rígidos) o aquellos formados por *moles* de partículas individuales, y cuya mecánica es descrita por leyes empíricas macroscópicas o por reglas estadística, está más allá del interés del libro.

Una buena parte de los desarrollos teóricos contenidos en esta sección vienen originalmente del texto clásico de Goldstein, Poole & Safko, “*Classical mechanics*” [29] y que estaremos citando con alguna frecuencia en el resto de este libro.

5.4.1. Fuerzas y centro de masa

Cada partícula en nuestro sistema está sometida a dos tipos de fuerzas: (1) las fuerzas externas \vec{F}_i^E , producidas por cuerpos externos o campos diferentes a los producidos por las componentes del sistema y (2) las fuerzas entre las partículas \vec{F}_{ij} .

La evolución del sistema se obtiene resolviendo simultáneamente el conjunto de las e.d.m. de cada partícula, que se puede escribir en términos de las fuerzas externas e internas como:

$$\left\{ m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i^E + \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij} \right\}_N \quad (5.35)$$

Si sumamos todas las e.d.m. y suponemos que las fuerzas entre partículas satisfacen la ley de acción y reacción (débil o fuerte), esto es $\vec{F}_{ji} = -\vec{F}_{ij}$, podemos escribir:

$$\sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i = \sum_i \vec{F}_i^E$$

o bien:

$$\frac{d^2}{dt^2} \left(\sum_i m_i \vec{r}_i \right) = \sum_i \vec{F}_i^E$$

Si definimos:

$$\vec{R} \equiv \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{M} \quad (5.36)$$

donde $M = \sum_i m_i$ es la masa total del sistema, las e.d.m. de todas las partículas del sistema se transforman en una sola ecuación, que tiene exactamente la misma forma que la e.d.m. de una sola partícula de masa M y posición \vec{R} sometida a una fuerza total $F^E = \sum_i \vec{F}_i^E$:

$$M \ddot{\vec{R}} = \vec{F}^E \quad (5.37)$$

Este sencillo resultado tiene implicaciones trascendentales. Significa, esencialmente, que muchos de las cantidades cinemáticas y dinámicas definidas hasta ahora para partículas individuales, así como algunos de los resultados vistos antes, se

aplican también cuando describimos sistemas de partículas, siempre y cuando nos ocupemos del movimiento de un punto imaginario localizado en la posición \vec{R} dada por la Ec. (5.36). Llamamos a este punto el **centro de Masa** del sistema.

Para ilustrar numéricamente el concepto de centro de masa consideremos un sistema de N partículas con posiciones y masas aleatorias sobre el plano xy .

Para ello generemos valores uniformemente distribuidos en el intervalo $[0, 100]$ que corresponderán a la masa de las partículas en kg. La posición de las partículas se generara asumiendo que sus coordenadas se encuentran restringidas al interior de un cuadrado de lado 2 m y apoyado sobre el origen del sistema de coordenadas. Por su lado, supondremos que las componentes de la velocidad están restringidas al intervalo $[-0.2, 0.2]$ m/s.

El algoritmo para preparar las masas, posiciones y velocidades de las partículas será:

(Algoritmo 5.5)

```
#Número de partículas
N=8

#Semilla de números aleatorios
from numpy.random import seed
seed(30)

#Valores aleatorios de las masas
from numpy.random import uniform
ms=uniform(0,100,size=N)

#Masa total
M=ms.sum()

#Tabla de posiciones
rs=uniform(0,2,size=(N,3))
#Ponemos todos los valores de z en 0
rs[:,2]=0

#Tabla de velocidades
vs=uniform(-0.2,0.2,size=(N,3))
#Ponemos todos los valores de vz en 0
vs[:,2]=0

Masas:
[64.41 38.07 66.3]...
Posiciones:
[[0.33 1.93]
 [1.98 0.47]
 [0.81 0.27]]
...
Velocidades:
[[ 0.01  0.11]
 [-0.16 -0.12]
 [-0.11 -0.1]]
```

Nota

semilla de números aleatorios. La mayoría de los algoritmos de generación de números aleatorios, lo hacen partiendo de una *semilla entera*, a partir del cuál generan secuencias de números perfectamente predecibles pero que a los ojos de un ser humano parecen completamente al azar (pseudo-aleatorios).

En el Alg. (5.5) hemos generado las propiedades del sistema físico fijando la semilla en un valor arbitrario de 30 (de allí el comando `seed(30)`.) De este modo, al correr este algoritmo siempre obtendremos las mismas propiedades.

Si el lector desea generar un conjunto completamente diferente puede cambiar este número por cualquier otro (siempre que sea entero.) Más interesante aún es comprobar el efecto que tienen eliminar (o comentar esta línea.)

Usando la Ec. (5.36), podemos calcular la posición y velocidad del centro de masa con el siguiente algoritmo:

(Algoritmo 5.6)

```
from numpy import array
R_CM=sum(ms[:,None]*rs)/M
V_CM=sum(ms[:,None]*vs)/M
```

Posición centro de masa: [0.89 0.95]

Velocidad centro de masa: [-0.08 -0.03]

Nota

Operaciones entre vectores y matrices. En lo que queda de esta sección, pero también en algunos de los capítulos posteriores, nos enfrentaremos con mucha frecuencia a situaciones en las que es necesario realizar operaciones entre vectores y matrices (como `ms` y `rs` en el algoritmo anterior), que merecen un poco de atención.

El cálculo, en una sola línea de código, de la posición del centro de masa que hicimos en el Alg. (5.6) no es para nada trivial.

Si quisieramos hacerlo paso a paso el código (uno de los muchos posibles) sería bastante bastante engoroso:

```
R_CM=[0,0,0]
for i in range(3):
    for k in range(N):
        R_CM[i]=R_CM[i]+ms*rs[k,i]
```

En este inefficiente algoritmo (el único posible en lenguajes como C), el primer ciclo `for` es para recorrer las componentes del vector `R_CM` y el segundo para recorrer las partículas del sistema.



Nota (Cont.)

Si tuvieramos que escribir todas las expresiones vectoriales usando algoritmos como aquel, este texto tendría miles de páginas y posiblemente se convertiría en un aburrido libro de “programación ineficiente” (cuando en realidad lo emocionante está en la física.)

Hay cinco trucos entonces que debemos reconocer para todos los algoritmos sucesivos:

1. Si queremos multiplicar un vector por una matrix, por ejemplo para calcular $\{m_i \vec{r}_i\}$ no podemos simplemente escribir `ms*rs` (aunque el sistema eventualmente no produzca ningún error el resultado será equivocado). Para hacer correctamente esta multiplicación, debemos asegurarnos que `ms` (que es un vector de dimensiones $1 \times N$, donde N es el número de partículas) se convierta en un vector columna $N \times 1$. El truco en Python para ello es escribir simplemente `ms[:, None]`.
2. Si queremos sumar las filas de una matrix $N \times M$ basta usar la rutina `sum` incorporada en la biblioteca base del lenguaje. Así `sum(rs)` produce un vector de M componentes que tiene la suma *vectorial* de todas las filas de la matriz `rs`. Este y el anterior truco, son los que permiten escribir en una línea las componentes de \vec{R} :
`R_CM=sum(ms[:,None]*rs)/M.`
3. Si queremos restar a la matriz `rs` un vector constante `R_CM`, la operación `rs-R_CM` producirá un error. La razón es que el operador `-` asume que los dos arreglos tienen el mismo tamaño; en realidad `rs` es una matriz $N \times 3$ y `R_CM` un vector simple de 3 componentes. Para restar cada fila de la matriz `rs` por el vector `R_CM` se debe usar la rutina `subtract` de NumPy: `subtract(rs,R_CM)`.
4. Las operaciones vectoriales `cross` (producto cruz) y `dot` (producto punto) del paquete NumPy, aplicadas sobre dos matrices $N \times 3$ (como las matrices de posiciones `rs` y velocidades `vs` de las partículas del sistema), realizan las operaciones fila por fila (cada fila de la matriz se considera un vector.) Así `cross(rs, vs)` es igual al conjunto $\{\vec{r}_i \times \vec{v}_i\}$ y es en sí misma una matriz $N \times 3$. Lo mismo sucede con `dot(rs, rs)`, aunque en este último caso el resultado es un vector columna $N \times 1$ con los productos punto $\{\vec{r}_i \cdot \vec{r}_i\}$.
5. La operación `norm` (que está en el subpaquete `linalg` de NumPy) y que permite calcular la magnitud euclidiana de un vector, se puede aplicar sobre una matriz como `vs` para obtener la magnitud de cada fila; pero no de cualquier manera. `norm(vs)` devuelve un solo número. Pero `norm(vs, axis=1)` devuelve la magnitud de cada fila (el `axis=1` le indica a `norm` que recorra la matriz por filas; alternativamente `axis=0` le dirá a que lo haga por columnas, que



Nota (Cont.)

no es nuestro interés aquí.) Así el código `norm(vs, axis=1)**2` permite calcular el conjunto $\{v_i^2\}$.

Un gráfico de la posición y velocidad de las partículas del sistema y de la posición y velocidad del centro de masa puede obtenerse con el siguiente algoritmo:

(Algoritmo 5.7)

```
import matplotlib.pyplot as plt
fig=plt.figure();

#Etiquetas sobre las partículas
for i in range(N):
    plt.text(rs[i,0],rs[i,1],i,color="cyan",
             ha='center',va='center')

#Posiciones y velocidades de las partículas
plt.scatter(rs[:,0],rs[:,1],s=5*ms,c='red',marker='o')
plt.quiver(rs[:,0],rs[:,1],vs[:,0],vs[:,1],scale=1)

#Posiciones y velocidad del centro de masa
plt.scatter(R_CM[0],R_CM[1],s=M,c='blue',marker='+')
plt.quiver(R_CM[0],R_CM[1],V_CM[0],V_CM[1],color='blue',scale=1)

#Decoración
plt.xlabel("$x$ (m)");
plt.ylabel("$y$ (m)");

#Ajusta gráfico
from pymcel.plot import fija_ejes_proporcionales
fija_ejes_proporcionales(fig.gca(),(rs,R_CM),margin=0.4);
plt.tight_layout();
plt.show();
```

ver Figura 5.10



Nota

Escala de los ejes en el espacio. La rutina `fija_ejes_proporcionales` del paquete `pymcel` que viene con la versión electrónica de este libro y que utilizamos en el Alg. (5.7), juega en ese algoritmo un papel muy importante.

En lo sucesivo, al representar la posición de partículas en el espacio coordenado, es indispensable que la escala de los ejes sea exactamente la misma. El lector puede verificar con una regla, que una unidad sobre

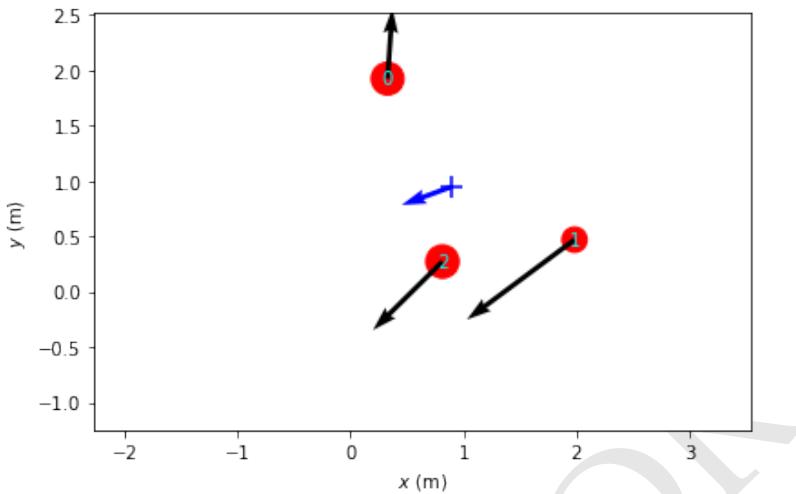


Figura 5.10: Figura correspondiente al código 5.7. Un sistema de tres partículas. El tamaño del círculo que representa cada partícula es proporcional a su masa. La cruz y la flecha adherida a ella muestran la posición y velocidad del centro de masa.

Nota (Cont.)

el eje horizontal en la Figura 5.10 mide exactamente lo mismo que una unidad del eje vertical. De este modo las posiciones o los vectores representados no estarán deformados, un efecto que crea distorsiones en nuestra interpretación de esas cantidades (más adelante veremos que solo usando esta rutina, las trayectorias circulares aparecerán efectivamente como círculos.)

El código de esta rutina es muy elaborado como para reproducirlo en el libro. El lector curiosos puede encontrar todos los algoritmos del paquete `pymcel` en el material distribuido con la [versión electrónica del libro](#)^a.

^ahttp://seap-udea.org/MecanicaCeleste_Zuluaga

5.4.2. Centro de masa de un sistema de dos partículas

De particular de interés para la mecánica celeste son las propiedades del centro de masa de un sistema formado por solo dos partículas:

$$\vec{R}_{CM} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{M}$$

Es fácil mostrar que en este caso, el centro de masa siempre se encuentra en la línea que une a las dos partículas (ver problemas al final del capítulo.)

Si introducimos el vector relativo $\vec{r} \equiv \vec{r}_1 - \vec{r}_2$, es posible mostrar que la posición de cada partícula se puede escribir en términos de la posición del centro de masa

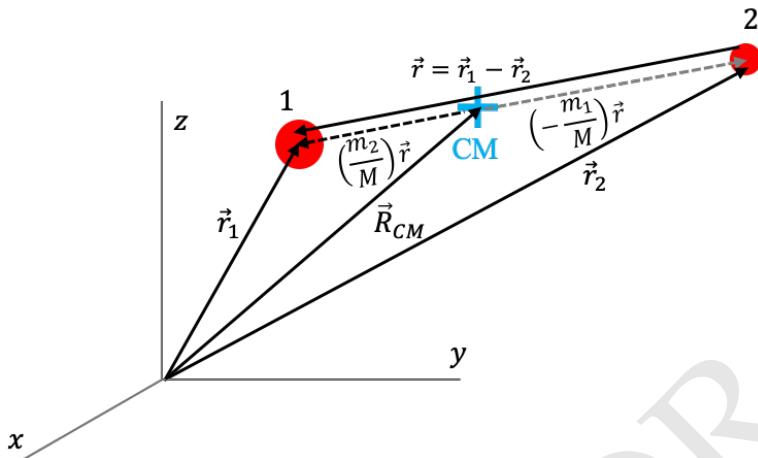


Figura 5.11: Relación entre la posición del centro de masa \vec{R} , el vector relativo $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ y la posición de las partículas en un sistema de dos cuerpos.

\vec{R}_{CM} y el vector \vec{r} como:

$$\vec{r}_1 = \vec{R}_{CM} + \frac{m_2}{M} \vec{r} \quad (5.38)$$

$$\vec{r}_2 = \vec{R}_{CM} - \frac{m_1}{M} \vec{r} \quad (5.39)$$

Como vemos la distancia del centro de masa a cada partícula es directamente proporcional a la masa de la otra partícula. Así, si llamamos $\vec{r}'_i = \vec{r}_i - \vec{R}$ al vector que va del centro de masa a la posición de cada partícula, entonces:

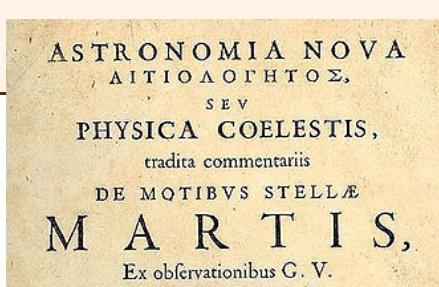
$$\frac{r'_1}{r'_2} = \frac{m_2}{m_1} \quad (5.40)$$

Un poco de historia

Kepler y el centro de masa. Muchos años antes de que Newton hubiera formalizado las leyes de la mecánica, antes de que apareciera el concepto de masa, fuerza o el postulado de acción y reacción, todos los cuales son requeridos para la deducción formal de la relación expresada en la Ec. (5.40), Kepler había ya intuido este resultado. En su obra cumbre *Astronomía Nueva* de 1609, presentó, entre los que denominó sus *8 axiomas de una teoría verdadera de la gravedad*, la siguiente afirmación:

“Si la Tierra y la Luna no fueran mantenidas en sus respectivas órbitas por una fuerza espiritual o de alguna otra naturaleza equivalente, la Tierra ascendería hacia la Luna 1/54 de la distancia y la Luna descendería las restantes 53 partes del intervalo y así se unirían. Pero este cálculo presupone que ambos poseen la misma densidad.”

Este hecho pone en evidencia dos cosas: (1) la clarividencia del matemático alemán, quién entre



Un poco de historia (Cont.)

cidad y el magnetismo, fue en cierto sentido un compilador de la sabiduría “mecánica” de su época.

otras cosas además de la citada, intuyó algunas importantes propiedades de la gravedad y de sus efectos sobre el movimiento planetario 80 años antes que Newton y sus contemporáneos; y (2) que las ideas de la mecánica que hoy atribuimos exclusivamente a Newton estaban “flotando” en el ambiente intelectual de su época desde hacía casi 100 años. Newton, como lo sería también Maxwell un siglo y medio después en el caso de la electricidad

^aEn realidad el centro de masa del sistema Tierra-Luna está a 1/81 de la distancia entre ambos (la masa de la Tierra es 81 veces la de la Luna.) Sin embargo, la estimación de Kepler, como bien lo aclara al final de esta cita sin que terminemos de entenderle, se basaba en la suposición de que la masa de nuestro satélite se puede estimar exclusivamente a partir de su tamaño. Usando el valor contemporáneo del radio de la Luna y de la Tierra, la masa estimada de nuestro satélite, a partir de su tamaño y suponiendo densidades iguales, sería $(R_{\text{Luna}}/R_{\text{Tierra}})^3 = (1737/6371)^3 = 1/49$ de la masa de la Tierra, que es cercano al valor de 1/54 usado por Kepler.

5.4.3. Teoremas de conservación

Usando la e.d.m. para un sistema de partículas (Ec. 11.7) y algunas de las deducciones que ya habíamos realizado en el caso de partículas individuales, podemos deducir algunos teoremas mecánicos de gran importancia.

Proposición 5.4

Teorema de conservación del momentum lineal. Si la fuerza externa total sobre un sistema de partículas es nula, el momentum total del sistema se mantiene constante. En términos matemáticos:

$$\vec{F}^E = \sum_i \vec{F}_i^E = 0 \iff \vec{P} = \vec{P}_{\text{CM}}$$

Donde \vec{P}_{CM} es un vector constante.

Este teorema ocupa un lugar central en la mecánica y sus implicaciones no son para nada triviales. Piense tan solo en el hecho de que aún si un sistema contiene un enorme número de partículas, que rebotan entre sí o se dispersan unas contra otras, procesos en los cuáles el momento de las partículas se modifica de formas a veces inesperadas, la suma de todos los momentos individuales producirá siempre el mismo número.

Premultiplicamos ahora la e.d.m. en la Ec. (5.37) por el factor integrante $\vec{r}_i \times$ y

sumando sobre todas las partículas:

$$\sum_i m_i \vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \left(\vec{F}_i^E + \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij} \right)$$

El lado izquierdo izquierdo de esta última ecuación se puede expresar en términos de cuadraturas (ver Sección 5.2.4), de modo que la ecuación adopta la forma más conveniente de:

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_i m_i \vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i \right) = \vec{r}_i \times \sum \left(\vec{F}_i^E + \vec{F}_{ij} \right),$$

donde reconocemos, del lado izquierdo al momento angular total $\vec{L} = \sum m_i \vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i$ y del derecho la torca neta:

$$\vec{\tau} = \vec{r}_i \times \sum \left(\vec{F}_i^E + \vec{F}_{ij} \right). \quad (5.41)$$

En términos de estas cantidades, la e.d.m. de un sistema de partículas se puede escribir, alternativamente, como:

$$\dot{\vec{L}} = \vec{\tau} \quad (5.42)$$

Volvamos a la torca. Por el postulado de acción y reacción (Pos. 5.3) las torcas de las fuerzas entre las partículas se pueden agrupar por pares de la forma:

$$\vec{r}_k \times \vec{F}_{lk} + \vec{r}_l \times \vec{F}_{kl} = -\vec{r}_{lk} \times \vec{F}_{lk},$$

donde $\vec{r}_{lk} = \vec{r}_l - \vec{r}_k$ es el vector relativo, y hemos usado índices l, k distintos a los originales i, j de la e.d.m. para evitar confusiones.

Si adicionalmente, las interacciones son tales que el postulado de acción y reacción fuerte se cumple, es decir si $\vec{r}_{lk} \parallel \vec{F}_{lk}$, entonces todas las torcas internas se cancelan mutuamente y como consecuencia:

$$\vec{\tau} = \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i^E, \quad (5.43)$$

de donde, finalmente, la e.d.m. del sistema de partículas (Ec. 5.42) tiene la forma explícita:

$$\dot{\vec{L}} = \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i^E$$

Esta última ecuación conduce a un segundo importante teorema de conservación:

Proposición 5.5

Teorema de conservación del momentum angular. Si la torca externa total sobre un sistema de partículas es nula, el momento angular total del sistema se mantiene constante. En términos matemáticos:

$$\vec{\tau} = \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i^E = \vec{0} \iff \vec{L} = \vec{L}_0$$

Proposición 5.5 (Cont.)

Donde \vec{L}_0 es un vector constante.

Es claro que la condición básica del teorema de conservación del momento angular (torque neto nulo) se cumple también en el caso en el que las fuerzas externas son nulas. Es decir, en un sistema aislado de partículas, tanto el momento lineal como el momento angular se conservan.

De nuevo, por trivial que nos parezca el teorema de conservación del momento angular, esta lejos de serlo. La cantidad implicada aquí es mucho más compleja que el momento lineal y resulta sencillamente increíble que bajo una condición tan particular como la que supone el teorema, una combinación no trivial de cantidades cinemáticas produzcan un vector constante.

Pongamos a prueba el teorema usando el sistema de partículas que habíamos introducido en la [Sección 5.4.1](#). Para ello calculemos el momento angular total del sistema:

(Algoritmo 5.8)

```
#Momento angular de cada partícula
from numpy import cross
Ls=ms[:,None]*cross(rs,vs)

#Momento angular total
L=sum(Ls)
```

Momentos angulares individuales:

```
[[ 0.      0.      1.35]
 [ 0.     -0.     -6.25]
 [ 0.     -0.     -3.72]]
```

Momento angular total:

```
[ 0.      0.     -8.62]
```

Propagaremos ahora sus posiciones y velocidades asumiendo que las partículas se mueven con velocidad constante, es decir, sin experimentar ninguna fuerza de interacción mutua, y más importante, ninguna fuerza externa. En esta condición dinámica las velocidades no se modifican:

```
#Tiempo futuro
t=10.0

#Posición y velocidad de las partículas en t
rs_t=rs+10*vs
vs_t=vs
```

Posiciones iniciales: rs =

```
[[0.33 1.93 0. ]
 [1.98 0.47 0. ]
 [0.81 0.27 0. ]]
```

Posiciones finales: vs =

```
[[ 0.4   2.99  0. ]]
```

```
[ 0.34 -0.75  0. ]
[-0.25 -0.77  0. ]]
```

Véamos ahora cuánto valen los momentos angulares individuales y total, después de que las partículas se propagaran:

```
#Momento angular de cada partícula
from numpy import cross
Ls_t=ms[:,None]*cross(rs_t,vs_t)

#Momento angular total
L_t=Ls_t.sum(axis=0)
```

Momentos angulares después:

```
[[ 0.     0.     1.35]
 [ 0.    -0.    -6.25]
 [ 0.     0.    -3.72]]
```

Momento angular total después:

```
[ 0.     0.    -8.62]
```

El momento angular total después de la propagación resulta igual al momento angular antes de ella (Alg. 5.8) con lo que comprobamos que en la ausencia de fuerzas externas, incluso frente a modificaciones no triviales de las posiciones, el momento angular se mantiene constante.

5.4.4. Dinámica referida al centro de masa

Una forma especial de las e.d.m. de un sistema de partículas, se obtiene cuando lo describimos desde un sistema de referencia “atado” del centro de masa (origen en el centro de masa y velocidad igual a él.)

Usando las transformaciones de Galileo (Pos. 5.1) la posición y velocidad de cada partícula referida al centro de masa será (Ecs. 5.5 y 5.47):

$$\begin{aligned}\vec{r}_i(t) &= \vec{R}_{\text{CM}}(t) + \vec{r}'_i(t) \\ \vec{v}_i(t) &= \vec{V}_{\text{CM}}(t) + \vec{v}'_i(t)\end{aligned}\quad (5.44)$$

Aquí, las cantidades primadas están referidas al nuevo sistema de referencia. En general $\vec{R}_{\text{CM}}(t) = \int \vec{V}_{\text{CM}}(t) dt$ será la posición del centro de masa en t .

Momento angular total del sistema

En el sistema de referencia del centro de masa el momentum angular es:

$$\begin{aligned}\vec{L} &= \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i \\ &= \sum_i m_i (\vec{R}_{\text{CM}} + \vec{r}'_i) \times (\vec{V}_{\text{CM}} + \vec{v}'_i) \\ &= (\sum_i m_i) \vec{R}_{\text{CM}} \times \vec{V}_{\text{CM}} + \vec{R}_{\text{CM}} \times (\sum_i m_i \vec{v}'_i) + (\sum_i m_i \vec{r}'_i) \times \vec{V}_{\text{CM}} + \sum_i (m_i \vec{r}'_i \times \vec{v}'_i)\end{aligned}$$

En esta expresión $\sum m_i \vec{r}'_i$ y $\sum m_i \vec{v}'_i$ son, respectivamente, vectores proporcionales a la posición y velocidad del centro de masa (ver Ec. 5.36), pero medidos en

el sistema de referencia del mismo centro de masa; por definición, ambas cantidades son entonces nulas (para una sencilla comprobación numérica, ver algoritmos abajo.)

Finalmente, el momento angular total del sistema se puede escribir como:

$$\vec{L} = \vec{R}_{CM} \times \vec{P}_{CM} + \sum_i \vec{r}'_i \times \vec{p}'_i \quad (5.45)$$

es decir, **el momento angular total de un sistema de partículas** es igual a la suma del **momento angular del centro de masa** y el **momentum angular total de las partículas en el sistema de referencia del centro de masa**.

Nuevamente podemos comprobar este resultado usando el sistema de ejemplo que introdujimos en [Sección 5.4.1](#).

Calculemos primero el momento angular del centro de masa del sistema:

```
#Momento angular del centro de masaa
from numpy import cross
L_CM=M*cross(R_CM,V_CM)
```

Momento angular del centro de masa:

[0. -0. 7.96]

Para calcular el momento angular de las partículas en el sistema de referencia del centro de masa, debemos primero calcular la posición y velocidad de ellas en ese sistema usando las Ecs. (5.44):

```
#Posición y velocidad referida al centro de masa
from numpy import subtract
rps=subtract(rs,R_CM)
vps=subtract(vs,V_CM)
```

Posiciones respecto al CM:

[[-0.56 0.98]
[1.09 -0.48]
[-0.08 -0.68]]

Velocidades respecto al CM:

[[0.08 0.13]
[-0.09 -0.09]
[-0.03 -0.08]]

Con este resultado podemos verificar la afirmación que habíamos hecho en la deducción de la Ec. (5.45), en la que habíamos dicho que $\sum m_i \vec{r}'_i$ y $\sum m_i \vec{v}'_i$ son vectores nulos:

```
R_CM_CM=sum(ms[:,None]*rps)/M
V_CM_CM=sum(ms[:,None]*vps)/M
```

Posiciones del CM respecto al CM:

[1.53e-16 0.00e+00]

Posiciones del CM respecto al CM:

[-3.95e-18 5.26e-18]

Hecha esta verificación, podemos ahora calcular el momento angular total de las partículas en el sistema de referencia del centro de masa:

```
#Momento angular de cada partícula
from numpy import cross
Lps=ms[:,None]*cross(rps,vps)

#Momento angular total
Lp=sum(Lps)
```

Momento angular total referido al centro de masa:

[0. 0. -16.58]

Ciertamente este vector no coincide con el momento angular total referido al origen que habíamos calculado en el Alg. (5.8); pero esto es natural puesto que no hemos sumado el momento angular del centro de masa que calculamos antes:

```
#Momento angular total
L=L_CM+Lp
```

Momento angular total:

[0. 0. -8.62]

Que coincide con la obtenida con el Alg. (5.8). Con esto hemos comprobado la relación expresada en la Ec. (5.45).

Energía cinética total del sistema

Una relación similar a la encontrada en la Ec. (5.45) para el momento angular, puede deducirse también para el caso de la energía cinética total K .

Usando el teorema del trabajo y energía (Teo. 5.3) puede probarse que en el caso de un sistema de partículas K es:

$$K = \frac{1}{2} \sum m_i v_i^2$$

Reemplazando en esta expresión la velocidad de cada partícula en el sistema original por su velocidad en el sistema de referencia del centro de masa, $\vec{v}_i = \vec{v}'_i + \vec{V}$ (Ec. 5.44) se obtiene:

$$K = \frac{1}{2} \sum m_i \vec{V}^2 + \vec{V} \cdot \frac{d}{dt} \left(\sum m_i \vec{r}'_i \right) + \frac{1}{2} \sum m_i \vec{v}'_i^2$$

de donde por los mismos argumentos en la deducción de la Ec. (5.45) obtenemos finalmente:

$$K = \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} \sum m_i v_i'^2, \quad (5.46)$$

es decir la **energía cinética total del sistema** es igual a la **energía cinética del centro de masa** más la **energía cinética total referida al centro de masa** (energía interna.)

De nuevo podemos verificar este resultado usando el sistema de ejemplo.

Para ello, primero calculemos la energía cinética total usando las velocidades referidas al sistema de referencia original:

(Algoritmo 5.9)

```
#Magnitud de las velocidades de las partículas
from numpy.linalg import norm
vmags=norm(vs, axis=1)

#Energía cinética individual de cada partícula
Ks=0.5*ms*vmags**2

#Energía cinética total
K=sum(Ks)
```

Energía cinética de las partículas:

[0.37 0.79 0.73]

Energía cinética total: 1.90

Ahora podemos hacerlo usando la nueva expresión:

```
#Energía cinética del centro de masa:
K_CM=0.5*M*norm(V_CM)**2

#Magnitud de las velocidades
vpmags=norm(vps, axis=1)

#Energía cinética individual de cada partícula
Kps=0.5*ms*vpmags**2

#Energía cinética en el centro de masa
Kp=Kps.sum()

#Energía total
K=K_CM+Kp
```

Energía cinética del CM: 0.5505136059795793

Energía cinética de las partículas (respecto al CM): [0.8 0.32 0.22]

Energía cinética total (respecto al CM): 1.35

Energía cinética total: 1.90

De nuevo, la energía cinética calculada con la Ec. (5.46) coincide con la obtenida en el Alg. (5.9).

5.5. Dinámica en sistemas de referencia no inerciales

Todas los postulados y teoremas que describen la dinámica de partículas y sistemas de partículas introducidos en las secciones anteriores, tienen validez, como se expuso desde el principio, en sistemas de referencia inerciales (ver Def. 5.2).

¿Cómo se modifican (si se modifican) esos postulados y teoremas si por necesidad o “construcción” es necesario describir la dinámica de una partícula o un sistema de partículas respecto de un sistema de referencia no inercial?

Suponga por ejemplo que queremos describir la dinámica del vuelo de un cohete respecto a la superficie de la Tierra. Si bien es posible pasarnos al sistema de referencia del centro del planeta (que es aproximadamente inercial), por razones prácticas es preferible, al menos al principio del movimiento, describir las cantidades cinemáticas y dinámicas del cohete respecto a la plataforma de lanzamiento o bien a la superficie alrededor de ella. Un sistema de referencia fijado así, ya no puede considerarse un sistema de referencia inercial (debido a la rotación de la Tierra).

Suponga ahora que un astronauta quiere hacer un experimento mecánico en el interior de la estación espacial internacional. Naturalmente allí, será mejor referir las cantidades cinemáticas y dinámicas a la estructura de la estación y no al centro de la tierra. De nuevo, para hacerlo deberá trabajar en un sistema de referencia no inercial.

Estos dos ejemplos sencillos muestran que si bien es más común (y mucho más conveniente en general) aplicar los postulados y teoremas de la mecánica en sistemas de referencia inerciales (donde han sido desarrollados y demostrados) habrán situaciones en las que se hace obligatorio hacerlo en sistemas de referencia no inerciales.

5.5.1. Transformación entre sistemas de referencia

En la [Sección 5.2.2](#) habíamos introducido las denominadas *transformaciones de Galileo* que son el conjunto de reglas matemáticas necesarias para convertir las cantidades cinemáticas o dinámicas $t, \vec{r}, \vec{v}, \vec{a}$, etc. medidas en un sistema de referencia inercial R , en el valor de las mismas cantidades en otro sistema de referencia inercial R' (ver [Definición 5.1](#)).

Las reglas que postulamos allí eran bastante sencillas:

$$\begin{aligned} t &= t' \\ \vec{r} &= \vec{r}' + \vec{u}t \end{aligned} \tag{5.47}$$

Para extender estas reglas al dominio de la dinámica, podemos agregar el postulado de que la masa de las partículas es también independiente del sistema de referencia en el que se la mida:

$$m = m' \tag{5.48}$$

Este postulado se basa en la idea Newtoniana de que la masa es, entre otras, una medida de la cantidad de materia contenida en un cuerpo, que no debería depender del observador que la juzgue.

Todos los postulados y teoremas de la dinámica que formulamos en este capítulo son válidos únicamente si se expresan en las cantidades cinemáticas y dinámicas que satisfacen estas transformaciones y aquellas que se derivan de ellas (como la regla de adición de velocidades y aceleraciones de las Ecs. [5.5](#) y [5.65](#)).

¿Qué pasa ahora si admitimos la posibilidad de que el sistema R' se mueva respecto a R (que seguiremos asumiendo inercial) con una velocidad $\vec{u}(t)$ que no es constante (el sistema no es inercial)?

Una generalización trivial de las transformaciones de Galileo es (ver [Figura 5.13](#)):

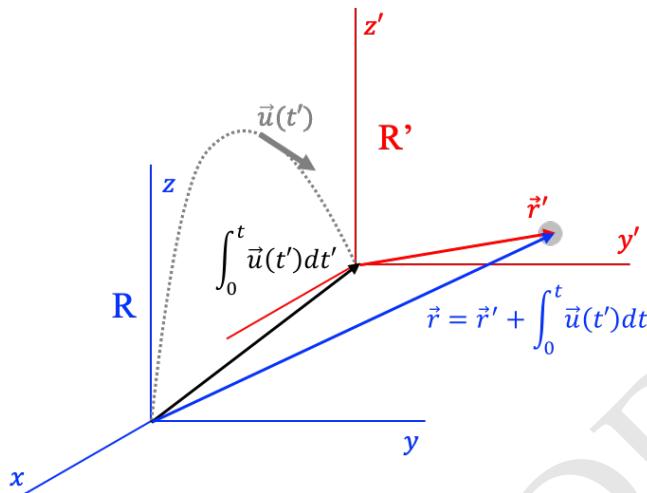


Figura 5.13: Construcción geométrica para deducir la regla de transformación de la posición \vec{r} de una partícula (círculo gris) entre un sistema de referencia inercial R y uno no inercial R' . Por construcción los orígenes de ambos sistemas coinciden en $t=0$. El origen de coordenadas de R' se mueve a lo largo de la trayectoria punteada con velocidad variable $\vec{u}(t')$.

$$\begin{aligned} t &= t' \\ \vec{r} &= \vec{r}' + \int_0^t \vec{u}(t') dt \\ m &= m' \end{aligned} \quad (5.49)$$

en la que hemos asumido que la dirección de los ejes coordenados de los sistemas se mantiene paralela a lo largo del tiempo.

Usando estas transformaciones básicas, es posible deducir las reglas de transformación para otras cantidades cinemáticas y dinámicas. Así por ejemplo:

$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{u}(t) \quad (5.50)$$

$$\vec{p}' = \vec{p} - m\vec{u}(t) \quad (5.51)$$

$$\vec{a}' = \vec{a} - \vec{\dot{u}} \quad (5.52)$$

$$\vec{F}' = \vec{F} - m\vec{\dot{u}} \quad (5.53)$$

Estas transformaciones nos permiten comprobar cómo se modifica la validez de los postulados de la dinámica y de los teoremas derivados de ellos, al pasar a un sistema de referencia no inercial.

Considere por ejemplo el caso de una partícula que se mueve libre de fuerzas aplicadas, y por tanto que tiene, en el sistema de referencia inercial R , velocidad \vec{v} (o momentum lineal \vec{p}) constantes (obedeciendo el teorema de inercia). Según la regla de transformación en la Ec. (5.50), la velocidad \vec{v}' de la partícula en el sistema no inercial R' (y por lo tanto su momentum lineal \vec{p}') ya no serán constantes: su valor dependerá de la velocidad instantánea del sistema R' respecto de R , $\vec{u}(t)$, que a su vez cambia en el tiempo. **El teorema de inercia ya no es válido en R' .** Es justamente por esto que decimos que R' es un sistema de referencia **no inercial**.

Un caso particular de esta última situación, pone de relieve los aparentemente extraños comportamientos que podríamos percibir en sistemas de referencia no inerciales. La misma partícula del párrafo anterior, dejada en reposo en R en t (y que se mantendría en reposo respecto a R en virtud del teorema de inercia), empezará a moverse con velocidad $-\vec{u}(0)$ respecto a R' sin que se aplique sobre ella ninguna fuerza.

Este tipo de comportamientos es el que explica, por ejemplo, porque una persona que no se sostiene de las barandas del Metro en el momento en el que inicia su marcha, empezará a desplazarse, sin que nada o nadie actúe sobre ella en el interior del vagón.

Así mismo, incluso en la presencia de fuerzas aplicadas, el postulado de fuerzas no será válido en el sistema de referencia R' . Según este postulado, en el sistema de referencia inercial (R) la fuerza resultante sobre una partícula es iguales a la fuerza aplicada neta:

$$\vec{\mathcal{F}} = \vec{F}$$

o lo que es lo mismo:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$$

De acuerdo a la Ec. (5.53) en el sistema de referencia no inercial:

$$\vec{\mathcal{F}}' = \vec{F} - m\dot{\vec{u}} \quad (5.54)$$

o bien

$$\vec{a}' = \frac{\vec{F}}{m} - \dot{\vec{u}}$$

Es decir, las fuerzas resultantes en el sistemas de referencia no inercial, serán iguales a las fuerzas aplicadas *más* una fuerza resultante $-m\dot{\vec{u}}$ que apunta en dirección contraria a la aceleración relativa entre los sistemas de referencia. Dado que esta fuerza resultante *nueva* no es producto de la acción de una fuerza aplicada, la llamamos convencionalmente una *fuerza ficticia*.

En el interior de la estación espacial internacional, por ejemplo, los cuerpos que flotan en el aire experimentan solo una fuerza aplicada: aquella debida a la interacción gravitacional con la Tierra (asumimos que la fuerza gravitacional de los astronautas y la estación es completamente despreciable). Esta fuerza no es despreciable y es igual a su peso medido a la altura de la estación (ver Figura 5.14)³¹.

Ahora bien, la fuerza resultante sobre los mismos cuerpos, medida en el sistema de referencia de la estación, será igual, en virtud de la Ec. 5.54, a su peso (la fuerza aplicada) más una fuerza ficticia que apunta en dirección contraria al centro de la Tierra (que es hacia donde apunta la aceleración de la estación \vec{u}) y que es en magnitud proporcional a esa misma aceleración. Dado que la aceleración de la estación es justamente la aceleración de la gravedad a esa altura, la fuerza aplicada sobre los cuerpos y la fuerza ficticia tendrán la misma magnitud.

³¹La estación espacial internacional se encuentra a apenas 400 km de altura sobre la superficie de la Tierra. Por lo tanto el peso de los cuerpos que transporta es apenas $6371^2 / (6371 + 400)^2 \approx 0,88$ veces el que experimentan en la superficie de la Tierra (6371 km es el radio promedio de la Tierra).

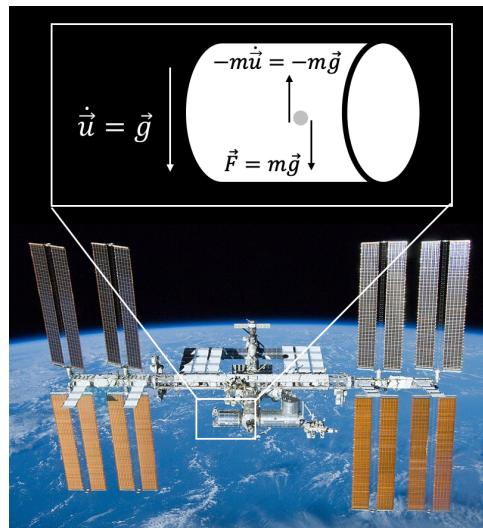


Figura 5.14: Explicación de la experiencia de ingravidez en el interior de un vehículo espacial, en este caso un módulo de la Estación Espacial Internacional. El módulo corresponde a un sistema de referencia no inercial con una aceleración $\dot{\vec{u}}$ igual a la aceleración de la gravedad \vec{g} a la altura de la estación. Una partícula (círculo gris) experimenta una fuerza aplicada $\vec{F} = m\vec{g}$ igual a su peso a la altura de la estación. Sin embargo, por encontrarse en un sistema de referencia no inercial a esa fuerza debe sumarse la fuerza ficticia $-m\dot{\vec{u}}$ que es en magnitud idéntica al peso. Crédito: NASA/Tripulación de la misión STS-132.

Como resultado, en el sistema de referencia de la estación los cuerpos no experimentarán ninguna fuerza resultante y si se colocan en reposo, permanecerán así, incluso si nada los sostiene. Esta es justamente la razón de la ilusión de ingravidez que se percibe dentro de la estación y otros vehículos espaciales que orbitan nuestro planeta.

5.5.2. Sistemas de referencia rotantes

En los sistemas de referencia acelerados descritos en el apartado anterior la dirección de los ejes coordenados no cambia en el tiempo con respecto al sistema de referencia inercial. La rotación de los ejes, es una segunda forma de producir un sistema de referencia no inercial.

Si suponemos, por simplicidad, que el origen de los sistemas R y R' coinciden durante todo el tiempo, pero los ejes de coordenadas $\hat{e}'_x, \hat{e}'_y, \hat{e}'_z$ rotan respecto a un eje arbitrario, la regla de transformación entre las variables cinemáticas y dinámicas básicas será:

$$t' = t$$

$$\vec{r}' = \vec{r}$$

$$m' = m$$

En particular, si bien los vectores \vec{r} y \vec{r}' serán *geométricamente* idénticos, sus com-

ponentes no lo serán:

$$x\hat{e}_x + y\hat{e}_y + z\hat{e}_z = x'\hat{e}'_x + y'\hat{e}'_y + z'\hat{e}'_z$$

Esta condición no es única para el vector posición \vec{r} sino que aplica para cualquier cantidad vectorial \vec{A} que definamos en el sistema:

$$A_x\hat{e}_x + A_y\hat{e}_y + A_z\hat{e}_z = A_{x'}\hat{e}'_x + A_{y'}\hat{e}'_y + A_{z'}\hat{e}'_z \quad (5.55)$$

Nótese que no hemos escrito A'_x (dando a entender que el vector \vec{A} cambia al cambiar de sistema de coordenadas) sino $A_{x'}$ para indicar que son sus componentes las que cambian.

¿Cómo se relacionan las razones de cambio de $(d\vec{A}/dt)$ y $(d\vec{A}/dt)'$ medidas en ambos sistemas de referencia?

Si deriváramos ambos lados de la Ec. (5.55) obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{dA_x}{dt}\hat{e}_x + \frac{dA_y}{dt}\hat{e}_y + \frac{dA_z}{dt}\hat{e}_z &= \frac{dA_{x'}}{dt}\hat{e}'_x + \frac{dA_{y'}}{dt}\hat{e}'_y + \frac{dA_{z'}}{dt}\hat{e}'_z + \\ &+ A_{x'}\frac{d\hat{e}'_x}{dt} + A_{y'}\frac{d\hat{e}'_y}{dt} + A_{z'}\frac{d\hat{e}'_z}{dt} \end{aligned} \quad (5.56)$$

Los vectores unitarios coordinados en el sistema rotante varían dependiendo del valor instantáneo de la velocidad angular así $\omega(t)$ (ver Figura 5.15):

$$d\hat{e}'_x = \vec{\omega} \times \hat{e}'_x dt \quad (5.57)$$

$$d\hat{e}'_y = \vec{\omega} \times \hat{e}'_y dt \quad (5.58)$$

$$d\hat{e}'_z = \vec{\omega} \times \hat{e}'_z dt \quad (5.59)$$

$$(5.60)$$

donde $\vec{\omega} \equiv \omega\hat{n}$.

Nota

No hay vectores de rotación. A pesar de que en lo que sigue usaremos la notación $\vec{\omega}$ para referirnos a la cantidad $\omega\hat{n}$, es importante resaltar el hecho que no existe en matemáticas nada que podamos llamar un *vector de rotación*.

Como señalamos en la Sección 4.1.1 los vectores geométricos forman un *espacio vectorial*, sobre cuyos elementos está definida una operación interna (la suma vectorial en este caso) que cumple una serie de condiciones matemáticas, entre ellas la comutatividad: el orden en el que se realice una suma de vectores no debería alterar el resultado de la misma.

Si definimos dos rotaciones que se producen con tasas ω_1 y ω_2 alrededor de ejes diferentes \hat{n}_1 y \hat{n}_2 y queremos determinar el efecto que

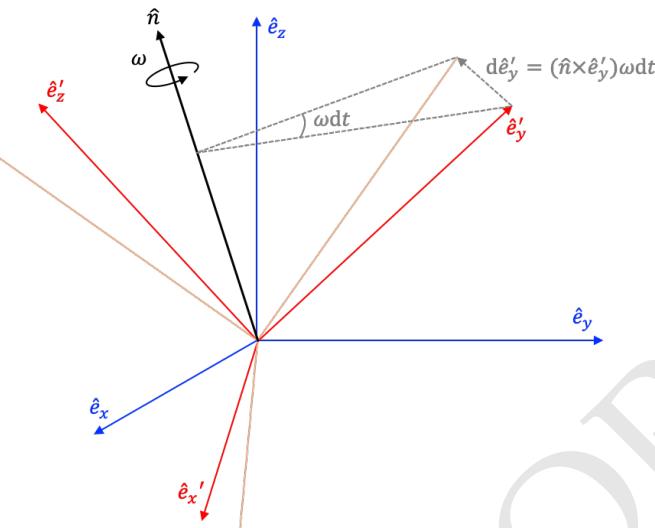


Figura 5.15: Construcción geométrica usada para calcular el cambio en la dirección de los vectores unitarios coordinados de un sistema de coordenadas cuando se produce una rotación alrededor de un eje arbitrario \hat{n} .

Nota (Cont.)

tienen en un tiempo t las dos rotaciones sobre un vector dado (por ejemplo uno de los vectores unitarios en la Figura 5.15) no es posible:

1. Definir un “vector de rotación” $\vec{\Omega} = \Omega \hat{N}$ que represente la operación resultante. Es decir $\vec{\Omega} \neq \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2$.
2. Incluso en el caso en el que, de forma ingeniosa o para un caso muy particular, pudiéramos definir dicha suma, la commutatividad no podría asegurarse de forma general: las rotaciones no son commutativas (ver Figura 5.16).

Con esto la tasa de cambio descrita por la Ec. (5.56) se puede escribir de la forma:

$$\frac{d}{dt} \vec{A} = \frac{d'}{dt} \vec{A} + \vec{\omega} \times \vec{A} \quad (5.61)$$

donde por los *operadores diferenciales* d/dt o d'/dt entenderemos aquí, aquellos que solo actúan sobre las componentes en el sistema de referencia correspondiente, pero no sobre la dirección de los ejes. Así:

$$\frac{d'}{dt} \vec{A} \equiv \frac{dA_{x'}}{dt} \hat{e}'_x + \frac{dA_{y'}}{dt} \hat{e}'_y + \frac{dA_{z'}}{dt} \hat{e}'_z$$

Por otro lado también es importante aclarar que las cantidades en el lado dere-

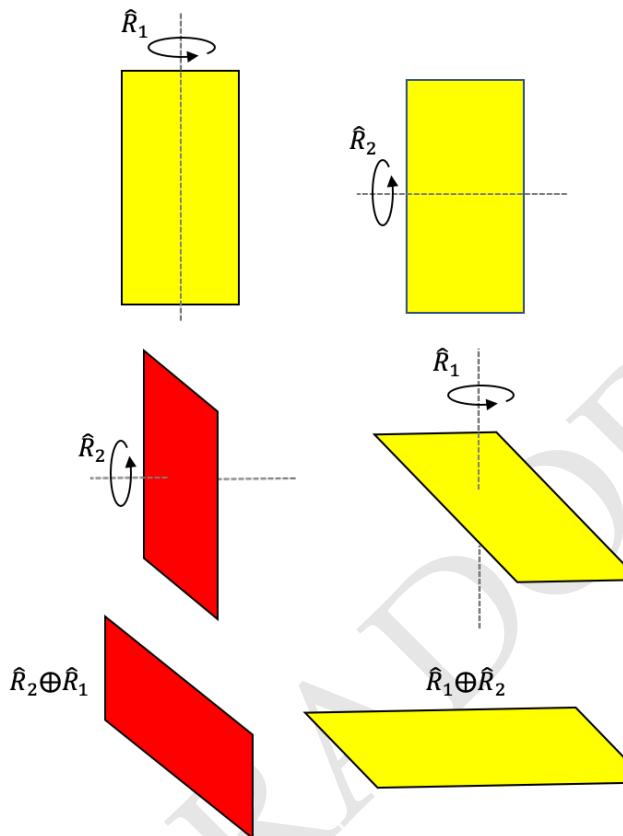


Figura 5.16: Las rotaciones, representadas aquí por \hat{R} no son operaciones commutativas. En la columna izquierda se muestra la aplicación consecutiva (“suma”) de las rotaciones \hat{R}_1 y \hat{R}_2 , que hemos representado de forma general como $\hat{R}_2 \oplus \hat{R}_1$. En la columna de la derecha se muestra la sucesión contraria de operaciones $\hat{R}_1 \oplus \hat{R}_2$ que da un resultado completamente distinto. Es por esta misma razón que en estricto no es posible definir una suma entre velocidades angulares y por lo tanto vectores de velocidad angular. La notación $\vec{\omega}$ es una licencia del lenguaje matemático usado aquí.

cho de la Ec. (5.61) deben escribirse en el sistema de coordenadas rotante, es decir:

$$\vec{\omega} \times \vec{A} = \vec{\omega} \times (A_{x'} \hat{e}'_x + A_{y'} \hat{e}'_y + A_{z'} \hat{e}'_z) \quad (5.62)$$

Dado que la Ec. (5.61) es válida para cualquier vector libre, podemos definir una regla de transformación general para la derivada con respecto al tiempo de vectores, introduciendo el operador diferencial:

$$\frac{d}{dt} = \frac{d'}{dt} + \vec{\omega} \times \quad (5.63)$$

donde se entiende que la cantidad derivada es una cantidad vectorial.

5.5.3. Adición de velocidades en sistemas rotantes

Usando estos resultados generales podemos encontrar ahora las reglas de transformación para la velocidad y la aceleración (los análogos a las Ecs. 5.50 y 5.52).

En el caso de la velocidad:

$$\vec{v} \equiv \frac{d}{dt} \vec{r} = \frac{d'}{dt} \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{r}$$

Por definición, sin embargo:

$$\vec{v}' \equiv \frac{d' \vec{r}}{dt}$$

es decir, esta cantidad corresponde a la velocidad de la partícula medida en el sistema rotante.

De otro lado $\vec{\omega} \times \vec{r}$ debe ser obligatoriamente escrito en términos de los vectores unitarios coordenados del sistema R' (ver Ec. 5.62):

$$\vec{\omega} \times \vec{r} = \vec{\omega} \times (x' \hat{e}'_x + y' \hat{e}'_y + z' \hat{e}'_z) = \vec{\omega} \times \vec{r}'$$

Con estas definiciones, la ley de “adición” de velocidades para un sistema de referencia rotante se escribe finalmente como:

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}' \quad (5.64)$$

Nota

Vectores y componentes. Es muy importante entender que la Ecuación (5.64) representa una relación entre vectores, no entre sus componentes. Es decir, esta relación implica por ejemplo que las magnitudes $|\vec{v}|$ y $|\vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}'|$ son iguales, puesto que se trata de una propiedad vectorial. Sin embargo, las componentes x en ambos sistemas de referencia no pueden compararse:

$$v_x \neq v_{x'} + (\vec{\omega} \times \vec{r}')_x$$

Las componentes de los vectores a ambos lados de la Ec. (5.64) se relacionan a través de una matriz de rotación como se explica en la Sección 4.2.9. En la Sección 5.5.5 de este mismo capítulo ilustraremos este importante punto.

5.5.4. Aceleraciones ficticias en sistemas rotantes

Para encontrar la relación entre las aceleraciones, basta aplicar un procedimiento similar al anterior:

$$\vec{a} \equiv \frac{d}{dt} \vec{v} = \frac{d'}{dt} \vec{v} + \vec{\omega} \times \vec{v}$$

sin embargo las componentes del vector \vec{v} en el sistema de ejes de R' , que son las que deben usarse en el lado derecho de la ecuación anterior, ya no obedecen reglas tan simples como las de cualquier otro vector libre, tal como el vector \vec{r} .

Estas componentes obedecen la regla más compleja expresada por la Ec. (5.64). Reemplazando las componentes de la velocidad medidas en el sistema inercial, las aceleraciones se relacionan como:

$$\vec{a} = \frac{d'}{dt}(\vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}') + \vec{\omega} \times (\vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}')$$

Derivando y reuniendo términos semejantes obtenemos:

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') + 2\vec{\omega} \times \vec{v}' + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}'$$

donde

$$\vec{a}' \equiv \frac{d'}{dt}\vec{v}' = \frac{dv_{x'}}{dt}\hat{e}_x' + \frac{dv_{y'}}{dt}\hat{e}_y' + \frac{dv_{z'}}{dt}\hat{e}_z'$$

es la aceleración instantánea que experimenta la partícula medida en el sistema rotante.

Si despejamos \vec{a}' (a la manera como lo hicimos para deducir la Ec. 5.52), obtenemos:

$$\vec{a}' = \vec{a} - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') - 2\vec{\omega} \times \vec{v}' - \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}' \quad (5.65)$$

A diferencia de lo que observamos en sistemas no inerciales de ejes fijos, donde en la dinámica emerge una sola aceleración ficticia que es antiparalela a la aceleración del sistema de referencia ($-\ddot{\vec{u}}$), en sistemas rotantes hay tres diferentes aceleraciones ficticias:

- $\vec{a}_{cen} = -\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')$. Esta aceleración apunta siempre en dirección contraria al eje de rotación (ver diagrama superior izquierdo en la Figura 5.17). Por la misma razón se conoce como **aceleración centrífuga**. En términos inerciales, la aceleración centrífuga es una manifestación de la tendencia de las partículas a mantener su dirección de movimiento (ver diagrama inferior izquierdo en la Figura 5.17). Visto desde el sistema rotante esta condición se manifiesta como una tendencia de las partículas a alejarse del eje de rotación.

- $\vec{a}_{cor} = -2\vec{\omega} \times \vec{v}'$. Esta aceleración apunta siempre en dirección perpendicular a la velocidad de la partícula (medida en el sistema rotante) y puede ser contraria o en el mismo sentido a la dirección de rotación del sistema de referencia (ver diagrama superior derecho en la Figura 5.17). Por razones históricas se conoce esta aceleración ficticia como **aceleración de Laplace** o más frecuentemente como **aceleración de Coriolis** (atención al acento final!) en honor al matemático y científico francés Gaspard-Gustave Coriolis ("Coriolis"³², ver recuerdo *Un poco de historia: Coriolis y la aceleración sin nombre*). En términos inerciales, la aceleración de Coriolis es una manifestación de la tendencia de los cuerpos a mantener su velocidad de rotación al cambiar a puntos del sistema que se mueven con velocidad diferente (ver diagrama

³²<https://forvo.com/search/Gaspard-Gustave%20Coriolis/fr/>

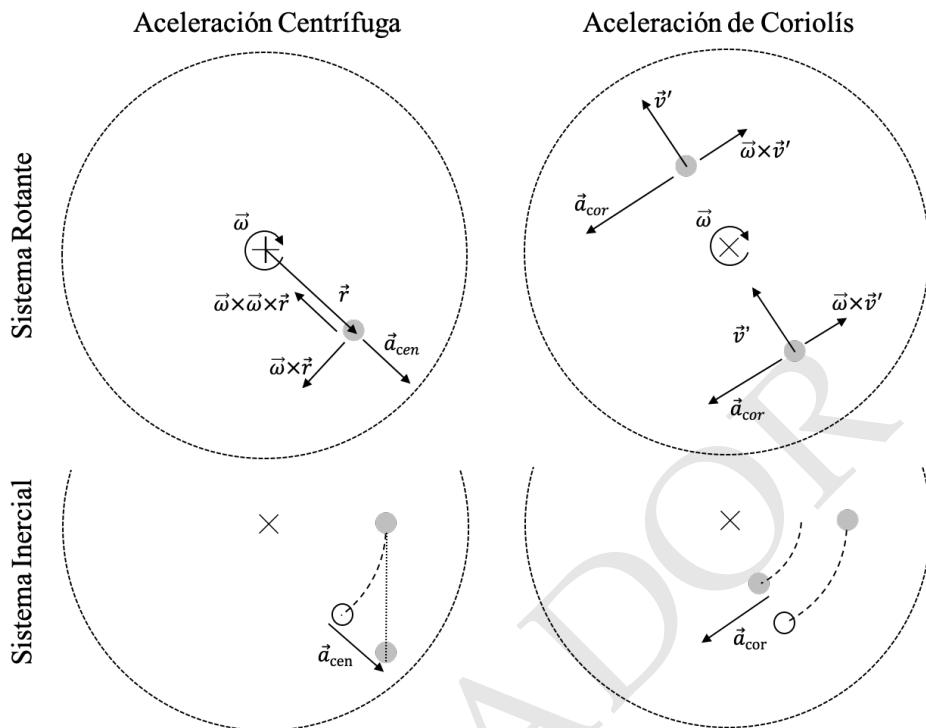


Figura 5.17: Explicación esquemática del origen y dirección de las aceleraciones centrífuga y de Coriolís.

superior derecho en la [Figura 5.17](#)). Si el cuerpo esta en reposo en el sistema rotante $\vec{v}' = \vec{0}$, no habrá ninguna aceleración de Coriolís. Si el cuerpo se mueve en dirección a puntos que rotan más lentamente (\vec{v}' apunta en dirección al eje de rotación como en la parte inferior derecho de la [Figura 5.17](#)) la partícula tiende a adelantarse. Al contrario, si la partícula se mueve a puntos del sistema que se mueven más rápidamente (\vec{v}' dirigida hacia afuera), la partícula tenderá a retrasarse.

- $\vec{a}_{\text{euler}} = -\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}'$. Esta aceleración se produce únicamente si la velocidad angular del sistema rotante cambia de magnitud. Por razones históricas se conoce como **aceleración de Euler**. En términos iniciales, la aceleración de Euler es una manifestación de la tendencia de los cuerpos a mantener la velocidad angular que traía el sistema rotante justo un instante antes. Así, si la aceleración angular aumenta, los cuerpos tenderán a retrasarse (a conservar la velocidad menor que traían) y su aceleración se producirá en dirección contraria a la dirección de rotación. Al contrario, si la aceleración angular disminuye, los cuerpos tenderán a acelerarse en la dirección de la rotación.

Un poco de historia

Coriolís y la aceleración sin nombre. La historia del descubrimiento de la que llamamos hoy la *aceleración de Coriolis* es una de las más curiosas e interesantes de la historia de la mecánica [30],[27]

Hoy sabemos que el efecto de esta aceleración sobre el movimiento de cuerpos en la superficie de una Tierra en rotación, fue descrito por primera vez en 1651 en el libro *Almagestum Novum* del astrónomo italiano **Giovanni Battista Riccioli** ("Richioli").

Con el propósito de probar que la Tierra no rotaba (Riccioli apoyaba una forma de teoría geocéntrica), el astrónomo italiano propuso el siguiente experimento mental: láncese un proyectil desde un punto en el ecuador de una Tierra que rota en dirección al norte. ¿Caerá el proyectil sobre el meridiano del lugar desde el que fue lanzado?

La respuesta ofrecida por Riccioli utiliza un razonamiento similar a aquel que aparece representado en el diagrama abajo a la derecha en la ???. Si la Tierra rota, el cañón en el ecuador se moverá (respecto a un sistema inercial externo) hacia el oriente, más rápido que cualquier punto en una latitud mayor (más cerca al eje de rotación). De este modo, al avanzar hacia el norte el proyectil irá sobre pasando (por su velocidad mayor) los puntos de la superficie que están debajo de él. Al final, la bala caerá al oriente del meridiano desde el que fue lanzado. En términos modernos, el proyectil sufrió una aceleración que va en la misma dirección de rotación de la Tierra (hacia el oriente).

Como el efecto no había sido observado hasta la fecha, Riccioli pensó que se trataba de un poderoso argumento en contra de la idea de una Tierra en rotación. Curiosamente (y sin proponérselo), miembros de la *Accademia del Cimento* en Italia, observaron pocos años después la aceleración anómala descrita por Riccioli al estudiar el movimiento de péndulos. Y es que el cuerpo suspendido en el péndulo se comporta como una bala de cañón. Si suponemos que oscila inicialmente moviéndose del ecuador hacia el norte la tendencia a desplazarse al oriente hará que el plano de oscilación cambie en el sentido de las manecillas del reloj. En las notas de la academia de la década de 1660 quedó registrado la observación sistemática de este efecto. Los académicos no pudieron explicar el fenómeno pero tampoco lograron asociarlo con la "predicción de Riccioli". No fue sino hasta 1851 cuando el mismo experimento fue repetido bajo condiciones controladas (y con el conocimiento pleno de la existencia de la aceleración anómala descrita por Riccioli) por el astrónomo francés León Foucault ("Fuco"¹⁷).

La misma aceleración análoga predicha originalmente por Riccioli fue descrita para distintas condiciones (cuerpos en caída libre, cuerpos lanzados hacia arriba, cuerpos lanzados hacia el oriente) en trabajos posteriores durante el mismo siglo por astrónomos y físicos como Giovanni Borelli (1668), Claude Dechales (1674) e incluso el mismo Isaac Newton en camino a su formulación de la teoría de gravitación universal (1680).

Una teoría rigurosa y completa de esta aceleración anómala solo llegó a ser formulada hasta 1798 por Pierre-Simon Laplace, quién la presentó como parte de su obra cumbre *Tratado de Mecánica Celeste* y en relación con su estudio del fenómeno de las mareas lunisolares. La descripción de Laplace fue tan completa que para hacer justicia deberíamos llamar a esta la **aceleración de Laplace**.

En el año 1835, el matemático y científico francés Gaspard-Gustave Coriolis, en un artículo en francés titulado "*Disertación sobre las ecuaciones de movimiento relativo de los sistemas corporales*" [17], presentó la fórmula general que dedujimos en esta

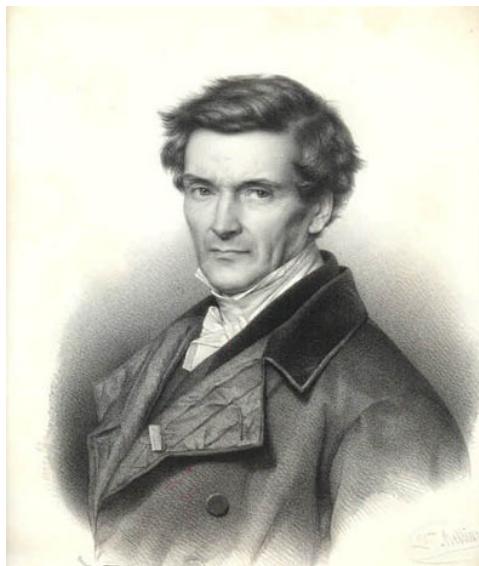


Figura 5.18: Gaspard-Gustave Coriolis (1792-1843) en un retrato de 1841. Coriolís tuvo la suerte de que una de las más importantes aceleraciones ficticias que se producen en sistemas en rotación, y que habían sido identificada y descritas antes por varios físicos desde Laplace hasta Riccioli, llevara finalmente su nombre.

Un poco de historia (Cont.)

sección para \vec{a}_{cor} y a la que llamo “fuerza centrífuga compuesta”. El objetivo de Corilís era estudiar las distintas aceleraciones ficticias que se producen en los fluidos en sistemas mecánicos en rotación (tales como las ruedas de molino movidas por agua).

Si bien el resultado de Corilís no atrajo mucho la atención por al menos cuatro décadas, no fue sino hasta 1879 cuando algunos físicos, estudiando problemas mecánicos locales, incluyendo el péndulo de Foucault, empezaron a identificar esta aceleración con el nombre de Coriolís. Ya para el año 1912, y en el contexto de trabajos relacionados con las fuerzas dentro de fluidos en movimiento, la aceleración era conocida en la literatura como **aceleración de Coriolís** o **Fuerza de Coriolís**.

^ahttps://forvo.com/word/1%C3%A9on_foucault/#fr

5.5.5. Un ejemplo numérico

Para poner todo lo visto en las secciones anteriores a prueba, construyamos primero un sistema mecánico cuya solución podamos resolver numéricamente y estudiar desde distintos sistemas de coordenadas.

Supongamos por ejemplo una partícula cuyo estado cinemático arbitrario en un momento inicial dado es $\vec{r}_0 : (1, 0, 0)$ y $\vec{v}_0 : (0, 1, 0)$ (en unidades arbitrarias).

Supongamos también que la partícula está sometida a una aceleración $\vec{a}(t, \vec{r}, \vec{v})$ (campo de aceleración) que depende en general de la posición y la velocidad.

Tomemos el caso de interés para nuestro libro, de una aceleración (en el sistema inercial) del tipo de aceleración gravitacional:

$$\vec{a} = -k \frac{\vec{r}}{r^{n+1}}$$

donde k es una constante y n un exponente arbitrario ($n = 2$ para el caso de la aceleración de la gravedad).

Podemos construir una rutina que implementa este campo de aceleraciones (o modificarla para ver el efecto):

```
def a_inercial(t,r,v,parametros):
    from numpy.linalg import norm
    k=parametros["k"]
    n=parametros["n"]
    a=-k*r/norm(r)**(n+1)
    return a
```

Usando los métodos vistos en la [Sección 5.2.6](#) podemos resolver la ecuación de movimiento en el sistema de referencia inercial. Para ello debemos escribir primero la rutina que implementa la ecuación de movimiento linearizada (como vimos en el [Sección 5.1](#)):

```
def edm_sistema_general(Y,t,aceleracion,parametros):
    from numpy import zeros
    dYdt=zeros(6)

    dYdt[:3]=Y[3:]
    dYdt[3:]=aceleracion(t,Y[:3],Y[3:],parametros)

    return dYdt
```

La solución numérica a la ecuación de movimiento se obtiene con este código:

```
#Condiciones iniciales
from numpy import array,concatenate
ro_ine=array([1.0,0.0,0.0])
vo_ine=array([0.0,0.5,0.0])
Y0s=concatenate((ro_ine,vo_ine))

#Parametros
parametros=dict(k=1,n=2,omega0=0.3)

#Tiempos para la integración
from numpy import linspace
Nt=1000
ts=linspace(0,10,Nt)

#Solución numérica
from scipy.integrate import odeint
Ys=odeint(edm_sistema_general,Y0s,ts,args=(a_inercial,parametros))
```

Un gráfico de la solución en el plano $x - y$ (del sistema inercial) sería:

(Algoritmo 5.10)

```
import matplotlib.pyplot as plt
fig=plt.figure(figsize=(5,5));
ax=fig.gca()
ax.plot(Ys[:,0],Ys[:,1], 'k-');
from pymcel.plot import fija_ejes_proporcionales
fija_ejes_proporcionales(ax,Ys[:,2],ycm=0);
```

ver Figura 5.19

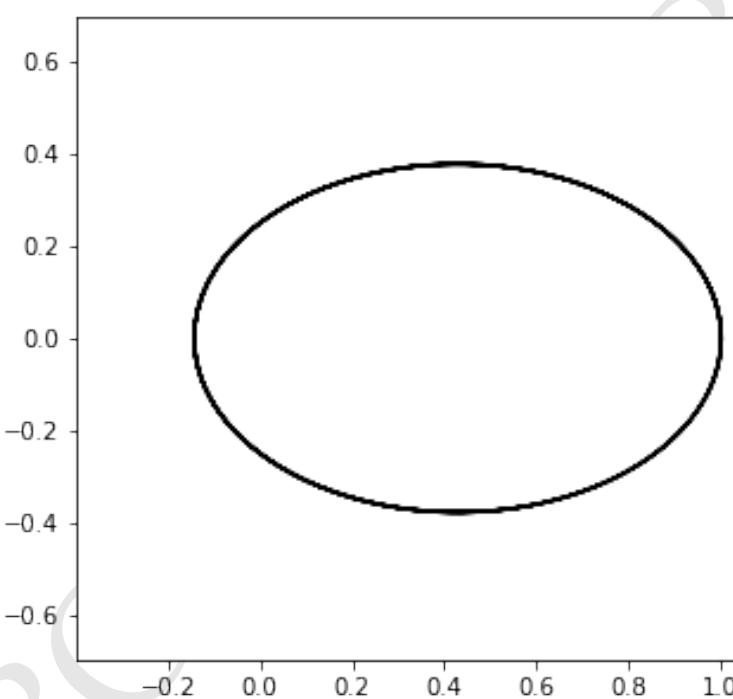


Figura 5.19: Figura correspondiente al código 5.10.

Convertamos primero todas las componentes de los vectores posición y velocidad de la partícula al sistema de coordenadas rotante, aplicando para ello una matriz de rotación (a la manera como se definió en la [Sección 4.2.9](#)) en un ángulo igual al que han rotado los ejes en el tiempo t , esto es $\theta = \omega_0 t$:

$$R = \begin{pmatrix} \cos(\omega_0 t) & \sin(\omega_0 t) & 0 \\ -\sin(\omega_0 t) & \cos(\omega_0 t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La aplicación de esta rotación a todas las posiciones y velocidades se puede realizar con este código:

```

#Velocidad angular
from numpy import array
omega0=parametros["omega0"]
omega_vec=array([0,0,omega0])

#Extraemos las posiciones del vector solución
rs_ine=Ys[:, :3]
vs_ine=Ys[:, 3:]

#Aquí almacenaremos las posiciones en el sistema rotante
from numpy import zeros_like
rs_rot=zeros_like(rs_ine)

#Aquí realizamos las rotaciones
for i in range(Nt):

    #Matriz de rotación
    from spiceypy import rotate
    R=rotate(omega0*ts[i], 3)

    #Rotación del vector posición y el vector velocidad
    from spiceypy import mxv
    rs_rot[i]=mxv(R, rs_ine[i])

```

Un gráfico de la posición en el sistema rotante se vería así:

(Algoritmo 5.11)

```

import matplotlib.pyplot as plt
fig=plt.figure(figsize=(5,5));
ax=fig.gca()
ax.plot(rs_rot[:, 0], rs_rot[:, 1], 'k-');
from pymcel.plot import fija_ejes_proporcionales
fija_ejes_proporcionales(ax, rs_rot);

```

ver Figura 5.20

Como es de esperarse la precesión de la trayectoria en el sentido de las manecillas del reloj, es debida a que los ejes del sistema no inercial rotan en la dirección opuesta. En el sistema de referencia no inercial, el movimiento en realidad es el producto de la acción de nuevas aceleraciones.

Calculemos ahora otras cantidades cinemáticas en el movimiento de la partícula, tal y como son medida en el sistema de referencia rotante. Por ejemplo la velocidad. Para ello usemos la definición misma de velocidad media, $\bar{v}' \approx \Delta \vec{r}' / \Delta t$:

```

vs_rot_num=zeros_like(rs_rot)
for i in range(1, Nt):
    vs_rot_num[i]=(rs_rot[i]-rs_rot[i-1])/(ts[i]-ts[i-1])

```

Velocidad en el sistema rotante (numérica):

```

[[ -0.08  0.2 ]
 [ -0.16  0.21]]

```

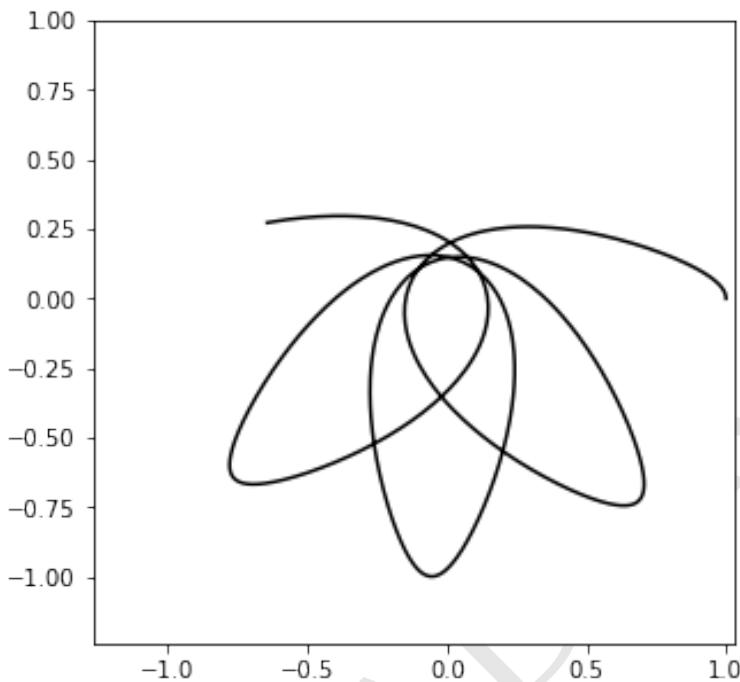


Figura 5.20: Figura correspondiente al código 5.11.

```

[-0.24  0.21]
[-0.33  0.22]
[-0.42  0.23]
[-0.53  0.25]
[-0.65  0.26]
[-0.79  0.27]
[-0.96  0.26]]
```

Comparemos la velocidad calculada de esta manera y aquella que obtenemos con la relación teórica expresada por la Ec. (5.64):

```

vs_rot_teo=zeros_like(rs_rot)
for i in range(1,Nt):
    from spiceypy import mxv,vcrss
    R=rotate(omega0*ts[i],3)
    vs_rot_teo[i]=mxv(R,vs_ine[i]-vcrss(omega_vec,rs_ine[i]))
```

Velocidad en el sistema rotante (teórica):

```

[[-0.08  0.2 ]
 [-0.16  0.21]
 [-0.24  0.21]
 [-0.33  0.22]
 [-0.43  0.23]
 [-0.53  0.25]]
```

```
[[-0.65  0.26]
 [-0.79  0.27]
 [-0.97  0.26]]
```

Que coincide (dentro de los errores numéricos) con la velocidad calculada con el procedimiento aproximado. Esta es pues, una manera de comprobar la validez de la Ec. (5.64) y al mismo tiempo reconocer que su uso no es enteramente trivial.

Comparemos ahora las aceleraciones calculadas numéricamente y de acuerdo con lo esperado por la Ec. (5.65):

```
as_rot_num=zeros_like(rs_rot)
as_rot_teo=zeros_like(rs_rot)

for i in range(1,Nt):
    from spiceypy import mxv,vcrss
    R=rotate(omega0*ts[i],3)

    #Aceleración numérica
    as_rot_num[i]=(vs_rot_num[i]-vs_rot_num[i-1])/(ts[i]-ts[i-1])

    #Aceleración inercial (en el sistema inercial de referencia)
    a_ine=a_inercial(ts[i],rs_ine[i],vs_ine[i],parametros)

    #Aceleración centrífuga (en el sistema inercial de referencia)
    acen_ine=-vcrss(omega_vec,vcrss(omega_vec,rs_ine[i]))

    #Aceleración de Coriolis (en el sistema inercial de referencia)
    acor_ine=-2*vcrss(omega_vec,vs_ine[i])

    #Aceleración en el sistema rotante
    as_rot_teo[i]=mxv(R,a_ine+acen_ine+acor_ine)
```

Aceleracion en el sistema rotante (numérica):

```
[[ -0.8   0.03]
 [ -0.82  0.05]
 [ -0.85  0.08]
 [ -0.91  0.1 ]
 [ -0.99  0.12]
 [ -1.1   0.13]
 [ -1.27  0.11]
 [ -1.51  0.05]
 [ -1.89 -0.09]]
```

Aceleracion en el sistema rotante (teórica):

```
[[ -0.62  0.03]
 [ -0.64  0.06]
 [ -0.68  0.09]
 [ -0.74  0.12]
 [ -0.83  0.14]
 [ -0.96  0.15]
 [ -1.14  0.14]
 [ -1.41  0.08]
 [ -1.83 -0.08]]
```

Con estos elementos a la mano, podemos ahora probar resolver las ecuaciones de movimiento de la partícula, pero en el sistema rotante, y comparar el resultado con el obtenido en la [Figura 5.20](#). Para ello lo único que tenemos que hacer es escribir una rutina que nos de las componentes del campo de aceleración $\vec{a}(\vec{r}, \vec{v})$ pero en el sistema rotante:

```
def a_rotante(t,r,v,parametros):

    omega0=parametros["omega0"]

    from spiceypy import rotate, mxv, vcrss, invert
    R=rotate(omega0*t,3)

    #Primero convierte r,v al sistema inercial
    r_ine=mxv(invert(R),r)
    v_ine=mxv(invert(R),v)

    #Calcula la aceleración en el sistema inercial
    ainercial=a_inercial(t,r_ine,v_ine,parametros)

    #Rota la aceleración inercial a los ejes rotantes
    ainercial_rot=mxv(R,ainercial)

    #Calcular la aceleración en el sistema rotante
    acen_rot=-vcrss(omega_vec,vcrss(omega_vec,r))
    acor_rot=-2*vcrss(omega_vec,v)
    a_rot=ainercial_rot+acen_rot+acor_rot
    return a_rot
```

La solución a la ecuación diferencial se consigue de formaanáloga a cómo lo hicimos en el caso del sistema inercial:

(Algoritmo 5.12)

```
#Convertimos las condiciones iniciales, al sistema rotante
from spiceypy import rotate,mxv
ro_rot=ro_ine
R=rotate(0.0,3)
vo_rot=mxv(R,vo_ine-vcrss(omega_vec,ro_ine))

#Condiciones iniciales
from numpy import concatenate
Yos_rot=concatenate((ro_rot,vo_rot))

#Tiempos para la integración
from numpy import linspace
Nt=1000
ts=linspace(0,10,Nt)

#Solución numérica
from scipy.integrate import odeint
Ys_rot=odeint(edm_sistema_general,Yos_rot,ts,args=(a_rotante,parametros))
```

```
#Gráfico
import matplotlib.pyplot as plt
fig=plt.figure(figsize=(5,5));
ax=fig.gca()
ax.plot(Ys_rot[:,0],Ys_rot[:,1],'k-');
from pymcel.plot import fija_ejes_proporcionales
fija_ejes_proporcionales(ax,Ys_rot[:,2]);
```

ver Figura 5.21

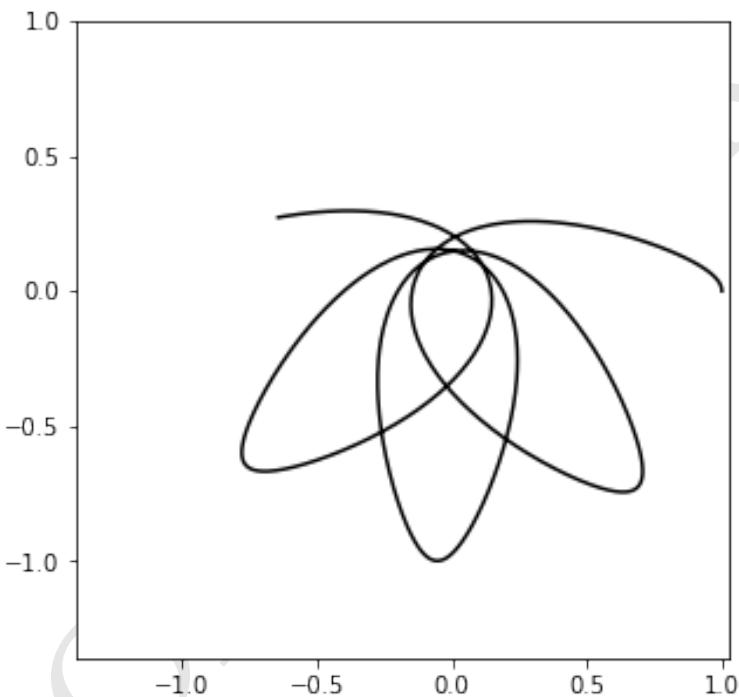


Figura 5.21: Figura correspondiente al código 5.12.

Busque las figuras interactivas y las animaciones incluídas en el sitio en línea del libro³³.

³³http://seap-udea.org/MecanicaCeleste_Zuluaga

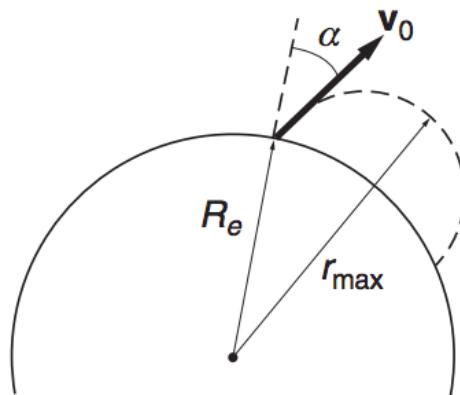


Figura 5.22: Geometría del lanzamiento de un proyectil desde la superficie de una Tierra en rotación.

5.6. Problemas seleccionados

1. Leyes de conservación.

- Demuestre que si la fuerza externa sobre un sistema de partículas es 0, entonces el momentum total del sistema se conserva.
- Demuestre que si el torque externo sobre un sistema de partículas es 0, entonces el momentum angular total del sistema se conserva.

1. Solución.

Está literalmente en las notas, en la sección **Dinámica de un sistema de partículas**.

- Lanzamiento de un proyectil.** Un proyectil de masa m es disparado desde la superficie de la Tierra bajo un ángulo α desde la vertical como se muestra en la figura. La velocidad inicial v_0 es igual a $\sqrt{GM_e/R_e}$, donde M_e es la masa de la Tierra y R_e es su radio. ¿Qué tan alto sube el proyectil? Desprecie el aire resistencia y la rotación de la Tierra. (Ayuda: determine qué cantidades se conservan —explique claramente porqué!— y aplique las leyes de conservación de dichas cantidades. En algún momento de su procedimiento es posible que encuentre dos posibles valores matemáticos para r_{max} ; los dos parecen físicamente aceptables, así que explique claramente porqué solo debe escoger uno y en qué consiste el otro.)

2. Solución

Supongamos inicialmente a la Tierra como un sistema de referencia inercial (su masa es tan grande en comparación con la del proyectil, que

prácticamente no se mueve con el lanzamiento de éste). Ahora, como la única fuerza que actúa sobre el proyectil es la fuerza gravitacional que le hace la Tierra, que es conservativa, entonces la energía mecánica del proyectil se conserva y podemos decir que es igual en el momento del lanzamiento que en el punto a r_{max} :

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{GmM_e}{R_e} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GmM_e}{r_{max}},$$

donde m es la masa del proyectil y v es su rapidez en r_{max} . Dado que $v_0^2 = GM_e/R_e$, la anterior ecuación se puede simplificar a

$$v^2 = GM_e \left(\frac{2}{r_{max}} - \frac{1}{R_e} \right).$$

Ahora, dado que la fuerza gravitacional que le hace la Tierra al proyectil es central, no realiza ningún torque sobre éste, de forma que su momento angular es constante durante la trayectoria y, por lo tanto, igual en los mismos dos puntos escogidos anteriormente:

$$mR_ev_0 \sin \alpha = mr_{max}v \sin(\pi/2).$$

Igualando ambas ecuaciones, se obtiene la ecuación cuadrática para r_{max} :

$$r_{max}^2 - 2R_e r_{max} + R_e^2 \sin^2 \alpha = 0,$$

de forma que se obtienen las soluciones

$$r_{max} = R_e(1 \pm \cos \alpha).$$

Ambas soluciones son positivas, por lo que parecen físicamente aceptables. Sin embargo, la solución $r_{max} = R_e(1 - \cos \alpha) < R_e$, por lo que no es una solución de nuestro problema. Esta solución indica que, si toda la masa de la Tierra estuviera reunida en el centro de la Tierra, habría otro punto en el cual la velocidad del proyectil sería perpendicular a su radio vector. Este punto no correspondería al r_{max} buscado, sino al punto más cercano al centro de la Tierra, algo así como a r_{min} . Por lo tanto, la respuesta a nuestro problema es

$$r_{max} = R_e(1 + \cos \alpha).$$

3. **Péndulo de Foucault.** Considere un péndulo de masa m que se balancea con frecuencia $\gamma = \sqrt{g/l}$, donde l es la longitud del péndulo. Demuestre que el plano en el que se mueve el péndulo gira en dirección de las manecillas del reloj y tarda un tiempo

$$T = \frac{2\pi}{\Omega \sin \phi}$$

en dar una vuelta, donde Ω es la rapidez angular de rotación de la Tierra y ϕ la latitud del lugar en donde está el péndulo. ¿Cuánto tarda el plano del péndulo en dar una vuelta en el Polo Norte? ¿En París? ¿En Medellín? ¿Y en el Ecuador?

3. Solución

Está literalmente en la sección de discusión del artículo entregado.

4. **¡Se mueve!** Un cuerpo se lanza verticalmente hacia arriba con una velocidad v_0 . Demuestre que, debido a la fuerza de coriolis, el cuerpo caerá en un punto desplazado hacia el oeste por una distancia igual a

$$\Delta x = \frac{4}{3} \Omega \cos \phi \frac{v_0^3}{g^2},$$

siendo Ω el modulo de la velocidad angular de la Tierra (asúmala constante), ϕ la latitud del lugar donde se lanzó el móvil y g la aceleración debida a la gravedad. Determine Δx si el cuerpo se lanza a $v_0 = 100$ m/s desde Medellín. (Ayuda: en primer lugar, suponga que, a medida que el cuerpo está en el aire, la única componente de la velocidad que afecta a la aceleración de coriolis es la componente radial. ¿Cómo varía dicha componente en el tiempo si g es constante? Teniendo esto en cuenta, solo basta integrar la aceleración de Coriolis dos veces en el tiempo para obtener la respuesta.)

4. Solución

Recordemos que la aceleración de coriolis \vec{a}_{cori} viene dada por la expresión $\vec{a}_{cori} = -2\vec{\Omega} \times \vec{v}'$. Es claro que inicialmente esta aceleración apuntará hacia el oeste, pero a medida que el cuerpo obtiene una componente de velocidad en esa dirección, la aceleración apuntará hacia el noroeste. Para resolver este problema, supongamos que a medida que el cuerpo está en el aire, la única componente que afecta a la aceleración de coriolis es la componente radial, la cual varía en el tiempo de la forma $v(t) = v_0 - gt$, si g es constante. Así, la magnitud de la aceleración de coriolis a_{cori} estará dada por

$$a_{cori} = 2\Omega v(t) \sin(90^\circ - \phi) = 2\Omega v(t) \cos \phi$$

y la «velocidad de coriolis» (componente de la velocidad hacia el oeste) viene dada por

$$v_{cori}(t) = \int_0^t a_{cori}(t') dt' = 2\Omega \cos \phi \int_0^t (v_0 - gt') dt' = 2\Omega \cos \phi \left(v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \right)$$

De nuevo, considerando solo el movimiento radial y g constante, sabemos que le tiempo que tarda el cuerpo en subir a su altura máxima $h = v_0^2/2g$ y volver a bajar es $T = 2v_0/g$. Así, el desplazamiento en dirección hacia el oeste viene dado por

$$\Delta x = \int_0^T v_{cori}(t) dt = 2\Omega \cos \phi \int_0^T \left(v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \right) dt = 2\Omega \cos \phi \left(\frac{1}{2} v_0 T^2 - \frac{1}{6} g T^3 \right) = 2\Omega \cos \phi \left(\frac{1}{2} v_0 \left(\frac{2v_0}{g} \right)^2 - \frac{1}{6} g \left(\frac{2v_0}{g} \right)^3 \right) = \frac{4}{3} v_0^2 \sin \phi$$

En Medellín, donde $\phi = 6,217^\circ$, si se lanza un cuerpo a $v_0 = 100$ m/s directamente hacia arriba, cuando caiga lo hará desplazado aproximadamente $\Delta x = 1$ metro hacia el oeste.

5. **Fuerza sobre un bebé.** Estime la razón entre la fuerza que la estrella más cercana al Sol le hace a un bebé que se encuentra en las manos de una doctora y la fuerza que la doctora le hace al mismo bebé.

5. Solución.

```
#Constantes
G=6.67e-11
msol=1.98e30 #kg
aluz=365.25*86400*3e8 #m

#Datos proxima
mproxima=0.1*msol #kg
dproxima=4.3*aluz

#Datos doctora
mdoctora=60 #kg
ddoctora=1 #m

mbebbe=4 #kg

Fdoctorabebe=G*mdoctora*mbebbe/ddoctora**2
print("Fuerza de la doctora:",Fdoctorabebe)

Fproximabebe=G*mproxima*mbebbe/dproxima**2
print("Fuerza Proxima Cen:",Fproximabebe)

print("Fuerza doctora / Fuerza proxima = ",Fdoctorabebe/Fproximabebe)
```

Fuerza de la doctora: 1.6008e-08

Fuerza Proxima Cen: 3.1875988446098906e-14

Fuerza doctora / Fuerza proxima = 502196.1915649745

- 6. Péndulo simple.** La ecuación diferencial para el ángulo θ que forma un péndulo con la vertical sobre el cual también actúa la fricción del aire es de la forma

$$\ddot{\theta}(t) + b\dot{\theta}(t) + c \sin \theta(t) = 0,$$

donde b y c son constantes positivas. Escriba un código que solucione esta ecuación diferencial y proporcione en una misma gráfica las soluciones para $\theta(t)$ y $\dot{\theta}(t)$.

6. Solución.

```
#Ecuaciones de movimiento linearizadas
def EoM_Pendulo(y,t,b,c):
    q=y[0]
    qd=y[1]

    dqdt=qd
    dqddt=-b*qd-c*np.sin(q)

    return [dqdt,dqddt]
```

```
import numpy as np
GRADOS=np.pi/180
#Condiciones iniciales
b=0.2
c=1.0
y=[30*GRADOS,0]

Nt=1000
ts=np.linspace(0,20.0,Nt)
```

```
#Solución
from scipy.integrate import odeint
solucion=odeint(EoM_Pendulo,y,ts,args=(b,c))
```

```
%matplotlib inline
```

(Algoritmo 5.13)

```
#Graficas
import matplotlib.pyplot as plt
fig=plt.figure()
```

```
axq=fig.add_subplot(211)
axqd=fig.add_subplot(212,sharex=axq)

axq.plot(ts,solucion[:,0])
axqd.plot(ts,solucion[:,1])

axq.set_ylabel(r"\theta")
axqd.set_ylabel(r"\dot{\theta}")
axqd.set_xlabel(r"t");
```

ver Figura 5.23

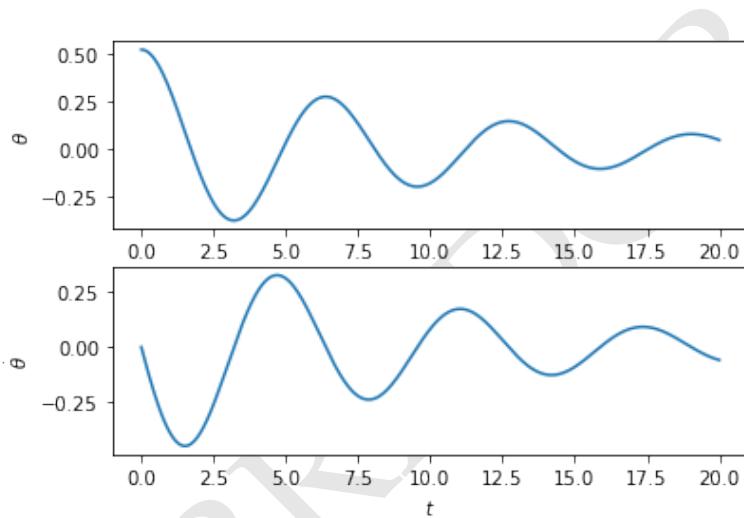


Figura 5.23: Figura correspondiente al código 5.13.

Capítulo 6

El Problema de los N cuerpos

Resumen

En este capítulo abordaremos el que podría considerarse el problema central de la mecánica celeste: predecir la evolución futura de un sistema de cuerpos que se atraen gravitacionalmente (los planetas del sistema solar, las estrellas de un cúmulo globular o las galaxias de un cúmulo galáctico). A este problema se lo conoce históricamente como el *problema de los N cuerpos*. Formularemos física y matemáticamente el problema general, estudiaremos a continuación su “solución” aproximada usando algoritmos numéricos y finalmente exploraremos algunas de sus propiedades matemáticas más generales. Para todo ello, nos valdremos de los principios y leyes de la mecánica newtoniana y de su aplicación usando fuerzas, cálculo vectorial y geometría (un enfoque que llamaremos en lo sucesivo *formalismo vectorial* o *formalismo geométrico* de la mecánica celeste). Este capítulo sentará las bases numéricas y teóricas de los capítulos posteriores.

6.1. Formulación del problema

6.1.1. Motivación

El problema de los N cuerpos es uno de los más importantes problemas de la Física y, posiblemente, el primer problema de física teórica que se formuló en la historia de esta disciplina.

Cuando Newton desarrolló su teoría mecánica con el propósito de describir el movimiento de los cuerpos del Sistema Solar, era claro que en el sistema existían cuerpos que dominaban el movimiento de otros, sin verse significativamente afectados por ellos.

Así por ejemplo, el Sol *domina* el movimiento de la Tierra, Júpiter por su lado *domina* el movimiento de sus lunas, mientras que Saturno lo hace para el movimiento de las partículas que componen sus anillos.

Cuando un cuerpo *domina* el movimiento de muchos otros cuerpos *ligeros* (el

Sol y los asteroides, Júpiter y sus Lunas, etc.) predecir los movimientos en el sistema es relativamente sencillo: la fuerza que ejercé el cuerpo *principal* sobre cada cuerpo pequeño se puede considerar independiente de la posición o velocidad de todos los demás. En este caso, la solución al problema se obtiene resolviendo, independientemente, la ecuación de movimiento de cada uno de los cuerpos en el sistema (como veremos en el ??).

Al estudiar, sin embargo, la dinámica de algunos sistemas gravitacionales en el Universo en los que no existe necesariamente un cuerpo dominante, tales como un cúmulo de estrellas o galaxias, el sistema formado por el Sol y los planetas (aunque el Sol es 1000 veces más masivo que el planeta más grande, al calcular de forma muy precisa la posición de los planetas para hacer observaciones o enviar naves espaciales, es necesario considerarlo un cuerpo más en el sistema), el sistema formado por Plutón y sus satélites (especialmente Caronte), etc., se hace claro que la dinámica de estos sistemas es mucho más compleja que aquella que se predice usando la aproximación mencionada en el párrafo anterior.

Cuando se admite que en un sistema de muchas partículas, la posición y velocidad de todas ellas debe considerarse para obtener una descripción correcta de la dinámica del sistema, decimos que nos enfrentamos al **problema de los N cuerpos**

³⁴

6.1.2. Enunciado físico y matemático

Definición 6.1

Problema de los N cuerpos. “Dado un sistema con un número arbitrario de partículas puntuales que se atraen mutuamente obedeciendo [los postulados mecánicos] de Newton, encontrar, bajo la suposición de que ninguna de esas partículas colisiona, una representación de las coordenadas de cada partícula como una serie de una variable que sea una función conocida del tiempo, tal que para todos los valores de la variable, la serie converga uniformemente.” ^a

^aTomado literalmente del prefacio del editor en [42], que a su vez reproduce el texto del concurso organizado por el rey de Suecia Oscar II en 1889 (ver el recuadro *Un poco de historia* en esta sección).

Esta formulación del problema, que tiene un marcado estilo matemático, puede matizarse con algunos comentarios físicos:

- Asumimos que en un momento dado del tiempo t_0 , las posiciones y velocidades de todas las partículas (condiciones iniciales) son conocidas $\{\vec{r}_i(t_0), \dot{\vec{r}}_i(t_0)\}_N$ (ver Figura 6.1.) Adicionalmente suponemos que las posiciones de dos o más partículas no coinciden completamente en el tiempo inicial t_0 . El problema de los N cuerpos consiste entonces en encontrar las posiciones y velocidades de todas las partículas en un instante futuro de tiempo t , es decir encontrar $\{\vec{r}_i(t), \dot{\vec{r}}_i(t)\}_N$.

³⁴En otras áreas de la física, a este problema se lo conoce también como el **problema de muchos cuerpos** y en general no se restringe únicamente a describir el movimiento del sistema (que es propio de la *física clásica*), sino también, por ejemplo, su estado cuántico y posible evolución en el tiempo.

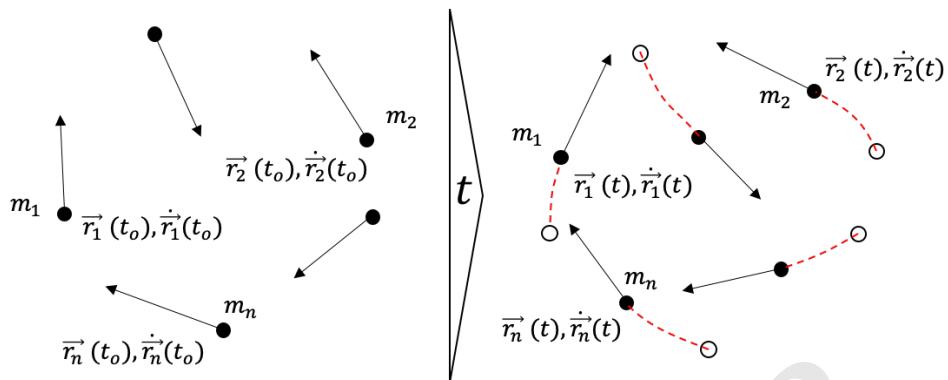


Figura 6.1: El problema de los N cuerpos: dadas las condiciones iniciales de un conjunto de N partículas puntuales, predecir la posición y velocidad de las partículas en cualquier instante futuro.

- Al decir que la solución puede, en general, expresarse como una serie de una variable dependiente del tiempo (no necesariamente el tiempo mismo), el enunciado admitió que no es necesario que las posiciones y velocidades deban expresarse en la forma de funciones analíticas (p.e. polinomios, funciones trigonométricas, función logarítmica o exponencial, etc.) Es claro que, al menos para propósitos del cálculo aproximado de la solución, tener una serie convergente puede ser tan útil como tener una solución analítica (aunque naturalmente no es lo mismo, especialmente si la serie converge muy lentamente como veremos más adelante.)
- La convergencia uniforme es una condición matemática rigurosa, aplicada a las sucesiones y series, que implica, en pocas palabras que las posiciones y velocidades calculadas con la serie sean tan cercanas como se deseé a las posiciones y velocidades reales, sin importar el tiempo en el que se calculen.
- Como lo admite implícitamente el enunciado, no se espera que sea posible predecir el estado del sistema en cualquier instante futuro. En el caso, por ejemplo, en el que las condiciones iniciales conduzcan a una colisión, es decir, una situación en la que al menos dos partículas en el sistema podrían situarse a una distancia nula una de otra, se produciría una *singularidad* matemática en el sistema (fuerzas infinitas). Aún en casos en los que se produzcan colisiones, se espera que sea posible predecir la evolución del sistema entre el tiempo inicial y el tiempo de la primera colisión.

Matemáticamente, el problema de los N cuerpos es equivalente la solución de las e.d.m. de todas las partículas (Ecs. 5.37):

$$\left\{ \ddot{\vec{r}}_i = \frac{1}{m_i} \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij} \right\}_N ,$$

donde no sobra recordar que según las convenciones usadas aquí, \vec{F}_{ij} es la fuerza ejercida sobre la partícula i por la partícula j .

Como esta implícito aquí, asumiremos que no existe ninguna fuerza externas sobre las partículas del sistema, p.e. fricción con un medio, interacción con un campo externo, etc.

De acuerdo a la formulación del problema presentada en la Definición 6.1, asumimos que la dinámica es estrictamente newtoniana, lo que incluye suponer que la única interacción a distancia entre las partículas es la interacción gravitacional newtoniana (ver Pos. ??, Ec. 5.26):

$$\vec{F}_{ij} = -\frac{Gm_i m_j}{r_{ij}^3} \vec{r}_{ij}.$$

donde tampoco sobra recordar que en lo sucesivo el vector relativo $\vec{r}_{ij} \equiv \vec{r}_i - \vec{r}_j$ apunta en la dirección que va de la partícula que produce la fuerza (partícula j) hacia la partícula que la experimenta (partícula i).

En términos explícitos, finalmente, el problema de los N cuerpos en mecánica celeste, consiste en resolver el conjunto de ecuaciones diferenciales:

$$\left\{ \ddot{\vec{r}}_i = - \sum_{j \neq i} \frac{\mu_j}{r_{ij}^3} \vec{r}_{ij} \right\}_N , \quad (6.1)$$

donde hemos introducido el **parámetro gravitacional** $\mu_j \equiv Gm_j$ sobre el que volveremos en la Sección 6.4.

Un poco de historia

Henri Poincaré y el premio del Rey Oscar. En 1889, el matemático sueco Mittag-Leffler convenció al rey Oscar II de Suecia de que, con motivo de la celebración de su cumpleaños presentaría al mundo un nuevo concurso matemático.

Entre los problemas formulados en el concurso del rey Oscar II se encontraba, precisamente, el problema de los N cuerpos. La formulación del problema presentada en este capítulo, es literalmente la que preparó para el Rey, el matemático alemán Karl Weierstrass (“Vierstrass^a”), inspirado originalmente por las ideas del también matemático alemán Peter Gustav Dirichlet (“Dirichlet”).

Uno de los participantes del concurso, fue el matemático Francés **Henri Poincaré** (“Honri Poancaré^b”), que contaba para la época con 35 años (ver Figura 6.2).

Poincaré nació en Francia el 29 de abril de 1854 y se graduó como doctor en matemáticas en 1879 bajo la orientación de Charles Hermite (“Charle ermit^c”).

Las mayores contribuciones de Poincaré, como matemático, se produjeron en la teoría de ecuaciones diferenciales. Sin embargo, por sus estudios posteriores de ingeniería, su posición como profesor de la Universidad de Paris (La Sorbona) en las áreas de Mecánica, Física Matemática, Teoría de la Probabilidad, Mecánica Celeste y Astronomía, además del reconocimiento público que lo llevó a ser miembro de la Oficina de Longitudes de Francia en 1897 y elegido presidente de la Academia Francesa de Ciencias en 1906, los conocimientos de Poincaré se extendieron a muchas otras disciplinas. De allí que sea considerado un **Polímata** o un “hombre universal” (alguien que domina muchas disciplinas intelectuales o artísticas) un apelativo que comparte con personajes como Aristóteles o Leonardo da Vinci.

El artículo presentado por Poincaré en el concurso del Rey Oscar II, titulado

Un poco de historia (Cont.)

“Sobre el problema de los tres cuerpos y las ecuaciones de la dinámica”[41], fue declarado, sin lugar a dudas el ganador del concurso. Pero no sin alguna polémica. De un lado el trabajo no resolvía el problema general y del otro contenía algunos errores que fueron solo corregidos después. Adicionalmente la “solución” cuya existencia demostraba Poincaré suponía que los cuerpos se mantendrían siempre a una distancia mayor a un cierto valor mínimo. El mismo Poincaré admitiría, que la solución general al problema tal vez no se encontraría pronto y que serían necesarias “herramientas analíticas infinitamente más complicadas que las disponibles en la época.” Aún así los métodos introducidos por Poincaré en aquel trabajo de 1890, influenciarían de forma importante la mecánica celeste y serían la base para el desarrollo de la teoría del caos.

El problema de los tres cuerpos, formulado a la manera del concurso del rey Oscar II, fue finalmente resuelto en 1912 por el matemático Finlandés Karl Sundman [50]. En este trabajo Sundman probó la existencia de series que describían la posición de los tres cuerpos y que convergían para tiempos arbitrarios. Una excelente síntesis histórica de la contribución (poco apreciada) de Sundman puede encontrarse en [6].

^a<https://es.forvo.com/search/Weierstrass/de/>

^b<https://es.forvo.com/search/Henri%20Poincare/>

^c<https://es.forvo.com/search/Charles%20Hermite/fr/>



Figura 6.2: Fotografía de Henri Poincaré hacia el año 1886, unos años antes de realizar su trabajo histórico sobre el problema de los tres cuerpos (Foto: Eugène Pirou)

6.2. ¿Solución analítica?

Como aprendimos en la [Sección 5.2.4](#), una manera posible para buscar una solución analítica a las $6N$ ecuaciones diferenciales del problema de los N cuerpos (Ec. 6.1), o para al menos, aprender cosas sobre la dinámicas del sistema aunque no obtengamos la solución, es la de buscar tantas constantes de movimiento (cuadraturas) como sea posible.

Como habíamos visto, para convertir el problema diferencial en uno algebraico completamente determinado (igual numero de ecuaciones que de incógnitas), es necesario encontrar $6N$ cuadraturas, es decir, un número de constantes de movimiento igual al de variables del sistema.

En esta sección usaremos los resultados generales sobre la dinámica de sistemas de partículas que obtuvimos en la [Sección 5.4](#) además de los métodos matemáticos introducidos en la [Sección 5.2.4](#), para encontrar las primeras integrales de movimiento del problema de los N cuerpos y acercarnos así a su solución analítica.

6.2.1. Aplicación de los teoremas de conservación

En la forma específica del problema de los N cuerpos presentada aquí, asumimos que el sistema de partículas está aislado del Universo, es decir, sobre los cuerpos no actúa ninguna fuerza externa.

Como vimos en la [Sección 5.4.3](#), esta condición implica que tanto el momentum lineal total del sistema (ver Teo. 5.4), como su momentum angular total (ver Teo. 5.5) se conservan.

De acuerdo con esto, las funciones:

$$\begin{aligned}\sum m_i \vec{r}_i &= \vec{P}_{CM} \\ \sum m_i \vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i &= \vec{L}\end{aligned}$$

son las primeras constantes de movimiento que reconocemos para el problema.

Dada la importancia que el método de cuadraturas tiene en el desarrollo de muchos de los resultados en este libro, en las siguientes secciones confirmaremos este resultado, lo interpretaremos en el contexto del problema de los N cuerpos y en particular estudiaremos su implicación para algunos sistemas astronómicos de interés, pero más importante, encontraremos dos constantes adicionales que no habíamos deducido hasta ahora en el caso general de sistemas de muchas partículas.

6.2.2. Momentum lineal

Como vimos en la [Sección 5.4.1](#), la manera de probar la conservación del momento angular en el problema de los N cuerpos, consiste en sumar las e.d.m. de cada una de las partículas (Ecs. 6.1):

$$\sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i = - \sum_i \sum_j \frac{m_i \mu_j}{r_{ij}^3} \vec{r}_{ij} \quad (6.2)$$

En el lado derecho de esta ecuación, el término en el denominador es simétrico, $r_{ji} = r_{ij}$, mientras el término en el numerador, $\vec{r}_{ji} = \vec{r}_i - \vec{r}_j$ es *antisimétrico* (el signo cambia al cambiar el orden de los índices). Como resultado, por cada término en

la doble sumatoria (por ejemplo el término $i = 1, j = 4$) habrá un término idéntico pero de signo contrario (el término con $i = 4, j = 1$) que lo anulará. Físicamente, esta propiedad matemática es equivalente a aplicar postulado de acción y reacción que usamos para deducir la Ec. (5.37).

Así, el lado derecho de la Ec. (6.2) siempre será nulo (sin importar el número de partículas) y la suma de las e.d.m. será:

$$\sum m_i \ddot{\vec{r}}_i = 0. \quad (6.3)$$

Como era de esperarse esta ecuación es equivalente a la e.d.m. de un sistema de partículas sobre el que no actúan fuerzas externas (Ec. 5.37.)

En forma de cuadraturas la misma ecuación se escribe:

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i \right) = 0,$$

donde como siempre asumimos que las masas de todas las partículas del sistema $\{m_i\}$ son constantes.

Esta expresión no es otra cosa que una forma del teorema de conservación del momento lineal y provee la primera constante (vectorial) de movimiento del problema de N cuerpos:

$$\sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i = \vec{P}_{CM} \quad (6.4)$$

Por tratarse de una expresión vectorial, en esta cuadratura hay contenidas en realidad tres constantes de movimiento: $\sum_i m_i \dot{x}_i = P_{CM,x}$, $\sum_i m_i \dot{y}_i = P_{CM,y}$ y $\sum_i m_i \dot{z}_i = P_{CM,z}$.

Nota

El sistema de referencia del centro de masa. La constancia de \vec{P}_{CM} en el problema de los N cuerpos, nos permite introducir un sistema de referencia inercial ideal para la descripción simplificada del problema. Naturalmente nos referimos al sistema de referencia del centro de masa, que tiene, respecto al sistema de referencia general considerado hasta aquí, una velocidad constante e igual a $\vec{V}_{CM} = \vec{P}_{CM}/M$ (donde $M = \sum m_i$).

El movimiento de las partículas en este sistema de referencia es el más *simple* que podemos percibir desde un sistema de referencia inercial. Por la misma razón, en lo sucesivo y siempre y cuando no se diga lo contrario, la dinámica de la mayoría de los sistemas de N cuerpos considerados en este libro se describirá en el sistema de referencia de su centro de masa.

6.2.3. Posición del centro de masa

Una segunda constante de movimiento puede obtenerse aplicando cuadraturas a la primera integral (Ec. ??):

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_i m_i \vec{r}_i \right) = \frac{d}{dt} (\vec{P}_{CM} t)$$

De donde podemos escribir:

$$\sum_i m_i \vec{r}_i - \vec{P}_{CM} t = M \vec{R}_0 \quad (6.5)$$

Para expresar esta última constante de movimiento, hemos elegido, arbitrariamente, llamar a su valor como $M \vec{R}_0$, donde M es la masa total del sistema (que también es un valor constante). La elección de esta parametrización para el valor de la integral, no modifica en nada el hecho que el lado derecho de la Ec. (6.6) es constante también.

¿Cómo podemos interpretar físicamente la constante de movimiento en la Ec. (6.6)? Si dividimos la expresión de esta constante por la masa total del sistema M y la escribimos como:

$$\frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{M} = \vec{R}_0 + \vec{V}_t,$$

podemos identificar, del lado izquierdo, la posición del centro de masa del sistema en cualquier tiempo $\vec{R}_{CM} = \sum m_i \vec{r}_i / M$ (ver Ec. 5.36). Del lado derecho, por otro lado, encontramos a $\vec{V}_{CM} t$, que no es otra cosa que el desplazamiento que sufre el centro de masa al moverse con velocidad constante $\vec{V}_{CM} = \vec{P}_{CM} / M$. En consecuencia podemos entonces concluir que \vec{R}_0 no es otra cosa es la posición inicial del centro de masa. Así, la Ec. (6.6) es la constante de movimiento asociada al centro de masa.

De nuevo, por tratarse de una expresión vectorial, la Ec. (6.6) corresponde en realidad a tres constantes en lugar de una: $\sum_i m_i x_i - P_{CM,x} t = M x_{CM,0}$, $\sum_i m_i y_i - P_{CM,y} t = M y_{CM,0}$ y $\sum_i m_i z_i - P_{CM,z} t = M z_{CM,0}$.

En el sistema de referencia del centro de masa que habíamos mencionado en una nota anterior, esta constante de movimiento se puede escribir de forma simplificada como:

$$\sum_i m_i \vec{r}'_i = \vec{0}, \quad (6.6)$$

donde, como hicimos en la Sección 5.4.4, las cantidades primadas son medidas respecto al centro de masa.

Esta expresión confirma la intuición expresada antes de que en este sistema de referencia la descripción del problema es la más simple posible.

6.2.4. Momentum angular

Como hicimos en la Sección 5.4.3, si tomamos las e.d.m. del sistema de partículas (Ec. 6.1) y premultiplicamos vectorialmente por el vector posición y la masa de

cada partícula (este será el factor integrante), el resultado es el conjunto de ecuaciones:

$$\left\{ m_i \vec{r}_i \times \ddot{\vec{r}}_i = -m_i \sum_j \frac{\mu_j}{r_{ij}^3} \vec{r}_i \times \vec{r}_{ij} \right\}$$

Por las propiedades del producto vectorial, el último término en el lado derecho será, $\vec{r}_i \times \vec{r}_{ij} = -\vec{r}_i \times \vec{r}_j$, que es también antisimétrico. En consecuencia, si sumamos todas las ecuaciones diferenciales resultantes, obtendremos la ecuación:

$$\sum_i m_i \vec{r}_i \times \ddot{\vec{r}}_i = \vec{0},$$

que podemos expresar en cuadraturas como:

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_i m_i \vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i \right) = \vec{0}$$

Esta última ecuación permite identificar la constante de movimiento:

$$\sum m_i \vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i = \vec{L} \quad (6.7)$$

que reconocemos, naturalmente, con el momento angular total del sistema.

Existe una interesante interpretación geométrica de esta constante de movimiento: si nos ubicamos en el sistema de referencia del centro de masa del sistema, la dirección (constante) del vector momento angular total define un plano invariable (en dirección perpendicular a él). No importa la posición de las partículas, ni el tiempo en el que se registren, dicho plano mantendrá siempre su orientación en el espacio. A este plano se lo conoce históricamente como el **plano invariable de Laplace** [34].

Definición 6.2

Plano invariable (de Laplace) y sistema natural de referencia. Dado un sistema de N partículas puntuales $\{m_i\}$, llamamos **plano invariable (de Laplace)**.. a aquel que tiene como vector normal $\hat{n} = \vec{L}' / L'$, donde:

$$\vec{L}' = \sum m_i \vec{r}'_i \times \dot{\vec{r}}'_i$$

es el momento angular total de las partículas referidas al sistema de referencia del centro de masa. Dado que \vec{L}' es constante, es posible usar las posiciones y velocidades de las partículas en un tiempo arbitrario para calcular la dirección del plano invariable.

Llamamos **sistema natural de coordenadas** de un sistema de N cuerpos a aquel que tiene: 1) origen en el centro de masa y 2) plano $x - y$ sobre el plano invariable de Laplace (ver Figura Figura 6.3.).

Es importante insistir en que el vector que define la dirección del plano invariable de Laplace, no es, en general el vector en la Ec. (6.7) que, como vimos en la Sección 5.4.4 se puede escribir como:

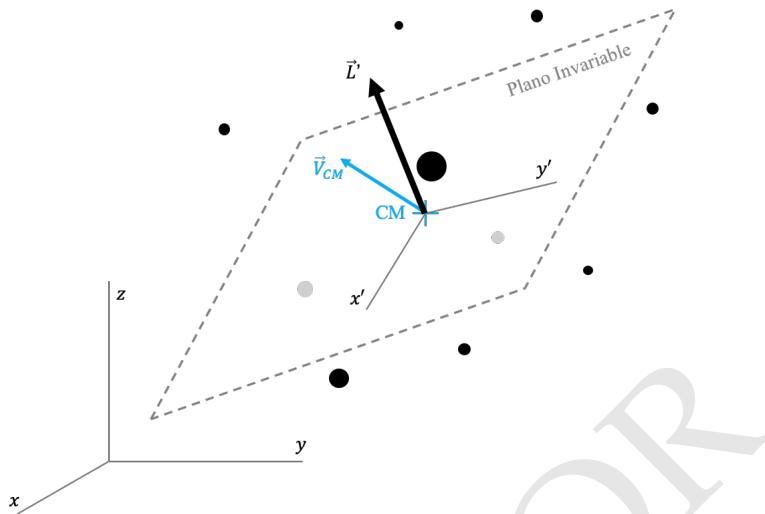


Figura 6.3: Ilustración gráfica de la orientación del plano invariable de Laplace. El plano invariable esta definido en el sistema de referencia inercial del centro de masa y se mueve con él con velocidad V_{CM} y tiene una orientación dada por el momento angular total \vec{L}' de las partículas respecto del centro de masa.

$$\vec{L} = M\vec{R}_{CM} \times \vec{V}_{CM} + \sum m_i \vec{r}_i' \times \dot{\vec{r}}_i'.$$

El vector de la Definición 6.2, que es esencialmente el segundo término de la ecuación anterior, no tiene la misma dirección de \vec{L} debido al término $M\vec{R}_{CM} \times \vec{V}_{CM}$ (momento angular del centro de masa.) Por lo tanto, es muy importante al construir el sistema de coordenadas natural, tener cuidado de asegurarse que las posiciones y velocidades de las partículas estén referidas al centro de masa.

Un poco de historia

El plano invariable del Sistema Solar. Durante más de 100 años, los astrónomos han intentado encontrar la orientación del plano invariable del Sistema Solar. El esfuerzo no ha sido sencillo, en tanto durante en el mismo lapso, la masa de los cuerpos no siempre se ha conocido con precisión e incluso, cuerpos enteramente nuevos se descubren de vez en cuando.

La determinación más precisa de la orientación del plano invariable se hizo recientemente [48] y concluyó que este importante plano tiene una inclinación, respecto al plano del ecuador en el sistema ICRF (ver la ??) de $23^\circ 0' 31''$.9 y una longitud del nodo ascendente de $3^\circ 51' 9''$.4 (para una definición de estos ángulos ver la Sección 4.2.16.) Esto implica, que el plano invariable del Sistema Solar esta inclinado respecto al plano de la eclíptica de J2000.0 (que es muy importante en la mecánica celeste al usarse como el plano de referencia fundamental para el cálculo de posiciones planetarias) en un ángulo de $1^\circ 34' 43''$.3.

Usando SPICE podemos hacer una estimación de primer orden de la inclinación del plano invariable del Sistema Solar, respecto al sistema de la eclíptica de J2000.0

(ver la ??.) Para ello podemos asumir, por simplicidad, que el momentum angular total del sistema esta concentrado en el Sol y el planeta más masivo, Júpiter (entre los dos cuerpos concentran el 99.96 % de la masa del sistema.)

Para conseguirlo, primero debemos obtener de los kernels de SPICE, la masa, posición y velocidad de los cuerpos implicados en un *tiempo de efemérides* arbitrario (tomaremos $t_{\text{ef}} = 0$ por comodidad):

(Algoritmo 6.1)

```
import spiceypy as spy

#Asumimos un tiempo cualquiera, en este caso t=J2000.0
tef=0

#Carga kernels con posiciones (bsp) y masas (tpc)
spy.furnsh('pymcel/data/de430.bsp')
spy.furnsh('pymcel/data/de430.tpc')

#Parámetro gravitacional, posiciones y velocidades de los cuerpos
musol=spy.bodvrd("SUN","GM",1)[1][0]
sol,tluz=spy.spkezr("SUN",tef,
                     "ECLIPJ2000","None","SSB")
rsol=sol[:3]
vsol=sol[3:]
mujupiter=spy.bodvrd("JUPITER_BARYCENTER","GM",1)[1][0]
jupiter,tluz=spy.spkezr("JUPITER_BARYCENTER",tef,
                         "ECLIPJ2000","None","SSB")
rjupiter=jupiter[:3]
vjupiter=jupiter[3:]
```

Sol:

```
mu = 132712440041.9394 km^3/s^2
Posición = [-1067598.50226456 -418234.39327422 30837.61810502] km
Velocidad = [ 0.00931257 -0.01282475 -0.00016333] km/s
```

Jupiter:

```
mu = 126712764.7999999 km^3/s^2
Posición = [ 5.97499980e+08 4.39186501e+08 -1.51960586e+07] km
Velocidad = [-7.90052522 11.14330827 0.13069904] km/s
```

Nótese que como señalamos antes nos hemos cuidado de calcular tanto la posición del Sol como de Júpiter, respecto al centro de masa (baricentro) del sistema solar (SSB por *Solar System Barycenter* en SPICE.)

Con esta información, el momento angular total del sistema será:

```
#Constante de gravedad universal:
G=6.67e-20 # km^3 / kg s^2

#Momentum angular total
from numpy import cross
L=(musol/G)*cross(rsol,vsol)+(mujupiter/G)*cross(rjupiter,vjupiter)
```

$L = [4.31661898e+35 \ 7.99455257e+34 \ 1.92754426e+37] \text{ kg m}^2/\text{s}^2$

En el algoritmo anterior, para obtener la masa de cada cuerpo, hemos dividido el valor de los parámetros gravitacionales μ por la constante G (en las unidades apropiadas.)

Con este resultado, la inclinación estimada del plano invariable del Sistema Solar, se obtiene, finalmente, calculando el ángulo formado entre el momento angular total y el eje z (que en SPICE es perpendicular al plano de la eclíptica de J2000.0), es decir, $i = \cos^{-1}(L_z/L)$:

```
from numpy import arccos
from numpy.linalg import norm

i=arccos(L[2]/norm(L))

i = 1.3046988768626038 grados
= 1:18:16
```

Aquí hemos usado la notación grados : minutos : segundos, más conveniente en el contexto de los algoritmos.

La inclinación obtenida, $i = 1^\circ 18' 16''$, difiere de la calculada con todos los cuerpos del Sistema Solar (ver el recuadro el *Un poco de historia, el plano invariable del Sistema Solar*) en casi 16 minutos de arco (que corresponde a un error relativo de un poco más del 17 %.) El lector podría obtener una estimación mejor de esta inclinación si incluye otros cuerpos en el cálculo (ver sección de problemas al final de este capítulo.)

6.2.5. Energía potencial de N cuerpos

Una manera alternativa de escribir la ecuación de movimiento del problema de los N cuerpos, es reconociendo que cada una las fuerzas gravitacionales que actúan sobre las partículas *derivan* de un potencial (son fuerzas conservativas). Así:

$$\left\{ m_i \ddot{\vec{r}}_i = -\frac{\partial}{\partial \vec{r}_i} \left(\sum_{j \neq i} m_j V_j \right) \right\}_N ,$$

donde $V_j = -\mu_j/r_{ij}$ es el potencial gravitacional de la partícula j (ver 5.33), medido en la posición de la partícula i , y la *derivada vectorial* $\partial/\partial \vec{r}_i$ es, por definición en este libro, una representación del operador gradiente, $\vec{\nabla}_i$, calculado con respecto a las coordenadas de la partícula i (ver la Sección 4.1.4.)

Si introducimos lo que podemos llamar la *energía potencial gravitacional mutua* $U_{ij} \equiv m_i V_j$ (ver Ec. 5.32), la ecuación de movimiento se puede escribir como:

$$\left\{ m_i \ddot{\vec{r}}_i = -\frac{\partial}{\partial \vec{r}_i} \left(\sum_{j \neq i} U_{ij} \right) \right\}_N , \quad (6.8)$$

Si bien, la función de energía potencia $\sum_{j \neq i} U_{ij}$, que aparece en el lado derecho de las Ecs. (6.8), es única para cada partícula del sistema, existe una interesante propiedad del problema de los N cuerpos (y otros problemas con *fuerzas de interacción centrales*) que permite calcular las fuerzas en el sistema, como el gradiente de una única función de energía potencial. Aunque esta propiedad es presentada

como un resultado trivial en casi todos los libros de mecánica celeste, esta lejos de serlo por lo que profundizaremos un momento en ella.

Consideremos el caso particular de un sistema de tres cuerpos. En términos explícitos, las e.d.m. de este sistema (Ecs. 6.1) tienen la forma :

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{\vec{r}}_1 &= -\frac{m_1 \mu_2}{r_{12}^3} \vec{r}_{12} - \frac{m_1 \mu_3}{r_{13}^3} \vec{r}_{13} \\ m_2 \ddot{\vec{r}}_2 &= -\frac{m_2 \mu_1}{r_{21}^3} \vec{r}_{21} - \frac{m_2 \mu_3}{r_{23}^3} \vec{r}_{23} \\ m_3 \ddot{\vec{r}}_3 &= -\frac{m_3 \mu_1}{r_{31}^3} \vec{r}_{31} - \frac{m_3 \mu_2}{r_{32}^3} \vec{r}_{32} \end{aligned} \quad (6.9)$$

Nótese, por ejemplo, que las fuerzas $\vec{F}_{12} = -m_1 \mu_2 \vec{r}_{12} / r_{12}^3$ y $\vec{F}_{21} = -m_2 \mu_1 \vec{r}_{21} / r_{21}^3$, en realidad pueden obtenerse de una sola energía potencial, a saber, $U_{12} = -m_1 \mu_2 / r_{12}$:

$$\begin{aligned} \vec{F}_{12} &= \partial_{\vec{r}_1} U_{12} \\ \vec{F}_{21} &= \partial_{\vec{r}_2} U_{12} \end{aligned}$$

La fuerza \vec{F}_{12} se obtiene de U_{12} si se deriva esta cantidad respecto a \vec{r}_1 ; por su lado, la fuerza \vec{F}_{21} aparece deribando U_{12} respecto a \vec{r}_2 . Una situación similar ocurre con los pares de fuerzas $\vec{F}_{13}, \vec{F}_{31}$ y $\vec{F}_{23}, \vec{F}_{32}$.

Es decir, 6 fuerzas diferentes derivan, en realidad, de solo 3 términos de energía potencial: U_{12}, U_{13} y U_{23} . Explícitamente:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{\vec{r}}_1 &= -\frac{\partial U_{12}}{\partial \vec{r}_1} - \frac{\partial U_{13}}{\partial \vec{r}_1} \\ m_2 \ddot{\vec{r}}_2 &= -\frac{\partial U_{12}}{\partial \vec{r}_2} - \frac{\partial U_{23}}{\partial \vec{r}_2} \\ m_3 \ddot{\vec{r}}_3 &= -\frac{\partial U_{13}}{\partial \vec{r}_3} - \frac{\partial U_{23}}{\partial \vec{r}_3} \end{aligned} \quad (6.10)$$

Si reconocemos que $\partial U_{23} / \partial \vec{r}_1 = \partial U_{13} / \partial \vec{r}_2 = \partial U_{12} / \partial \vec{r}_3$, las e.d.m. se pueden escribir de forma más completa como:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{\vec{r}}_1 &= -\frac{\partial U_{12}}{\partial \vec{r}_1} - \frac{\partial U_{13}}{\partial \vec{r}_1} - \frac{\partial U_{23}}{\partial \vec{r}_1} \\ m_2 \ddot{\vec{r}}_2 &= -\frac{\partial U_{12}}{\partial \vec{r}_2} - \frac{\partial U_{13}}{\partial \vec{r}_2} - \frac{\partial U_{23}}{\partial \vec{r}_2} \\ m_3 \ddot{\vec{r}}_3 &= -\frac{\partial U_{12}}{\partial \vec{r}_3} - \frac{\partial U_{13}}{\partial \vec{r}_3} - \frac{\partial U_{23}}{\partial \vec{r}_3} \end{aligned} \quad (6.11)$$

Allí identificamos, finalmente, una sola función de energía potencial para todo el sistema:

$$U = U_{12} + U_{13} + U_{23}, \quad (6.12)$$

de la cual puede calcularse la fuerza sobre cualquier partícula del sistema usando la prescripción general:

$$\left\{ m_i \ddot{\vec{r}}_i = - \frac{\partial U}{\partial \vec{r}_i} \right\}_N \quad (6.13)$$

Esta es la forma más compacta de escribir las ecuaciones de movimiento del problema de los N cuerpos.

Estudie cuidadosamente las diferencia entre esta forma de las ecuaciones, que usa una sola función de energía potencial y la menos económica forma original escrita en las Ecs. (6.8).

NOTA

Motivación física de la energía potencial de N cuerpos. La deducción que hicimos aquí de la energía potencial de tres cuerpos, es de naturaleza eminentemente matemática. Sin embargo, una vez obtenida, es posible dar a ella una interpretación que nos permite entender las razones físicas profundas por las que la energía potencial del sistema tiene en realidad un número restringido de términos.

Es claro, físicamente, que al cuantificar la energía total de interacción de un sistema, solo debemos tener en cuenta *una vez* la contribución que cada pareja de partículas. Así, el sistema de partículas 1 y 2 contribuyen con U_{12} a la energía total, es obvio entonces que sumar a esa energía el término U_{21} sería redundante y físicamente incorrecto. Lo mismo pasa con las energías de interacción U_{13} que descartan la necesidad de incluir la U_{31} y la U_{23} que una vez sumada hace innecesario agregar la energía U_{32} .

Este razonamiento, es la razón *física* por la cual la función de energía potencial en la Ec. (6.12) total solo contiene tres términos (en lugar de 6 como podría intuirse de la forma de la Ec. 6.8).

¿Podría el lector generalizar este resultado a cuatro cuerpos? O más interesante aún ¿podría ofrecer una fórmula general para el *número de términos* que tiene la función de energía potencial de un sistema de N cuerpos? (intente encontrar la respuesta antes de mirar el pie de nota)

a

^aLa respuesta está en la teoría combinatoria: el número de términos de la energía potencial es igual al número de combinaciones $C_{N,k}$ en parejas ($k = 2$) de N números (las partículas del sistema). Es un resultado bien conocido de la combinatoria que $C_{N,k} = N!/[k!(N-k)!]$. Así, por ejemplo, con $N = 3$ y $k = 2$, el número de combinaciones es $C_{3,2} = 3!/2! = 3$ que coincide con el ejemplo desarrollado aquí (ver Ec. 6.12.)

La energía potencial de N cuerpos U , que escribimos en la Ec. (6.12) para un sistema de tres partículas, puede ahora escribirse, en general, para un sistema de N cuerpos, de dos maneras diferentes:

1. Restringiendo las sumatorias:

$$U = - \sum_{i=1}^{i < j} \sum_{j=1}^{j=N} \frac{m_i \mu_j}{r_{ij}} \quad (6.14)$$

Una fórmula que se escribe en casi todos los textos y de forma simplificada como:

$$U = - \sum_{i < j} \frac{m_i \mu_j}{r_{ij}}$$

Esta expresión es relativamente simple, pero expandir las sumatorias, en la práctica, puede ser muy complicado (el lector puede intentar, por ejemplo, escribir la energía potencial de un sistema de cuatro cuerpos, usando la fórmula anterior y no el razonamiento físico que esbozamos en la última *Nota*.)

2. Sin restringir las sumatorias:

$$U = - \frac{1}{2} \sum_i \sum_{j \neq i} \frac{m_i \mu_j}{r_{ij}} \quad (6.15)$$

El factor $1/2$ en el lado derecho, aunque extraño desde el punto de vista de la física, proviene del hecho de que al no restringir la sumatoria sobre la i , aparecerán los términos duplicados $m_i \mu_j / r_{ij}$ y $m_j \mu_i / r_{ji}$ que son exactamente iguales.

En lo que queda de este texto usaremos la parametrización de la Ec. (6.15).

6.2.6. Conservación de la energía

Si multiplicamos las Ecs. (6.13) por el factor integrante $m_i \vec{r}_i$ (usando el producto punto o producto escalar) y sumamos sobre todas las partículas (como lo hemos hecho para obtener las otras constantes de movimiento) obtenemos:

$$\sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \ddot{\vec{r}}_i = - \sum_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial U}{\partial \vec{r}_i}$$

El lado derecho de esta ecuación corresponde a la regla de la cadena (ver Ec. 4.17):

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\partial U}{\partial \vec{r}_1} \cdot \frac{d\vec{r}_1}{dt} + \frac{\partial U}{\partial \vec{r}_2} \cdot \frac{d\vec{r}_2}{dt} + \dots + \frac{\partial U}{\partial \vec{r}_n} \cdot \frac{d\vec{r}_n}{dt}$$

lo que permite conseguir el objetivo del factor integrante: escribir la ecuación diferencial en cuadraturas:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i^2 \right) = - \frac{dU}{dt}$$

De esta ecuación podemos identificar, finalmente, una nueva constante de movimiento en el problema de los N cuerpos:

$$\frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i^2 + U(\{\vec{r}_i\}) = E \quad (6.16)$$

Con $U(\{\vec{r}_i\}) = (1/2) \sum_i \sum_{j \neq i} m_i m_j \mu_j / r_{ij}$.

Físicamente el valor de E corresponde a la energía mecánica total del sistema de N cuerpos y esta integral no es otra cosa que una expresión del teorema de conservación de la energía (ver Teo. 5.2) en la ausencia de fuerzas no conservativas.

6.2.7. Caso de estudio: el sistema Tierra-Luna

En un terreno más práctico, sería interesante, usar este resultado, para preguntarse, por ejemplo, cuánta energía *mecánica* existe en el sistema Tierra-Luna.

Para ello podemos apoyarnos otra vez de SPICE, como lo hicimos antes para calcular el momentum angular del sistema Sol-Jupiter (ver Algoritmo 6.1):

(Algoritmo 6.2)

```
import spiceypy as spy

#Constante de gravedad universal
G=6.67e-20 # km^3 / kg s^2

#Asumimos un tiempo cualquiera, en este caso t=J2000.0
tef=0

#Carga kernels con posiciones (bsp) y masas (tpc)
spy.furnsh('pymcel/data/de430.bsp')
spy.furnsh('pymcel/data/de430.tpc')

#Parámetro gravitacional, posiciones y velocidades
mutierra=spy.bodvrd("EARTH", "GM", 1)[1][0]
tierra,tluz=spy.spkezr("EARTH", tef,
                       "ECLIPJ2000", "None", "EARTH_BARYCENTER")
rtierra=tierra[:3]
vtierra=tierra[3:]

muluna=spy.bodvrd("MOON", "GM", 1)[1][0]
luna,tluz=spy.spkezr("MOON", tef,
                      "ECLIPJ2000", "None", "EARTH_BARYCENTER")
rluna=luna[:3]
vluna=luna[3:]
```

Una diferencia importante entre este algoritmo y el que vimos para el cálculo del momentum angular, es que las posiciones y velocidades de la Tierra y la Luna, son calculadas respecto a la posición del centro de masa del sistema (EARTH_BARYCENTER) en lugar de hacerlo respecto del baricentro del sistema solar (SSB). Si bien, nada en la Ec. (6.16) nos dice que la energía mecánica total solo se conserva en el sistema de referencia del centro de masa, nuestra interpretación del

valor de esta cantidad será más fácil allí. El lector puede intentar hacer el cálculo relativo al baricentro del sistema solar y comparar con el resultado obtenido aquí.

La energía mecánica total del sistema, será entonces:

(Algoritmo 6.3)

```
#Masas
mtierra=mutierra/G
mluna=muluna/G

#Energía potencial
from numpy.linalg import norm
U=-G*mluna*mtierra/norm(rtterra-rluna)

#Energía cinética
K=0.5*mutierra*norm(vtierra)**2+0.5*mluna*norm(vluna)**2

#Energía mecánica total
E=K+U

print(f"Energía potencial U: {U} kg km^2/s^2")
print(f"Energía cinética K: {K} kg km^2/s^2")
print(f"Energía mecánica total E: {E} kg km^2/s^2")
```

Energía potencial U: -7.369786503549795e+22 kg km²/s²

Energía cinética K: 3.4021556025880696e+22 kg km²/s²

Energía mecánica total E: -3.967630900961725e+22 kg km²/s²

¿Qué significa que la energía mecánica total del sistema Tierra-Luna sea negativa?

Como lo comentamos en la Sección 5.3.12 el signo negativo de la energía potencial gravitacional (responsable aquí del signo negativo de E) se debe a que escogimos el valor de la constante C en la Ec. (5.30) como cero.

Siguiendo un razonamiento similar al que usamos en esa sección para explicar físicamente el significado de esta elección arbitraria (y por tanto el signo de U), podemos decir aquí que el valor de $|E|$ en el sistema Tierra-Luna y en general en cualquier sistema de dos cuerpos, es el trabajo *mínimo* requerido para separar a la Tierra y a la Luna a una distancia inmensa. O, en términos *escatológicos*, $|E|$ es la energía mínima necesaria para destruir la unión entre nuestro planeta y su eterna compañera.

No es difícil mostrar (ver problemas al final del capítulo) que esta energía es igual a la energía cinética de un cuerpo con la masa de la Luna moviéndose a $\sim \$1$ km/s relativa al centro de masa del sistema. Es decir, una colisión *elástica* con un cuerpo gemelo de la Luna podría hacer el trabajo de separarnos de ella³⁵.

Para hacernos ahora a una idea más cercana del valor de esta energía, las unidades de energía utilizadas aquí, $\text{kg km}^2/\text{s}^2$, que siguen la convención en SPICE de usar km como unidad de longitud, no son las más convenientes. Para convertirlas a las unidades del sistema internacional, los joules, $J = \text{kg m}^2/\text{s}^2$, basta multiplicar

³⁵En la vida real la colisión mencionada sería *inelástica*, es decir una buena parte de la energía cinética de la se convertiría inicialmente en calor y destruiría a la Luna y al impactor

las energía obtenidas anteriormente por un factor de conversión de 10^6 .

En conclusión podemos decir que (el valor absoluto de) la energía mecánica total del sistema Tierra-Luna es 4×10^{28} j. Esta energía es aproximadamente igual a la energía consumida por toda la humanidad en casi **2 millones de años**³⁶.

6.2.8. Síntesis y teorema de Bruns

Hasta aquí hemos identificado las siguientes constantes de movimiento (cuadraturas) del problema de N cuerpos:

$$\begin{aligned}\sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i &= \vec{P}_{CM} \\ \sum_i m_i \vec{r}_i - \vec{P}_{CM} t &= M \vec{R}_{CM} \\ \sum m_i \vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i &= \vec{L} \\ \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i^2 + U(\{\vec{r}_i\}) &= E\end{aligned}\tag{6.17}$$

Las tres primeras son formas compactas (vectoriales) de expresar, cada una, tres constantes diferentes, de modo que, en total, tenemos hasta ahora 10 ecuaciones algebraicas (escalares) que relacionan las $6N$ cantidades desconocidas $\{x_i(t), y_i(t), z_i(t)\}_N, \{\dot{x}_i(t), \dot{y}_i(t), \dot{z}_i(t)\}_N$.

Es claro que nos falta mucho trabajo por hacer si queremos resolver incluso el problema más simple (con $N=2$, necesitaríamos por lo menos 12 cuadraturas para resolver el sistema.)

En el año 1887 el destacado matemático Ernst Heinrich Bruns, en un artículo titulado *Sobre las integrales del problema de varios cuerpos* [9] demostró que, al menos para el problema de los tres cuerpos, no existen otras primeras integrales de movimiento que puedan expresarse en términos de funciones algebraicas de las posiciones y velocidades de las partículas.

En el año 2000, este resultado fue generalizado a sistemas con un número arbitrario de partículas y de dimensiones espaciales, constituyéndose en lo que se conoce hoy como el poderoso **teorema de Bruns generalizado** [33]:

Proposición 6.1

Teorema de Bruns generalizado. En el problema newtoniano de $(M+1)$ cuerpos en \mathbb{R}^p , con $M \geq 2$ y $1 \leq p \leq M+1$, toda primera integral que es algebraica respecto a las posiciones, el momento lineal y el tiempo, es una función algebraica de las primeras integrales clásicas: la energía, las $p(p-1)/2$ componentes del momento angular, y las $2p$ constantes que vienen del movimiento lineal uniforme del centro de masa.

En el caso particular que hemos estudiado aquí en el que las partículas se mueven en tres dimensiones, es decir en \mathbb{R}^3 o bien $p = 3$, según el teorema generalizado de Bruns, las únicas integrales de movimiento *independientes* son: (1) la energía, (2,3,4) $p(p-1)/2 = 3(3-1)/2 = 3$ componentes del momento angular y (5,6,7,8,9 y 10) $2p = 6$ constantes del movimiento lineal uniforme del centro de masa (3 para el momento lineal y 3 para la posición inicial del centro de masa.)

³⁶https://en.wikipedia.org/wiki/World_energy_consumption

Es decir, para problemas de N cuerpos en 3 dimensiones las 10 cuadraturas escritas en las Ecs. (6.17) son las únicas que podemos encontrar.

Este resultado parece desesperanzador dado que implica que por mucho que lo intentemos, no podemos obtener el número de constantes necesarias para expresar el problema de los N cuerpos como un conjunto completo de cuadraturas.

Esto, sin embargo, no significa, de un lado, que las cuadraturas obtenidas no puedan enseñarnos cosas muy interesantes sobre los sistemas de N cuerpos (como ilustraremos en la siguiente sección y en el [Capítulo 8](#).)

Del otro lado, y más importante aún, la limitación impuesta por el teorema de Bruns, no implica necesariamente que el problema no tenga solución: el hecho de no encontrar cuadraturas suficientes solo significa que una solución algebraica es imposible.

En realidad, y contrario a la “mitología tradicional”, el problema de los N cuerpos, al menos en el caso de sistemas con momento angular cero, tiene solución en series, como lo exigía el concurso del Rey Oscar II (ver el recuadro *Un poco de historia, la solución al problema de los N cuerpos.*) Dicha solución, que no presentaremos en este libro por razones del nivel matemático exigido (el lector avanzado puede ir directamente a la literatura especializada), sin embargo, converge muy lentamente y se necesitan normalmente millones de términos para aproximar la posición de las partículas incluso en intervalos de tiempo extremadamente cortos [22].

Un poco de historia

La solución al problema de los N cuerpos. En el año 1990, casi exactamente 100 años después de la formulación del problema en el concurso del Rey Oscar II, el matemático chino Wang Qiu-Dong [46] y, antes de él (posiblemente) el ruso L. K. Babadzhaniants ([3], [4]) demostraron la existencia de una solución al problema de N cuerpos, con las condiciones expresadas en el problema original (ver la [Sección 6.1](#)), al menos para el caso de un sistema con momentum angular total nulo. Con este resultado, Wang y Babadzhaniants habrían extendido el resultado obtenido en 1912 por Karl Sundman, quién probó la existencia de dicha solución existe en el caso de $N=3$, incluso en sistemas con un momento angular no nulo. Esto es lo más cerca que la ciencia ha estado de resolver analíticamente el problema de los N cuerpos.

El obstáculo que en la solución práctica al problema de los N cuerpos representan, de un lado el teorema de Bruns y del otro la lenta convergencia de las series descubiertas en el último siglo para la solución general al problema, nos llevará, en las siguientes secciones y en los capítulos que les siguen a desarrollar aproximaciones teóricas al problema de los N cuerpos. Estas aproximaciones nos permitirán formular explicaciones del comportamiento de sistemas astronómicos reales o realizar predicciones precisas requeridas para hacer observaciones astronómicas o controlar el movimiento de vehículos espaciales.

En pocas palabras, los esfuerzos para vencer los obstáculos matemáticos y físicos que enfrentamos en la solución al problema de los N cuerpos, representan la mayor parte de lo que conocemos hoy como mecánica celeste.

6.3. Energía y virial

En la [Sección 6.2.7](#) le pusimos números a una de las más importantes constantes de movimiento en el problema de los N cuerpos: la Energía.

Para hacerlo, calculamos la energía mecánica total del sistema Tierra-Luna y encontramos, contra toda intuición, que era negativa. La interpretación física de este resultado indica que *hace falta* energía para separar a la Tierra y la Luna a una distancia enorme; o dicho en otros términos, que *el valor negativo de la energía de un sistema de dos partículas indica que la distancia entre ellas está acotada y forman un sistema ligado*.

Este interesante resultado, aunque parece obvio, es evidencia de una afirmación que hemos repetido a lo largo de este capítulo: las constantes de movimiento o integrales en el problema de los N cuerpos, pueden no proveer toda la información necesaria para saber dónde estarán las cuerpos en el futuro, pero ofrecen pistas útiles sobre el destino del sistema.

¿Podríamos generalizar la interpretación del signo de la energía en el sistema Tierra-Luna a sistema formados por un número arbitrario de partículas?

6.3.1. Momento de inercia

Para responder a esta última pregunta deberíamos identificar o definir primero una cantidad física que nos ayude a evaluar la afirmación “*las partículas se encuentran a una distancia finita*”.

No es difícil descubrir que el momento de inercia total I del sistema puede cumplir esta función. Para una nube de partículas, I está definido como³⁷:

$$I \equiv \sum_i m_i r_i^2 \quad (6.18)$$

En términos de esta cantidad podemos decir que el sistema tenderá a disgregarse, si para $t \rightarrow \infty$, también $I \rightarrow \infty$. Al contrario, el sistema colapsará totalmente, si, en algún tiempo finito t_c , el momento de inercia $I \rightarrow 0$. Un sistema *ligado* (que no se disgrega, ni colapsa), será aquel que se encuentra entre estos dos extremos.

¿Cómo evoluciona I con el tiempo?

Podemos saberlo si encontramos sus primeras derivadas respecto al tiempo:

$$\dot{I} = 2 \sum_i m_i \vec{r}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i$$

Esta primera derivada tiene una propiedad interesante: en una misma cantidad combina, tanto información sobre la posición de las partículas como sobre su velocidad.

Si definimos:

$$G \equiv \sum_i m_i \vec{r}_i \cdot \vec{\eta}_i \quad (6.19)$$

entonces:

³⁷La definición del momento de inercia aparece originalmente en la mecánica newtoniana al estudiar la cinemática y dinámica del movimiento de cuerpos rígidos.

$$\dot{I} = 2G \quad (6.20)$$

A la “luz” de la función G , es más razonable definir un sistema ligado como aquel en el que simultáneamente la posición y la velocidad de las partículas están acotadas. En términos de G :

$$G_{\min} \leq G \leq G_{\max} \quad (6.21)$$

6.3.2. El virial

¿Cómo convertir la condición (??), que define a un sistema ligado, en una condición sobre la energía del sistema?

No es difícil reconocer que la tasa de cambio de G , \dot{G} , incluirá términos proporcionales a la energía cinética, que es justamente lo que buscamos:

$$\begin{aligned} \dot{G} &= \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i^2 + \sum_i \vec{r}_i \cdot (m_i \ddot{\vec{r}}_i) \\ &= 2K - \sum_i \vec{r}_i \cdot \vec{F}_i \end{aligned} \quad (6.22)$$

En esta expresión aparece una cantidad nueva:

$$\mathcal{V} = \sum_i \vec{r}_i \cdot \vec{F}_i,$$

que depende de las fuerzas que experimentan las partículas del sistema instantáneamente.

\mathcal{V} no tuvo una utilidad reconocida previamente en la mecánica newtoniana hasta 1870 cuando Rudolf Clausius [14] estudiaba la teoría mecánica de los gases y el calor. Por su relación con la fuerza, cuya palabra en latín es *vis* (con acusativo *viris*), Clausius llamó a \mathcal{V} el “virial” del sistema³⁸.

6.3.3. Identidad de Lagrange-Jacobi

En el caso del problema de N partículas que interactúan a través de la fuerza gravitacional Newtoniana (Ec. 6.13) $\{\vec{F}_i = \partial_{\vec{r}_i} U\}$, el virial viene dado por

$$\mathcal{V} = \sum_i \vec{r}_i \cdot \vec{F}_i = - \sum_i \vec{r}_i \cdot \partial_{\vec{r}_i} U \quad (6.23)$$

Es posible demostrar (ver problemas al final del capítulo) que la $U(\{\vec{r}_i\})$ definida por la Ec. (6.15) es una función homogénea con $k = -1$ (ver Def. ??).

Por lo tanto, por el Teo. ?? el virial de un sistema de N cuerpos es simplemente igual a su energía potencial:

$$\mathcal{V} = - \sum_i \vec{r}_i \cdot \partial_{\vec{r}_i} U = U$$

Aplicando este resultado a la Ec. (6.22) obtenemos la denominada **Identidad de Lagrange-Jacobi**:

³⁸En realidad el “virial” original de Clausius, por razones que de verán en la Sección 6.3.4 es $\langle \mathcal{V} \rangle / \epsilon$, donde $\langle \mathcal{V} \rangle$ es el promedio de esta cantidad en un intervalo de tiempo muy largo.

$$\begin{aligned}\dot{G} &= 2K + U \\ &= 2E - U \\ &= K + E\end{aligned}\tag{6.24}$$

Donde, para la segunda y tercera forma de la identidad, hemos usado el hecho conocido que $E = K + U$.

En virtud de la relación expresada por la Ec. (6.20), una forma alternativa de esta identidad, muy común en la literatura pero más oscura en términos del significado de las cantidades involucradas es:

$$\ddot{I} = 4K + 2U$$

No podemos perder de vista para donde vamos: nuestro propósito era estudiar la posible relación existente entre la energía mecánica total de un sistema y el hecho de que sea un sistema ligado o no.

Para ello, consideremos la última forma de la identidad de Lagrange-Jacobi,

$$\dot{G} = K + E.$$

Dado que por definición $K \geq 0$, si la energía mecánica total del sistema es $E \geq 0$, los valores (constantes) de \dot{G} y de \ddot{I} serán siempre positivos. Por lo tanto, ambos, G e I , independientemente de sus valores iniciales, crecerán indefinidamente y el sistema tenderá a disgregarse (no será un sistema ligado)³⁹

Por otro lado si $E < 0$, los signos de \dot{G} e \ddot{I} , dependerán de la comparación entre K y $|E|$. Sin embargo como el valor de K es variable en el tiempo (recordemos que solo E es constante), no hay manera de predecir, trivialmente, si el sistema estará ligado o no.

En otras palabras, $E < 0$ es una condición necesaria (puesto que $E \geq 0$ implica un sistema no ligado), mas no suficiente para que un sistema de N cuerpos sea ligado.

6.3.4. Teorema del virial

Puede que no sepamos cuánto vale la energía cinética de un sistema de N cuerpos en un momento dado (para evaluar por ejemplo el signo de \dot{G} en la identidad de Lagrange-Jacobi), pero podríamos averiguar si esta acotada por un valor máximo y si valor es finito.

Una manera de hacerlo es calcular el *promedio asintótico* de $K(t)$, que definimos como:

$$\langle K \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T K(t) dt$$

Un sistema en el que la energía cinética tampoco esté acotada, para algún tiempo t , es decir $K \rightarrow \infty$, tendrá un valor promedio de la energía cinética $\langle K \rangle \rightarrow \infty$ y posiblemente, en virtud de las identidades de Lagrange-Jacobi no sea tampoco un sistema acotado.

³⁹Es interesante anotar que para que I crezca indefinidamente, basta que al menos una partícula, por ejemplo la partícula k , escape del sistema, esto es que $r_k \rightarrow \infty$ cuando $t \rightarrow \infty$.

Ahora bien, por la identidad de Lagrange-Jacobi (Ec. {eq:identidad_lagrange_jacobi}):

$$\langle \dot{G} \rangle = 2\langle \dot{K} \rangle + \langle \dot{U} \rangle$$

pero:

$$\langle \dot{G} \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \dot{G} dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{G(T) - G(0)}{T} \right)$$

donde usamos el teorema fundamental del cálculo (ver Teo. 4.4.)

Ahora bien si G esta acotada, es decir si $G_{\min} \leq G(t) \leq G_{\max}$

$$\langle \dot{G} \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{G(T) - G(0)}{T} \right) \leq \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{G_{\max} - G_{\min}}{T} \right) = 0$$

Lo que conduce a uno de los más importantes teoremas de la dinámica de sistemas de muchas partículas:

Proposición 6.2

Teorema del virial. Si en un sistema de N cuerpos se define la cantidad física $G \equiv \sum_i m_i \vec{r}_i \cdot \vec{\eta}_i$, la condición $G_{\max} \leq G \leq G_{\min}$ (G esta acotada) es necesaria y suficiente^a para que el promedio asintótico de las funciones de energía potencial U y energía cinética K , satisfagan:

$$\langle U \rangle = -2\langle K \rangle \quad (6.25)$$

o equivalentemente:

$$E = -\langle K \rangle \quad (6.26)$$

Donde $\langle f \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} (1/T) \int_0^T f(t) dt$

^aLa condición de que G este acotada es demasiado restringente. Es posible mostrar, por ejemplo, que en el caso de un sistema de dos cuerpos que se mueven sobre una parábola, también se cumple el teorema del Virial. Por lo tanto, existe una condición mucho más general y satisfactoria para formular el teorema que puede encontrarse en [43, ?]. Esta condición sin embargo no afecta las conclusiones que obtenemos en este libro para sistemas generales

Puesto en palabras más llanas, en un sistema de N cuerpos ligado, es decir aquel en el que las posiciones y velocidades están acotadas, el negativo del promedio asintótico de la energía cinética es igual a la energía mecánica total. O bien, como es más común encontrarlo en la literatura:

$$\langle K \rangle = -\frac{1}{2}\langle U \rangle \quad (6.27)$$

Aunque las consecuencias del teorema del virial son interesantes, sus aplicaciones prácticas en mecánica celeste, especialmente al estudiar sistemas de pocas partículas, no son muchas. Sin embargo cuando se estudian, tanto en astronomía como en física, sistemas con un número significativo de partículas ($N \rightarrow \infty$), las implicaciones pueden ser muy útiles como veremos en el siguiente caso de estudio.

6.3.5. Caso de estudio: el virial del Sistema Solar

Podemos comprobar el teorema del virial en el caso del sistema Solar, tomando los cuerpos más masivos del sistema y en los que asumimos se concentra la mayor parte de la energía cinética y potencial gravitacional del sistema: El Sol, Júpiter y Saturno.

Para ello, podemos usar como base los Algs. (6.2,6.3), con la diferencia que ahora debemos calcular las posiciones y velocidades de los cuerpos no en uno, sino en muchos tiempos (valores que nos servirán para calcular los promedios.) El siguiente algoritmo prepara la información básica requerida para nuestro cálculo:

```
#Constante de gravedad universal
G=6.67e-20 # km^3 / kg s^2

#Carga kernels con posiciones (bsp) y masas (tpc)
import spiceypy as spy
spy.furnsh('pymcel/data/de430.bsp')
spy.furnsh('pymcel/data/de430.tpc')

#Número de valores de tiempo
Nt=100

#Lista de tiempos en los que calcularemos el virial:
#Tomamos 60 años que es aprox. 2 veces el período de Saturno
from numpy import linspace
tefs=linspace(0.0,60*356.25*86400,Nt)

#Masas de los cuerpos
msol=spy.bodvrd("SUN","GM",1)[1][0]/G
mjupiter=spy.bodvrd("JUPITER_BARYCENTER","GM",1)[1][0]/G
msaturno=spy.bodvrd("SATURN_BARYCENTER","GM",1)[1][0]/G
```

Con estos datos en mano podemos calcular ahora la energía cinética del sistema, la energía potencial (Ec. 6.12) y la energía total, para cada valor del tiempo escogido. Una vez calculadas estas cantidades podemos determinar su valor promedio:

```
from numpy.linalg import norm
Ks=[]
Us=[]
Es=[]
for tef in tefs:
    #Posiciones, velocidades, energías cinéticas
    sol,tluz=spy.spkezr("SUN",tef,
                         "ECLIPJ2000","None","SSB")
    rsol=sol[:3]
    vsol=sol[3:]
    K_sol=0.5*msol*norm(vsol)**2

    jupiter,tluz=spy.spkezr("JUPITER_BARYCENTER",tef,
```

```

"ECLIPJ2000","None","SSB")
rjupiter=jupiter[:,3]
vjupiter=jupiter[3,:]
K_jup=0.5*mjupiter*norm(vjupiter)**2

saturno,tluz=spy.spkezr("SATURN_BARYCENTER",tef,
                         "ECLIPJ2000","None","SSB")

rsaturno=saturno[:,3]
vsaturno=saturno[3,:]
K_sat=0.5*msaturno*norm(vsaturno)**2

#Distancias entre los cuerpos
r_jup_sol=norm(rjupiter-rsol)
r_sat_sol=norm(rsaturno-rsol)
r_jup_sat=norm(rjupiter-rsaturno)

#Energia potencial
U_jup_sol=-G*mjupiter*msol/r_jup_sol
U_sat_sol=-G*msaturno*msol/r_sat_sol
U_jup_sat=-G*mjupiter*msaturno/r_jup_sat

#Energia cinética, potencial y mecánica
Ktot=K_sol+K_jup+K_sat
U=U_jup_sol+U_sat_sol+U_jup_sat
E=Ktot+U

#Guarda valores en la lista
Ks+= [Ktot]
Us+= [abs(U)]
Es+= [abs(E)]

```

$\langle K \rangle = 1.883839013581885e+29 \text{ kg km}^2/\text{s}^2$
 $\langle U \rangle / 2 = -1.8840677890439464e+29 \text{ kg km}^2/\text{s}^2$
 $E = -1.8842965645060087e+29 \text{ kg km}^2/\text{s}^2$

Como vemos, las tres cantidades coinciden (con un margen de error del 0.1 %) con lo esperado a partir del teorema del Virial.

Podemos también hacer un gráfico de K (lista Ks), $|U|$ (lista Us) y $|E|$ (lista Es):

(Algoritmo 6.4)

```

from numpy import max
import matplotlib.pyplot as plt
plt.plot(tefs,Ks,'k-',label="$K$")
plt.plot(tefs,Us,'b--',label="$|U|$")
plt.plot(tefs,Es,'r:',label="$|E|$")

plt.legend()
plt.ylim(0,max(Us));
plt.xlabel("$t_{\{ef\}}$ (segundos)");
plt.ylabel("$K, |U|, |E|$ (Joules)");

```

ver Figura 6.4

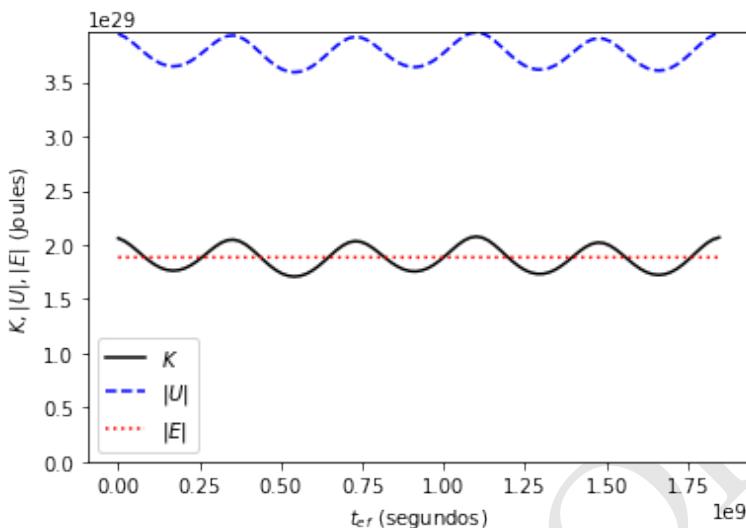


Figura 6.4: Figura correspondiente al código 6.4.

Como podemos ver en la Figura 6.4, los resultados coinciden otra vez con nuestras expectativas:

- La energía total E (línea punteada) es constante, confirmando la validez del teorema de conservación de la energía mecánica en el Sistema Solar.
- El valor promedio de la energía cinética del sistema (promedio de la línea continua) es igual al valor absoluto de la energía total, lo que confirma el teorema del Virial (Ec. 6.26).
- El valor absoluto del promedio de la energía potencial del sistema (promedio de la línea rayada), es el doble que el promedio de la energía cinética, lo que confirma también el teorema del Virial (Ec. 6.25).

6.3.6. Caso de estudio: la masa de cúmulos de galaxias

Otro interesante caso de aplicación del teorema del virial en astronomía, tiene que ver con el estudio la distribución de masa en cúmulos de estrellas y galaxias.

Se dice que un cúmulo de galaxias, estrellas o simplemente de “partículas” de materia oscura, está “virializado”, si ha alcanzado un estado dinámico en el cual el teorema del virial describe apropiadamente los promedios estadísticos de sus propiedades cinemáticas (velocidades y posiciones.) En virtud de las condiciones del Teo. (6.2), esto significa, esencialmente, que el sistema es ligado o estable a largo plazo.

Si asumimos que las partículas del cúmulo tienen una distribución esférica con una densidad aproximadamente uniforme y con un radio característico R_{vir} (dentro del cual hay una masa M_{vir}), la energía potencial promedio del cúmulo será igual a:

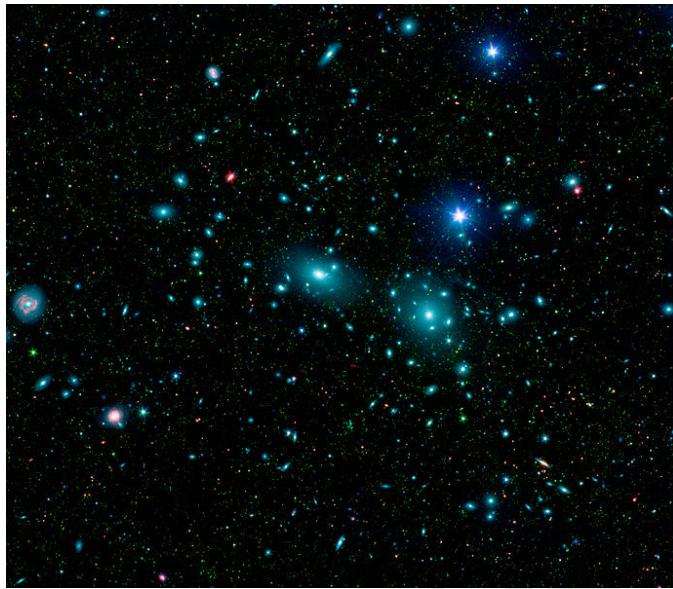


Figura 6.5: Mosaico en falso color del cúmulo de Galaxias de Coma que combina imágenes en luz visible e infrarrojo. Crédito: NASA / JPL-Caltech / L. Jenkins (GSFC).

$$\langle U \rangle = -\frac{3GM_{\text{vir}}^2}{5R_{\text{vir}}}$$

Por su parte si asumimos que todas las partículas tienen la misma masa, el promedio de la energía cinética total será:

$$\langle K \rangle = \frac{1}{2}M_{\text{vir}}\langle v^2 \rangle$$

Usando el teorema del virial obtenemos:

$$\frac{3GM_{\text{vir}}}{5R_{\text{vir}}} = \langle v^2 \rangle \quad (6.28)$$

Si se puede estimar o medir el radio del sistema y el promedio del cuadrado de las rapideces de las partículas, la masa se puede de un cúmulo se puede estimar usando:

$$M_{\text{vir}} = \frac{5R_{\text{vir}}\langle v^2 \rangle}{3G}$$

En el algoritmo a continuación estimamos la masa de virial del cúmulo de Coma (ver [Figura 6.5](#)) para el cuál se ha estimado que $R_{\text{vir}} \approx 2 \times 10^6$ pc (parsecs⁴⁰) y $\langle v^2 \rangle^{1/2} \approx 1,000$ km/s (datos obtenidos de [26] y [49] respectivamente):

⁴⁰1 parsec = 3.26 a.l., 1 año-luz = $9,46 \times 10^{12}$ km

(Algoritmo 6.5)

```

#Constante gravitacional
G=6.67e-20 # km^3 / kg s^2

#Parsec y año-luz
pc=3.26
al=9.46e12 #km

#Radio del viral
Rvir=2e6*pc*al

#Dispersión de velocidades
v2=1000**2

#Masa del virial del cúmulo
Mvir=5*Rvir*v2/(3*G)

```

Masa del virial del cúmulo de Coma:

$1.5412093953023487 \times 10^{45}$ kg

Que equivale a $\sim 7 \times 10^{14} M_{\odot}$ ($1 M_{\odot} \approx 2 \times 10^{30}$ kg), o lo que es lo mismo a la masa de las estrellas y el gas de unas 10.000 galaxias típicas.

Un poco de historia

Fritz Zwicky, el teorema del virial y la materia oscura. La estimación de la masa del cúmulo de Coma, usando el teorema del virial, que presentamos aquí, reproduce el trabajo del reconocido astrónomo suizo Fritz Zwicky (“[Fritz tsviky](#)”), uno de los primeros en aplicar el teorema en Astronomía.

En 1933, Zwicky presentó en la revista Suiza *Helvetica Physica Acta* un artículo titulado “*El desplazamiento al rojo de las nebulosas extragalácticas*”. En este artículo, usando estimaciones del número y la masa de las galaxias del Cúmulo (que midió a partir de su luminosidad), así como medidas de su radio aproximado, Zwicky calculó la dispersión de velocidades $\langle v^2 \rangle$ con la Ec. (6.28).

Para su sorpresa las velocidades típicas estimadas con el teorema del virial para las galaxias en el cúmulo, $\langle v^2 \rangle^{1/2} \approx 80$ km/s, eran casi 10 veces menores que las que se obtenían al medir el corrimiento spectral de la luz de las galaxias. Es decir, las galaxias reales se estaban moviendo tan rápido en el cúmulo que este sistema no podría estar ligado (satisfacer el teorema del virial).

Otra posibilidad era que la masa usada en la Ec. (6.28) y que el supuso podía estimar a partir de la materia luminosa de las galaxias, fuera en realidad 10 veces mayor. Esto implicaba la existencia de una forma de materia invisible (que no emite luz) y que Zwicky llamó en su artículo en alemán *dunkle Materie* o Materia oscura.

En 1937, Zwicky publicó, en inglés, una versión extendida de su trabajo en la prestigiosa revista americana *The Astrophysical Journal* ([52]), donde estimó la masa del cúmulo, a partir de la dispersión de velocidades medida, siguiendo un procedimiento similar al desarrollado aquí. El resultado confirmó sus estimaciones de 1933: el cúmulo de Coma, que contiene unas ~ 1000 galaxias, tiene una masa equivalente a ~ 10000 galaxias (tal y como estimamos en el Algoritmo ??.) Es decir el contenido de materia oscura del cúmulo, supera por un factor de ~ 10 el de materia luminosa (estrellas y nubes de gas).

Un poco de historia (Cont.)

Hoy la existencia de la materia oscura es soportada por un gran número de observaciones diferentes (curvas de rotación de galaxias, formación de grandes estructuras, lentes gravitacionales, etc.) pero su naturaleza física (en el tiempo de Zwicky se sospechaba que podría ser simplemente materia convencional poco luminosa) ha escapado a los más sesudos esfuerzos teóricos y a las más delicadas búsquedas experimentales. A la fecha de preparación de este libro el misterio de la composición de la materia oscura, cuya existencia fue sugerida por una ingeniosa aplicación del teorema del virial, sigue abierto.

^a<https://es.forvo.com/search/Fritz%20Zwicky/en/>

6.4. Solución numérica

Como mencionamos en la Sección 6.1, contrario a lo que dice el mito popular, para finales de los 1900, el problema de los N cuerpos había sido resuelto finalmente [50],[46],[4]. Es decir, hoy conocemos series convergentes que permiten calcular con precisión arbitraria la posición y velocidad de un número cualquiera de partículas siempre y cuando su momento angular total sea cero; o de hasta tres partículas si el momento angular es distinto de cero [50]. Sin embargo, la convergencia de esas series es tan lenta que en términos prácticos su utilidad es casi nula. Más allá entonces de demostrar que la solución analítica es posible, estos trabajos no resolvieron el problema, también urgente, de encontrar fórmulas que puedan usarse en situaciones reales para predecir la posición de un sistema de partículas que interactúan gravitacionalmente.

Hoy por hoy, el método más utilizado por los astrónomos e ingenieros aeroespaciales para la solución al problema de los N cuerpos en mecánica celeste consiste en resolver numéricamente las ecuaciones de movimiento del sistema. En las próximas secciones exploraremos algunos algoritmos, métodos y herramientas para obtener dicha solución y que serán de utilidad en el resto del libro.

Si bien podría pensarse que presentar en este punto del libro la solución numérica al problema de los N cuerpos agota el problema y reduce la mecánica celeste a la aplicación de un conjunto de técnicas numéricas, nada esta en realidad más lejos de la verdad. Como veremos en los próximos capítulos, aún en la ausencia de una solución analítica práctica y en presencia de poderosos métodos numéricos para aproximar la solución para configuraciones arbitrarias de cuerpos, existen muchos resultados teóricos de interés que permiten describir analíticamente una amplia diversidad de sistemas físicos. La introducción de métodos numéricos en esta parte del libro tiene el propósito de proveernos un conjunto de poderosas herramientas que permitiran poner a prueba los desarrollos teóricos del resto del libro.

De alguna manera, las herramientas introducidas aquí nos permitirán construir laboratorios virtuales de mecánica celeste para poner a prueba nuestras ideas teóricas. Un laboratorio del que lamentablemente no disponíamos en la naturaleza antes del advenimiento de los computadores.

6.4.1. Unidades canónicas

La fuerza gravitacional es la fuerza más débil del Universo. Por esta razón el valor de la constante que determina su intensidad G es muy pequeño, por lo menos cuando es medido en las unidades que hemos definido en la vida cotidiana para los patrones de longitud, tiempo y masa. En el Sistema Internacional $G \sim 10^{-10}$ (en lo sucesivo \sim no se usará para indicar el valor aproximado de una cantidad, sino su *orden de magnitud*.)

De otro lado, en Astronomía, las cantidades involucradas en el cálculo de la fuerza gravitacional (Ec. 5.26), es decir, las masas de los cuerpos m_i y sus distancias mutuas r_{ij} , tienen valores enormes en esas mismas unidades. Así por ejemplo en el sistema Tierra-Sol, $m \sim 10^{24} - 10^{30}$ kg y $r \sim 10^{11}$ m.

Con el propósito de evitar la combinación de cantidades muy grandes y muy pequeñas en las mismas ecuaciones, se ha convenido en utilizar un sistema de unidades en el cuál todas las cantidades implicadas tengan, por un lado, una magnitud similar y por el otro sus valores sean de orden uno.

Resulta notable que las dimensiones o unidades de la constante de gravitación universal G :

$$[G] = \frac{L^3}{MT^2},$$

combinen los patrones usados para definir todas las cantidades físicas relevantes en mecánicos. Este hecho implica, que si ajustamos el valor de estas tres unidades fundamentales, podríamos obtener casi cualquier valor que deseáramos para G .

Supongamos, por ejemplo, que definimos un sistema de unidades nuevo, \mathcal{L} , \mathcal{M} , \mathcal{T} (que denotan la unidad de longitud, masa y tiempo respectivamente), para el cual, en unidades del SI, los factores de conversión son iguales a U_L , U_M y U_T respectivamente. En este sistema de unidades, para convertir, por ejemplo, una distancia medida en \mathcal{L} a la misma distancia pero medida en m (metros) es necesario multiplicar la distancia por U_L .

Así por ejemplo, en astronomía podríamos escoger medir las longitudes (y todas las cantidades derivadas) en *Unidades Astronómicas* (UA o AU, por sus siglas en inglés), en lugar de hacerlo en metros. Como sabemos que $1 \text{ AU} = 1,496 \times 10^8 \text{ km} = 1,496 \times 10^{11} \text{ m}$, entonces en este sistema de unidades, $\mathcal{L} : \text{AU}$ y $U_L = 1,496 \times 10^{11} \text{ m}$. Así mismo, podríamos escoger medir la masa en unidades de la masa del sol M_\odot (como se acostumbra hacerlo por ejemplo en astronomía estelar). En este caso $\mathcal{M} : M_\odot$, $U_M = 1,98 \times 10^{30} \text{ kg}$.

El propósito original de las unidades canónicas en mecánica celeste es conseguir que, en este nuevo sistema de unidades, el valor de la constante de gravitación universal sea pequeño y de orden 1. Dada la arbitrariedad de nuestra elección, podemos ir más lejos e imponer la condición de que la constante tenga un valor exactamente igual a 1. Así, los cálculos en los que aparezca la constante se simplificarán considerablemente.

En el sistema definido en el ejemplo antes, si escogemos una unidad de tiempo \mathcal{T} tal que $U_T = 5033865$ segundos (ver justificación abajo), el valor de la constante de gravitación será:

$$G = 6,67308 \times 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2} \times \left(\frac{\text{AU}}{1,496 \times 10^{11} \text{ m}} \right)^3 \left(\frac{1,98 \times 10^{30} \text{ kg}}{M_{\odot}} \right)^2 \left(\frac{5033865 \text{ s}}{\mathcal{T}} \right)$$

$$= 1 \frac{\text{AU}^3}{M_{\odot} \mathcal{T}^2}$$

Decimos que AU, M_{\odot} , \mathcal{T} forman un conjunto de unidades canónicas.

Definición 6.3

Unidades canónicas. A un conjunto de unidades $\mathcal{L}, \mathcal{M}, \mathcal{T}$ con factores de conversión U_L, U_M, U_T se los llama *unidades canónicas* en mecánica celeste, si se cumple que:

$$G \frac{U_M^2 U_T}{U_L^3} = 1 \frac{\mathcal{L}^3}{\mathcal{M} \cdot \mathcal{T}^2}$$

donde $G = 6,67308 \times 10^{-11} \text{m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2}$. En términos estrictamente numéricos, un sistema de unidades canónicas es aquel en el que se cumple la igualdad:

$$G = \frac{U_L^3}{U_M^2 U_T} \quad (6.29)$$

En la práctica, en la Ec. (6.29), si fijamos el valor de dos de los factores de conversión, podemos encontrar el valor del tercer factor.

En el ejemplo anterior, una vez definimos $U_L = 1,496 \times 10^{11} \text{ m}$ y $U_M = 1,98 \times 10^{30} \text{ kg}$, entonces

$$U_T = \sqrt{\frac{U_L^3}{G U_M}},$$

que numéricamente es:

```
G=6.67308e-11 # m^3/kg/s
UL=1.496e11 #m
UM=1.98e30 #kg

UT=(UL**3/(G*UM))**0.5 #s
```

```
UT = 5033865.755208481 segundos
    = 1398.296043113467 horas
    = 58.26233512972779 días
    = 0.15951080126450734 años
```



Nota

Escalas naturales en un sistema gravitacional. Es interesante anotar que el valor del factor de conversión de tiempo U_T obtenido con este procedimiento no es completamente arbitrario. Cuando U_T se expresa en años, su valor es diferente, por poco menos de un factor de 10, del período de revolución de la Tierra alrededor del Sol (1 año). Esto hecho es notable en tanto para deducir el valor esta *escala de tiempo* nos validamos únicamente del valor de la constante gravitacional, la masa del sol y la distancia de la Tierra. No fue necesario resolver las ecuaciones de movimiento o tener una teoría completa del movimiento orbital.

Decimos que la **escala de tiempo** característica de la dinámica sistema Tierra-Sol (que podríamos considerar similar al período orbital de la Tierra) se puede estimar combinando apropiadamente la constante de gravitación universal (intensidad de la interacción) con la masa del sistema y la separación característica de los cuerpos que lo constituyen. Un procedimiento similar puede usarse para obtener, a partir de la constante de gravitación, la **escala de longitud** (en caso que se provean las unidades de masa y tiempo) o la **escala de masa** (en caso que se provean las unidades de longitud y tiempo) de un sistema físico.

A partir del sistema de unidades canónicas introducidas, es posible definir los patrones de medida para todas las restantes cantidades mecánicas:

$$\begin{aligned} UV &= UL/UT \\ UA &= UL/UT^{**2} \\ UF &= UM*UA \\ UP &= UM*UV \\ UH &= UM*UL*UP \\ UE &= UM*UL^{**2}/UT^{**2} \end{aligned}$$

Velocidad, $UV = 29718.710683774327 \text{ m/s}$

Aceleración, $UA = 0.005903755111670335 \text{ m/s}^{**2}$

Fuerza, $UF = 1.1689435121107264e+28 \text{ N}$

Momento lineal, $UP = 5.884304715387317e+34 \text{ kg m/s}$

Momento angular, $UH = 1.7429781311354465e+76 \text{ kg m}^{**2}/\text{s}$

Energía, $UE = 1.7487394941176467e+39 \text{ kg m}^{**2}/\text{s}^{**2}$

De nuevo, como sucede con la unidad de tiempo, estas unidades no son solo el producto de operaciones aritméticas entre cantidades “arbitrarias”. Sus valores nos dan una idea de las escalas (valores típicos) de cada cantidad en el sistema.

Así, por ejemplo, la unidad de velocidad, $UV \approx 29,8 \text{ km/s}$ coincide con la velocidad orbital promedio de la Tierra alrededor del Sol; la unidad de aceleración $UA \approx 0,006 \text{ m/s}^2$ es del orden de la aceleración de la gravedad del Sol medida a la distancia promedio de la Tierra al Sol, etc.

Historias de la mecánica celeste

Unidades canónicas. La motivación presentada aquí para la introducción de las unidades canónicas no es la misma que la que se esboza en textos clásicos de la disciplina. En realidad en distintos tiempos, han sido otras las razones para usar un sistema de unidades propio en mecánica celeste.

Particularmente interesantes, son las razones expuestas en el texto clásico de Roger Bate, Donald Mueller y Jerry White, “*Fundamentals of Astrodynamics*” [7]. De acuerdo a Bate y colaboradores, después de la segunda guerra mundial durante la que se desarrollaron los primeros misiles balísticos de largo alcance (los temidos V2), quedó claro que los humanos podríamos alcanzar el espacio y viajar por nuestro sistema planetario. Para navegar el Sistema Solar, sin embargo, era necesario conocer muy bien las masas y distancias relativas de los grandes cuerpos astronómicos que dominarían la dinámica de esos vehículos espaciales. Para la época, sin embargo (incluso para 1971, cuando fue escrito el texto de Bate y compañía) el valor de la distancia Tierra-Sol y la masa de nuestra estrella, no eran conocidas con gran precisión. Este hecho motivó a muchos a resolver los primeros problemas de mecánica celeste práctica o *mecánica orbital*, asignando a estas cantidades desconocidas un valor de 1 (unidades de masa y distancia) y calculando todas las propiedades relevantes del problema en términos de ellas. Este fue el origen del uso de unidades canónicas, al menos, en el contexto de la mecánica orbital de finales de los 1900.

6.4.2. Las ecuaciones de movimiento reducidas

En unidades canónica, las ecuaciones de movimiento del sistema de N cuerpos se escriben de la misma manera que en la Ec. (6.1):

$$\left\{ \ddot{\vec{r}}_i = - \sum_{j \neq i} \frac{\mu_j}{r_{ij}^3} \vec{r}_{ij} \right\}_N \quad (6.30)$$

La diferencia es que ahora $\mu_j = m_j$.

Nota

Unidades del parámetro gravitacional. El hecho de que en unidades canónicas el valor numérico del parámetro gravitacional de un cuerpo $\mu = Gm$ coincida con el valor la masa m , no debe llevarnos a confundir las dos cantidades físicas. No debemos perder de vista que el patrón de μ es L^3/T^2 , mientras que el de m es, por definición, M . En la igualdad $\mu_j = m_j$ se “oscurece” el efecto que tiene la constante gravitacional en el equilibrio dimensional (las unidades a ambos lados de la ecuación no son las mismas.) En términos rigurosos $\mu_j = m_j$ es una expresión dimensionalmente incorrecta, pero es común que se use esta sustitución en algunos contextos. No debemos nunca perder de vista este hecho, especialmente cuando manipulamos sistemas físicos reales.

Con el propósito de resolver numéricamente este sistema de ecuaciones diferenciales, usando los métodos y herramientas que introdujimos en la Sección 5.2.6,

es necesario primero escribir las ecuaciones (6.30) en su forma reducida más general (Ec. 4.27):

$$\{\dot{Y}_i = f_i(\{Y_k\}, t)\}_{6N},$$

y para ello, primero debemos introducir las funciones auxiliares $Y_i(t)$ que identificaremos con las funciones relevantes en el problema $\{x_i(t), y_i(t), z_i(t), \dot{x}_i(t), \dot{y}_i(t), \dot{z}_i(t)\}_N$.

Una elección posible de esta identificación puede ser la siguiente:

$$\begin{aligned} Y_0 &= x_0, & Y_1 &= y_0, & Y_2 &= z_0 \\ Y_3 &= x_1, & Y_4 &= y_1, & Y_5 &= z_1 \\ &\dots &&&& \\ Y_{3N-3} &= x_{N-1}, & Y_{3N-2} &= y_{N-1}, & Y_{3N-1} &= z_{N-1} \\ Y_{3N+0} &= \dot{x}_0, & Y_{3N+1} &= \dot{y}_0, & Y_{3N+2} &= \dot{z}_0 \\ Y_{3N+3} &= \dot{x}_1, & Y_{3N+4} &= \dot{y}_1, & Y_{3N+5} &= \dot{z}_1 \\ &\dots &&&& \\ Y_{6N-3} &= \dot{x}_{N-1}, & Y_{6N-2} &= \dot{y}_{N-1}, & Y_{6N-1} &= \dot{z}_{N-1} \end{aligned}$$

es decir, asignaremos a la primera mitad de los elementos de la lista $\{Y_i\}$ las coordenadas de las partículas (en total $3N$ funciones) y a la segunda mitad las componentes de las velocidades respectivas (otras $3N$ funciones.)

Podrían usarse asignaciones diferentes. Sin embargo, esta manera de separar las coordenadas y las componentes de las velocidades, permiten escribir las reglas de indentificación de una forma general como:

$$\begin{aligned} Y_{3i} &= x_i, & Y_{3i+1} &= y_i, & Y_{3i+2} &= z_i \\ Y_{3N+3i} &= \dot{x}_i, & Y_{3N+3i+1} &= \dot{y}_i, & Y_{3N+3i+2} &= \dot{z}_i \end{aligned} \quad (6.31)$$

Con $i = 0, 1, 2, \dots, N - 1$.

Ahora bien, para la partícula i , la Ec. (6.30) se puede escribir en términos de las funciones originales como:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_i &= -\sum_{j \neq i} \mu_j (x_i - x_j) / r_{ij}^3 \\ \ddot{y}_i &= -\sum_{j \neq i} \mu_j (y_i - y_j) / r_{ij}^3 \\ \ddot{z}_i &= -\sum_{j \neq i} \mu_j (z_i - z_j) / r_{ij}^3 \end{aligned}$$

Con $r_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2}$.

Pero en términos de las funciones auxiliares y las identificaciones definidas anteriormente, estas ecuaciones se puede escribir como:

$$\begin{aligned} \dot{Y}_{3N+3i} &= -\sum_{j \neq i} \mu_j (Y_{3i} - Y_{3j}) / r_{ij}^3 \\ \dot{Y}_{3N+3i+1} &= -\sum_{j \neq i} \mu_j (Y_{3i+1} - Y_{3j+1}) / r_{ij}^3 \\ \dot{Y}_{3N+3i+2} &= -\sum_{j \neq i} \mu_j (Y_{3i+2} - Y_{3j+2}) / r_{ij}^3 \end{aligned}$$

con

$$r_{ij} = \sqrt{(Y_{3i} - Y_{3j})^2 + (Y_{3i+1} - Y_{3j+1})^2 + (Y_{3i+2} - Y_{3j+2})^2} \quad (6.32)$$

Las ecuaciones de movimiento en términos de las funciones auxiliares se pueden escribir de forma general:

$$\dot{Y}_k = - \sum_{j \neq i} \mu_j (Y_{3i+l} - Y_{3j+l}) / r_{ij}^3$$

Donde $k = 3N, 3N + 1, \dots, 6N - 1$, $l = k \bmod 3$ (residuo de la división de k entre 3, que siempre será un número entre 0 y 2) e $i = \lfloor (k - 3N)/3 \rfloor$ (valor entero más pequeño que el número resultante de dividir $k - 3N$ por 3).

Con la asignación anterior, las e.d.m.r. del problema de los N cuerpos se pueden escribir finalmente como:

$$\dot{Y}_k = \begin{cases} Y_{3N+k} & , \quad 0 \leq k < 3N \\ -\sum_{j \neq i} \mu_j (Y_{3i+l} - Y_{3j+l}) / r_{ij}^3 & , \quad 3N \leq k < 6N \end{cases} \quad (6.33)$$

donde $l = k \bmod 3$ e $i = \lfloor (k - 3N)/3 \rfloor$ y r_{ij} esta definido por Ec. (6.32).

6.4.3. Algoritmo de solución

Para resolver numéricamente las e.d.m.r. del problema de los N cuerpos usando los métodos introducidos en la Sección 5.2.6, debemos implementar primero las Ecs. (6.33) como una rutina:

(Algoritmo 6.6)

```
def edm_ncuerpos(Y, t, N=2, mus=[]):
    from numpy import zeros, floor
    dYdt=zeros(6*N)

    #Primer conjunto de ecuaciones
    dYdt[:3*N]=Y[3*N:]

    #Segundo conjunto de ecuaciones
    for k in range(3*N,6*N):
        l=k%3
        i=int(floor((k-3*N)/3))
        for j in range(N):
            if j==i:continue
            rij=(Y[3*i]-Y[3*j])**2+\n                  (Y[3*i+1]-Y[3*j+1])**2+\n                  (Y[3*i+2]-Y[3*j+2])**2
            dYdt[k]+=-mus[j]*(Y[3*i+1]-Y[3*j+1])/rij**1.5

    return dYdt
```

Para ilustrar la solución al problema, supongamos que queremos predecir la posición en $t = 1$ (en unidades canónicas) de las partículas que conforman el sistema mostrado en la Figura 6.6.

Las propiedades del sistema (masas y número de partículas) y las condiciones iniciales indicadas en la Figura, pueden expresarse, en términos de las variables auxiliares $\{Y_k\}$, de la siguiente manera:

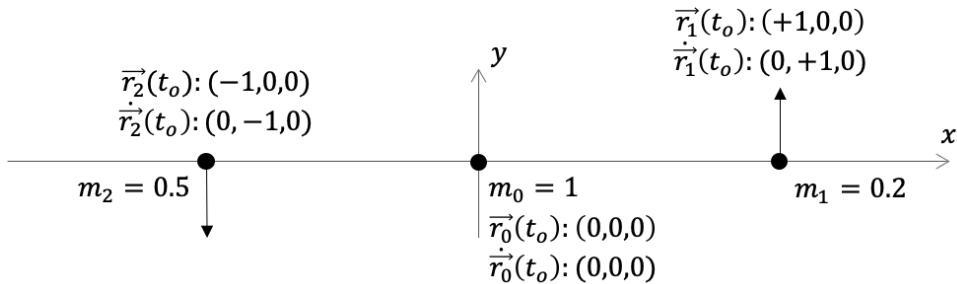


Figura 6.6: Sistema de tres cuerpos de ejemplo (todas las cantidades están expresadas en unidades canónicas)

```
#Número de partículas
N=3
#Parámetros gravitacionales o masas de las partículas
mus=[1.0,0.2,0.5]
#Estado inicial del sistema
Y0s=[
    #Posición cuerpo 0
    0,0,0,
    #Posición cuerpo 1
    1,0,0,
    #Posición cuerpo 2
    -1,0,0,
    #Velocidad cuerpo 0
    0,0,0,
    #Velocidad cuerpo 1
    0,1,0,
    #Velocidad cuerpo 2
    0,-1,0,
]
```

La solución la obtenemos usando odeint:

```
from scipy.integrate import odeint
solucion=odeint(edm_ncuerpos,Y0s,[0.0,1.0],args=(3,mus))
```

Solución:

```
array([[ 0.          ,  0.          ,  0.          ,  1.          ,  0.          ,
        0.          , -1.          ,  0.          ,  0.          ,  0.          ,
        0.          ,  0.          ,  0.          ,  1.          ,  0.          ,
        0.          , -1.          ,  0.          ],
       [-0.15068697, -0.06168292,  0.          ,  0.49242022,  0.83105115,
        0.          , -0.49559416, -0.80905462,  0.          , -0.29283302,
       -0.20870151,  0.          , -0.91545262,  0.52712521,  0.          ,
        0.95184709, -0.39344707,  0.          ]])
```

La matriz resultante tiene, como filas, el estado de las partículas del sistema para cada uno de los instantes provistos en el vector de valores de tiempo (en este

caso $[0.0, 1.0]$). Así, la fila 0 no es otra cosa que las mismas condiciones iniciales provistas. Por otro lado, la fila 1 contiene el estado del sistema en el tiempo $t = 1$, que es justamente la información que necesitábamos obtener.

Las columnas de la matriz de solución, por otro lado, contienen los valores de la variable auxiliar Y_k , que a su vez corresponden a las posiciones y velocidades de las partículas, de acuerdo a las reglas definidas en Ec. (6.31). Así, las columnas 0, 1 y 2, contienen el vector posición de la partícula 0. Las columnas 3, 4 y 5, la posición de la partícula 1 y las columnas 6, 7 y 8, la posición de la partícula 2. De otro lado, las columnas 9, 10 y 11, contendrán las componentes de la velocidad de la partícula 0 y así sucesivamente.

Una forma más apropiada de manipular la matriz solución puede ser asignar el valor de sus columnas a vectores (o mejor, matrices) con nombres que nos recuerden el hecho que almacenan posiciones y velocidades de las diferentes partículas. Así por ejemplo, las posiciones y velocidades de la partícula 0, en cada uno de los tiempos en los que se realiza la integración, $\vec{r}_0(t), \dot{\vec{r}}_0(t)$, pueden almacenarse usando las matrices $r0s$ y $v0s$:

```
r0s=solucion[:,0:3]
v0s=solucion[:,9:12]

r_0(t)
= [[ 0.          0.          0.          ]
 [-0.15068697 -0.06168292  0.          ]]
v_0(t)
= [[ 0.          0.          0.          ]
 [-0.29283302 -0.20870151  0.          ]]
```

En general, las posiciones o velocidades de todas las partículas del sistema, $\vec{r}_i(t), \dot{\vec{r}}_i(t)$, pueden almacenarse en matrices rs o vs , tal que, para obtener para una partícula, el valor de una componente del vector posición o de la velocidad, en un determinado tiempo, la regla será:

```
rs[Partícula,Tiempo,Componente]
vs[Partícula,Tiempo,Componente]
```

Así, $rs[0, 1, 2]$ corresponderá a la coordenada z (componente 2), en el tiempo 1, para la partícula 0. Por su parte $vs[1, :, 0]$ serán todos los valores (elipsis :) de la coordenada x (componente 0), para la partícula 1.

El algoritmo para convertir la matriz de solución en rs y vs se presenta a continuación:

(Algoritmo 6.7)

```
import numpy as np
rs=np.zeros((N,2,3))
vs=np.zeros((N,2,3))
for i in range(N):
    rs[i]=solucion[:,3*i:3*i+3]
    vs[i]=solucion[:,3*N+3*i:3*N+3*i+3]

rs =
[[[ 0.          0.          0.          ]
 [ 0.          0.          0.          ]
 [ 0.          0.          0.          ]]]
```

```

[-0.15068697 -0.06168292  0.          ]
[[ 1.          0.          0.          ]
 [ 0.49242022  0.83105115  0.          ]]
[[[-1.          0.          0.          ]
 [-0.49559416 -0.80905462  0.          ]]
vs =
[[[ 0.          0.          0.          ]
 [-0.29283302 -0.20870151  0.          ]]
[[ 0.          1.          0.          ]
 [-0.91545262  0.52712521  0.          ]]
[[ 0.          -1.          0.          ]
 [ 0.95184709 -0.39344707  0.          ]]

```

Finalmente, con la solución parametrizada apropiadamente, podemos escribir el algoritmo requerido para mostrar, gráficamente la posición de las partículas en el espacio:

(Algoritmo 6.8)

```

import matplotlib.pyplot as plt
fig=plt.figure()
ax=fig.gca()

for i in range(N):
    ax.plot(rs[i,:,0],rs[i,:,1],marker='o');

from pymcel.plot import fija_ejes_proporcionales
fija_ejes_proporcionales(ax,rs);

```

ver Figura 6.7

Todo el procedimiento descrito en los códigos anteriores, puede condensarse en pocas líneas, si se diseñan rutinas adecuadas para convertir las condiciones iniciales de un sistema de partículas en el vector de valores iniciales de las variables auxiliares Y_0 s o para convertir la matriz de solución en las matrices de posición rs y velocidad vs .

Podemos, por ejemplo, expresar las condiciones iniciales del sistema usando una estructura de datos más *legible*, p.e. una lista de diccionarios:

```

sistema_ejemplo=[  
    dict(m=1.0,r=[0.0,0.0,0.0],v=[0.0,0.0,0.0]),  
    dict(m=0.2,r=[1.0,0.0,0.0],v=[0.0,1.0,0.0]),  
    dict(m=0.5,r=[-1.0,0.0,0.0],v=[0.0,-1.0,0.0]),  
]

```

Para convertir esta estructura en el vector con las condiciones iniciales de las variables auxiliares usaremos la siguiente rutina:

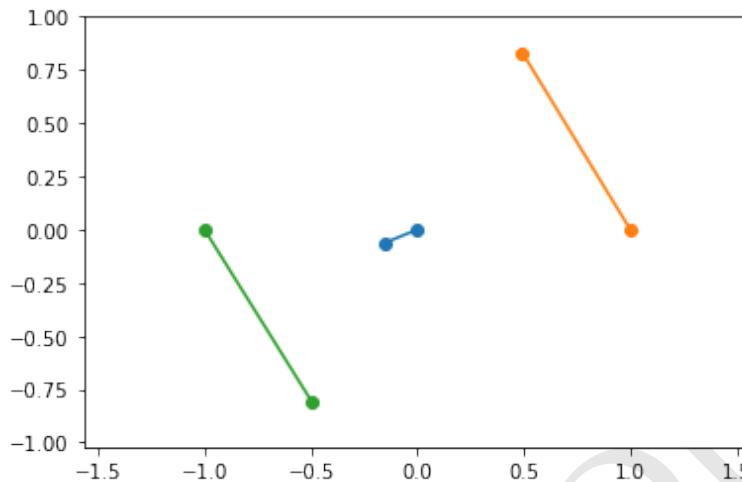


Figura 6.7: Figura correspondiente al código 6.8. Posiciones y velocidades de las partículas en el sistema de ejemplo, en el tiempo inicial y en $t = 1$ (en unidades canónicas).

(Algoritmo 6.9)

```
def sistema_a_Y(sistema):
    mus=[]
    r0s=[]
    v0s=[]
    N=0
    for particula in sistema:
        m=particula['m']
        if m>0:
            mus+=[m]
            r0s+=list(particula["r"])
            v0s+=list(particula["v"])
            N+=1
    from numpy import array
    Y0s=array(r0s+v0s)
    mus=array(mus)
    return N,mus,Y0s
```

Nótese que en la rutina hemos usado inicialmente listas (p.e. `mus=[]`) pero para devolver el resultado de la rutina, convertirmos esas listas en arreglos de NumPy (p.e. `mus=array(mus)`) que tienen propiedades más adecuadas para su manipulación posterior. También debe tenerse cuidado con la línea `Y0s=array(rs+vs)` donde se da a entender que estamos *sumando* posiciones y velocidades (peras con manzanas.) Debemos recordar aquí (ver la Sección 4.1.1) que dado que en el algoritmo `rs` y `vs` son listas, la suma indica la unión de esas listas (para formar la lista `Y0s`) y no la suma vectorial de ellas.

Un último detalle codificado en la rutina `sistema_a_Y` (que usaremos mucho en lo que queda de este libro) es que si la masa de una partícula en el diccionario `sistema` se fija en 0, la partícula no será incluida en las condiciones iniciales

(esa es justamente la función del condicional que comienza con `if m>0:....`) Esta condición puede ser de utilidad para agregar y quitar partículas a un sistema sin necesidad de borrar o comentar sus condiciones iniciales en el diccionario de sistema.

Por otro lado, para convertir la matriz `solucion` en matrices de posición y velocidad, `rs` y `vs`, tal y como lo hicimos en el Alg. (6.7), usaremos la siguiente rutina:

(Algoritmo 6.10)

```
def solucion_a_estado(solucion,Nparticulas,Ntiempos):
    from numpy import zeros
    rs=zeros((Nparticulas,Ntiempos,3))
    vs=zeros((Nparticulas,Ntiempos,3))
    for i in range(Nparticulas):
        rs[i]=solucion[:,3*i:3*i+3]
        vs[i]=solucion[:,3*Nparticulas+3*i:3*Nparticulas+3*i+3]
    return rs,vs
```

Con todos estos elementos a la mano, un algoritmo completo para expresar las condiciones iniciales del sistema en Figura 6.6, encontrar la solución numérica a las e.d.m.r. para 50 valores del tiempo entre $t_0 = 0,0$ y $t = 5,0$ (en unidades canónicas) y visualizar la solución, será:

(Algoritmo 6.11)

```
# Definición de las condiciones iniciales
sistema_ejemplo=[
    dict(m=1.0,r=[0.0,0.0,0.0],v=[0.0,0.0,0.0]),
    dict(m=0.2,r=[1.0,0.0,0.0],v=[0.0,1.0,0.0]),
    dict(m=0.5,r=[-1.0,0.0,0.0],v=[0.0,-1.0,0.0]),
]
N,mus,Yo=sistema_a_Y(sistema_ejemplo)

#Tiempo de integración
import numpy as np
Nt=50
ts=np.linspace(0.0,5,Nt,endpoint=True)

# Solución al sistema de ecuaciones diferenciales
from scipy.integrate import odeint
solucion_ejemplo=odeint(edm_ncuerpos,Yo,ts,args=(N,mus))
rs,vs=solucion_a_estado(solucion_ejemplo,N,Nt)

# Componente gráfica del algoritmo
import matplotlib.pyplot as plt
fig=plt.figure()
ax=fig.gca()

for i in range(N):
    ax.plot(rs[i,:,0],rs[i,:,1],marker='o');

from pymcel.plot import fija_ejes_proporcionales
```

```
fija_ejes_proporcionales(ax,rs);
```

ver Figura 6.8

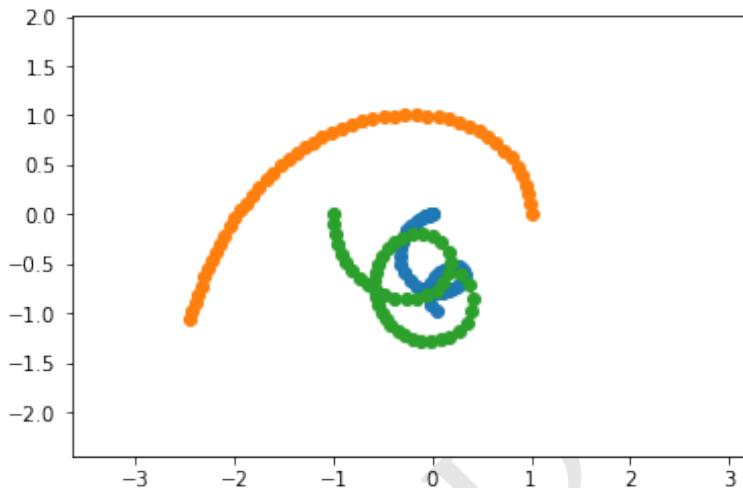


Figura 6.8: Figura correspondiente al código 6.11. Posiciones y velocidades de las partículas en el sistema de ejemplo, entre el tiempo inicial $t_0 = 0$ y $t = 5$ (en unidades canónicas).

Puede encontrar una versión animada o interactiva de este gráfico en la [Sección 6.4.4](#) al final de esta sección.

Dado que en general, el movimiento de los cuerpos en un sistema de muchas partículas, ocurre en el espacio de tres dimensiones, la componente gráfica del algoritmo anterior puede reemplazarse con este código:

(Algoritmo 6.12)

```
def plot_ncuerpos_3d(rs,vs,**opciones):
    #Número de partículas
    N=rs.shape[0]

    import matplotlib.pyplot as plt
    from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
    fig=plt.figure()
    ax=fig.gca(projection='3d')

    for i in range(N):
        ax.plot(rs[i,:,0],rs[i,:,1],rs[i,:,2],**opciones);

    from pymcel.plot import fija_ejes3d_proporcionales
    fija_ejes3d_proporcionales(ax);
    fig.tight_layout();
    plt.show();
```

```
    return fig
```

Que invocamos con:

(Algoritmo 6.13)

```
fig=plot_ncuerpos_3d(rs,vs,marker='.') ;
```

ver Figura 6.9

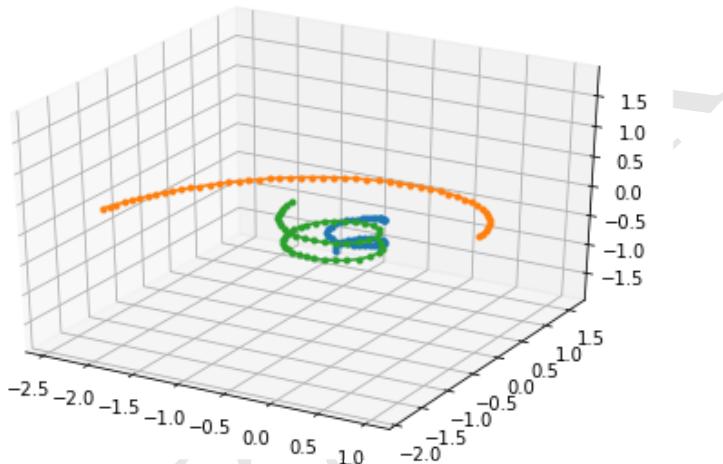


Figura 6.9: Figura correspondiente al código 6.13.

La diferencia de la representación en tres dimensiones de los sistemas, de su representación en dos dimensiones esta en:

- El uso del módulo Axes3D: `from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D`.
- La elección de una proyección específica al definir el espacio de graficación: `ax=fig.gca(projection='3d')`.
- El uso de las coordenadas x, y, z de las posiciones de las partículas, en lugar de solo dos de ellas:

```
ax.plot(rs[i,:,0],rs[i,:,1],rs[i,:,2],marker='o');
```

- Y el ajuste de las escalas de los tres ejes a través de una rutina previamente preparada en el paquete pymcel: `fija_ejes3d_proporcionales(ax)`.

6.4.4. Figuras interactivas

Busque las figuras interactivas y las animaciones incluídas en el [sitio en línea del libro](#)⁴¹.

⁴¹http://seap-udea.org/MecanicaCeleste_Zuluaga

6.4.5. Constantes de movimiento y teorema del virial

Una interesante primera “aplicación” de la solución numérica al problema de los N cuerpos vista en estas secciones, es la de verificar “experimentalmente” los resultados analíticos descritos en la ?? y en la Sección 6.3.

Para ello estudiaremos un sistema de 5 partículas con masas, posiciones y velocidades generadas al azar. La solución numérica a las e.d.m.r. del sistema, obtenida con los métodos vistos en esta sección, nos permitirá obtener las listas de sus posiciones y velocidades para distintos valores del tiempo. Con estas listas podremos calcular y graficar los valores de las constantes de movimiento, momento lineal, momento angular, energía y de las cantidades críticas para el teorema del virial.

Comencemos pues por generar las condiciones iniciales del sistema usando, entre otras cosas, la rutina `sistema_a_Y` del Alg. (6.9) y las rutinas de generación de números aleatorios que usamos en la Sección 5.4.2:

(Algoritmo 6.14)

```
#Número de partículas
N=5

#Generación de las condiciones para cada partícula
from numpy.random import uniform,seed
seed(7)

#Condiciones iniciales
sistema=[]
for i in range(N):
    particula=dict(
        m=uniform(0.0,1.0),
        r=uniform(-1.0,1.0,size=3),
        v=uniform(-1.0,1.0,size=3)
    )
    sistema+=[particula]

N,mus,Y0s=sistema_a_Y(sistema)

#Tiempos
from numpy import linspace
Nt=100
ts=linspace(0.0,10.0,Nt)

print(f"N = {N}")
print(f"mus = {mus}")
print(f"Y0s = {Y0s}")

N = 5
mus = [0.07630829 0.07205113 0.2881456 0.9501295 0.66901324]
Y0s = [ 5.59837584e-01 -1.23181537e-01 4.46930356e-01 -4.63122040e-01
-2.34998349e-04 3.58459992e-01 8.19187055e-01 -5.73229293e-01
-9.57520764e-02 -5.39394242e-01 9.69798385e-02 8.18256750e-01
-6.44942805e-02 -5.90301819e-01 -1.84682218e-02 9.55979024e-01
7.69917408e-02 2.24092732e-03 6.07478072e-01 -2.38117734e-01]
```

```
-8.68127306e-01 8.62412039e-01 -9.50201545e-01 2.01097835e-01
-7.33661108e-01 4.68251613e-02 5.00819718e-01 -2.55230621e-01
-4.51976903e-02 -2.68219228e-01]
```

Ahora podemos resolver las ecuaciones de movimiento y extraer las posiciones y velocidades de las partículas:

```
#Solución
from scipy.integrate import odeint
solucion=odeint(edm_ncuerpos,Y0s,ts,args=(N,mus))

#Extracción de las posiciones y velocidades
rs,vs=solucion_a_estado(solucion,N,Nt)
```

Una gráfica del movimiento de las partículas en tres dimensiones se puede obtener usando la rutina `plot_ncuerpos_3d` que definimos en el Alg. (6.12):

(Algoritmo 6.15)

```
fig=plot_ncuerpos_3d(rs,vs,marker='.');
```

ver Figura 6.10

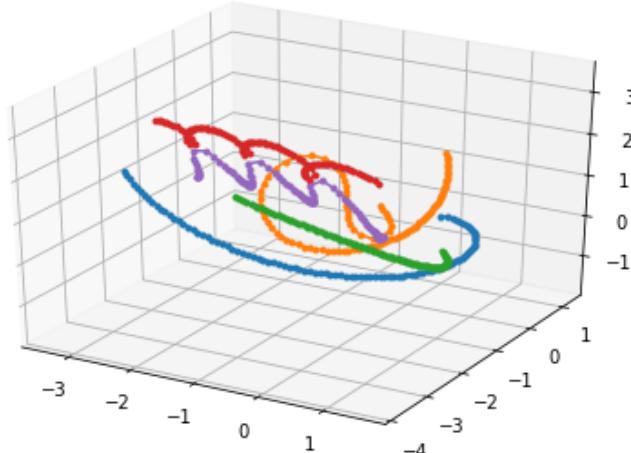


Figura 6.10: Figura correspondiente al código 6.15.

Ahora podemos calcular las constantes de movimiento. En este caso, sin embargo, la dificultad algorítmica estriba en que las posiciones y velocidades de las partículas están guardadas en las matrices `rs` y `vs` que no son triviales de manipular.

Así, por ejemplo el momento lineal inicial de la partícula 0 esta dado por:

```
p_0_0=mus[0]*vs[0,0,:]
```

```
p_0_0 = [0.07294912 0.00587511 0.000171 ]
```

Pero si queremos el momento lineal de esa partícula en cualquier tiempo será:

```
p_0=mus[0]*vs[0,:,:]
p_0(t) =
[[ 0.07294912  0.00587511  0.000171 ]
 [ 0.0653799   0.00154574 -0.00381787]
 [ 0.05898078 -0.00240643 -0.0070324 ]
 [ 0.05337202 -0.00601935 -0.00963238]
 [ 0.04832467 -0.00932501 -0.0117392 ]]
...
```

La cuadratura de momento lineal total C_{PCM} la podemos obtener si sumamos uno a uno los momentos lineales en cada tiempo de todas las partículas del sistema:

```
from numpy import zeros
C_PCM=zeros((Nt,3))
for i in range(N):
    C_PCM=C_PCM+mus[i]*vs[i,:,:]
C_PCM =
[[ -0.50260689 -0.27082582  0.29196827]
 [-0.50260689 -0.27082582  0.29196827]
 [-0.50260689 -0.27082582  0.29196827]
 [-0.50260689 -0.27082582  0.29196827]
 [-0.50260689 -0.27082582  0.29196827]]
...
```

Y como vemos el valor del momento lineal es el mismo, que es lo que esperábamos de acuerdo con la teoría.

Por otro lado la cuadratura de momento angular será:

```
from numpy import zeros,cross
C_L=zeros((Nt,3))
for i in range(N):
    C_L=C_L+mus[i]*cross(rs[i,:,:],vs[i,:,:])
C_L =
[[ 0.05919488 -0.37417055 -0.11685289]
 [ 0.05919488 -0.37417055 -0.11685289]
 [ 0.05919488 -0.37417055 -0.11685289]
 [ 0.05919488 -0.37417055 -0.11685289]
 [ 0.05919488 -0.37417055 -0.11685288]]
...
```

Que de nuevo resulta constante como esperábamos.

Finalmente la cuadratura de energía se puede calcular usando la fórmula para la energía potencial la dada por la Ec. (??):

```

from numpy import zeros
from numpy.linalg import norm

C_E=zeros(Nt)
K=zeros(Nt)
U=zeros(Nt)
for i in range(N):
    K=K+0.5*mus[i]*norm(vs[i,:,:,:],axis=1)**2
    for j in range(N):
        if i==j:continue
        rij=norm(rs[i,:,:]-rs[j,:,:],axis=1)
        U+=-0.5*mus[i]*mus[j]/rij
C_E=K+U

```

C_E = [-0.53641214 -0.53641214 -0.53641214 -0.53641214 -0.53641214] ...

Como vemos el valor de la energía es negativo, lo que podría implicar que el sistema es ligado (tal y como sugieren las trayectorias de las partículas.) Sin embargo, como mencionamos en la [Sección 6.3.2](#) la condición $E < 0$ es necesaria más no suficiente. Para saber si el sistema es ligado debemos evaluar los promedios a largo plazo de las energía cinética y potencial y compararlas con la energía total:

```

E=C_E[0]
Kmean=K.mean()
Umean=U.mean()

print(f"-E = {-E}")
print(f"<K> = {Kmean}")
print(f"-<U>/2 = {-Umean/2}")

-E = 0.5364121422571039
<K> = 0.5201023115823993
-<U>/2 = 0.5282572686928928

```

Como vemos la identidad $\langle K \rangle = -E = -\langle U \rangle / 2$ se cumple aproximadamente para la ventana de tiempo en la que estudiamos el sistema y podríamos sospechar que es estable.

6.4.6. Una algoritmo general

Usando lo visto en esta y en las secciones anteriores, podemos construir ahora un algoritmo general que nos servirá en lo sucesivo para partiendo de la descripción de un sistema de N cuerpos obtener las posiciones y velocidades de las partículas que lo constituyen, resolviendo numéricamente las e.d.m.r. para un determinado conjunto de tiempo provistos.

El algoritmo presentado a continuación define esa rutina. Para ello usa las rutinas definidas en los Algs. [\(6.6, 6.9, 6.10\)](#) y los procedimientos para el cálculo de las constantes de movimiento presentados en la [Sección 6.4.5](#).

(Algoritmo 6.16)

```
def ncuerpos_solucion(sistema,ts):
    #Condiciones iniciales
    from pymcel.export import sistema_a_Y
    N,mus,Y0s=sistema_a_Y(sistema)

    #Masa total
    M=sum(mus)

    #Número de tiempos
    Nt=len(ts)

    #Solución
    from scipy.integrate import odeint
    solucion=odeint(edm_ncuerpos,Y0s,ts,args=(N,mus))

    #Extracción de las posiciones y velocidades
    from pymcel.export import solucion_a_estado
    rs,vs=solucion_a_estado(solucion,N,Nt)

    #Calcula las constantes de movimiento
    from numpy import zeros
    PCM=zeros(3)
    for i in range(N):
        PCM=PCM+mus[i]*vs[i,:,0]

    #Posición del CM como función del tiempo
    RCM=zeros((Nt,3))
    for i in range(N):
        RCM=RCM+mus[i]*rs[i,:,:]
    RCM/=M

    #Momento angular
    from numpy import zeros,cross
    L=zeros(3)
    for i in range(N):
        L=L+mus[i]*cross(rs[i,:,0],vs[i,:,0])

    #Energía total
    from numpy.linalg import norm
    K=zeros(Nt)
    U=zeros(Nt)
    for i in range(N):
        K=K+0.5*mus[i]*norm(vs[i,:,:],axis=1)**2
        for j in range(N):
            if i==j:continue
            rij=norm(rs[i,:,:]-rs[j,:,:],axis=1)
            U+=-0.5*mus[i]*mus[j]/rij
    E=K[0]+U[0]

    #Constantes
```

```

constantes=dict(M=M,
                RCM=RCM,PCM=PCM,
                L=L,K=K,U=U,E=E)

#Posiciones y velocidades relativas al centro de masa
from numpy import subtract
rps=rs-RCM
vps=subtract(vs,PCM/M)

#Devuelve las posiciones y velocidades
return rs,vs,rps,vps,constantes

```

La rutina se invocaría así:

```
rs,vs,rps,vps,constantes=ncuerpos_solucion(sistema,ts)
```

```

M = 2.055647763339272
R_CM_0 = [-0.15092322 -0.23222195  0.38792434]
P_CM = [-0.50260689 -0.27082582  0.29196827]
L = [ 0.05919488 -0.37417055 -0.11685289]
E = -0.5364121422571039
<K> = 0.5201023115823993
<U> = -1.0565145373857856

```

Una representación gráfica de las posiciones de las partículas en el sistema de referencia del centro de masa:

(Algoritmo 6.17)

```
fig=plot_ncuerpos_3d(rps,vps,marker='.'
```

ver Figura 6.11

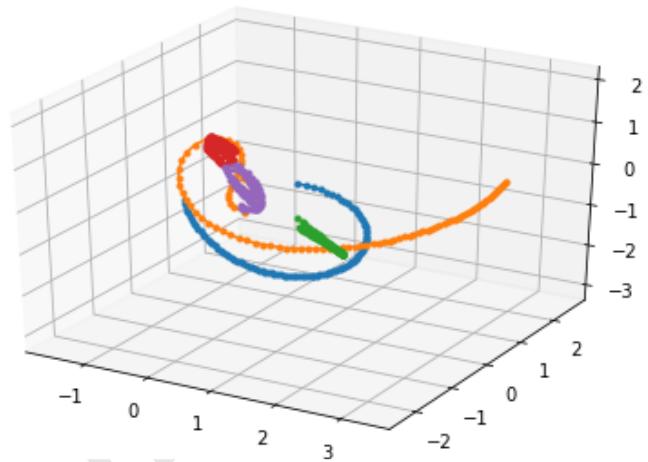


Figura 6.11: Figura correspondiente al código 6.17.

6.5. Problemas seleccionados

1. Fuerza gravitacional y energía potencial a partir de un gradiente.

a. Demuestre que

$$\nabla_j \left(\frac{Gm_i m_j}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|} \right) = -\frac{Gm_i m_j}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|^3} (\vec{r}_j - \vec{r}_i)$$

b. A partir de lo anterior y de la introducción de un factor integrante en las ecuaciones de movimiento de N cuerpos, demuestre que la energía potencial de este sistema aislado se puede escribir como

$$U = -\frac{1}{2} \sum_i \sum_{j \neq i} \frac{m_i \mu_j}{r_{ji}}$$

1. Solución

a. Miremos, para ilustrarnos un poco, que

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{|x-y|} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\sqrt{(x-y)^2}} \right) \quad (6.34)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} [(x-y)^2]^{-1/2} \quad (6.35)$$

$$= -\frac{1}{2} [(x-y)^2]^{-3/2} \frac{\partial}{\partial x} (x-y)^2 \quad (6.36)$$

$$= -[(x-y)^2]^{-3/2} (x-y) \quad (6.37)$$

$$= -\frac{(x-y)}{|x-y|^3}. \quad (6.38)$$

De esta manera, en coordenadas cartesianas,

$$\nabla_j \left(\frac{Gm_i m_j}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|} \right) = Gm_i m_j \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|} \right) \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|} \right) \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|} \right) \hat{k} \right] \quad (6.39)$$

$$= -\frac{Gm_i m_j}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|^3} [(x_j - x_i) \hat{i} + (y_j - y_i) \hat{j} + (z_j - z_i) \hat{k}] \quad (6.40)$$

$$= -\frac{Gm_i m_j}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|^3} (\vec{r}_j - \vec{r}_i). \quad (6.41)$$

- b. Si definimos al argumento del gradiente como la energía potencial gravitacional entre las partículas m_i y m_j , U_{ji} , entonces la ecuación de movimiento de la i -ésima partícula se puede escribir como

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = - \sum_{j \neq i} \nabla_i U_{ji},$$

en donde el subíndice $j \neq i$ es dado que la partícula i no se hace fuerza a ella misma o no tiene energía potencial por sí sola. Ahora, si premultiplicamos a ambos lados de la ecuación por la velocidad de la partícula i -ésima $\dot{\vec{r}}_i$, se sigue

$$m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \ddot{\vec{r}}_i = - \sum_{j \neq i} \dot{\vec{r}}_i \cdot \nabla_i U_{ji},$$

donde $\dot{\vec{r}}_i \cdot$ distribuye a la suma para notar que $\dot{\vec{r}}_i \cdot \nabla_i U_{ji} = dU_{ji}/dt$. Recordando, además, que

$$\dot{\vec{r}}_i \cdot \ddot{\vec{r}}_i = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\dot{\vec{r}}_i^2),$$

si sumamos todas las ecuaciones de cada partícula i obtenemos

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i^2 \right) = - \frac{d}{dt} \left(\sum_i \sum_{j \neq i} U_{ji} \right),$$

donde las derivadas temporales salen de las integrales como “factor” común. Al lado izquierdo de la ecuación se puede reconocer la energía cinética del sistema de partículas, mientras que al lado derecho se reconoce a energía potencial total del sistema. Dado que definimos

$$U_{ji} = -\frac{m_i \mu_j}{r_{ji}},$$

se puede notar que, al sumar sobre i , se está sumando dos veces la energía potencial de cada pareja de partículas (i, j) , por lo que la energía total del sistema aislado se debe poder escribir como

$$U = -\frac{1}{2} \sum_i \sum_{j \neq i} \frac{m_i \mu_j}{r_{ji}},$$

donde el $1/2$ indica que se debe tomar una sola vez cada una de los pares de sistemas.

BORRADOR

Capítulo 7

El Problema de los dos cuerpos

Resumen

En este capítulo estudiaremos un caso particular de sistemas de N cuerpos, a saber, aquellos que contienen solo dos partículas que interactúan gravitacionalmente. Este es el problema clásico de la mecánica celeste y el primero en ser resuelto en la historia, tanto por Newton, como por sus contemporáneos. Después de motivar su introducción con los denominados sistemas jerárquicos de N cuerpos, procederemos a escribir las ecuaciones de movimiento relativo, encontraremos las constantes o integrales de movimiento y finalmente deduciremos la solución exacta del problema, tanto en el espacio como en el tiempo. Los elementos conceptuales y algunas herramientas teóricas y algorítmicas introducidas en este capítulo, se usan en casi todos las áreas de la mecánica celeste, bien sea que pueda o no aplicarse la aproximación de dos cuerpos. Por esta razón, los resultados en este capítulo no solo son una curiosidad matemática o una decente aproximación para el movimiento de algunos sistemas. El problema de los dos cuerpos es la base para la descripción general de la trayectoria de una gran diversidad de sistemas físicos en el Universo.

7.1. Motivación

Los sistemas físicos de los ejemplos estudiados en el Capítulo 6 exhiben una dinámica compleja y relativamente impredecible, tal y como lo evidencian las trayectorias de sus partículas en las Figuras Figura 6.8 y Figura 6.10. Más allá de lo que pudimos aprender sobre esos sistemas estudiando sus constantes de movimiento o las propiedades estadísticas a largo plazo (teorema del virial), es poco lo que podemos hacer, analíticamente e incluso estadísticamente, para predecir su comportamiento.

Hay dos factores, sin embargo, que confabulan en esos dos casos en contra de la posibilidad de una descripción analítica exacta o aproximada de ambos sistemas. El primero, es que la masa y distancia inicial de sus componentes es similar:

la masa de cada partícula no difiera de la de las demás en un factor mayor a unos cuantos y las distancias entre ellas son casi iguales. Esta características, si bien muy útil para ilustrar los conceptos del capítulo anterior, es realmente poco común en sistemas reales. En la naturaleza, los cuerpos interactuantes en sistemas de muchas partículas, normalmente y por razones de su formación, tienen masas muy diferentes y distancias a menudo enormemente distintas unas de otras.

La segunda, fue la generación totalmente aleatoria y pareja de las condiciones iniciales, al menos en el caso del ejemplo de la [Sección 6.4.5](#). Si bien factores aleatorios determinan las propiedades de sistemas astronómicos reales, las posiciones y velocidades de las componentes de estos sistemas normalmente guardan relaciones que emergen también de sus procesos de formación.

Consideremos entonces un sistema en el que las relaciones entre las masas y las distancias sean menos parejas, más cercanas a lo que podríamos encontrar en la naturaleza:

```
sistema=[  
    dict(  
        m=10.0,  
        r=[1,0,0],  
        v=[0,1,0.5]),  
    dict(  
        m=1.0,  
        r=[1.5,0,0],  
        v=[0,-3,1],  
    ),  
    dict(  
        m=0.1,  
        r=[-1,0,0],  
        v=[0,3,1],  
    )  
]
```

Note que las masas de este sistema difieren por un factor de entre 10 y 100 (en la naturaleza los factores pueden ser superiores a 1.000 o 10.000). Las distancias entre ellas son también muy diferentes (mientras que las partículas 0 y 1 están a 0.5 unidades, la 0 y la 2 están a 2 unidades, es decir 4 veces más lejos). Adicionalmente, todas las partículas están, en el tiempo inicial, cerca de un mismo plano.

Podemos usar las rutinas desarrolladas en el capítulo anterior para encontrar la evolución de este sistema durante, por ejemplo, 10 unidades de tiempo:

(Algoritmo 7.1)

```
from numpy import linspace  
  
#Solución  
from pymcel.export import ncuerpos_solucion  
rs,vs,rps,vps,constantes=ncuerpos_solucion(sistema,  
                                              linspace(0.0,10.0,200))  
  
#Gráfica en el sistema de referencia inercial original
```

```
from pymcel.export import plot_ncuerpos_3d
fig=plot_ncuerpos_3d(rs,vs)
```

ver Figura 7.1

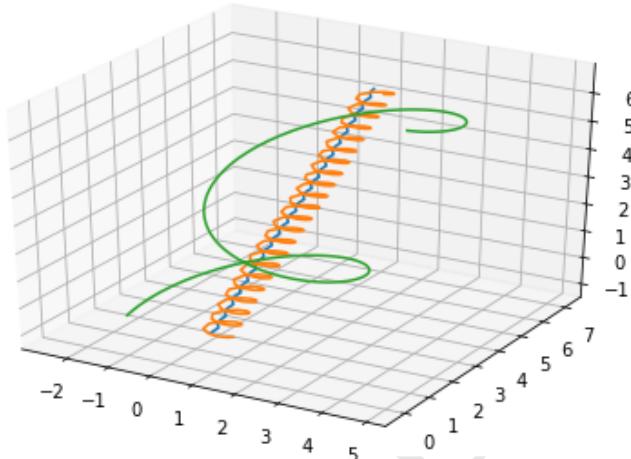


Figura 7.1: Figura correspondiente al código 7.1.

Si bien la trayectoria de las partículas de este sistema es mucho más predecible que las de los sistemas en el capítulo anterior, en el sistema de referencia original en el que se describieron las condiciones iniciales, el movimiento sigue siendo relativamente complejo.

Si nos pasamos al sistema de referencia del centro de masa, descubrimos el secreto que motiva esta sección:

(Algoritmo 7.2)

```
#Gráfica en el sistema de referencia del centro de masa
from pymcel.export import plot_ncuerpos_3d
fig=plot_ncuerpos_3d(rps,vps);
```

ver Figura 7.2

La trayectoria de todas las partículas parece ahora bastante predecible. La partícula 0 está cerca al centro de masa (aunque tiene un movimiento de baja amplitud.) La partícula 1, forma con la primera un sistema de dos cuerpos perfectamente reconocible, mientras que la partícula 2 parece orbitar a las primeras dos más masivas, como si fueran una solar, aunque en un plano diferente de la trayectoria que ellas describen entre sí.

En conclusión, a pesar de tratarse en estricto de un sistema de 3 cuerpos, en realidad podemos describirlo como dos sistemas anidados de dos cuerpos: (1) el sistema formado por la partícula 0 y 1 y (2) el sistema formado por este par (como si fuera una sola partícula) y la partícula 2.

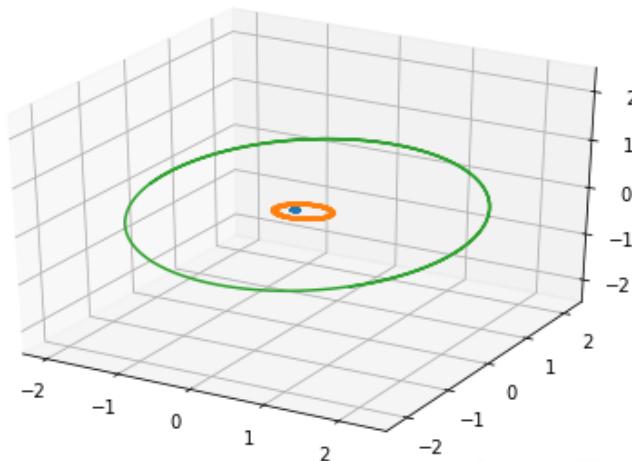


Figura 7.2: Figura correspondiente al código 7.2.

Muchos de los sistemas que encontramos en la naturaleza son como este. Los llamamos **sistemas jerarquicos de N cuerpos**.

Definición 7.1

Sistemas jerarquicos de N cuerpos. Un sistema de N cuerpos se considera jerarquico si su movimiento puede describirse como la combinación o superposición de $N - 1$ sistemas de dos cuerpos.

Los sistemas jerarquicos de N cuerpos pueden clasificarse en cuatro tipos (ver [Figura 7.3](#)):

- **Sistemas centrales:** En estos sistemas, normalmente dominados por un cuerpo muy masivo, las partículas orbitan un centro de masa común (baricentro) siguiendo trayectorias que pueden describirse como la de un sistema de dos cuerpos con la masa de cada partícula y la masa del cuerpo central. El cuerpo central puede considerarse en reposo. El Sistema Solar es un sistema de este tipo.
- **Sistemas anidados:** En estos sistemas, las partículas se organizan de forma anidada: una partícula órbita a un par de sistemas que a su vez son pares de sistemas y así sucesivamente. El ejemplo de esta sección es un sistema jerarquico anidado.
- **Sistemas múltiples:** En estos sistemas las partículas se agrupan por pares, cuyos centro de masa se orbitan mutuamente como si fueran a su vez sistemas de dos cuerpos. Un sistema cuádruple de estrellas formados por dos sistemas binarios que se orbitan mutuamente forman un sistema jerarquico multiple.

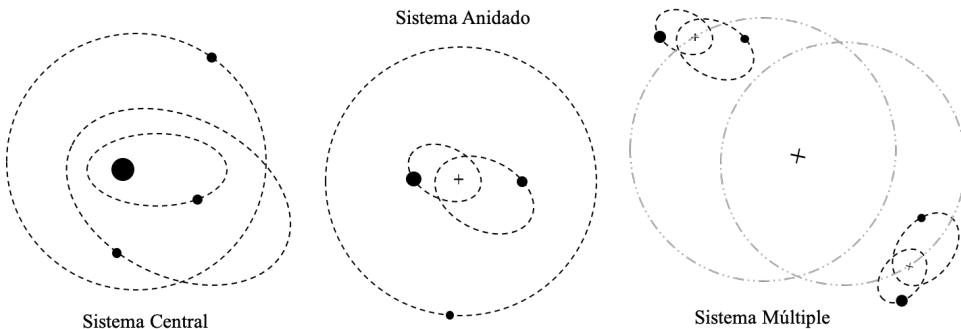


Figura 7.3: Tipos de sistemas jerárquicos de N cuerpos.

Definición 7.1 (Cont.)

- **Sistemas mixtos:** Son sistemas jerárquicos que combinan dos o varios de los modelos descritos aquí.

Resolver el problema de los dos cuerpos no es entonces, simplemente, una manera burda de estudiar sistemas más complejos formados por muchos cuerpos interactuantes. En sistemas jerárquicos el problema de dos cuerpos, sumado a la teoría de perturbaciones, es la manera en la que normalmente se estudia la dinámica de los sistemas.

7.2. El problema relativo de dos cuerpos

Naturalmente el problema de dos cuerpos es un caso particular del problema de los N cuerpos y la mayoría de las propiedades que descubrimos en el [Capítulo 6](#) son válidas también en este caso.

Las ecuaciones de movimiento del sistema se reducen a (Ecs. ??):

$$\begin{aligned}\ddot{\vec{r}}_1 &= -\frac{\mu_2}{r_{12}^3} \vec{r}_{12} \\ \ddot{\vec{r}}_2 &= -\frac{\mu_1}{r_{21}^3} \vec{r}_{21}\end{aligned}\tag{7.1}$$

donde $\vec{r}_{12} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 = -\vec{r}_{21}$ (ver [Figura 7.5](#).)

Al reducirse de orden, las Ecs. (7.1) corresponden a un total de 12 ecuaciones diferenciales escalares de primer orden, con incógnitas $x_1(t), y_1(t), z_1(t)$, $\dot{x}_1(t), \dot{y}_1(t), \dot{z}_1(t)$ y $x_2(t), y_2(t), z_2(t)$, $\dot{x}_2(t), \dot{y}_2(t), \dot{z}_2(t)$.

Las constantes de movimiento son las mismas que encontramos en la [Sección 6.2](#):

- Tres para el momento lineal del centro de masa, Ec. (6.4).
- Tres para la posición inicial del centro de masa, Ec. (6.6).
- Tres para el momento angular total, Ec. (6.7)

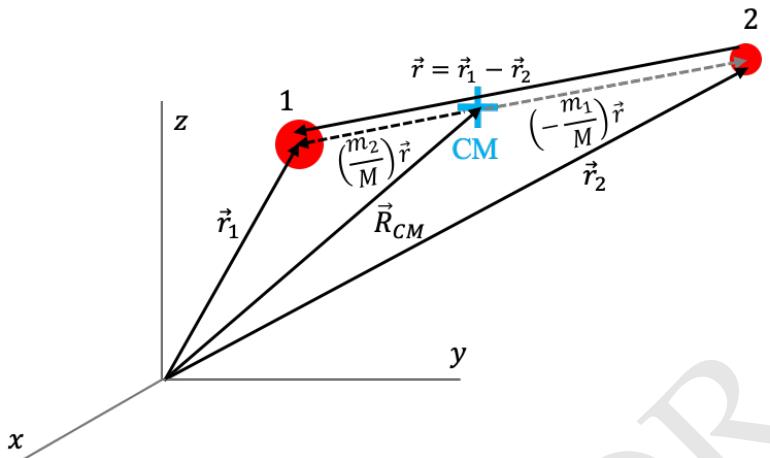


Figura 7.4: Configuración del problema de los dos cuerpos.

■ Una para la energía mecánica total, Ec. (6.16)

El problema tiene entonces, hasta ahora, tan solo 10 cuadraturas (constantes de movimientos) que relacionan algebraicamente 12 variables dependientes. Por lo tanto, si bien en este caso el Teorema de Bruns generalizado, Teo. (6.1) no limita la posibilidad de encontrar otras constantes independientes, con la información disponible, el problema no puede resolverse por cuadraturas.

Hay sin embargo dos “simetrías” que reducen considerablemente el problema y nos ponen en el camino de una solución analítica completa.

La primera simetría la identificamos en la Sección 5.4.2 y esta ilustrada en la ??). Habíamos mostrado que el centro de masa de un sistema de dos cuerpos está siempre localizado sobre la línea que une las dos partículas. Esto implica que la posición de cada partícula puede expresarse como función de una sola cantidad vectorial, a saber, el vector relativo $\vec{r} \equiv \vec{r}_{12}$:

$$\begin{aligned}\vec{r}_1 &= \vec{R}_{CM} + \frac{m_2}{M} \vec{r} \\ \vec{r}_2 &= \vec{R}_{CM} - \frac{m_1}{M} \vec{r}\end{aligned}\tag{7.2}$$

y por consiguiente también la velocidad de las partículas es función solamente de la velocidad relativa entre ellas:

$$\begin{aligned}\dot{\vec{r}}_1 &= \vec{V}_{CM} + \frac{m_2}{M} \dot{\vec{r}} \\ \dot{\vec{r}}_2 &= \vec{V}_{CM} - \frac{m_1}{M} \dot{\vec{r}}\end{aligned}\tag{7.3}$$

Resolver el problema de los dos cuerpos consiste entonces, en realidad, en encontrar las funciones $\vec{r}(t)$ y $\dot{\vec{r}}(t)$ que describen el movimiento del vector relativo.

Para encontrar la e.d.m. del vector relativo, basta que restemos las Ecs. (7.1) y tengamos en cuenta que, por definición, $\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}_2 - \ddot{\vec{r}}_1$.

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu}{r^3} \vec{r} \quad (7.4)$$

donde hemos introducido $\mu \equiv G(m_1 + m_2)$ que llamaremos en lo sucesivo el *parámetro gravitacional del sistema*.

Con esta simetría, hemos reducido el tamaño del problema de las 12 ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden equivalentes a las Ecs. (7.1), a solo 6 ecuaciones (la versión reducida de la Ec. 7.4), al costo, sin embargo, de abandonar las coordenadas originales y por la misma razón las cuadraturas que encontramos anteriormente.

Si queremos obtener la solución a este problema por el método de cuadraturas, debemos entonces encontrar 6 constantes de movimiento a partir de la Ec. (7.4) y que relacionen las 6 variables del problema: $x(t), y(t), z(t), v_x(t), v_y(t), v_z(t)$.

7.3. Constantes de movimiento

Es claro que la Ec. (7.4), a diferencia de lo que pasa en el problema de los N cuerpos con la Ec. (6.2), no puede expresarse directamente en cuadraturas sin la ayuda de un factor integrante. Esto implica que en el problema relativo, a diferencia de lo que pasa en el problema de los N cuerpos, el momento lineal no es constante.

7.3.1. Momento angular específico relativo

Si pre multiplicamos ambos lados de la Ec. (7.4) por $\vec{r} \times$ obtenemos:

$$\vec{r} \times \ddot{\vec{r}} = 0$$

que puede expresarse en cuadraturas como:

$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) = 0$$

de donde encontramos nuestro primera constante de movimiento:

$$\vec{r} \times \dot{\vec{r}} \equiv \vec{h} \quad (7.5)$$

Si bien esta cantidad no se corresponde con ninguna cantidad dinámica del sistema original, su estructura y unidades nos recuerda la definición de un momento angular específico (momento angular por unidad de masa) y en lo sucesivo llamaremos a \vec{h} el *momento angular específico relativo* del problema.

La constancia de la cantidad $\vec{r} \times \dot{\vec{r}}$ tiene una implicación mas trascendental aún. Como sucedió en el problema de los N cuerpos con el momento angular total referido al centro de masa, el vector constante \vec{h} define un plano invariable, el análogo aquí del plano invariable de Laplace de la Def. (6.2). Este plano, a diferencia del que encontramos en el problema de los N cuerpos, tiene una propiedad distintiva y crucial. Dado que por definición, el vector relativo \vec{r} y su velocidad $\dot{\vec{r}}$ son perpendiculares a \vec{h} , ambos residirán siempre sobre ese plano (ver ??). Como resultado,

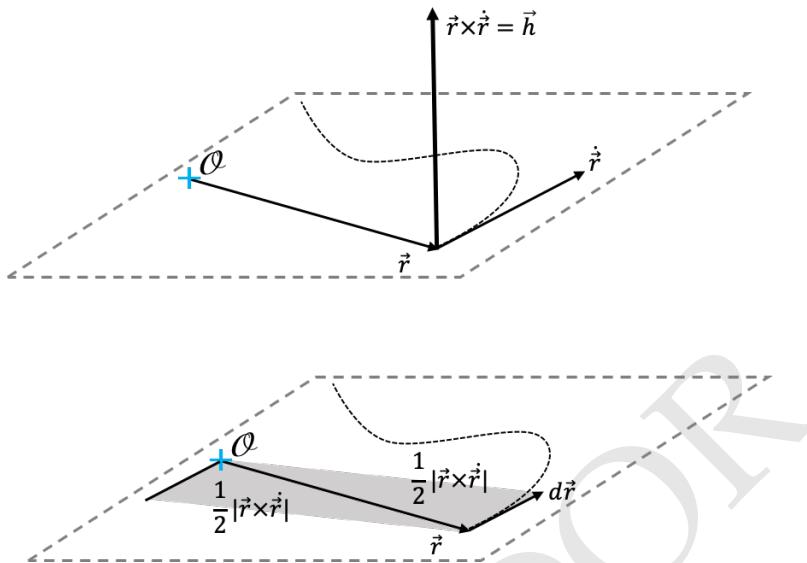


Figura 7.5: El problema de los dos cuerpos puede reducirse al movimiento de su vector relativo \vec{r} , un vector libre sin un origen definido. Por simplicidad podemos suponer la existencia un punto imaginario \mathcal{O} alrededor del cual la punta del vector se mueve. La constancia de $\vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \vec{h}$ en el problema relativo de los dos cuerpos implica que el movimiento del sistema (trayectoria rayada) se realiza sobre un plano: aquel definido por el vector \vec{h} . Adicionalmente (panel inferior) la magnitud de este vector se puede relacionar con la razón de cambio del área barrida por el vector relativo (superficie coloreada en el panel inferior.)

la trayectoria del vector relativo se realizará siempre sobre un plano (que en el sistema de referencia del centro de masa será invariable también.) Llamamos a este plano, el **plano orbital** del sistema.

La existencia de un plano orbital en el problema relativo de los dos cuerpos es una simetría nueva que reduce aún más el “tamaño” del sistema. Ahora, podemos escribir explícitamente el vector posición y el vector velocidad sobre el plano en términos de sus componentes en coordenadas cilíndricas (ver la Sección 4.1.2), como:

$$\vec{r} = r\hat{a}_r \quad (7.6)$$

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r}\hat{a}_r + r\dot{\theta}\hat{a}_\theta \quad (7.7)$$

y con esto el problema de los dos cuerpos relativo se reduce a encontrar las cuatro funciones $r(t)$, $\theta(t)$, $\dot{r}(t)$ y $\dot{\theta}(t)$ o sus equivalentes cartesianos $x(t)$, $y(t)$, $\dot{x}(t)$ y $\dot{y}(t)$.

En el plano orbital, el momento angular específico relativo tiene solo una componente no nula (en dirección z) y se puede escribir simplemente como $\vec{h} : (0, 0, h)$, donde de las Ecs. (7.6) y (7.7),

$$h = r^2\dot{\theta} \quad (7.8)$$

La magnitud del vector \vec{h} tiene un significado adicional que viene directamente de la interpretación geométrica de la magnitud del producto cruz $2dA = |\vec{r} \times d\vec{r}|$ que no es otra cosa que el área del paralelogramo definido por los vectores \vec{r} y $d\vec{r}$ (ver Figura ??.):

$$h = 2 \frac{dA}{dt}$$

La constancia h conduce a uno de los más conocidos teoremas de la mecánica celeste:

Proposición 7.1

Teorema de áreas. La *velocidad areal* del vector relativo (la razón de cambio del área barrida por el vector en su movimiento) en el problema de los dos cuerpos es constante e igual a:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}h \quad (7.9)$$

donde $h = |\vec{r} \times \dot{\vec{r}}|$.

En otros términos, el vector relativo en el problema de los dos cuerpos barre áreas iguales en tiempos iguales.

El teorema de áreas fue introducido originalmente en 1609 por Johannes Kepler en su obra cumbre “*Astronomía Nueva*”. Kepler lo obtuvo por inducción (a diferencia de como lo hicimos aquí por deducción a partir de las ecuaciones de movimiento) con el objetivo específico de describir de la forma más precisa posible el movimiento del planeta Marte alrededor del Sol, del cual contaba con las observaciones precisas realizadas durante varias decadas por el astrónomo danés Tycho Brahe (“*tico braja*”⁴²) Kepler, extendió este resultado “empírico” a todos los planetas, razón por la cual se lo conoce históricamente como la *segunda ley del movimiento planetario*.

Hay dos diferencias importantes entre la segunda ley de Kepler y el teorema de áreas formulado aquí. Mientras que la ley clásica aplica únicamente para el movimiento de planetas en trayectorias cerradas alrededor del Sol (que se asumía inmóvil) la versión moderna del teorema no hace ninguna suposición específica sobre la forma (si es cerrada o abierta) de la trayectoria del vector relativo. Adicionalmente, el teorema de áreas no dice nada sobre la relación entre las masas y se aplica universalmente a cualquier sistema de dos cuerpos, sea ésta la descripción (aproximada) el movimiento de un planeta alrededor del Sol, la de un cometa que sobrevuela a Júpiter o un sistema binario de estrellas de neutrones con masas similares.

Formulado en términos de la velocidad areal, el teorema de áreas es relativamente oscuro. Si usamos la magnitud del vector \vec{h} (Ec.) y escribimos:

$$\dot{\theta} = \frac{h}{r^2} \quad (7.10)$$

⁴²https://es.forvo.com/word/tycho_brahe/#da

otra manera de interpretar la constancia del momento angular específico es decir que la velocidad angular $\dot{\theta}$ del vector relativo es mayor en tanto menor sea la magnitud el vector r (distancia entre las partículas.) Es decir, las partículas del sistema se mueven más rápidamente en los puntos de máxima aproximación que en aquellos en los que están más lejos. Este comportamiento ya lo intuimos al observar la solución numérica de los sistemas que estudiamos en el [Capítulo 6](#).

7.3.2. Energía específica relativa

Si pre multiplicamos ambos lados de la Ec. (7.4) por $\vec{r} \cdot$ obtenemos:

$$\vec{r} \cdot \ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu}{r^3} \vec{r} \cdot \vec{r}$$

que puede expresarse en cuadraturas como:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \dot{\vec{r}}^2 \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\mu}{r} \right)$$

de donde encontramos una segunda constante de movimiento:

$$\frac{1}{2} \dot{\vec{r}}^2 - \frac{\mu}{r} \equiv \epsilon \quad (7.11)$$

Si bien, como sucedió con \vec{h} , esta cantidad no se corresponde con ninguna cantidad dinámica del sistema original, su estructura y unidades nos recuerda la definición de una energía mecánica específica (energía mecánica por unidad de masa) y en lo sucesivo llamaremos a ϵ la *energía específico relativa* del problema.

De nuevo, teniendo en cuenta que el movimiento se realiza sobre un plano, la energía específica relativa se puede escribir en términos de las componentes cartesianas en la forma:

$$\frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{\mu}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \epsilon, \quad (7.12)$$

o en coordenadas cilíndricas como:

$$\frac{1}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) - \frac{\mu}{r} = \epsilon \quad (7.13)$$

donde al poner ϵ del lado derecho de la ecuación estamos reafirmando simbólicamente el hecho de que la fórmula del lado izquierdo es la que define explícitamente la cuadratura que puede, eventualmente, conducirnos a una solución exacta del problema. ϵ no es más que un número cuyo valor puede calcularse usando estas fórmulas por ejemplo a partir de las condiciones iniciales del problema.

Hasta aquí hemos conseguido dos cuadraturas del problema:

- La magnitud del momento angular específico relativo, Ec. (7.3.1), cuyo valor es h .
- La energía específica relativa, Ec. (7.13), cuyo valor es ϵ .

Si queremos resolver el problema por caudraturas necesitamos obtener cuatro constantes, el número de variables dependientes del problema relativo sobre el plano orbital. De acuerdo al Teorema de Bruns, para sistema con 3 o más cuerpos no hay ninguna otra constante de movimiento que sea independiente de las anteriores. En el problema relativo de los dos cuerpos, sin embargo, existe una constante nueva que nos permite resolver analíticamente el problema.

7.3.3. El vector de excentricidad

Que pasa si postmultiplicamos ambos lados de la Ec. (7.4) por $\times \vec{h}$:

$$\ddot{\vec{r}} \times \vec{h} = -\frac{\mu}{r^3} \vec{r} \times \vec{h}$$

Dado que \vec{h} es constante, el lado izquierdo se puede escribir en cuadraturas:

$$\frac{d}{dt}(\dot{\vec{r}} \times \vec{h}) = -\frac{\mu}{r^3} \vec{r} \times \vec{h} \quad (7.14)$$

Por su parte en el lado derecho:

$$\begin{aligned} \vec{r} \times \vec{h} &= \vec{r} \times (\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) \\ &= \vec{r}(\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}}) - \dot{\vec{r}}(\vec{r} \cdot \vec{r}) \\ &= \vec{r}\vec{r}\dot{r} - \dot{\vec{r}}\vec{r}^2 \end{aligned}$$

que multiplicando por $-\mu/r^3$ también se puede escribir en cuadraturas como:

$$\begin{aligned} \vec{r} \times \vec{h} &= -\mu \left(\frac{\vec{r}\dot{r}}{r^2} - \frac{\dot{\vec{r}}}{r} \right) \\ &= \frac{d}{dt} \left(\mu \frac{\vec{r}}{r} \right) \end{aligned}$$

Con todo esto la Ec. (7.14) en cuadraturas completas queda:

$$\frac{d}{dt}(\dot{\vec{r}} \times \vec{h}) = \frac{d}{dt} \left(\mu \frac{\vec{r}}{r} \right) \quad (7.15)$$

y de aquí podemos identificar una nueva y complementamente independiente constante de movimiento:

$$\frac{\dot{\vec{r}} \times \vec{h}}{\mu} - \frac{\vec{r}}{r} \equiv \vec{e} \quad (7.16)$$

La razón por la que hemos expresado esta integral dividiendo la cuadratura en la Ec. (7.15) por μ es para hacer a la constante resultante adimensional (recordemos que μ tiene unidades de L^3/T^2) lo que es mas conveniente para su manipulación numérica.

¿Cuál es el significado geométrico o físico del vector \vec{e} ? A diferencia de lo que pasó con \vec{h} y con ϵ , no es trivial encontrar ahora una cantidad dinámica que podamos asociar con \vec{e} . Este vector, sin embargo ha aparecido en distintos contextos en

la historia de la física y las matemáticas, desde la mecánica celeste misma, pasando por el cálculo vectorial hasta la más reciente mecánica cuántica (ver recuadro *Un poco de historia, Laplace, de la mecánica celeste a la mecánica cuántica.*)

No es difícil mostrar que \vec{e} no es enteramente independiente de \vec{h} y ϵ . Si se calcula la magnitud del vector se obtiene la relación (ver problemas al final del capítulo):

$$e = \sqrt{1 + \frac{2\epsilon h^2}{\mu^2}} \quad (7.17)$$

que será de gran utilidad en lo que queda de este capítulo y en general en la mecánica celeste.

7.4. La ecuación de la trayectoria

Una manera de encontrar una interpretación geométrica para el vector \vec{e} es comparar su dirección con la de otros vectores en el plano orbital. Sabemos, por su definición en la Ec. (7.16) que \vec{e} está en el mismo plano que \vec{r} y $\dot{\vec{r}}$. Si proyectamos \vec{e} sobre el vector posición obtenemos:

$$\vec{e} \cdot \vec{r} = \frac{1}{\mu} \vec{r} \cdot (\dot{\vec{r}} \times \vec{h}) - \vec{r} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$$

Utilizando la propiedad cíclica del tripe producto escalar (Ec. 4.9) el primer término del lado derecho de la ecuación queda:

$$\begin{aligned} \vec{r} \cdot (\dot{\vec{r}} \times \vec{h}) &= \vec{h} \cdot (\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) \\ &= \vec{h} \cdot \vec{h} \\ &= h^2 \end{aligned}$$

de donde, la proyección es simplemente:

$$\vec{e} \cdot \vec{r} = \frac{h^2}{\mu} - r$$

Si ahora hacemos $\vec{e} \cdot \vec{r} = er \cos \theta_{er}$, con θ_{er} el ángulo entre el vector \vec{e} y el vector posición \vec{r} sobre el plano orbital, la proyección se puede escribir como:

$$er \cos \theta_{er} = \frac{h^2}{\mu} - r$$

de la que podemos despejar explícitamente r en función de θ_{er} :

$$r = \frac{h^2/\mu}{1 + e \cos \theta_{er}}, \quad (7.18)$$

que es claramente la ecuación de una cónica con *semilatus rectum*, $p = h^2/\mu$, excentricidad $e = |\vec{e}|$ y anomalía verdadera $f = \theta_{er}$.

No solo hemos encontrado la interpretación geométrica para el vector \vec{e} (el vector está dirigido hacia el periapsis de la cónica y su magnitud es la excentricidad de la misma) sino que además encontramos con este sencillo procedimiento la forma

general de la trayectoria descrita por el vector relativo en el problema de los dos cuerpos. Este resultado lo podemos formular como un teorema general:

Proposición 7.2

Primer teorema del movimiento orbital. El extremo del vector relativo en el problema de los dos cuerpos, describe en el plano orbital una trayectoria cónica con foco en el origen imaginario \mathcal{O} (extremo del vector relativo), periapsis en la dirección del vector $\vec{e} = (\dot{\vec{r}} \times \vec{h}) / \mu - \vec{r} / r$, excentricidad igual a $|\vec{e}| = \sqrt{1 + 2\epsilon h^2 / \mu^2}$ y semilatus rectum $p = h^2 / \mu$.

Este teorema es el equivalente moderno a la primera ley (empírica) de Kepler del movimiento planetario, formulada al mismo tiempo con su segunda ley (ver Teo. ??) en 1609 en su texto “*Astronomía nueva*”. A diferencia de la deducción realizada aquí, Kepler, después de estudiar el movimiento de Marte, esencialmente adivinó que su trayectoria debía ser una elipse. Adicionalmente y a diferencia de la primera ley de Kepler, el primer teorema del movimiento orbital formulado aquí no se restringe al caso de trayectorias elípticas, para las cuáles $|\vec{e}| < 1$, sino que en principio predice que la trayectoria del vector relativo podría ser cualquier cónica incluyendo también una línea recta, una parábola o una hipérbola.

Un poco de historia

Laplace y el vector de excentricidad. Aunque pensamos normalmente que la solución al problema de los dos cuerpos fue obtenida por primera vez por Newton, en realidad la versión desarrollada aquí no es precisamente la que apareció en los *Principia*.

El primero en seguir el procedimiento y la notación mostrada aquí, usando para ello las constantes de movimiento en el problema, y en particular el vector de excentricidad, fue el científico estadounidense **Josiah Willard Gibbs** (1839-1903.) Gibbs es además el padre de la notación vectorial que hemos usado y usaremos a lo largo de este texto, por lo que muchos de los resultados presentados aquí no tuvieron esta forma antes de 1870 cuando Gibbs escribió sus trabajos en el tema.

Gibbs había a su vez tomado la idea del vector de excentricidad de los trabajos del matemático alemán **William Rowan Hamilton**. En 1845, Hamilton publicó un artículo titulado “Aplicaciones de los cuaterniones en algunos problemas dinámicos” (los cuaterniones fueron inventados por Hamilton y precedieron a los vectores geométricos de Gibbs.) En este trabajo, el matemático alemán reportaba el descubrimiento de una nueva constante de movimiento en el problema de los dos cuerpos, precisamente el vector \vec{e} de la Ec. (7.16).

Hoy sabemos que en realidad, Hamilton no había descubierto nada nuevo. La primera referencia conocida del vector de excentricidad se debe al matemático Francés Pierre-Simon Laplace [28]. Es por esto que hoy al vector \vec{e} (o en realidad versiones analogas al mismo) se lo conozca en algunos contextos como el *vector de Laplace*. Para ser justos deberíamos llamarlo el *vector de Laplace-Hamilton*. Si bien Laplace no uso exactamente la notación y el procedimiento mostrado en esta sección, es un hecho conocido que dedujo la forma que debía tener la órbita en el problema reducido de los dos cuerpos, manipulando el vector \vec{e} de manera analoga a como lo hicimos

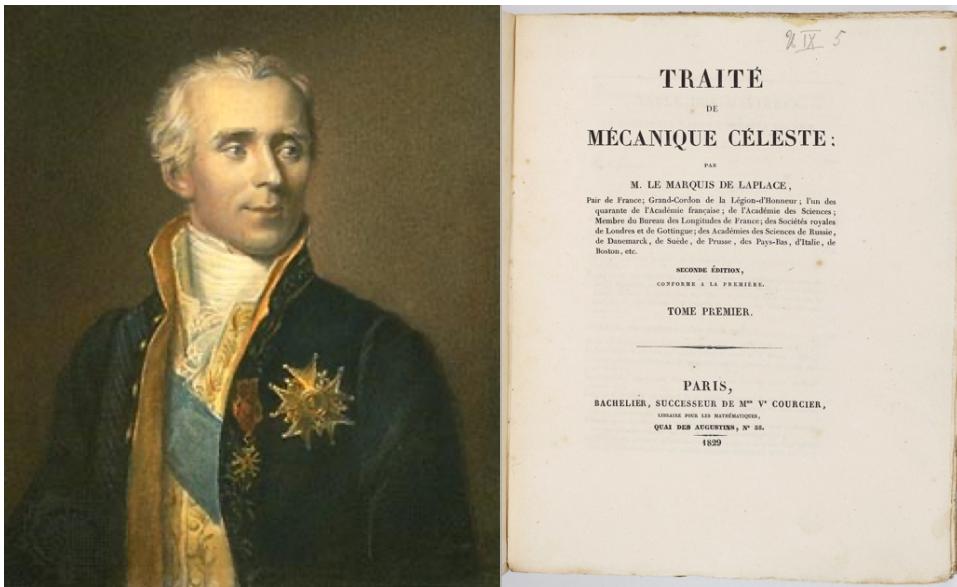


Figura 7.6: Izquierda: pintura de Pierre-Simon Laplace de James Posselwhite. Derecha: portada del Tomo I del Tratado de Mecánica Celeste de Laplace, el libro más importante en el área publicado después de los Principia (foto Colección Heralds of Science from the Burndy Library.)

Un poco de historia (Cont.)

aquí.

Laplace (1749-1827, ver Figura 7.6) es una de las figuras más sobresalientes de las matemáticas, la física, la ingeniería y la astronomía de los 1700 y principios de los 1800. Los principios y problemas básicos de la mecánica celeste que fueron presentados y desarrollados por Newton y sus contemporáneos en términos geométricos, fueron traducidos enteramente en términos de cálculo infinitesimal (incluyendo la teoría de ecuaciones diferenciales) por Laplace, quién presentó a partir de 1799 una síntesis de todos los avances en el área que se habían realizado en los más de 100 que habían transcurrido desde la publicación de los *Principia* en 1687. El resultado fue un tratado de cinco volúmenes titulado convenientemente *Traité de mécanique céleste* (Tratado de Mecánica Celeste o abreviado la Mecánica Celeste.)

La Mecánica Celeste de Laplace es considerado por muchos el libro más importante en el área escrito después de los *Principia*. Allí, además de la solución original al problema de los dos cuerpos presentada en esta sección, Laplace abordó la mayoría de los problemas centrales de la mecánica celeste, incluyendo algunos que Newton no había podido resolver: la teoría general de perturbaciones, la teoría general de mareas gravitacionales, el movimiento en campos gravitacionales producidos por cuerpos no esféricos, la estabilidad del sistema solar, entre muchos otros.

Muchos de los resultados en este libro y en la mayoría de los textos de mecánica celeste escritos en los últimos 200 años, son en realidad reelaboraciones modernas o aplicaciones de los resultados presentados en la Mecánica Celeste de Laplace.

Una cosa es el movimiento del vector relativo y otra la trayectoria que describen

las partículas mismas en el espacio ¿son también esas trayectorias cónicas?

Usando las Ecs. (7.2) y la solución en la Ec. (7.14.1) puede probarse que la distancia de cada partícula al centro de masa esta dada por:

$$r_1 = \frac{(m_2/M)h^2/\mu}{1 + e \cos f} \quad (7.19)$$

$$r_2 = \frac{(m_1/M)h^2/\mu}{1 + e \cos f} \quad (7.20)$$

(7.21)

Este resultado implica las dos partículas tienen trayectorias cónicas con idéntica excentricidad, foco en el centro de masa y *semilatus rectum* proporcional a la distancia de cada una al centro de masa:

$$p_1 = \frac{m_2}{M} p \quad (7.22)$$

$$p_2 = \frac{m_1}{M} p \quad (7.23)$$

(7.23)

En la Figura 7.7 mostramos un ejemplo de la trayectoria elíptica del vector relativo y las trayectorias correspondientes de las dos partículas.

7.5. La velocidad relativa

En la sección anterior mostramos que es posible, sin resolver el problema relativo de los dos cuerpos (es decir sin encontrar expresiones para la posición y velocidad relativa como función del tiempo), usar una de las cuadraturas (el vector de excentricidad) para escribir la ecuación en coordenadas cilíndricas de la trayectoria (Ec. 7.14.1.) Usando esa ecuación podemos encontrar el vector posición $\vec{r} : (r, \theta)$ para cualquier valor de θ .

Ahora bien, ¿podemos, de forma análoga, saber cuál es el vector velocidad $\dot{\vec{r}} : (\dot{r}, r\dot{\theta})$?

La magnitud del vector velocidad (rapidez) esta contenida en la energía específica relativa:

$$\frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} = \epsilon,$$

de modo que si sabemos ϵ y r (esté último se puede obtener con la Ec. ??) podemos obtener v .

De otro lado es posible, usando esta cuadratura escribir una expresión general para ϵ que será de mucha utilidad en lo sucesivo.

Para ello partimos de reconocer que podemos, para calcular el valor de la energía específica relativa, usar cualquier punto sobre la trayectoria. En particular, en el periapsis donde $r = q = a(1 - e)$ (con $e \neq 1$) y $h = qv$, es decir $v = h/q$:

$$\epsilon = \frac{h^2}{2a^2(1 - e)^2} - \frac{\mu}{a(1 - e)}$$

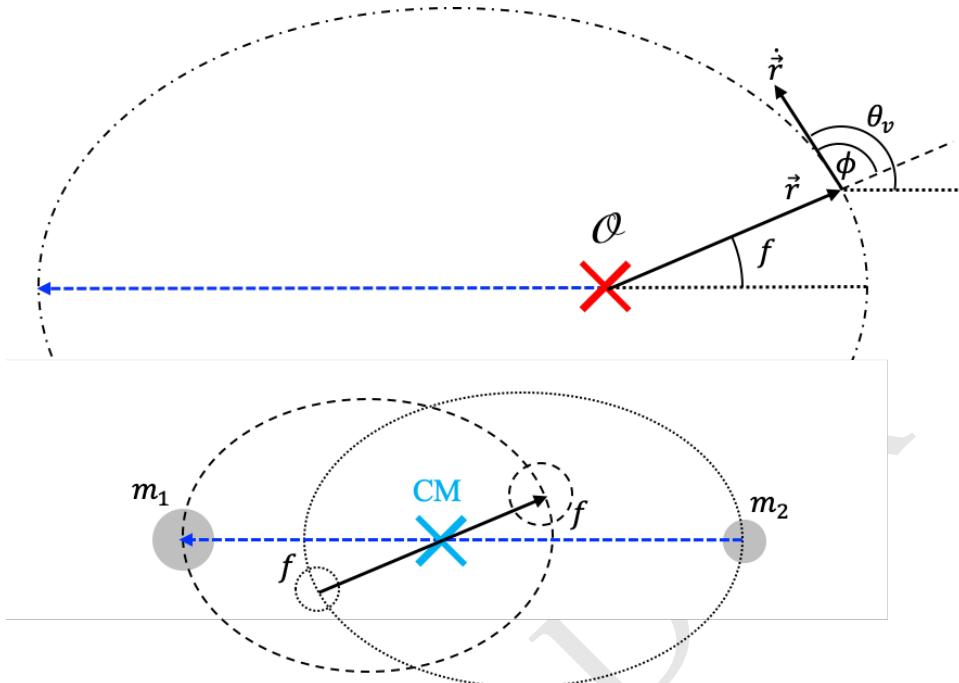


Figura 7.7: Trayectorias del vector relativo (arriba) y de las partículas individuales (abajo). Las trayectorias tienen todas la misma excentricidad. El foco de la trayectoria del vector relativo es un punto arbitrario en el espacio \mathcal{O} , mientras que el foco de las trayectorias de las partículas es el centro de masa (CMD). El vector relativo se muestra en dos posiciones: en el apoapsis (flecha rayada) y en un punto cualquiera de la trayectoria (flecha continua.) Nótese que la anomalía verdadera f es igual en las tres trayectorias.

Después de una sencilla manipulación algebraica obtenemos:

$$\epsilon = -\frac{\mu}{2a} \quad (7.24)$$

Esta expresión es válida únicamente en el caso en el que $e \neq 1$. En el caso de la parábola, $e = 1$ puede mostrarse que $\epsilon = 0$.

Si reemplazamos en la cuadratura de la energía específica relativa (Ec. 7.11) obtenemos:

$$v^2 = \mu \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right) \quad (7.25)$$

Donde de nuevo esta relación es válida únicamente si $e \neq 1$. Llamamos a esta relación la *vis viva*.

Una interesante propiedad de la *vis viva* es que dada una distancia relativa inicial r y una rapidez relativa v , el valor del semieje mayor de la órbita resultante será independiente de la dirección de la velocidad:

$$a = \frac{\mu}{2\mu/r - v^2}$$

La *vis viva* nos permite calcular la magnitud de la velocidad, pero ¿cuál es la dirección de \vec{v} ?

Podemos usar para ello el vector \vec{h} , cuya magnitud podemos escribir como:

$$h = |\vec{r} \times \dot{\vec{r}}| = vr \sin \phi$$

donde ϕ es el ángulo entre el vector posición y la velocidad (ver [Figura 7.7](#)) que llamaremos en lo sucesivo el *argumento de la velocidad* y que en virtud de la expresión anterior está dado por:

$$\sin \phi = \frac{h}{rv} \quad (7.26)$$

Nota

Ángulo a partir de la magnitud del producto cruz. Aunque la Ec. (7.26) no tiene ninguna discusión, en la práctica el cálculo de ϕ a partir de ella tiene una sutileza. Dado que $h, r, v > 0$ el signo de $\sin \phi$ siempre será positivo. Eso implicaría que $\phi < \pi/2$. Sin embargo si calculamos ahora el producto punto de \vec{r} y $\dot{\vec{r}}$ (usando su definición en coordenadas cilíndricas, [Sección 5.2.1](#)):

$$\cos \phi = \vec{r} \cdot \dot{\vec{r}} = r\dot{r}$$

De aquí vemos que cuando $\dot{r} < 0$, $\cos \phi < 0$ y por tanto $\phi > \pi/2$. Es decir la Ec. (7.26) solo nos dará el valor correcto de ϕ cuando $\dot{r} \geq 0$.

Pero, en términos de r y v ¿a qué condición corresponde $\dot{r} < 0$?

Sabemos que cuando $0 < f < \pi$, el vector relativo se estará alejando del periapsis, es decir $\dot{r} > 0$. Del otro lado cuando $\pi < f < 2\pi$ entonces $\dot{r} < 0$. De aquí podemos deducir una fórmula, que si bien no es enteramente trivial, es lo mejor que podemos hacer para calcular el argumento de la velocidad en el cuadrante correcto:

$$\phi = \begin{cases} \sin^{-1} \left(\frac{h}{rv} \right) & \text{Si } 0 \leq f < pi \\ \pi - \sin^{-1} \left(\frac{h}{rv} \right) & \text{Si } \pi \leq f < 2pi \end{cases} \quad (7.27)$$

Finalmente, el ángulo que forma la velocidad respecto a la dirección del periapsis (dirección del vector \vec{e}) estará dada por:

$$\theta_v = f + \phi \quad (7.28)$$

7.6. El hodográfo del problema de los dos cuerpos

Hay una propiedad interesante que tiene el problema de los dos cuerpos. Fue descubierta por Hamilton (ver recuadro *Un poco de historia*) mientras estudiaba las consecuencias de describir el problema en términos vectoriales (en realidad usando cuaterniones, los antepasados de los vectores geométricos.)

Para conocer esta propiedad escribamos un algoritmo que nos permita calcular las componentes del vector velocidad a lo largo de la trayectoria elíptica de un sistema de dos cuerpos ligado.

Supongamos para ello condiciones que nos garanticen que la cónica tiene periapsis sobre el semieje $x+$ (es decir $\vec{e}/e = \hat{e}_x$). Si asumimos condiciones iniciales del tipo $\vec{r}_0 = x_0\hat{e}_x$, $\vec{v}_0 = v_{0y}\hat{e}_y$, puede mostrarse que la condición anterior se cumple si $v_{0y} < \sqrt{\mu x_0}$ (ver problemas al final del capítulo.)

Un conjunto de condiciones iniciales que cumple esta condición es:

```
#Condiciones iniciales
mu=1 #unidades canónicas (u.c.)
from numpy import array
x0=1.0 #u.c.
vy0=0.5 #u.c.

#Magnitud de h
h=x0*vy0

#Energía específica relativa
from numpy.linalg import norm
epsilon=0.5*vy0**2-mu/x0
```

$h = 0.5$
 $\epsilon = -0.875$

Usando las Ecs. (7.14.1) y (7.16) podemos calcular las propiedades de la órbita descrita por el vector relativo:

```
#Parámetros geométricos derivados
from numpy import sqrt
p=h**2/mu
e=sqrt(1+2*epsilon*h**2/mu)
a=p/(1-e**2)

p = 0.25
a = 0.5714285714285714
e = 0.75
```

Comprobamos que efectivamente para las condiciones iniciales provistas la órbita resultante es una órbita elíptica ($e < 1$.)

Calculemos ahora las componentes de la velocidad de la partícula a lo largo de la trayectoria, usando para ello la *vis viva* (Ec. 7.25) y el argumento de la velocidad (Ecs. 7.26 y 7.28):

```
#Valores de la anomalía verdadera
from numpy import linspace,pi
fs=linspace(0,2*pi,100)

#Valores de r
from numpy import sin,cos
rs=p/(1+e*cos(fs))
```

```

#Valores de v
vs=sqrt(mu*(2/rs-1/a))

#Valores de phi
from numpy import arcsin,zeros_like
phis=zeros_like(fs)
for i,f in enumerate(fs):
    if f<pi:
        phis[i]=arcsin(h/(rs[i]*vs[i]))
    else:
        phis[i]=pi-arcsin(h/(rs[i]*vs[i]))

#Valores de tetav
from numpy import mod
tetavs=phis+fs

#Componentes de la velocidad
from numpy import sin
vxs=vs*cos(tetavs)
vys=vs*sin(tetavs)

```

Hagamos una gráfica del extremo de la velocidad relativa:

(Algoritmo 7.3)

```

import matplotlib.pyplot as plt
fig=plt.figure()
ax=fig.gca()

#Grafica
ax.plot(vxs,vys,'r')

#Decoración
from pymcel.plot import fija_ejes_proporcionales
valores=(vxs,vys)
xrango,yrango=fija_ejes_proporcionales(ax,valores,xcm=0)

#Dibuja ejes
ax.plot(xrango,[0,0], 'k-');
ax.plot([0,0],yrango, 'k-');
ax.set_xlabel("$v_x$");
ax.set_ylabel("$v_y$");

```

ver Figura 7.8

A este gráfico se lo conoce en general como el *hodógrafo*. Como podemos apreciar, en el problema de los dos cuerpos el hodógrafo es una circunferencia descentralizada, un resultado general que se puede formular como un teorema general (cuya demostración puede desarrollarse en la sección de problemas al final de este capítulo):

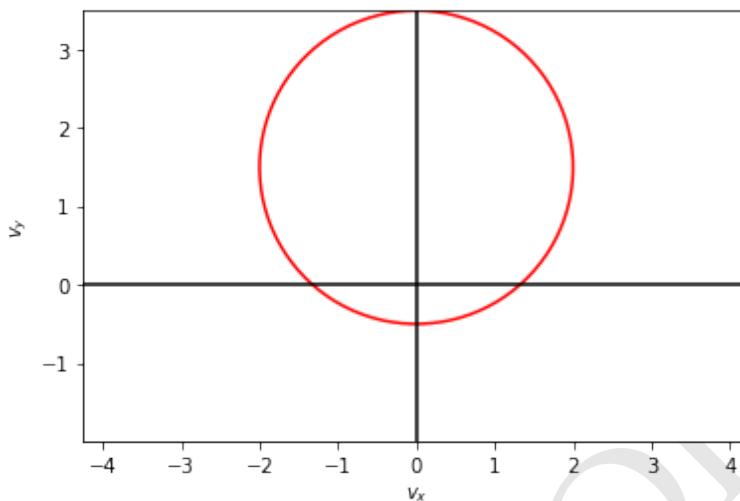


Figura 7.8: Figura correspondiente al código 7.3.

Proposición 7.3

El teorema del hodografo. El vector velocidad relativa en el problema de los dos cuerpos describe un círculo (hodografo) que tiene centro en $(0, \mu e/h)$ y radio μ/h . Por la misma razón la ecuación paramétrica para la velocidad es:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -\frac{\mu}{h} \sin f \\ \dot{y} &= \frac{\mu}{h} (e + \cos f) \\ \dot{z} &= 0\end{aligned}\tag{7.29}$$

Este resultado es independiente de la cónica (independiente del valor de e).

7.7. El teorema armónico

En las secciones anteriores hemos usado las constantes de movimiento para deducir dos importantes teoremas sobre del problema relativo de los dos cuerpos que fueron descubiertas originalmente por Kepler y que se conocen históricamente como las leyes del movimiento planetario.

En 1619, Kepler publicó su libro “*La armonía de los mundos*” y en el reveló la que sería una de las más increíbles leyes del movimiento planetario (al menos para la época): la ley armónica. ¿Cuál es en términos modernos el teorema que corresponde a esta ley?

Proposición 7.4

Teorema armónico. Dado un sistema de dos cuerpos cuyo movimiento relativo es tal que $e \neq 1$, la velocidad angular promedio $n = \langle \dot{\theta} \rangle$ del vector relativo es independiente de la excentricidad de la órbita, y se relaciona con el valor absoluto del semieje mayor de la órbita relativa $|a|$ a través:

$$n^2 |a|^3 = \mu \quad (7.30)$$

Naturalmente esta no es la forma tradicional en la que conocemos la tercera ley de Kepler. Esta última fue formulada solo en el caso de movimiento sobre una órbita elíptica, mientras que el teorema general formulado arriba aplica también en el caso de órbitas hiperbólicas.

En realidad la ley armónica es un corolario del teorema de áreas. En el caso, por ejemplo, de una órbita elíptica, que es una órbita con período T , la velocidad areal se puede escribir como:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{A}{T} = \frac{\pi ab}{T}$$

donde hemos aprovechado el hecho que la velocidad areal es constante para escribirla como la razón entre el área total de la elipse $A = \pi ab$ (Ec. 4.78) y el período de la misma.

Si tenemos ahora en cuenta que $b = a\sqrt{1 - e^2}$, $h^2 = \mu a(1 - e^2)$ y $dA/dt = h/2$ es fácil deducir que:

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{\mu}{4\pi^2} \quad (7.31)$$

que es la forma original de la ley armónica de Kepler: “*la razón entre el cubo del semiejemayor y el cuadrado del período orbital de los planetas es constante*”.

Lo que no sabía Kepler era la relación de esa constante con constantes físicas (la masa total del sistema) y geométricas (el factor $4\pi^2$).

Para obtener a partir de la Ec. (7.31) la relación entre a y n en el teorema armónico (Teo. 7.4), basta reconocer, de un lado, que en una órbita periódica la velocidad angular promedio es:

$$n = \frac{2\pi}{T}$$

y escribir la Ec. (7.31) en la forma:

$$a^3 \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 = \mu$$

Esta última es exactamente la relación $n^2 a^3 = \mu$ del teorema armónico.

En los problemas al final del capítulo el lector podrá demostrar el teorema armónico en el caso de una órbita hiperbólica.

7.8. Teoremas del movimiento orbital

Podemos finalmente sintetizar los resultados de esta sección enumerando en un mismo lugar los teoremas fundamentales del movimiento relativo de dos cuerpos:

- **Primer teorema del movimiento orbital** (Teo. 7.2). El vector relativo de un sistema de dos cuerpos describe una trayectoria cónica.
- **Teorema de áreas** (Teo. 7.1). La tasa de cambio del área barrida por el vector relativo es constante.
- **Teorema armónico** (Teo. 7.4). El producto del cuadrado de la velocidad angular promedio del vector relativo y el cubo del valor absoluto del semieje mayor de su trayectoria es constante.

Hoy, por su importancia histórica, estos teoremas son todavía conocidos como las leyes del movimiento planetario de Kepler. Sin embargo, entre las versiones originales de las leyes formuladas por Kepler y las formas rigurosas de los teoremas presentadas aquí hay importantes diferencias. Por la misma razón en lo sucesivo y a través de todo este libro nos seguiremos refiriendo a estos resultados como los **teoremas del movimiento orbital** en lugar de llamarlos, como se acostumbra en todas partes, las leyes de Kepler.

Un poco de historia

Newton, Hooke y el primer teorema del movimiento orbital. Uno de los logros más significativos de la teoría del movimiento y la gravedad formulada por Newton en los 1680 y presentada en los *Principia* fue la demostración, que sintetizamos en esta sección usando métodos modernos, de que un cuerpo sometido a una fuerza central que varía con el inverso del cuadrado de la distancia se movería sobre una curva cónica.

Como sucedió con la idea de la fuerza de gravedad, todo parece indicar que el primero en intuir esta relación fue Robert Hooke. En 1679, Newton, en respuesta a una carta previa de Hooke discutiendo el problema de la gravedad y la rotación de la Tierra, explicaba que contrario a lo que pensaban los escolásticos, quienes esgrimían contra la rotación de la Tierra la idea de que si un cuerpo se soltaba desde una cierta altura caería al oeste del punto de lanzamiento porque la Tierra debajo de él se habría movido hacia el oriente, en realidad por la ley de inercia el objeto caería un poco hacia el oriente: al lanzarse desde un punto más lejano del centro de la Tierra, su velocidad tangencial sería mayor que la velocidad de la superficie (ver Figura 7.9.) Continuaba Newton explicando que si además el cuerpo pudiera moverse por dentro del planeta describiría, por efecto de la aceleración gravitacional una trayectoria en espiral hacia el centro.

Este sería uno de los poquísimos errores de intuición física que cometería Newton en público. La corrección del error le permitiría deducir con su teoría gravitacional, la primera ley de Kepler, pero también le costaría muchos dolores de cabeza en su debate público con Hooke por la prioridad en el descubrimiento.

Hooke respondió a Newton corrigiendo en dos aspectos sus conclusiones sobre el experimento mental planteado. El primero era que si el cuerpo de su experimento se lanzaba en la latitud de Londres en realidad caería hacia el sur oriente, esto porque la aceleración está dirigida hacia el centro de la Tierra que desde la latitud de Inglaterra está inclinado hacia al sur. La segunda y más crucial corrección fue, ci-

Un poco de historia (Cont.)

tando textualmente a Hooke “*mi teoría del movimiento circular me hace suponer que [la trayectoria del cuerpo] sería algo muy diferente y en lo absoluto parecido a una espiral, sino más bien una especie de elipsoide.*” Hooke razonaba correctamente al mostrar que el movimiento de un cuerpo sometido a la atracción de la Tierra se movería de forma similar a un planeta alrededor del Sol.

Newton reconocería después que Hooke estaba en lo cierto, pero más importante, esta corrección lo motivó (como él mismo lo reconoció posteriormente) a verificar, usando el cálculo infinitesimal que había inventado unos años antes, si el movimiento sobre una elipse era compatible con una fuerza que variaba con el inverso del cuadrado de la distancia. Así lo hizo como quedó formulado en un teorema que presentó en un ensayo, anterior a los *Principia* pero que se convertiría en la semilla del Libro III del mismo, titulado *De motu corporum in gyrum* (Sobre los movimientos de cuerpos en una órbita) y que fue leída por la Royal Society en 1684.

Hasta ahí todo se reduciría a explicar algo que se conocía desde los tiempos de Kepler. Pero una nueva teoría necesita predicciones enteramente nuevas. En diciembre de 1680 y enero de 1681 aparecieron en el cielo dos cometas casi idénticos (ver Figura 7.10.) El astrónomo real John Flamsteed sostenía la teoría de que se trataba del mismo objeto que se había aproximado al Sol en 1680 y después había dado la vuelta “detrás” de él apareciendo en enero de 1681. Newton se interesó en la teoría de Flamsteed y recogió observaciones realizadas por él mismo, por el astrónomo real, por el italiano Giovanni Domenico Cassini y por su archienemigo Robert Hooke. Para 1682 Newton obtuvo finalmente la respuesta esperada: el cometa de 1680/1681 se movía en una trayectoria casi parabólica, producida por la atracción “magnética” del Sol y que, como la trayectoria elíptica, también obedecía la ley del inverso cuadrado de la distancia. La primera ley de Kepler se convertía así en el primer teorema del movimiento planetario formulado aquí.

7.9. La órbita en el espacio

En las secciones precedentes encontramos, usando las constantes de movimiento del problema relativo de dos cuerpos, la ecuación de la curva que describe el vector relativo (Ec. 7.14.1) y de allí las ecuaciones de las trayectorias descritas por los cuerpos individuales (Ecs. 7.19 y 7.20).

Estos resultados implican que una vez se especifica un único parámetro f , es posible calcular la posición y velocidad relativa de los dos cuerpos en el sistema de coordenadas natural de la cónica que describen (origen en uno de los focos, semieje x_+ que coincide con el eje de simetría y apuntando hacia el periapsis).

En las siguientes secciones intentaremos resolver dos problemas clásicos:

1. **Determinación de órbita.** Si se conoce la posición y velocidad relativa instantánea de un sistema de dos cuerpos, referida a un sistema de coordenadas arbitrario, ¿cuál es son los elementos orbitales $(p, e, i, \Omega, \omega, f_0)$ que describen la cónica?
2. **Predicción del vector estado.** Una vez se conocen los elementos orbitales de un sistema de dos cuerpos $(p, e, i, \Omega, \omega, f_0)$ ¿cuál es el vector de estado del sistema (y de las partículas constituyentes) para cualquier valor de f ?

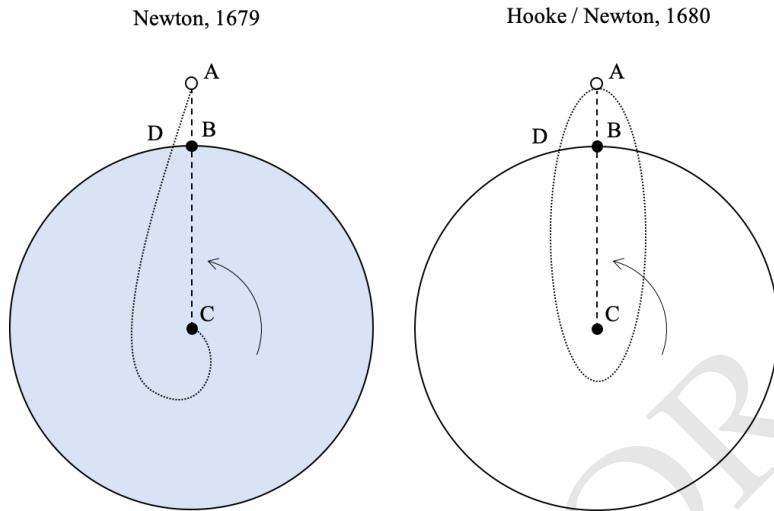


Figura 7.9: Izquierda: ilustración de Newton adaptada de la correspondencia con Hooke en 1679 y en la que explicaba la trayectoria que seguiría una partícula soltada desde el reposo en un punto A a una cierta altura sobre una Tierra que rota. Para esta trayectoria Newton asumía que la fuerza de gravedad era proporcional a la distancia al centro (que es lo que pasaría dentro de la Tierra sólida.) Derecha: trayectoria elíptica que seguiría la partícula si toda la masa de la Tierra estuviera concentrada en el punto C y la fuerza variara con el inverso del cuadrado de la distancia. Esta trayectoria fue sugerida por Robert Hooke e inspiró a Newton a demostrar la primera ley de Kepler usando su teoría de la gravedad.

7.9.1. Determinación de la órbita

En la [Figura 7.11](#) se muestra la posición y velocidad relativa instantánea de un sistema de dos cuerpos en un sistema de coordenadas arbitrario $x - y - z$. El reto consiste es encontrar a partir únicamente de \vec{r} y $\dot{\vec{r}}$, los parámetros geométricos de la cónica p y e , su orientación en el espacio especificada por los ángulos i , Ω y ω , además del valor de la anomalía f_0 correspondiente a la posición relativa del sistema.

La reconstrucción comienza por encontrar los vectores constantes:

$$\vec{h} = \vec{r} \times \dot{\vec{r}} \quad (7.32)$$

$$\vec{e} = \frac{\dot{\vec{r}} \times \vec{h}}{\mu} - \frac{\vec{r}}{r} \quad (7.33)$$

$$\vec{n} = \hat{e}_z \times \vec{h} \quad (7.34)$$

$$(7.35)$$

De aquí se pueden obtener los parámetros de tamaño y forma de la cónica:

$$p = \frac{h^2}{\mu} \quad (7.36)$$

$$e = |\vec{e}| \quad (7.37)$$



Figura 7.10: Pintura del holandés Lieve Verschueren que muestra la apariencia del gran cometa de 1680, llamado también el cometa de Newton. Crédito: Museo de Rotterdam.

La orientación de la cónica puede obtenerse usando el producto escalar entre los vectores claves:

$$\cos i = \frac{\vec{h} \cdot \hat{a}_z}{h} = \frac{h_z}{h} \quad (7.38)$$

$$\cos \Omega = \frac{\vec{n} \cdot \hat{a}_x}{n} = \frac{n_x}{n} \quad (7.39)$$

$$\cos \omega = \frac{\vec{n} \cdot \vec{e}}{ne} \quad (7.40)$$

$$(7.41)$$

Numéricamente, la función $\theta = \cos^{-1} x$ devuelve un ángulo en el rango $0 \leq \theta \leq \pi$. Esto es suficiente para determinar la *inclinación orbital* i , pero no lo es en el caso de la *longitud del nodo ascendente* Ω que es un ángulo en el rango $0 \leq \Omega \leq 2\pi$, ni tampoco en el caso del *argumento del periapsis* que tiene un rango similar. En estos dos casos podemos usar las siguientes reglas para determinar el cuadrante correcto para los ángulos respectivos:

- **Longitud del nodo ascendente** Ω . El criterio para determinar el cuadrante correcto de este elemento, parte de calcular la proyección del vector nodal \vec{n} sobre el eje y . Si el signo es positivo, el valor de Ω será el valor principal devuelto por \cos^{-1} :

$$\Omega_p \equiv \cos^{-1} \left(\frac{n_x}{n} \right)$$

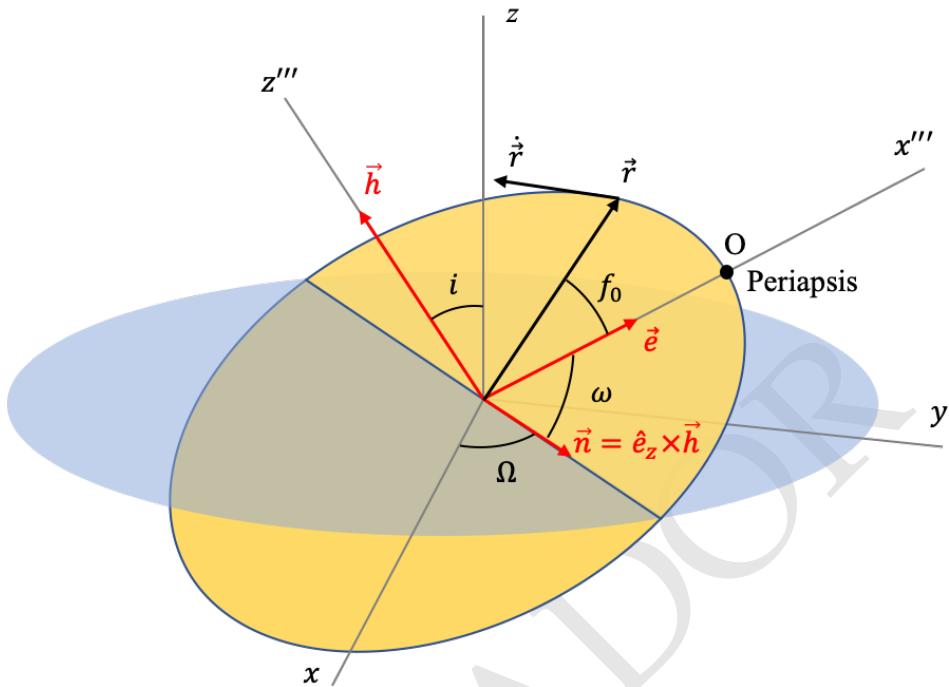


Figura 7.11: Construcción geométrica requerida para resolver el problema de la determinación de los elementos orbitales de la trayectoria del vector relativo a partir del vector de estado $\vec{X} = (\vec{r} \ \dot{\vec{r}})^T$.

En caso contrario, usaremos el ángulo complementario a 2π . En síntesis:

$$\Omega = \begin{cases} \Omega_p & \text{Si } n_y \geq 0 \\ 2\pi - \Omega_p & \text{Si } n_y < 0 \end{cases} \quad (7.42)$$

- **Argumento del periapsis ω .** En este caso el valor principal del elemento es:

$$\omega_p \equiv \cos^{-1} \left(\frac{\vec{n} \cdot \vec{e}}{en} \right)$$

para determinar el cuadrante correcto, proyectamos el vector de excentricidad sobre el eje z . Con esto ω queda:

$$\omega = \begin{cases} \omega_p & \text{Si } e_z \geq 0 \\ 2\pi - \omega_p & \text{Si } e_z < 0 \end{cases} \quad (7.43)$$

Finalmente la anomalía verdadera instantánea se puede determinar de la proyección del vector posición sobre el vector excentricidad:

$$f_p \equiv \cos^{-1} \left(\frac{\vec{e} \cdot \vec{r}}{er} \right) \quad (7.44)$$

El cuadrante del ángulo en este caso se encuentra determinando si el vector relativo se aleja ($0 < f < \pi$) o se acerca al periapsis ($\pi < f < 2\pi$). Esta condición puede evaluarse si se calcula la proyección del vector velocidad sobre el vector posición:

$$v_r = \frac{\vec{r} \cdot \vec{v}}{r}$$

Finalmente, el valor f en el cuadrante correcto:

$$f = \begin{cases} f_p & \text{Si } v_r \geq 0 \\ 2\pi - f_p & \text{Si } v_r < 0 \end{cases} \quad (7.45)$$

7.9.2. Predicción del vector de estado

Una vez hemos calculado los elementos orbitales ($p, e, i, \Omega, \omega, f_0$) a partir de una posición específica o nos son provistos para una trayectoria particular, el siguiente problema consiste en determinar la posición y velocidad relativa (vector de estado) del sistema para un valor cualquiera de la anomalía verdadera f .

En la [Sección 4.2.20](#) habíamos visto cómo calcular las coordenadas de la partícula a partir de los elementos orbitales, para una anomalía verdadera f (Ecs. [4.91](#)):

$$\begin{aligned} x &= r[\cos \Omega \cos(\omega + f) - \cos i \sin \Omega \sin(\omega + f)] \\ y &= r[\sin \Omega \cos(\omega + f) + \cos i \cos \Omega \sin(\omega + f)] \\ z &= r \sin i \sin(\omega + f) \end{aligned}$$

donde $r = p/(1 + e \cos f)$

Las componentes cartesianas de la velocidad en el espacio se pueden obtener partiendo de sus componentes en el sistema de coordenadas natural de la cónica (Ecs. [7.29](#)):

$$\begin{aligned} \dot{x}''' &= -\frac{\mu}{h} \sin f \\ \dot{y}''' &= \frac{\mu}{h} (e + \cos f) \\ \dot{z}''' &= 0 \end{aligned}$$

que pueden, usando las expresiones explícitas para la rotación en tres dimensiones dadas por las Ecs. [\(4.90\)](#) y [\(4.88\)](#), rotarse al sistema del observador:

$$\dot{x} = \frac{\mu}{h} [-\cos \Omega \sin(\omega + f) - \cos i \sin \Omega \cos(\omega + f)] \quad (7.46)$$

$$-\frac{\mu e}{h} (\cos \Omega \sin \omega + \cos \omega \cos i \sin \Omega)$$

$$\dot{y} = \frac{\mu}{h} [-\sin \Omega \sin(\omega + f) + \cos i \cos \Omega \cos(\omega + f)] \quad (7.47)$$

$$+\frac{\mu e}{h} (-\sin \Omega \sin \omega + \cos \omega \cos i \cos \Omega)$$

$$\dot{z} = \frac{\mu}{h} [\sin i \cos(\omega + f) + e \cos \omega \sin i] \quad (7.48)$$

$$(7.49)$$

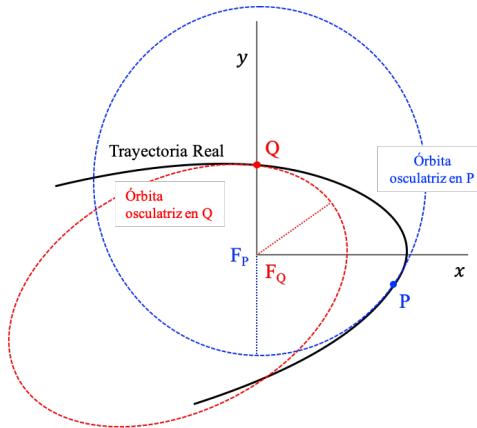


Figura 7.12: Ilustración del concepto de órbita osculatriz. La trayectoria del cuerpo (curva continua) no es una cónica. Sin embargo por cada punto de la curva (p.e. los puntos P y Q) podemos encontrar una cónica que sea tangente a la curva (curvas rayadas) y que tenga como foco (F_P o F_Q) el origen de coordenadas.

7.9.3. La órbita osculatriz

La existencia de una función que asigna a cada vector de estado \vec{x} : (x, y, z, v_x, v_y, v_z) un conjunto de elementos orbitales $p(\vec{x})$, $e(\vec{x})$, $i(\vec{x})$, $\Omega(\vec{x})$, $\omega(\vec{x})$, $f(\vec{x})$ y viceversa (Ecs. 7.36-7.48) es una interesante propiedad que conduce a una importante definición en mecánica celeste.

Independientemente de cuál es la trayectoria que siga una partícula en el espacio, sea esta una cónica o no, siempre es posible encontrar para cada punto de la trayectoria, una curva cónica con elementos $p(\vec{x})$, $e(\vec{x})$, $i(\vec{x})$, $\Omega(\vec{x})$, $\omega(\vec{x})$, $f(\vec{x})$ que tiene como foco el origen de coordenadas y es tangente a la trayectoria de la partícula (ver Figura 7.12.) Por su naturaleza “rasante”, llamamos a esta cónica la **órbita osculatriz** o **cónica osculatriz** (la palabra osculatriz viene del latín *osculo* que significa “beso”).

Naturalmente, en el problema relativo de los dos cuerpos, la cónica osculatriz asociada a cada punto de la trayectoria descrita por el vector relativo será siempre la misma. En otros términos, podemos decir que los elementos orbitales $p(\vec{x})$, $e(\vec{x})$, $i(\vec{x})$, $\Omega(\vec{x})$, $\omega(\vec{x})$, $f(\vec{x})$ son en sí mismos constantes de movimiento en el problema de los dos cuerpos (un interesante resultado sobre el que volveremos en el ??).

En situaciones más generales (como veremos en la ??), los elementos de la órbita osculatriz cambian punto a punto y el estudio de su *dinámica* (conocido en mecánica celeste como *teoría de perturbaciones*) se vuelve en sí mismo muy interesante. Si bien la teoría de perturbaciones está más allá del objetivo de este libro (es de esos temas desarrollados en detalle en la mayoría de los textos avanzados de mecánica celeste), por su importancia abordaremos algunos de sus rudimentos más adelante en este capítulo.

7.9.4. Un ejemplo numérico

Para poner en práctica lo visto en esta sección partamos de un sistema de dos cuerpos con condiciones iniciales arbitrarias:

```
from numpy import array
sistema=[
    dict(m=1.0,
        r=array([0.0,0.0,+0.3]),
        v=array([-1.0,0.0,0.5])),
    dict(m=0.5,
        r=array([-1.0,0.0,0.0]),
        v=array([0.0,-1.0,0.0])),
]
```

A partir de estas condiciones iniciales, podemos calcular los parámetros iniciales del sistema relativo:

```
from numpy.linalg import norm
mu=sistema[0]["m"]+sistema[1]["m"]
rvec=sistema[0]["r"]-sistema[1]["r"]
r=norm(rvec)
vvec=sistema[0]["v"]-sistema[1]["v"]
v=norm(vvec)

mu = 1.5
r_vec = [-1.  0.  0.3]
r = 1.044030650891055
v_vec = [ 1. -1.  0.5]
v = 1.5
```

A partir de los vectores posición y velocidad podemos obtener los vectores clave (Ecs. ??-??):

```
from numpy import cross
from numpy.linalg import norm

#Momento angular relativo específico
hvec=cross(rvec,vvec)
h=norm(hvec)
#Vector excentricidad
evec=cross(vvec,hvec)/mu-rvec/r
e=norm(evec)
#Vector nodo ascendente
nvec=cross([0,0,1],hvec)
n=norm(nvec)

hvec = [0.3 0.8 1. ]
h = 1.3152946437965904
evec = [ 0.02449295 -0.56666667  0.44598545]
e = 0.7215358864417007
nvec = [-0.8  0.3  0. ]
n = 0.8544003745317532
```

Los parámetros de tamaño y forma se obtienen usando:

```
#Semilatus rectum
p=h**2/mu
#Semieje mayor
a=p/(1-e**2)
#Velocidad angular promedio
from numpy import sqrt
nmed=sqrt(mu/abs(a)**3)
```

```
p = 1.153333333333333 u.c.
a = 2.405855445416549 u.c.
nmed = 0.3282020847560834 u.c.
```

La orientación de la órbita se obtiene usando las Ecs. (7.39)-(7.44):

```
from numpy import dot,arccos,pi
i=arccos(hvec[2]/h)

Wp=arccos(nvec[0]/n)
W=Wp if nvec[1]>0 else 2*pi-Wp

wp=arccos(dot(nvec,evec)/(e*n))
w=wp if evec[2]>0 else 2*pi-wp

fp=arccos(dot(rvec,evec)/(r*e))
f0=fp if dot(rvec,vvec)>0 else 2*pi-fp
```

```
i = 40.510589437332754 grados
W = 159.44395478041653 grados
w = 107.91123121198778 grados
f_0 = 278.34291953929824 grados
```

Hemos sintetizado este mismo procedimiento como la rutina `estado_a_elementos` cuyo algoritmo se presenta en el [Apéndice *Algoritmos y rutinas útiles*].

Con este resultado podemos ahora determinar el vector posición y velocidad en un valor arbitrario de la anomalía verdadera:

```
#Anomalía verdadera
f=pi/2

#Distancia al punto
from numpy import cos
r=p/(1+e*cos(f))
```

Las coordenadas del punto son:

```
from numpy import cos,sin
x=r*(cos(W)*cos(w+f)-cos(i)*sin(W)*sin(w+f))
y=r*(sin(W)*cos(w+f)+cos(i)*cos(W)*sin(w+f))
```

```

z=r*sin(i)*sin(w+f)

from numpy import array
r_nuevo=array([x,y,z])

```

Y la velocidad:

```

#Parametro mu/h
muh=mu/h

vx=muh*(-cos(W)*sin(w+f)-cos(i)*sin(W)*cos(w+f))\
-muh*e*(cos(W)*sin(w)+cos(w)*cos(i)*sin(W))
vy=muh*(-sin(W)*sin(w+f)+cos(i)*cos(W)*cos(w+f))\
+muh*e*(-sin(W)*sin(w)+cos(w)*cos(i)*cos(W))
vz=muh*(sin(i)*cos(w+f)+e*cos(w)*sin(i))

from numpy import array
v_nuevo=array([vx,vy,vz])

```

Una posible comprobación de que nuestra predicción es la correcta (aunque es una condición necesaria y no suficiente de su validez), es verificar si el momento angular específico relativo con el vector de estado sigue siendo el mismo:

```

from numpy import cross
hvec_nuevo=cross(r_nuevo,v_nuevo)

Inicial, hvec = [0.3 0.8 1.]
Nueva posición, hvec = [0.3 0.8 1.]

```

Y vemos que coinciden.

Una prueba aún más estricta para nuestra teoría sería la de comparar la órbita predicha con una integración numérica de las ecuaciones de movimiento. Para ello nos valdremos de la rutina ncuerpos_solucion definida en el Alg. (6.16):

```

#Tiempo característico de la cónica
#Si la cónica es una elipse este es el período
from numpy import pi
T=2*pi/nmed

#Tiempos
from numpy import linspace
ts=linspace(0,T,20)

#Solución a las e.d.m. del sistema
from pymcel.export import ncuerpos_solucion
rs,vs,rps,vps,constantes=ncuerpos_solucion(sistema,ts)

```

Para comparar con la solución necesitamos calcular las posiciones y velocidades relativas. Por relativas, no es importante si usamos el vector de estado referido al sistema de referencia original (rs, vs) o el referido al centro de masa (rps, vps):

```
rs_num=rs[0,:,:]-rs[1,:,:]
vs_num=vs[0,:,:]-vs[1,:,:]
```

Para visualizar la órbita predicha en tres dimensiones, usaremos la rutina `conica_de_elementos`:

(Algoritmo 7.4)

```
#Visualización de la cónica
from numpy import pi
from pymcel.export import conica_de_elementos
fig=conica_de_elementos(p,e,i*180/pi,W*180/pi,w*180/pi,figreturn=True)
ax=fig.gca()
#Posición y velocidad inicial
ax.quiver(0,0,0,
          rvec[0],rvec[1],rvec[2],
          color='k');
ax.quiver(rvec[0],rvec[1],rvec[2],
          vvec[0],vvec[1],vvec[2],
          color='k');

#Posición y velocidad nueva
ax.quiver(0,0,0,
          r_nuevo[0],r_nuevo[1],r_nuevo[2],
          color='b');
ax.quiver(r_nuevo[0],r_nuevo[1],r_nuevo[2],
          v_nuevo[0],v_nuevo[1],v_nuevo[2],
          color='b');

#Posiciones calculadas numéricamente
ax.plot(rs_num[:,0],rs_num[:,1],rs_num[:,2], 'rx');

fig.tight_layout()
```

ver Figura 7.13

Este resultado nos permite comprobar plenamente los resultados teóricos de las últimas sesiones:

- La posición y velocidad inicial coincide con uno de los puntos de la curva cónica.
- La nueva posición y velocidad coincide también con uno de los puntos de la cónica.
- Las posiciones relativas calculadas numéricamente coinciden perfectamente con los puntos sobre la cónica.

7.10. El problema de los dos cuerpos en el tiempo

Como vimos en la Sección 7.3, **ninguna** de las constantes de movimiento identificadas en el problema relativo de los dos cuerpos, depende explícitamente del

Cónica con: $p = 1.15$, $e = 0.72$, $i = 40.51$, $\Omega = 159.4$, $\omega = 159.4$

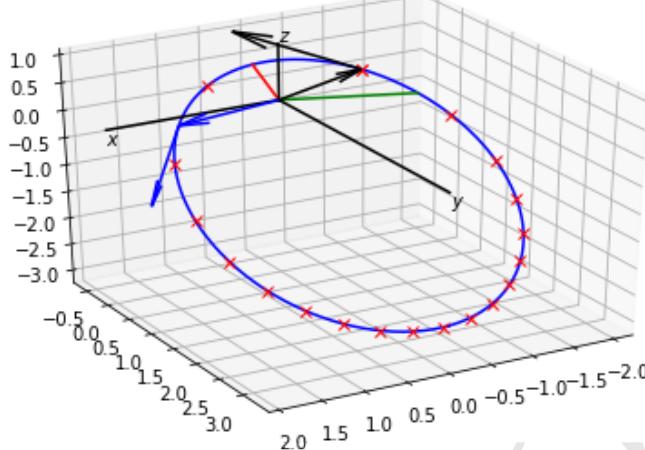


Figura 7.13: Figura correspondiente al código 7.4.

tiempo. Esto implica que con las cuadraturas disponibles lo único que podemos hacer es expresar la posición y velocidad en términos de un parámetro, la anomalía verdadera f (ver Sección 7.4) sin tener todavía ninguna clave de cómo este parámetro depende del tiempo. En esta sección nos proponemos justamente eso, encontrar la manera de calcular la anomalía verdadera del vector relativo (o cualquiera de las otras anomalías definidas antes) para cualquier instante del tiempo. Llamamos a este el *problema de Kepler* y su solución no es otra cosa que el objetivo perseguido desde el principio de este libro.

Para ello debemos primero responder a la pregunta: ¿hay alguna propiedad geométrica en el movimiento del vector relativo sobre la cónica cuyo valor puede predecirse exactamente en el tiempo? Examinando los teoremas del movimiento orbital (ver Sección 7.8) nos damos cuenta que la única cantidad con esta propiedad es el área A barrida por el radio vector (*area del sector de cónica*) que, de acuerdo con el Teo. (7.1), cambia uniformemente con el tiempo a razón de (Ec. 7.9):

$$\frac{dA}{dt} = \frac{h}{2}$$

Si integramos esta ecuación el área del sector de cónica barrida por el vector relativo entre el tiempo de paso por el periapsis t_p y un tiempo arbitrario t será:

$$\Delta A = \frac{h}{2}(t - t_p) \quad (7.50)$$

Ahora bien, como vimos en la Sección 4.2.15 el área del sector ΔA depende explícitamente de las anomalías (verdadera o excéntrica), de modo la Ec. (7.50) combinada con la expresión explícita de ΔA como función de las anomalías proveerá la respuesta final a la pregunta formulada aquí.

7.10.1. La ecuación de Halley

Aunque no es común presentarlo en este orden e históricamente el caso de la parábola fue el último en ser planteado como se muestra aquí, comenzaremos por resolver la pregunta de cómo calcular la anomalía verdadera del vector relativo en el problema de los dos cuerpos que se mueven sobre una parábola, $e = 1$ (p.e. un cometa.)

En la [Sección 4.2.15](#) habíamos deducido geométricamente la relación entre el área de un sector de parábola y la anomalía verdadera correspondiente:

$$\Delta A_{\text{parabola}} = \frac{1}{4} p^2 \left(\tan \frac{f}{2} + \frac{1}{3} \tan^3 \frac{f}{2} \right)$$

Dado que por la Ec. (\ref{eq:area_sector_tiempo}) sabemos cuánto vale ΔA en cualquier tiempo, podemos escribir explícitamente:

$$\frac{1}{2} h(t - t_p) = \frac{1}{4} p^2 \left(\tan \frac{f}{2} + \frac{1}{3} \tan^3 \frac{f}{2} \right)$$

Si usamos $h = \sqrt{\mu p}$ obtenemos después de algunas manipulaciones algebraicas elementales:

$$6 \sqrt{\frac{\mu}{p^3}} (t - t_p) = \tan^3 \frac{f}{2} + 3 \tan \frac{f}{2} \quad (7.51)$$

Llamaremos a esta ecuación, la **ecuación de Halley** y su solución nos brinda finalmente la respuesta a la pregunta original.

Un poco de historia

¿Halley o Barker? Es común presentar la Ec. (??) en la forma:

$$2 \sqrt{\frac{\mu}{p^3}} (t - t_p) = \tan \frac{f}{2} + \frac{1}{3} \tan^3 \frac{f}{2}$$

y referirse a ella como la **Ecuación de Barker**. Así lo hacen prácticamente la totalidad de los textos de mecánica celeste escritos en los últimos 250 años.

Una indagación histórica más juiciosa [15] ha revelado, sin embargo, que el primero en deducir y utilizar esta ecuación fue Edmund Halley ([“Edmond Hali”^a](#)).

Halley (1656-1742, ver [Figura 7.14](#)) fue un virtuoso inglés contemporáneo de Newton, cuyos trabajos científicos abarcaron áreas tan diversas como la astronomía (en la que hizo sus principales contribuciones), la física, la meteorología, las matemáticas y la geofísica. Fue Halley en 1684 quién presentó a Newton el problema que conduciría a este a su teoría general de la gravitación: qué tipo de trayectoria seguirá un cuerpo que se mueva bajo la influencia de una fuerza que disminuya con el cuadrado de la distancia. Newton respondió a este problema con la monografía *“De Motu corporum in gyrum”*, que no es otra cosa que la “semilla” de la Mecánica Celeste moderna. En 1687, Halley culminó el “trabajo editorial” de su vida al publicar la primera edición de los *Principia* de Newton.

En 1705, más de veinte años después de la publicación de los *Principia*, Halley publicó la monografía “Una sinopsis de la astronomía de los cometas” ^b en la que compila información observational relacionada con los cometas observados en su tiempo y en siglos anteriores y de provee tablas de posiciones pasadas y futuras de

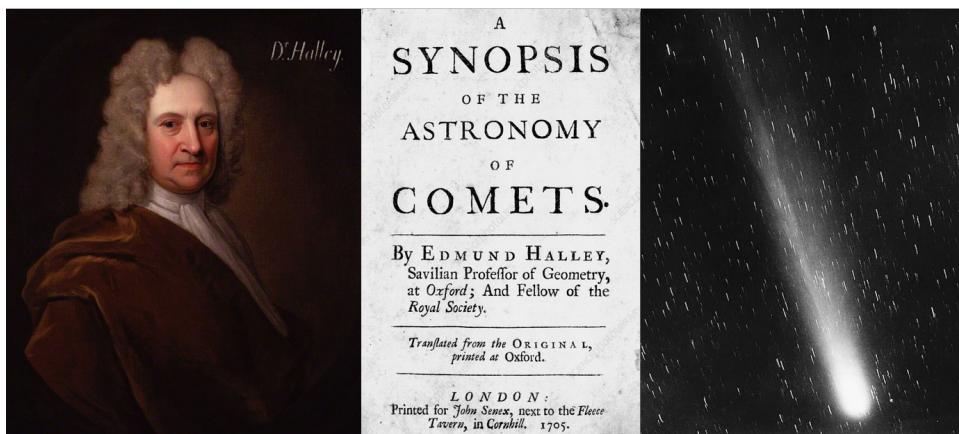


Figura 7.14: Halley.

Un poco de historia (Cont.)

esos mismos cometas. Es en este trabajo en el que Halley introduce por primera vez la Ec. (??), la cual utiliza para el cálculo de sus tablas. Allí, además, Halley realizó el trascendental descubrimiento por el que sería recordado por siempre. Según sus análisis tres cometas que habían sido observado en 1531, 1607 y 1682 (esté último observado y registrado por él mismo) eran en realidad uno solo. Armado con la teoría de Newton Halley predice que el cometa se aproximaría nuevamente al Sol y a la Tierra en el año 1758. Lamentablemente no viviría lo suficiente para hacer realidad su predicción, que se cumplió sin falta. Hoy, el mencionado cometa lleva su nombre, 1P/Halley o “cometa Halley”. Sus últimas apariciones (antes de la preparación de este libro) se produjeron en 1910 y 1986 y las próximas serán en 2061 y 2134 (ver ??.)

¿Por qué entonces la mayoría de los autores llaman a la Ec. (??), “ecuación de Barker”?

En 1757, apenas un año antes del regreso del cometa Halley, el meteorólogo inglés Thomas Barker escribió una monografía titulada “Un relato sobre los descubrimientos relacionados con los cometas” en la que no solo realizaba predicciones precisas de la posición de los cometas sobre órbitas parabólicas sino también aplicaba los mismos métodos teóricos para estudiar el problema más práctico del movimiento de proyectiles. Barker usó en su trabajo la Ec. (??) para sus predicciones y no sabemos si la dedujo por su cuenta o la tomó del trabajo de Halley (como seguramente debió ocurrir) sin hacer necesariamente referencia a él (una práctica común en la época, especialmente si se trataba de resultados que no eran muy difíciles de deducir.) En 1793, el astrónomo Henry Englefield publicó su influyente libro “Sobre la determinación de las órbitas de los cometas” en el que uso, entre otros, los métodos de Barker. Para dar crédito a su autor, fue Englefield el que llamó por primera vez a la Ec. (??) “ecuación de Barker” y de allí se nutrieron los autores sucesivos.

^ahttps://forvo.com/search/Halley/en_uk/

^bUna copia digital del manuscrito está disponible en línea en <https://archive.org/details/synopsisofastron00hall/page/n4>

¿Tiene la ecuación de Halley una solución analítica? Si usamos la variable au-

xiliar $z \equiv \tan(f/2)$ la Ec. (7.51) se puede escribir como:

$$z^3 + 3z - 2M_p = 0$$

donde,

$$M_p \equiv 3\sqrt{\frac{\mu}{p^3}}(t - t_p) \quad (7.52)$$

una cantidad que llamaremos la *anomalía media parabólica*.

Esta ecuación cúbica tiene solo una raíz real [35]:

$$z = \sqrt[3]{M_p + \sqrt{M_p^2 + 1}} + \sqrt[3]{M_p - \sqrt{M_p^2 + 1}}$$

Si definimos la variable auxiliar $y \equiv \sqrt[3]{M_p + \sqrt{M_p^2 + 1}}$, la solución a la ecuación de Halley se puede escribir finalmente como:

$$\tan \frac{f}{2} = y - \frac{1}{y}$$

Una aproximación interesante y útil se obtiene cuando consideramos el caso de tiempos muy cercanos al paso por el periapsis ($t - t_p \rightarrow 0$). En esta situación $M_p \ll 1$ y una aproximación a y se puede obtener con el teorema del binomio:

$$\begin{aligned} y &\approx 1 + \frac{1}{3}M_p \\ \frac{1}{y} &\approx 1 - \frac{1}{3}M_p \end{aligned} \quad (7.53)$$

Por otro lado como $f \ll 1$,

$$\tan \frac{f}{2} \approx \frac{f}{2}$$

con lo que resulta:

$$f \approx \frac{4}{3}M_p \text{ para } M_p \ll 1 \quad (7.54)$$

Como acostumbramos aquí, podemos “verificar” este resultado usando el siguiente algoritmo:

```
#Constantes del sistema
mu=1.0
h=3.0

#Tamaño de la parábola
p=h**2/mu

#Tiempo de paso por el periapsis
tp=0.0
```

```

#Tiempo en el que deseamos calcular f
t=1.0

#Anomalía media parabólica
from numpy import sqrt
Mp=3*sqrt(mu/p**3)*(t-tp)

#Variable auxiliar
y=(Mp+sqrt(1+Mp**2))**(1./3)

#Raíz de la ecuación de Halley
z=y-1/y

#Anomalía verdadera
from numpy import arctan
f=2*arctan(z)

#Aproximación de la anomalía media
faprox=(4./3)*Mp

#Polinomio cúbico en z
polinomio=z**3+3*z-2*Mp

```

Propiedades del sistema: $h=3$, $\mu=1$, $t_p=0$

Solución al problema de Kepler en $t = 1$:

Anomalía parabólica: $M_p = 6.3662$ grados

Variable auxiliar: $y = 1.0376528$

Anomalía verdadera: $z = \tan(f/2) = 0.0739393$

Anomalía verdadera: $f = 8.4574333$ grados

Aproximación: $4/3 M_p = 8.4882636$ grados

Polinomio: $z^3 + 3z - 2M_p = 7.494005416219807e-16$

Nota

La anomalía media parabólica no es un ángulo. Aunque en el resultado del algoritmo anterior, hemos presentado el valor de la anomalía media parabólica M_p en grados, no puede interpretarse esta cantidad como un verdadero ángulo.

7.10.2. La ecuación de Kepler

En la Sección 4.2.15 habíamos deducido geométricamente el área de un sector de elipse como función de la anomalía excéntrica (Ec. 4.77). Usando ahora el teorema de áreas en la Ec. (7.50) podemos escribir la relación:

$$\frac{h}{2}(t - t_p) = \frac{1}{2}ab(E - e \sin E)$$

Si tenemos en cuenta el teorema armónico (Teo. 7.4), a saber que

$$a^3 n^2 = \mu$$

y las relaciones que $p = h^2 / \mu$ y $a = p / (1 - e^2)$ obtenemos finalmente la ecuación:

$$M = E - e \sin E \quad (7.55)$$

donde $M \equiv n(t - t_p)$ se conoce como la **anomalía media elíptica** o simplemente **anomalía media**.

A esta ecuación fundamental se la conoce universalmente como la **Ecuación de Kepler**.

El mismo procedimiento puede usarse para deducir una ecuación análoga en el caso de la hipérbola.

Usando el área del sector en la Ec. (4.79) y aplicando el teorema de áreas obtenemos:

$$\frac{h}{2}(t - t_p) = \frac{1}{2}|a|\beta(e \sinh F - F)$$

donde $\beta = |a|(e^2 - 1)$ y F es la anomalía excéntrica sobre la hipérbola.

Una manipulación algebraica similar a la usada para deducir la Ecuación de Kepler en el caso elíptico conduce a:

$$M_h = e \sin F - F \quad (7.56)$$

donde $M_h \equiv n_h(t - t_p)$ se conoce como la **anomalía media hiperbólica** y hemos introducido una nueva cantidad n_h , que guarda una relación con el valor absoluto del semieje mayor $|a|$, similar a la que guarda la velocidad angular promedio n en el caso elíptico:

$$|a|^3 n_h^2 = \mu$$

Llamamos a la Ec. (7.56), la *ecuación de Kepler hiperbólica*.

7.10.3. La función generalizada de Kepler

Las ecuaciones de Kepler para elipses e hipérbolas son muy parecidas pero no pueden escribirse como una sola ecuación de términos de las mismas funciones explícitas. Sin embargo es posible usar una “parametrización” o notación que permite unificarlas, al menos para los propósitos de escribir por ejemplo algunos algoritmos de solución.

Para ello definamos las siguientes variables y funciones auxiliares:

$$\sigma, c(G), s(G), t(G) = \begin{cases} +1, \cos G, \sin G, \tan G & e < 1 \\ -1, \cosh G, \sinh G, \tanh G & e > 1 \end{cases}$$

donde G es la *anomalía excéntrica generalizada* (E o F dependiendo de la cónica).

Con esta parametrización podemos definir la **función generalizada de Kepler**:

$$k(G; M, e) = \sigma[G - e s(G)] - M \quad (7.57)$$

donde $M = n(t - t_p)$, $n^2 |a|^3 = \mu$ y $a = p(1 - e^2)$.

Las derivadas de esta función con respecto de G , que serán utilizadas más adelante, son por su parte:

$$k'(G; M, e) \equiv \frac{dk}{dG} = \sigma[1 - e c(G)] \quad (7.58)$$

$$k''(G; M, e) \equiv \frac{d^2k}{dG^2} = e s(G) \quad (7.59)$$

(7.60)

La ecuación de Kepler generalizada será entonces:

$$k(G; M, e) = 0 \quad (7.61)$$

y su solución nos da el valor de la anomalía excéntrica generalizada G , una vez provistos los valores de la anomalía media M y la excentricidad e de la cónica.

Con el valor de G , la anomalía verdadera f se calcula finalmente como:

$$\tan \frac{f}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{\sigma(1-e)}} \operatorname{t}\left(\frac{G}{2}\right) \quad (7.62)$$

La siguiente rutina permite implementar la función generalizada de Kepler y calcular además de su valor, el de su primera y segunda derivada:

(Algoritmo 7.5)

```
def funcion_kepler(G,M=0,e=0):
    #Parametro sigma
    sigma=+1 if e<1 else -1
    #Funciones cG, sG
    from numpy import cos,cosh,sin,sinh
    cG=cos(G) if e<1 else cosh(G)
    sG=sin(G) if e<1 else sinh(G)
    #Función de Kepler
    k=sigma*(G-e*sG)-M
    #Primera derivada
    kp=sigma*(1-e*cG)
    #Segunda derivada
    kpp=e*sG
    return k,kp,kpp
```

En la ?? se presentan curvas de la función generalizada de Kepler para distintos valores de la excentricidad, tanto en el caso de elipse como en el de hipérbolas. En cada caso la intersección de la función generalizada de Kepler con el eje G es igual al valor de la anomalía excéntrica correspondiente a la respectiva anomalía media y excentricidad.

En las libretas que encontrará con la versión electrónica del libro⁴³ podrá ver una versión interactiva de esta gráfica.

⁴³http://seap-udea.org/MecanicaCeleste_Zuluaga

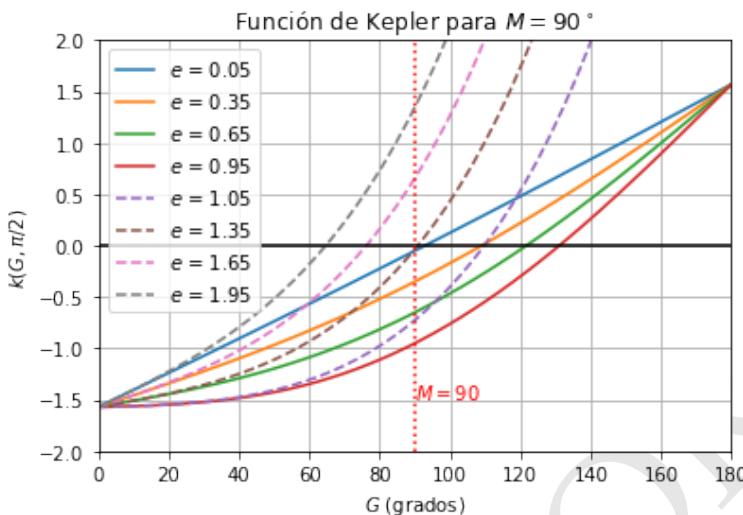


Figura 7.15: Gráficos de la función generalizada de Kepler $k(G; M, e)$ para $M = \pi/2$ y para distintos valores de la excentricidad (elipses, líneas continuas e hipérbolas, líneas rayadas.) El intercepto de cada curva con el eje horizontal G (línea continua horizontal) provee el valor de la anomalía excéntrica G correspondiente a los valores de M y de e respectivos.

7.10.4. Interpretación geométrica de la anomalía media

La solución al problema relativo de los dos cuerpos en las secciones precedentes, nos ha revelado que además de las dos anomalías ya conocidas para indicar la posición relativa, la anomalía verdadera f y la anomalía excéntrica E (o F en el caso de la hipérbola) existe una tercera anomalía, la anomalía media, M (o M_h en el caso de la hipérbola) que también es única para cada punto sobre la trayectoria.

La anomalía media es, además, la única cantidad que varía uniformemente con el tiempo y por la misma razón, puede ser predicha trivialmente conociendo la velocidad angular promedio n del vector relativo en el caso de movimiento elíptico o el parámetro n_h en el caso de la hipérbola.

¿Qué interpretación geométrica tiene la anomalía media M ?

De la misma manera que la anomalía excéntrica F en el caso de una hipérbola no tiene una interpretación geométrica elemental, como la que vimos para el caso de la anomalía excéntrica E en una elipse⁴⁴, así mismo, la anomalía media hiperbólica M_h carece también de dicha interpretación. Sin embargo, en el movimiento sobre una elipse, que es con mucho el más estudiado desde los tiempos de Kepler, se han encontrado múltiples interpretaciones para M .

En la ?? adaptamos un diagrama del capítulo 60 del libro *Astronomia Nova*⁴⁵ de Johannes Kepler y en la que en 1609, el astrónomo Prusiano dedujo por primera vez la Ecuación que lleva su nombre.

⁴⁴ Aunque vale admitir que hay una interpretación geométrica curiosa para F que puede encontrarse en [44]

⁴⁵Para una versión digital en latín, disponible en línea vea: <https://www.e->

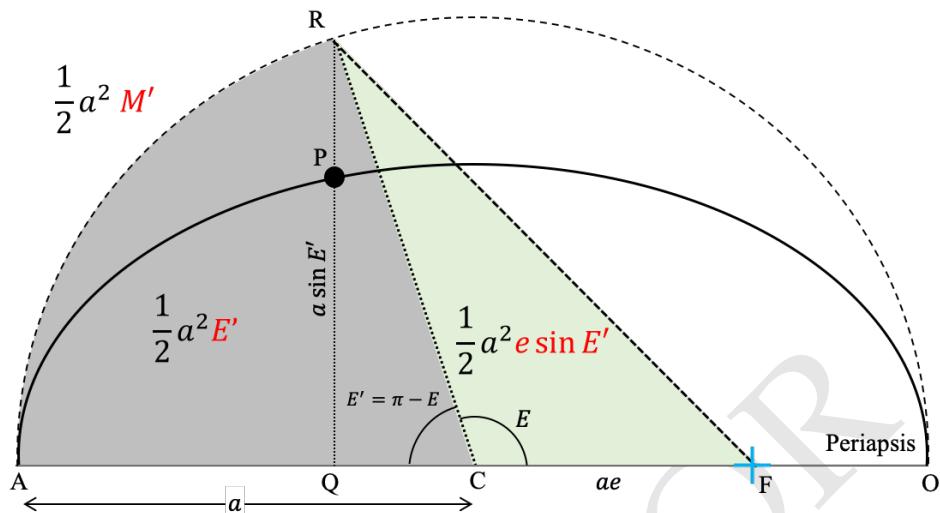


Figura 7.16: Construcción geométrica original de Johannes Kepler para interpretar la anomalía media M o su suplemento $M' \equiv \pi - M$. Según Kepler M' es proporcional al área total de la región FRA que, a su vez la suma del área del triángulo RCF , que es proporcional a $a e \sin E'$ y el área del sector de círculo RCA , que es proporcional a E' .

Kepler interpreto geométricamente la Ec. (7.55) en términos de las áreas de sectores sobre la elipse. Para entender su argumento debemos primero definir los suplementos de la anomalía excentrica $E' \equiv \pi - E$ y de la anomalía media $M' \equiv \pi - M$.

En términos de estos suplementos la ecuación de Kepler (Ec. 7.55) se escribe:

$$M' = E' + e \sin E'$$

A medida que el cuerpo se mueve sobre la elipse, el valor de la anomalía excentrica E y de su suplemento E' cambian con una velocidad variable (recordemos que por el teorema de áreas el cuerpo se mueve más rápido cerca al periapsis O.)

Cuando el cuerpo se encuentra en el punto P, toda el área sombreada en la ?? (que es la que le falta barrer al radio dirigido del foco a la circunferencia circunscrita, antes de llegar al afelio), será igual al área del triángulo RCF más el área del sector de círculo RCA :

$$A_{RFA} = A_{RCA} + A_{RCF}$$

Pero $A_{RCA} = a^2 E'/2$ (área de un sector circular) y $A_{RCF} = a^2 e \sin E'/2$ (área de un triángulo), de modo que reemplazando el área total del sector sombreado en la ?? queda:

$$\begin{aligned} A_{\text{RFA}} &= \frac{1}{2}a^2(E' + e \sin E') \\ &= \frac{1}{2}a^2M' \end{aligned}$$

donde en el último paso hemos usado la ecuación de Kepler en términos de los suplementos.

Este último resultado llevó a Kepler a planetar el problema del cálculo de la posición planetaria sobre una elipse como aquel en el que el Astrónomo, que puede predecir con suma facilidad el valor de la anomalía media $M = n(t - t_p)$, debe encontrar el lugar geométrico del punto R sobre la circunferencia circunscrita (y que está justo arriba del punto sobre la elipse buscado buscado), tal que el área RFA sea igual a $a^2M'/2$.

Dado que el punto F no está en el centro de la circunferencia circunscrita, M no se puede interpretar como ningún ángulo en la construcción de la ???. Como consecuencia de este hecho, y como lo reconoció Kepler desde aquel entonces, el problema de encontrar E' dado un valor de M' es altamente no trivial. A la fecha no se conoce ninguna solución geométrica al problema de Kepler, es decir, no podemos encontrar la posición del punto R usando solamente una regla y un compás.

En términos algebraicos la conclusión de Kepler es equivalente a reconocer que en la ecuación:

$$M = E - e \sin E$$

es imposible despejar algebraicamente E . A este tipo de ecuaciones se las conoce en matemáticas como *ecuaciones trascendentales*.

Esta conclusión es válida también en el caso de la ecuación de Kepler para el movimiento sobre una hipérbola:

$$M_h = e \sinh F - F$$

Si queremos entonces resolver el problema de los dos cuerpos en el tiempo, al menos cuando $e \neq 1$ tenemos que encontrar una manera *aproximada* de resolver esta ecuación. Este será justamente el tema de la siguiente sección. No sobra, sin embargo, hacer aquí una última reflexión, con la que podemos cerrar el esfuerzo de este capítulo para encontrar una solución al problema de los dos cuerpos.

A pesar de que logramos encontrar un número suficiente de cuadraturas para el problema e incluso encontramos una cantidad geométrica que depende de la posición y que cambia de forma predecible con el tiempo (el área barrida por el radiovector), la solución completa del problema de los dos cuerpos dependerá en últimas de resolver numéricamente una ecuación trascendental. En conclusión, ni siquiera la versión más simple del problema general de los N cuerpos admite una solución algebraica cerrada. Sin embargo y como veremos en la Sección 7.10.7 es posible encontrar una solución en términos de series de potencias uniformemente convergentes (funciones analíticas), satisfaciendo así las condiciones al problema de los N cuerpos formulado en el Capítulo 6.

7.10.5. Solución numérica a la ecuación de Kepler

Casi que desde que se formuló la ecuación de Kepler para órbitas elípticas en 1609, decenas, sino cientos de métodos distintos se han inventado para resolver la ecuación con distintos niveles de precisión. Estos métodos han evolucionado mucho recientemente (especialmente a partir de las últimas décadas de los 1900) obedeciendo, de un lado, a las exigencias de los vuelos espaciales y la astronomía de alta precisión y del otro a la disposición de computadoras que pueden calcular a gran velocidad el valor aproximado de series infinitas o aplicar métodos iterativos, independientemente de su complejidad. Para una revisión exhaustiva de los distintos métodos y sus propiedades numéricas se invita al lector a revisar el libro de Peter Colwell "*Solving Kepler's equation over three centuries*" [15] o en la literatura especializada, la excelente serie de artículos publicados por Danby y Burkardt [20],[10],[18] o el también reconocido trabajo de Odell & Gooding [39].

A continuación hacemos una síntesis de algunos de los métodos ideados en los últimos 300 años para resolver la ecuación de Kepler y describimos algunos algoritmos que serán útiles en lo sucesivo en este libro. Nos concentraremos específicamente en ilustrar la solución a la ecuación de Kepler en el caso de órbitas elípticas, que son también las de mayor interés en astronomía e ingeniería aeroespacial. Sin embargo, la mayoría de estos métodos se aplican también para el caso hiperbólico sin muchas modificaciones.

Bajo ninguna circunstancia, esta breve síntesis puede considerarse completa o representativa de la vasta literatura en el tema. Este resumen, tiene el único propósito de poner al tanto al lector de algunos los retos y de los logros matemáticos que se han conseguido en esta materia durante el par de siglos que nos separan desde los trabajos pioneros de Kepler.

El Método de Kepler

El primer método ideado para resolver la Ec. (7.55) fue presentado precisamente por el mismo Kepler en su libro *Epítome de la astronomía Copernicana** publicado entre 1617 y 1621⁴⁶

Para ilustrar el método original de Kepler, supongamos que queremos encontrar el valor de la anomalía excéntrica para los siguientes valores de e y M :

$$\begin{aligned} e &= 0.5 \\ M &= 37 \text{ #grados} \end{aligned}$$

El método consiste en elegir un valor para la anomalía excéntrica E_0 , que sirva como punto de partida. Escojamos por ejemplo el siguiente valor para esta cantidad:

$$E_0 = 45$$

El siguiente paso consiste en calcular el valor de la anomalía media M_0 corres-

⁴⁶En este libro apareció también formulada por primera vez la ley armónica, que llamamos aquí tercer teorema del movimiento orbital o teorema armónico. En los Epítome Kepler uso también por primera vez la palabra *inercia*, cuyo concepto sería elaborado en profundidad posteriormente por Galileo, Descartes y por supuesto por Newton.

pondiente a E_0 de acuerdo con la ecuación de Kepler:

$$M_0 = E_0 - e \sin E_0$$

Para usar las funciones trigonométricas tenemos que convertir primero los valores de M y E_0 a radianes:

```
from numpy import pi
M=M*pi/180
E0=E0*pi/180

from numpy import sin
M0=E0-e*sin(E0)

M0 = 24.742882886465114 grados
```

Como vemos, M_0 no coincide con el valor original de M . Sin embargo podemos usar la diferencia $\epsilon_0 = M - M_0$ para calcular un valor corregido de la anomalía excéntrica, $E_1 = E_0 + \epsilon_0$:

```
epsilon0=M-M0
E1=E0+epsilon0

epsilon0 = 12.257117113534887
E1 = 57.25711711353489 grados
```

Si repetimos el procedimiento anterior podemos encontrar un tercer valor para E :

```
M1=E1-e*sin(E1)
epsilon1=M-M1
E2=E1+epsilon1

M1 = 33.16119928670333
epsilon1 = 3.8388007132966724
E2 = 61.09591782683156
```

Vemos que en esta segunda iteración, el valor de M_1 es más cercano al valor real de M , lo que muestra que el procedimiento está *convergiendo*. Si repetimos la misma *regla de iteración* otras 5 veces obtenemos la siguiente secuencia de valores de M , e y E :

Paso 3: $M_2 = 36.02$ gr., $\epsilon_{02} = 0.983$ gr., $E_3 = 62.07922$ gr.
 Paso 4: $M_3 = 36.77$ gr., $\epsilon_{03} = 0.234$ gr., $E_4 = 62.31316$ gr.
 Paso 5: $M_4 = 36.95$ gr., $\epsilon_{04} = 0.055$ gr., $E_5 = 62.36772$ gr.
 Paso 6: $M_5 = 36.99$ gr., $\epsilon_{05} = 0.013$ gr., $E_6 = 62.38038$ gr.
 Paso 7: $M_6 = 37.00$ gr., $\epsilon_{06} = 0.003$ gr., $E_7 = 62.38332$ gr.

Notamos que el valor de ϵ se hace cada vez más pequeño y el valor de la anomalía excéntrica se estabiliza con lo que podemos asegurar que el valor real de esta cantidad está cerca del último valor de E presentado en la lista de arriba. El *margen de error* de nuestra estimación se puede cifrar cercano a ϵ .

En términos simbólicos la regla de iteración del método de Kepler se puede escribir como:

$$\begin{aligned} M_n &= E_n - e \sin E_n \\ \epsilon_n &= M - M_n \\ E_{n+1} &= E_n + \epsilon_n \end{aligned} \quad (7.63)$$

con $n = 0, 1, 2, \dots$

El criterio de convergencia, es decir la condición que nos permite decir cuándo estamos satisfechos con el último valor de la anomalía excéntrica provisto por la regla, puede definirse con la condición:

$$\Delta_n \equiv \left| \frac{\epsilon_n}{M} \right| < \delta$$

donde Δ_n es una estimación del *error relativo* del algoritmo en el paso n y δ es un número arbitrariamente pequeño escogido por el usuario. Llamamos a δ la *tolerancia solicitada*.

Como regla general, puede ser interesante tomar, en lugar del último valor de la anomalía excéntrica provisto por el método iterativo, es decir E_{n+1} , el valor promedio entre los dos últimos *pasos*:

$$\bar{E} = \frac{E_n + E_{n+1}}{2}$$

Finalmente el valor verdadero de la anomalía excéntrica estará contenido con alta probabilidad en el intervalo:

$$E \in [\bar{E} - 2\Delta_n \bar{E}, \bar{E} + 2\Delta_n \bar{E}]$$

que se puede escribir como:

$$E = \bar{E} \pm \Delta_n \bar{E}$$

El método de Kepler se puede implementar con la siguiente rutina:

(Algoritmo 7.6)

```
def kepler_kepler(M,e,E0=1.0,delta=1e-5):
    #Valor inicial de la anomalía excéntrica
    E=E0
    #Valor inicial del error relativo
    Dn=1
    #Contador de iteraciones
    ni=0
    while Dn>delta:
        ##En" es igual al último valor de E
        En=E
        #Regla de iteración
        from math import sin
        Mn=En-e*sin(En)
        en=M-Mn
        E=En+en
        #Valor promedio
        Emed=(E+En)/2
        Dn=abs(en/Mn)
```

```

#Error relativo
Dn=abs(en/M)
#Conteo de iteraciones
ni+=1
return Emed,Dn,ni

```

Que se invoca como:

```
E,error,ni=kepler_kepler(M,e,E0,1e-8)
```

```
M = 37, e = 0.50
E estimada (promedio últimos dos pasos) = 62.38420178431245
Error absoluto = 1.1e-07 grados
Intervalo = [62.38420157333525,62.384201995289665] grados
Número de iteraciones: 14
```

Método del punto fijo

Otro método muy común y sencillo de entender e implementar es el método del punto fijo. Este método parte de reescribir la ecuación de Kepler como:

$$E = M + e \sin E$$

Escrita de esta manera la solución a la ecuación de Kepler es equivalente a la búsqueda del punto de intersección entre la recta E y la curva $M - e \sin E$.

La regla de iteración del método del punto fijo es:

$$\begin{aligned} E_{n+1} &= M + e \sin E_n \\ \epsilon_n &= E_{n+1} - E_n \end{aligned} \tag{7.64}$$

con un criterio de convergencia:

$$\left| \frac{\epsilon_n}{\bar{E}} \right| < \delta$$

Es fácil mostrar que las ecuaciones de iteración del método original de Kepler (Ecs. 7.63) son equivalentes a las del método del punto fijo (ver problemas al final del capítulo.)

Método de Newton-Raphson

Los métodos más rápidos que se han diseñado en la historia para resolver numéricamente la ecuación de Kepler son variaciones de un método cuya autoría original se atribuye a Newton. En 1669 en su ensayo “Sobre el análisis por series infinitas” (que además se considera el primer texto de cálculo infinitesimal de la historia) Newton presentó una versión particular del método aplicado exclusivamente al caso de funciones polinómicas. El método fue generalizado para funciones no polinómicas en 1690 por Joseph Raphson, razón por la cual recibe hoy el nombre de **método de Newton-Raphson**.

El método permite encontrar las raíces de ecuaciones del tipo:

$$f(x) = 0$$

donde $f(E)$ es una ecuación diferenciable al menos una vez. Claramente la **función generalizada de Kepler**, que introdujimos en la Sección 7.10.3 (Ec. 7.61), satisface esta condición.

La raíz de la ecuación se obtiene usando la regla de iteración:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

con $f'(x) = df/dx$.

Si usamos la forma explícita de la función generalizada de Kepler y de su primera derivada (Ec.) la regla de iteración del método de Newton-Raphson aplicado al problema de Kepler queda:

$$G_{n+1} = \frac{M/\sigma + e \operatorname{sG}_n - e G_n \operatorname{cG}_n}{1 - e \operatorname{cG}_n}$$

Esta regla se puede implementar con la siguiente rutina:

(Algoritmo 7.7)

```
def kepler_newton(M,e,G0=1,delta=1e-5):
    #Valor inicial de la anomalía excéntrica
    Gn=G0
    #Valor inicial del error relativo
    Dn=1
    #Contador de iteraciones
    ni=0
    while Dn>delta:
        #Inicializa el valor de En
        G=Gn
        #Función de Kepler y de su primera derivada en G
        from pymcel.export import funcion_kepler
        k,kp,kpp=funcion_kepler(G,M,e)
        #Nuevo valor (regla de iteración)
        Gn=G-k/kp
        #Valor medio
        Gmed=(G+Gn)/2
        #Criterio de convergencia
        en=Gn-G
        Dn=abs(en/Gmed)
        ni+=1
    return Gmed,Dn,ni
```

Al aplicarlo al ejemplo anterior queda:

```
E,error,ni=kepler_newton(M,e,E0,1e-8)
```

```
M = 37, e = 0.50
E estimada (promedio últimos dos pasos) = 62.38420186888202
Error absoluto = 0.0e+00 grados
Intervalo = [62.38420186888202,62.38420186888202] grados
Número de iteraciones: 5
```

Que como se ve, converge muchísimo más rápido que el método de punto fijo.

Una rutina general que aplica el método de Newton de forma análoga a como lo hemos hecho en la rutina `kepler_newton`, pero para encontrar la raíz de cualquier función es provisto en el [Capítulo 11](#). Esta rutina será utilizada en el libro con alguna frecuencia. Un ejemplo de su uso para el caso ilustrado aquí se muestra a continuación:

```
from pymcel.export import funcion_kepler,metodo_newton
E,error,ni=metodo_newton(funcion_kepler,x0=E0,delta=1e-8,args=(M,e))
```

```
M = 37, e = 0.50
E estimada (promedio últimos dos pasos) = 62.38420186888202
Error absoluto = 0.0e+00 grados
Intervalo = [62.38420186888202,62.38420186888202] grados
Número de iteraciones: 5
```

El método de Laguerre-Conway

Décadas de experimentación numérica han mostrado que el método de Newton, si bien simple y poderoso, puede no converger con la precisión y velocidad apropiadas para ciertos pares de valores de M y e . Un método con convergencia rápida y asegurada es el método de Laguerre-Conway [\[16\]](#) que usa la siguiente regla de iteración:

$$\epsilon_n = \frac{\eta f(x)}{f'(x_n) \pm \sqrt{(\eta - 1)^2(f'(x_n))^2 - \eta(\eta - 1)f(x_n)f''(x_n)}} \quad (7.65)$$

$$E_{n+1} = E_n - \epsilon_n \quad (7.66)$$

donde η es un parámetro entero. Cuando $\eta = 1$ el método de Laguerre-Conway es equivalente al método de Newton.

Experimentos numéricos han mostrado que el valor óptimo de η en el caso de la ecuación de Kepler es $\eta = 5$.

En el [Capítulo 11](#) el lector puede encontrar una rutina general que aplica el método de Laguerre-Conway para encontrar la raíz de cualquier ecuación. Un ejemplo de su uso para la ecuación de Kepler se muestra a continuación:

```
from pymcel.export import funcion_kepler,metodo_laguerre
E,error,ni=metodo_laguerre(funcion_kepler,x0=E0,delta=1e-8,args=(M,e))
```

```
M = 37, e = 0.50
E estimada (promedio últimos dos pasos) = 62.38420186756679
Error absoluto = 2.6e-09 grados
Intervalo = [62.38420186493632,62.384201870197266] grados
Número de iteraciones: 3
```

Nótese que el número de iteraciones es mucho menor que en el caso del método de Newton.

Métodos de horquillado

En los métodos de Kepler, Newton-Raphson y Laguerre-Conway visto en las secciones anteriores, es necesario proveer un primer valor inicial de la anomalía excéntrica (la variable E_0 en los algoritmos presentados hasta aquí.) Determinar el valor óptimo de E_0 ha probado ser una tarea poco trivial. Existen métodos alternativos, que aunque mucho menos eficientes, solo requieren conocer a priori un intervalo en el que se encuentre la solución. En el análisis numérico a estos métodos se los llama en general *bracketing methods* o “métodos de horquillado.” En el paquete `optimize` de la biblioteca SciPy podrán encontrar un conjunto de rutinas generales que implementan métodos de horquillado para encontrar la raíz de funciones trascendentales.

Para encontrar un intervalo de horquillado general, en el caso del movimiento elíptico, comencemos con la ecuación de Kepler escrita de la forma (Ec. 7.55):

$$e \sin E - E = -M$$

Como sabemos que $-1 \leq \sin E \leq 1$, el término del lado izquierdo de la ecuación estará acotado por $-e - E \leq e \sin E - E \leq e - E$. De allí, la ecuación de Kepler se puede escribir en forma de desigualdad:

$$-e - E \leq -M \leq e - E$$

trasponiendo algunos términos encontramos que:

$$M - e \leq E \leq M + e$$

que es el intervalo de horquillado deseado.

Para el caso hiperbólico la ecuación de Kepler tiene la forma (Ec. ??):

$$e \sinh F - F = M$$

Usando la representación en series de Taylor de la función seno hiperbólico:

$$\sinh F = F + \frac{F^3}{3!} + \frac{F^5}{5!} + \dots$$

vemos que $\sinh F$ está acotada por debajo por:

$$\sinh F \geq F$$

Sin embargo la función no tienen ninguna cota superior. Con esto, la ecuación de Kepler hiperbólica se puede escribir en forma de desigualdad como:

$$M \geq (e - 1)F$$

de donde obtenemos el límite superior de nuestro intervalo de horquillado:

$$F \leq \frac{M}{e - 1}$$

Ahora bien, sabemos que el mínimo valor de la anomalía excéntrica es $F = 0$ cuando $M = 0$. Para todos los valores positivos de M , $F \geq 0$. Con esto podemos

finalmente escribir un intervalo de horquillado completo para el caso hiperbólico como:

$$0 \leq F \leq \frac{M}{e - 1}$$

En el algoritmo abajo se ilustra el uso de algunas de los métodos de horquillado implementados en SciPy.optimize para resolver la ecuación de Kepler en el ejemplo desarrollado en esta sección:

```
from numpy import pi
from scipy import optimize

#Recuerde que funcion_kepler devuelve también las derivadas
from pymcel.export import funcion_kepler
kepler=lambda G,M,e:funcion_kepler(G,M,e)[0]

#Método de bisección
E_bis,info_bis=optimize.bisect(kepler,M-e,M+e,rtol=1e-8,
                                args=(M,e),full_output=True)
ni_bis=info_bis.iterations

#Método de Brent
E_bre,info_bre=optimize.brentq(kepler,M-e,M+e,rtol=1e-8,
                                args=(M,e),full_output=True)
ni_bre=info_bre.iterations

#Método de Ridder
E_rid,info_rid=optimize.ridder(kepler,M-e,M+e,rtol=1e-8,
                                args=(M,e),full_output=True)
ni_rid=info_rid.iterations

M = 37, e = 0.50
Bisección: E = 62.38420210930057408 iteraciones = 27
Brent: E = 62.38420186878084195 iteraciones = 6
Ridder: E = 62.38420218086032065 iteraciones = 4
```

Otros métodos

Otro esfuerzo notable realizado especialmente en las últimas décadas [38], [25] ha sido el de desarrollar rutinas que resuelven la ecuación de Kepler ejecutando el mínimo número de funciones analíticas (p.e. funciones trigonométricas) o usando únicamente operaciones básicas (multiplicaciones, sumas, divisiones).

En el Capítulo 11 hemos incluido algunas rutinas que se encuentran en la literatura y que usan esta aproximación.

Un ejemplo de ellas es la rutina `kepler_semanalitico` [38]. Esta rutina calcula el valor aproximado de la anomalía excéntrica E usando un solo llamado de las funciones seno y coseno. En comparación la rutina `kepler_newton` (Alg. 7.7) en cada iteración usa 3 llamados a las funciones trigonométricas, de modo que cuando, por ejemplo se quiere obtener un valor de E con una precisión muy alta y el número de iteraciones es también alto, gran parte del tiempo de computo se ha invertido en calcular decenas de funciones trigonométricas.

Un ejemplo del uso de la rutina se muestra a continuación:

```
from pymcel.export import kepler_semanalitico
E,error,ni=kepler_semanalitico(M,e)

M = 37, e = 0.50
E estimada (promedio últimos dos pasos) = 62.38761309530199
Error absoluto = 4.4e-03 grados
Intervalo = [62.38319428043351,62.392031910170466] grados
Número de iteraciones: 1
```

A diferencia de los métodos iterativos vistos antes, la rutina `kepler_semanalitico` no permite calcular el valor de E con una precisión arbitraria. Por el contrario, para cada valor de e y M existe un único valor devuelto por la rutina y que difiere del valor real en una cantidad que no puede predecirse con anticipación. Aún así la rutina es suficientemente buena al menos para situaciones en las que no se requiere una excesiva precisión, tal y como se evidencia en la [??](#). Como vemos allí el error relativo $\Delta_n = |E - \bar{E}|/E$ oscila entre $\sim 0,01$ (para valores de la excentricidad $e > 0,2$) y $\sim 10^{-12}$ (para bajas excentricidades y algunos valores específicos de M).

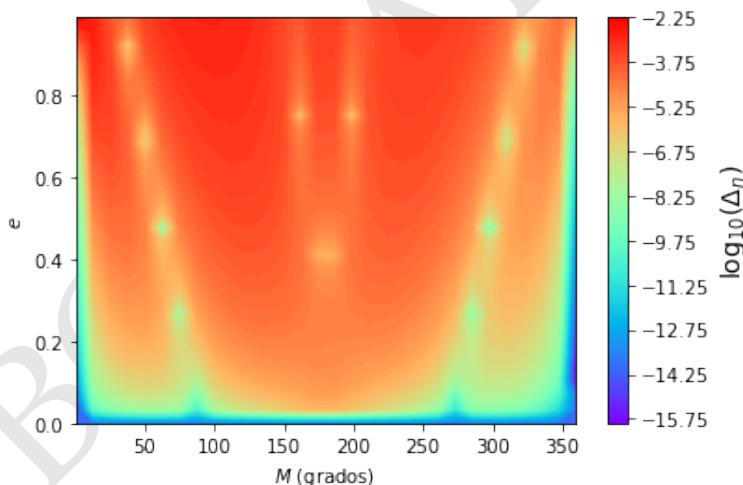


Figura 7.17: Errores de la rutina semianalítica, es decir, aquella que resuelve la ecuación de Kepler sin usar iteraciones y solo hace un llamado a las funciones trigonométricas.

Podemos usar `kepler_semanalitico` (pero también cualquiera de las rutinas vistas hasta aquí) para visualizar cómo varía la anomalía excéntrica como función de la anomalía media, para distintos valores de la excentricidad. Para ello, en la [??](#) hemos graficado el valor de la función $g(M) = E(M) - M$.

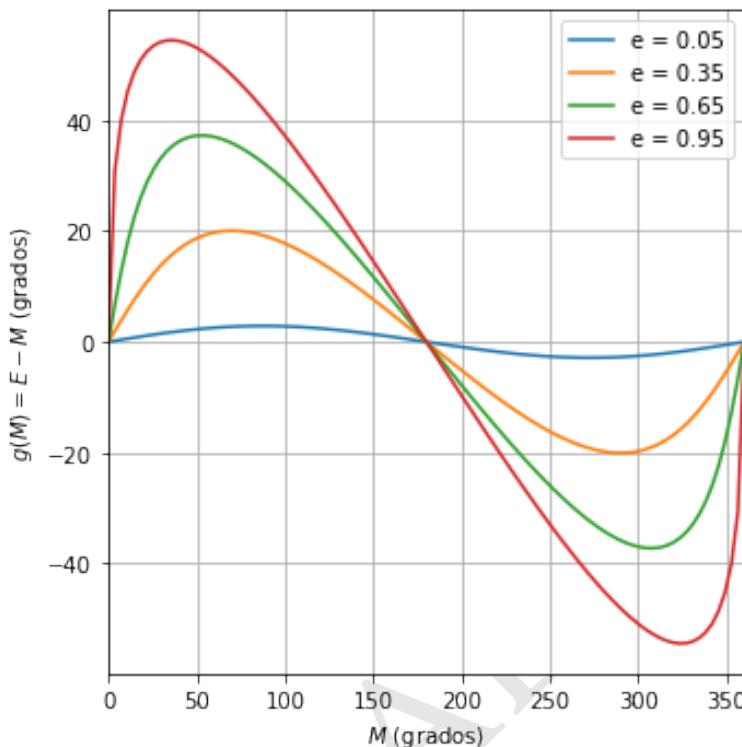


Figura 7.18: Anomalía excéntrica como función de la anomalía verdadera para distintos valores de la excentricidad.

De allí podemos comprobar varias propiedades que convendrá mantener presentes en la solución de problemas prácticos en mecánica celeste:

- El valor de E coincide con el de M cuando $M = 0, \pi, 2\pi$. En términos de $g(M)$, esto implica que $g(0) = g(\pi) = g(2\pi) = 0$. Llamamos a estos valores los *puntos nodales* de g .
- La función $g(M)$ es periódica en el intervalo $[0, 2\pi]$ y antisimétrica alrededor de $M = \pi$. Esto implica que para encontrar la solución a la ecuación de Kepler para cualquier valor de M , basta encontrar el valor correspondiente en el intervalo $[0, \pi]$ y aplicar las reglas de antisimetría correspondientes. En términos matemáticos, para cualquier valor de $M > \pi$:

$$g(M) = -g(2\pi - M)$$

- Para valores pequeños de e , el valor de $E \approx M$.
- La máximas diferencias entre E y M , para valores de $e \approx 1$, se producen cuando $M \approx 35^\circ$ y $E \approx 90^\circ$.

7.10.6. Solución analítica por aproximaciones sucesivas

La solución numérica a la ecuación de Kepler es una estrategia adecuada cuando se trata de resolver problemas prácticos (predecir la posición de un asteroide, calcular efemérides de los planetas, etc.) Sin embargo en situaciones teóricas más generales, en las que la solución a la ecuación es parte de algún desarrollo matemático, es poco lo que algoritmos iterativos nos pueden enseñar.

Para subsanar esta limitación, casi desde el tiempo de Newton se han encontrado soluciones a la ecuación expresadas como sumas parciales o series infinitas (ver ??), que en el caso de valores pequeños de la excentricidad proveen expresiones algebraicas aproximadas para la anomalía excéntrica (y otras cantidades de interés.)

Una de las más conocidas representaciones en series de la anomalía excéntrica, puede obtenerse aplicando sucesivamente el método del punto fijo (Ec. ??):

$$E_{n+1} = M + e \sin E_n \quad (7.67)$$

Si hacemos $E_0 = M$ y calculamos analíticamente el valor de las primeras dos aproximaciones obtenemos:

$$\begin{aligned} E_1 &= M + e \sin M \\ E_2 &= M + e \sin(M + e \sin M) \end{aligned} \quad (7.68)$$

Aplicando las identidades de suma de ángulos en la última expresión, podemos escribir:

$$\begin{aligned} E_2 &= M + e \sin(M + e \sin M) \\ &= M + e[\sin M \cos(e \sin M) + \sin(e \sin M) \cos M] \end{aligned} \quad (7.69)$$

Las funciones trigonométricas en esta ecuación que tienen como argumento la cantidad $e \sin M < 1$, pueden逼近arse usando las series de Taylor de cos y sin (Ecs. 7.71 y 7.70):

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + \dots \quad (7.70)$$

$$\sin t = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + \dots \quad (7.71)$$

Usando estas representaciones de las funciones trigonométricas y truncando los términos proporcionales a e^3 o potencias superiores de e , el valor de E_2 en la Ec. (7.69) se puede escribir como:

$$E_2 \approx M + e \sin M + \frac{1}{2}e^2 \sin 2M \quad (7.72)$$

El subíndice 2 en esta expresión entonces ya no solo representa el hecho de que se trata de la segunda iteración en el método de punto fijo, sino también de que esta expresión puede darnos el valor aproximado de la excentricidad con un error proporcional a e^3 . Es decir, si la excentricidad es suficientemente pequeña $e \ll 1$ la Ec. (7.72) ofrecerá una aproximación bastante buena para la anomalía excéntrica.

Si continuamos el proceso con una nueva iteración de la Ec. (7.67), pero usamos la expresión aproximada de E_2 obtenida en la Ec. (7.72) obtenemos:

$$E_3 = M + e \sin \left(M + e \sin M + \frac{1}{2}e^2 \sin 2M \right)$$

Aplicando nuevamente la identidades del seno de suma de ángulos y expandiendo las funciones trigonométricas compuestas hasta términos de orden e^3 (truncando todos los términos de orden e^4 y superiores) obtenemos una nueva aproximación:

$$E_3 \approx M + \left(e - \frac{1}{8}e^3 \right) \sin M + \frac{1}{2}e^2 \sin 2M + \frac{3}{8}e^3 \sin 3M \quad (7.73)$$

La siguiente rutina permite calcular las aproximaciones provistas aquí:

(Algoritmo 7.8)

```
def kepler_aproximacion(M,e,orden=1):
    from math import sin

    #Formula de acuerdo al orden de aproximacion
    if orden==1:
        E=M+e*sin(M)
    elif orden==2:
        E=M+e*sin(M)+0.5*e**2*sin(2*M)
    elif orden==3:
        E=M+(e-1./8*e**3)*sin(M)+0.5*e**2*sin(2*M)+3./8*e**3*sin(3*M)

    #Estimación el error relativo
    Ma=E-e*sin(E)
    Dn=abs(Ma-M)/M

    return E,Dn,1
```

Un ejemplo de uso de la rutina se muestra en este algoritmo:

```
E1,error1,ni1=kepler_aproximacion(M,e,orden=1)
E2,error2,ni1=kepler_aproximacion(M,e,orden=2)
E3,error3,ni1=kepler_aproximacion(M,e,orden=3)

M = 37, e = 0.50
E (orden e) = 54.2407304 (error 6.006443353743711)
E (orden e^2) = 61.1252602 (error 0.9610525147400825)
E (orden e^3) = 63.0938414 (error 0.5471173899178785)
```

En el Capítulo 11 hemos incluído una rutina, `kepler_eserie`, que permite calcular la anomalía excéntrica usando términos hasta un orden arbitrario e^n . Un ejemplo del uso de la rutina se presenta a continuación

```
from pymcel.export import kepler_eserie
E8,error8,ni1=kepler_eserie(M,e,orden=8)
```

```
M = 37, e = 0.50
E (orden e^8) = 62.3103928 (error 0.003867448222173536)
```

Esta rutina puede usarse de la misma manera que hemos usado otras anteriormente, proveyendo el valor de la tolerancia con la que se quiere encontrar la anomalía excéntrica:

```
E,error,ni=kepler_eserie(M,e,1e-8)
```

```
M = 37, e = 0.50
E estimada (promedio últimos dos pasos) = 62.38420069661132
Error absoluto = 3.1e-07 grados
Intervalo = [62.38420038384044, 62.38420100938219] grados
Número de iteraciones: 32
```

El cálculo numérico de la anomalía excéntrica con esta serie de aproximaciones sucesivas no es sin embargo muy eficiente y solo converge cuando $e < 0.6$ (ver [Capítulo 11](#).)

7.10.7. Solución por series de la ecuación de Kepler

En la solución a la ecuación de Kepler discutida en la sección anterior, vimos que al usar aproximaciones sucesivas, la anomalía excéntrica se puede escribir en la forma:

$$g(M) = E - M = B_1(e) \sin(M) + B_2(e) \sin(2M) + B_3(e) \sin(3M) + \dots$$

donde B_1, B_2, B_3, \dots son funciones de la excentricidad que deben encontrarse con los procedimientos vistos.

El hecho de que este procedimiento pueda extenderse indefinidamente nos conduce naturalmente a suponer que la función $g(M)$ puede escribirse en general como la serie infinita:

$$g(M) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n(e) \sin(nM) \quad (7.74)$$

es decir como una serie de Fourier.

Como vimos en la ?? los coeficiente B_n de la serie en la Ec. (7.74) se pueden calcular usando:

$$B_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(M) \sin(nM) \, dM$$

Si tenemos en cuenta las propiedades de simetría de $g(M)$, a saber $g(M > \pi) = -g(2\pi - M)$, la integral anterior se puede escribir como:

$$B_n = \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{\pi} g(M) \sin(nM) \, dM - \int_{\pi}^{2\pi} g(2\pi - M) \sin(nM) \, dM \right]$$

que después de un cambio de variable $M' = 2\pi - M$ en la segunda integral entre corchetes, conduce a la integral más sencilla:

$$B_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi g(M) \sin(nM) dM$$

Integrando por partes con $u = g(M)$ y $dv = \sin(nM) dM$ obtenemos:

$$B_n = \frac{2}{n\pi} \left\{ [-g(M) \cos(nM)]_0^\pi + \int_0^\pi \cos(nM) dg \right\}$$

Teniendo en cuenta que $g(0) = g(\pi) = 0$ (ver ??), $dg = dE$ y $M = E - e \sin E$, el coeficiente A_n se puede escribir como:

$$B_n = \frac{2}{n} \left[\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(nE - ne \sin E) dE \right] \quad (7.75)$$

Un poco de historia

Las funciones de Bessel y la ecuación de Kepler. La importancia de la función entre corchetes en la Ec. 7.75 fue reconocida por primera vez por Friederich Wilhelm Bessel ("Fridrich Vilhelm Besel"^a) en 1826. En un artículo histórico que publicó ese mismo año, Bessel introdujo por primera vez la definición:

$$J_n(x) \equiv \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(n\theta - x \sin \theta) d\theta \quad (7.76)$$

y llamó a estas funciones *Funciones de Bessel*.

En el mismo artículo, Bessel demostró que estas funciones pueden expresarse como series de Taylor en la forma:

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(n+k)! k!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k} \quad (7.77)$$

y mostró adicionalmente que satisfacen una ecuación diferencial característica, conocida hoy también como la *ecuación diferencial de Bessel*.

Hoy sabemos que estas funciones eran ya conocidas, al menos en la forma de series de potencias desde 1703 por Johan Bernoulli y después fueron aplicadas en 1764 por Leonhard Euler en sus estudios sobre las vibraciones.

Es sin embargo notable, descubrir que fueron escritas por primera vez por Bessel en relación con un problema de Mecánica Celeste.

^a<https://forvo.com/search/Friedrich%20Wilhelm%20Bessel/de/>

Finalmente la solución a la ecuación de Kepler se puede escribir en forma de la serie infinita:

$$E = M + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} J_n(ne) \sin(nM) \quad (7.78)$$

donde J_n son las funciones de Bessel de *primer tipo* (Ecs. 7.76 y 7.77) y a la cantidad $J_n(ne)$ se la conoce en mecánica celeste como *coeficiente de Bessel*.

Es importante anotar que esta serie converge para cualquier valor de $e < 1$.

En el Capítulo 11 encontrarán el algoritmo de la rutina `kepler_bessel(M,e,delta)` que implementa la Ec. (7.78). Un ejemplo de uso se muestra en el algoritmo a continuación

```
from pymcel.export import kepler_bessel
E,error,n=kepler_bessel(M,e,1e-8)

M = 37, e = 0.50
E estimada (promedio últimos dos pasos) = 62.38420129936800
Error absoluto = 8.0e-08 grados
Intervalo = [62.38420121961613,62.38420137911987] grados
Número de iteraciones: 32
```

Nótese que los métodos de las aproximaciones sucesivas visto en la sección anterior como el de la serie de Fourier visto aquí, proveen aproximaciones analíticas muy útiles para la teoría, pero, como ha quedado demostrado en los algoritmos en los que los implementamos, su eficiencia numérica es muy inferior a la de los métodos iterativos vistos en la [Sección 7.10.5](#).

7.10.8. Eficiencia de los métodos de solución

En las libretas que encontrará con la [versión electrónica del libro](#)⁴⁷ encontrará algoritmos que permiten evaluar el tiempo de ejecución y comparar la eficiencia de los distintos métodos numéricos presentados aquí.

7.11. Una síntesis del problema de los dos cuerpos

En las secciones anteriores hemos demostrado que es posible resolver analíticamente el problema de los dos cuerpos, que podemos formular en términos generales como:

Dadas las posiciones y velocidades de dos partículas en un tiempo de referencia dado t_0 , $\vec{x}_1(t_0) : [\vec{r}_1(t_0) \dot{\vec{r}}_1(t_0)]$, $\vec{x}_2(t_0) : [\vec{r}_2(t_0) \dot{\vec{r}}_2(t_0)]$, calcular las posiciones y velocidades de las partículas en cualquier instante de tiempo pasado o futuro t .

Podríamos resumir la solución encontrada en este capítulo, con el siguiente conjunto de operaciones o pasos, que partiendo de los vectores de estado inicial $\vec{x}_1(t_0)$, $\vec{x}_2(t_0)$, nos permiten obtener los vectores de estado $\vec{x}_1(t)$, $\vec{x}_2(t)$ en cualquier tiempo t :

1. Encontrar la posición y velocidad inicial del centro centro de masa del sistema y expresar el vector de estado en ese sistema de referencia:

$$\vec{x}_{\text{CM}}(t_0) = \frac{m_1 \vec{x}_1(t_0) + m_2 \vec{x}_2(t_0)}{M}$$

donde $M = m_1 + m_2$ y

$$\begin{aligned}\vec{x}'_1(t_0) &= \vec{x}_1(t_0) - \vec{x}_{\text{CM}}(t_0) \\ \vec{x}'_2(t_0) &= \vec{x}_2(t_0) - \vec{x}_{\text{CM}}(t_0)\end{aligned}\tag{7.79}$$

⁴⁷http://seap-udea.org/MecanicaCeleste_Zuluaga

2. Calcular el vector de estado relativo $\vec{x} : (\vec{r} \dot{\vec{r}})$ para el estado inicial

$$\vec{x}(t_0) = \vec{x}'_1(t_0) - \vec{x}'_2(t_0)$$

y el parámetro gravitacional del sistema $\mu = GM$.

3. Calcular las constantes de movimiento:

$$\begin{aligned}\vec{h} &= \vec{r} \times \dot{\vec{r}} \\ \vec{e} &= \frac{\dot{\vec{r}} \times \vec{h}}{\mu} - \frac{\vec{r}}{r}\end{aligned}$$

4. Usando las constantes de movimiento, calcular los parámetros de tamaño p (*semilatus rectum*) y forma e (excentricidad) de la cónica descrita por el vector relativo:

$$\begin{aligned}p &= \frac{h^2}{\mu} \\ e &= |\vec{e}|\end{aligned}$$

5. Usando las constantes de movimiento calcular los elementos orbitales $(p, e, i, \Omega, \omega, f_0)$. Para ello se utilizan las Ecs. (7.36)-(7.45).
6. Calcula la anomalía media M_0 correspondiente a f_0 . Si la órbita es una parábola $e = 1$, usamos para ello simplemente la ecuación de Halley:

$$M_0 = \frac{1}{2} \left(\tan^3 \frac{f_0}{2} + 3 \tan \frac{f_0}{2} \right)$$

en caso de tratarse de una órbita elíptica o hiperbólica debemos primer obtener la anomalía excéntrica general G_0 usando la inversa de la Ec. (??) :

$$t \left(\frac{G_0}{2} \right) = \sqrt{\frac{\sigma(1-e)}{1+e}} \tan \frac{f_0}{2}$$

donde:

$$\sigma, G, s(G), t(G) = \begin{cases} +1, E, \sin G, \tan G & e < 1 \\ -1, F, \sinh G, \tanh G & e > 1 \end{cases}$$

para luego obtener M_0 de la ecuación de Kepler:

$$M_0 = \sigma[G_0 - e s(G_0)]$$

7. Calculamos la anomalía en el tiempo t :

$$M(t) = M_0 + n(t - t_0)$$

donde,

$$n = \begin{cases} 3\sqrt{\mu/p^3} & \text{Si } e = 1 \\ \sqrt{\mu/|a|^3} & \text{Si } e \neq 1 \end{cases}$$

8. En el caso de elipse o parábola, con la anomalía media calculamos la anomalía excéntrica G para el tiempo en cuestión, resolviendo la ecuación de Kepler:

$$M(t) = \sigma[G - es(G)]$$

usando los métodos vistos en este capítulo. Una vez obtenida G despejamos la anomalía verdadera f usando:

$$\tan \frac{f}{2} = \sqrt{\frac{\sigma(1-e)}{1+e}} \operatorname{t}\left(\frac{G}{2}\right)$$

En el caso de la parábola, la anomalía verdadera se obtiene directamente despejando de la ecuación de Halley:

$$\tan \frac{f}{2} = y - \frac{1}{y}$$

con $y \equiv \sqrt[3]{M + \sqrt{M^2 + 1}}$.

9. Una vez calculada f el vector de estado relativo se puede obtener aplicando las ecuaciones (4.91) y (7.46)-(7.48).
10. Para calcular la posición y velocidad de las partículas en el sistema de referencia inercial original, calculamos primero la posición del centro de masa en t :

$$\vec{r}_{\text{CM}}(t) = \vec{r}_{\text{CM}}(t_0) + (t - t_0)\vec{v}_{\text{CM}}$$

y obtenemos el vector de estado de las partículas con:

$$\vec{x}_1(t) = \vec{x}_{\text{CM}}(t) + \frac{m_2}{M} \vec{x}(t) \quad (7.80)$$

$$\vec{x}_2(t) = \vec{x}_{\text{CM}}(t) - \frac{m_1}{M} \vec{x}(t) \quad (7.81)$$

$$(7.82)$$

Y el problema queda finalmente resuelto.

7.11.1. Un ejemplo numérico

Como siempre ha sido la filosofía de este libro, la mejor manera de verificar si lo visto en este capítulo y que hemos resumido en la “receta” general que presentamos en párrafos precedentes, ha sido realmente asimilado, es ponerlo en práctica en una situación concreta.

Para ello supongamos que queremos predecir de forma exacta el movimiento del siguiente sistema de dos cuerpos:

```
from numpy import array
t0=0
sistema=[
    dict(m=1.0,
        r=array([0.0,0.0,+0.3]),
        v=array([-1.0,0.0,0.5])),
    dict(m=0.5,
        r=array([-1.0,0.0,0.0]),
        v=array([0.0,-1.0,0.0])),
]
```

Para describir las propiedades de las partículas y las condiciones iniciales, hemos usado la notación que introdujimos en el [Capítulo 6](#). La razón para hacerlo se verá más adelante.

Con esta definición podemos calcular las condiciones iniciales del sistema de dos cuerpos:

```
#Condiciones iniciales
m1=sistema[0]["m"]
r1_0=sistema[0]["r"]
v1_0=sistema[0]["v"]

m2=sistema[1]["m"]
r2_0=sistema[1]["r"]
v2_0=sistema[1]["v"]

#Posición y velocidad relativa inicial
rvec0=r1_0-r2_0
vvec0=v1_0-v2_0
```

Los vectores `rvec0` y `vvec0` serán usados frecuentemente en esta y las próximas secciones, cuando resolvamos el problema con distintas aproximaciones.

Supongamos que queremos calcular el estado de las partículas en el tiempo $t = 10.0$.

En el algoritmo provisto a continuación se detallan los cálculos correspondientes a cada uno de los pasos enumerados anteriormente para realizar esta predicción con la teoría vista en este capítulo. En el algoritmo, hemos especificado usando comentarios y de la manera más clara posible, cada una de las etapas del cálculo. Así mismo y para ahorrar espacio, usamos algunas de las rutinas que escribimos en secciones precedentes para realizar tareas específicas (p.e. resolver la ecuación de Kepler, convertir del vector de estado a los elementos orbitales, etc.)

(Algoritmo 7.9)

```

def propaga_estado(sistema,t0,t,verbose=0):

    ##### Preparación del cálculo #####
    # Condiciones iniciales
    m1=sistema[0]["m"]
    r1_0=sistema[0]["r"]
    v1_0=sistema[0]["v"]

    m2=sistema[1]["m"]
    r2_0=sistema[1]["r"]
    v2_0=sistema[1]["v"]

    if verbose:
        print(f"r1_0 = {r1_0}, v1_0 = {v1_0}")
        print(f"r2_0 = {r2_0}, v2_0 = {v2_0}")

    Mtot=m1+m2

    #En unidades canónicas G=1
    mu=Mtot

    #Paso 1: estado del centro de masa
    r_CM_0=(m1*r1_0+m2*r2_0)/Mtot
    v_CM_0=(m1*v1_0+m2*v2_0)/Mtot
    if verbose:print(f"r_CM_0 = {r_CM_0}, v_CM_0 = {v_CM_0}")

    #Paso 2: Condiciones iniciales relativas
    r_0=r1_0-r2_0
    v_0=v1_0-v2_0
    if verbose:print(f"r_0 = {r_0}, v_0 = {v_0}")

    #Paso 3: Constantes de movimiento
    from numpy import cross
    from numpy.linalg import norm
    hvec=cross(r_0,v_0)
    evec=cross(v_0,hvec)/mu-r_0/norm(r_0)
    if verbose:print(f"hvec = {hvec}, evec = {evec}")

    #Paso 4 y 5: Elementos orbitales
    from pymcel.export import estado_a_elementos
    from numpy import hstack
    p,e,i,W,w,f0=estado_a_elementos(mu,hstack((r_0,v_0)))

    from numpy import pi
    if verbose:
        print(f"Elementos: {p}, {e}, {i*180/pi}, {W*180/pi}, {w*180/pi}, {f0*180/pi}")

```

```

#Paso 6: Anomalía media inicial
if e==1:
    from numpy import tan
    tanf02=tan(f0/2)
    #Ecuación de Halley
    M0=0.5*(tanf02**3+3*tanf02)
else:
    from numpy import sin,cos,sinh,cosh,tan,tanh
    from numpy import sqrt,arctan,arctanh
    sigma=+1 if e<1 else -1
    s=sin if e<1 else sinh
    c=cos if e<1 else cosh
    ta=tan if e<1 else tanh
    at=arctan if e<1 else arctanh
    #Anomalía excéntrica
    G0=2*at(sqrt(sigma*(1-e)/(1+e))*tan(f0/2))

    #Ecuación de Kepler
    M0=sigma*(G0-e*s(G0))

if verbose:print(f"MO = {M0*180/pi}")

#####
# Aquí viene la predicción
#####

#Paso 7: Anomalía media en t
if e==1:
    n=3*sqrt(mu/p**3)
else:
    a=p/(1-e**2)
    n=sqrt(mu/abs(a)**3)
M=M0+n*(t-t0)
if verbose:print(f"n = {n}, M = {M*180/pi}")

#Paso 8: Anomalía verdadera en t:
from numpy import arctan
if e==1:
    y=(M+sqrt(M**2+1))**(1./3)
    f=2*arctan(y-1/y)
else:
    from pymcel.export import kepler_newton
    G,error,ni=kepler_newton(M,e,M,1e-14)
    f=2*arctan(sqrt((1+e)/(sigma*(1-e)))*ta(G/2))

if verbose:print(f"f = {f*180/pi}")

#Paso 9: de elementos a estado
from pymcel.export import elementos_a_estado
from numpy import array

```

```

x=elementos_a_estado(mu,array([p,e,i,W,w,f]))
r=x[:3]
v=x[3:]

if verbose:
    print(f"r = {r}, v = {v}")
    print(f"h = {cross(r,v)}")

#Paso 10: estado en el sistema de referencia original
v_CM=v_CM_0
r_CM=r_CM_0+v_CM_0*(t-t0)
if verbose:print(f"r_CM = {r_CM}, v_CM = {v_CM}")

r1=r_CM+(m2/Mtot)*r
v1=v_CM+(m2/Mtot)*v

r2=r_CM-(m1/Mtot)*r
v2=v_CM-(m1/Mtot)*v

#Variables requeridas para comparaciones
if verbose:
    from numpy import dot
    print(f"f0={f0};f={f};r={norm(r)};r0={norm(r_0)};rdot0={dot(r_0,v_0)/norm(r_0)}")

return r1,v1,r2,v2,r,v

```

Usando la rutina podemos calcular entonces la posición y velocidad de las partículas en el tiempo deseado $t = 10$:

(Algoritmo 7.10)

```

t=10.0
r1,v1,r2,v2,rvec,vvec=propaga_estado(sistema,t0,t)

```

```

Estado en t = 10:
Vector relativo = [-0.06422662  3.24166306 -2.57406246]
Velocidad relativa = [-0.30954385  0.05351131  0.0500541 ]
Posición partícula 1 = [6.97859113 4.41388769 2.67531251]
Velocidad partícula 1 = [0.56348538 0.35117044 0.35001803]
Posición partícula 2 = [7.04281775 1.17222463 5.24937497]
Velocidad partícula 2 = [0.87302923 0.29765912 0.29996393]

```

Para comprobar la validez de los resultados teóricos que implementamos en esta rufina, y como hicimos en la Sección 7.9, podemos comparar nuestra predicción analítica con aquella obtenida numéricamente:

```

from numpy import linspace
ts=linspace(0,30.0,20)

from pymcel.export import ncuerpos_solucion
rs,vs,rps,vps,constantes=ncuerpos_solucion(sistema,ts)

```

Calculemos ahora el vector de estado de cada partícula, para cada uno de los

tiempos en los que calculamos con la rutina numérica la evolución del sistema:

```
from numpy import zeros_like
rs_teo=zeros_like(rs)
vs_teo=zeros_like(vs)
for i,t in enumerate(ts):
    r1,v1,r2,v2,rvec,vvec=propaga_estado(sistema,t0,t)
    rs_teo[0,i]=r1
    rs_teo[1,i]=r2
    vs_teo[0,i]=v1
    vs_teo[1,i]=v2
```

Podemos hacer un gráfico de la trayectoria de las partículas en el espacio:

(Algoritmo 7.11)

```
from pymcel.export import plot_ncuerpos_3d
fig=plot_ncuerpos_3d(rs,vs,lw=1,marker='o',mfc='None')

ax=fig.gca()
ax.plot(rs_teo[0,:,:],rs_teo[1,:,:],rs_teo[2,:,:], 'k+');
ax.plot(rs_teo[1,:,:],rs_teo[0,:,:],rs_teo[2,:,:], 'r+');
```

ver Figura 7.19

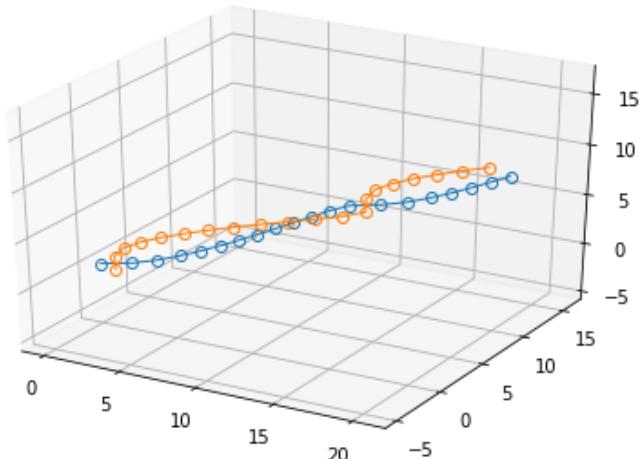


Figura 7.19: Figura correspondiente al código 7.11.

Con este gráfico tenemos una primera comprobación de la coincidencia casi perfecta entre la solución del problema de los dos cuerpos desarrollada en este capítulo y lo que esperaríamos en un sistema real.

Una comprobación más rigurosa se realiza comparando una a una todas las componentes de la posición y la velocidad calculadas con nuestra teoría analítica,

con aquellas obtenidas por la integración numérica de las ecuaciones de movimiento:

(Algoritmo 7.12)

```

error_rs=abs(rs-rs_teo)
error_vs=abs(vs-vs_teo)

import matplotlib.pyplot as plt
fig=plt.figure()
ax=fig.gca()

for i in range(2):
    for j in range(3):
        ax.plot(ts[1:],error_rs[i,1:,j],label="")
        ax.plot(ts[1:],error_vs[i,1:,j],label="")

#Decoración
ax.set_xlabel("$t$ (u.c.)")
ax.set_ylabel("Teoría - Método Numérico|")
ax.set_yscale("log")

```

ver Figura 7.20

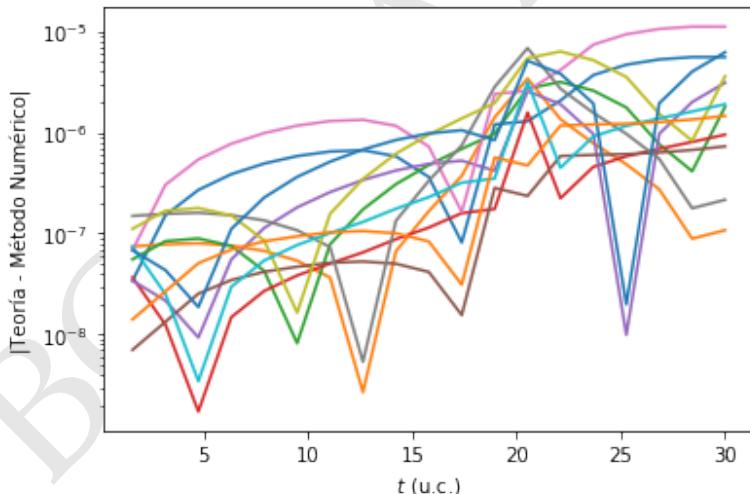


Figura 7.20: Figura correspondiente al código 7.12. Comparación de las componentes calculadas del vector de estado de cada partícula en un sistema de dos cuerpos, obtenidas con la teoría desarrollada en este capítulo y con la solución numérica de alta precisión conseguida con métodos numéricos. Cada curva representa una componente (x_1, y_1, z_1, v_{x1} , etc.) Para no recargar más la figura se ha evitado iniciar a que curva corresponde cada componente. .

Como puede apreciarse en la [Figura 7.20](#), la comparación entre las componentes del vector de estado calculado con la teoría y el obtenido con la solución numé-

rica de la e.d.m., tiene dos características bastante notables:

1. La diferencia entre ambos es muy pequeño. Este resultado permite concluir que la teoría es capaz de predecir con gran precisión la posición y velocidad de las partículas, que es justamente lo que buscábamos.
2. La diferencia no es nula y al parecer crece con el tiempo. Este importante hecho, en lugar de revelar una limitación intrínseca de nuestros resultados analíticos, en realidad es prueba de la precisión limitada de los métodos numéricos utilizados para resolver la e.d.m. Adicionalmente, el hecho de que el error de estos métodos tenga una tendencia creciente con el tiempo, es una limitación bien conocida de los métodos numéricos aplicados en la solución de la e.d.m. de n cuerpos en mecánica celeste, un problema sobre el que volveremos en el [Capítulo *El formalismo hamiltoniano*].

7.12. Variables universales

Como hemos visto, el cálculo de la anomalía verdadera del vector relativo como función del tiempo en el problema de los dos cuerpos, se consigue después de resolver la ecuación de Halley o la ecuación de Kepler. En términos algorítmicos, como hemos visto en esta sección, el procedimiento puede hacerse bastante engorroso en tanto se hace necesario evaluar en distintos pasos sobre qué cónica exactamente ocurre el movimiento.

En 1912, Karl Sundman descubrió un cambio de variable muy útil en el problema de los dos cuerpos que permite obtener lo que podríamos llamar una ecuación de Kepler unificada o universal que es válida sin importar la cónica sobre la que se mueva el vector relativo. La teoría de Sundman, fue desarrollada con muchas y diversas variantes durante el resto de los 1900, hasta convertirse en la que se conoce hoy en día como la *formulación universal* del problema de Kepler.

La formulación presentada aquí es original pero no necesariamente es la más general o rigurosa de las que se han concebido. Para algunas versiones alternativas se invita al lector a explorar los ahora textos clásicos de Bate y otros [7] y Danby [19] y las referencias incluidas en ellos.

Consideré por ejemplo la ecuación de Halley escrita en la forma:

$$\sqrt{\frac{\mu}{p^3}}(t - t_p) = \frac{1}{2} \tan \frac{f}{2} + \frac{1}{6} \tan^3 \frac{f}{2}$$

Es fácil ver mostrar que si introducimos la variable auxiliar $x = \sqrt{p} \tan(f/2)$, la ecuación adopta la forma:

$$\sqrt{\mu}(t - t_p) = qx + \frac{x^3}{3!} \quad (7.83)$$

donde $q = p/2$.

¿Qué puede tener de especial esta forma particular de la ecuación de Halley?

Escribamos ahora la ecuación de Kepler para órbitas elípticas:

$$\sqrt{\frac{\mu}{a^3}}(t - t_p) = E - e \sin E$$

Si usamos la expansión en series de potencias de la función seno:

$$\sin E = E - \frac{E^3}{3!} + \frac{E^5}{5!} + \dots$$

la ecuación de Kepler queda:

$$\sqrt{\frac{\mu}{a^3}}(t - t_p) = (1 - e)E + \frac{E^3}{3!} - \frac{E^5}{5!} + \dots$$

Ahora bien, reconociendo que $q = a(1 - e)$ y haciendo $x \equiv \sqrt{a}E$ y $\alpha \equiv 1/a$, la ecuación de Kepler para órbitas elípticas se puede escribir de la forma:

$$\sqrt{\mu}(t - t_p) = qx + ex^3 \left(\frac{1}{3!} - \alpha \frac{x^2}{5!} + \alpha^2 \frac{x^4}{7!} \dots \right) \quad (7.84)$$

El parecido entre esta versión de la ecuación de Kepler y la ecuación de Halley escrita en la forma de la Ec. (7.83) es simplemente asombroso. Basta notar que cuando se hace $e = 1$ y $a \rightarrow \infty$ en la ecuación de Kepler escrita en la forma de la Ec. (7.84) se obtiene justamente la ecuación de Halley. Dos ecuaciones que fueron obtenidas con procedimientos geométricos y analíticos completamente diferentes, al expresarse en la forma de series infinitas revelan su parentesco de forma increíble.

Pero las sorpresas continúan cuando consideramos la ecuación de Kepler en el caso hiperbólico:

$$\sqrt{\frac{\mu}{a^3}}(t - t_p) = e \sinh F - F$$

Usando, de forma análoga a como lo hicimos en el caso de la elipse, la expansión en series de Taylor de la función seno hiperbólico:

$$\sinh F = F + \frac{F^3}{3!} + \frac{F^5}{5!} + \dots$$

la ecuación de Kepler en este caso se escribe como:

$$\sqrt{\frac{\mu}{|a|^3}}(t - t_p) = (e - 1)F + \frac{F^3}{3!} + \frac{F^5}{5!} + \dots$$

Si reconocemos que $a < 0$, $q = |a|(1 - e)$ y hacemos $x = \sqrt{|a|}F$, obtenemos nuevamente la Ec. (7.84):

$$\sqrt{\mu}(t - t_p) = qx + ex^3 \left(\frac{1}{3!} - \alpha \frac{x^2}{5!} + \alpha^2 \frac{x^4}{7!} \dots \right)$$

En el paréntesis del lado derecho de la última ecuación se reconocen claramente las series de Stumpff que introdujimos en la ?? En términos de estas series la **ecuación universal de Kepler** queda:

$$\sqrt{\mu}(t - t_p) = qx + ex^3 c_3(\alpha x^2) \quad (7.85)$$

donde la **variable universal** x se puede expresar en términos de las anomalías como:

$$x = \begin{cases} \sqrt{p} \tan(f/2) & \text{Si } e = 1 \\ \sqrt{|a|} G & \text{Si } e = 1 \end{cases}$$

y G es la anomalía excéntrica generalizada ($G = E$ en el caso de la elipse y $G = F$ en el caso de la hipérbola.)

La solución a la *ecuación universal de Kepler* se puede obtener usando algunos de los métodos que vimos en la ??.

Para ello, sin embargo es necesario primero escribir una rutina que permita calcular la *función universal de Kepler*:

$$k_x(x; M, e, q) = qx + ex^3 c_3(\alpha x^2) - M_u$$

donde $M_u = \sqrt{\mu}(t - t_p)$ es una *anomalía media generalizada* (valida para cualquier cónica) y sus derivadas, para lo cual podemos usar las relaciones de recurrencia de las derivadas de las series de Stumpff vistas en la ?? (Ecs. ??):

$$\frac{dk_u}{dx} = q + ex^2 c_2(\alpha x^2) \quad (7.86)$$

$$\frac{d^2 k_u}{dx^2} = ex c_1(\alpha x^2) \quad (7.87)$$

(7.87)

La rutina que implementa la ecuación universal de Kepler será:

(Algoritmo 7.13)

```
def funcion_universal_kepler(x,M,e,q):
    #Parametro alga
    alfa=(1-e)/q
    #Funcion universal de Kepler
    from pymcel.export import serie_stumpff
    k=q*x+e*x**3*serie_stumpff(alfa*x**2,3)-M
    kp=q+e*x**2*serie_stumpff(alfa*x**2,2)
    kpp=q+e*x*serie_stumpff(alfa*x**2,1)
    return k,kp,kpp
```

Usando esta rutina podemos ahora aplicar el método de Newton o el más general método de Laguerre para resolver la ecuación:

```
#Propiedades del sistema
mu=1.0
p=2.0
tp=0.0
t=10.0
e=1.5
a=p/(1-e**2)
q=p/(1+e)

#Anomalía media generalizada
from numpy import sqrt
```

```
M=sqrt(mu)*(t-tp)

#Solución usando variables universales
from pymcel.export import metodo_laguerre
x,errorx,ni=metodo_laguerre(funcion_universal_kepler,
                             x0=M,args=(M,e,q),delta=1e-14)
Euni=x/sqrt(abs(a))
errorEuni=errorx/sqrt(abs(a))

#Solución usando la ecuación de Kepler
from pymcel.export import kepler_newton
n=sqrt(mu/abs(a)**3)
M=n*(t-tp)
E,errorE,niE=kepler_newton(M,e,delta=1e-14)
```

E (con variables universales): 130.32287447321414 grados (error 0.0)
E (con ecuación de Kepler): 130.32287447321414 grados (error 0.0)

7.12.1. Las funciones f y g

Si la aproximación de variables universales que vimos en la sección anterior tuviera el único propósito de unificar la ecuación de Kepler para distintas cónicas, simplificar su solución o escribir algoritmos más efectivos para encontrarla, este formalismo sería poco más que una curiosidad matemática o numérica sin mayor trascendencia. Sin embargo, hay otros aspecto de esta manera de parametrizar el problema que hace de las variables universales un tema de primera importancia en la solución al problema de los dos cuerpos en mecánica celeste.

Considere por ejemplo la siguiente cuestión. En el conjunto pasos descritos en la ??, vimos que para predecir el estado en cualquier instante del tiempo del vector relativo, es necesario primero convertir el vector de estado inicial $\vec{x}(t_0) : [\vec{r}(t_0) \dot{\vec{r}}(t_0)]$ en elementos orbitales, de allí, encontrar, usando la ecuación de Kepler o de Halley, la anomalía verdadera en el instante deseado y finalmente convertir los elementos orbitales, incluyendo la nueva anomalía, en el vector de estado buscado $\vec{x}(t) : [\vec{r}(t) \dot{\vec{r}}(t)]$. ¿Habrá una manera de encontrar el vector de estado en el tiempo t usando solamente el vector de estado en el instante inicial, sin pasar por la conversión hacia y desde los elementos orbitales?

Si nos restringimos al plano natural de la cónica, sabemos que los vectores de $\vec{r}(t)$, $\dot{\vec{r}}(t)$ son coplanares con los vectores $\vec{r}(t_0)$, $\dot{\vec{r}}(t_0)$. Esto implica que podemos expresar, por ejemplo, el vector posición en el tiempo t como una combinación lineal de la posición y la velocidad inicial:

$$\vec{r}(t) = f\vec{r}(t_0) + g\dot{\vec{r}}(t_0) \quad (7.88)$$

donde f y g son cantidades desconocidas que dependerán naturalmente del tiempo.

Dado que $\vec{r}(t_0)$, $\dot{\vec{r}}(t_0)$ son constantes, la velocidad en el tiempo t será por su parte:

$$\vec{v}(t) = \dot{f}\vec{r}(t_0) + \dot{g}\dot{\vec{r}}(t_0) \quad (7.89)$$

¿Cómo son las funciones f y g ? ¿se pueden escribir de modo que no dependan de los elementos orbitales y solo lo hagan del tiempo o de otras cantidades estrictamente relacionadas con la posición y velocidad inicial? Aunque no nos detendremos aquí a ahondar en esta importante cuestión, nos bastará, para los propósitos de este libro, con decir que la respuesta a estas preguntas es afirmativa y que las expresiones más generales de las funciones f y g se obtienen precisamente en el formalismo de las variables universales. El lector curioso puede conocer la deducción de las fórmulas provistas a continuación en cualquier texto avanzado de mecánica celeste [19]. Algunas deducciones relacionadas se incluyen en los problemas al final de este capítulo.

Las funciones f y g como función del tiempo y de su estado inicial se pueden calcular usando las ecuaciones:

$$f(s) = 1 - \left(\frac{\mu}{r_0} \right) s^2 c_2(\beta s^2) \quad (7.90)$$

$$g(s) = t - t_0 - \mu s^3 c_3(\beta s^2) \quad (7.91)$$

$$\dot{f}(s) = - \left(\frac{\mu}{r r_0} \right) s c_1(\beta s^2) \quad (7.92)$$

$$\dot{g}(s) = 1 - \left(\frac{\mu}{r} \right) s^2 c_2(\beta s^2) \quad (7.93)$$

$$(7.94)$$

donde $\beta = \mu/a$ y la variable universal s (una variable similar a la x usada en la sección anterior) satisface la ecuación:

$$k_s(s; r, r_0, \beta, \mu, t - t_0) \equiv r_0 s c_1(\beta s^2) + r_0 \dot{r}_0 s^2 c_2(\beta s^2) + \mu s^3 c_3(\beta s^2) - (t - t_0) = 0 \quad (7.95)$$

que llamaremos la *ecuación de Kepler en la variable universal s* .

La rutina a continuación calcula la *función de Kepler en la variable universal s* , k_s , y sus derivadas k'_s y k''_s , usando para esto último las relaciones de recurrencia de las derivadas de las series de Stumpff vistas en la ?? (Ecs. ??):

(Algoritmo 7.14)

```
def funcion_universal_kepler_s(s,r0,rdot0,beta,mu,M):
    #Variable auxiliar
    u=beta*s**2
    #Series de Stumpff requeridas
    from pymcel.export import serie_stumpff
    c0=serie_stumpff(u,0)
    s1c1=s*serie_stumpff(u,1)
    s2c2=s**2*serie_stumpff(u,2)
    s3c3=s**3*serie_stumpff(u,3)
    #Ecuación universal de Kepler en s y sus derivadas
    k=r0*s1c1+r0*rdot0*s2c2+mu*s3c3-M
    kp=r0*c0+r0*rdot0*s1c1+mu*s2c2
    kpp=(mu-r0*beta)*s1c1+r0*rdot0*c0
    return k,kp,kpp
```

El poder de las Ecs. (7.88) y (7.89) además de la forma explícita de las funciones f y g y sus derivadas, provistas en las Ecs. (7.90)-(7.93), no puede menospreciar. Si bien en este caso la variable universal s carece de la interpretación geométrica que encontramos en la sección anterior para la variable x , es claro que esta cantidad nos permite obtener, independientemente del tipo de cónica, la posición relativa de los cuerpos en cualquier instante del tiempo, conociendo únicamente el estado relativo inicial y sin requerir el cálculo intermedio de elementos orbitales o anomalías.

La siguiente rutina implementa las Ecs. (7.90)-(7.95) y resuelve el problema de Kepler encontrando la posición y velocidad relativa de un sistema de dos cuerpos en un tiempo t cuando se conoce su posición y velocidad relativa en un tiempo de referencia t_0 .

(Algoritmo 7.15)

```
def propaga_f_g(mu,rvec0,vvec0,t0,t,delta=1e-14,verbose=False):

    from numpy.linalg import norm
    from numpy import dot,cross

    #Calcular r0, rdot0
    r0=norm(rvec0)
    rdot0=dot(rvec0,vvec0)/r0

    #Calcula el valor del parámetro beta
    hvec=cross(rvec0,vvec0)
    h=norm(hvec)
    e=norm(cross(vvec0,hvec))/mu-rvec0/norm(rvec0))
    p=h**2/mu
    q=p/(1+e)
    beta=mu*(1-e)/q

    #Equivalente a la anomalía media
    M=t-t0

    #Resuelve la ecuación universal de Kepler en s
    sn=M/r0

    from pymcel.export import metodo_laguerre
    s,error,ni=metodo_laguerre(funcion_universal_kepler_s,
                                x0=sn,args=(r0,rdot0,beta,mu,M),delta=1e-15)

    #Variable auxiliar
    u=beta*s**2
    #Series de Stumpff requeridas
    from pymcel.export import serie_stumpff
    s1c1=s*serie_stumpff(u,1)
    s2c2=s**2*serie_stumpff(u,2)
    s3c3=s**3*serie_stumpff(u,3)

    #Calcula las funciones f,g
```

```

f=1-(mu/r0)*s2c2
g=M-mu*s3c3

#Calcula r
rvec=rvec0*f+vvec0*g
r=norm(rvec)

#Calcula las funciones f',g'
dotf=-(mu/(r*r0))*s1c1
dotg=1-(mu/r)*s2c2

#Calcula v
vvec=rvec0*dotf+vvec0*dotg

return s,f,g,dotf,dotg,rvec,vvec

```

Que podemos probar usando:

```

#Sistema
from numpy import array
t0=0
sistema=[
    dict(m=1.0,
        r=array([0.0,0.0,+0.3]),
        v=array([+1.0,0.0,0.5])),
    dict(m=0.5,
        r=array([+1.0,0.0,0.0]),
        v=array([0.0,+1.0,0.0])),
]

#Condiciones iniciales
m1=sistema[0]["m"]
r1_0=sistema[0]["r"]
v1_0=sistema[0]["v"]

m2=sistema[1]["m"]
r2_0=sistema[1]["r"]
v2_0=sistema[1]["v"]

#Posición y velocidad relativa inicial
rvec0=r1_0-r2_0
vvec0=v1_0-v2_0

s,f,g,dotf,dotg,rvec,vvec=propaga_f_g(mu,rvec0,vvec0,t0,t,verbose=True)

```

Estado para $t = 10$
Variable universal, $s = 3.72932$
 $f = -8.67675$, $g = -0.891859$
 $f' = -0.839682$, $g' = -0.201559$
 $r = [7.78488648 0.89185893 -3.04895309]$
 $v = [0.63812318 0.20155925 -0.35268435]$

Que coincide con los resultados que habíamos obtenido con el Alg. (7.10).

7.13. Aproximación de dos cuerpos a sistemas jerárquicos

En la ?? habíamos mencionado que muchos sistemas de N cuerpos en el Universo son en realidad sistema jerárquicos de N cuerpos (Ver Definición \ref{box:def:jerarquicos}), es decir la dinámica de estos sistemas puede modelarse como la de $N - 1$ sistemas de dos cuerpos interactuantes. En las secciones anteriores desarrollamos en detalle la solución analítica para el problema de los dos cuerpos y es tiempo de que pongamos a prueba esa afirmación original.

Para ello consideremos nuevamente el sistema que habíamos estudiado numéricamente al principio del capítulo:

```
sistema=[  
    dict(  
        m=10.0,  
        r=[1,0,0],  
        v=[0,1,0.5]),  
    dict(  
        m=1.0,  
        r=[1.5,0,0],  
        v=[0,-3,1],  
    ),  
    dict(  
        m=0.01,  
        r=[-1,0,0],  
        v=[0,3,1],  
    )  
]
```

Como podemos comprobar examinando las trayectorias de las partículas representadas en la Figura 7.1 y en la Figura 7.2, este sistema puede describirse como un sistema anidado de tres cuerpos:

1. Las partículas 0 y 1 forman un sistema de dos cuerpos central (lo llamaremos el sistema A).
2. Las partícula 2 y el sistema A forma un segundo sistema de dos cuerpos (lo llamaremos el sistema B).

Las propiedades iniciales del sistema A pueden describirse simplemente usando:

```
from numpy import array  
sistemaA=[  
    dict(  
        m=10.0,  
        r=array([1,0,0]),  
        v=array([0,1,0.5])  
),
```

```

dict(
    m=1.0,
    r=array([1.5,0,0]),
    v=array([0,-3,1]),
)
]

```

Para definir las propiedades iniciales del sistema B necesitamos conocer primero la masa total, posición y velocidad del centro de masa del sistema A:

```

masaA=sistemaA[0]["m"]+sistemaA[1]["m"]
r_CM_A=(sistemaA[0]["m"]*sistemaA[0]["r"]+\n        sistemaA[1]["m"]*sistemaA[1]["r"])/masaA
v_CM_A=(sistemaA[0]["m"]*sistemaA[0]["v"]+\n        sistemaA[1]["m"]*sistemaA[1]["v"])/masaA

```

Sistema A:

```

Masa : = 11.0
Posición del centro de masa : = [1.04545455 0.          0.          ]
Velocidad del centro de masa : = [0.           0.63636364 0.54545455]

```

Con estas propiedades calculadas podemos ahora definir el sistema B:

```

from numpy import array
sistemaB=[

    dict(
        m=masaA,
        r=r_CM_A,
        v=v_CM_A,
    ),
    dict(
        m=0.01,
        r=array([-1,0,0]),
        v=array([0,3,1]),
    )
]
masaB=sistemaB[0]["m"]+sistemaB[1]["m"]

```

Podemos ahora utilizar las rutinas desarrolladas en secciones anteriores para predecir la posición de las componentes de cada sistema:

```

from pymcel.export import propaga_estado
t0=0
t=1.0

#Sistema A
r1,v1,r2,v2,rvecA,vvecA=propaga_estado(sistemaA,t0,t)

#Sistema B
rA,vA,r3,v3,rvecB,vvecB=propaga_estado(sistemaB,t0,t)

```

Para compararla con las posiciones “reales” resolvamos numéricamente el problema de los N cuerpos:

```
from pymcel.export import ncuerpos_solucion
ts=[t0,t]
rs,vs,rps,vps,constantes=ncuerpos_solucion(sistema,ts)
```

Ahora podemos comparar el valor de r_1 y v_1 con el de $rs[0,1,:]$ y $vs[0,1,:]$:

Partícula 1:

Posición:

```
N cuerpos: [1.0048383  0.65569534  0.54317083]
Dos cuerpos: [1.00588816  0.65527116  0.5430911 ]
```

Velocidad:

```
N cuerpos: [0.21350298  0.9523843   0.50633134]
Dos cuerpos: [0.2152712   0.95124402  0.5060945 ]
```

Partícula 2:

Posición:

```
N cuerpos: [1.4400009  0.44762822  0.56917975]
Dos cuerpos: [1.44111843  0.44728838  0.56908895]
```

Velocidad:

```
N cuerpos: [-2.15539786 -2.51097523  0.93917367]
Dos cuerpos: [-2.15271202 -2.51244021  0.93905503]
```

Partícula 3:

Posición:

```
N cuerpos: [0.16161001 2.54183689 0.91119156]
Dos cuerpos: [0.15798609 2.54292744 0.91210143]
```

Velocidad:

```
N cuerpos: [2.03681019 1.71322222 0.75129016]
Dos cuerpos: [2.03238481 1.71734141 0.75333489]
```

La coincidencia no es perfecta pero no hay que minimizar este “logro” increíble. Recordemos que estamos comparando aquí una solución analítica (la de dos problemas de dos cuerpos) con una solución completamente numérica (la del sistema completo.) Ambas soluciones son completamente independientes, y aún así, al menos para este sistema conseguimos calcular posiciones y velocidades con una precisión relativa del orden del 1 %.

Una comparación gráfica entre las dos soluciones hace más notable lo conseguido:

(Algoritmo 7.16)

```
from pymcel.export import propaga_estado
from numpy import linspace

#Ventana de integración
t0=0.0
T=5.0

#Solución al problema de los N cuerpos
from pymcel.export import ncuerpos_solucion
ts=linspace(t0,T,200)
```

```

rs_num,vs_num,rps_num,vps_num,constantes=ncuerpos_solucion(sistema,ts)

from numpy import zeros_like
rs_aprox=zeros_like(rs_num)
Nt=20
ts=linspace(t0,T,Nt)
for i,t in enumerate(ts):
    #Sistema A
    ra1,va1,ra2,va2,ravecA,vavecA=propaga_estado(sistemaA,t0,t)

    #Sistema B
    raA,vaA,ra3,va3,ravecB,vavecB=propaga_estado(sistemaB,t0,t)

    rs_aprox[0,i]=ra1
    rs_aprox[1,i]=ra2
    rs_aprox[2,i]=ra3

#Grafico
from pymcel.export import plot_ncuerpos_3d
fig=plot_ncuerpos_3d(rs_num,vs_num)
ax=fig.gca()

ax.plot(rs_aprox[0,:Nt,0],rs_aprox[0,:Nt,1],rs_aprox[0,:Nt,2], 'b+')
ax.plot(rs_aprox[1,:Nt,0],rs_aprox[1,:Nt,1],rs_aprox[1,:Nt,2], 'r+')
ax.plot(rs_aprox[2,:Nt,0],rs_aprox[2,:Nt,1],rs_aprox[2,:Nt,2], 'g+')

```

ver Figura 7.21

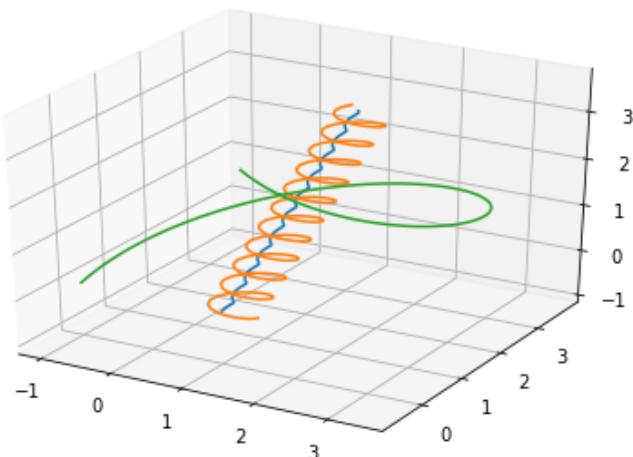


Figura 7.21: Comparación entre la solución numérica a un problema de 3 cuerpos (líneas continuas) y su aproximación como un sistema jerárquico formado por dos subsistemas de dos cuerpos (cruces).

Out [96]: [`<mpl_toolkits.mplot3d.art3d.Line3D at 0x113ff7b00>`]

¿Podemos mejorar de alguna manera la aproximación obtenida aquí? Hay una manera de hacerlo para este sistema, al menos en el caso de las predicciones de los vectores de estado de los cuerpos 1 y 2. Para ello debemos primero reconocer que en el sistema B la posición del centro de masa del sistema A describe una trayectoria elíptica. Sin embargo, en el sistema A (en el que se ha assumido que la tercera partícula no existe), ese mismo centro de masa se mueve siguiendo una trayectoria rectilínea. Es obvio que en la realidad la trayectoria del que llamamos aquí el “centro de masa” de las partículas 1 y 2, no sigue una trayectoria tan simple, debido naturalmente a la presencia perturbadora de la partícula 3.

Una mejor aproximación a la posición de las partículas 1 y 2 se puede obtener entonces si usamos los vectores relativos r_{vecA} y v_{vecA} que obtuvimos con la solución al problema de los dos cuerpos en el sistema A, pero en lugar de asumir que están referidos a un centro de masa que se mueve inercialmente, lo hacemos al centro de masa cuyo movimiento es más complejo y que resulta de la interacción con la partícula 3 (vectores r_A y v_A):

```
r1=rA+sistemaA[1]["m"]/masaA*rvecA
r2=rA-sistemaA[0]["m"]/masaA*rvecA

v1=vA+sistemaA[1]["m"]/masaA*vvecA
v2=vA-sistemaA[0]["m"]/masaA*vvecA
```

Partícula 1:

Posición:

```
N cuerpos: [1.0048383 0.65569534 0.54317083]
Dos cuerpos: [1.00483544 0.65568668 0.54317101]
```

Velocidad:

```
N cuerpos: [0.21350298 0.9523843 0.50633134]
Dos cuerpos: [0.21342358 0.95241007 0.50631874]
```

Partícula 2:

Posición:

```
N cuerpos: [1.4400009 0.44762822 0.56917975]
Dos cuerpos: [1.44006572 0.4477039 0.56916886]
```

Velocidad:

```
N cuerpos: [-2.15539786 -2.51097523 0.93917367]
Dos cuerpos: [-2.15455965 -2.51127416 0.93927927]
```

Obtenemos inmediatamente un incremento sustancial en la precisión de nuestras predicciones para este sistema: pasamos de predicciones con precisiones cercanas al 1 % a unas nuevas que coinciden con la solución numérica en un nivel igual o inferior al 0.01 %.

Como vemos este tipo de correcciones de “segundo orden” pueden mejorar sustancialmente las predicciones de los vectores de estado, al menos de una parte de las partículas del sistema (en nuestro ejemplo, la precisión del vector de estado de la partícula 3 no fue mejorada en lo absoluto.) Sin embargo, no existe una regla general que indique qué correcciones exactamente debemos aplicar y cada sistema debe analizarse separadamente.

Un poco de historia

Kepler y la mecánica celeste de precisión. La mecánica celeste de precisión comenzó en el año 1600 cuando Johannes Kepler se unió al equipo de Tycho Brahe con la tarea expresa de usar los datos acumulados por este último (o al menos una parte de ellos) para poner a prueba modelos matemáticos alternativos al modelo Ptolemaico.

A lo largo de cerca de 20 años, Tycho había acumulado observaciones de los planetas, las estrellas e incluso de algunos cometas, usando instrumentos enormes de alta precisión (ver Figura 7.22.) Mientras que en los siglos que precedieron a Tycho, la precisión de las observaciones astronómicas (realizadas normalmente con pequeños cuadrantes, sextantes, astrolabios y otros instrumentos) era en el mejor de los casos de varios minutos de arco, la mayoría de las observaciones de Tycho alcanzaba una precisión cercana al minuto de arco y en algunos casos llegaba a ser de unas decenas de segundos de arco (al menos para las posiciones de las estrellas.)

Ni el modelo Ptolemaico del universo, que había sido usado por más de 1500 años para las predicciones astronómicas, ni el más reciente modelo Copernicano podían predecir con la precisión conseguida por los instrumentos de Tycho, las posiciones observadas de los planetas. Fue precisamente buscando mejorar la precisión de estas predicciones, como Kepler descubrió finalmente sus leyes del movimiento planetario y sembró con ellas la semilla de la mecánica celeste en el fertil suelo intelectual de los 1600.

No debemos sin embargo olvidar que la descripción de las órbitas planetarias como lo hizo Kepler, asumiendo que son elipses con foco en el Sol (o en la Tierra para el caso de la Luna), no es otra cosa que una aproximación de dos cuerpos a un sistema jerárquico, como lo hemos descrito en esta sección (en particular el sistema solar puede catalogarse como un *sistema central* en las categorías introducidas en la ??.)

En esta aproximación Kepler asumió, sin saberlo, que el sistema solar, que en aquel tiempo estaba formado por solo 8 cuerpos, el Sol, Mercurio, Venus, la Tierra, la Luna, Marte, Júpiter y Saturno, era en realidad un sistema jerárquico de 7 pares de cuerpos: Sol-Mercurio, Sol-Venus, Sol-Tierra, Tierra-Luna, Sol-Marte, Sol-Júpiter y Sol-Saturno.

El éxito de la teoría de Kepler al predecir las posiciones planetarias (incluyendo la de la Luna) con una precisión inferior al minuto de arco, fue la primera demostración en la historia del poder que tiene el problema de los dos cuerpos en la descripción de sistemas de N cuerpos.

7.13.1. Predicciones en el Sistema Solar

Podemos usar todo lo visto en este capítulo, para poner a prueba la afirmación de que es posible predecir con una precisión aceptable para los estándares astronómicos del pasado (cercana o inferior a 1 minuto de arco), la posición de los planetas en el Sistema Solar. Para ello podemos asumir que nuestro sistema planetario, que en realidad está formado por decenas de cuerpos de masas no despreciables, puede describirse como un sistema jerárquico de pares de dos cuerpos: Sol-Mercurio, Sol-Venus, Sol-Tierra, Sol-Marte, Sol-Asteroide, etc.

Podemos asumir (como lo hicieron implícitamente Kepler y sus contemporáneos) que la masa del Sol en estos pares de partículas es infinitamente mayor que

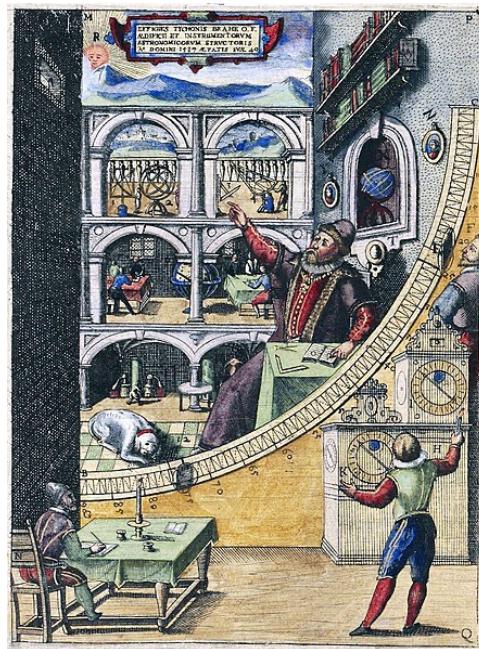


Figura 7.22: Este grabado de 1598 muestra el gran cuadrante mural de Tycho Brahe en Uraniburgo, su observatorio astronómico en la isla Hven en Dinamarca. Con este y otra decena de enormes instrumentos, Tycho realizó por más de 20 años observaciones de gran precisión de planetas, estrellas y cometas, que a la larga revolucionarían, no solo la mecánica celeste, sino también la astronomía en general. Crédito: Royal Library.

la de los cuerpos más pequeño, $m_1 = m_{\odot} \approx M$. Con esta aproximación, el Sol se puede asumir fijo en el centro de masa del sistema (ver Ecs. 7.2 y 7.3):

$$\begin{aligned}\vec{r}_{\odot} &\approx 0 \\ \vec{v}_{\odot} &\approx 0\end{aligned}$$

mientras que el estado de los otros cuerpos es simplemente igual al vector de estado relativo en el sistema:

$$\begin{aligned}\vec{r}_{\text{planeta}} &\approx \vec{r} \\ \vec{v}_{\text{planeta}} &\approx \vec{v}\end{aligned}$$

Para poner a prueba la aproximación calcularemos a continuación los vectores de estado de la Tierra y Marte y deduciremos a partir de ellos la posición en el cielo del último planeta que después compararemos con su posición real obtenida con predicciones modernas de alta precisión.

Comencemos entonces por determinar el vector de estado de la Tierra y Marte respecto al Sol en una fecha específica. Para ello podemos valernos de la rutina `spkezr` que introdujimos en el [Capítulo 6](#).

```

from spiceypy import furnsh
furnsh("pymcel/data/de430.tpc")
furnsh("pymcel/data/de430.bsp")

#Fecha de referencia J2000.0
t0=0

#Parametro gravitacional del sistema
from spiceypy import bodvrd
mu=bodvrd("SUN", "GM", 1)[1][0]

#Vectores de estado de la Tierra y Marte
from spiceypy import spkezr
tierra,tluz=spkezr("EARTH_BARYCENTER",t0,"ECLIPJ2000","None","SUN")
rtierra0=tierra[:3]
vtierra0=tierra[3:]
marte,tluz=spkezr("MARS_BARYCENTER",t0,"ECLIPJ2000","None","SUN")
rmarte0=marte[:3]
vmarte0=marte[3:]

```

Estado inicial de la Tierra (SPICE):

Posición: [-2.65025770e+07 1.44693956e+08 -1.70505187e+02]
 Velocidad: [-2.97864408e+01 -5.47817684e+00 4.19797701e-05]

Estado inicial de Marte (SPICE):

Posición: [2.08048141e+08 -2.00705251e+06 -5.15628899e+06]
 Velocidad: [1.16267242 26.29606454 0.52229699]

Ahora usaremos la rutina `propaga_f_g` que introdujimos en la [Sección 7.12.1](#) para propagar las posiciones de la Tierra y Marte, 180 días (aproximadamente 6 meses) en el futuro:

(Algoritmo 7.17)

```

#30 días más tarde
t=180*86400

#Propaga la posición de la Tierra
from pymcel.export import propaga_f_g
prediccion_tierra=propaga_f_g(mu,rtierra0,vtierra0,t0,t,verbose=True)
rtierra=prediccion_tierra[5]
vtierra=prediccion_tierra[6]

#Propaga la posición de Marte
prediccion_marte=propaga_f_g(mu,rmarte0,vmarte0,t0,t,verbose=True)
rmarte=prediccion_marte[5]
vmarte=prediccion_marte[6]

```

Estado propagado de la Tierra (aproximación):

Posición: [2.12651481e+07 -1.50593536e+08 1.84746693e+02]
 Velocidad: [2.90111873e+01 4.05388504e+00 -3.91059499e-05]

Estado inicial de Marte (aproximación):

Posición: [-3.75596491e+07 2.34997200e+08 5.84626235e+06]
 Velocidad: [-23.00765883 -1.7690655 0.52851442]

Podemos comparar las predicciones realizadas con la teoría de dos cuerpos con aquellas muy precisas calculadas con las integraciones numéricas implícitas en los datos de SPICE:

```
#Vectores de estado de la Tierra y Marte
tierra,tluz=spkezr("EARTH_BARYCENTER",t,"ECLIPJ2000","None","SUN")
marте,tluz=spkezr("MARS_BARYCENTER",t,"ECLIPJ2000","None","SUN")
```

Estado propagado de la Tierra (SPICE):

```
Posición: [ 2.12704637e+07 -1.50594283e+08 2.98450430e+02]
Velocidad: [ 2.90108118e+01 4.05407503e+00 -2.81172149e-05]
```

Estado inicial de Marte (SPICE):

```
Posición: [-3.75381027e+07 2.35025828e+08 5.84580453e+06]
Velocidad: [-23.00526594 -1.7643746 0.52849927]
```

Las coincidencias en este caso con los resultados obtenidos con la teoría de los dos cuerpos (Alg. 7.17) son sencillamente notables. Pero vayamos más lejos y hagamos la comparación que nos propusimos hacer desde el principio, es decir, calculemos la diferencia entre la posición de Marte en el cielo predicha con la teoría de dos cuerpos y la real (que asumiremos es la que provee SPICE.)

Para ello nos valdremos de una nueva rutina `reclat` que permite convertir un vector posición en sus correspondientes coordenadas de latitud y longitud referidas al sistema de referencia usado (en este caso longitud y latitud eclíptica):

```
from spiceypy import reclat
#Distancia a Marte, longitud y latitud eclíptica del planeta
dist,long,lat=reclat(marte[:3]-tierra[:3])
#Valores usando la teoría aproximada
dist_aprox,long_aprox,lat_aprox=reclat(rmarte-rtierra)
```

Distancia:

```
Real: 390122400.20565176 km
Aprox.: 390095819.98641676 km
```

Longitud eclíptica:

```
Real: 98.6710192 grados
Aprox.: 98.6740266 grados
Diferencia: 0.1804482 arcmin
```

Latitud eclíptica:

```
Real: 0.8585392 grados
Aprox.: 0.8586816 grados
Diferencia: 0.0085473 arcmin
```

Como lo observó Kepler, el error en la posición en el cielo se mantiene, por lo menos durante 6 meses por debajo de 1 minuto de arco. En la ???) se muestra el error calculado en la posición en el cielo, vista desde la Tierra, predicha para el planeta rojo con la teoría de dos cuerpos.

7.13.2. Evolución de los elementos orbitales osculatrices

Hay un “fenómeno” muy interesante que permite entender en parte porque las predicciones de la teoría de los dos cuerpos usadas aquí para predecir el estado

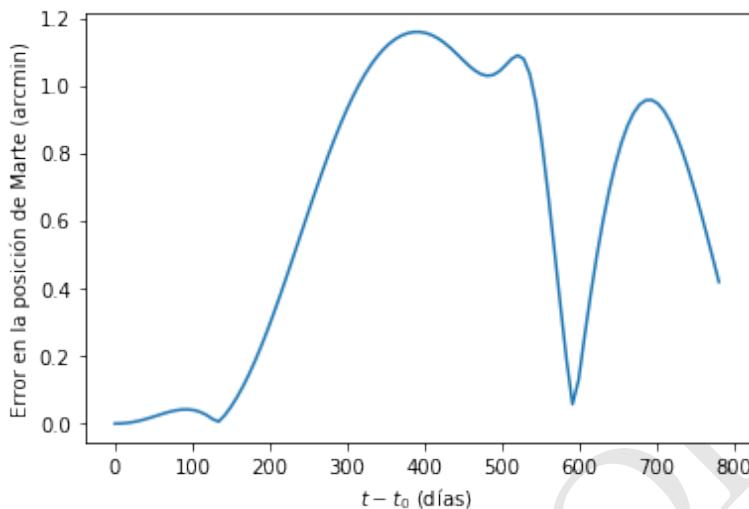


Figura 7.23: Error en la predicción de la posición de Marte en el cielo, tal y como es visto desde la Tierra, usando la teoría de los dos cuerpos como aproximación al movimiento de ambos planetas. El error es calculado a lo largo de un período sinódico completo del planeta rojo (780 días.).

de las partículas en sistemas jerárquicos de N cuerpos, no son más precisas. De acuerdo con lo que vimos en la [Sección 7.9.3](#) a cada vector de estado (sea este el vector de estado de una partícula o el del sistema relativo) podemos asociar un conjunto de elementos orbitales osculatrices. ¿Cómo son los elementos osculatrices de las partículas de los sistemas jerárquicos estudiados en esta sección?

Consideremos por ejemplo el sistema ficticio del principio. Obtengamos primero la solución numérica a las ecuaciones de movimiento de lo describen:

```
from numpy import linspace
ts=linspace(0.0,10.0,200)
from pymcel.export import ncuerpos_solucion
rs,vs,rps,vps,constantes=ncuerpos_solucion(sistema,ts)
```

Para calcular los elementos osculatrices, obtengamos primero la posición del centro de masa de los sistemas A y B en los que descompusimos el sistema completo:

```
#Sistema A
r_CM_A=(sistema[0]["m"]*rs[0]+sistema[1]["m"]*rs[1])/masaA
v_CM_A=(sistema[0]["m"]*vs[0]+sistema[1]["m"]*vs[1])/masaA
#Sistema B
r_CM_B=(sistemaB[0]["m"]*r_CM_A+sistemaB[1]["m"]*rs[2])/masaB
v_CM_B=(sistemaB[0]["m"]*v_CM_A+sistemaB[1]["m"]*vs[2])/masaB
```

Para calcular los elementos osculatrices de la partícula 3, por ejemplo, debemos primero expresar su vector de estado respecto al centro de masa de su respectivo

subsistema (sistema B) y de allí usar los procedimientos matemáticos que vimos en la Sección 7.9.1 y que se implementan (como vimos en la ??) con la rutina oscelt:

```
r3_CM=rs[2]-r_CM_B
v3_CM=vs[2]-v_CM_B

Es=[]
for i,t in enumerate(ts):
    from spiceypy import oscelt
    Es+=[oscelt(list(r3_CM[i])+list(v3_CM[i]),t,masaB)]

from numpy import array
Es=array(Es)
```

Podemos ahora graficar los elementos orbitales q, e, i, Ω, ω como función del tiempo:

(Algoritmo 7.18)

```
import matplotlib.pyplot as plt
fig,axs=plt.subplots(5,1,figsize=(5,8),sharex=True)

#Periapsis
axs[0].plot(ts,Es[:,0])
axs[0].set_ylabel("$q$ (u.c.)")
#Excentricidad
axs[1].plot(ts,Es[:,1])
axs[1].set_ylabel("$e$ (u.c.)")
#Inclinación
axs[2].plot(ts,Es[:,2]*180/pi)
axs[2].set_ylabel("$i$ (grados)")
#Longitud del nodo ascendente
axs[3].plot(ts,Es[:,3]*180/pi)
axs[3].set_ylabel("$\Omega$ (grados)")
#Argumento del periapsis
cond=Es[:,4]>pi
Es[cond,4]=Es[cond,4]-2*pi
axs[4].plot(ts,Es[:,4]*180/pi)
axs[4].set_ylabel("$\omega$ (grados)")

#Decoración
axs[-1].set_xlabel("$t$ (u.c.)")
fig.tight_layout()
```

ver Figura 7.24

Como vemos en la Figura 7.24 el valor de los elementos orbitales osculatrices de la partícula 3 no es constante por lo que no es de extrañar que las predicciones que hicimos de la posición de esa partícula con la teoría de los dos cuerpos, y que esencialmente asumen que la órbita tiene elementos constantes e iguales a aquellos en $t = t_0$, no sean muy precisos.

Pero existe un elemento aún más interesante: las variaciones de los elementos

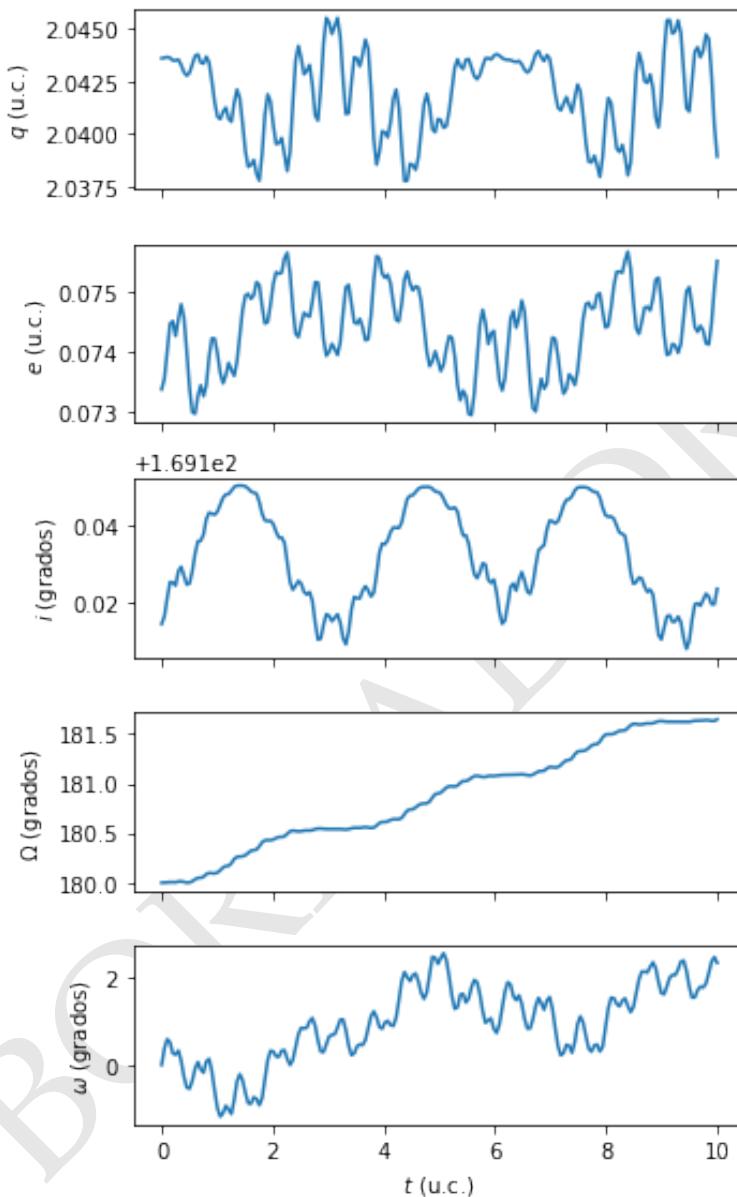


Figura 7.24: Figura correspondiente al código 7.18.

no parecen ser “arbitrarias” o “aleatorias. En el caso de q , e , i y ω los elementos “oscilan” de formas aparentemente predecibles alrededor de un valor promedio, con amplitudes muy pequeñas y frecuencias similares. Por su parte, el valor de Ω parece aumentar monótonamente, con algunos cambios en la tasa de variación que ocurren también a intervalos regulares de tiempo.

7.13.3. Un ejemplo real: los elementos osculatrices de la Luna

El curioso comportamiento observado en el sistema ficticio estudiado en esta sección, es también observado en sistemas astronómicos reales. El caso más notable en el Sistema Solar es el de la Luna. En el algoritmo a continuación calculamos los elementos osculatrices de nuestro satélites, relativos al centro de masa del sistema Tierra-Luna, durante un año completo.

```
#Masa del sistema
from spiceypy import bodvrd
mu=bodvrd("EARTH","GM",1)[1][0]+bodvrd("MOON","GM",1)[1][0]

from numpy import linspace
ts=linspace(0,180*86400,100)
Es=[]
for t in ts:
    #Vector de estado de la Luna
    from spiceypy import spkezr
    luna,tluz=spkezr("MOON",t,"J2000","None","EARTH_BARYCENTER")

    #Elementos osculatrices
    from spiceypy import oscelt
    Es+= [oscelt(luna,t,mu)]

from numpy import array
Es=array(Es)
```

Una gráfica de los elementos osculatrices calculados aquí como función del tiempo (medido en *periodos sinódicos*, es decir el tiempo de Luna llena a Luna llena) se muestra en la Figura 7.24. Como vemos allí y como observamos también en el sistema ficticio, existen variaciones periódicas en los elementos orbitales de la Luna. Adicionalmente, el período de variación de la excentricidad y la distancia al periapsis de la Luna es exactamente igual al período sinódico: la excentricidad, por ejemplo siempre es mínima cuando la Luna está cerca a la luna nueva.

¿De qué dependen estas variaciones en los elementos osculatrices? ¿cómo puede predecirse y de qué manera su predicción puede ayudarnos a describir sistemas jerárquicos de N cuerpos? La solución a este problema obsesionó a Newton hasta el final de su vida y fue necesario una nueva generación de matemáticos en los 1700, entre ellos Joseph Louis Lagrange, para resolver satisfactoriamente el problema. En la siguiente sección abordaremos algunas nociones básicas del problema. Un desarrollo a fondo del mismo es parte de textos más avanzados de Mecánica Celeste.

7.14. Introducción a la teoría de perturbaciones

En la Sección 7.3.2 vimos que en el problema de los dos cuerpos la siguiente cantidad es constante:

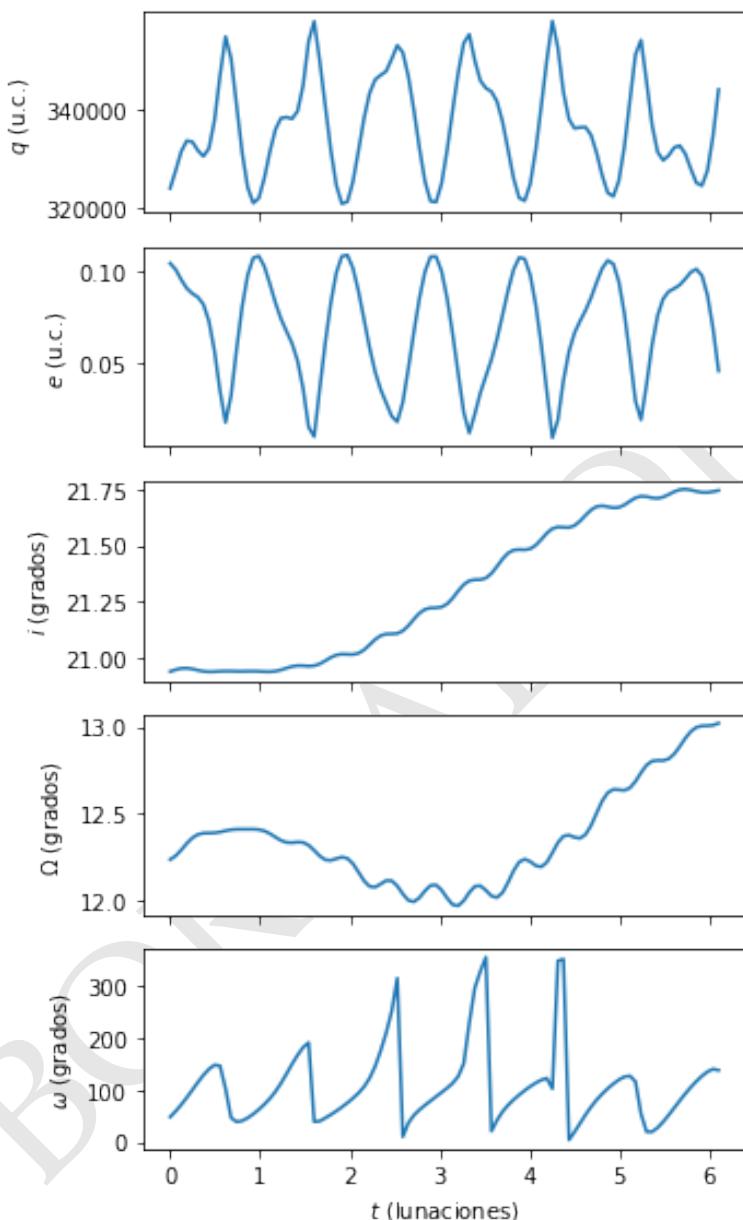


Figura 7.25: Variaciones de los elementos orbitales osculatrices de la Luna respecto al baricentro del sistema Tierra-Luna. .

$$\frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} = \epsilon$$

Por otra parte usando la *vis viva* (Ec. 7.25) encontramos que en el caso de órbitas no parabólicas, $e \neq 1$, el valor de la constante ϵ puede expresarse en términos del

semieje mayor a de la órbita como:

$$\epsilon = -\frac{\mu}{2a}$$

En la última sección vimos sin embargo que en sistemas jerárquicos de N cuerpos, en los que se describe la dinámica como la superposición de N-1 subsistemas dos cuerpos, el valor los elementos orbitales de los subsistemas, incluyendo el semieje mayor a puede cambiar en el tiempo. Si admitimos esto, el valor de ϵ en esos sistemas puede cambiar y lo hará a una tasa que puede expresarse como:

$$\dot{\epsilon} = \frac{\mu}{2a^2} \dot{a} \quad (7.96)$$

Esta ecuación esconde el secreto de la pregunta que nos hacíamos al final de la sección anterior: para calcular la variación de a (y tal vez de otros elementos orbitales) es necesario calcular la variación de ϵ [11].

7.14.1. Perturbación del semieje mayor

Por el teorema de conservación de la energía (Teo. 5.2) la tasa de variación en la energía mecánica de una partícula que está sometida a una fuerza no conservativa \vec{F} es:

$$\dot{E} = \vec{r} \cdot \vec{F}$$

Supongamos que el sistema de dos cuerpos está sometido a una fuerza (específica) neta externa $\Delta\vec{f} \ll -\mu\vec{r}/r^3$, que podemos escribir en términos de los vectores unitarios de coordenadas cilíndricas como:

$$\Delta\vec{f} = R\hat{e}_r + T\hat{e}_v + N\hat{e}_h$$

Llamamo a $\Delta\vec{f}$ la **fuerza perturbadora**.

En términos de esta fuerza y del teorema de conservación de la energía, la variación en la energía específica se puede escribir como:

$$\dot{\epsilon} = R\dot{r} + T\dot{r}\dot{f}$$

De otra parte, derivando la ecuación de la trayectoria (Ec. 5.10):

$$\dot{r} = \frac{p\dot{e}\sin f}{1 + e\cos f}$$

y usando el hecho de que sobre una cónica $r^2\dot{f} = \sqrt{\mu p}$, la variación de la energía relativa específica se puede escribir como:

$$\dot{\epsilon} = \sqrt{\frac{\mu}{p}} [eR\sin f + T(1 + e\cos f)] \quad (7.97)$$

Reemplazando en la Ec. (7.96) y despejando \dot{a} obtenemos finalmente:

$$\dot{a} = 2\sqrt{\frac{a^3}{\mu(1-e^2)}} [eR\sin f + T(1 + e\cos f)] \quad (7.98)$$

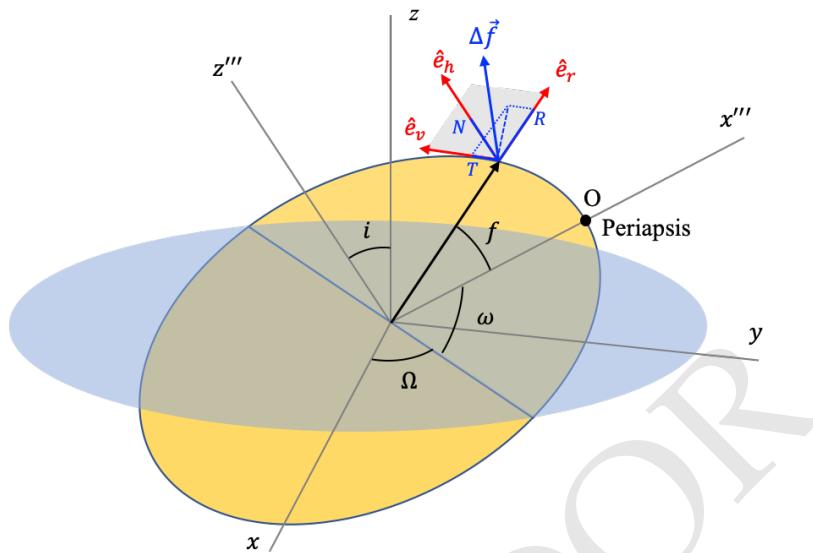


Figura 7.26: Fuerza perturbadora neta $\Delta\vec{f}$ actuando sobre el vector relativo en el problema de los dos cuerpos.

Como vemos solo las componentes radial y tangencial de la fuerza perturbadora pueden efectivamente cambiar el tamaño de la órbita. Las perturbaciones perpendiculares al plano orbital no tienen un efecto sobre el tamaño, aunque sí sobre su orientación como veremos más adelante.

7.14.2. Perturbación de la excentricidad

Si la energía relativa específica se altera por la acción de una fuerza perturbadora, la excentricidad de la órbita también será perturbada en virtud de la relación que ambas cantidades guardan de acuerdo con la Ec. (7.17):

$$e = \sqrt{1 + \frac{2\epsilon h^2}{\mu^2}}$$

La tasa de cambio de e será:

$$\dot{e} = \frac{1}{2e} \left(2 \frac{h^2 \dot{\epsilon}}{\mu^2} + 4 \frac{\epsilon h \dot{h}}{\mu^2} \right)$$

Teniendo en cuenta que de acuerdo a la Ec. (7.17):

$$\frac{2\epsilon h^2}{\mu^2} = e^2 - 1$$

la variación en la excentricidad se puede escribir como:

$$\dot{e} = \frac{e^2 - 1}{2e} \left(\frac{\dot{\epsilon}}{\epsilon} + 2 \frac{\dot{h}}{h} \right) \quad (7.99)$$

La tasa de variación del momento angular específico se puede calcular con la ayuda de la torca (ver Sección 5.3.1):

$$\dot{\vec{h}} = \vec{r} \times \Delta \vec{f} = rT\hat{e}_h - rN\hat{e}_v$$

Por otro lado si escribimos $\dot{\vec{h}} = \dot{h}\hat{e}_h$, y admitimos que la fuerza perturbadora puede cambiar la inclinación y orientación del plano, es decir $\dot{\hat{e}}_h \neq \vec{0}$:

$$\dot{\vec{h}} = \dot{h}\hat{e}_h + h\dot{\hat{e}}_h$$

La comparación de estas dos últimas ecuaciones permite escribir:

$$\dot{h} = rT$$

Reemplazando esta expresión y la Ec. (7.97) en la Ec. (7.99) obtenemos finalmente:

$$\dot{e} = 2\sqrt{\frac{a(1-e^2)}{\mu}} [eR \sin f + T(\cos f + \cos E)] \quad (7.100)$$

donde además hemos usado el hecho que $r = a(1 - e \cos E)$.

Como sucedió con el tamaño, la forma de la órbita, parametrizada por la excentricidad e no depende de la componente normal de la fuerza perturbadora.

7.14.3. Perturbaciones de la orientación

De manera análoga a como fueron deducidas en las secciones anteriores las tasas de cambio en el tamaño a y la forma e de la órbita osculatrix, es posible obtener ecuaciones para las tasas de cambio de los parámetros orbitales que describen su orientación en el espacio, i , Ω y ω .

En aras de la brevedad y siendo esta sección apenas una introducción a la teoría de perturbaciones, reproducimos abajo las ecuaciones correspondientes. Una deducción detallada (y no muy difícil realmente) puede encontrarse en el artículo clásico de Burns [11] o en el reconocido texto de Murray y Dermott [36].

La tasa de cambio de los parámetros de orientación de la órbita está dada por:

$$\dot{i} = \sqrt{\frac{a(1-e^2)}{\mu}} \frac{\cos(\omega + f)}{1 + e \cos f} N \quad (7.101)$$

$$\dot{\Omega} = \sqrt{\frac{a(1-e^2)}{\mu}} \frac{\sin(\omega + f)}{\sin i(1 + e \cos f)} N \quad (7.102)$$

$$\dot{\omega} = \frac{1}{e} \sqrt{\frac{a(1-e^2)}{\mu}} \left[-R \cos f + T \sin f \frac{2 + e \cos f}{1 + e \cos f} \right] - \dot{\Omega} \cos i \quad (7.103)$$

7.14.4. Ecuación de la órbita osculatrix

En todas las ecuaciones anteriores aparecen explícitas las componentes de la fuerza perturbadora $\Delta \vec{f}$. Pero ¿dónde aparece en estas ecuaciones la fuerza central

de magnitud μ/r^2 que domina el movimiento relativo del sistema? El efecto de esta fuerza se ha hecho implícito al asumir, de un lado, que la ecuación de la trayectoria es:

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos f}$$

y que instantáneamente se satisface la relación:

$$h = r^2 \dot{f}$$

Ambas ecuaciones son justamente el resultado de la integración de las ecuaciones de movimiento del problema relativo.

Despejando \dot{f} en la última ecuación y usando la ecuación de la trayectoria escrita antes, podemos finalmente escribir la ecuación:

$$\dot{f} = \sqrt{\frac{\mu}{a^3(1-e^2)^3}} (1+e\cos f)^2 \quad (7.104)$$

En síntesis, las ecuaciones (7.98), (7.100), (7.101), (7.102), (7.103) y (7.104), ofrecen una descripción completa del movimiento en el tiempo de un cuerpo sometido a una fuerza central con parámetro gravitacional μ y perturbado por una pequeña fuerza $\Delta \vec{f} = T\hat{e}_r + R\hat{e}_\theta + N\hat{e}_h$.

Estas ecuaciones constituyen un problema de valor inicial (IVP) en el que dados un conjunto de elementos orbitales iniciales $(a_0, e_0, i_0, \Omega_0, \omega_0, f_0)$ y una vez especificada la manera como las componentes de la fuerza perturbadora depende del estado del sistema, es posible calcular los elementos orbitales y de allí el estado del sistema en cualquier instante del tiempo futuro.

La implicaciones teóricas de estas ecuaciones están más allá del nivel de este libro y se desarrollan como parte de la teoría general de perturbaciones. En la siguiente sección ilustraremos, con la ayuda de las herramientas algorítmicas vistas en el libro, su aplicación en casos particulares.

7.14.5. Un ejemplo numérico

Consideremos por ejemplo el siguiente sistema jerárquico de tres cuerpos:

(Algoritmo 7.19)

```
from numpy import array
sistema=[

    dict(
        m=1.0,
        r=array([0,0,0]),
        v=array([0,0,0]),
    ),
    dict(
        m=1e-8,
        r=array([1,1,0]),
        v=array([0.2,0.8,0.2]),
    ),
]
```

```

dict(
    m=1e-5,
    r=array([2,0,0]),
    v=array([0,0.8,0]),
),
]

#Trayectoria numérica
from numpy import linspace
t0=0.0
T=100.0;Nt=1000
ts=linspace(t0,T,Nt)

from pymcel.export import ncuerpos_solucion
rs_num,vs_num,rps_num,vps_num,constantes=ncuerpos_solucion(sistema,ts)

#Grafico
from pymcel.export import plot_ncuerpos_3d
fig=plot_ncuerpos_3d(rps_num,vps_num)

```

ver Figura 7.27

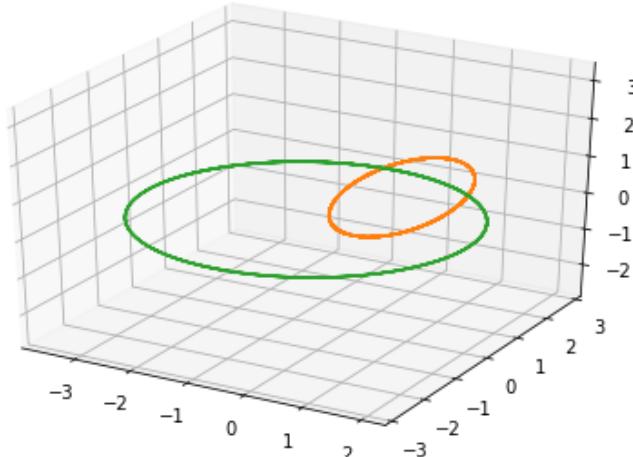


Figura 7.27: Figura correspondiente al código 7.19.

Como vemos en la Figura 7.27 el sistema está formado por una gran masa central (la partícula 0), rodeada de dos cuerpos, uno muy ligero (la partícula 1) que se encuentra en una órbita interior inclinada y otro de masa intermedia (la partícula 2) cuya órbita coincide aproximadamente con el plano $x - y$. Nos proponemos aquí predecir aproximadamente el movimiento de las partículas del sistema, usando la teoría de los dos cuerpos y la teoría básica de perturbaciones introducida en esta sección.

Como lo hicimos en secciones anteriores, lo primero que debemos hacer es identificar los subsistemas en los que puede descomponerse este sistema jerárquico. En la Figura 7.27 reconocemos que se trata de un *sistema central*, usando las categoría que introdujimos en la ??, que puede descomponerse en dos subsistemas:

- Un sistema A formado por la partícula 0 (cuerpo central) y la partícula 1, la más liviana
- Un sistema B formado por el cuerpo central y la partícula 2.

Usando la solución numérica a las ecuaciones de movimiento obtenidas en el Alg. (7.19), podemos calcular y visualizar la evolución de los elementos orbitales del sistema A:



(Algoritmo 7.20)

```
#Estado del sistema A
muA=sistema[0] ["m"]+sistema[1] ["m"]
r_A=rs_num[0,:,:]-rs_num[1,:]
v_A=vs_num[0,:,:]-vs_num[1,:]

#Calculo de los elementos orbitales
EAs=[]
for i,t in enumerate(ts):
    from spiceypy import oscelt
    EAs+= [oscelt(list(r_A[i])+list(v_A[i]),t,muA)]
from numpy import array
EAs=array(EAs)

#Gráfico
import matplotlib.pyplot as plt
fig,axs=plt.subplots(5,1,figsize=(5,8),sharex=True)
from numpy import pi

#Periapsis
axs[0].plot(ts,EAs[:,0])
axs[0].set_ylabel("$q$ (u.c.)")
#Excentricidad
axs[1].plot(ts,EAs[:,1])
axs[1].set_ylabel("$e$ (u.c.)")
#Inclinación
axs[2].plot(ts,EAs[:,2]*180/pi)
axs[2].set_ylabel("$i$ (grados)")
#Longitud del nodo ascendente
axs[3].plot(ts[:,],EAs[:,3]*180/pi)
axs[3].set_ylabel("$\Omega$ (grados)")
#Argumento del periapsis
axs[4].plot(ts[:,],EAs[:,4]*180/pi)
axs[4].set_ylabel("$\omega$ (grados)")

#Decoración
axs[0].set_title("Elementos orbitales partícula 1")
axs[-1].set_xlabel("$t$ (u.c.)")
```

```
fig.tight_layout()
```

ver Figura 7.28

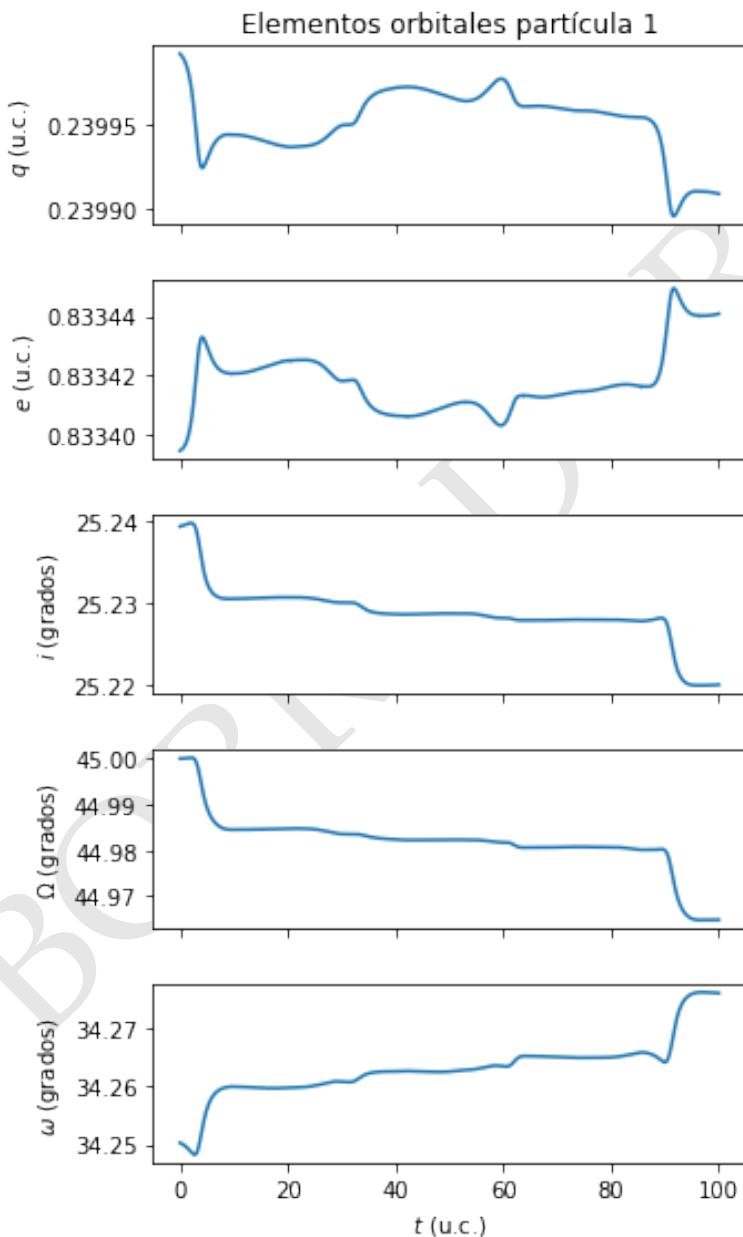


Figura 7.28: Figura correspondiente al código 7.20.

Como vemos en la Figura 7.28 el movimiento de la partícula más ligera no es

para nada *Kepleriano*. Sus elementos orbitales cambian sin una periodicidad reconocible y como producto de las perturbaciones producidas por la partícula masiva en la órbita externa.

Por su parte, una gráfica de la posición del sistema B (la partícula 2), pone en evidencia que su órbita es Kepleriana, al menos durante el tiempo de integración, y que los efectos perturbadores producidos por la presencia de la partícula 1 son despreciables:

(Algoritmo 7.21)

```
#Estado del sistema B
muB=sistema[0][ "m"]+sistema[2][ "m"]
r_B=rs_num[0,:]-rs_num[2,:]
v_B=vs_num[0,:]-vs_num[2,:]

#Gráfico
import matplotlib.pyplot as plt
fig=plt.figure();
ax=fig.gca();
ax.plot(r_B[:,0],r_B[:,1]);

#
from pymcel.plot import fija_ejes_proporcionales
fija_ejes_proporcionales(ax,r_B);
```

ver Figura 7.29

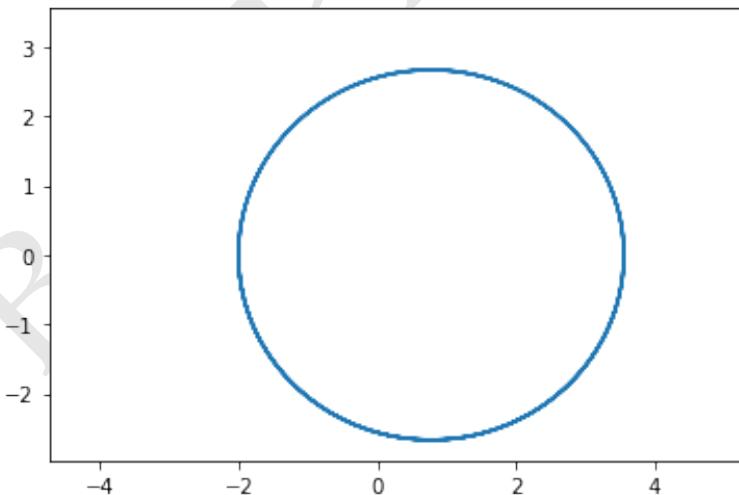


Figura 7.29: Figura correspondiente al código 7.21.

Así pues, la posición de la partícula 2 puede ser predicha con precisión usando únicamente la solución al problema de los dos cuerpos. Por su lado, para calcular la posición de la partícula 1 será necesario resolver el sistemas de ecuaciones

diferenciales encontradas en la sección anterior.

Para hacerlo usando los métodos y herramientas que vimos en la Sección 4.1.9, es necesario primero escribir el sistema en la forma reducida (Ec. 4.27) y para ello, debemos definir la identificación de las variables del sistema con las variables auxiliares $\{Y_i\}$. Una posible identificación es esta:

$$Y_0 = f, Y_1 = a, Y_2 = e, Y_3 = i, Y_4 = \Omega, Y_5 = \omega$$

El aspecto más complicado de la implementación de las ecuaciones de perturbación es el cálculo de las componentes de la fuerza perturbadora. Para ello es necesario calcular, en cada momento, la posición de la partícula 2 y con ella la fuerza sobre la partícula 1:

$$\Delta \vec{f} = -\frac{\mu_2}{r_{12}^3} \vec{r}_{12}$$

Las componentes de la fuerza perturbadora se pueden obtener proyectando el vector $\Delta \vec{f}$ sobre los vectores \vec{r} , \vec{v} y \vec{h} :

$$\begin{aligned} R &= \frac{\Delta \vec{f} \cdot \vec{r}}{r} \\ T &= \frac{\Delta \vec{f} \cdot \vec{v}}{v} \\ N &= \frac{\Delta \vec{f} \cdot \vec{h}}{h} \end{aligned} \tag{7.105}$$

```
from scipy.interpolate import interp1d
x_A_pred=interp1d(ts,r_A[:,0],kind='slinear')
y_A_pred=interp1d(ts,r_A[:,1],kind='slinear')
z_A_pred=interp1d(ts,r_A[:,2],kind='slinear')
vx_A_pred=interp1d(ts,v_A[:,0],kind='slinear')
vy_A_pred=interp1d(ts,v_A[:,1],kind='slinear')
vz_A_pred=interp1d(ts,v_A[:,2],kind='slinear')
X_A_pred=lambda t:array([x_A_pred(t),y_A_pred(t),z_A_pred(t),vx_A_pred(t),vy_A_pred(t),vz_A_pred(t)])
x_B_pred=interp1d(ts,r_B[:,0],kind='slinear')
y_B_pred=interp1d(ts,r_B[:,1],kind='slinear')
z_B_pred=interp1d(ts,r_B[:,2],kind='slinear')
vx_B_pred=interp1d(ts,v_B[:,0],kind='slinear')
vy_B_pred=interp1d(ts,v_B[:,1],kind='slinear')
vz_B_pred=interp1d(ts,v_B[:,2],kind='slinear')
X_B_pred=lambda t:array([x_B_pred(t),y_B_pred(t),z_B_pred(t),vx_B_pred(t),vy_B_pred(t),vz_B_pred(t)])
r_teo=[]
rP_teo=[]
def ecuaciones_lagrange(Y,t,mu,muP,mP,XP,verbose=0):
    global r_teo,rP_teo
    #Elementos orbitales
```

```
f,a,e,i,W,w=Y
if verbose:
    print(f"t = {t}")
    print(f"f = {f}")
    print(f"a,e = {a,e}")
    print(f"i,W,w = {i,W,w}")

q=a*(1-e)
p=a*(1-e**2)
smup=sqrt(mu/p)
if verbose:
    print(f"q = {q}")
    print(f"p = {p}")
    print(f"sqrt(mu/p) = {smup}")

#Anomalia excéntrica
from numpy import arctan
E=2*arctan(sqrt((1-e)/(1+e))*tan(f/2))

#Anomalia media
from numpy import sin
M=E-e*sin(E)

if verbose:
    print(f"E = {E}")
    print(f"M = {M}")

#Vector de estado instantaneo de la partícula
from spiceypy import conics
X=conics([q,e,i,W,w,M,t,mu],t)
r=X[:3]
v=X[3:]
r_teo+=[r]
if verbose:
    print(f"r = {r}")
    print(f"v = {v}")
from numpy import cross
hvec=cross(r,v)
from numpy.linalg import norm
h=norm(hvec)
if verbose:
    print(f"hvec = {hvec} ({h})")

#Vector de estado del perturbador
from spiceypy import prop2b
X=prop2b(muP,XP,t)
rP=X[:3]
vP=X[3:]
rP_teo+=[rP]
if verbose:
    print(f"mu_P = {muP}")
    print(f"r_P = {rP}")
```

```

print(f"v_P = {vP}")

#Fuerza perturbadora
rrel=r-rP
Deltaf=-mP*rrel/norm(rrel)**3
if verbose:
    print(f"m_P = {mP}")
    print(f"r_rel = {rrel}")
    print(f"Delta f = {Deltaf}")

#Componentes de la fuerza perturbadora
from numpy import dot
R=dot(Deltaf,r)/norm(r)
T=dot(Deltaf,v)/norm(v)
N=dot(Deltaf,hvec)/h
if verbose:
    print(f"R = {R}")
    print(f"T = {T}")
    print(f"N = {N}")

#Ecuaciones
from numpy import cos
dotf=sqrt(mu/(a**3*(1-e**2)**3))*(1+e*cos(f))**2
if verbose:print(f"dotf={dotf}")
dota=2*sqrt(a**3/(mu*(1-e**2)))*(e*R*sin(f)+T*(1+e*cos(f)))
if verbose:print(f"dota={dota}")
dote=1/smup*(R*sin(f)+T*(cos(f)+cos(E)))
if verbose:print(f"dote={dote}")
doti=1/smup*cos(w+f)*N/(1+e*cos(f))
if verbose:print(f"doti={doti}")
dotW=1/smup*sin(w+f)*N/(sin(i)*(1+e*cos(f)))
if verbose:print(f"dotW={dotW}")
dotw=1/(e*smup)*(-R*cos(f)+T*sin(f)*(2+e*cos(f))/(1+e*cos(f))-dotW*cos(i))
if verbose:print(f"dotw={dotw}")
if verbose:print("--End--")
return [dotf,dota,dote,doti,dotW,dotw]

```

Para integrar estas ecuaciones diferenciales debemos primero encontrar las condiciones iniciales:

```

#Elementos orbitales iniciales
qA,eA,iA,WA,wA,MA0,t0,muA=EAs[0]
aA=qA/(1-eA)

#Resuelve la ecuación de Kepler
from pymcel.export import kepler_newton
EA,error,ni=kepler_newton(MA0,eA,1e-14)

#Anomalía verdadera
from numpy import sqrt,arctan,tan
fA=2*arctan(sqrt((1+eA)/(1-eA))*tan(EA/2))

```

```
#Condiciones iniciales
Y0=[fA,aA,eA,iA,WA,WA]

#Vector de estado inicial del perturbador
muP=sistema[2]["m"]
XP=list(r_B[0])+list(v_B[0])
```

Condiciones iniciales del sistema A:

```
q = 0.23999201888165864
f = 145.7497370534556
E = 88.74633104932957
M = 41.007785890002175
a = 1.4404789013486834
e = 0.8333942839031101
i = 25.239401820678914
W = 45.0
w = 34.25026295986933
muP = 1e-05
XP = [-2. 0. 0. 0. -0.8 0.]
```

Usando el valor de estos elementos orbitales podemos finalmente escribir las condiciones iniciales y resolver las ecuaciones diferenciales de perturbación:

```
#iev=40;ecuaciones_lagrange(Y0,ts[iev],muA,muB,muP,XP,verbose=1)
from scipy.integrate import odeint
solucion=odeint(ecuaciones_lagrange,Y0,ts,args=(muA,muB,muP,XP))
from numpy import array
r_teo=array(r_teo)
rP_teo=array(rP_teo)
```

Una gráfica de la solución se muestra a continuación:

(Algoritmo 7.22)

```
import matplotlib.pyplot as plt
fig,axs=plt.subplots(5,1,figsize=(5,8),sharex=True)

#Elementos
aes=solucion[:,1]
es=solucion[:,2]
qs=aes*(1-es)
ies=solucion[:,3]
Ws=solucion[:,4]
ws=solucion[:,5]

#Periapsis
axs[0].plot(ts,qs,label="Teoría Básica de Pert.")
axs[0].set_ylabel("$q$ (u.c.)")
axs[0].plot(ts,EAs[:,0],label="Numérico")
#Excentricidad
axs[1].plot(ts,es)
axs[1].set_ylabel("$e$ (u.c.)")
```

```

axs[1].plot(ts,EAs[:,1])
#Inclinación
axs[2].plot(ts,ies*180/pi)
axs[2].set_ylabel("$i$ (grados)")
axs[2].plot(ts,EAs[:,2]*180/pi)
#Longitud del nodo ascendente
axs[3].plot(ts[:,],Ws*180/pi)
axs[3].set_ylabel("$\Omega$ (grados)")
axs[3].plot(ts[:,],EAs[:,3]*180/pi)
#Argumento del periapsis
axs[4].plot(ts[:,],ws*180/pi)
axs[4].set_ylabel("$\omega$ (grados)")
axs[4].plot(ts[:,],EAs[:,4]*180/pi)
#Periapsis

#Decoración
axs[-1].set_xlabel("$t$ (u.c.)")
axs[0].legend(fontsize=8)
fig.tight_layout()

```

ver Figura 7.30

7.15. El problema de los dos cuerpos en SPICE

Algunos de los procedimientos descritos en este capítulo han sido implementados en la biblioteca de rutinas de SPICE. Las siguientes son las rutinas disponibles en dicho sistema para realizar tareas relacionadas con el problema de dos cuerpos:

- **osceلت(X,t,mu):** Calcula los elementos orbitales de la órbita osculatrix (ver [Sección 7.9.3](#)) correspondiente con el vector de estado X. Esta rutina devuelve los siguientes elementos (en ese orden): $q, e, i, \Omega, \omega, M$, donde q es la distancia al periapsis y M es la anomalía media (elíptica o hiperbólica.) Todos los ángulos son calculados en radianes. La rutina devuelve además el valor de t y de μ , que aunque son los mismos que los provistos en la entrada, permiten tener una salida consistente con la rutina **conics** descrita más abajo. Esta rutina realiza el mismo trabajo que la rutina **estado_a_elementos** descrita en la [Sección 7.9.1](#).
- **osceltx(X,t,mu):** Esta rutina hace lo mismo que **osceلت** pero devuelve una lista extendida de elementos orbitales, en este orden: $q, e, i, \Omega, \omega, M, t, \mu, f$ (anomalía verdadera), a, T (período orbital, cuando es posible calcularlo.)
- **conics(E,t):** Calcula el vector de estado en el tiempo t correspondiente a la cónica con elementos orbitales E: $q, e, i, \Omega, \omega, M_0, t_0, \mu$; donde t_0 y M_0 son el tiempo y la anomalía media correspondiente a los elementos provistos. La rutina devuelve el vector de estado. Esta rutina realiza, parcialmente, el mismo trabajo que la rutina **elementos_a_estado** descrita en la ??, con la diferencia que además y a diferencia de nuestra rutina que solo hace una transformación geométrica, **conics** también realiza la propagación del estado en el tiempo.

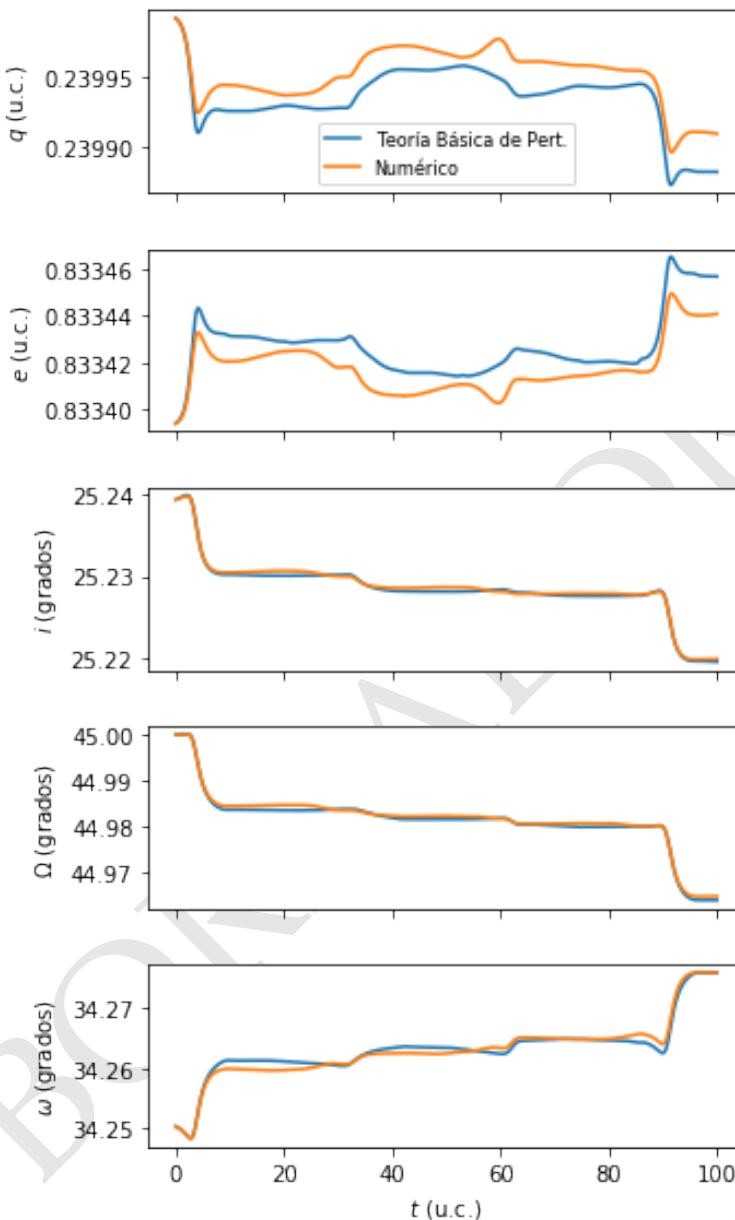


Figura 7.30: Figura correspondiente al código 7.22.

- `prop2b(mu, X0, dt)`: Propaga el estado inicial $X0$ del vector relativo de un sistema con parámetro gravitacional μ por un tiempo $dt=t-t_0$. Esta rutina utiliza internamente el formalismo de variables universales que hemos esbozado en las últimas secciones. La rutina devuelve el estado relativo en el tiempo t . Esta rutina realiza el mismo trabajo que la rutina `propaga_f_g` descrita en la Sección 7.12.1.



Nota

Singularidades y errores. El lector más curioso podrá preguntarse si las rutinas de descritas aquí ya habían sido implementadas en distintos apartes en este capítulo, cuál puede ser entonces el interés de introducir las rutinas específicas de SPICE. Hay dos razones fundamentales para hacerlo. La primera es que las rutinas del sistema de NASA tienen una larga historia de desarrollo y pruebas que las hace muy confiables. Podemos usar esas rutinas para comprobar las que desarrollemos por nuestra cuenta.

La segunda razón y en realidad la más importante es que las transformaciones estudiadas en este capítulo (de elementos a vector de estado, de vector de estado a elementos, de vector de estado a vector de estado) tienen algunas limitaciones numéricas. Así por ejemplo, los elementos osculatrices calculados a partir del vector de estado pueden ser muy inciertos cuando la inclinación es cercana a cero o a 180° o cuando la excentricidad es muy cercana a 1. La solución a la ecuación universal de Kepler en g (usada por nuestras rutinas y por las rutinas de SPICE) debe calcularse con precaución para valores grandes del tiempo (en los que la precisión numérica de las series de Stumpff puede estar muy limitada.) Si bien las rutinas de SPICE no necesariamente corrijen todos esos inconvenientes, el sistema viene dotado de mecanismos de control de errores que no hemos implementado en las rutinas desarrolladas en y para el libro.

A continuación mostramos algunos ejemplos del uso de estas rutinas y comparamos sus resultados con las rutinas desarrolladas en este capítulo. Usaremos para ello el sistema de ejemplo introducido en la [Sección 7.11.1](#).

Para usar las rutinas de SPICE debemos primero construir el vector de estado inicial:

```
#Sistema
from numpy import array
t0=0
sistema=[  
    dict(m=1.0,  
        r=array([0.0,0.0,+0.3]),  
        v=array([+1.0,0.0,0.5])),  
    dict(m=0.5,  
        r=array([+1.0,0.0,0.0]),  
        v=array([0.0,+1.0,0.0])),  
]  
  
#Condiciones iniciales
m1=sistema[0]["m"]
r1_0=sistema[0]["r"]
v1_0=sistema[0]["v"]
```

```

m2=sistema[1]["m"]
r2_0=sistema[1]["r"]
v2_0=sistema[1]["v"]

mu=m1+m2

#Posición y velocidad relativa inicial
rvec0=r1_0-r2_0
vvec0=v1_0-v2_0

#Vector de estado inicial
from numpy import append
X0=append(rvec0,vvec0)

X0 = [-1.    0.    0.3   1.   -1.    0.5]

```

Calculemos los elementos orbitales correspondientes a este estado:

```

from spiceypy import oscelt
q,e,i,W,w,M0,t0,mu=oscelt(X0,t0,mu)

q = 0.669944
e = 0.721536
Inclinación = 40.5106 grados
Longitud del nodo ascendente = 159.444 grados
Argumento del periapsis = 107.911 grados
Anomalía media = 347.311 grados

```

Que coincide con los resultados que obtuvimos en la [Sección 7.9.4](#). Una buena manera de verificar si los resultados producidos por esta rutina son correctos es invocar su inversa `conics`:

```

from spiceypy import conics
X0=conics([q,e,i,W,w,M0,t0,mu],t0)

X0 = [-1.    0.    0.3   1.   -1.    0.5]

```

Que coincide con el estado inicial. Finalmente podemos propagar este estado hasta $t = 10$ como lo hicimos en secciones anteriores:

```

#Tiempo de propagación
t0=0.0
t=10.0
dt=t-t0

from spiceypy import prop2b
X=prop2b(mu,X0,dt)

```

Estado final: [-0.0642266 3.2416631 -2.5740625 -0.3095438 0.0535113 0.0500541]

Que de nuevo, coincide con los resultados obtenidos en el Alg. [\(??\)](#). La propagación también puede hacerse con la rutina `conics`:

```
X=conics([q,e,i,W,w,M0,t0,mu],t)
```

```
Estado final: [-0.0642266  3.2416631 -2.5740625 -0.3095438  0.0535113  0.0500541]
```

Que como era de esperarse coincide con los resultados anteriores.

BORRADOR

7.16. Problemas seleccionados

1. **Excentricidad máxima.** Un asteroide posee un semieje mayor de 3.2 AU. Encontrar la máxima excentricidad de su órbita tal que esta no cruce la de la Tierra. Asuma que la órbita terrestre tiene excentricidad cero.

1. Solución

La excentricidad de la órbita del asteroide, para que no se cruce con la de la tierra, debe ser tal que su distancia al perihelio, $a(1 - e)$, sea como mínimo del tamaño de la órbita de la Tierra, $R_{Tierra} = 1$ AU. Esto es,

$$e \leq 1 - \frac{R_{Tierra}}{a} = 0,69.$$

2. Momentum angular y energía total.

- a. Demuestre que el momentum angular \vec{L} de un sistema de dos cuerpos de masas m_1 y m_2 , visto desde el centro de masa, se puede calcular como el momentum angular de una masa m_r en una posición que coincide con la posición relativa entre las partículas \vec{r} y con una velocidad que coincide con su derivada, $\dot{\vec{r}}$:

$$\vec{L} = m_r \vec{h},$$

en donde

$$m_r = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

y $\vec{h} = \vec{r} \times \dot{\vec{r}}$ es el momentum angular específico del sistema visto desde la solución relativa del problema de los dos cuerpos. Dicho de otra manera, demuestre que el momento angular específico del sistema visto desde la solución relativa del problema de los dos cuerpos, \vec{h} , es igual al momento angular total del sistema, \vec{L} , por unidad de masa reducida, m_r .

- b. Demuestre que con la energía total del sistema E y la energía específica del sistema relativo ϵ pasa lo mismo. Es decir, que el la energía específica del sistema visto desde la solución relativa del problema de los dos cuerpos, ϵ , es igual a la energía total del sistema, E , por unidad de masa reducida, m_r :

$$E = m_r \epsilon$$

2. Solución

- a. Recordemos que, de la solución del problema de los dos cuerpos, teníamos que

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_{CM} - \frac{m_2}{M} \vec{r}, \quad \vec{r}_2 = \vec{r}_{CM} + \frac{m_1}{M} \vec{r},$$

donde $M = m_1 + m_2$. Si escogemos el origen inercial en el centro de masa, tal que $\vec{r}_{CM} = 0$, se sigue que

$$\vec{r}_1 = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r}, \quad \vec{r}_2 = +\frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}, \quad |\vec{r}_2 - \vec{r}_1| = |\vec{r}| = r,$$

de tal manera que

$$\vec{L} = m_1 \vec{r}_1 \times \dot{\vec{r}}_1 + m_2 \vec{r}_2 \times \dot{\vec{r}}_2 \quad (7.106)$$

$$= m_1 \left(-\frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r} \right) \times \left(-\frac{m_2}{m_1 + m_2} \dot{\vec{r}} \right) + m_2 \left(+\frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r} \right) \times \left(+\frac{m_1}{m_1 + m_2} \dot{\vec{r}} \right) \quad (7.107)$$

$$= \frac{m_1 m_2^2}{(m_1 + m_2)^2} \vec{r} \times \dot{\vec{r}} + \frac{m_1^2 m_2}{(m_1 + m_2)^2} \vec{r} \times \dot{\vec{r}} \quad (7.108)$$

$$= \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} (m_1 + m_2) \vec{r} \times \dot{\vec{r}}. \quad (7.109)$$

Pero $\vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \vec{h}$, por lo que

$$L = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} h.$$

b. De igual manera,

$$E = \frac{1}{2} m_1 \dot{r}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{r}_2^2 - \frac{G m_1 m_2}{r} = \frac{1}{2} m_1 \frac{m_2^2}{(m_1 + m_2)^2} \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m_2 \frac{m_1^2}{(m_1 + m_2)^2} \dot{r}^2 - \frac{G m_1 m_2}{r}.$$

Si sacamos factor común $m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$, se sigue

$$E = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \left(\frac{1}{2} \frac{m_2}{m_1 + m_2} \dot{r}^2 + \frac{1}{2} \frac{m_1}{m_1 + m_2} \dot{r}^2 - \frac{G (m_1 + m_2)}{r} \right) = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \left(\frac{1}{2} \dot{r}^2 - \frac{G (m_1 + m_2)}{r} \right).$$

Debido a que, por definición, $\dot{r}^2 = v^2$ y $G (m_1 + m_2) = \mu$, y sabemos que $\epsilon = v^2/2 - \mu/r$, obtenemos lo pedido:

$$E = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \left(\frac{1}{2} v^2 - \frac{\mu}{r} \right) = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \epsilon.$$

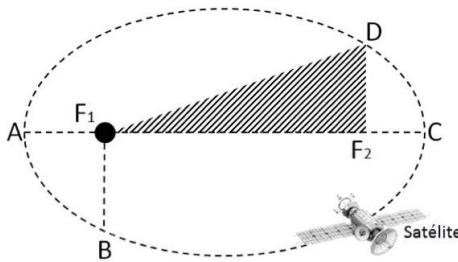


Figura 7.31: Representación esquemática de la trayectoria elíptica de un satélite.

3. **Segunda ley de Kepler.** En la Figura 7.31 un satélite gira en torno a un planeta ubicado en el foco F_1 empleando 18 meses. Si el tiempo para ir de A hacia B es de 1 mes, y de C hasta D es de 3 meses, ¿qué parte de toda la elipse es la región sombreada? F_2 corresponde al segundo foco.

3. Solución

El segundo teorema de Newton del movimiento planetario indica que la velocidad areal es constante, de tal forma que el área barrida en cierto tiempo se puede escribir en función del tiempo que tarda en hacerlo: $\Delta A = k\Delta t$ (sabemos que $k = h/2$, la mitad del momento angular específico, pero dejémoslo como k por facilidad). Así, $A_{ABF_1} = k \times 1$ mes y $A_{CDF_1} = k \times 3$ meses. Por simetría de la elipse, aunque el área CDF_2 no sea barrida por el radio vector posición del satélite, también tenemos $A_{CDF_2} = k \times 1$ meses, de tal forma que el área pedida $A_{DF_1F_2} = k \times 2$ meses. Debido a que el área de toda la elipse es $A_{total} = k \times 18$ meses, la región sombreada corresponde a $2/18 = 1/9$ de toda la elipse.

4. **Orbitas Cometarias.** Las órbitas cometarias usualmente tienen altas excentricidades (cercanas a la unidad o incluso mayores). El cometa Halley tiene un período orbital de 76 años y una excentricidad de $e = 0,9673$. De acuerdo con estos datos responda:
- Asumiendo conocida la masa del Sol encuentre el semieje mayor del cometa Halley.
 - ¿Cuál es la distancia desde el centro geométrico de su órbita al Sol?
 - Calcule la distancia del cometa desde el Sol al perihelio y desde el Sol al afelio.
 - Determine la razón v_p/v_a entre las velocidades en el perihelio y en el afelio.

4. Solución.

- a. Recordemos el corolario del segundo teorema de Newton para el movimiento planetario de la forma

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{\mu} a^3,$$

en donde $T = 76$ años = $2,4 \times 10^9$ s, $\mu \approx GM_{\odot} = 1,3 \times 10^{20}$ N m²/kg (la masa del Halley es prácticamente despreciable con respecto a la del Sol) y a es lo que queremos (debido a que, en este caso, el movimiento relativo corresponde prácticamente al movimiento del Halley). Despejando,

$$a = \left(\frac{\mu T^2}{4\pi^2} \right)^{1/3} = 2,7 \times 10^{12} \text{ m} = 18 \text{ AU.}$$

- b. Recordemos que la distancia desde el centro geométrico de un órbita elíptica a su foco (Sol) es

$$ae = 2,6 \times 10^{12} \text{ m} = 17 \text{ AU.}$$

- c. Recordemos que la distancia desde el foco al perihelio es

$$r_p = a(1 - e) = 8,7 \times 10^{10} \text{ m} = 0,58 \text{ AU}$$

y que la distancia desde el foco al afelio es

$$r_a = a(1 + e) = 5,2 \times 10^{12} \text{ m} = 35 \text{ AU.}$$

- d. Recordemos, por último, la ecuación *vis-viva*:

$$v^2 = \mu \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right).$$

De esta manera, las rapideces en el perihelio y en el afelio están dadas por

$$v_p = \sqrt{\mu \left(\frac{2}{r_p} - \frac{1}{a} \right)} = \sqrt{\frac{\mu(1+e)}{a(1-e)}} \quad \text{y} \quad v_a = \sqrt{\mu \left(\frac{2}{r_a} - \frac{1}{a} \right)} = \sqrt{\frac{\mu(1-e)}{a(1+e)}}$$

y su razón por

$$\frac{v_p}{v_a} = \frac{\sqrt{\frac{\mu(1+e)}{a(1-e)}}}{\sqrt{\frac{\mu(1-e)}{a(1+e)}}} = \frac{1+e}{1-e} = 60.$$

5. **Excentricidad de la órbita de los dos cuerpos.** Partiendo de la definición del vector LRL

$$\vec{A} = \dot{\vec{r}} \times \vec{h} - \mu \hat{r}$$

y sabiendo que el vector de excentricidad se define como

$$\vec{e} = \frac{\vec{A}}{\mu},$$

demuestre que la magnitud de este vector (la excentricidad de la órbita) se escribe como

$$e = \sqrt{1 + \frac{2\bullet h^2}{\mu^2}},$$

donde \bullet es la energía específica del sistema de dos cuerpos $\bullet = v^2/2 - \mu/r$, h es la magnitud del momentum angular específico y $\mu = GM$, siendo $M = m_1 + m_2$ la masa total del sistema.

5. Solución

Dado que $\vec{h} = h\hat{k}$, entonces

$$\dot{\vec{r}} \times \vec{h} = (\dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}) \times h\hat{k} = -\dot{r}h\hat{\theta} + r\dot{\theta}h\hat{r}.$$

Así,

$$\vec{e} = \frac{-\dot{r}h\hat{\theta} + r\dot{\theta}h\hat{r}}{\mu} - \hat{r} = \left(\frac{r\dot{\theta}h}{\mu} - 1 \right) \hat{r} - \frac{\dot{r}h}{\mu} \hat{\theta}$$

y

$$e^2 = \left(\frac{r\dot{\theta}h}{\mu} - 1 \right)^2 + \left(\frac{\dot{r}h}{\mu} \right)^2 = \frac{r^2\dot{\theta}^2h^2}{\mu^2} - \frac{2h^2}{\mu r} + 1 + \frac{\dot{r}^2h^2}{\mu^2} = \frac{h^2}{\mu^2} \left(r^2\dot{\theta}^2 + \dot{r}^2 \right) - \frac{2h^2}{\mu r} + 1.$$

Dado que $v^2 = r^2\dot{\theta}^2 + \dot{r}^2$,

$$e^2 = \frac{h^2}{\mu^2} v^2 - \frac{2h^2}{\mu r} + 1 = \frac{2h^2}{\mu^2} \left(\frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} \right) + 1 = \frac{2h^2}{\mu^2} \epsilon + 1,$$

quedando demostrado que

$$e = \sqrt{1 + \frac{2\epsilon h^2}{\mu^2}}$$

6. **Propiedades orbitales de un Centauro.** Cierta cuerda en el Sistema Solar se mueve en una órbita elíptica de semieje menor $b = 2,62588 \times 10^9$ km y con un período orbital de 84,02 años. Calcule:
- La excentricidad de la órbita.
 - El momentum angular por unidad de masa h .
 - La distancia al perihelio y al afelio.
 - La energía específica de la órbita.

6. Solución

- De igual forma que en el punto 6, el semieje mayor de la órbita de un cuerpo orbitando al Sol está dado por el corolario del segundo teorema del movimiento planetario de Newton:

$$a = \left(\frac{\mu T^2}{4\pi^2} \right)^{1/3} = 2,626 \times 10^{12} \text{ m} = 2,868 \times 10^9 \text{ km.}$$

Así, la excentricidad de la órbita viene dada por

$$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = 0,4022.$$

- Por el segundo teorema del movimiento de Newton, sabemos que la velocidad areal es igual a la mitad del momento angular específico $h/2$. particularmente, el área de una elipse es πab y el tiempo que tarda este cuerpo en trazar dicha órbita es $T = 84,02$ años = $2,650 \times 10^9$ s, por lo que

$$h = \frac{2\pi ab}{T} = 1,786 \times 10^{16} \text{ m}^2/\text{s.}$$

- Las distancias al perihelio y al afelio están dadas por

$$r_p = a(1 - e) = 1,715 \times 10^{12} \text{ m} = 11,46 \text{ AU} \quad y \quad r_a = a(1 + e) = 4,022 \times 10^{12} \text{ m} = 26,50 \text{ AU}$$

- d. La energía específica de la órbita ϵ se puede obtener a partir de la expresión

$$\epsilon = -\frac{\mu}{2a} = -2,313 \times 10^7 \text{ m}^2/\text{s}^2.$$

7. **Elementos orbitales.** Un satélite en órbita alrededor de la Tierra tiene una posición instantánea $\vec{r} = 6075,0\hat{i} + 3190,0\hat{j} + 0\hat{k}$ km y una velocidad $\vec{v} = -1,957\hat{i} + 5,818\hat{j} + 3,033\hat{k}$ km/s. Determine los elementos orbitales asumiendo que el plano fundamental es el ecuador terrestre.

7. Solución

Miremos, primero, que $\vec{h} = \vec{r} \times \vec{v} = 9675\hat{i} - 18425\hat{j} + 41587\hat{k}$ km²/s y $\vec{n} = \hat{k} \times \vec{h} = 18425\hat{i} + 9675\hat{j}$ km²/s. De esta manera, dado que $n_y \geq 0$, la longitud del nodo ascendente será

$$\Omega = \arccos\left(\frac{n_x}{n}\right) = 27,7^\circ.$$

Ahora, dado que $\mu = G(M_{\oplus} + M_{satélite}) \approx GM_{\oplus} = 3,982 \times 10^{14} \text{ m}^3/\text{s}^2 = 3,982 \times 10^5 \text{ km}^3/\text{s}^2$, entonces

$$\vec{e} = \frac{\vec{v} \times \vec{h}}{\mu} - \frac{\vec{r}}{r} = -0,1374\hat{i} - 0,1868\hat{j} - 0,05081\hat{k}.$$

Dado que $e_z < 0$, el argumento del periapsis (perigeo en este caso) será

$$\omega = 2\pi - \arccos\left(\frac{\vec{n} \cdot \vec{e}}{ne}\right) = 209^\circ.$$

Dado que $v_r = \vec{r} \cdot \vec{v}/r = 0,9722 \text{ km/s} > 0$, entonces el satélite se aleja del perigeo, por lo que la anomalía verdadera será

$$f = \arccos\left(\frac{\vec{e} \cdot \vec{r}}{er}\right) = 151^\circ.$$

Sin riesgo de ambigüedad, la inclinación de la órbita con respecto al plano del ecuador será

$$i = \arccos\left(\frac{h_z}{h}\right) = 26,6^\circ.$$

Por último, es claro que $e = |\vec{e}| = 0,2374$ y que debido a que $h^2/\mu = a(1 - e^2)$,

$$a = \frac{h^2}{\mu(1 - e^2)} = 5755 \text{ km.}$$

Puede notarse claramente que el semieje mayor de la órbita es menor que el radio de la Tierra, indicando esto que, sin duda, si no se hace nada al respecto, el satélite terminará golpeando contra la superficie la Tierra. Miremos cuándo sucederá esto. Miremos, en primer lugar cuánto tiempo ha pasado desde el perigeo (en realidad, es imposible que este satélite haya venido del perigeo, pues este punto está adentro de la Tierra. Lo que tuvo que haber pasado es que el satélite obtuvo esa posición y velocidad debido a algún agente externo (uso de combustible, colisión con otro satélite, lanzamiento desde la Tierra...)). Sin embargo, se puede calcular el tiempo que "ha pasado" desde un supuesto paso por el perigeo). Para esto, dado que $r(E) = a(1 - e \cos E)$, entonces la anomalía excéntrica del satélite en el momento dado es

$$E = \arccos \left[\frac{1}{e} \left(1 - \frac{r}{a} \right) \right] = 2,514 \text{ rad.}$$

Así, usando la ecuación de Kepler encontramos la anomalía media

$$M = E - e \sin E = 2,375 \text{ rad.}$$

Dado que el movimiento medio es

$$n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} = 1,445 \times 10^{-3} \text{ rad/s,}$$

entonces el supuesto tiempo entre el paso por el perigeo y el instante dado es

$$\tau = \frac{M}{n} = 1643 \text{ s} = 27,39 \text{ minutos.}$$

Ahora, para encontrar el supuesto tiempo que pasará entre el paso por el perigeo y que golpee contra la superficie de la Tierra, esto es, cuando $r' = 6371 \text{ km}$, tenemos

$$E' = \arccos \left[\frac{1}{e} \left(1 - \frac{r'}{a} \right) \right] = 2,038 \text{ rad.}$$

Pero esta es la anomalía excéntrica en el punto en el que "estaba" a r' alejándose del perigeo, entonces queremos es el complemento, cuando se está acercando al perigeo (cuando va a golpear!):

$$E' = 2\pi - \arccos \left[\frac{1}{e} \left(1 - \frac{r'}{a} \right) \right] = 4,245 \text{ rad.}$$

Así,

$$M' = E' - e \sin E' = 4,457 \text{ rad} \quad \text{y} \quad \tau' = \frac{M'}{n} = 3084 \text{ s} = 51,40 \text{ minutos.}$$

Esto quiere decir que, si no se hace nada al respecto, ¡el satélite golpeará la superficie de la Tierra en $\tau' - \tau = 1440 \text{ s} = 24,01 \text{ minutos!}$

¿Qué se podría hacer al respecto? Podríamos mirar la energía necesaria que habría que entregarle para que se acomode en una órbita circular a esa altitud. Su energía específica en la órbita actual es

$$\epsilon = -\frac{\mu}{2a} = -3,459 \times 10^7 \text{ J/kg}$$

y aquella en una órbita circular a esa altitud sería

$$\epsilon_2 = -\frac{\mu}{2r} = -2,902 \times 10^7 \text{ J/kg},$$

por lo que habría que entregarle un total de $\epsilon_2 - \epsilon = 5,577 \times 10^6 \text{ J/kg}$. En tan poco tiempo antes del impacto, lo más seguro es que el satélite tiene el combustible que le entregue esta energía.

8. **Momentum angular orbital de un sistema binario.** Dos masas m_1 y m_2 forman un sistema estelar binario describiendo órbitas elípticas alrededor de su centro de masa común con un periodo P . La mayor separación entre ambas estrellas es D_1 y la menor D_2 . Muestre que la magnitud del momentum angular orbital del sistema es;

$$L = \frac{\pi}{P} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \sqrt{D_1 D_2} (D_1 + D_2)$$

8. Solución

Ya habíamos demostrado que

$$L = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} h,$$

donde, además, sabemos que $h = \sqrt{\mu a (1 - e^2)}$. Ahora nótese que D_1 corresponde a la distancia en el apoapsis de una estrella con respecto a otra, $a (1 + e)$, y que D_2 a la del periapsis, $a (1 - e)$. Así, se puede ver que

$$D_1 + D_2 = 2a \quad \text{y que} \quad D_1 D_2 = a^2 (1 - e^2).$$

Además, por el corolario del segundo teorema del movimiento planetario de Newton, se sigue que

$$P^2 = \frac{4\pi^2}{\mu} a^3 \implies \mu = \frac{4\pi^2}{P^2} a^3.$$

El proceso que se sigue es directo:

$$L = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} h \quad (7.110)$$

$$= \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \sqrt{\mu a (1 - e^2)} \quad (7.111)$$

$$= \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \sqrt{\frac{4\pi^2}{P^2} a^4 (1 - e^2)} \quad (7.112)$$

$$= \frac{\pi}{P} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \sqrt{a^2 (1 - e^2) 2a} \quad (7.113)$$

$$= \frac{\pi}{P} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \sqrt{D_1 D_2} (D_1 + D_2). \quad (7.114)$$

9. **Tiempo por encima de cierta altitud** Un satélite está en órbita alrededor de la Tierra con una altitud (respecto a la superficie de la Tierra) en el perigeo de 250 km y una altitud en el apogeo de 650 km. Encuentre el intervalo de tiempo durante el cual el satélite se mantiene por encima de una altitud de 450 km. ¿A qué fracción del periodo de la órbita equivale el tiempo calculado?

9. Solución

Las distancias al perigeo y al apogeo serían $r_p = (6371 + 250)$ km = 6621 km y $r_a = (6371 + 600)$ km = 7021 km. Por lo tanto,

$$a = \frac{r_p + r_a}{2} = 6821 \text{ km} \quad \text{y} \quad e = \frac{r_a}{a} - 1 = 0,0293.$$

Nótese, ahora, que el satélite se encuentra por encima de una altitud de 450 km entre las anomalías verdaderas para las cuales se encuentra a una distancia del centro de la Tierra de $r = (6371 + 450)$ km = 6821 km. Éstas serían tales que

$$r = \frac{a (1 - e^2)}{1 + \cos f} \implies f = \arccos \left[\frac{a (1 - e^2)}{r} - 1 \right] = 1,57 \text{ y } 4,71 \text{ rad.}$$

Se puede observar que estos ángulos corresponden a ángulos mayores de 90° y menores que 270° . Por lo tanto, el tiempo t que tarda el satélite en realizar ese movimiento está dado por el periodo de la órbita T menos dos veces el tiempo τ que tarda el satélite en ir del perigeo al punto en donde su órbita comienza a estar por encima de una altitud de 450 km, es decir,

$$t = T - 2\tau.$$

T está dado por $2\pi/n$, donde

$$n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} = 1,12 \times 10^{-3} \text{ rad/s.}$$

Y τ es tal que $M = n\tau$. Para hallar M , recordemos que $r(E) = a(1 - e \cos E)$ y obtengamos E :

$$\cos E = \frac{1}{e} \left(1 - \frac{r}{a}\right) \implies E = 1,57 \text{ rad.}$$

Ahora, usemos la ecuación de Kepler para encontrar M :

$$M = E - e \sin E = 1,54 \text{ rad.}$$

Así,

$$\tau = \frac{M}{n} = 1376 \text{ s} = 22,9 \text{ minutos.}$$

Dado que

$$T = \frac{2\pi}{n} = 5609 \text{ s} = 93,5 \text{ minutos,}$$

Se sigue entonces que el intervalo de tiempo durante el cual el satélite se mantiene por encima de una altitud de 450 km es

$$t = T - 2\tau = 2857 \text{ s} = 47,6 \text{ minutos,}$$

que equivale al 50.9 % del periodo de la órbita. Esto es, se demora casi la mitad del periodo de la órbita estando por encima de una altitud de 450 km.

10. **El problema de los dos cuerpos en el tiempo.** Para una órbita elíptica determine el tiempo t que le tomaría a una partícula viajar desde el extremo del latus rectum ($f = -\pi/2$) al extremo opuesto del latus rectum ($f = \pi/2$) atravesando el periapsis. Exprese su respuesta como función del la excentricidad y el movimiento medio ($n = 2\pi/T$) y demuestre que cuando la excentricidad tiende a cero se cumple que $t = T/2$ siendo T el período de la órbita.

10. Solución

Por simetría y segundo teorema del movimiento planetario de Newton, podemos afirmar que el tiempo t que tarda en ir de un extremo del latus rectum al otro es el doble del tiempo τ que le tarda en ir del perigeo a uno de los extremos. Este tiempo satisface que

$$M = n\tau.$$

Por otro lado, el radio vector en el extremo del latus rectum mide

$$r_1 = \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos \frac{\pi}{2}} = a(1-e^2)$$

y dado que $r(E) = a(1 - e \cos E)$, igualamos y obtenemos

$$r(E) = r_1 = a(1 - e \cos E) = a(1 - e^2) \implies \cos E = e.$$

Así, $\sin E = \sqrt{1 - e^2}$ y aplicamos la ecuación de Kepler:

$$M = E - e \sin E.$$

$$n\tau = \arccos e - e\sqrt{1 - e^2} \implies t = 2\tau = 2 \frac{\arccos e - e\sqrt{1 - e^2}}{n}.$$

Es claro que si $e = 0$, se sigue que

$$t = 2 \frac{\arccos 0}{n} = \frac{\pi}{n} = \frac{\pi}{\frac{2\pi}{T}} = \frac{T}{2}.$$

11. **Satélite en órbita.** Un satélite en órbita elíptica alrededor de la Tierra tiene un período de 15,7430 horas y una distancia al perigeo de 12756,0 km (respecto al centro de la Tierra). En $t = 10$ horas después del paso por el perigeo calcule:

- a. La distancia radial.
- b. La velocidad.
- c. La componente radial de la velocidad.
- d. ¿Se acerca o se aleja del periapsis?

11. Solución

Para este satélite, se satisface el corolario del segundo teorema del movimiento planetario de Newton con $\mu = GM_{\oplus} = 3,98199 \times 10^{14} \text{ m}^3/\text{s}^2$, de tal manera que

$$a = \left(\frac{\mu P^2}{4\pi^2} \right)^{1/3} = 3,18792 \times 10^7 \text{ m.}$$

Dado que tenemos la distancia al perigeo, $r_p = a(1 - e)$, encontramos la excentricidad de la órbita

$$e = 1 - \frac{r_p}{a} = 0,599864.$$

Por otro lado, el movimiento medio está dado por

$$n = \frac{2\pi}{P} = 1,10864 \times 10^{-4} \text{ rad/s}$$

y la anomalía media, dado que $t - t_p = 10$ horas, por

$$M = n(t - t_p) = 3,9911 \text{ rad.}$$

Así, solucionando la ecuación de Kepler de forma numérica, se obtiene $E = 3,68231$ rad.

a. Se obtiene, entonces,

$$r(E) = a(1 - e \cos E) = 4,82741 \times 10^7 \text{ m} = 7,57717 R_{\oplus}.$$

b. De la ecuación del *vis viva*, se sigue que la rapidez es

$$v = \sqrt{\mu \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)} = 2001,63 \text{ m/s.}$$

c. Para hallar la componente radial de la velocidad, recordemos que el argumento de la velocidad se puede hallar a partir de la magnitud del momento angular específico como

$$\phi = \sin^{-1} \left(\frac{h}{vr} \right).$$

Dado que $h^2/\mu = a(1 - e^2)$, entonces $h = \sqrt{\mu a (1 - e^2)} = 9,01465 \times 10^{10} \text{ m}^2/\text{s}$, por lo que

$$\phi = 1,20248 \text{ rad}$$

y la componente radial de la velocidad sería

$$v_r = v \cos \phi = 720,68 \text{ m/s.}$$

- d. Pero, dado que $E > \pi$, entonces el satélite ya pasó por el apogeo y debe suceder que su radio vector está disminuyendo de magnitud, por lo que se debe estar acercando al perigeo.

BORRADOR

BORRADOR

Capítulo 8

El problema restringido de los tres cuerpos

Resumen

En este capítulo revisaremos algunos de los resultados más importantes del problema restringido de los tres cuerpos, es decir el problema de predecir la posición de una partícula muy ligera sometida a la acción conjunta de dos partículas más masivas que se mueven una respecto a la otra en trayectorias Keplerianas. Este es uno de los problemas más estudiados teóricamente en la mecánica celeste desde el tiempo de Newton. Conoceremos aquí los conceptos de Constante de Jacobi, superficies de cero velocidad, puntos de equilibrio de Lagrange, radio de Hill, radio, límite y lóbulos de Roche.

8.1. Motivación

En el capítulo anterior desarrollamos en detalle la solución al problema de los dos cuerpos y demostramos con abundantes ejemplos como dicho formalismo constituye la base fundamental para el estudio de sistemas jerárquicos de N-cuerpos, es decir sistemas que pueden dividirse en varios subsistemas independientes formados únicamente por dos cuerpos.

Existen sin embargo situaciones especiales (algunas realmente interesantes) en las que no es posible estudiar la dinámica de sistemas de N-cuerpos muy distintos, es decir, sistemas que en primera instancia podrían considerarse como jerárquicos, simplemente como la combinación de sistemas independientes de dos cuerpos.

Consideremos por ejemplo el siguiente sistema formado tres partículas de masas muy diferentes:

```
sistema=[  
    # Particula 0  
    dict(  
        m=100.0,  
        r=[-0.142857,0,0],
```

```

        v=[0,-2.958,0]
    ),
    # Particula 1
    dict(
        m=5.0,
        r=[2.85714,0,0],
        v=[0,2.958,0]
    ),
    # Particula 2
    dict(
        m=0.01,
        r=[3.62345,0,0],
        v=[0,4.9700107,0]
    )
)
]

```

Aunque los valores de las posiciones y velocidades parecen aleatorios o arbitrariamente precisos, han sido elegidos cuidadosamente para servir al propósito esta sección. Más adelante se entenderá mejor la razón de esta elección particular.

Resolvamos numéricamente las ecuaciones de movimiento del sistema con las rutinas desarrolladas en el [Capítulo 6](#):

```

from numpy import linspace
ts=linspace(0,2,100)

from pymcel.export import ncuerpos_solucion
rs,vs,rps,vps,constantes=ncuerpos_solucion(sistema,ts)

```

Una gráfica de la posición de las partículas respecto al centro de masa, se obtiene con el siguiente algoritmo:

(Algoritmo 8.1)

```

from pymcel.export import plot_ncuerpos_3d
fig=plot_ncuerpos_3d(rps,vps)
ax=fig.gca()

```

ver Figura 8.1

Las dos partículas más livianas en el sistema (aquellas con las órbitas más amplias) parecen describir trayectorias Keplerianas (aproximadamente circulares) alrededor de la partícula más masiva cerca al origen de coordenadas. En este sentido, podríamos suponer que se trata de un *sistema jerárquico central* de acuerdo con las definiciones que introdujimos en la ??.

Pero el sistema tiene una característica peculiar. Como puede apreciarse claramente en la [Figura 8.1](#), la velocidad angular de las dos partículas más livianas es aparentemente la misma. Como resultado de esta coincidencia la distancia relativa entre ambas partículas se mantiene aproximadamente constante. La partícula con la masa más pequeña (la más externa) parece estacionada respecto a la partícula de masa intermedia, en un punto que se encuentra diametralmente opuesto al cuerpo

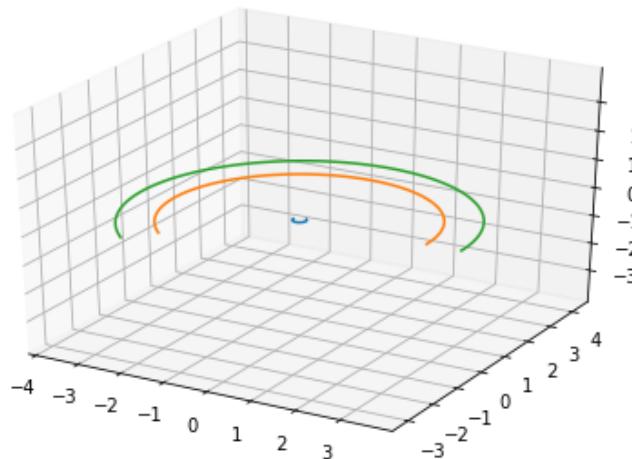


Figura 8.1: Figura correspondiente al código 8.1.

central.

Si suponemos que las dos partículas livianas forman con el cuerpo central sendos subsistemas de dos cuerpos, la configuración observada claramente contradice el teorema armónico (tercera ley). Como para ambos subsistemas la masa central es la misma, esperaríamos que la partícula con la órbita más grande se moviera también con menor velocidad angular. Pero no es así. Es claro, que la partícula más externa no parece estar obedeciendo las reglas del problema de los dos cuerpos. En consecuencia debemos concluir que este sistema no puede describirse como un sistema jerárquico.

Aunque situaciones como la presentada aquí no parecerían muy probables en la naturaleza (tan solo considerese el hecho de que las condiciones iniciales tuvieron que ser escogidas cuidadosamente para generar las peculiaridades en el sistema) sus propiedades podrían ser aprovechadas para crear sistemas de N cuerpos artificiales (sistemas que involucren vehículos espaciales). Así por ejemplo, el sistema estudiado aquí es un buen ejemplo de una situación en la que buscaramos estacionar una nave espacial (correspondiente a la partícula más liviana) a una distancia constante, pero no pequeña, de un planeta (la Tierra por ejemplo que en esta situación correspondería a la partícula de masa intermedia), mientras ambas, la nave y el planeta, orbitan el Sol (el cuerpo central).

Pero el interés en los sistemas no jerárquicos de tres o más cuerpos va más allá de las aplicaciones que podamos concebir en los viajes espaciales (aunque en realidad esta es el área donde tienen mayor aplicación). Otros sistemas astronómicos naturales, tales como aquellos formados por una estrella, un planeta y cuerpos pequeños que son dispersados por este último o se mantienen capturados por la gravedad mutua de ambos, evidencian algunas propiedades particulares que vale la pena conocer en detalle.

Este es justamente el propósito de este capítulo. Queremos responder a la pregunta de qué cosas podemos aprender sobre la dinámica (sin resolver numéricamente las ecuaciones de movimiento) de sistemas no jerárquicos de tres cuerpos

que tengan propiedades similares al sistema presentado al principio de esta sección o a los sistemas mencionados en el párrafo anterior. Esta es justamente la razón de la palabra *restringido* en el título del capítulo: no abordaremos aquí el problema general de tres cuerpos (que en realidad es un caso particular del problema de N cuerpos que ya vimos en el capítulo correspondiente) sino que nos restringiremos a sistemas particulares, que evidencian propiedades que pueden ser útiles para diseñar sistemas artificiales pero también para entender algunos sistemas naturales.

8.2. El problema restringido de los tres cuerpos

En los sistemas mencionados en la sección anterior, incluyendo aquel cuya dinámica simulamos explícitamente, siempre consideramos dos partículas grandes que forman un sistema de dos cuerpos (por ejemplo el Sol y la Tierra), y una tercera partícula (un vehículo espacial) con una masa mucho más pequeña que las dos primeras.

Dado que la partícula más liviana (m_0) ejerce un efecto despreciable sobre el movimiento de las partículas más masivas (m_1 y m_2), la posición y velocidad de estas últimas puede obtenerse usando las fórmulas y procedimientos descritos en el ???. De este modo el problema resultante consiste simplemente en la predicción de las posiciones y velocidades de m_0 . La descripción completa de un sistema así es a lo que llamaremos aquí **el problema restringido de los tres cuerpos**.

Las ecuaciones de movimiento de la partícula m_0 serán:

$$\ddot{\vec{r}}_0(t) = -\frac{\mu_1}{r_{01}^3} \vec{r}_{01} - \frac{\mu_2}{r_{02}^3} \vec{r}_{02} \quad (8.1)$$

donde $\vec{r}_{01} = \vec{r}_0 - \vec{r}_1$ y $\vec{r}_{02} = \vec{r}_0 - \vec{r}_2$ y los parámetros gravitacionales $\mu_1 = Gm_1$ y $\mu_2 = Gm_2$.

Dado que ahora es prácticamente irrelevante numerar a la única partícula de interés en el sistema (la partícula 0), en lo sucesivo nos referirnos a su posición y velocidad como $\vec{r}(t) \equiv \vec{r}_0(t)$, $\dot{\vec{r}}(t) \equiv \dot{\vec{r}}_0(t)$, y a su posición relativa respecto a las dos partículas más masivas como $\vec{r}_1 \equiv \vec{r}_{01}$ y $\vec{r}_2 \equiv \vec{r}_{02}$. De este modo la ecuación de movimiento (Ec. 8.1) queda:

$$\ddot{\vec{r}}(t) = -\frac{\mu_1}{r_1^3} \vec{r}_1 - \frac{\mu_2}{r_2^3} \vec{r}_2 \quad (8.2)$$

Dado que el movimiento del sistema formado por las partículas más masivas (1 y 2) se realiza sobre un plano (problema de los dos cuerpos), la mejor elección del sistema de coordenadas será aquella en la que el plano $x - y$ reside sobre el plano orbital de 1 y 2, y el eje x apunta en dirección al periapsis del sistema. En este sistema de referencia podemos escribir explícitamente las cantidades de la Ec. (8.2) como:

$$\begin{aligned} \vec{r}_1 &= (x - x_1)\hat{e}_x + (y - y_1)\hat{e}_y + z\hat{e}_z \\ \vec{r}_2 &= (x - x_2)\hat{e}_x + (y - y_2)\hat{e}_y + z\hat{e}_z \end{aligned} \quad (8.3)$$

Ciertamente la complejidad del problema restringido, planteado de esta manera, se ha reducido considerablemente respecto al problema general de tres cuerpos. Pasamos, por ejemplo, de tener con 18 variables independientes (posiciones

y velocidades de las tres partículas) y 3 ecuaciones vectoriales, a solo 6 variables (posición y velocidad de la partícula más ligera) y una ecuación diferencial (Ec. 8.2).

Aún así las cantidades $x_1(t)$, $y_1(t)$, $x_2(t)$, $y_2(t)$ que aparecen implícitamente en la ecuación a través de las expresiones para \vec{r}_1 y \vec{r}_2 (Ecs. 8.3), no se pueden escribir como funciones elementales del tiempo (implícitamente es necesario resolver la Ecuación de Kepler), de modo que la solución a la ecuación de movimiento (Ec. 8.2) solo parece posible a través de procedimientos numéricos. Si ese es el caso, lo único que habremos conseguido hasta ahora fue reducir la complejidad del problema numérico, pero sin ganar comprensión del problema físico de fondo.

¿Cómo podemos “deshacernos” de la limitación impuesta por las variables $x_1(t)$, $y_1(t)$, $x_2(t)$, $y_2(t)$?

Una manera de hacerlo sería considerar solo aquellas situaciones en las que estas cantidades obedezcan las expresiones más simples posibles; es decir considerar el problema solo en el caso en el que el movimiento de los cuerpos más masivos sigan las trayectorias más elementales admisibles en el problema de los dos cuerpos.

8.3. El problema circular restringido de los tres cuerpos (CRTBP)

El caso más simple resulta al asumir que los cuerpos más masivos se mueven siguiendo trayectorias circulares alrededor de su centro de masa común (o equivalentemente, que el movimiento relativo es elíptico con excentricidad 0). Al problema resultante de describir el movimiento de una partícula de masa despreciable, respecto a dos cuerpos que se mueven en órbitas circulares relativas, lo conocemos como el **problema circular restringido de los dos cuerpos** (CRTBP por las siglas en inglés de *circular restricted three body problem*).

En esta situación, la posición de las partículas más masivas se puede describir analíticamente como:

$$\begin{aligned}x_1 &= -a_1 \cos(nt) \\y_1 &= -a_1 \sin(nt) \\x_2 &= +a_2 \cos(nt) \\y_2 &= +a_2 \sin(nt)\end{aligned}\tag{8.4}$$

donde $a_1 = (m_2/M)a$, $a_2 = (m_1/M)a$ (ver Ecs. ??), con $M = m_1 + m_2$. Por otro lado $n = \sqrt{\mu/a^3}$ es la velocidad angular del vector relativo, $\mu = GM$ y a es el semieje mayor de la órbita relativa de los cuerpos m_1 y m_2 .

Como puede verse a es el único parámetro geométrico relevante y, junto con μ , determinan completamente la posición de las partículas más masivas en el sistema.

Conocer la forma analítica de las posiciones de las partículas masivas es un gran paso. Sin embargo la ecuación de movimiento resultante (Ec. 8.2) sigue siendo tan complicada que es poco lo que podremos ganar analizándola con las técnicas que hemos utilizado en el texto (solución por cuadraturas).

Existe sin embargo un recurso ingenioso y que ofrece las oportunidades que necesitamos para ganar alguna comprensión del sistema, sin resolver numéricamente las ecuaciones de movimiento.

Hasta ahora, nos habíamos ocupado de estudiar los problemas del movimiento relativo de partículas en sistemas de dos o más cuerpos, en sistemas de referencia inerciales. Pero ¿qué pasa si usamos un sistema de referencia no inercial convenientemente construido?

Ya en la [Sección 5.5.2](#) habíamos mostrado como formular y resolver las ecuaciones de movimiento de partículas en sistemas no inerciales, en particular en sistemas de referencia rotantes.

En el caso del crtbp, por ejemplo, podemos estudiar el movimiento de la partícula de prueba en un sistema de referencia no inercial que rote de modo que las partículas más masivas se mantengan en reposo. Para lograrlo basta que la velocidad angular del sistema de referencia sea igual a n , es decir que $\omega = n$ (ver [Sección 5.5.2](#)).

En un sistema de referencia como este las coordenadas de las partículas masivas se hacen las más simples posibles:

$$\begin{aligned}x_1 &= -\frac{m_2}{M}a \\y_1 &= 0 \\x_2 &= +\frac{m_1}{M}a \\y_2 &= 0\end{aligned}\tag{8.5}$$

A pesar de esta simplificación, la ecuación de movimiento se hace más complicada: además de las aceleraciones debidas a las interacciones gravitacionales de la partícula de prueba con las partículas masivas que incluimos en la Ec. (8.2), en el sistema rotante debemos agregar las aceleraciones no inerciales, aceleración centrífuga, aceleración de coriolis (la aceleración de Euler en este caso sera cero), cuyas formas explícitas dedujimos en la [Sección 5.5.2](#).

La ecuación de movimiento en este sistema de referencia se escribirá como:

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu_1}{r_1^3}\vec{r}_1 - \frac{\mu_2}{r_2^3}\vec{r}_2 - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) - 2\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}\tag{8.6}$$

donde $\vec{\omega} \equiv \omega \hat{e}_z$.

Aquí es muy importante aclarar que tanto la aceleración $\ddot{\vec{r}}$, la velocidad $\dot{\vec{r}}$ y las posiciones relativas \vec{r}_1 y \vec{r}_2 son las del sistema rotante (las que “primamos” en la [Sección 5.5.2](#)). Si no hacemos aquí la distinción entre estas cantidades y aquellas del sistema inercial (que son las que usamos en la Ec. 8.2) es por cuestión de simplicidad y espacio. Esta distinción, sin embargo debe tenerse cuidadosamente en cuenta, cuando vayamos a implementar estas ideas en algoritmos.

8.4. Las unidades canónicas del CRTBP

Hay una interesante simplificación de las ecuaciones de movimiento que se produce por la simple elección de un sistema de unidades apropiado.

Si, como es costumbre, escogemos un sistema de unidades en el que $G = 1$, $U_M = M = m_1 + m_2$ y $U_L = a$, entonces, en este sistema de coordenadas:

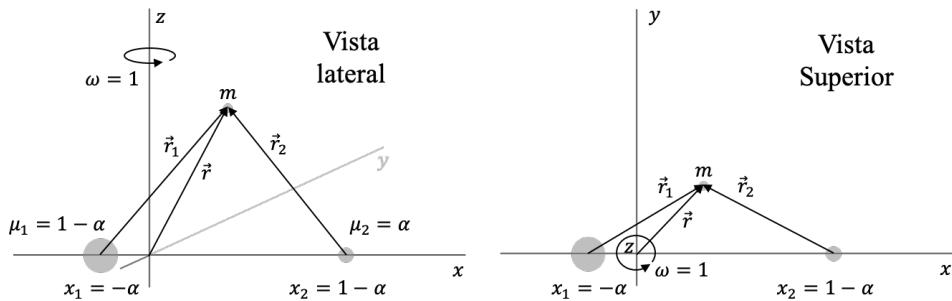


Figura 8.2: Representación esquemática de la configuración del problema circular restringido de los tres cuerpos. Todas las cantidades están expresadas en el sistema de unidades canónicas en el que $a = 1$ (distancia entre las partículas más masivas) y $\mu_2 = \alpha$.

1. $\omega = n = \sqrt{\mu/a^3} = 1$.
2. Si llamamos $\alpha \equiv \mu_2$, entonces $\mu_1 = \mu - \mu_2 = 1 - \alpha$.
3. $x_1 = -\alpha$ y $x_2 = 1 - \alpha$.

En este sistema de unidades las ecuaciones de movimiento (Ec. 8.6) se pueden escribir ahora como:

$$\ddot{\vec{r}} = -(1 - \alpha) \frac{\vec{r}_1}{r_1^3} - \alpha \frac{\vec{r}_2}{r_2^3} - \hat{e}_z \times (\hat{e}_z \times \vec{r}) - 2\hat{e}_z \times \dot{\vec{r}} \quad (8.7)$$

con:

$$\vec{r}_1 = (x + \alpha)\hat{e}_x + y\hat{e}_y + z\hat{e}_z \quad (8.8)$$

$$\vec{r}_2 = (x + \alpha - 1)\hat{e}_x + y\hat{e}_y + z\hat{e}_z \quad (8.9)$$

$$(8.10)$$

Con todas las restricciones implícitas en la Ec. (8.7) podemos finalmente proceder a estudiar esta ecuación con los métodos vistos en capítulos anteriores para de este modo ganar intuición sobre el comportamiento de este tipo de sistemas.

8.5. Solución numérica al CRTBP

Como hemos hecho con otros problemas, antes de abordar un tratamiento analítico del CRTBP, estudiaremos aquí la solución numérica de las ecuaciones de movimiento para familiarizarnos con el comportamiento del sistema.

Como hemos aprendido en los capítulos anteriores, para ello necesitamos implementar primero la versión linearizada de la ecuación de movimiento (Eq. 8.7):

```
def edm_crtbp(Y,t,alfa):
    r=Y[:3]
    v=Y[3:]
```

```

#Vectores relativos
from numpy import array
r1=r-array([-alfa,0,0])
r2=r-array([1-alfa,0,0])
ez=array([0,0,1])

#Aceleraciones
from numpy.linalg import norm
from numpy import cross
g1=-(1-alfa)*r1/norm(r1)**3
g2=-alfa*r2/norm(r2)**3
acen=-cross(ez,cross(ez,r))
acor=-2*cross(ez,v)
a=g1+g2+acen+acor

from numpy import concatenate
dYdt=concatenate((v,a))
return dYdt

```

Escojamos el valor de los parámetros claves de sistema y las condiciones iniciales para la partícula de prueba.

```

#Parámetro gravitacional del sistema
alfa=0.3

#Tiempos de integración
from numpy import linspace
Nt=1000
ts=linspace(0,10,Nt)

#Condiciones iniciales
from numpy import array,concatenate
ro=array([1.0,0.0,0.0])
vo=array([0.0,0.45,0.0])
Yo=concatenate((ro,vo))

#Solución
from scipy.integrate import odeint
Ys=odeint(edm_crtbp,Yo,ts,args=(alfa,))

```

Una gráfica de la trayectoria de la partícula en el sistema rotante del CRTBP será:

(Algoritmo 8.2)

```

import matplotlib.pyplot as plt
fig=plt.figure()
ax=fig.gca()

rs=Ys[:,3]
ax.plot(rs[:,0],rs[:,1],'k-')

```

```

ax.plot([-alfa],[0], 'ro', ms=10)
ax.plot([1-alfa],[0], 'bo', ms=5)

from pymcel.plot import fija_ejes_proporcionales
fija_ejes_proporcionales(ax,Ys[:, :2], ycm=0);

```

ver Figura 8.3

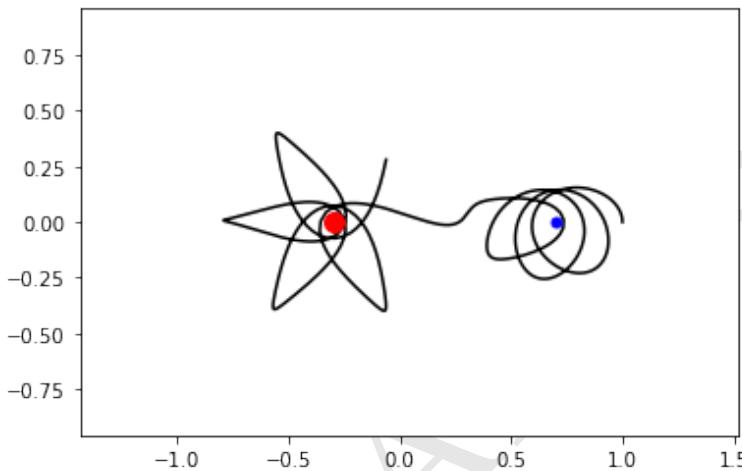


Figura 8.3: Figura correspondiente al código 8.2.

¿Cómo se ve esta extraña trayectoria de la partícula de prueba en el sistema inercial?. Podemos recuperar la posición (e incluso la velocidad si quisieramos) usando las transformaciones que vimos en la Sección 5.5 y que implementamos como algoritmos en la Sección 5.5.5:

```

from numpy import zeros_like
rs_ine=zeros_like(rs)
r1=zeros_like(rs)
r2=zeros_like(rs)
for i in range(Nt):
    from spiceypy import rotate,mxv
    R=rotate(-ts[i],3)
    rs_ine[i]=mxv(R,rs[i])

#Posición de las partículas
from numpy import array,cos,sin
r1[i]=array([-alfa*cos(ts[i]),-alfa*sin(ts[i]),0])
r2[i]=array([(1-alfa)*cos(ts[i]),(1-alfa)*sin(ts[i]),0])

```

Ahora podemos ver la trayectoria de las partículas en los dos sistemas de referencia:

(Algoritmo 8.3)

```

fig,axs=plt.subplots(1,2,figsize=(8,4))

axs[0].plot(rs[:,0],rs[:,1],'k-')
axs[0].plot([-alfa],[0],'ro',ms=10)
axs[0].plot([1-alfa],[0],'bo',ms=5)
axs[0].set_title("Sistema Rotante")
axs[0].grid()
fija_ejes_proporcionales(axs[0],rs[:,2],ycm=0);

axs[1].plot(rs_ine[:,0],rs_ine[:,1],'k-')
axs[1].plot(r1[:,0],r1[:,1],'r-')
axs[1].plot(r2[:,0],r2[:,1],'b-')
axs[1].set_title("Sistema Inercial")
axs[1].grid()
fija_ejes_proporcionales(axs[1],(rs_ine[:,2],r1,r2),ycm=0);

fig.tight_layout()

```

ver Figura 8.4

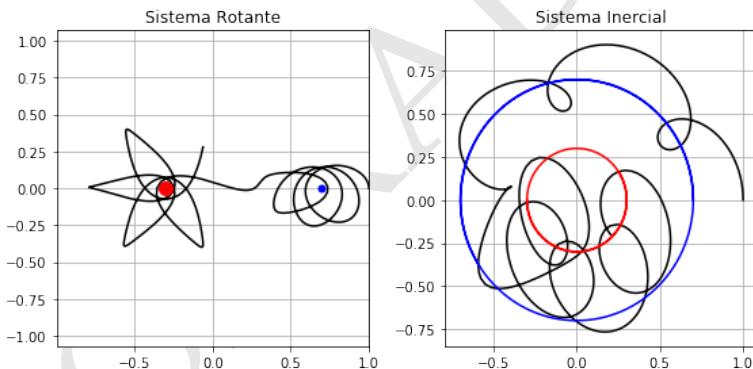


Figura 8.4: Figura correspondiente al código 8.3.

8.6. Un algoritmo general para el CRTBP

La rutina a continuación permite, usando algunos de los algoritmos presentados en esta sesión, resolver la ecuación de movimiento de una partícula en el CRTBP, tanto en el sistema rotante como en el sistema inercial de referencia. Usaremos esta referencia en otras sesiones de este capítulo, incluyendo la sesión de problemas.

```

def crtbp_solucion(alfa,ro,vo,ts):
    #Condiciones iniciales
    from numpy import array,concatenate

```

```

Yo=concatenate((array(ro),array(vo)))

#Solución
from scipy.integrate import odeint
Ys=odeint(edm_crtbp,Yo,ts,args=(alfa,))
rs_rot=Ys[:,3:]
vs_rot=Ys[:,3:]

#Transformación al sistema inercial de coordenadas
from numpy import array,zeros_like
rs_ine=zeros_like(rs_rot)
vs_ine=zeros_like(vs_rot)
r1_ine=zeros_like(rs_rot)
r2_ine=zeros_like(rs_rot)
ez=array([0,0,1])

for i in range(len(ts)):
    from spiceypy import rotate,mxv,vcrss
    #Transformar al sistema inercial
    R=rotate(-ts[i],3)
    rs_ine[i]=mxv(R,rs_rot[i])
    vs_ine[i]=mxv(R,vs_rot[i]+vcrss(ez,rs_rot[i]))
    #Posición de las partículas masivas
    from numpy import array,cos,sin
    r1_ine[i]=array([-alfa*cos(ts[i]),-alfa*sin(ts[i]),0])
    r2_ine[i]=array([(1-alfa)*cos(ts[i]),(1-alfa)*sin(ts[i]),0])

return rs_rot,vs_rot,rs_ine,vs_ine,r1_ine,r2_ine

```

Busque las figuras interactivas y las animaciones incluídas en el [sitio en línea del libro](#)⁴⁸.

8.7. La constante de Jacobi

¿Qué podemos “entender” del movimiento de la partícula de prueba en el CRTBP sin resolver numéricamente la ecuación de movimiento?. Como lo hemos hecho a lo largo de este libro, y lo hicimos en particular en los casos del problema de los N cuerpos y el problema de los dos cuerpos relativo, es posible, como mínimo, reconocer algunas propiedades generales del sistema buscando las cuadraturas de su ecuación de movimiento.

Empecemos por considerar nuevamente la ecuación en su forma más general (Eq. 8.6):

$$\ddot{\vec{r}} = -\mu_1 \frac{\vec{r}_1}{r_1^3} - \mu_2 \frac{\vec{r}_2}{r_2^3} - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) - 2\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}} \quad (8.11)$$

Con $\vec{r}_1 = [x(t) - x_1]\hat{e}_x + y(t)\hat{e}_y + z(t)\hat{e}_z$ y $\vec{r}_2 = [x(t) - x_2]\hat{e}_x + y(t)\hat{e}_y + z(t)\hat{e}_z$

Si usamos el factor integrande $\dot{\vec{r}}$. obtenemos en el lado izquierdo de la ecuación de movimiento:

⁴⁸http://seap-udea.org/MecanicaCeleste_Zuluaga

$$\dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \dot{\vec{r}}^2 \right) \quad (8.12)$$

De otra parte, el primer término del lado derecho: queda como

$$-\frac{\vec{r}_1 \cdot \dot{\vec{r}}}{r_1^3} = -\left[\frac{(x - x_1)\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z}}{r_1^3} \right] \equiv \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{r_1} \right) \quad (8.13)$$

siendo $r_1 = \sqrt{(x - x_1)^2 + y^2 + z^2}$. El segundo término será análogo.

Analicemos ahora el término $\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \cdot \dot{\vec{r}}$. Notemos primero que:

$$\begin{aligned} \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) &= \omega \hat{k} \times (x \omega \hat{j} - y \omega \hat{i}) \\ &= -x \omega^2 \hat{e}_x - y \omega^2 \hat{e}_y \end{aligned}$$

y por lo tanto:

$$\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \cdot \dot{\vec{r}} = -\omega^2(x\dot{x} + y\dot{y}) = -\frac{1}{2}\omega^2 \frac{d}{dt}(x^2 + y^2)$$

Por propiedades del producto punto es claro que multiplicando escalarmente el último término de la derecha (aceleración de Coriolis) por $\dot{\vec{r}}$ obtenemos:

$$2(\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}) \cdot \dot{\vec{r}} = 0 \quad (8.14)$$

Reuniendo todos estos resultados obtenemos finalmente que:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \dot{\vec{r}}^2 \right) = \frac{d}{dt} \left[\frac{\mu_1}{r_1} + \frac{\mu_2}{r_2} + \frac{1}{2} \omega^2(x^2 + y^2) \right] \quad (8.15)$$

Agrupando términos y multiplicando ambos lados de la ecuación por dos se halla finalmente:

$$\frac{d}{dt} \left[-\dot{\vec{r}}^2 + 2 \frac{Gm_1}{r_1} + 2 \frac{Gm_2}{r_2} + \omega^2(x^2 + y^2) \right] = 0 \quad (8.16)$$

De aquí encontramos que una cuadratura al CRTBP es:

$$\frac{2\mu_1}{r_1} + \frac{2\mu_2}{r_2} + \omega^2(x^2 + y^2) - v^2 \equiv C_J \quad (8.17)$$

A esta expresión general la llamamos la **cuadratura de Jacobi**. Al valor C_J (que puede obtenerse por ejemplo con las condiciones iniciales del problema) y que es estrictamente constante en el CRTBP la llamamos la **constante de Jacobi**. Usaremos de forma intercambiable los términos cuadratura y constante para referirnos a la Ec. (8.17) aunque el lector debe recordar que son conceptos sutilmente diferentes.

Un poco de historia

Jacobi y el problema de los tres cuerpos. : Jacobi.

¿Existen otras cuadraturas del CRTBP?. Lamentablemente no. La constante de Jacobi resulta ser la única cantidad conservada en el problema. Naturalmente esto es cierto cuando se describe la dinámica en el sistema rotante y bajo las particulares condiciones en el que se lo define (cuerpos masivos siguiendo una trayectoria totalmente independiente de la partícula de prueba).

¿Esta relacionada C_J con la energía total del sistema?. No realmente. En primer lugar debe notarse que no es posible definir una energía cinética para los dos objetos masivos del sistema puesto que están, por construcción, en reposo. Aún así si es posible hablar de una energía potencial entre ellos que se mantiene constante, a pesar del movimiento de la partícula de prueba. Es claro que si se considera el problema en un sistema inercial, la energía total del sistema debería ser constante (como lo es en cualquier problema de N cuerpos). Pero al pasarnos al sistema rotante y fijar el movimiento de las partículas masivas hemos arruinado las condiciones que conducían a dicha conservación.

¿Qué podemos decir de la energía mecánica total de la partícula de prueba?. En el sistema rotante la energía mecánica de la partícula no es conservada debido a que sobre ella actúa la fuerza de coriolis que depende de la velocidad y que por la misma razón no pueden hacerse derivar de una función escalar (una de las condiciones para que una fuerza sea conservativa). En este sentido podemos decir que la fuerza de Coriolis es dissipativa y que no hay conservación de la energía mecánica.

¿Qué podemos decir sobre el momento angular de la partícula de prueba? ¿podría conservarse como en otros sistemas estudiados antes?. La fuerza sobre la partícula de prueba en el CRTBP tampoco es una fuerza central, de modo que la conservación del momento angular no está garantizada como lo está tanto en el problema general de los N cuerpos como en el problema relativo de los dos cuerpos.

En resumen, de por sí podríamos considerar afortunado encontrar al menos una cuadratura en un problema que por su preparación ha roto con todas las convenientes propiedades que la forma específica de la fuerza gravitacional le había otorgado a los sistemas que habíamos estudiado hasta ahora.

8.8. El valor de la constante de Jacobi

Si la constante de Jacobi no es la energía del sistema ¿qué unidades tiene? ¿cuál es su orden de magnitud? Es interesante analizar estas cuestiones antes de seguir profundizando en el CRTBP. Entre más intuición desarrollemos sobre el significado de esta importante cantidad, mejor preparados estaremos para entender las propiedades globales de un sistema descrito con el formalismo del CRTBP una vez conocido el valor de C_J .

Examinando la definición de la constante en la Ec. (8.18) reconocemos C_J tiene unidades de velocidad al cuadrado, o lo que es lo mismo unidades de energía específica (energía por unidad de masa). La cuadratura, en las unidades que introdujimos en la Sección 8.4 se puede escribir como:

$$\frac{2(1-\alpha)}{r_1} + \frac{2\alpha}{r_2} + (x^2 + y^2) - v^2 = C_J \quad (8.18)$$

Como vemos la constante puede tener un valor real arbitrario, positivo o negativo (esto debido al signo del cuadrado de la velocidad que siempre es una cantí-

dad positiva). Si asumimos una situación en la que $r_1 \sim r_2 \sim (x^2 + y^2) \sim 1$, vemos que independiente del valor de α , la constante tiene un valor:

$$C_J \sim 5 - v^2$$

o lo que es lo mismo, su valor estará, en situaciones realistas y en las unidades canónicas, entre 0 y unos pocos, y muy seguramente alrededor de 2 – 4 como lo atestiguan algunos de los experimentos numéricos que realizaremos a continuación.

Para hacernos a una idea del valor de C_J podemos calcular su valor para muchos puntos alrededor de un sistema con un valor de α específico y asumiendo, por sencillez que la partícula se encuentra en reposo en esos puntos. Con ese propósito construyamos primero una *malla* de puntos (matriz de pares) en un plano paralelo al plano $x - y$:

```
#Valor de z en el que se encuentra el plano
zplano=0

#Tamaño de la malla y número de filas y columnas
rango=1.5
NG=80

#Malla de puntos
from numpy import meshgrid,linspace,ones_like
X,Y=meshgrid(linspace(-rango,rango,NG),linspace(-rango,rango,NG))
Z=zplano*ones_like(X)
```

Las matrices X, Y y Z contienen los valores de las respectivas coordenadas de los puntos sobre la malla. Así, por ejemplo, la componente X[3,10] tiene el valor de la coordenada x del punto en la cuarta fila (índice 3) y en la décima columna (índice 10).

Con las matrices de las coordenadas de la malla podemos proceder a calcular los valores de la constante de Jacobi correspondiente a un determinado valor (fijo) de la rapidez:

```
#Parámetro del sistema
alfa=0.3

#Rapidez de la partícula de prueba
v=0.0

#Valor de C_J
from numpy import sqrt
CJ=2*(1-alfa)/sqrt((X+alfa)**2+Y**2+Z**2)+\
2*alfa/sqrt((X-1+alfa)**2+Y**2+Z**2)+\
(X**2+Y**2)-\
v**2
```

Constante de Jacobi en la malla:
[[5.454 5.353 5.256 ... 5.251 5.349 5.45]]
[5.355 5.255 5.157 ... 5.153 5.25 5.351]]

```
[5.259 5.159 5.062 ... 5.057 5.155 5.255]
...
[5.259 5.159 5.062 ... 5.057 5.155 5.255]
[5.355 5.255 5.157 ... 5.153 5.25 5.351]
[5.454 5.353 5.256 ... 5.251 5.349 5.45 ]]
```

Como vemos C_J es una matriz que tiene el valor de la constante en cada uno de los puntos de la malla coordenada. El resultado esbozado, coindice con nuestras expectativas: la constante tiene un valor de unos pecos y en el borde de la malla tiene un valor cercano a $5 - v^2$.

Podemos representar gráficamente este resultado, construyendo a partir de estas matrices, contornos numéricos (líneas de igual valor de C_J) que nos permiten, nuevamente, ganar un poco de intuición sobre esta importante cantidad. El algoritmo a continuación lleva a cabo ese cometido:

(Algoritmo 8.4)

```
import matplotlib.pyplot as plt
fig=plt.figure(figsize=(6,5))
ax=plt.gca()

#Curva de cero velocidad
from numpy import linspace
c=ax.contourf(X,Y,CJ,levels=linspace(0,5,10))
plt.colorbar(c)
ax.plot([-alfa],[0],'o',color='blue',markersize=10*(1-alfa))
ax.plot([1-alfa],[0],'o',color='orange',markersize=max(2,10*alfa))

ax.set_xlabel("x")
ax.set_xlabel("y")
ax.set_title(f"z = {zplano}, v = {v}")
ax.set_xlim((-rango,rango))
ax.set_ylim((-rango,rango))
fig.tight_layout()
```

ver Figura 8.5

Debe notarse que hemos excluído de la malla los puntos que están muy cercanos a las partículas masivas y para los cuales el valor de C_J es muy grande.

Busque las figuras interactivas y las animaciones incluídas en el [sitio en línea del libro](#)⁴⁹.

8.9. Cuadratura de Jacobi de un sistema simulado

Contrastemos ahora el resultado teórico obtenido en las secciones anteriores con lo que podemos obtener de la solución numérica a las ecuaciones de movimiento. Primero consideraremos la solución a la Eq. (8.6) que sabemos tiene la cuadratura expresada por la constante de Jacobi:

⁴⁹http://seap-udea.org/MecanicaCeleste_Zuluaga

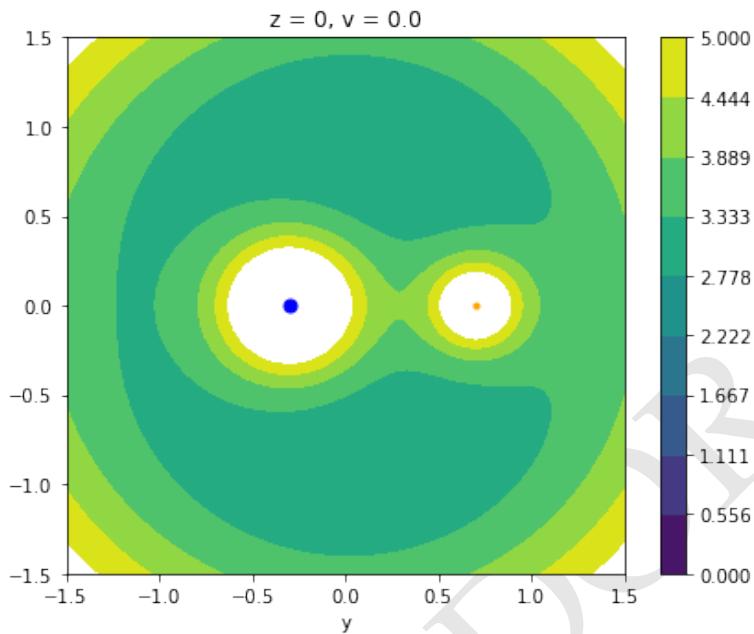


Figura 8.5: Figura correspondiente al código 8.4.

```
#Propiedades del sistema y condiciones iniciales
alfa=0.3
ro=[1.0,0.0,0.0]
vo=[0.0,0.45,0.0]
#Tiempos de integración
from numpy import linspace
Nt=1000
ts=linspace(0,10,Nt)
#Resuelve numéricamente la ecuación de movimiento
from pymcel.export import crtbp_solucion
solucion=crtbp_solucion(alfa,ro,vo,ts)
#Extrae las posiciones y velocidades en el sistema rotante
rs=solucion[0]
vs=solucion[1]
```

Podemos ahora calcular el valor de la constante de Jacobi para cada uno de los puntos de la trayectoria de la partícula. Para ello, escribamos una rutina general que permita calcular la constante para el conjunto de valores de la posición y la velocidad de la partícula de prueba:

(Algoritmo 8.5)

```
def constante_jacobi(alfa,r,vel):
    from numpy import array
    r=array(r)
    vel=array(vel)
```

```

#Valor de x, y, z
x=r[:,0]
y=r[:,1]
z=r[:,2]

#Rapidez
from numpy.linalg import norm
v=norm(vel, axis=1)

#Posiciones relativas
from numpy import sqrt
r1=sqrt((x+alfa)**2+y**2+z**2)
r2=sqrt((x-1+alfa)**2+y**2+z**2)

#Valor de la constante
CJ=2*(1-alfa)/r1+2*alfa/r2+(x**2+y**2)-v**2
return CJ

```

Ahora aplicamos la rutina para calculas los valores obtenidos con la solución numérica de las ecuaciones de movimiento:

```
CJ=constante_jacobi(alfa,rs,vs)
```

Constante de Jacobi para sistema real:
[3.87442 3.87442 3.87442 ... 3.87443 3.87443 3.87443]

Como era de esperarse, dentro del margen de las incertidumbres numéricas, el valor de la cuadratura es el mismo, independiente del tiempo en el que se calcule.

8.10. Cuadratura de Jacobi de un sistema real

El resultado al final de la última sección, más allá de ofrecer una comprobación numérica de la teoría, es bastante predecible: el sistema simulado tiene exactamente todas las propiedades necesarias para que la cuadratura de Jacobi (Ec. 8.18) resulte constante.

Aún menos trivial sería comprobar si esa misma cuadratura se satisface incluso en el caso de un sistema de tres cuerpos *real*, es decir, uno en el que todas las partículas interactúan.

Consideremos el siguiente sistema, descrito usando la notación que introdujimos en la Sección 6.4:

```

sistema=[
    dict(
        m=1e-4,
        r=[0.5,0.0,0.5],
        v=[0,0.5,0],
    ),
    dict(
        m=3.0,
        r=[0,0,0],

```

```

        v=[0,0,0]),
dict(
    m=1.0,
    r=[1.0,0,0],
    v=[0,2.0,0],
),
]

```

Resolvamos numéricamente las ecuaciones de movimiento correspondientes:

```

from numpy import linspace
Nt=1000
ts=linspace(0,10,Nt)

from pymcel.export import ncuerpos_solucion
rs,vs,rps,vps,constantes=ncuerpos_solucion(sistema,ts)

```

Ahora veamos una gráfica de las trayectorias en el sistema de referencia del centro de masa (sistema de referencia inercial):

(Algoritmo 8.6)

```

from pymcel.export import plot_ncuerpos_3d
fig=plot_ncuerpos_3d(rps,vps);

```

ver Figura 8.6

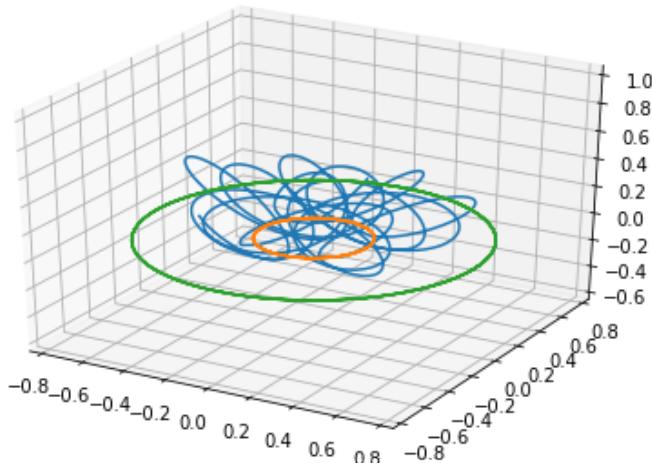


Figura 8.6: Figura correspondiente al código 8.6.

Como era de esperarse el sistema se comporta aproximadamente como el CRTBP: hay dos partículas masivas que orbitan una respecto a otra en trayectorias aproximadamente circulares, mientras que una tercera más liviana se mueve

siguiendo una trayectoria muy compleja (ciertamente no kepleriana) afectada por las otras dos. El efecto de esta última sobre la trayectoria de las dos primeras parece despreciable.

Para examinar si el comportamiento de este sistema es similar al que hemos visto en el CRTBP, pasemos las posiciones y velocidades a un sistema rotante que tenga la misma frecuencia angular que el movimiento orbital medio de las partículas más masivas. Para ello usemos como aproximación la ley armónica $n^2 a^3 = \mu$ que aplicada al sistema formado por las dos partículas masivas sería:

$$n = \sqrt{\frac{G(m_1 + m_2)}{a^3}}$$

donde a es la distancia promedio entre las partículas. Numéricamente:

```
#Distancia entre las partículas 1 y 2
from numpy.linalg import norm
r12=norm(rps[1]-rps[2],axis=1)
#Promedio
a=r12.mean()
```

a (distancia media entre partículas masivas) = 0.9999307295867872

Con ello la velocidad angular promedio será:

```
from numpy import sqrt
m1=sistema[1]["m"]
m2=sistema[2]["m"]
n=sqrt((m1+m2)/a**3)
```

n (velocidad orbital angular media de las partículas masivas) = 2.000207829235056

Rotemos ahora todas las posiciones y velocidades de las partículas usando los mismos métodos de la [Sección 5.5.5](#):

```
#Velocidad angular
w=n
from numpy import array
omega=array([0,0,w])

#Vectores en el sistema rotado
from numpy import zeros_like
rps_rot=zeros_like(rps)
vps_rot=zeros_like(vps)
for i in range(Nt):

    #Matriz de rotación
    from spiceypy import rotate,mxv
    R=rotate(w*ts[i],3)

    #Rota las posiciones y velocidades de cada partícula
    for n in range(3):
        rps_rot[n,i]=mxv(R,rps[n,i])
```

```
#v' = v + w x r
from spiceypy import vcrss
vps_rot[n,i]=mxv(R,vps[n,i]-vcrss(omega,rps[n,i]))
```

Veamos como se ve la dinámica en el sistema rotante después de esta transformación:

(Algoritmo 8.7)

```
from pymcel.export import plot_ncuerpos_3d
fig=plot_ncuerpos_3d(rps_rot,vps_rot,marker='o',ms=3);
```

ver Figura 8.7

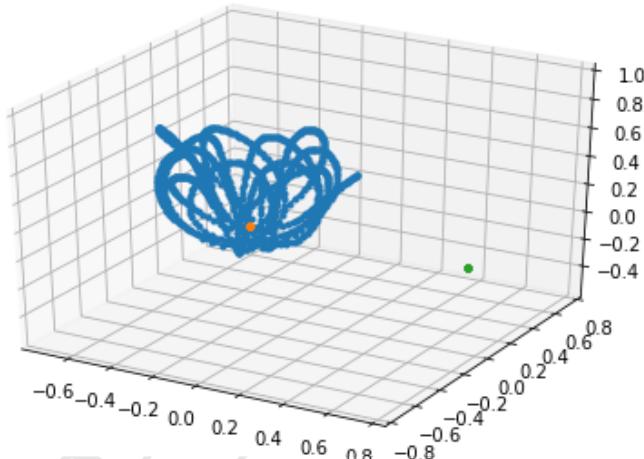


Figura 8.7: Figura correspondiente al código 8.7.

Como era de esperarse, las partículas más masivas parecen quietas, mientras que la partícula de prueba describe una trayectoria compleja en el sistema.

La prueba de fuego de nuestra teoría consiste en averiguar si incluso en un sistema que no satisface estrictamente las condiciones del CRTBP (la partícula de prueba tiene una masa distinta de cero, la órbita de las partículas masivas no es exactamente circular debido a la perturbación de la partícula), la cuadratura de Jacobi sigue siendo aproximadamente constante. Para ello calculemos el valor de C_J en este sistema usando la fórmula original en la Ec. (8.18):

```
#Posiciones de la partícula de prueba
r=rps_rot[0]

#Posiciones y velocidades relativas a las partículas masivas
from numpy.linalg import norm
r1=norm(rps_rot[0]-rps_rot[1],axis=1)
r2=norm(rps_rot[0]-rps_rot[2],axis=1)
```

```
#Rapideces
v=norm(vps_rot[0],axis=1)

#Parametros gravitacionales
mu1=m1
mu2=m2

#Cuadratura de Jacobi
CJ=2*mu1/r1+2*mu2/r2+w**2*(r[:,0]**2+r[:,1]**2)-v**2
```

Veamos un gráfico de C_J como función del tiempo:

(Algoritmo 8.8)

```
fig=plt.figure()
ax=fig.gca()
ax.plot(ts,CJ)
ax.set_xlabel("$t$ [u.c.]");
ax.set_ylabel("$C_J$ [u.c.]");
```

ver Figura 8.8

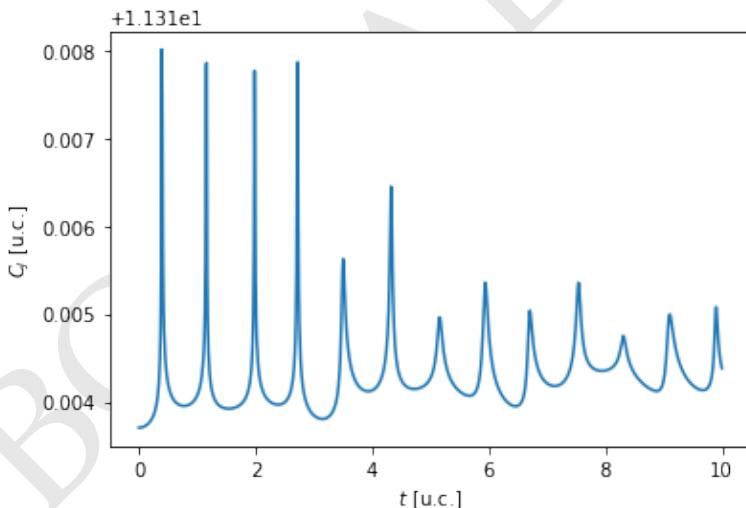


Figura 8.8: Figura correspondiente al código 8.8. Valor de la constante de Jacobi para el sistema real de tres cuerpos simulado en el capítulo.

La primera observación de interés que podemos hacer sobre la [Figura 8.8](#) es que efectivamente se verifica que incluso en un sistema real, el valor de C_J se mantiene aproximadamente constante, lo que nos da confianza frente a la aplicación del formalismo aproximado desarrollado para el CRTBP en casos de sistemas reales.

El valor de la constante en este caso ($C_J \approx 11,3$) no coincide con las expectativas de las secciones anteriores, en las que vimos que en condiciones normales esta

cantidad está entre 2 y 5. Sin embargo debemos tener en cuenta que todas las cantidades en la simulación del sistema real que vimos en esta sección están expresadas en un sistema de unidades canónicas que no coincide necesariamente con el del CRTBP.

8.11. Las regiones de exclusión

Saber que en cualquier instante del movimiento, la posición y velocidad de la partícula de prueba en el CRTBP obedece la ecuación general definida por la cuadratura de Jacobi, puede ser de gran utilidad para determinar cualquier cantidad cinemática conocidas las demás. Así por ejemplo, dado un sistema para el cuál se conoce el valor de la constante de Jacobi C_J , la rapidez de la partícula v puede calcularse fácilmente si se especifica su posición $\vec{r} : (x, y, z)$:

$$v^2 = \frac{2(1-\alpha)}{r_1} + \frac{2\alpha}{r_2} + x^2 + y^2 - C_J \quad (8.19)$$

Hay una propiedad adicional de esta relación que puede ser explotada para, sin necesidad de resolver la ecuación de movimiento, conocer de antemano los lugares del espacio que puede visitar la partícula. Y es que es claro que cualquiera sea la posición que ella tenga, debe cumplirse que siempre $v^2 \geq 0$. Esta condición física elemental puede expresarse a partir de la Ec. (8.19) mediante la desigualdad:

$$\frac{2(1-\alpha)}{r_1} + \frac{2\alpha}{r_2} + x^2 + y^2 - C_J \geq 0$$

Podemos llamar a los puntos del espacio que cumplen esta condición, *regiones permitidas* del espacio. Aún mejor es identificar todos los puntos que no la cumplen y que forman lo que llamaremos las **regiones de exclusión** del sistema en el CRTBP, es decir la región en la cuál la partícula nunca estará. Los puntos del espacio que están en las regiones de exclusión satisfacen la desigualdad:

$$\frac{2(1-\alpha)}{r_1} + \frac{2\alpha}{r_2} + x^2 + y^2 - C_J < 0 \quad (8.20)$$

Consideremos varios casos diferentes:

1. **Constante de Jacobi negativa** $C_J < 0$. Esta situación se produce cuando la velocidad de la partícula es relativamente grande, a saber:

$$v^2 > \frac{2(1-\alpha)}{r_1} + \frac{2\alpha}{r_2} + (x^2 + y^2)$$

En estas condiciones, todos los términos del lado izquierdo en la desigualdad de la Ec. (8.20) son positivo definidos. Por tanto, las regiones de exclusión forman un conjunto vacío; es decir ningún punto del espacio está excluido en el movimiento de la partícula (aunque naturalmente ella no los visitará todos). Podemos comparar esta situación con los sistemas no ligados que estudiamos en el problema de los N cuerpos o con sistemas de excentricidad positiva (energía específica relativa negativa) en el problema de los dos cuerpos.

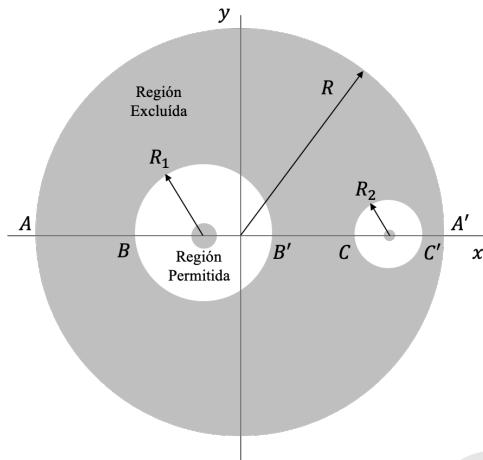


Figura 8.9: Representación esquemática de las regiones de exclusión (área sombreada) en el CRTBP.

2. **Constante de Jacobi nula** $C_J = 0$. Esta situación se producirá cuando, en un momento dado la rapidez de la partícula es:

$$v^2 = v_c^2 \equiv \frac{2(1-\alpha)}{r_1} + \frac{2\alpha}{r_2} + (x^2 + y^2)$$

En estas condiciones de nuevo todos los términos del lado izquierdo en la desigualdad de la Ec. (8.20) son positivo y otra vez no hay regiones de exclusión. Podemos comparar esta situación con el caso de sistemas de excentricidad nula (trayectorias parabólicas) en el problema de los dos cuerpos.

3. **Constante de Jacobi positiva** $C_J > 0$. Naturalmente, esta es la situación menos trivial y la que conduce a regiones de exclusión no nulas. Para analizar la geometría de las regiones de exclusión en este caso considere una situación con un valor C_J razonablemente pequeño ($C_J \approx 5 - v^2$). Podemos analizar los puntos del espacio considerando estos casos particulares:

- a. **Puntos cercanos a la partícula 1**, $r_1 \ll r_2$. Dado que normalmente $\alpha \ll 1$ y por tanto la partícula 1 está cerca al origen de coordenadas, los puntos que cumplen esta condición satisfacen también que $\rho \equiv \sqrt{x^2 + y^2} \ll 1$. En estas condiciones la desigualdad que define las regiones de exclusión será aproximadamente:

$$\frac{2(1-\alpha)}{r_1} < C_J$$

Que equivale a decir que todos los puntos afuera de la esfera $r_1 > R_1 \equiv 2(1-\alpha)/C_J$ están en la región de exclusión (ver Figura 8.9).

- b. **Puntos cercanos a la partícula 2,** $r_2 \ll r_1$. En este caso $\rho \equiv \sqrt{x^2 + y^2} \approx (1 - \alpha)$ y la desigualdad que define la región de exclusión se puede escribir como:

$$r_2 > R_2 \equiv \frac{2\alpha}{C_J - (1 - \alpha)^2}$$

todos los puntos más allá de esta esfera tampoco serán visitados por la partícula.

- c. **Puntos muy lejanos** $r_2, r_1 \gg 1$. Las regiones de exclusión definidas por las condiciones anteriores, parecerían excluir a todos los puntos que están más allá de las esferas de radio R_1 y R_2 . Sin embargo a distancias muy grandes, la desigualdad de la Ec. (8.20) se convierte:

$$x^2 + y^2 < C_J$$

que describe el interior de un cilindro de radio $\sqrt{C_J}$.

En síntesis, para *valores regulares* de C_J la región de exclusión corresponde a todos los puntos adentro de un cilindro de radio $R = \sqrt{C_J}$, pero afuera de una esfera de radio $R_1 = 2(1 - \alpha)/C_J$ centrada en la primera partícula 1 ($x_1 = -\alpha$) y otra de radio $R_2 = 2\alpha/[C_J - (1 - \alpha)^2]$ centrada en la partícula 2 ($x_2 = -\alpha$). En la Figura 8.9 se ilustra esquemáticamente la geometría de las regiones de exclusión en esta situación.

¿Cómo son el tamaño y la geometría de las regiones de exclusión para valores diferentes de C_J ? En la ?? se muestra como cambia la posición del intercepto de los límites de las regiones de exclusión (puntos A, A', B, B', C, C' en Figura 8.9) al cambiar el valor de la constante de Jacobi.

Como vemos allí entre menor es el valor de la constante de Jacobi, más cerca están la frontera de las regiones permitidas alrededor de las partículas masivas y más pequeño es la regiones de exclusión alrededor de ellas (cilindro de radio R). Para un determinado valor crítico de C_J las regiones permitidas alrededor de las partículas se tocan en un punto (los puntos B' y C coinciden). Llamamos a ese punto (que se encuentra sobre el eje x , es decir en $y = z = 0$), *punto colineal L_1* (ver siguiente sección). Para valores aún menores de C_J , la región permitida alrededor de la partícula 2 intercepta el límite exterior de la región de exclusión en un punto que llamaremos *punto colineal L_2* . Finalmente, cuando C_J alcanza un tercer valor crítico, la región permitida alrededor de la partícula 1 toca el límite exterior de la región de exclusión en un punto que llamaremos *punto colineal L_3* . En la Figura 8.11 se ilustra esquemáticamente la progresión en el tamaño y geometría de la región de exclusión al cambiar el valor de C_J y la definición y posición de los puntos colineales L_1 , L_2 y L_3 .

¿Qué es lo que pasa exactamente en los límites de las regiones de exclusión?. De acuerdo con la Ec. (8.20) estas regiones están limitadas por la condición:

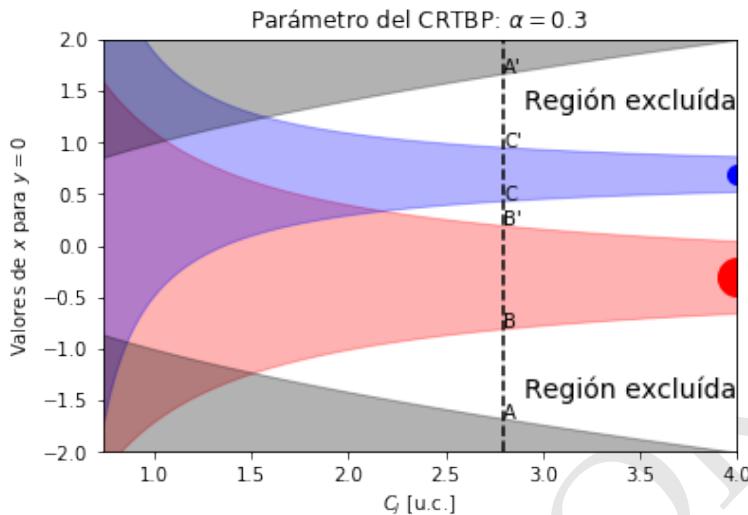


Figura 8.10: Intercepto sobre el eje x de los límites de las regiones de exclusión (zonas blancas no sombreadas).

$$\frac{2(1-\alpha)}{r_1} + \frac{2\alpha}{r_2} + x^2 + y^2 - C_J = 0 \quad (8.21)$$

Esta relación, de acuerdo a la definición misma de C_J (ver Ec. 8.19) demuestra que en esos puntos fronterizos, la rapidez de la partícula es siempre nula $v = 0$. Llamamos al lugar geométrico que ocupan esos puntos y que forman superficies que tapiza por *adentro* y por *afuera* a las regiones de exclusión, **superficies de cero velocidad**.

Cuando al moverse en una región permitida la partícula llega a las superficies de cero velocidad, se *detiene* brevemente, antes de emprender nuevamente su camino hacia adentro de la regiones permitida de la que venía. Las superficies de cero velocidad actúan entonces como *espejos dinámicos* en el CRTBP.

Para ilustrar los conceptos de regiones de exclusión, puntos colineales y superficies de cero velocidad, construyamos un sistema físico real, simulemos su trayectoria y comparemos esa trayectoria con la ubicación esperada de estas regiones del espacio. En el algoritmo a continuación se define el sistema, sus condiciones iniciales y se resuelve numéricamente las ecuaciones de movimiento.

```
#Propiedades del sistema y condiciones iniciales
alfa=0.3
ro=[0.3,0.0,0.0]
vo=[0.5,0.401,0.0]

#Tiempos de integración
from numpy import linspace
Nt=500
ts=linspace(0,20,Nt)
```

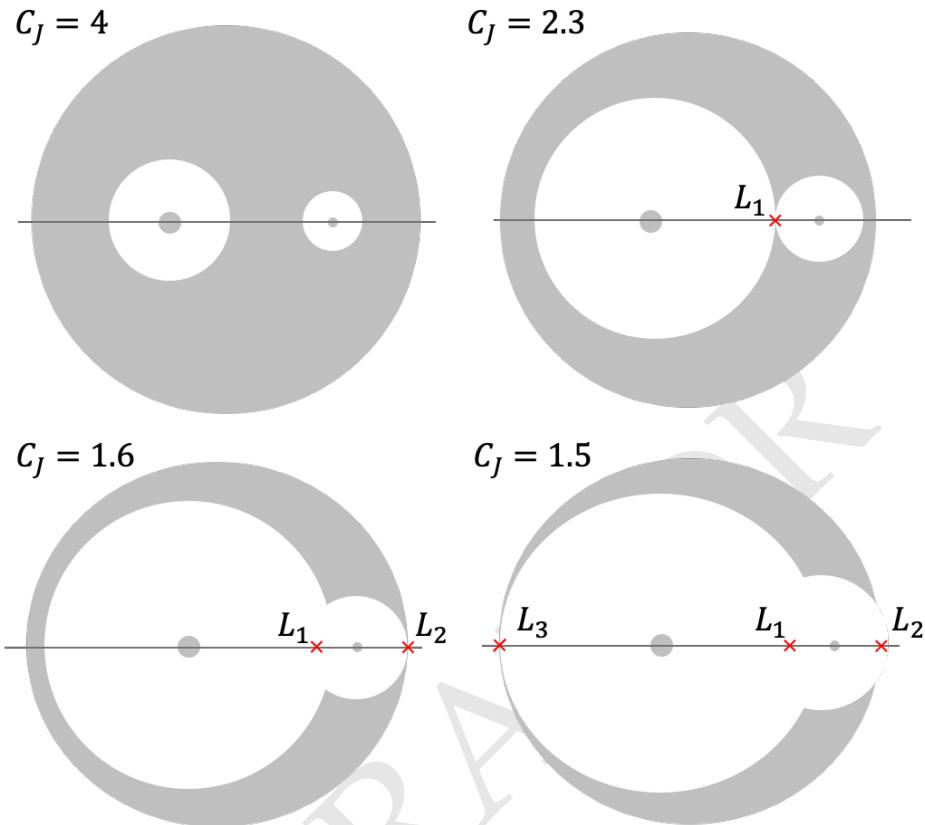


Figura 8.11: Representación esquemática de la definición de los puntos colineales L_1 , L_2 y L_3 en el CRTBP al cambiar el valor de la constante de Jacobi C_J . Los valores críticos de la constante son aproximados y corresponden al caso de un sistema con $\alpha = 0,3$.

```
#Resuelve numéricamente la ecuación de movimiento
from pymcel.export import crtbp_solucion
solucion=crtbp_solucion(alfa,ro,vo,ts)

#Extrae las posiciones y velocidades en el sistema rotante
rs=solucion[0]
vs=solucion[1]
```

¿Cuál es el valor de la constante de Jacobi de este sistema?. Usemos la rutina `constante_jacobi` que definimos en la Sección 8.9 para calcularlo:

```
from pymcel.export import constante_jacobi
CJs=constante_jacobi(alfa,rs,vs)
CJ=CJs[0]
```

`C_J = 3.5125323333333336`

Para encontrar la regiones de exclusión (y las superficies de cero velocidad) pa-

ra este valor específico de la constante, podemos utilizar el método que usamos en la [Sección 8.8](#), donde construimos una malla coordenada y superficies de contorno para visualizar los valores de la constante de Jacobi. Ahora, nos interesa visualizar, para un valor fijo de C_J , el valor predicho para v^2 de acuerdo con la Ec. (8.19):

```
#Tamaño de la malla y número de filas y columnas
rango=2.0
NG=80
#Malla de puntos en el plano
from numpy import meshgrid,linspace,ones_like
X,Y=meshgrid(linspace(-rango,rango,NG),linspace(-rango,rango,NG))
#Valores de v^2
from numpy import sqrt
V2=2*(1-alfa)/sqrt((X+alfa)**2+Y**2)+2*alfa/sqrt((X-1+alfa)**2+Y**2)+X**2+Y**2-CJ
```

Usando las coordenadas de la partícula y la matriz de rapideces V2, podemos ahora dibujar la relación entre ambas:

(Algoritmo 8.9)

```
fig=plt.figure(figsize=(5,5))
ax=fig.gca()

#Curva de cero velocidad
ax.contour(X,Y,V2,levels=[0],colors='k')

#Región de exclusión
ax.contourf(X,Y,V2,levels=[-100,0],colors='k',alpha=0.3)

#Trayectoria
ax.plot(rs[:,0],rs[:,1],color='green')

#Posición de las partículas con masa
ax.plot([-alfa],[0],'o',color='blue',markersize=10*(1-alfa))
ax.plot([1-alfa],[0],'o',color='orange',markersize=max(2,10*alfa))

#Decoración
ax.set_title(f"Sistema: $\backslash\alpha={alfa}$, $C_J={CJ:g}$")
ax.set_xlim((-rango,rango));
ax.set_ylim((-rango,rango));
```

ver Figura 8.12

Busque las figuras interactivas incluídas en el [sitio en línea del libro](#)⁵⁰.

8.12. El potencial modificado

En la sección anterior comprobamos teórica y numéricamente que las superficies de cero velocidad actúan como espejos contra los que se *reflejan* las trayectorias

⁵⁰http://seap-udea.org/MecanicaCeleste_Zuluaga

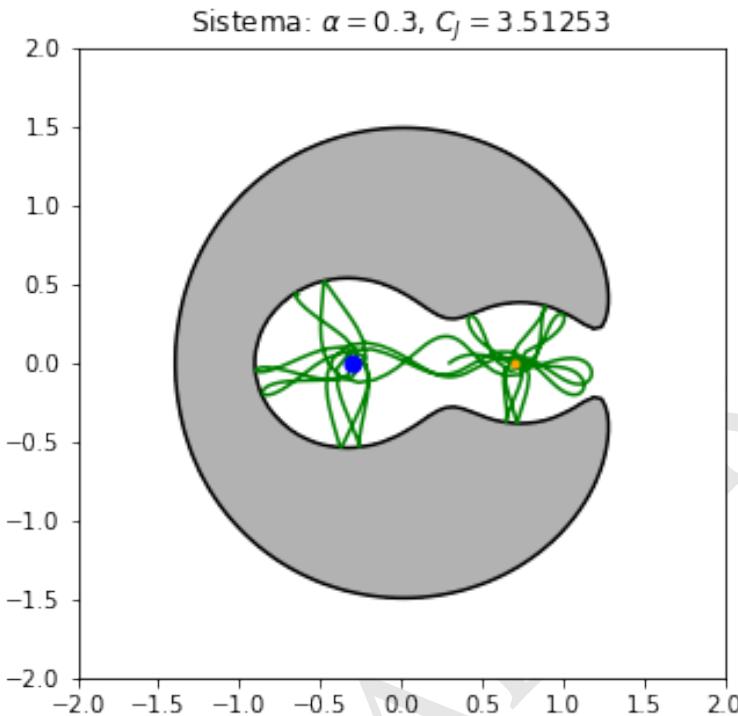


Figura 8.12: Figura correspondiente al código 8.9.

de partículas de prueba en el CRTBP. La razón de ello es que, por definición, cuando la partícula alcanza estas superficies imaginarias se detiene. Esto es consistente con el hecho además de que más allá de ellas se encuentran regiones que no pueden ser atravesadas por la partícula. Pero surge la pregunta de ¿por qué una vez la partícula llega a la superficie de cero velocidad y se detiene, vuelve después a ganar velocidad para desprendérse de ella? ¿en qué dirección se acelera después de alcanzar la superficie de cero velocidad?.

Para resolver estas preguntas podemos apelar a la ecuación de movimiento de la partícula que escribimos en la Sección 8.3:

$$\ddot{\vec{r}} = -(1 - \alpha) \frac{\vec{r}_1}{r_1^3} - \alpha \frac{\vec{r}_2}{r_2^3} - \hat{e}_z \times (\hat{e}_z \times \vec{r}) - 2\hat{e}_z \times \dot{\vec{r}} \quad (8.22)$$

Para el asunto particular que nos ocupa, nos interesa la forma que adopta esta ecuación de movimiento únicamente cuando la partícula está en reposo, es decir se encuentra sobre una superficie de cero velocidad. En estas condiciones el término de la aceleración de Coriolis desaparece y la ecuación se convierte en:

$$\ddot{\vec{r}} = -(1 - \alpha) \frac{\vec{r}_1}{r_1^3} - \alpha \frac{\vec{r}_2}{r_2^3} - \hat{e}_z \times (\hat{e}_z \times \vec{r}) \quad (8.23)$$

donde el subíndice 0 en $\ddot{\vec{r}}_0$ lo hemos usado para indicar que esta ecuación solo aplica para partículas que se encuentran en reposo en el sistema rotante.



Nota

Reposo no implica equilibrio. Aunque para este punto el lector debe seguramente haber reflexionado ampliamente sobre el malentendido común de que el reposo es lo mismo a la ausencia total de movimiento, no sobra, dada la importancia en este punto del libro, recordar esta distinción conceptual fundamental.

Por reposo entendemos el estado de movimiento caracterizado exclusivamente por la condición $\vec{v} = \vec{0}$. Ahora bien, el estado completo de movimiento de un cuerpo no solo está determinado por su velocidad. Otras propiedades cinemáticas también son importantes, siendo la más relevante para esta discusión la aceleración \vec{a} .

Si una partícula está en reposo, $\vec{v} = \vec{0}$ pero **también** tiene una aceleración nula $\vec{a} = \vec{0}$, entonces, en virtud del teorema de inercia la partícula se mantendrá en reposo hasta que una fuerza la saque de esa situación. A esta condición la llamamos **equilibrio**.

Sin embargo hay estados de movimiento en los que $\vec{v} = \vec{0}$ pero $\vec{a} \neq \vec{0}$ (reposo pero no equilibrio). Este es el caso por ejemplo de una partícula lanzada hacia arriba en un campo gravitacional casi uniforme (el campo gravitacional muy cerca a la superficie de la Tierra). En la parte alta de su trayectoria la partícula alcanza el reposo (se detiene) pero su aceleración (la aceleración de la gravedad) es distinta de cero (no hay equilibrio); un instante de tiempo después, la partícula estará nuevamente en movimiento hacia abajo.

Esto es justamente lo que pasa cuando en el CRTBP la partícula de prueba alcanza una superficie de cero velocidad: al hacerlo, se detiene, pero si la aceleración en aquel lugar es distinta de cero (dependiendo de lo que dicte justamente la Ec. 8.23) entonces un momento después estará otra vez en movimiento.

Es fácil mostrar (ver Problemas al final del capítulo) que la ecuación de movimiento en (8.23) puede escribirse en la forma:

$$\ddot{\vec{r}}_0 = -\vec{\nabla} \left[-\frac{(1-\alpha)}{r_1} - \frac{\alpha}{r_2} - \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \right] \quad (8.24)$$

es decir, en el sistema de referencia rotante, una partícula en reposo experimentará una aceleración producto de un potencial escalar diferente del simple potencial gravitacional newtoniano. A este potencial lo llamaremos aquí el **potencial modificado del CRTBP** y tiene la forma:

$$V_{\text{mod}} = -\frac{(1-\alpha)}{r_1} - \frac{\alpha}{r_2} - \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \quad (8.25)$$

En términos del potencial modificado las ecuación de movimiento del sistema (Ec. 8.22) incluso cuando la velocidad de la partícula de prueba no es 0, se pueden escribir como:

$$\ddot{x} - 2\dot{y} = -\frac{\partial V_{\text{mod}}}{\partial x} \quad (8.26)$$

$$\ddot{y} + 2\dot{x} = -\frac{\partial V_{\text{mod}}}{\partial y}$$

$$\ddot{z} = -\frac{\partial V_{\text{mod}}}{\partial z}$$

(8.27)

¿Cómo luce este potencial modificado?. Naturalmente el potencial V_{mod} depende de todas (x, y, z) y visualizarlo sería muy complejo. Sin embargo podemos, como hicimos en secciones anteriores, concentrarnos en el valor del potencial sobre el plano $x - y$ (el plano de la órbita de las partículas masivas). Visualizarlo allí puede darnos alguna intuición de su estructura 3d.

En el algoritmo a continuación se calcula el valor del potencial modificado en una malla coordenada como la que hemos usado a lo largo de este capítulo y se visualiza en el espacio de tres dimensiones:

```
#Parámetros del sistema
alfa=0.3

#Malla coordenada
from numpy import meshgrid,zeros_like,linspace
rango=1.5
NG=100
X,Y=meshgrid(linspace(-rango,rango,NG),
              linspace(-rango,rango,NG))
Z=zeros_like(X)
#Factor de suavizado (ver nota)
eps=0.8*alfa

#Distancia relativa
from numpy import sqrt
r1=sqrt((X+alfa)**2+Y**2+Z**2+eps**2)
r2=sqrt((X-1+alfa)**2+Y**2+Z**2+eps**2)

#Calcula el potencial
Vmod=-(1-alfa)/r1-alfa/r2-0.5*(X**2+Y**2)

Vmod =
[[[-2.72 -2.68 -2.64 ... -2.64 -2.68 -2.72]
 [-2.68 -2.64 -2.6 ... -2.6 -2.64 -2.68]
 [-2.65 -2.6 -2.57 ... -2.56 -2.6 -2.64]
 ...
 [-2.65 -2.6 -2.57 ... -2.56 -2.6 -2.64]
 [-2.68 -2.64 -2.6 ... -2.6 -2.64 -2.68]
 [-2.72 -2.68 -2.64 ... -2.64 -2.68 -2.72]]
```

Nótese que el valor absoluto del potencial es del orden de la mitad de la constante de Jacobi. Esto era de esperarse del hecho de que las expresiones que definen ambas cantidades son casi idénticas (Ecs. 8.25 y 8.18).

Nota: el factor de suavizado. En el cálculo del potencial hemos usado un artefacto matemático, que no procede de la teoría del CRTBP. Puesto que el valor del potencial es teóricamente infinito cuando $r_1 = 0$ o $r_2 = 0$ hemos introducido en las expresiones para el potencial una cantidad ficticia eps proporcional al parámetro α del sistema (relacionado con la masa de las partículas), y que hace que el potencial mantenga un valor finito cerca al centro de las partículas. La introducción de esta cantidad artificial implica también que los valores calculados del potencial no son los correctos a una cierta distancia de las partículas (típicamente similar al valor de eps).

Este *artefacto numérico* facilita la representación gráfica del potencial, pero también es importante en otras aplicaciones de la mecánica celeste. Así por ejemplo cuando se simula numéricamente la interacción gravitacional de partículas en sistemas de N cuerpos tales como galaxias o nubes de gas, el facto eps recibe el nombre de **factor de suavizado** y se usa para simular de alguna manera el hecho de que las *partículas de materia** tienen en realidad una dimensión finita (no son realmente puntuales).

Una gráfica del potencial modificado sobre el plano $x - y$ en el CRTBP se puede crear con el algoritmo a continuación:

```
%matplotlib inline
```

(Algoritmo 8.10)

```
#Grafico
import matplotlib.pyplot as plt
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D

fig=plt.figure()
ax=fig.add_subplot(111, projection='3d')
ax.plot_surface(X,Y,Vmod,cmap="jet",rstride=2,cstride=2)
ax.set_zlim((-3,0))
ax.view_init(30,-15)

ax.set_xlabel("$x$")
ax.set_ylabel("$y$")
ax.set_zlabel("$V_{\mathbf{mathrm{mod}}}$")
ax.set_title(f"Potencial modificado en el CRTBP con $\backslash\alpha={alfa}$")
fig.tight_layout()
```

ver Figura 8.13

Otra manera de visualizar el mismo potencial es usando un gráfico de contornos:

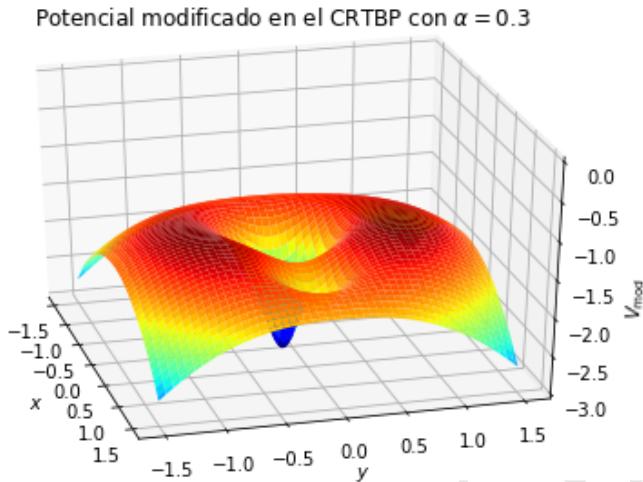


Figura 8.13: Figura correspondiente al código 8.10.

(Algoritmo 8.11)

```

fig=plt.figure()
ax=fig.gca()

#Contornos
ax.contour(X,Y,Vmod,levels=15,colors='k',linestyles='solid',alpha=0.3)
c=ax.contourf(X,Y,Vmod,levels=100,cmap="jet")
fig.colorbar(c)

#Decoración
ax.set_xlabel("$x$")
ax.set_ylabel("$y$")
ax.set_title(f"Potencial modificado en el CRTBP con $\\\alpha={alfa}$")
fig.tight_layout()

#Puntos de interés
ax.plot([0],[0], 'ko')
ax.text(0,0,'A',fontsize=18)
ax.plot([1],[1], 'ko')
ax.text(1,1,'B',fontsize=18)
ax.plot([0.8*alfa],[-1+0.7*alfa], 'ko')
ax.text(0.8*alfa,-1+0.7*alfa,'C',fontsize=18)
ax.plot([1+0.5*alfa],[0], 'ko')
ax.text(1+0.5*alfa,0,'D',fontsize=18);

```

ver Figura 8.14

¿Cómo podemos interpretar la estructura del potencial modificado?. Como es corriente en mecánica, el potencial asociado a una fuerza, dicta la manera como la partícula se acelera. En particular, la dirección de la aceleración es perpendicular a

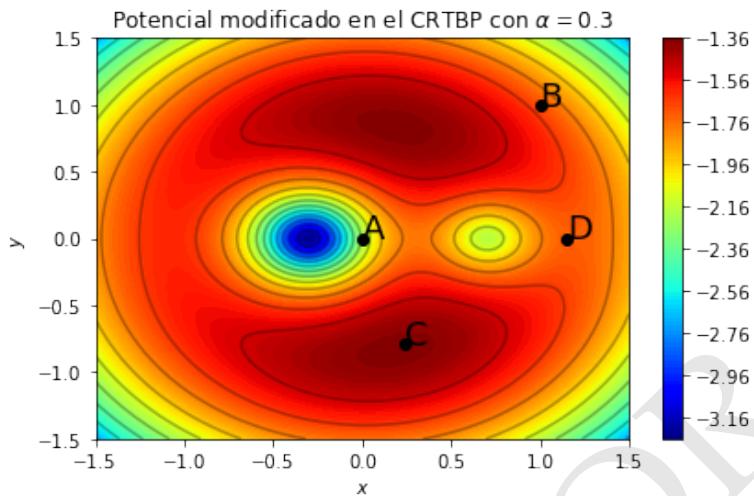


Figura 8.14: Figura correspondiente al código 8.11. Contornos del potencial modificado en el CRTBP (equipotenciales) y algunos puntos de interés para analizar.

las curvas de equipotencial (dirección del gradiente) y va en el sentido en el que el potencial disminuye.

En la gráfica de equipotenciales de la [Figura 8.14](#) hemos resaltado algunos puntos que merecen atención y que nos permiten interpretar mejor el significado de V_{mod} :

- *Punto A.* Un punto cercano a la partícula más masiva. Al examinar la posición de este punto entre los equipotenciales nos damos cuenta que la aceleración instantánea de una partícula de prueba puesta en reposo allí, apuntará en el sentido de la partícula (hacia donde disminuye el potencial). En otros términos, las partículas que en su movimiento en el CRTBP alcanzan superficies de cero velocidad cercanas a las partículas, tenderán a reflejarse en dirección a ellas. Eso es precisamente lo que vimos al estudiar numéricamente la dinámica en los ejemplos de la [Sección 8.11](#).
- *Punto B.* Un punto lejano a ambas partículas. Allí la situación también es bastante simple. Dado que en puntos lejanos a las partículas el potencial disminuye hacia afuera (como vemos por las *faldas* del potencial modificado en el gráfico en 3d de la [Figura 8.13](#)), una partícula dejada en reposo en el punto B se acelerará inicialmente hacia afuera, como si fuera repelida por el sistema. La razón aparente de este contrasentido es que debemos recordar que en el sistema rotante, incluso si la partícula está en reposo, actúa la aceleración centrífuga que se hace mayor en tanto más lejos esté la partícula del origen de coordenadas.
- *Punto C.* Un punto no colineal con las partículas masivas pero aproximadamente equidistante de ellas. Como vemos en [Figura 8.13](#)) en este punto se produce un máximo del potencial modificado. Esto implica que allí cerca el gradiente del potencial es cero y una partícula en reposo tenderá a quedarse

en reposo. Llamamos a este un **punto de equilibrio** en el sistema (ver próxima sección).

- *Punto D.* Un punto situado cerca al punto colineal L_2 , que definimos en la [Sección 8.11](#). Este punto, junto con aquellos cercanos también a L_1 y L_3 , tiene una característica peculiar. Como vemos en [Figura 8.13](#)) en este punto se produce un máximo local del potencial modificado. Esto implica, como sucedió en el caso de C, que allí cerca el gradiente del potencial también es cero y por lo tanto se trata también de un punto de equilibrio. Pero hay una diferencia fundamental entre el punto D y el C. No importa la dirección en la que se desplace la partícula después de salir de su posición en C, la aceleración se dirigirá en cualquier dirección menos hacia C. C actúa como una especie de punto repulsivo. En su lugar en el punto D ocurre algo curioso. Si la partícula se desplaza ligeramente en dirección perpendicular a la línea que une las partículas masivas ($+y$ o $-y$) la aceleración tendrá a restituirla allí de donde salió. En su lugar si se desplaza acercándose o alejándose de las partículas masivas el potencial tenderá a acercar o alejar rápidamente a la partícula de los cuerpos masivos. Decimos que D está en un **punto de silla** del potencial.

8.13. Los puntos de equilibrio de Lagrange

Al final de la sección anterior aprendimos que en el CRTBP existen puntos en el espacio alrededor de las partículas masivas en las que si se deja en reposo una partícula de prueba, esta permanecerá allí en equilibrio (para siempre en reposo). Usando gráficos del potencial modificado (que es el que determina la aceleración que sufre una partícula de prueba en reposo) podemos determinar aproximadamente la ubicación de esos “puntos de equilibrio”. Pero ¿cuál es su ubicación exacta? ¿qué importancia pueden llegar a tener estos puntos?

Nota: Equilibrio en el CRTBP. Es importante recordar que cuando hablamos de equilibrio en el contexto del CRTBP, nos referimos a una situación de reposo permanente en el marco de referencia rotante del sistema. Ahora bien, reposo en un sistema rotante, no implica reposo absoluto para cualquier otro sistema de referencia, en especial para el sistema de referencia inercial en el centro de masa. Es obvio que en este último sistema, una partícula de prueba que está cerca a partículas masivas no puede permanecer quieta. La atracción gravitacional de ellas induce algún tipo de movimiento.

El reposo permanente en el sistema rotante implica naturalmente que en el sistema inercial del centro de masa la partícula se mueve en una trayectoria circular, con exactamente la misma velocidad angular del sistema rotante. En otros términos, la partícula de prueba que está en equilibrio en el CRTBP, simplemente mantiene su posición relativa con respecto a las partículas masivas (no se acerca, ni se aleja), que obviamente están en movimiento. En la [Figura 8.15](#) se ilustra esquemáticamente esta importante condición que es fuente de muchas confusiones a la hora de entender las consecuencias prácticas de la dinámica del CRTBP.

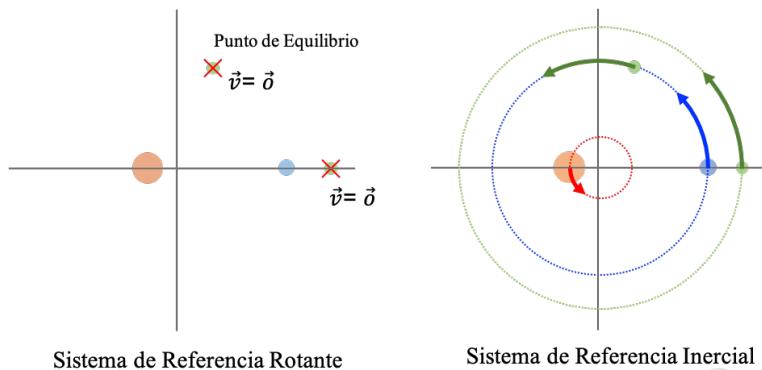


Figura 8.15: Ilustración esquemática de lo que significa que una partícula de prueba este en equilibrio en el sistema rotante del CRTBP. Cuando una partícula tiene velocidad cero y está en uno de los puntos de equilibrio del sistema, la partícula permanecerá en reposo allí. Sin embargo en el sistema inercial, en realidad, la partícula se mueve siguiendo una trayectoria circular con la misma velocidad angular relativa de las partículas masivas, manteniendo respecto a ella la misma distancia. Equilibrio en el CRTBP no significa reposo en el sistema de referencia inercial.

De acuerdo con la Ec. (8.24) la condición de equilibrio ($\vec{v} = \vec{o}$ y $\ddot{\vec{r}} = \vec{o}$) se puede expresar matemáticamente en términos del potencial modificado como:

$$\vec{\nabla} V_{\text{mod}} = \vec{o}$$

o en términos explícitos como las tres condiciones:

$$\begin{aligned}\frac{\partial V_{\text{mod}}}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial V_{\text{mod}}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial V_{\text{mod}}}{\partial z} &= 0\end{aligned}$$

La condición $\partial V_{\text{mod}} / \partial z = 0$ implica que:

$$\frac{\partial V_{\text{mod}}}{\partial z} = (1 - \alpha) \frac{z}{r_1^3} + \alpha \frac{z}{r_2^3} = 0$$

que solo es válida (para valores finitos de x, y, z) si $z = 0$. Esta condición implica que todos los puntos de equilibrio del sistema se encuentran sobre el plano xy .

Por otro lado $\partial V_{\text{mod}} / \partial y = 0$ implica que:

$$\frac{\partial V_{\text{mod}}}{\partial y} = (1 - \alpha) \frac{y}{r_1^3} + \alpha \frac{y}{r_2^3} - y = 0$$

Esta condición produce dos familias de puntos:

1. Aquellos para los cuáles $y = 0$. Llamamos a estos los *puntos de equilibrio colineales* y como intuirán coinciden con los mismos puntos que descubrimos estudiando las regiones de exclusión.
2. Aquellos puntos (no colineales, $y \neq 0$) para los cuales se cumple que:

$$\frac{1-\alpha}{r_1^3} + \frac{\alpha}{r_2^3} - 1 = 0$$

Para saber el número y ubicación exacta de estas dos familias de puntos es necesario, finalmente, aplicar la condición $\partial V_{mod}/\partial x = 0$:

$$(1-\alpha)\frac{(x-x_1)}{r_1^3} + \alpha\frac{(x-x_2)}{r_2^3} - x = 0 \quad (8.28)$$

8.13.1. Puntos de equilibrio triangulares

La ubicación de los puntos que se encuentran fuera del eje x puede hallarse resolviendo simultáneamente las ecuaciones:

$$\begin{aligned} \frac{1-\alpha}{r_1^3} + \frac{\alpha}{r_2^3} - 1 &= 0 \\ (1-\alpha)\frac{(x-x_1)}{r_1^3} + \alpha\frac{(x-x_2)}{r_2^3} - x &= 0 \end{aligned}$$

Si multiplicamos ambas ecuaciones por $(x-x_2)$ y $(x-x_1)$, respectivamente, y primero restamos y luego sumamos las expresiones resultantes, obtenemos este conjunto de ecuaciones equivalente en las cuales se ha eliminado x :

$$\begin{aligned} -x_2 + \frac{(1-\alpha)}{r_1^3}(-x_1 + x_2) &= 0 \\ -x_1 + \frac{\alpha}{r_2^3}(-x_2 + x_1) &= 0 \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $x_1 = -\alpha$ y $x_2 = 1 - \alpha$, la solución independiente de las dos ecuaciones produce:

$$r_1 = r_2 = 1$$

Es decir, los puntos de equilibrio por fuera del eje x están a la misma distancia, tanto de la partícula 1 como de la partícula 2; distancia que además es igual a la distancia entre esas partículas (recordemos que en las unidades canónicas del CRTBP, $a = 1$).

Sólo hay dos puntos en el plano $x - y$ que satisfacen esta condición: uno que tiene $y > 0$ y que llamaremos L_4 (por encontrarse en la misma dirección del movimiento de las partículas masivas en el sistema inercial) y un segundo punto que tiene $y < 0$ y que llamaremos L_5 . En la ?? se ilustra esquemáticamente la ubicación de estos puntos.

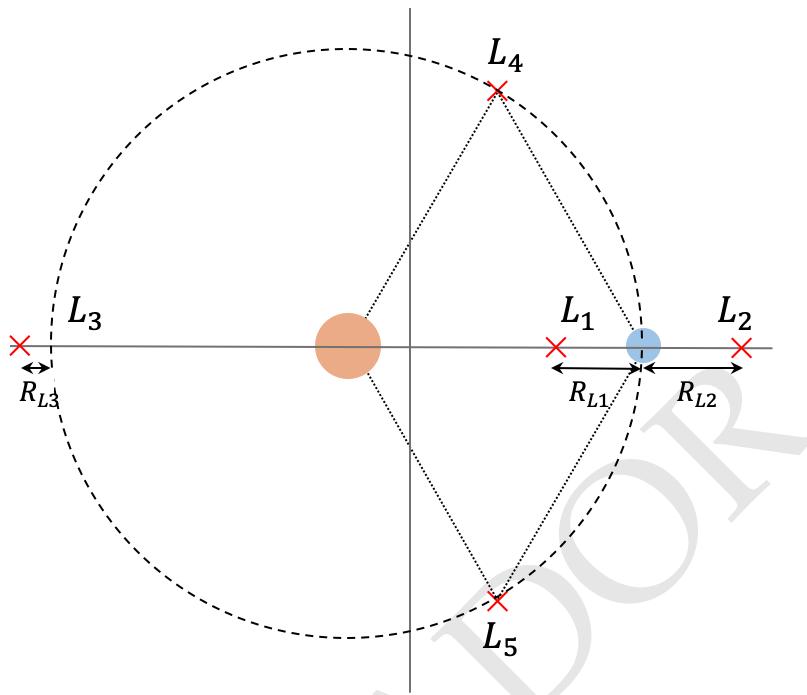


Figura 8.16: Ubicación esquemática de los puntos de equilibrio de Lagrange: puntos colineales L_1 , L_2 y L_3 y puntos triangulares L_4 y L_5 . Para los puntos colineales se han indicado las distancias R_{L1} , R_{L2} y R_{L3} de cada uno a un punto de referencia vecino: la segunda partícula en el caso de L_1 y L_2 o el lado opuesto de una circunferencia imaginaria centrada en la partícula más masiva y con radio unitario (circunferencia rayada). Es importante entender que la circunferencia imaginaria representada aquí no es en general la trayectoria de la partícula 2 que debería estar centrada en el origen (centro de masa) y solo coincide con ella en el caso en que $\alpha \ll 1$.

8.13.2. Puntos de equilibrio colineales

Partiendo de la Ec. (8.28) y recordando que los puntos de equilibrio colineales tienen $y = z = 0$, la coordenada x de estos puntos satisface la ecuación algebraica:

$$f_L(x) \equiv x - (1-\alpha) \frac{(x-x_1)}{|x-x_1|^3} - \alpha \frac{(x-x_2)}{|x-x_2|^3} = 0 \quad (8.29)$$

La siguiente rutina implementa el cálculo de la función $f_L(x)$ en el lado izquierdo de la ecuación anterior:

```
def funcion_puntos_colineales(x,alfa):
    x1=-alfa
    x2=1-alfa
    f=(1-alfa)*(x-x1)/abs(x-x1)**3+alfa*(x-x2)/abs(x-x2)**3-x
    return f
```

En la ?? se muestra un gráfico de esta función, que corresponde a un conjunto

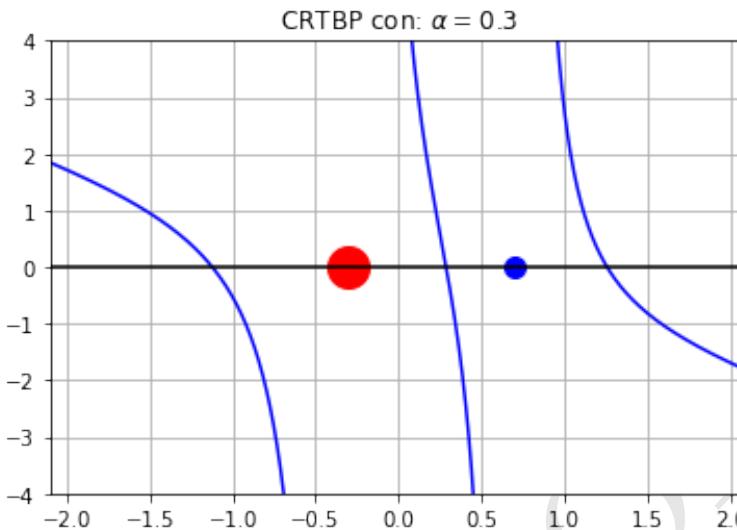


Figura 8.17: YOU MUST ADD A CAPTION.

de polinomios de grado 5, que intersectan el eje x en al menos tres puntos (los puntos colineales).

8.13.3. Punto colineal de equilibrio, L_1

Este punto se encuentra en el intervalo $x_1 < x < x_2$. Por la misma razón se cumple que $(x - x_1) > 0$ y $(x - x_2) < 0$ y por tanto, la Ec. (8.29) se escribirá como:

$$x - \frac{(1-\alpha)}{(x-x_1)^2} + \frac{\alpha}{(x_2-x)^2} = 0$$

Si llamamos $R_{L1} \equiv x_2 - x$ (distancia de L_1 a la partícula 2, ver ??) y escribimos explícitamente $x_1 = -\alpha$ y $x_2 = 1 - \alpha$, la ecuación se puede escribir en la forma:

$$(1 - \alpha - R_{L1}) - \frac{(1-\alpha)}{(1-R_{L1})^2} + \frac{\alpha}{R_{L1}^2} = 0$$

Una aproximación útil se puede obtener para valores pequeños de $\alpha \ll 1$, para los cuales también asumimos que $R_{L1} \ll 1$. Si se expande el segundo término de la ecuación anterior usando el teorema del binomio, el resultado se puede escribir como:

$$(1 - \alpha - R_{L1})R_{L1}^2 - (1 - \alpha)(1 + 2R_{L1})R_{L1}^2 + \alpha \approx 0$$

Con un poco de álgebra podemos despejar R_{L1} como:

$$R_{L1}^3 \approx \frac{\alpha}{3 - 2\alpha}$$

Dado que $\alpha \ll 1$, podemos usar nuevamente el teorema del binomio para simplificar aún más esta expresión eliminando todos los términos de segundo orden en α del lado derecho. La expresión aproximada más simple para R_{L1} será:

$$R_{L1} \approx \sqrt[3]{\frac{\alpha}{3}} \quad (8.30)$$

Con estas aproximaciones, la coordenada x del punto L_1 se puede escribir finalmente como:

$$x_{L1} \approx 1 - \alpha - \sqrt[3]{\frac{\alpha}{3}} \quad (8.31)$$

Más adelante evaluaremos la calidad de esta aproximación, comparándola con el valor preciso de esta cantidad, calculado resolviendo numéricamente la Ec. (8.29).

8.13.4. Punto colineal de equilibrio, L_2

Este punto se encuentra en el intervalo $x_1, x_2 < x$, en el que ambos $(x - x_1)$ y $(x - x_2)$ son positivos y por tanto la Ec. (8.29) se puede escribir como:

$$x - \frac{(1 - \alpha)}{(x - x_1)^2} - \frac{\alpha}{(x - x_2)^2} = 0$$

Si ahora llamamos $R_{L2} \equiv x - x_2$, la ecuación resultante es:

$$(1 - \alpha + R_{L2}) - \frac{(1 - \alpha)}{(1 + R_{L2})^2} - \frac{\alpha}{R_{L2}^2} = 0$$

Aplicando un procedimiento análogo al que usamos para encontrar R_{L1} , obtenemos también:

$$R_{L2} \approx \sqrt[3]{\frac{\alpha}{3}}$$

es decir, para $\alpha \ll 1$, el punto de equilibrio colineal L_2 se encuentra, aproximadamente a la misma distancia de la partícula 2 que el punto L_1 . Esta propiedad puede ser usada para definir algunas cantidades de interés astronómico sobre las que volveremos más adelante.

Finalmente la coordenada x de L_2 se puede finalmente escribir como:

$$x_{L2} \approx 1 - \alpha + \sqrt[3]{\frac{\alpha}{3}} \quad (8.32)$$

8.13.5. Punto colineal de equilibrio, L_3

Este punto se encuentra en el intervalo $x < x_1, x_2$ en el que ambos $(x - x_1)$ y $(x - x_2)$ son negativos y por tanto la Ec. (8.29) queda:

$$x + \frac{(1 - \alpha)}{(x_1 - x)^2} + \frac{\alpha}{(x_2 - x)^2} = 0$$

Si ahora hacemos $R_{L3} \equiv -1 - x$ (ver ??), la ecuación queda:

$$(R_{L3} - 1) + \frac{(1 - \alpha)}{(-\alpha + R_{L3} + 1)^2} + \frac{\alpha}{(1 - \alpha + 1 + R_{L3})^2} = 0$$

Expandiendo el segundo y tercer término usando el teorema del binomio, la ecuación aproximada a primer orden en $R_{L3} - \alpha$ será:

$$-R_{L3} - 1 + (1 - \alpha)[1 - 2(R_{L3} - \alpha)] + \frac{\alpha}{4}[1 - (R_{L3} - \alpha)] \approx 0$$

Despejando R_{L3} obtenemos:

$$R_{L3} \approx \frac{5\alpha - 7\alpha^2}{12 - 7\alpha}$$

y usando nuevamente el teorema del binomio para expresar la solución a primer orden en α , obtenemos finalmente la aproximación:

$$R_{L3} \approx \frac{5\alpha}{12}$$

La coordenada x del punto colineal L_3 se puede finalmente escribir como:

$$x_{L3} \approx -1 - \frac{5\alpha}{12} \quad (8.33)$$

8.13.6. Precisión de la aproximación analítica {crtbp_colineales_precision}

La posición precisa de los puntos colineales de Lagrange se puede encontrar, para cualquier valor de α , resolviendo numéricamente la Ec. (8.29). Para ello necesitamos usar un algoritmo que permita encontrar la raíz de una ecuación dado un intervalo en el que sabemos se encuentra esa misma raíz (que en el caso de cada punto de Lagrange será diferente). El método de *bisección* (o cualquier método de *horquillado*) será ideal para este propósito.

Así por ejemplo, la posición de L_1 (x_{L1}), para el valor de α considerado en la ??, se obtiene usando el siguiente algoritmo:

```
alfa=0.3
from scipy.optimize import bisect
x_L1_num=bisect(funcion_puntos_colineales,0,1-1.01*alfa,args=(alfa,))
```

Posición precisa de L1 (alfa = 0.3) = 0.28612978205071515

Nótese que hemos utilizado como *intervalo de horquillado*, aquel que se encuentra entre el centro de masa (origen de coordenadas) y un punto cercano (pero no igual para evitar las singularidades de la ecuación) a la posición de la partícula 2. La elección adecuada de este intervalo es crucial.

Podemos comparar el valor preciso calculado para la posición del punto L_1 , con la aproximación obtenida con la Ec. (8.30):

```
x_L1_aprox=1-alfa-(alfa/3)**(1./3)
```

Posición aproximada de L₁ ($\alpha = 0.3$) = 0.23584111663872204

Naturalmente hay una discrepancia importante debido a que ciertamente, en este caso, α no es muy pequeña. En la Figura 8.18 se compara la posición relativa (R_{L1} , R_{L2} y R_{L3}) de los puntos colineales de Lagrange, calculada de forma precisa (resolviendo numéricamente la Ec. 8.29) y usando las expresiones aproximadas desarrolladas en esta sección, para un amplio rango de valores del parámetro α .

(Algoritmo 8.12)

```
#Valores de alfa
from numpy import log10,logspace
log_alfas=linspace(log10(1e-4),log10(4e-1),100)

#Calcula posición relativa de los puntos
Ls=[]
for log_alfa in log_alfas:
    from scipy.optimize import bisect
    alfa=10**log_alfa
    Ls+=[[
        #Valores precisos
        (1-alfa)-bisect(funcion_puntos_colineales,0,1-2*alfa,args=(alfa,)),
        bisect(funcion_puntos_colineales,1-0.5*alfa,2,args=(alfa,))-(1-alfa),
        -1-bisect(funcion_puntos_colineales,-2,-0.5,args=(alfa,)),
        #Valores aproximados
        (alfa/3)**(1./3),
        (alfa/3)**(1./3),
        5*alfa/12
    ]]
from numpy import array,abs
Ls=array(Ls)

#Grafica
fig,axs=plt.subplots(3,1,figsize=(4,6),sharex=True)
ax=axs[0]
ax.plot(10**log_alfas,Ls[:,0],'k-',label='Preciso')
ax.plot(10**log_alfas,Ls[:,3],'k--',label='Aproximado',lw=3)
ax=axs[1]
ax.plot(10**log_alfas,Ls[:,1],'k-')
ax.plot(10**log_alfas,Ls[:,4],'k--',lw=3)
ax=axs[2]
ax.plot(10**log_alfas,Ls[:,2],'k-')
ax.plot(10**log_alfas,Ls[:,5],'k--',lw=3)

#Decora
axs[2].set_xlabel("$\alpha$")
axs[0].set_ylabel("$R_{L1}$")
axs[1].set_ylabel("$R_{L2}$")
axs[2].set_ylabel("$R_{L3}$")
axs[0].legend()
for ax in axs:
    ax.set_xscale("log");
```

```

    ax.grid()
    fig.tight_layout()

```

ver Figura 8.18

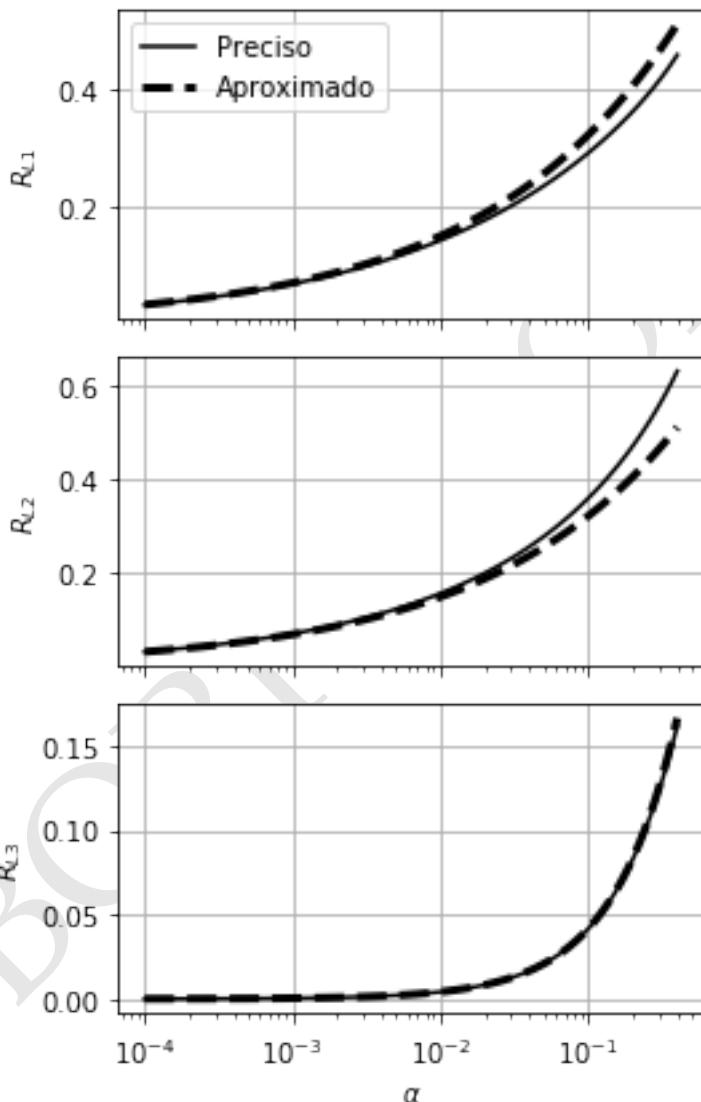


Figura 8.18: Distancia relativa de los puntos de equilibrio colineales en el CRTBP para un amplio rango de valores de α .

Como puede verse de la Figura, la posición de los puntos de equilibrio colineales L_1 y L_2 puede obtenerse con errores menores a $\sim 1\%$ para valores de $\alpha < 10^{-2}$ (una situación bastante común en astronomía). Se nota además que el punto L_2

esta siempre más lejos de la partícula 2 que el punto L_1 (la curva rayada en los gráficos de ambas cantidades es igual). De otro lado, la aproximación analítica para la posición del punto L_3 es bastante precisa para un amplio rango de valores de α .

8.14. Aplicaciones del CRTBP

Aunque los resultados teóricos de las secciones anteriores parecerían no ser más que curiosidades matemáticas con poca o ninguna importancia en la descripción de sistemas físicos reales (¿qué aplicación podría tener por ejemplo los conceptos de puntos de equilibrio de Lagrange si requieren la increíble coincidencia de que una partícula de prueba se ubique en reposo exactamente sobre ellos para permanecer en reposo allí?) la verdad es que tanto astrónomos como ingenieros aeroespaciales han utilizado estos resultados teóricos para entender y describir fenómenos bastante reales, e incluso para aprovechar la compleja gravitación de los cuerpos reales del sistema solar en función de distintos propósitos de exploración.

8.14.1. El radio de Hill y el lóbulo de Roche

Dos de esos conceptos útiles en astronomía derivados del estudio teórico del CRTBP son los de **radio de Hill** o **radio de Roche**. Para introducir estos conceptos, volvamos nuevamente a los conceptos de regiones de exclusión, superficies de cero velocidad, constante de Jacobi y potencial modificado V_{mod} , pero considerándolos ahora a la luz de lo que aprendimos sobre los puntos de equilibrio de Lagrange.

Calculemos, por ejemplo, el valor del potencial modificado (o la constante de Jacobi) para una partícula que se encuentra justamente sobre el punto de Lagrange L_1 . Para ello necesitamos primero calcular de forma muy precisa la posición de este punto sobre el eje x :

```
#Parámetro del sistema
alfa=0.05

#Posición del punto L1
from scipy.optimize import bisect
from pymcel.export import funcion_puntos_colineales
xL1=bisect(funcion_puntos_colineales,0,1-2*alfa,args=(alfa,))
xL2=bisect(funcion_puntos_colineales,1-0.5*alfa,2,args=(alfa,))
```

Posición de L_1 : 0.7152253503687463

Posición de L_2 : 1.2280936671011202

El valor de la constante de Jacobi y el potencial modificado será entonces:

```
from numpy import array
from pymcel.export import constante_jacobi
CJ_L1=constante_jacobi(alfa,[[xL1,0,0],[[0,0,0]]])[0]
Vmod_L1=-CJ_L1/2

print(f"Constante de Jacobi = {CJ_L1}")
print(f"Potencial modificado = {Vmod_L1}")
```

```
Constante de Jacobi = 3.420416387383213
Potencial modificado = -1.7102081936916065
```

Hagamos ahora un gráfico del potencial modificado, resaltando, la curva equipotencial correspondiente a al valor específico calculado anteriormente y la posición de los puntos de Lagrange L_1 y L_2 :

```
%matplotlib inline
```

(Algoritmo 8.13)

```
#Malla coordenada
from numpy import meshgrid,zeros_like,linspace
rango=1.5
NG=100
X,Y=meshgrid(linspace(-rango,rango,NG),
              linspace(-rango,rango,NG))
Z=zeros_like(X)

#Distancia relativa
from numpy import sqrt
r1=sqrt((X+alfa)**2+Y**2+Z**2)
r2=sqrt((X-1+alfa)**2+Y**2+Z**2)

#Calcula el potencial
Vmod=-(1-alfa)/r1-alfa/r2-0.5*(X**2+Y**2)

#Gráfico
import matplotlib.pyplot as plt
fig=plt.figure(figsize=(5,5))
ax=fig.gca()

#Contornos
ax.contour(X,Y,Vmod,levels=[Vmod_L1],colors='k',linestyles='solid');
ax.contourf(X,Y,Vmod,levels=linspace(-3,Vmod.max(),100),cmap="jet");

#Posición de los puntos de Lagrange
ax.plot([xL1],[0],'w+',ms=10);
ax.plot([xL2],[0],'w+',ms=10);

#Esfera de Hill
from matplotlib.patches import Circle
ax.add_patch(Circle([1-alfa,0],(alfa/3)**(1./3),
                     color='w',fill=None,linestyle='--'));

#Decoración
ax.set_title(f"CRTBP para $\alpha={alfa}$");
```

ver Figura 8.19

¿Cómo podemos interpretar el mapa del potencial en la Figura 8.19?. Imaginemos que ponemos una partícula de prueba en reposo sobre el punto de Lagrange

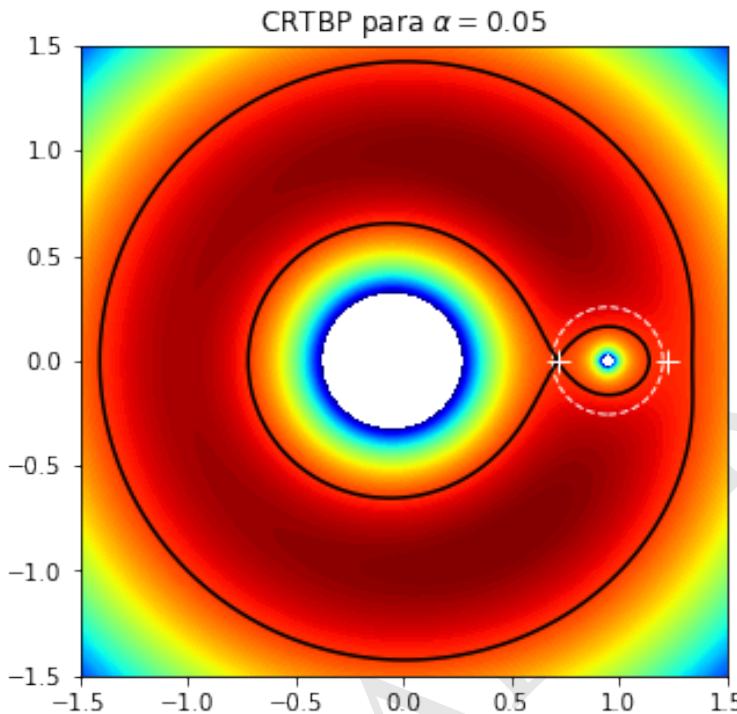


Figura 8.19: Gráfico del potencial modificado en el CRTBP (mapa de colores) resaltando las curvas equipotenciales correspondientes al valor del potencial del punto de Lagrange L_1 (curva sólida negra), la posición de los puntos de Lagrange L_1 y L_2 (cruces blancas) y la esfera de Hill (circunferencia rayada).

L_1 . Por tratarse de un punto de equilibrio, la partícula permanecerá allí para siempre.

Si perturbarmos levemente su posición, por ejemplo, empujándola un poco hacia la derecha, el potencial dictará que la partícula de prueba terminará acelerándose hacia la partícula 2.

Sin modificar mucho las condiciones dinámicas, la curva equipotencial es también, en ese caso, el límite de la región de exclusión correspondiente. Por lo tanto la trayectoria de la partícula inicialmente perturbada, se mantendrá restringida a los límites impuestos por esa curva equipotencial.

La misma situación aplica si empujaramos la partícula hacia la izquierda, de modo que su trayectoria quedará atrapada en la región con forma de gota que delimita el equipotencial alrededor de la partícula 1.

Podemos considerar por tanto la curva equipotencial correspondiente a L_1 (o lo que es lo mismo, la superficie de cero velocidad que pasa por ese punto) como el límite de las regiones dentro de las cuales, partículas inicialmente en reposo (en el sistema rotante por supuesto) se mantendrán ligadas a las partículas masivas. Este equipotencial delimita, por decirlo de otra manera, las regiones del espacio en los que la gravedad de cada cuerpo domina sobre el otro.

Podemos dividir esta región en dos partes:

- Aquella que limita el espacio alrededor de la partícula 1 (la más masiva). Llamamos a esta región el **lóbulo de Roche** (por su forma particular). La dinámica de las partículas dentro de esta región está dominada por este cuerpo. Si una partícula atraviesa ese límite (especialmente si lo hace cerca a L_1) terminará siendo *transferida* al cuerpo 2. El volumen del lóbulo de Roche es muy importante en distintas aplicaciones astrofísicas y se cuantifica con el denominado **radio de Roche** (ver el cuadro de Nota *el radio de Roche*).
- Aquella que limita el espacio alrededor de la partícula 2 (la menos masiva). Esta región, que también tiene una forma no trivial, puede en el caso de $\alpha \ll 1$ aproximarse como una esfera con un radio igual a la distancia relativa del punto L_1 a la partícula 2 (que es aproximadamente igual también en este caso a la distancia relativa de L_2). Llamamos a esta esfera imaginaria la **esfera de Hill** y su radio, por definición, lo asumiremos igual a la aproximación analítica de R_{L1} de la Ec. (8.30):

$$R_H \equiv \sqrt[3]{\frac{\alpha}{3}}$$

Nota

el radio de Roche. En el estudio de estrellas binarias interactuantes se acostumbra, en lugar del radio de Hill, usar el **radio de Roche**, definido como el radio de una esfera con el mismo volumen contenido dentro de la equipotencial (bien sea de la partícula 1, el lóbulo de Roche o de la partícula 2, el equivalente a la esfera de Hill).

Es bien conocida en la literatura especializada la aproximación analítica de Eggleton [23] para el radio de Roche:

$$R_L = \frac{0,49q^{2/3}}{0,6q^{2/3} + \log(1 + q^{1/3})}$$

donde $q = 1/\alpha$ para el caso del lóbulo de Roche la partícula masiva y $q = \alpha$ en el caso de la partícula menos masiva. Esta fórmula provee el valor del radio de Roche con una precisión inferior a 1 % para cualquier valor en el intervalo $0 < q < \infty$.

Una situación astrofísica concreta en la que esta teoría tiene aplicación se produce cuando dos estrellas evolucionan a una distancia muy cercana una de otra. Llamamos a este tipo de sistemas *binarias de contacto*. En este tipo de binarias, una o las dos estrellas pueden alcanzar estados evolutivos en los que crece hasta ser tan grande como su lóbulo de Roche. Cuando esta situación se produce, parte de la materia en la envoltura de la estrella que creció es transferida a la otra estrella, proceso en el cuál se pueden dar fenómenos astrofísicos muy interesantes.

En el caso en que las componentes sean estrellas normales, el fenómeno conduce a la formación de lo que se conoce como una envoltura común, o lo que podría-

mos describir como una “estrella siamés”: dos cuerpos unidos por el cuello de sus lóbulos de Roche. Las estrellas bajo esta condición evolución de formas diferentes a como lo hacen estrellas individuales o con compañeras situadas a una distancia mucho mayor que su tamaño.

Algunos de los fenómenos más interesantes se producen cuando una de las compañeras es lo que se conoce en astrofísica como un objeto compacto: una enana blanca, una estrella de neutrones o un agujero negro. El interés en estos casos estriba en que al tratarse estos últimos de objetos con una densidad muy alta y un campo gravitacional superficial muy intenso, la transferencia de materia *fresca* de su estrella compañera puede, primero, crear una nueva entidad astrofísica conocida como un disco de acreción. Estos discos pueden ser fuentes de radiación de alta energía que permite detectar el sistema. En la [Figura 8.20](#) se muestra una representación artística de un sistema con estas características.

En segundo lugar, si la cantidad de materia transferida es muy grande, el objeto compacto puede volverse inestable. En algunos casos se pueden producir “pequeños” estallidos (que dan lugar a fenómenos astronómicos conocidos como Novas) o grandes estallidos que destruyen el objeto compacto y posiblemente su compañero. En este caso puede producirse lo que los astrofísicos llaman *Supernovas tipo Ia*.

En todos esos casos, conocer el radio del lóbulo de Roche, su relación con las propiedades orbitales del sistema y la densidad de la estrella a la que se está arrebantando masa, es fundamental para entender las observaciones que se realizan del sistema desde la Tierra.

En el estudio de la dinámica del Sistema Solar o de cualquier otro sistema planetario, el cálculo del radio de la esfera de Hill es fundamental para la descripción de las órbitas de satélites espaciales o naves espaciales, incluso para entender su destino a largo plazo.

Consideremos un primer caso simple: el sistema Sol-Tierra. Sabemos que la Tierra en la actualidad tiene una órbita con una excentricidad muy baja (menos de 2%). Por lo tanto podemos aplicar la teoría del CRTBP para describir lo que pasa a cuerpos mucho menos masivos que se mueven en el espacio entre nuestro planeta y el Sol.

En el algoritmo a continuación se calcula primero el parámetro α del sistema Tierra-Sol:

```
#Lee las masas de los planetas
from spiceypy import furnsh
furnsh("pymcel/data/de430.tpc")

#Constante de gravedad universal
G=6.67e-20 # km^3 / kg s^2

#Masa de la Tierra y el sol
from spiceypy import bodvrd
mutierra=bodvrd("EARTH", "GM", 1)[1][0]
musol=bodvrd("SUN", "GM", 1)[1][0]

#Parámetro alfa
alfa=mutierra/(mutierra+musol)
```

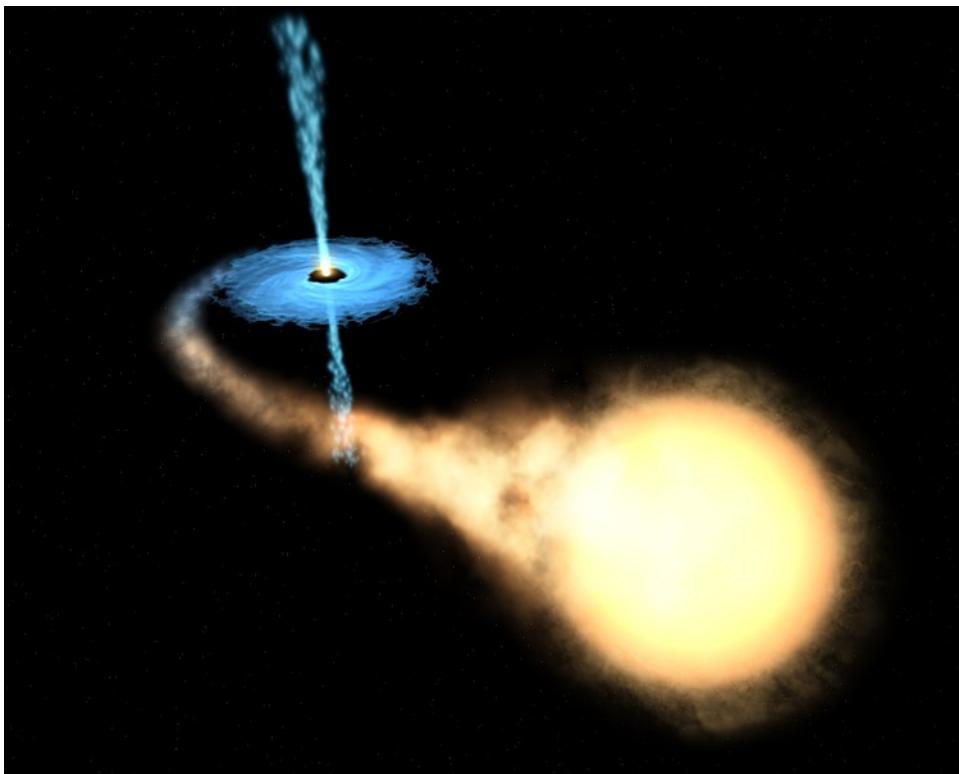


Figura 8.20: Representación artística de la transferencia de masa desde una estrella que ha llenado su lóbulo de Roche (a la derecha) tras alcanzar un estadio evolutivo tardío y un objeto compacto (compañera binaria) alrededor del cual se forma un disco de acreción (disco azul a la izquierda). Este tipo de sistemas puede emitir abundante rayos X lo que permite que la presencia del compañero invisible sea detectadas.

Sistema Sol-Tierra, $\alpha = 3.0404234038181026e-06$

Con el valor de α podemos calcular el radio de la esfera de Hill de la Tierra:

```
a=1.496e8 #km
RH_Tierra=a*(alpha/3)**(1./3)
```

Radio de Hill de la Tierra, $R_H = 1.502689e+06$

Es decir, dentro de una esfera de aproximadamente 1.5 millones de km, podemos considerar que una partícula que se suelta en reposo en el sistema rotante, se mantendrá siempre cerca a la Tierra, como un satélite o Luna. Naturalmente, esto no significa que su órbita será kepleriana respecto a esta última (el Sol puede producir una significativa perturbación gravitacional sobre su trayectoria), pero a largo plazo su trayectoria no la alejará a una distancia mayor que R_H de la Tierra.

Simulaciones detalladas del movimiento de satélites alrededor de planetas, han mostrado que en realidad estos cuerpos tienden a permanecer tiempos relativamente largos en órbitas estables si su distancia al planeta no es mayor que entre

1/3 y 1/2 del radio de Hill. Ese es precisamente el caso de la Luna. Su distancia media a la Tierra, 383,000 km la ubica a casi 1/4 parte del radio de Hill de nuestro planeta, pero cerca de la mitad de la distancia mínima más conservadora ($\sim 725,000$ km) para que la órbita se haga inestable.

Las lunas de otros planetas, especialmente de planetas gigantes y lejanos, están bien adentro de la esfera de Hill de su respectivo planeta. En el algoritmo a continuación se calcula el radio de Hill de los planetas del Sistema Solar:

```
#Cargamos las efemérides de los planetas
furnsh("pymcel/data/de430.bsp")

planetas=["MERCURY_BARYCENTER","VENUS_BARYCENTER",
          "EARTH",
          "MARS_BARYCENTER",
          "JUPITER_BARYCENTER","SATURN_BARYCENTER",
          "URANUS_BARYCENTER","NEPTUNE_BARYCENTER"]

#Masa de la Tierra y el sol
RH=dict()
for planeta in planetas:
    #Parámetro de masa
    muplaneta=bodvrd(planeta,"GM",1)[1][0]

    #Parámetro alfa
    alfa=muplaneta/(muplaneta+musol)

    #Semieje mayor
    from spiceypy import spkezr,oscltx
    xplaneta,tluz=spkezr(planeta,0,"J2000","None","SUN")
    elementos=oscltx(xplaneta,0,musol)
    aplaneta=elementos[9]

    #Radio de Hill
    RH[planeta]=aplaneta*(alfa/3)**(1./3)
```

```
Radio de Hill de MERCURY: 0.22067450795455779 millones de km
Radio de Hill de VENUS: 1.0111476710161926 millones de km
Radio de Hill de EARTH: 1.5033470375472335 millones de km
Radio de Hill de MARS: 1.0840564936087809 millones de km
Radio de Hill de JUPITER: 53.19417610097791 millones de km
Radio de Hill de SATURN: 65.48868970009971 millones de km
Radio de Hill de URANUS: 70.23685638894752 millones de km
Radio de Hill de NEPTUNE: 116.187691712555 millones de km
```

El planeta con el radio de Hill más grande del sistema solar es con mucho Neptuno. La razón es una combinación de su masa y su enorme distancia al Sol. Lo sorprendente es que en el espacio de la esfera de Hill de este planeta cabrían casi todos los planetas interiores (Mercurio, Venus y la Tierra).

Nótese que los radios de Hill de los planetas Venus, Tierra y Marte, a pesar de sus diferencias de masa y distancia al Sol, son aproximadamente los mismos (~ 1 millón de km). Este hecho es significativo sobre todo en el caso de Marte, que tiene



Figura 8.21: Fotografía de la luna de Saturno Pan tomada por la sonda Cassini. Pan es una pequeña luna irregular con un cinturón de polvo en su ecuador, que reside entre las partículas de los anillos de Saturno. Crédito: NASA.

una masa casi 10 veces menor que la de la Tierra. La razón por la cual Marte tiene un radio de Hill similar a nuestro planeta es simplemente su distancia mayor al Sol, que compensa su baja masa.

¿Qué pasa con el radio de Hill de las lunas planetarias?. Consideremos por ejemplo el caso de la extraña luna Pan del planeta Saturno. En el algoritmo a continuación se consignan las propiedades de este cuerpo y de su planeta central, Saturno y se calcula el radio de Hill

```
m1=5.7e26 #Masa del planeta, kg
m2=4.2e15 #Masa del satélite, kg
a=130000 #Distancia media a Saturno, km
Rs=16 #Radio del satélite, km,
#Parámetro del CRTBP
alfa=m2/(m1+m2)

#Radio de Hill
RH=a*(alfa/3)**(1./3)
```

Radio de Hill de Pan = 17.53992555057494

¿Qué nota usted de curioso en estos números?. Si comparamos el radio de Hill del satélite con su radio físico, descubrimos que la masa de este curioso satélite llena casi completamente su esfera de Hill. ¿Qué pasaría en el caso de que el satélite fuera en realidad más grande que su esfera de Hill?. Esta situación especial reviste mucho interés en las ciencias planetarias. Si el cuerpo es solo un conjunto de rocas apiladas por su autogravedad (como parece ser el caso de muchas lunas planetarias pequeñas y otros cuerpos del sistema solar como asteroides y cometas,

es de esperarse que las partículas del cuerpo que están más afuera empezarán a moverse hacia el planeta, desprendiéndose del satélite. Con suficiente tiempo el cuerpo terminaría sino desintegrándose, al menos perdiendo una buena parte de su masa. El satélite Pan está cerca a ese límite.

¿Cuál es la condición que debe cumplir un satélite poco cohesionado para que se produzca esta situación?. Si asumimos por simplicidad que la materia del satélite se reúne formando un cuerpo casi esférico de radio promedio R_s y densidad ρ_s , la condición crítica para que el cuerpo empiece a desintegrarse será:

$$R_s = R_H$$

Reemplazando R_H :

$$R_s^3 = a_R^3 \frac{M_s}{3M_p}$$

donde a_R es la distancia crítica en la que empieza a ocurrir la desintegración y M_p es la masa del planeta que asumimos mucho más grande que la masa del satélite.

Si ahora expresamos la masa del planeta y el satélite en términos de sus densidades medias $M_s = 4\pi\rho_s R_s^3/3$ y $M_p = 4\pi\rho_p R_p^3/3$ y despejamos a_c obtenemos:

$$a_R = \left(3 \frac{\rho_p}{\rho_s}\right)^{1/3} R_p$$

Siempre que el satélite se encuentre a distancias menores que esta distancia crítica, el proceso de desintegración hará que se desintegre total o parcialmente. Esta condición la podemos expresar como:

$$a \leq a_R \equiv 1,44 \left(\frac{\rho_p}{\rho_s}\right)^{1/3} R_p \quad (8.34)$$

Llamamos a la distancia crítica a_R el **límite de Roche** para agregados de partículas (cuerpos sin cohesión interna). Este límite no debe confundirse, aunque naturalmente vienen de principios teóricos relacionados, con el *radio de Roche* definido anteriormente.

Podemos analizar el caso de Pan a la luz del recién definido límite de Roche. Para calcularlo debemos conocer la densidad del planeta, su radio y la densidad del satélite:

```
Rp=5.8e4 #Radio de Saturno, km
#Densidad promedio de Saturno
from numpy import pi
rhop=m1/(4*pi*(Rp*1e3)**3/3)
rhos=m2/(4*pi*(Rs*1e3)**3/3)

#Límite de Roche de Saturno para cuerpos con la densidad de Pan
aR=3**((1/3)*(rhop/rhos)**(1/3)*Rp
```

Densidad media de Saturno: 697.4326353252005 kg/km³

Densidad media de Pan: 244.79397985325699 kg/km³

Límite de Roche de Saturno: 118586.59228611788 km

Distancia de Pan a Saturno: 130000 km

Como vemos Pan esta tan solo un poco más afuera del límite de Roche de Saturno y esta es seguramente la razón por la que todavía podemos verlo de *cuerpo entero*.

Una de las teorías que explica el origen de los anillos de Saturno (entre los que se mueve Pan) explica que las partículas que forman esta estructura se pudieron desprender de la corteza de lunas antiguas que por las interacciones con el planeta, con otras lunas o con gases alrededor de ellos, pudieron migrar hasta alcanzar distancias menores que sus correspondientes límites de Roche.

8.14.2. Órbitas periódicas cerca a los puntos de equilibrio

Una de las más importantes aplicaciones del CRTBP es el estudio de las órbitas que cuerpos pequeño o vehículos espaciales pueden realizar *cerca* a los puntos de equilibrio de Lagrange. El tratamiento exhaustivo de este problema va más allá del nivel de este libro, pero es inevitable que mencionemos aquí esta importante aplicación del CRTBP, especialmente por su valor decisivo en la exploración espacial presente y futura. Una síntesis moderna del problema (especialmente de sus ramificaciones en la exploración espacial) puede encontrarse en [31] o en [5] y en las referencias contenidas en estos trabajos.

Por definición una partícula se deja en reposo en un punto de equilibrio en el CRTBP debería permanecer allí para siempre. Pero ¿qué pasa si el cuerpo no está exactamente en el punto de equilibrio en reposo sino muy cerca de él o con una pequeña velocidad?

Comencemos por considerar un caso de gran interés en astronomía y es el de los cuerpos astronómicos que están cerca de los puntos de equilibrio triangulares L_4 y L_5 . Para hacerlo calculemos primero la ubicación de estos puntos. Esta puede obtenerse teniendo en cuenta que forman con los cuerpos masivos sendos triángulos equiláteros de lado $a = 1$:

$$x_{L4} = x_{L5} = \frac{1}{2} - \alpha \quad (8.35)$$

$$y_{L4} = -y_{L5} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (8.36)$$

$$(8.37)$$

donde hemos usado $\cos 60^\circ = 1/2$ y $\sin 60^\circ = \sqrt{3}/2$.

Resolvamos ahora la ecuación de movimiento para una partícula de prueba que se encuentra no sobre el punto L_4 sino muy cerca a él. Como repetiremos este mismo algoritmo en varias oportunidades en esta sección, implementaremos este procedimiento como una rutina:

(Algoritmo 8.14)

```
def orbitas_crtbp(alfa,ro,vo,
                   T=100,Nt=1000,
                   xlim=(-1.5,1.5),ylim=(-1.5,1.5),
```

```

        xL=0,yL=0,
    ):
#Tiempos de integración
from numpy import linspace
ts=linspace(0,T,Nt)
#Solución numérica a la ecuación de movimiento
from pymcel.export import crtbp_solucion
solucion=crtbp_solucion(alfa,ro,vo,ts)
#Posiciones y velocidades en el sistema rotante
rs=solucion[0]
vs=solucion[1]
#Gráfico
import matplotlib.pyplot as plt
fig=plt.figure(figsize=(5,5))
ax=fig.gca()
ax.plot(rs[:,0],rs[:,1],'k-')
ax.plot([-alfa],[0],'ro',ms=10)
ax.plot([1-alfa],[0],'bo',ms=5)
#Punto de Lagrange
ax.plot([xL],[yL],'r+',ms=10)
#Decoración
ax.set_xlim(xlim)
ax.set_ylim(ylim)
ax.grid()
return fig

```

Las condiciones iniciales y la trayectoria pueden obtenerse invocando la rutina recien diseñada:

(Algoritmo 8.15)

```

#Propiedades del sistema
alfa=0.01
xL4=0.5-alfa
yL4=3**0.5/2
#Condiciones
ro=[xL4+0.01,yL4,0.0]
vo=[0.0,0.0,0.0]
#Órbita
fig=orbitas_crtbp(alfa,ro,vo,
                    xlim=(-0.1,1.1),ylim=(-0.1,1.1),
                    xL=xL4,yL=yL4)

```

ver Figura 8.22

Como vemos en la [Figura 8.22](#), cerca a L_4 una partícula con una velocidad inicial muy pequeña, se mantendrá no muy lejos del punto de equilibrio, describiendo una órbita con una estructura peculiar (y posiblemente estable) alrededor de él. En el sistema de referencia inercial, una trayectoria como esta se traduce en que la partícula describirá en el espacio una órbita alrededor del cuerpo más masivo (el Sol por ejemplo), casi idéntica a la órbita del segundo cuerpo (un planeta por ejemplo), manteniéndose, sin embargo, 60 grados más adelante que este último. A

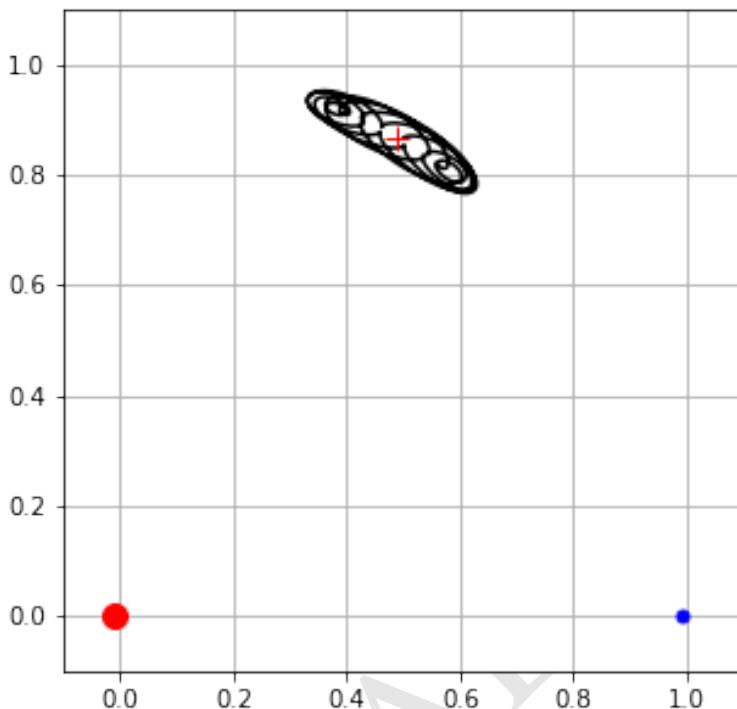


Figura 8.22: Figura correspondiente al código 8.15.

este tipo de configuración la llamamos en general **trayectoria coorbital** y ha sido observada en el Sistema Solar, en al menos dos familias de asteroides conocidos como los Troyanos y los Griegos, que coorbitan con el planeta Júpiter. La existencia de *Troyanos* (que ha terminado por convertirse en un término genérico para denotar este tipo de configuraciones coorbitales) ha sido demostrada o postulada para otros planetas del Sistema Solar, incluyendo la Tierra e incluso para satélites como la Luna.

Es posible aprovechar las propiedades de los puntos triangulares para buscar trayectorias periódicas y estables alrededor de ellos que puedan ser aprovechadas, por ejemplo, para estacionar vehículos espaciales coorbitales, que se mantenga a una distancia razonable de un planeta o una Luna, mientras orbitan el cuerpo central. En el algoritmo a continuación se muestra una de esas trayectorias, tal y como fue encontrada por [31] (ver Tabla 3.14 en ese trabajo):

(Algoritmo 8.16)

```
#Propiedades del sistema
alfa=0.0121505856
xL4=0.5-alfa
yL4=3**0.5/2
#Condiciones iniciales
ro=[0.6867,yL4,0]
```

```

vo=[0.1126,-0.2040,0]
from numpy import pi
fig=orbitas_crtbp(alfa,ro,vo,
                   T=2*pi,Nt=1000,
                   xlim=(-0.1,1.1),ylim=(-0.1,1.1),
                   xL=xL4,yL=yL4)

```

ver Figura 8.23

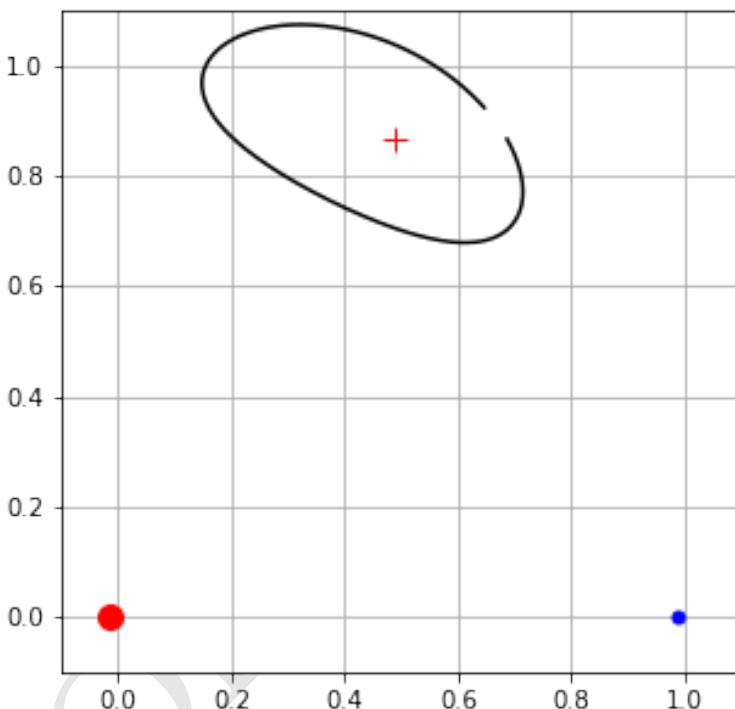


Figura 8.23: Figura correspondiente al código 8.16.

Las específicas condiciones iniciales usadas en este algoritmo fueron buscadas y encontradas mediante métodos numéricos específicamente diseñados con ese propósito. Como vemos en la Figura 8.23 a diferencia de la trayectoria relativamente desordenada que habíamos visto antes, la partícula describe una *predecible* y periódica órbita alrededor de L_4 , que tiene un período casi igual al período de traslación de la partícula menos masiva alrededor del cuerpo central (en unidades canónicas del CRTBP es $P = 2\pi/\omega = 2\pi$). En este caso específico, el valor de α corresponde al sistema Tierra-Luna.

¿Se pueden encontrar trayectorias similares alrededor de los demás puntos de equilibrio? Una familia muy interesante de trayectorias, se encuentra considerando condiciones iniciales cercanas al punto L_3 . Considere por ejemplo el siguiente ejemplo:

(Algoritmo 8.17)

```
#Propiedades del sistema
alfa=1e-4
from scipy.optimize import bisect
from pymcel import funcion_puntos_colineales
xL3=bisect(funcion_puntos_colineales,-2,-0.5,args=(alfa,))
#Condiciones iniciales
ro=[-1.112349859300,0,0]
vo=[0,+0.202041957868,0]
fig=orbitas_crtbp(alfa,ro,vo,
                   T=180,Nt=500,
                   xlim=(-1.2,1.2),ylim=(-1.2,1.2),
                   xL=xL4,yL=yL4)
```

ver Figura 8.24

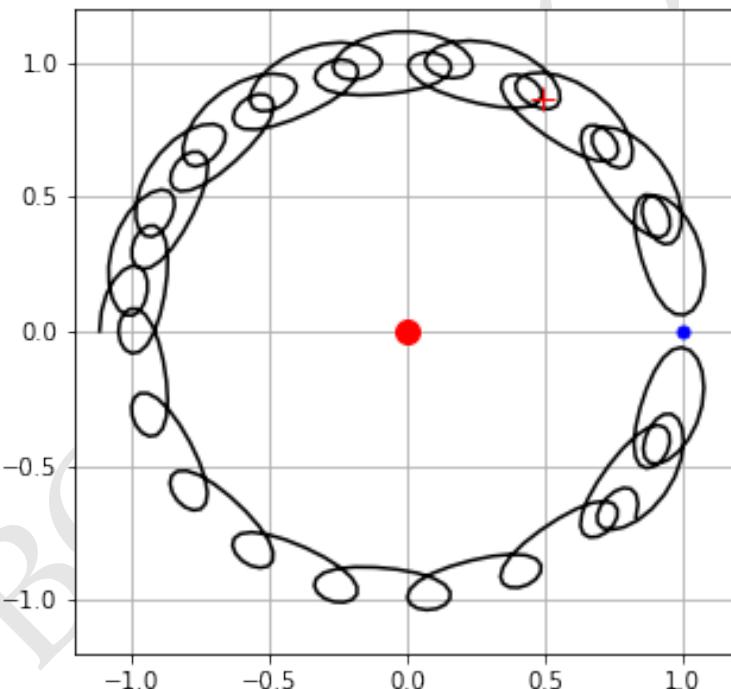


Figura 8.24: Figura correspondiente al código 8.17.

Nótese la forma peculiar de la trayectoria de la partícula de prueba en el sistema rotante: una enorme U con rizos alrededor de la que sería la órbita de la partícula menos masiva. En los extremos de la U la partícula de prueba nunca llega a quedar en órbita alrededor del cuerpo secundario. A este tipo de trayectorias se las conoce, convenientemente como **orbitas en herradura** (*horseshoe orbits* en inglés).

En el sistema solar hemos encontrado cuerpos que describen trayectorias como

estas. Así por ejemplo, el asteroide cercano a la Tierra 2002 AA29⁵¹ tiene una órbita de hendidura que se superpone a la órbita terrestre y en la que tarda casi 1 siglo para completar un recorrido en rizos tresdimensionales similares a los que vimos en el plano para el sistema mostrado en la Figura 8.24. En una situación similar se encuentra el asteroide 3753 Cruithne⁵² y otro puñado de asteroides cercanos a la Tierra. En una situación dinámica similar se encuentran dos satélites coorbital de Saturno 1980S1⁵³ y 1980S2 descubiertos por la nave Voyager 1 en la década de los ochentas.

El caso de órbitas periódicas estables alrededor de los puntos de equilibrio L_1 y L_2 es posiblemente el que más atención este recibiendo en el presente en el área de la exploración espacial y del cuál la humanidad ya se ha valido en aplicaciones espaciales concretas. En este caso, las órbitas más interesantes ocurren en el espacio de tres dimensiones. Para representar gráficamente estas órbitas necesitaremos una rutina análoga a `orbitas_crtbp`:

(Algoritmo 8.18)

```
def orbitas_crtbp3d(alfa,ro,vo,
                     T=100,Nt=1000,
                     xlim=(-1.5,1.5),ylim=(-1.5,1.5),zlim=(-1.5,1.5),
                     xL=0,yL=0,zL=0,
                     elevation=10,azimuth=-80
                     ):
    #Tiempos de integración
    from numpy import linspace
    ts=linspace(0,T,Nt)
    #Solución numérica a la ecuación de movimiento
    from pymcel.export import crtbp_solucion
    solucion=crtbp_solucion(alfa,ro,vo,ts)
    #Posiciones y velocidades en el sistema rotante
    rs=solucion[0]
    vs=solucion[1]
    #Gráfico
    import matplotlib.pyplot as plt
    from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
    fig=plt.figure(figsize=(5,5))
    ax=fig.gca(projection='3d')
    ax.plot(rs[:,0],rs[:,1],rs[:,2],'k-')
    ax.plot([-alfa],[0],[0],'ro',ms=10)
    ax.plot([1-alfa],[0],[0],'bo',ms=5)
    ax.plot([xL],[yL],[zL],'r+',ms=10)
    ax.set_xlim(xlim)
    ax.set_ylim(ylim)
    ax.set_zlim(zlim)
    ax.view_init(elevation,azimuth)
    fig.tight_layout()
    return fig
```

⁵¹https://en.wikipedia.org/wiki/2002_AA29

⁵²https://en.wikipedia.org/wiki/3753_Cruithne

⁵³<https://www.jpl.nasa.gov/spaceimages/details.php?id=PIA02284>

Un ejemplo de una trayectoria periódica relacionada con el punto L_1 se demuestra en este sistema:

(Algoritmo 8.19)

```
#Propiedades del sistema
alfa=0.0121505856
xL1=bisect(funcion_puntos_colineales,0,1-2*alfa,args=(alfa,))
#Condiciones iniciales
ro=[0.8329,0,0.1304]
vo=[0,0.2437,0]
fig=orbitas_crtbp3d(alfa,ro,vo,
                      T=3,Nt=100,
                      xlim=(-0.1,1.1),ylim=(-0.5,0.5),zlim=(-0.5,0.5),
                      xL=xL1,yL=0,zL=0
                     )
```

ver Figura 8.25

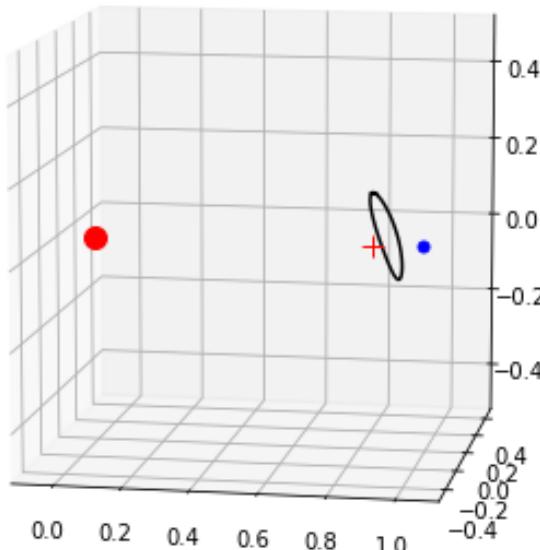


Figura 8.25: Figura correspondiente al código 8.19.

Una órbita como está, permite por ejemplo estacionar en un vehículo espacial en una trayectoria desde la que puede ver el Sol permanentemente y sin obstrucciones, sin alejarse mucho de la Tierra a donde debe enviar periódicamente imágenes y datos de su estado. Este tipo de trayectoria es la que se uso, precisamente para

estacionar el telescopio **SOHO**⁵⁴ de NASA. A este tipo de trayectorias se las conoce como **órbitas halo**.

Una órbita halo alrededor el punto de Lagrange L_2 se muestra a continuación:

(Algoritmo 8.20)

```
#Propiedades del sistema
alfa=0.0121505856
xL2=bisect(funcion_puntos_colineales,1-0.5*alfa,2,args=(alfa,))
#Condiciones iniciales
ro=[1.1003,0,0]
vo=[0,-0.3217,0.5973]
fig=orbitas_crtbp3d(alfa,ro,vo,
                     T=10,Nt=100,
                     xlim=(-0.1,1.1),ylim=(-0.5,0.5),zlim=(-0.5,0.5),
                     xL=xL2,yL=0,zL=0,
                     elevation=10,azimuth=-60
                    )
```

ver Figura 8.26

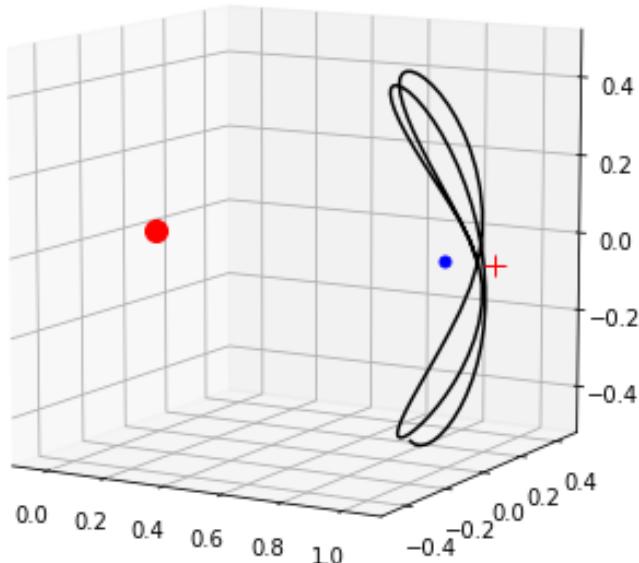


Figura 8.26: Figura correspondiente al código 8.20.

⁵⁴https://en.wikipedia.org/wiki/Solar_and_Heliospheric_Observatory

Una órbita de este tipo fue usada recientemente usada por la misión lunar *China Chang'e 4*⁵⁵, en especial por el satélite de relevo *Queqiao* que fue estacionado en una órbita halo alrededor del punto L_2 del sistema Tierra-Luna en Junio 14 de 2018. La razón era simple. La misión incluía un vehículo de que descendió en el lado lejano de la Luna (que no es visible y con el que no se puede tener contacto radial desde la Tierra). Al estar en una órbita tres dimensional alrededor de L_2 y desde la que se puede ver el lado lejano de la Luna (ver Figura 8.26), el *Queqiao* podía recibir la señal del vehículo de descenso y retransmitirla a la Tierra. Un uso muy ingenioso de la mecánica celeste.

Busque las figuras interactivas y las animaciones incluídas en el sitio en línea del libro⁵⁶.

8.14.3. El parámetro de Tisserand

En la mayor parte de este capítulo hemos estudiado la dinámica de sistemas restringidos de tres cuerpos (aquellos donde al menos uno tiene una masa muy pequeña) en un marco de referencia rotante en el que los cuerpos más masivos están casi en reposo (o totalmente en reposo como sucede en el CRTBP). Usar marcos de referencia rotantes nos ha permitido aprender cosas increíbles sobre estos sistemas que de otra manera parecerían intratables teóricamente o por lo menos tratables solo con métodos numéricos. Sin embargo, trabajar por demasiado tiempo en este tipo de marcos de referencia, puede hacernos perder de vista la curiosa apariencia que tiene la dinámica de sistemas de tres cuerpos en el marco de referencia inercial del centro de masa.

Para ilustrar este efecto, consideremos por ejemplo el siguiente sistema de partículas:

```
sistema=[  
    #Partícula de prueba  
    dict(  
        m=1e-5,  
        r=[6.0,0,-0.1],  
        v=[0,2.0,0.1]  
    ),  
    # Particula 1  
    dict(  
        m=1000.0,  
        r=[-0.005,0,0],  
        v=[0,-7.075,0]  
    ),  
    # Particula 2  
    dict(  
        m=1.0,  
        r=[4.995,0,0],  
        v=[0,+7.075,0]  
    ),  
]
```

⁵⁵https://en.wikipedia.org/wiki/Chang%27e_4

⁵⁶http://seap-udea.org/MecanicaCeleste_Zuluaga

Resolvamos las ecuaciones de movimiento y grafiquemos la trayectoria respecto al centro de masa:

```
%matplotlib inline
```

(Algoritmo 8.21)

```
T=20.0
Nt=1000
from numpy import linspace
ts=linspace(0,T,Nt)
from pymcel.export import ncuerpos_solucion
rs,vs,rps,vps,constantes=ncuerpos_solucion(sistema,ts)
from pymcel.export import plot_ncuerpos_3d
fig=plot_ncuerpos_3d(rps,vps);
ax=fig.gca()
#ax.view_init(90,90)
```

ver Figura 8.27

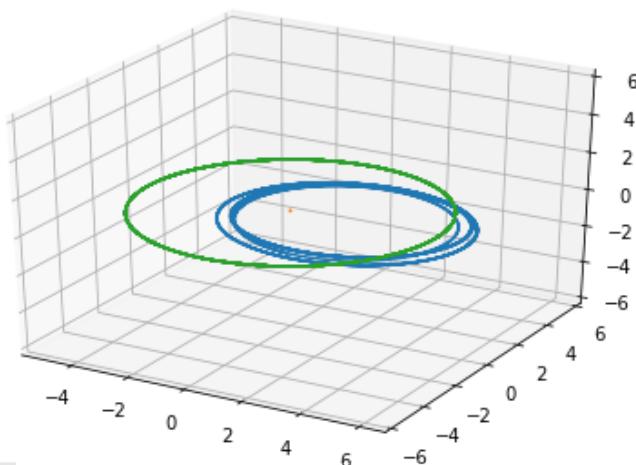


Figura 8.27: Figura correspondiente al código 8.21.

En este punto, no hay mucho de que sorprenderse en la Figura 8.27: vemos a la partícula de prueba en una trayectoria ovalada alrededor del cuerpo central (muy cerca al origen de coordenadas) y perturbada notoriamente por la presencia de lo que podríamos llamar el *planeta*; este último se mueve a su vez en una trayectoria aproximadamente circular alrededor del cuerpo central. Situaciones como la representada aquí se encuentran frecuentemente en el sistema solar. El planeta podría ser Júpiter y la partícula de prueba un cometa con una órbita excéntrica y perturbado por su presencia. O podría ser la Tierra y la partícula un asteroide que cruza su órbita.

Consideremos ahora la siguiente pregunta: un observador que detectara el cometa o el asteroide en momentos muy diferentes del tiempo y que observara solo un pequeño tramo de su trayectoria ¿podría reconocer que se trata del mismo cuerpo?. Normalmente, el proceso de determinar si dos cuerpos pequeños, observados en momentos diferentes, corresponden al mismo cuerpo, es comparar los elementos de la órbita oculatriz en los dos momentos de observación.

Calculemos los elementos orbitales principales (a, e, i) de la partícula de prueba con respecto a la partícula central y veamos cómo cambian en el tiempo:

(Algoritmo 8.22)

```
#Parámetro gravitacional del sistema
mu=sistema[1] ["m"]+sistema[2] ["m"]

#Cálculo
elts=[]
for i in range(Nt):
    #Vector de estado en el tiempo i-esimo
    from numpy import concatenate
    state=concatenate((rps[0,i,:],vps[0,i,:]))
    #Convierte el vector de estado a elementos orbitales
    from spiceypy import oscltx
    elementos=oscltx(state,0,mu)
    from numpy import pi
    elts+=[[elementos[9],elementos[1],elementos[2]]]
from numpy import array
elts=array(elts)

#Gráfico
import matplotlib.pyplot as plt
fig,axs=plt.subplots(3,1)
axs[0].plot(ts,elts[:,0])
axs[0].set_ylabel('$a$ [u.c.]')
axs[1].plot(ts,elts[:,1])
axs[1].set_ylabel('$e$')
axs[2].plot(ts,elts[:,2]*180/pi)
axs[2].set_ylabel('$i$ (grados)')
fig.tight_layout()
```

ver Figura 8.28

Como puede verse, en la figura [Figura 8.28](#), entre el inicio de la integración y $t \approx 7,5$ los elementos orbitales (a, e, I) de la partícula de prueba producen valores más o menos consistentes. Cualquier observación que se realice en ese intervalo mostrará que se trata del mismo cuerpo. Sin embargo a partir de ese momento los elementos orbitales dan un salto; este cambio repentino es producto de las perturbaciones gravitacionales que produce el planeta. Un observador que determinara los elementos del cuerpo en por ejemplo $t = 10$ encontraría un objeto con un semiejemplo mayor más pequeño y una excentricidad e inclinación mayores. Naturalmente, el observador no sabe que se trata del mismo objeto y fácilmente podría pensar que se trata de uno nuevo.

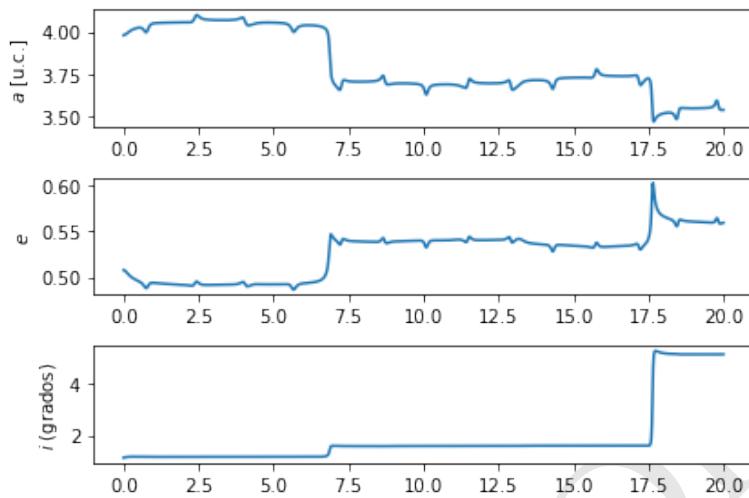


Figura 8.28: Figura correspondiente al código 8.22.

Veámos ahora qué ocurre si nos pasamos a un marco de referencia rotante que tenga exactamente la misma velocidad angular del planeta alrededor del cuerpo central. Para ello podemos usar procedimientos similares a los que usamos en la Sección 8.10:

(Algoritmo 8.23)

```
#Distancia entre las partículas 1 y 2
from numpy.linalg import norm
r12=norm(rps[1]-rps[2],axis=1)

#Promedio
a_P=r12.mean()

#Velocidad angular del planet
from numpy import sqrt
m1=sistema[1] ["m"]
m2=sistema[2] ["m"]
n=sqrt((m1+m2)/a_P**3)

#Velocidad angular
w=n
from numpy import array
omega=array([0,0,w])

#Vectores en el sistema rotado
from numpy import zeros_like
rps_rot=zeros_like(rps)
vps_rot=zeros_like(vps)
for i in range(Nt):
```

```

#Matriz de rotación
from spiceypy import rotate,mxv
R=rotate(w*ts[i],3)

#Rota las posiciones y velocidades de cada partícula
for n in range(3):
    rps_rot[n,i]=mxv(R,rps[n,i])
    # $v' = v + w \times r$ 
    from spiceypy import vcrss
    vps_rot[n,i]=mxv(R,vps[n,i]-vcrss(omega,rps[n,i]))

from pymcel.export import plot_ncuerpos_3d
fig=plot_ncuerpos_3d(rps_rot,vps_rot,marker='o',ms=3);

```

ver Figura 8.29

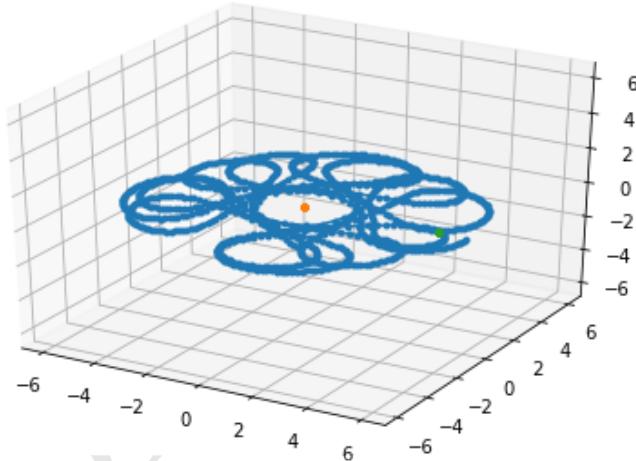


Figura 8.29: Figura correspondiente al código 8.23.

En el marco de referencia rotante, la partícula de prueba esta lejos de describir una trayectoria arbitraria. Esto era de esperarse: dado que el planeta tiene una órbita casi circular vemos que las condiciones básicas del CRTBP se cumplen en el sistema y podemos aplicar lo que hemos aprendido para analizar el problema. Comencemos por ejemplo calculando la constante de Jacobi asociada con el movimiento de la partícula:

(Algoritmo 8.24)

```

#Posiciones de la partícula de prueba
r=rps_rot[0]

#Posiciones y velocidades relativas a las partículas masivas
from numpy.linalg import norm

```

```

r1=norm(rps_rot[0]-rps_rot[1],axis=1)
r2=norm(rps_rot[0]-rps_rot[2],axis=1)

#Rapideces
v=norm(vps_rot[0],axis=1)

#Parametros gravitacionales
mu1=m1
mu2=m2

#Cuadratura de Jacobi
CJ=2*mu1/r1+2*mu2/r2+w**2*(r[:,0]**2+r[:,1]**2)-v**2

#Grafico
fig=plt.figure()
ax=fig.gca()
ax.plot(ts,CJ)
ax.set_xlabel("$t$ [u.c.]");
ax.set_ylabel("$C_J$ [u.c.]");
ax.set_ylim((CJ.mean()-100*CJ.std(),CJ.mean()+100*CJ.std()));

```

ver Figura 8.30

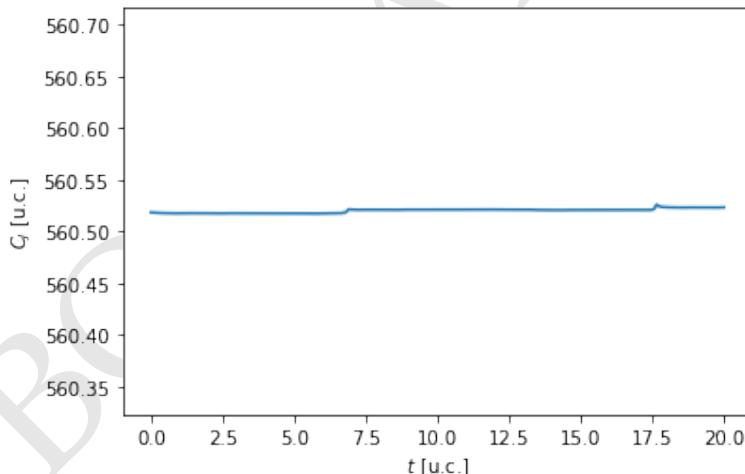


Figura 8.30: Figura correspondiente al código 8.24. Valor de la constante de Jacobi para el sistema real de tres cuerpos simulado en el capítulo.

Y de nuevo confirmamos lo que habíamos aprendido hasta ahora: la constante de Jacobi del sistema es aproximadamente constante. Nótese que la constancia de C_J está en contraste directo con la variabilidad de los elementos orbitales. Lo mejor que un observador puede hacer entonces para evaluar si dos cuerpos pequeños que observa en fechas muy distintas, son en realidad el mismo cuerpo, es calcular la constante de Jacobi (en relación con el cuerpo perturbador) en las dos fechas. Si

el valor es igual el cuerpo es con seguridad el mismo.

Suena fácil al decirlo, pero el procedimiento mostrado en los algoritmos anteriores demuestra que calcular la constante de Jacobi no es sencillo. ¿Existe una manera de calcular esta constante usando solamente los elementos orbitales clásico calculados en distintas observaciones?. Ese fue precisamente el útil resultado que obtuvo el astrónomo francés Francois Félix Tisserand ("franzua felix tissera⁵⁷") hacia el final de los 1800.

La constante de Jacobi esta escrita en términos de las variables de estado del sistema rotante que habíamos acostumbrado escribir primadas:

$$C_J = \frac{2(1-\alpha)}{r'_1} + \frac{2\alpha}{r'_2} + (x'^2 + y'^2) - v'^2 \quad (8.38)$$

Si queremos escribir la constante en términos de los elementos orbitales (que son cantidades definidas en el sistema de referencia inercial) tenemos que convertir primero las cantidades primadas que aparecen en la ecuación anterior, en las cantidades no primadas del sistema de referencia inercial.

Si definimos la matriz de rotación como:

$$R(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t & 0 \\ -\sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

las componentes del vector posición y la velocidad se relacionan por:

$$\vec{r}' = R\vec{r} \quad (8.39)$$

y

$$\vec{v}' = R(\vec{v} - \hat{e}_z \times \vec{r}) \quad (8.40)$$

Dejemos a un lado los primeros dos términos de la ecuación de la constante (ya nos ocuparemos de ellos enseguida). Veamos ahora en qué se convierte el término $x'^2 + y'^2$ al aplicar la regla de transformación en la Ec. (8.39):

$$x'^2 + y'^2 = (x \cos t + y \sin t)^2 + (-x \sin t + y \cos t)^2 = x^2 + y^2$$

Es fácil mostrar de aquí que también $|\vec{r}'| = |\vec{r}|$.

Este mismo resultado puede aplicarse para obtener el término v'^2 usando la Ec. (8.40):

$$v'^2 = (\vec{v} - \hat{e}_z \times \vec{r}) \cdot (\vec{v} - \hat{e}_z \times \vec{r}) = v^2 - 2\vec{v} \cdot (\hat{e}_z \times \vec{r}) + (\hat{e}_z \times \vec{r})^2$$

Aplicando la propiedad cíclica del triple producto vectorial podemos escribir:

$$\vec{v} \cdot (\hat{e}_z \times \vec{r}) = \hat{e}_z \cdot (\vec{r} \times \vec{v}) = h_z$$

donde h_z es la componente vertical del *momento angular relativo específico* de la partícula de prueba con respecto al centro de masa del sistema. Podemos escribir esta cantidad en términos de los elementos orbitales de la órbita osculatriz, usando las relaciones que obtuvimos en el Capítulo 7:

⁵⁷<https://forvo.com/search/Tisserand/fr/>

$$h_z = h \cos i = \sqrt{a(1-e^2)} \cos i$$

Por otro lado $\hat{e}_z \times \vec{r} = x\hat{e}_y - y\hat{e}_x$ de donde:

$$(\hat{e}_z \times \vec{r})^2 = x^2 + y^2$$

Con estas cantidades el cuadrado de la magnitud de la velocidad en el sistema rotante se puede escribir finalmente como:

$$v'^2 = v^2 - 2 \cos i \sqrt{a(1-e^2)} + x^2 + y^2$$

Reemplazando las relaciones anteriores en la fórmula de la constante de Jacobi (Ec. 8.38) obtenemos:

$$C_J = \frac{2(1-\alpha)}{r'_1} + \frac{2\alpha}{r'_2} - v^2 + 2 \cos i \sqrt{a(1-e^2)}$$

Ahora bien, el cuadrado de la rapidez en el sistema inercial se puede escribir usando la *vis-viva*:

$$v^2 = \frac{2}{r} - \frac{1}{a}$$

donde r es la distancia de la partícula de prueba al centro de masa. De aquí:

$$C_J = 2 \left(\frac{1}{r'_1} - \frac{1}{r} \right) + 2\alpha \left(\frac{1}{r'_2} - \frac{1}{r'_1} \right) + \frac{1}{a} + 2 \cos i \sqrt{a(1-e^2)} \quad (8.41)$$

En la mayoría de los sistemas de interés en el Sistema Solar $\alpha \ll 1$ (por ejemplo en el sistema Sol-Tierra $\alpha \sim 10^{-6}$, mientras que en el sistema Sol-Júpiter $\alpha \sim 10^{-4}$). En estas condiciones la distancia de la partícula de prueba a la partícula central r'_1 y al centro de masa r serán casi idénticas. De este modo el primer término de la ecuación anterior se puede considerar despreciable. Por otro lado, el segundo término, que es proporcional a α es, en la mayoría de las posiciones relevantes de la partícula de prueba (es decir cuando $r'_1, r'_2 \sim 1$) ciertamente mucho menor que 1. Los términos restantes son, sin embargo de orden 1 e incluso mayores.

Con todo, una buena aproximación a la constante de Jacobi en un sistema de dos cuerpos se puede escribir como:

$$C_J \approx T \equiv \frac{1}{a} + 2 \cos i \sqrt{a(1-e^2)} \quad (8.42)$$

A la cantidad T se la conoce como el **parámetro de Tisserand**.

Es muy importante entender, que en toda la deducción que hicimos en los párrafos anteriores, usamos las unidades canónicas del problema de los dos cuerpos, es decir, aquellas en las que $\mu = G(m_1 + m_2) = 1$ y $a_p = 1$. Solo en este sistema de unidades el parámetro de Tisserand tiene la forma de la Ec. (8.43).

Si queremos poner a prueba el resultado anterior con el sistema que estudiamos al principio de esta sección, es necesario primero convertir los valores de las cantidades calculadas anteriormente al sistema de unidades del problema del CRTBP. Para ello primero hay que definir y calcular los factores de conversión respectivos:

```

UM=m1+m2
UL=a_P
from numpy import sqrt
UT=sqrt(UL**3/UM)
UV=UL/UT

U_M = 1001.0
U_L = 5.000563774746299
U_T = 0.35343651552050726
U_V = 14.148407295669351

```

Nótese que en las unidades del sistema original ya habíamos hecho $G = 1$, de modo que al calcular aquí el factor de conversión de la unidad de tiempo usamos precisamente es valor.

Para convertir los valores de la constante de Jacobi, que obtuvimos antes con el algoritmo [Sección 8.24](#), al nuevos sistema de unidades, debemos recordar que C_J tiene unidades de velocidad al cuadrado:

```

CJ_uc=CJ/UV**2

CJ (unidades canónicas) = [2.8 2.8 2.8 ... 2.8 2.8 2.8]

```

Por otro lado, para calcular el valor del parámetro de Tisserand, necesitamos también convertir, a las unidades canónicas del CRTBP, el valor de los elementos orbitales calculados en [Sección 8.22](#):

```

a_uc=elts[:,0]/UL
e_uc=elts[:,1]
i_uc=elts[:,2]

a (unidades canónicas) = [0.796 0.796 0.796 ... 0.707 0.707 0.707]

```

Naturalmente al ser la excentricidad y la inclinación cantidades adimensionales no requieren ninguna conversión.

Con estos cambios, el parámetro de Tisserand para este sistema será:

```

from numpy import sqrt,cos
T=1/a_uc+2*cos(i_uc)*sqrt(a_uc*(1-e_uc**2))

T (unidades canónicas) = [2.793 2.793 2.794 ... 2.803 2.803 2.803]

```

El valor de T coincide aproximadamente con el de C_J como era de esperarse. Una comparación más justa puede hacerse si graficamos ambas cantidades:

(Algoritmo 8.25)

```

fig=plt.figure()
ax=fig.gca()
ax.plot(ts,CJ_uc)
ax.plot(ts,T)
ax.set_xlabel("$t$ [u.c.]");
ax.set_ylabel("$C_J$, $T$ [u.c.crtbp]");

```

```
ax.set_ylim((T.mean()-50*T.std(),
             T.mean()+50*T.std()));
fig.tight_layout()
```

ver Figura 8.31

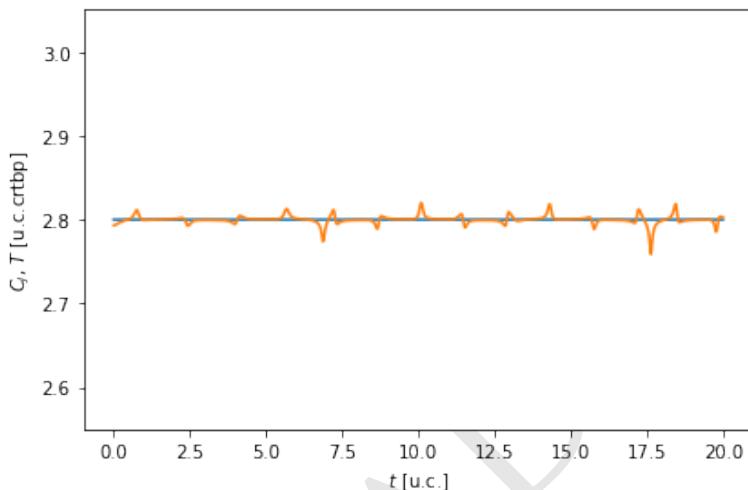


Figura 8.31: Figura correspondiente al código 8.25.

Como vemos, la coincidencia no es perfecta durante todo el movimiento. Ambas cantidades difieren significativamente, especialmente, cuando la partícula de prueba esta muy cerca al planeta y el término $2\alpha/r'_2$ en la Ec. (8.41) ya no puede considerarse despreciable.

Incluso con estas discrepancias, es claro que si un observador, en lugar de (solo) comparar los elementos orbitales de dos cuerpos observados en distintos momentos de la historia, compara el valor del parámetro de Tisserand, tendrá una mayor posibilidad de determinar si se trata del mismo o de cuerpos diferentes.

8.14.4. Clasificación de los objetos cercanos a la Tierra (NEOs)

En el sistema solar, el parámetro de Tisserand ha sido usado históricamente para clasificar los cuerpos pequeños que son perturbados por algunos planetas importantes. El caso más relevante es el de los asteroides y cometas conocidos como **NEOs**, del acrónimo en inglés *Near Earth Objects* (objetos cercanos a la Tierra). Un cuerpo pequeño del sistema solar es un **NEO** si, por convención, su distancia al sol en el perihelio es menor o igual a 1.3 unidades astronómicas.

En el algoritmo a continuación se lee una tabla de las propiedades orbitales básicas de los NEOs conocidos, obtenida de las [bases de datos de NASA de objetos pequeños del sistema solar](#)⁵⁸:

⁵⁸https://ssd.jpl.nasa.gov/sbdb_query.cgi

```
from pandas import read_csv
datos=read_csv("pymcel/data/NEOs-2020_02.csv",index_col=["full_name"])

Out[92]:
      full_name          q           e           i           w \\\\
433 Eros (1898 DQ)  1.132973  0.222951  10.830543  178.882294
719 Albert (1911 MT)  1.196452  0.546558  11.567485  156.176338
887 Alinda (1918 DB)  1.062886  0.570332  9.393854  350.495585
1036 Ganymed (1924 TD)  1.244303  0.533046  26.677643  132.364631
1221 Amor (1932 EA1)  1.083970  0.435285  11.876536  26.694797
...
      ...           ...           ...           ...           ...
P/2016 BA14 (PANSTARRS)  1.008665  0.666179  18.918089  351.902215
P/2016 J3 (STEREO)  0.468179  0.881375  25.256972  210.946799
P/2017 Y3 (Leonard)  1.275382  0.870717  27.585714  67.528996
P/2019 M2  1.063395  0.648537  12.282065  332.520616
P/2019 Y3 (Catalina)  0.911999  0.695783  24.635224  2.266732

      om
      full_name
433 Eros (1898 DQ)  304.299327
719 Albert (1911 MT)  183.866950
887 Alinda (1918 DB)  110.434218
1036 Ganymed (1924 TD)  215.546826
1221 Amor (1932 EA1)  171.326998
...
      ...
P/2016 BA14 (PANSTARRS)  180.531223
P/2016 J3 (STEREO)  258.975181
P/2017 Y3 (Leonard)  153.874364
P/2019 M2  307.603321
P/2019 Y3 (Catalina)  139.382700

[22321 rows x 5 columns]
```

Podemos calcular el parámetro de Tisserand de estos asteroides respecto de la Tierra usando la Ec. (8.43) sin necesidad de cambiar las unidades de los elementos órbitales. La razón es sencilla: el único elemento orbital en la tabla anterior que tiene unidades es q y estas son justamente unidades astronómicas, que es el valor de a_P en el CRTBP en este caso.

En el algoritmo a continuación calculamos el valor de T para todos los NEOs:

```
datos["a"]=datos["q"]/(1-datos["e"])
from numpy import cos,sqrt,pi
datos["T"]=1/datos["a"]+2*cos(datos["i"]*pi/180)*sqrt(datos["a"]*(1-datos["e"]**2))

Out[94]:
      full_name          a           e           i           T \\\\
433 Eros (1898 DQ)  1.458046  0.222951  10.830543  2.998120
719 Albert (1911 MT)  2.638602  0.546558  11.567485  3.044307
887 Alinda (1918 DB)  2.473737  0.570332  9.393854  2.953457
1036 Ganymed (1924 TD)  2.664725  0.533046  26.677643  2.843517
1221 Amor (1932 EA1)  1.919498  0.435285  11.876536  2.962206
...
      ...           ...           ...           ...           ...
```

P/2016 BA14 (PANSTARRS)	3.021577	0.666179	18.918089	2.783671
P/2016 J3 (STEREO)	3.946704	0.881375	25.256972	1.950978
P/2017 Y3 (Leonard)	9.865044	0.870717	27.585714	2.839437
P/2019 M2	3.025626	0.648537	12.282065	2.917955
P/2019 Y3 (Catalina)	2.997859	0.695783	24.635224	2.594395

[22321 rows x 4 columns]

Un gráfico de dispersión de los datos, se puede hacer con el siguiente algoritmo:

(Algoritmo 8.26)

```
fig=plt.figure(figsize=(5,5))
ax=fig.gca()
s=ax.scatter(datos["a"],datos["e"],s=0.5)
ax.set_xlim((0.5,3.0))
ax.set_ylim((0.0,1.0))
ax.set_xlabel("$a$ [ua]")
ax.set_ylabel("$e$")
fig.tight_layout()
```

ver Figura 8.32

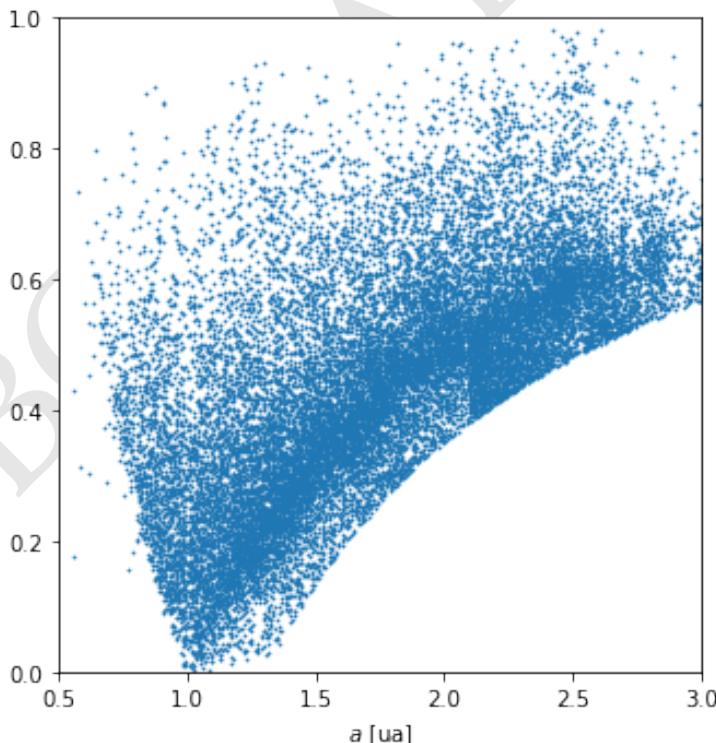


Figura 8.32: Figura correspondiente al código 8.26.

El marcado límite a la derecha en la Figura 8.32, corresponde simplemente a la definición misma de NEO, es decir $q \leq 1,3$, que se puede expresar matemáticamente como:

$$e \geq 1 - \frac{1,3}{a}$$

En el mismo gráfico podemos ver como se concentra un número significativo de cuerpos en una franja aproximadamente paralela al borde de la distribución. Para entender esta concentración, podemos despejar la excentricidad a partir de la fórmula para el parámetro de Tisserand en la Ec. (8.43):

$$e = \sqrt{1 - \frac{1}{4a^3 \cos^2 i} (Ta - 1)^2}$$

Dada un semieje mayor a , los cuerpos con una excentricidad igual a la obtenida con la fórmula anterior tendrán el mismo valor del parámetro de Tisserand. Con el algoritmo a continuación podemos repetir el gráfico de dispersión de los NEOs, incluyendo las curvas definidas por las fórmulas anteriores

(Algoritmo 8.27)

```
fig=plt.figure(figsize=(5,5))

#Dispersión de puntos
ax=plt.gca()
cond=datos["T"]>0.5
s=ax.scatter(datos[cond]["a"],datos[cond]["e"],
s=0.5,alpha=0.8)

#Límite de la dispersión por definición de NEOs
from numpy import linspace,sqrt
aes=linspace(0.5,3.0,100)
eLs=1-1.3/aes
ax.plot(aes,eLs,'k--')

#Objetos con igual valor de T
T=2.8
eTs=sqrt(1-1/(4*aes**3)*(T*aes-1)**2)
ax.plot(aes,eTs,'k-',lw=2,label=f"${T}_E={T}$")
T=3.0
eTs=sqrt(1-1/(4*aes**3)*(T*aes-1)**2)
ax.plot(aes,eTs,'r-',lw=3,label=f"${T}_E={T}$")

#Decoración
ax.set_xlim((0.5,3.0))
ax.set_ylim((0.0,1.0))
ax.set_xlabel("$a$ [ua]")
ax.set_ylabel("$e$")
ax.legend()
fig.tight_layout()
```

ver Figura 8.33

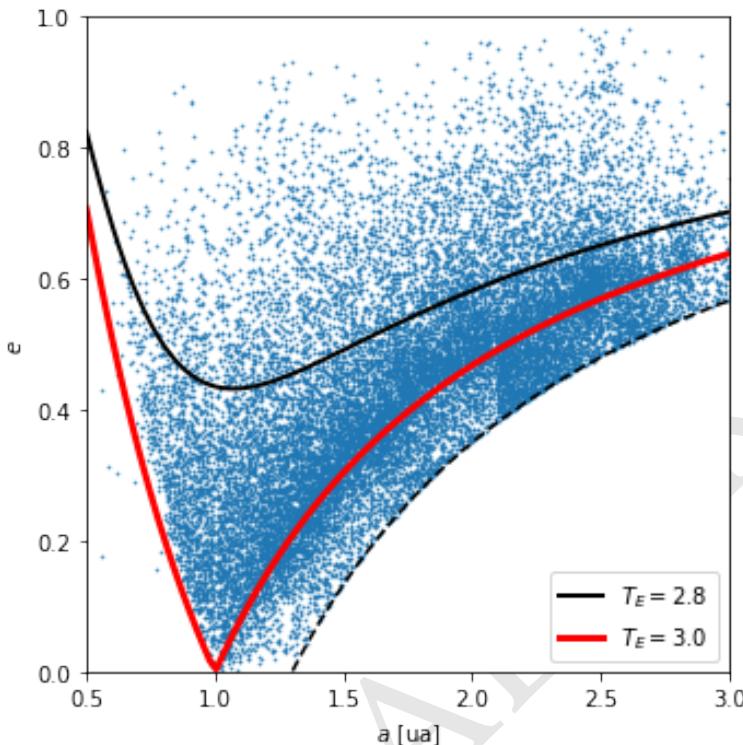


Figura 8.33: Figura correspondiente al código 8.27.

Nótese como el límite izquierdo de la distribución de NEOS en la Figura 8.33 esta determinado por aquellos cuerpos que tienen $T_E \leq 3$; es decir, el parámetro de Tisserand puede usarse como criterio numérico para determinar el valor mínimo de la excentricidad de un NEOS que tenga $a < 1$.

El gráfico de curvas con igual valor del parámetro de Tisserand muestra que la concentración que habíamos notado antes, corresponde a cuerpos con valor del parámetro de Tisserand entre $T_E = 2,8$ y $T_E = 3$. Este último límite es muy importante a la hora de clasificar los NEOS en tres “familias” reconocidas:

- **Apollos.** Todos los NEOS tal que $T_E \leq 3$ y $a \geq 1$.
- **Atens.** Todos los NEOS tal que $T_E \geq 3$ y $a \geq 1$.
- **Amors.** Todos los NEOS tal que $a \leq 1$.

8.14.5. Clasificación de los objetos cercanos a Júpiter

Podemos repetir un análisis similar en el caso de cuerpos pequeños cuyas órbitas son perturbadas por Júpiter. Un caso particular de gran interés y muy conocido en estudios del sistema solar, es el de los denominados **cometas de la familia de Júpiter**.

Con el algoritmo a continuación se leen los elementos óorbitales de estos cuerpos y se grafican en el plano $a - e$. Además incluimos la curva de igual valor del

parámetro de Tisserand $T_J = 3$:

(Algoritmo 8.28)

```
#Lee objetos
from pandas import read_csv
datos=read_csv("pymcel/data/JupiterComet-2020_02.csv",index_col=[ "full_name"])
datos["a"] = datos["q"]/(1-datos["e"])

#Gráfico de dispersión
fig=plt.figure(figsize=(5,5))
ax=fig.gca()
s=ax.scatter(datos["a"],datos["e"],
              s=5,c='b')

#Contorno de paraámetro de Tisserand
aJ=5.2044
from numpy import linspace,sqrt
aes=linspace(3.2,5.5,100)
T=2
eTs=sqrt(1-1/(4*(aes/aJ)**3)*(T*(aes/aJ)-1)**2)
ax.plot(aes,eTs,'k-',lw=2,label=f"$T_J={T}$")
T=3
eTs=sqrt(1-1/(4*(aes/aJ)**3)*(T*(aes/aJ)-1)**2)
ax.plot(aes,eTs,'r-',lw=3,label=f"$T_J={T}$")

#Decoración
ax.set_xlim((3.2,5.5))
ax.set_ylim((0.0,1.0))
ax.set_xlabel("$a$ [ua]")
ax.set_ylabel("$e$")
ax.legend(loc='lower left')
fig.tight_layout()
```

ver Figura 8.34

Como puede notarse en el algoritmo, el cálculo del parámetro de Tisserand para el caso de Júpiter es necesario convertir el valor del semieje mayor que esta en unidades astronómicas, a las unidades canónicas del CRTBP del sistema Sol-Júpiter. Esto implica, simplemente, reemplazar en la Ec. (8.43), a por a/a_p donde $a_p = 5,2044$ es el semieje mayor de Júpiter. Este sencillo cambio de unidades puede expresarse modificando la fórmula del parámetro de Tisserand para escribirla de la forma:

$$T_p = \frac{a_p}{a} + 2 \cos i \sqrt{\frac{a}{a_p}(1 - e^2)} \quad (8.43)$$

Como puede verse en la [Figura 8.34](#) los cometas de la familia de Júpiter con aquellos para los cuales $2 \leq T_J \leq 3$. En contraste, los asteroides del cinturón principal (que no aparecen en la figura pero que tienen típicamente $a < 3,5$ y órbitas con excentricidades $e < 0,6$), tendrán $T_J > 3$

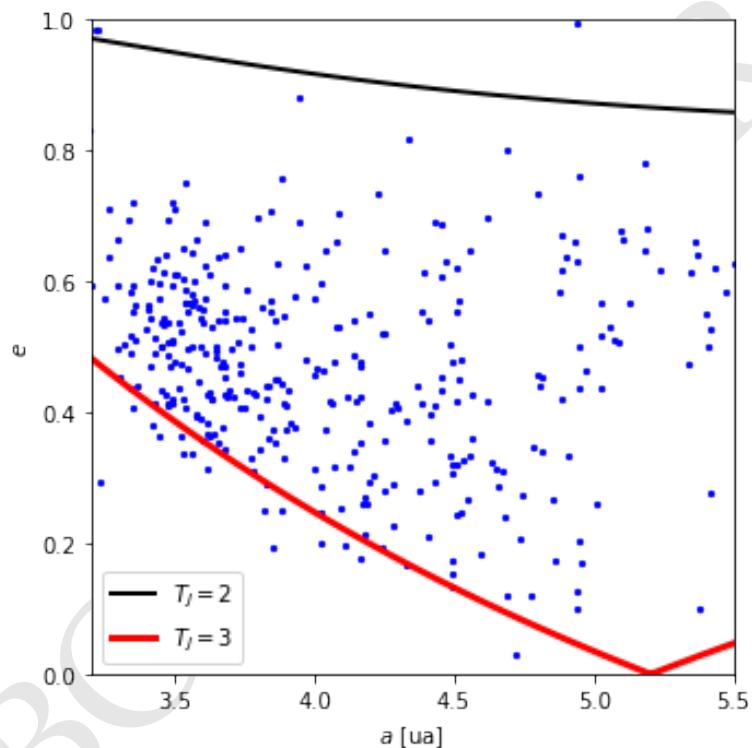


Figura 8.34: Figura correspondiente al código 8.28.

8.15. Problemas seleccionados

1. **Relaciones algebraicas básicas.** Dado el problema de los 3 cuerpos,

$$\vec{r}_1 = \vec{r} - \vec{r}_1 = [x(t) - x_1]\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}, \quad (8.44)$$

$$\vec{r}_2 = \vec{r} - \vec{r}_2 = [x(t) - x_2]\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k} \quad (8.45)$$

son las posiciones del tercer cuerpo con respecto a los otros dos en el sistema rotante. Muestre detalladamente que se satisfacen las relaciones algebraicas:

- a. Producto punto: >

$$-\frac{\vec{r}_1 \cdot \dot{\vec{r}}}{r_1^3} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{r_1} \right)$$

- b. Potencial tres cuerpos:: >

$$-(1-\alpha) \frac{\vec{r}_1}{r_1^3} - \alpha \frac{\vec{r}_2}{r_2^3} - \hat{k} \times (\hat{k} \times \vec{r}) = -\nabla \left[-\frac{(1-\alpha)}{r_1} - \frac{\alpha}{r_2} - \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \right]$$

1. Solución

- a. Dado que $r_1 = \sqrt{(x - x_1)^2 + y^2 + z^2}$, miremos que

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{r_1} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\sqrt{(x - x_1)^2 + y^2 + z^2}} \right) \quad (8.46)$$

$$\text{reorganizando} \rightarrow = \frac{d}{dt} \left(\left[(x - x_1)^2 + y^2 + z^2 \right]^{-1/2} \right) \quad (8.47)$$

$$\text{aplicando regla de la cadena} \rightarrow = -\frac{1}{2} \frac{2(x - x_1)\dot{x} + 2y\dot{y} + 2z\dot{z}}{\left[(x - x_1)^2 + y^2 + z^2 \right]^{3/2}} \quad (8.48)$$

$$\text{simplificando} \rightarrow = -\frac{(x - x_1)\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z}}{r_1^3}. \quad (8.49)$$

Ahora, como $\dot{\vec{r}} = \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} + \dot{z}\hat{k}$, entonces

$$\vec{r}_1 \cdot \dot{\vec{r}} = \left[(x - x_1)\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} \right] \cdot \left(\dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} + \dot{z}\hat{k} \right) = (x - x_1)\dot{x} + y\dot{y} \quad (8.50)$$

Así, combinando ambos resultados, se obtiene lo pedido:

$$-\frac{\vec{r}_1 \cdot \dot{\vec{r}}}{r_1^3} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{r_1} \right).$$

b. De igual forma, procedamos operando el lado derecho de lo pedido:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial x} \left[-\frac{(1-\alpha)}{r_1} - \frac{\alpha}{r_2} - \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \right] &= -\frac{\partial}{\partial x} \left[-(1-\alpha) \left[(x-x_1)^2 + y^2 + z^2 \right]^{-1/2} - \alpha \left[(x-x_1)^2 + y^2 + z^2 \right]^{-1/2} \right. \\ &\quad \text{aplicando regla de la cadena } \rightarrow = -\frac{1}{2}(1-\alpha) \frac{2(x-x_1)}{\left[(x-x_1)^2 + y^2 + z^2 \right]^{3/2}} - \frac{1}{2}\alpha \frac{2(x-x_2)}{\left[(x-x_2)^2 + y^2 + z^2 \right]^{3/2}} \\ &\quad \text{simplificando } \rightarrow = -(1-\alpha) \frac{(x-x_1)}{r_1^3} - \alpha \frac{(x-x_2)}{r_2^3} + x. \end{aligned}$$

Sin pérdida de generalidad, se obtiene

$$-\frac{\partial}{\partial y} \left[-\frac{(1-\alpha)}{r_1} - \frac{\alpha}{r_2} - \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \right] = -(1-\alpha) \frac{y}{r_1^3} - \alpha \frac{y}{r_2^3} \quad (8.54)$$

$$-\frac{\partial}{\partial z} \left[-\frac{(1-\alpha)}{r_1} - \frac{\alpha}{r_2} - \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \right] = -(1-\alpha) \frac{z}{r_1^3} - \alpha \frac{z}{r_2^3} \quad (8.55)$$

de forma que

$$\begin{aligned} -\nabla \left[-\frac{(1-\alpha)}{r_1} - \frac{\alpha}{r_2} - \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \right] &= \left[-(1-\alpha) \frac{(x-x_1)}{r_1^3} - \alpha \frac{(x-x_2)}{r_2^3} + x \right] \hat{i} + \left[-(1-\alpha) \frac{(y-y_1)}{r_1^3} - \alpha \frac{(y-y_2)}{r_2^3} \right. \\ &\quad \left. + y \right] \hat{j} + \left[-(1-\alpha) \frac{(z-z_1)}{r_1^3} - \alpha \frac{(z-z_2)}{r_2^3} \right] \hat{k} \end{aligned}$$

Pero podemos ver que

$$-\hat{k} \times (\hat{k} \times \vec{r}) = -\hat{k} \times \left[\hat{k} \times (x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}) \right] \quad (8.58)$$

$$= -\hat{k} \times (x\hat{j} - y\hat{i}) \quad (8.59)$$

$$= x\hat{i} + y\hat{j}, \quad (8.60)$$

por lo que obtenemos lo pedido:

$$-(1-\alpha) \frac{\vec{r}_1}{r_1^3} - \alpha \frac{\vec{r}_2}{r_2^3} - \hat{k} \times (\hat{k} \times \vec{r}) = -\nabla \left[-\frac{(1-\alpha)}{r_1} - \frac{\alpha}{r_2} - \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \right].$$

2. **Constante de Jacobi.** La constante de Jacobi se puede escribir como

$$C_J = 2 \frac{(1-\alpha)}{r_1} + 2 \frac{\alpha}{r_2} + x^2 + y^2 - v^2$$

en el sistema rotante del problema de los tres cuerpos. A partir de la posición (ξ, η, ζ) de m_3 en el sistema inercial ubicado en el centro de masa de m_1 y m_2 y de la transformación de unas coordenadas a otras

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos nt & -\sin nt & 0 \\ \sin nt & \cos nt & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

demuestre que la constante de Jacobi se puede escribir como

$$C_J = -(\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + \dot{\zeta}^2) + 2 \frac{(1-\alpha)}{r_1} + 2 \frac{\alpha}{r_2} + 2(\xi \dot{\eta} - \eta \dot{\xi})$$

2. Solución

Multiplicando por la inversa en la transformación de coordenadas dada, podemos escribir x, y y z como

$$x = \xi \cos t + \eta \sin t \quad (8.61)$$

$$y = \xi \sin t + \eta \cos t \quad (8.62)$$

$$z = \zeta \quad (8.63)$$

de forma que

$$\dot{x} = \dot{\xi} \cos t - \xi \sin t + \dot{\eta} \sin t + \eta \cos t = (\dot{\xi} + \eta) \cos t + (\dot{\eta} - \xi) \text{ s} \quad (8.64)$$

$$\dot{y} = \dot{\xi} \sin t + \xi \cos t + \dot{\eta} \cos t - \eta \sin t = (\dot{\xi} - \eta) \sin t + (\dot{\eta} + \xi) \text{ c} \quad (8.65)$$

$$\dot{z} = \dot{\zeta}, \quad (8.66)$$

en donde se toma $n = 1$ para las coordenadas canónicas en las que

$$C_J = 2 \frac{(1-\alpha)}{r_1} + 2 \frac{\alpha}{r_2} + x^2 + y^2 - v^2.$$

Nótese que

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &= (\xi \cos t + \eta \sin t)^2 + (-\xi \sin t + \eta \cos t)^2 \\&\text{elevando al cuadrado } \rightarrow = \xi^2 \cos^2 t + 2\xi\eta \cos t \sin t + \eta^2 \sin^2 t + \xi^2 \sin^2 t - 2\xi\eta \sin t \cos t \\&\text{factorizando y cancelando } \rightarrow = \xi^2 (\sin^2 t + \cos^2 t) + \eta^2 (\sin^2 t + \cos^2 t) \\&\text{simplificando } \rightarrow = \xi^2 + \eta^2\end{aligned}$$

y que

$$\begin{aligned}v^2 &= \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 \\&\text{reemplazando } \rightarrow = [(\dot{\xi} + \eta) \cos t + (\dot{\eta} - \xi) \sin t]^2 + [-(\dot{\xi} + \eta) \sin t + (\dot{\eta} - \xi) \cos t]^2 + \dot{\zeta}^2 \\&\text{expandiendo } \rightarrow = (\dot{\xi} + \eta)^2 \cos^2 t + 2(\dot{\xi} + \eta)(\dot{\eta} - \xi) \sin t \cos t + (\dot{\eta} - \xi)^2 \sin^2 t + (\dot{\xi} + \eta)^2 \sin^2 t + 2(\dot{\xi} + \eta)(\dot{\eta} - \xi) \sin t \cos t + \dot{\zeta}^2 \\&\text{factorizando } \rightarrow = (\dot{\xi} + \eta)^2 (\sin^2 t + \cos^2 t) + (\dot{\eta} - \xi)^2 (\sin^2 t + \cos^2 t) + \dot{\zeta}^2 \\&\text{simplificando } \rightarrow = (\dot{\xi} + \eta)^2 + (\dot{\eta} - \xi)^2 + \dot{\zeta}^2 \\&\text{expandiendo } \rightarrow = \dot{\xi}^2 + 2\eta\dot{\xi} + \eta^2 + \dot{\eta}^2 - 2\xi\dot{\eta} + \xi^2 + \dot{\zeta}^2 \\&\text{organizando } \rightarrow = \dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + \dot{\zeta}^2 + \eta^2 + \xi^2 - 2(\xi\dot{\eta} - \eta\dot{\xi}).\end{aligned}$$

Reemplazando en C_J , se sigue que

$$\begin{aligned}C_J &= 2\frac{(1-\alpha)}{r_1} + 2\frac{\alpha}{r_2} + \xi^2 + \eta^2 - [\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + \dot{\zeta}^2 + \eta^2 + \xi^2 - 2(\xi\dot{\eta} - \eta\dot{\xi})] \\&\text{sumando términos semejantes } \rightarrow = -(\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + \dot{\zeta}^2) + 2\frac{(1-\alpha)}{r_1} + 2\frac{\alpha}{r_2} + 2(\xi\dot{\eta} - \eta\dot{\xi}),\end{aligned}$$

que era a lo que se quería llegar.

3. **Radio de Hill** Considere la constante de Jacobi en el problema de tres cuerpos con el Sol, la Tierra y la Luna. Encuentre el valor de C_J e investigue el tamaño y la forma de la superficie límite de Hill para el movimiento de la Luna.

3. Solución

La superficie límite de Hill, dentro del contexto del CRTBP, es la superficie dentro de la cual debe estar m_3 orbitando a m_2 para que no exista la posibilidad de que pase a orbitar eventualmente a m_1 . Dada la figura presentada en el Problema 7 (junto con la discusión que allí se da), podemos decir que esta superficie corresponde a la curva de cero velocidad que encierra a m_2 cuando C_J toma el valor tal que m_3 se quedaría en reposo en el punto colineal de Lagrange L_1 . Además, podríamos aproximar dicha superficie a una esfera de radio $x_2 - x_{L_1}$.

En el caso del Sol, la Tierra y la Luna, sabemos que el punto colineal de Lagrange L_1 corresponde a $x_{L_1} = 0,990029U_L$, de forma que la constante de Jacobi para la cual m_3 se quedaría en reposo en el punto colineal de Lagrange L_1 es

$$C_J = \frac{2(1-\alpha)}{x_{L_1} + \alpha} + \frac{2\alpha}{1 - \alpha - x_{L_1}} + x_{L_1}^2 = 3,00089.$$

y el radio de la esfera de Hill mencionada sería

$$r_H = x_2 - x_{L_1} = 1 - 0,990029 = 0,00997122U_L = 1,49169 \times 10^9 \text{ m.}$$

Esto quiere decir que la Luna todavía está dentro del radio de Hill (a una distancia del 26%) y no pasará a orbitar al Sol en vez de la Tierra en un futuro cercano.

4. **Ecuación de la curva límite.** Considere una partícula de prueba que está confinada a moverse en el plano xy , formando un sistema de tres cuerpos con otro par de objetos masivos. Demuestre que la ecuación de la *curva límite* (que separa las regiones donde la partícula puede moverse y donde no) es

$$(1 - \alpha) \left(r_1^2 + \frac{2}{r_1} \right) + \alpha \left(r_2^2 + \frac{2}{r_2} \right) = C_J + \alpha(1 - \alpha).$$

A partir de esta expresión, demuestre que el valor mínimo de la constante de Jacobi C es

$$C_{\min} = 3 - \alpha(1 - \alpha)$$

4. Solución

Recordemos que en las unidades canónicas de nuestro CRTBP, la constante de Jacobi está dada por

$$C = -\bar{v}^2 + \frac{2(1-\alpha)}{r_1} + \frac{2\alpha}{r_2} + x^2 + y^2.$$

Debido a que necesariamente $\bar{v}^2 \geq 0$, tiene que suceder también que

$$-C + \frac{2(1-\alpha)}{r_1} + \frac{2\alpha}{r_2} + x^2 + y^2 \geq 0.$$

Por lo tanto, la ecuación de la curva límite que separa las regiones donde la partícula puede moverse está dada por el caso de igualdad. Ahora, si la partícula de prueba que está confinada a moverse en el plano xy , entonces su coordenada $z = 0$ y, recordando que $x_1 = -\alpha$ y que $x_2 = 1 - \alpha$, tenemos lo siguiente:

$$r_1^2 = (x - x_1)^2 + y^2 = (x + \alpha)^2 + y^2 = x^2 + 2\alpha x + \alpha^2 + y^2 \quad (8.80)$$

$$r_2^2 = (x - x_2)^2 + y^2 = (x - (1 - \alpha))^2 + y^2 = x^2 - 2(1 - \alpha)x + (1 - \alpha)^2 \quad (8.81)$$

Al restar estas dos ecuaciones, tenemos

$$r_1^2 - r_2^2 = 2x + \alpha^2 - (1 - \alpha)^2 \implies 2x = r_1^2 - r_2^2 - \alpha^2 + (1 - \alpha)^2.$$

Al sumarlas y aplicar lo obtenido, se sigue

$$r_1^2 + r_2^2 = 2(x^2 + y^2) + 2(2\alpha - 1)x + \alpha^2 + (1 - \alpha)^2 = 2(x^2 + y^2) + (2\alpha - 1)[r_1^2 - r_2^2 - \alpha^2 + (1 - \alpha)^2]$$

Al despejar $2(x^2 + y^2)$ (con cuidado algebraico):

$$\begin{aligned} 2(x^2 + y^2) &= r_1^2 + r_2^2 - (2\alpha - 1)[r_1^2 - r_2^2 - \alpha^2 + (1 - \alpha)^2] - \alpha^2 - (1 - \alpha)^2 \\ &= r_1^2 + r_2^2 - (2\alpha - 1)r_1^2 + (2\alpha - 1)r_2^2 + (2\alpha - 1)\alpha^2 - (2\alpha - 1)(1 - \alpha)^2 - \alpha^2 - (1 - \alpha)^2 \\ &= r_1^2 + r_2^2 - 2\alpha r_1^2 + r_1^2 + 2\alpha r_2^2 - r_2^2 + 2\alpha^3 - \alpha^2 - 2\alpha + 4\alpha^2 - 2\alpha^3 + 1 - 2\alpha + \alpha^2 - \alpha^2 \\ &= 2r_1^2(1 - \alpha) + 2\alpha r_2^2 - 2\alpha(1 - \alpha). \end{aligned}$$

Simplificando, se obtiene finalmente

$$x^2 + y^2 = r_1^2(1 - \alpha) + \alpha r_2^2 - \alpha(1 - \alpha).$$

Reemplazando este resultado en la ecuación de la curva límite, tenemos

$$-C + \frac{2(1 - \alpha)}{r_1} + \frac{2\alpha}{r_2} + r_1^2(1 - \alpha) + \alpha r_2^2 - \alpha(1 - \alpha) = 0.$$

Reorganizando esta expresión, obtenemos lo pedido:

$$(1 - \alpha) \left(r_1^2 + \frac{2}{r_1} \right) + \alpha \left(r_2^2 + \frac{2}{r_2} \right) = C + \alpha(1 - \alpha).$$

Ahora, si derivamos parcialmente esta expresión con respecto a r_1 , obtenemos

$$(1 - \alpha) \left(2r_1 - \frac{2}{r_1^2} \right) = \frac{\partial C}{\partial r_1}.$$

Igualando esta expresión a cero, obtenemos los puntos críticos de C:

$$(1 - \alpha) \left(2r_1 - \frac{2}{r_1^2} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad r_1 = 1$$

α no puede ser 1 porque, por definición, su valor está entre 0 y 0.5. Al derivar parcialmente con respecto a r_2 e igualando a cero, obtenemos, de igual manera, $r_2 = 1$. Al derivar una segunda vez con respecto, por ejemplo, a r_1 , obtenemos

$$(1 - \alpha) \left(2 + \frac{4}{r_1^3} \right) = \frac{\partial^2 C}{\partial r_1^2}.$$

Nótese que

$$\left. \frac{\partial^2 C}{\partial r_1^2} \right|_{r_1=1} > 0.$$

Haciendo lo mismo con r_2 , se obtiene que

$$\left. \frac{\partial^2 C}{\partial r_2^2} \right|_{r_2=1} > 0.$$

por lo que podemos asegurar que estamos hallando un mínimo. Al reemplazar $r_1 = r_2 = 1$ en nuestra curva límite, se sigue que

$$(1 - \alpha)(1 + 2) + \alpha(1 + 2) = C_{\min} + \alpha(1 - \alpha) \quad \Rightarrow \quad C_{\min} = 3 - \alpha(1 - \alpha),$$

que era lo que queríamos demostrar.

5. **Criterio de Tisserand para órbitas parabólicas.** Muestre que si un cometa inicialmente en una órbita parabólica es perturbado por Júpiter de manera que la órbita final continúa siendo parabólica, la relación de las inclinaciones orbitales antes y después se escribe como

$$\cos i_2 = \sqrt{\frac{q_1}{q_2}} \cos i_1$$

donde q_1 y q_2 son las distancias al perihelio de la órbita inicial y final respectivamente.

5. **Solución.** Recordemos que la solución del problema de los dos cuerpos es

$$r = \frac{h^2/\mu}{1 + e \cos f}.$$

Por definición, para una parábola, $e = 1$. Por lo tanto, para $r = q$, la distancia al periastro, se sigue que

$$q = \frac{h^2}{2\mu},$$

donde $\vec{h} = \vec{r} \times \vec{v}$. Como este vector es constante, calculemos su magnitud en un punto en particular: el periastro,

$$h = qv_p,$$

donde v_p es la velocidad del cometa en el periastro, perpendicular al vector posición en ese punto. Igualando las últimas dos relaciones, obtenemos

$$v_p = \sqrt{\frac{2\mu}{q}}.$$

Recordemos, además, que la energía específica para el problema de los dos cuerpos se escribe como

$$\epsilon = \frac{1}{2}v^2 - \frac{\mu}{r}.$$

Dado que esta cantidad también es constante, podemos calcularla para cualquier punto de la órbita; otra vez, en el periastro,

$$\epsilon = \frac{1}{2}\frac{2\mu}{q} - \frac{\mu}{q} = 0.$$

Por lo tanto, obtenemos una relación *vis viva* para órbitas parabólicas:

$$v^2 = \frac{2\mu}{r}.$$

Ahora, volviendo a nuestro problema de tres cuerpos, teníamos que para un sistema coordenado (ξ, η, ζ) que no rota con la línea que une a m_1 y a m_2 , la constante de Jacobi es

$$C(\xi, \eta, \zeta) = -\left(\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + \dot{\zeta}^2\right) + \frac{2(1-\alpha)}{r_1} + \frac{2\alpha}{r_2} + 2h \cos i.$$

Dado que $\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + \dot{\zeta}^2 = v^2$, que estamos considerando que m_3 orbita a m_1 y que en nuestras unidades canónicas $\mu = 1$, entonces

$$C = -\frac{2}{r_1} + \frac{2(1-\alpha)}{r_1} + \frac{2\alpha}{r_2} + 2h \cos i.$$

Como C es constante, lo puedo calcular donde yo quiera y permanecerá constante. Por lo tanto, puedo calcularlo cuando el cometa esté muy lejos de m_1 y m_2 , en donde $r_1, r_2 \gg 1$, tal que

$$C = 2h \cos i.$$

Así, para dos órbitas con distancias al periastro q_1 y q_2 e inclinaciones i_1 e i_2 , obtenemos el criterio

$$2\sqrt{2q_1} \cos i_1 = 2\sqrt{2q_2} \cos i_2.$$

Despejando, obtenemos lo pedido:

$$\cos i_2 = \sqrt{\frac{q_1}{q_2}} \cos i_1.$$

6. **Velocidad mínima respecto a un sistema rotante.** Una nave espacial se encuentra en una órbita circular alrededor de la Tierra con una altitud de 200 km y con un inclinación orbital respecto al ecuador terrestre de 28.6° (esto último garantiza que la nave espacial y la Luna se mueven sobre el mismo plano). A la nave se le dará un incremento tangencial en la velocidad, de tal manera que la órbita subsecuente sea capaz de llevarla a una órbita lunar sin variar su inclinación orbital y con el mínimo gasto de combustible posible. Considerando la teoría alrededor de la constante de Jacobi, encuentre la velocidad mínima que debería tener la nave espacial (respecto al sistema rotante) requerida para este propósito. (*Ayuda:* calcule el valor de C_J asociado con una partícula hipotética en reposo localizada en L_1)

6. Solución

De la teoría alrededor de la constante de Jacobi, sabemos que en nuestro sistema de referencia no inercial, existen regiones donde la nave espacial puede estar y otras donde no. Estas regiones dependen de la constante de Jacobi como tal. Si C es pequeña —por ejemplo, igual a C_{\min} —, la nave espacial puede estar prácticamente en todo el espacio. Si C es grande —digamos, por ejemplo, del orden de $10C_{\min}$ —, la nave está restringida a un lugar del espacio muy pequeño, muy cerca a m_1 o a m_2 , dependiendo de sus condiciones iniciales. Pero existe un valor exacto de C en donde la nave puede pasar de orbitar a m_1 a orbitar a m_2 por un solo punto, pero sin nunca irse muy lejos del sistema, si la posición inicial de la nave se encontraba dentro de esa región. Esta situación es representada en la figura de abajo.

Este punto, como se muestra en la figura, es el primer punto colineal de Lagrange, L_1 (recordemos que los puntos colineales de Lagrange—además de ser puntos de equilibrio—son los puntos en donde las regiones de exclusión se abren y permiten el intercambio orbital o incluso, en el caso de L_2 y L_3 , la deriva del cuerpo m_3). Las regiones donde la nave espacial *puede* estar son las que están dentro de la curva interior y fuera de la curva exterior. La región entre las curvas no es permitida, pues la nave tendría una rapidez compleja y esto no tiene sentido físico (por ahora... o bueno, por lo menos no en este problema).

Ahora, recordemos que la constante de Jacobi es tal que

$$\vec{v}^2 = -C_J + \frac{2(1-\alpha)}{r_1} + \frac{2\alpha}{r_2} + x^2 + y^2.$$

Por lo tanto, volviendo al problema, para que la rapidez que deba tener la nave espacial para pasar a orbitar la Luna sea mínima, se deben cumplir varias condiciones:

- a. Dado que está negativa, la constante de Jacobi C_J debe tener el máximo valor posible que permita un intercambio de órbitas. Esto es, debe tener el valor para que las regiones de exclusión sean las que se muestran en la figura anterior.
- b. Por lo tanto, vamos a calcular C_J en un punto conocido: L_1 . Para que la rapidez de la nave al dejar la órbita de la Tierra sea mínima, la rapidez en L_1 debe ser casi cero, apenas para alcanzar a intercambiar de órbita.
- c. Después de tener C_J , hay que calcular v al salir de la Tierra. Para esto, r_1 es fija y está dada por las condiciones del problema. Pero para que v sea mínima, hay que encontrar los sus puntos críticos respecto a x y y .

Ahora sí, dada la discusión, calculemos: tenemos $a = 6571 \text{ km} = 0,017112 U_L$ (el radio de la órbita inicial de la nave alrededor de la tierra. No se debe confundir con el semieje mayor de la Luna alrededor de la Tierra, que en nuestras unidades canónicas sería $a_{luna} = 1 U_L$), $e = 0$ y $\alpha = \frac{M_{luna}}{M_{luna} + M_{\oplus}} = 0,01215$. Computacionalmente hallamos la posición de L_1 y obtenemos $x_{L_1} = 0,836924$. En este punto,

$$r_1 = x_{L_1} - x_1 = x_{L_1} + \alpha \quad (8.86)$$

$$r_2 = x_2 - x_{L_1} = 1 - \alpha - x_{L_1} \quad (8.87)$$

$$x^2 + y^2 = x_{L_1}^2 \quad (8.88)$$

y por lo tanto

$$C_J = \frac{2(1-\alpha)}{x_{L_1} + \alpha} + \frac{2\alpha}{1-\alpha - x_{L_1}} + x_{L_1}^2 = 3,18832.$$

Ahora, para calcular v_{min} , escribamos \vec{v}^2 en términos de la expresión $x^2 + y^2 = r_1^2(1-\alpha) + \alpha r_2^2 - \alpha(1-\alpha)$ encontrada en el problema 4:

$$\vec{v}^2 = -C_J + \frac{2(1-\alpha)}{r_1} + \frac{2\alpha}{r_2} + r_1^2(1-\alpha) + \alpha r_2^2 - \alpha(1-\alpha).$$

Dado que $r_1 = a$ es fijo, derivemos con respecto a r_2 :

$$\frac{d\vec{v}^2}{dr_2} = -\frac{2\alpha}{r_2^2} + 2\alpha r_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad r_2 = 1.$$

Claramente,

$$\left. \frac{d^2\vec{v}^2}{dr_2^2} \right|_{r_2=1} > 0,$$

por lo que $r_2 = 1$ corresponde a un mínimo de \vec{v}^2 y tenemos entonces que para que la velocidad que le vamos a dar a la nave en su órbita inicial alrededor de la Tierra sea mínima, se debe cumplir que

$$r_1 = a \tag{8.89}$$

$$r_2 = 1 \tag{8.90}$$

$$x^2 + y^2 = a^2 - a^2\alpha + \alpha^2, \tag{8.91}$$

de manera que

$$v_{min} = \sqrt{-C_J + \frac{2(1-\alpha)}{a} + 2\alpha + a^2 - a^2\alpha + \alpha^2} = 10,5969 U_L / U_T = 10,8572 \text{ km/s.}$$

7. **Constante de Jacobi como función de α .** Usando las herramientas computacionales provistas en clase, encuentre el valor de la constante de Jacobi correspondiente al punto de Lagrange L_1 para varios valores de α . Trate de encontrar una ley de escalamiento entre C y α .

7. **Solución.** Pendiente.

Capítulo 9

El formalismo lagrangiano y la mecánica celeste

Resumen

En este capítulo introduciremos el denominado *formalismo lagrangiano* de la mecánica, la primera y más conocida reformulación teórica de la mecánica newtoniana. El objetivo del capítulo es el de ofrecer una primera introducción al formalismo y su aplicación en mecánica celeste. Introduciremos aquí las ecuaciones de Euler-Lagrange, la alternativa del formalismo lagrangiano a las ecuaciones de movimiento newtonianas, que deduciremos, por un lado, a partir del principio de Alambert-Lagrange (basado en el principio de trabajos virtuales) y por el otro a partir del fundamental principio de Hamilton o principio de mínima acción o de acción estacionaria. Estudiaremos la manera como las constantes de movimiento de un sistema dinámico pueden deducirse a partir de simetrías usando el poderoso teorema de Noether. Finalmente aplicaremos el formalismo en la solución a problemas en mecánica celeste, en especial la solución al problema general de los dos cuerpos sometidos a fuerzas centrales (newtonianas y no newtonianas).

9.1. Motivación

La teoría desarrollada hasta este punto en el texto se basa en el denominado formalismo vectorial de la mecánica, que básicamente expresa toda la dinámica de los sistemas de partículas usando cantidades vectoriales y sus relaciones matemáticas y geométricas.

En este formalismo la solución a cualquier problema mecánico que requiera predecir la posición de un sistema de partículas, requiere resolver las ecuaciones de movimiento de todas las partículas:

$$\{\ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i(t, \{\vec{r}_j\}_N, \{\dot{\vec{r}}_j\}_N)\}_N$$

Esta aproximación a los problemas mecánicos enfrenta una serie de limitacio-

nes, algunas bastante obvias y otras muy sutiles. Así por ejemplo:

1. Para resolver el problema es necesario especificar completamente todas las fuerzas involucradas $\vec{F}_i(t, \{\vec{r}_j\}_N, \{\dot{\vec{r}}_j\}_N)$, algunas de las cuales pueden ser funciones muy complejas del tiempo y de las posiciones de todas o algunas de las partículas.
2. Existen situaciones en física en donde no es posible, incluso por principio, encontrar fuerzas asociadas a las interacciones. Este es el caso por ejemplo de la teoría general de la relatividad, en el que el concepto de fuerza es accesorio y no intrínseco a la teoría, o en el caso de la aun más original teoría cuántica. En estas situaciones describir la dinámica usando la ecuación anterior es sino muy complicado, enteramente imposible.
3. El uso de cantidades vectoriales produce claramente una mayor complejidad matemática y computacional. Es posible que la notación sea más compacta pero el problema es en el fondo más elaborado y complejo.

Las limitaciones más profundas del formalismo vectorial residen en la incapacidad que tiene para revelar propiedades no triviales de los sistemas dinámicos, como descubriremos más adelante. En este capítulo, presentaremos una reformulación nueva de la mecánica, partiendo de novedosos (y más generales) principios fundamentales. El nuevo formalismo tiene además una estructura matemática que en principio es más fácil de manejar en tanto se basa enteramente en cantidades escalares. Llamamos a esta formulación nueva, en general, un **formalismo escalar de la mecánica**.

El formalismo escalar no solamente ha sido exitosamente aplicado en los últimos 250 años para resolver todos los problemas conocidos de la mecánica, incluyendo naturalmente los problemas de la mecánica celeste, sino que además ha probado ser increíblemente poderoso en la descripción de fenómenos en áreas diferentes como la electricidad y el magnetismo, la relatividad general y la mecánica cuántica. No sería exagerado decir que el formalismo escalar de la mecánica fue posiblemente uno de los descubrimientos teóricos más importantes en la historia de la física.

Es interesante anotar que si bien la mecánica Newtoniana hoy se considera tan solo una *teoría efectiva*, es decir, conceptualmente *imprecisa* y que fue reemplazada por la Teoría de la Relatividad, una teoría más fundamental del espacio-tiempo y el movimiento, el formalismo escalar que se desarrolló en el tiempo en el que la mecánica newtoniana estaba en la cúspide, sigue estando hoy en la base de las teorías físicas modernas no newtonianas, incluyendo la teoría de la relatividad.

Si bien la mayoría de los problemas que resolveremos en este capítulo, aplicando este nuevo formalismo, ya los resolvimos usando el formalismo vectorial, veremos como sus principios y las herramientas derivadas permiten entender aspectos de los problemas que en el formalismo vectorial toma tiempo entender, e incluso resolver más fácil problemas que no hemos abordado todavía.

9.2. El formalismo Lagrangiano

El primer formalismo escalar de la mecánica fue presentado en el año 1788 por el matemático y astrónomo italo-francés Joseph-Louis Lagrange (del que ya había-

mos hablado en la [??](#). Este formalismo ofrecía una serie de importantes ventajas frente a la formulación Newtoniana ampliamente conocida en su época. A esta nueva presentación de la mecánica se la conoce hoy como el **formalismo Lagrangiano**.

El formalismo Lagrangiano se basa originalmente en una ingeniosa y poderosa herramienta teórica ideada originalmente por el físico y matemático francés **Jean le Rond d'Alembert** (“*yan le ron dalambert*”⁵⁹). D'Alambert desarrolló esta idea para resolver específicamente problemas en los que una partícula o un conjunto de partículas se encuentran en equilibrio mecánico. En el formalismo vectorial de la mecánica, el equilibrio se expresa como una condición en el que la fuerza y la torca neta que actúa sobre cada partícula en el sistema es nula. La idea de d'Alambert fue utilizar, en lugar de la fuerza y la torca, el concepto de trabajo.

9.2.1. Principio de los trabajos virtuales

Para d'Alembert otra forma de expresar el equilibrio es la siguiente: supongamos que tomamos cada partícula del sistema en equilibrio y las desplazamos de sus posiciones, y de forma *imaginaria* (*desplazamientos virtuales*), en cantidades infinitesimalmente pequeñas, $\{\delta\vec{r}_i\}$ ⁶⁰.

Si los desplazamientos de las partículas satisfacen las **restricciones internas** del sistema, entonces, postula d'Alambert, la suma del *trabajo* realizado por todas las fuerzas que actúan sobre las partículas será nulo. A esta idea se la conoce como el **principio de los trabajos virtuales** y es de amplio uso en el estudio de sistemas de partículas en equilibrio en particular aquellas que forman cuerpos rígidos.

En términos matemáticos el principio de los trabajos virtuales puede escribirse como:

$$\sum_i \vec{F}_i \cdot \delta\vec{r}_i = 0 \quad (9.1)$$

En la [??](#) se presenta un sencillo problema de mecánica con el que podemos ilustrar el uso del principio de los trabajos virtuales.

Queremos resolver en este problema la pregunta de cuál es la magnitud de la fuerza \vec{R} que debo aplicar sobre la barra para que el sistema esté en equilibrio. Si bien este es un problema relativamente trivial de estática newtoniana, lo resolveremos usando, justamente, el principio de los trabajos virtuales de D'Alambert.

Para ellos podemos desplazar de forma imaginaria, todas las partes de la barra manteniendo, eso sí, su forma y longitud (*restricciones internas*). El desplazamiento puede realizarse en cualquier dirección y de cualquier manera (siempre que se cumplan las restricciones), pero evidentemente existirán unos desplazamientos en los que el principio pueda usarse de forma más útil. Así por ejemplo, el desplazamiento virtual mostrado en la [??](#) será a todas luces el más útil.

Dadas las restricciones impuestas por la rigidez de la barra, los desplazamientos virtuales asociados a las fuerzas pueden expresarse como función del ángulo *virtual* $\delta\theta$ en el que la hacemos girar, en la forma:

⁵⁹<https://forvo.com/search/Jean%20le%20Rond%20d%27Alembert/fr/>

⁶⁰el uso de “ δ ” en lugar del tradicional “ d ” del cálculo sirve para resaltar el hecho de que el desplazamiento no es real

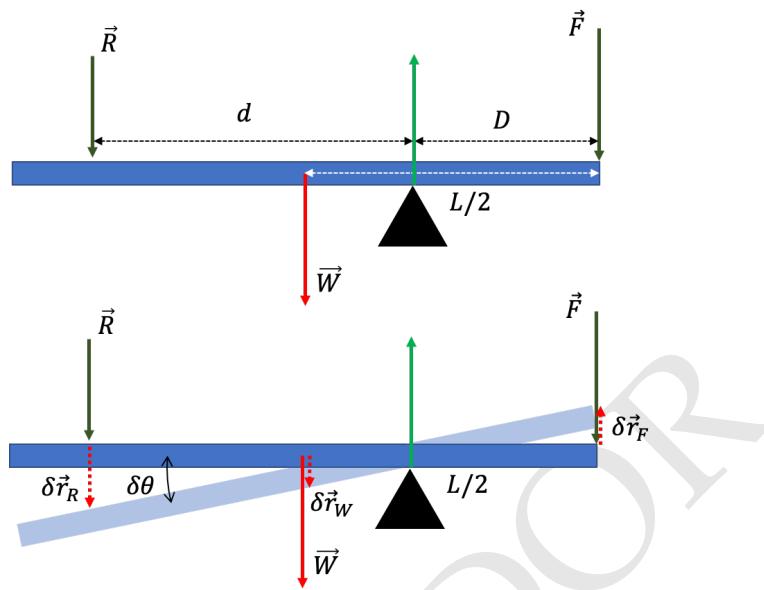


Figura 9.1: Arriba: una barra de peso W (conocido) se encuentra apoyada sobre un pivote (triángulo) mientras se aplica sobre ella sendas fuerzas \vec{R} y \vec{F} . Si se conoce la magnitud de F ¿cuál es la magnitud de R ? Abajo: representación de los desplazamientos virtuales de la barra.

$$\delta r_R = -d\delta\theta \quad (9.2)$$

$$\delta r_W = -(L/2 - D)\delta\theta \quad (9.3)$$

$$\delta r_F = +D\delta\theta \quad (9.4)$$

$$\delta r_N = 0 \quad (9.5)$$

$$(9.6)$$

El principio de los trabajos virtuales, Ec. (??, puede escribirse en este caso como:

$$-Rd\delta\theta - W(L/2 - D)\delta\theta + FD\delta\theta = 0$$

Dado que el desplazamiento $\delta\theta$ es arbitrario, esta igualdad es equivalente a:

$$-Rd - W(L/2 - D) + FD = 0$$

Y de allí puede obtenerse el valor de la magnitud de la fuerza necesaria:

$$R = \frac{FD - W(L/2 - D)}{d}$$

Si bien este problema parece trivial, debe anotarse que en ningún momento recurrimos a los principios de la mecánica Newtoniana, es decir al postulado de fuerzas o al teorema de acción y reacción, para resolver el problema. Esto ilustra

claramente como esta forma de aproximarse a su solución ma es realmente una alternativa nueva a estas leyes.

Otro elemento novedoso de esta aproximación, es la manera como quedan excluidas, de forma natural, fuerzas que son mucho más difíciles de modelar, tales como las fuerzas que mantienen unidas las partes del cuerpo o las fuerzas que resultan de la interacción de este con su entorno (por ejemplo la fuerza N).

9.2.2. Principio de d'Alambert-Lagrange

¿Podríamos aplicar un principio parecido a este pero en el caso de un sistema en movimiento?. Esta fue justamente la pregunta que intentaron resolver D'Alambert y luego Lagrange para generalizar el principio de los trabajos virtuales a todos los problemas de la mecánica.

Considere por ejemplo el mismo ejemplo anterior pero en una situación en la que la barra ya no esta en equilibrio. En su lugar rota con aceleración angular α en dirección contraria a las manecillas del reloj. En esta situación, sabemos que incluso si F se hace cero, un valor de R positivo podría ser consistente con la condición dinámica del sistema, lo que ciertamente contradice la solución encontrada con el principio de los trabajos virtuales.

Para resolver la situación D'Alambert y Lagrange formulan el siguiente principio general:

Principio 9.1

Principio de d'Alambert-Lagrange. En un sistema de N partículas sometidas a fuerzas $\{\vec{F}_i\}_N$ el trabajo virtual total realizado por las **fuerzas efectivas**. $\{\vec{F}_i - \dot{\vec{p}}_i\}_N$ es igual a cero:

$$\sum_i (\vec{F}_i - \dot{\vec{p}}_i) \cdot \delta \vec{r}_i = 0 \quad (9.7)$$

Como cualquier principio de la física el principio de D'Alambert-Lagrange no tienen ninguna justificación. Supone una relación inesperada, nueva, entre las cantidades involucradas en los problemas mecánicos. Algunos podrían encontrarlo bastante obvio, en tanto, de acuerdo con el postulado de fuerzas $\vec{F}_i = \dot{\vec{p}}_i$ y por lo tanto $\vec{F}_i - \dot{\vec{p}}_i = \vec{0}$. Pero no debemos olvidar que es justamente el postulado de fuerzas el que queremos reemplazar en esta reformulación de la mecánica.

Para ilustrar de qué manera el principio de d'Alambert-Lagrange constituye una alternativa nueva para la solución de problemas mecánicos, consideremos otro problema bien conocido: el **péndulo simple**. En la Figura 9.2 se ilustra esquemáticamente las condiciones básicas del problema.

Para aplicar el principio de d'Alambert-Lagrange, debemos primero encontrar un desplazamiento virtual que sea compatible con las restricciones del problema. El desplazamiento horizontal $\delta \vec{r}_H$ por ejemplo no es aceptable: si la partícula se mueve (imaginariamente) en esa dirección, la cuerda que la sostiene se distendería (también imaginariamente) violando una de las restricciones del problema. Tampoco sirve un desplazamiento virtual saliendo del plano del péndulo: se supone

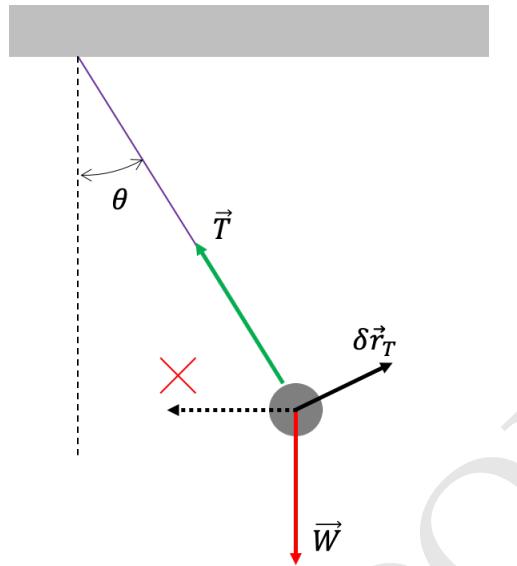


Figura 9.2: Una partícula puntual de peso \vec{W} conocido (representada aquí esquemáticamente como el disco gris) se suspende de una cuerda inextensible y rígida mientras se encuentra en un campo gravitacional uniforme. La partícula solo se mueve sobre el plano del dibulo. El desplazamiento virtual tangencial $\delta \vec{r}_T$ es compatible con las restricciones del sistema, mientras que el desplazamiento virtual horizontal $\delta \vec{r}_H$ no lo es.

que el movimiento de la partícula solo puede realizarse sobre dicho plano. El único desplazamiento virtual compatible, es uno que se realice en dirección perpendicular a la cuerda, o bien en el sentido del movimiento o en sentido contrario (la aplicación del principio no depende estrictamente del sentido elegido).

Después de este desplazamiento virtual, el trabajo total realizado por todas las fuerzas efectivas sobre la partícula, será:

$$[(\vec{T} + \vec{W}) - m\dot{\vec{v}}] \cdot \delta \vec{r}_T = 0$$

Ahora bien, por las restricciones del problema $\vec{T} \cdot \delta \vec{r}_T = 0$ y por lo tanto la tensión no aparecerá en la ecuación que rige la dinámica del sistema (solo lo hace implícitamente al restringir la manera como se puede definir el desplazamiento virtual).

En términos de la única fuerza remanente, el peso, y expresando la fuerza y el desplazamiento virtual en coordenadas cartesianas, el principio de d'Alambert-Lagrange para este sistema se puede escribir como:

$$(W_x - m\dot{v}_x)\delta x + (W_y - m\dot{v}_y)\delta y = 0 \quad (9.8)$$

Lamentablemente esta ecuación es muy poco útil. Para empezar hay dos *incognitas* \dot{v}_x, \dot{v}_y . Peor aún, los desplazamientos δx y δy **no son independientes**. Este último, es un aspecto fundamental del nuevo principio: el sistema de coordenadas debe elegirse apropiadamente para que su aplicación sea exitosa.

Un sistema de coordenadas más apropiado, dadas las *restricciones* implícitas del problema, es el sistema de coordenadas polares. En este sistema la única variable independiente que describe el desplazamiento virtual del sistema, es el ángulo θ . En términos de esta variable, las coordenadas cartesianas x, y se pueden escribir como:

$$\begin{aligned} x &= L \sin \theta \\ y &= -L \cos \theta \end{aligned} \quad (9.9)$$

de modo que las componentes del desplazamiento virtual son ahora:

$$\begin{aligned} \delta x &= L \cos \theta \delta \theta \\ \delta y &= -L \sin \theta \delta \theta \end{aligned}$$

Por su lado, las componentes de la aceleración se pueden escribir derivando dos veces las Ecs. (9.9) para obtener:

$$\dot{v}_x = -L \sin \theta \dot{\theta}^2 + L \cos \theta \ddot{\theta} \quad (9.10)$$

$$\dot{v}_y = L \cos \theta \dot{\theta}^2 + L \sin \theta \ddot{\theta} \quad (9.11)$$

$$(9.12)$$

Reemplazando en el principio de d'Alambert-Lagrange (Ec. 9.8) y teniendo en cuenta que $W_x = 0$ y $W_y = -mg$, obtenemos:

$$\begin{aligned} &[-mgL \sin \theta - m(L \cos \theta \dot{\theta}^2 + L \sin \theta \ddot{\theta})L \sin \theta + \\ &-m(-L \sin \theta \dot{\theta}^2 + L \cos \theta \ddot{\theta})L \cos \theta] \delta \theta = 0 \end{aligned}$$

Dado que $\delta \theta$ es arbitrario, la ecuación anterior se puede expresar finalmente como:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L} \sin \theta = 0 \quad (9.13)$$

que es justamente la ecuación de movimiento del péndulo que conocíamos del formalismo vectorial.

¿Ha sido esta la manera más simple de derivar la ecuación de movimiento del péndulo simple?. ¡Ciertamente no!. ¿Ha utilizado este procedimiento algún postulado de la mecánica newtoniana original?. ¡Tampoco!. El propósito aquí no era mostrar cómo derivar esta ecuación de una forma más simple, sino ilustrar como un nuevo e independiente principio (el principio de d'Alambert-Lagrange) conduce exactamente a los mismos resultados que se pueden obtener con la aplicación del formalismo vectorial original de Newton.

Adicionalmente este ejemplo nos ha permitido adelantar algunos de los aspectos críticos de la *tecnología* matemática en el fondo del formalismo lagrangiano, a saber:

1. El papel de las restricciones del sistema a la hora de escoger los desplazamientos virtuales compatibles y de eliminar las fuerzas de restricción (en este caso la tensión) desde el principio de la formulación del problema.

2. La importancia de elegir un sistema de coordenadas adecuado para hacer útil la aplicación del principio.

Estos dos aspectos del formalismo lagrangiano serán justamente el contenido de la discusión en las próximas secciones.

9.3. Restricciones y variables generalizadas

Como vimos en el ejemplo del péndulo simple, la aplicación del principio de d'Alambert-Lagrange puede ser truculenta. El número de desplazamientos virtuales consistentes con las restricciones puede ser enorme (si no infinito). No todos esos desplazamientos son compatibles con las restricciones del problema, y más sútil todavía, la manera como los podemos expresar en distintos sistemas de coordenadas, no necesariamente conducen a una ecuación *útil* e incluso a una ecuación soluble.

El aspecto más importante en la aplicación del principio es la elección de un conjunto apropiado de variables capaces de describir la *configuración del sistema* (dónde están las partículas del sistema) sin ninguna *redundancia*. Por ejemplo, en el caso del péndulo simple, cuando se utilizan las coordenadas cartesianas, los valores de x y y no son independientes. Estas dos variables están conectadas por la relación matemática:

$$x^2 + y^2 - L^2 = 0 \quad (9.14)$$

Esta relación es una expresión de una **restricción del sistema**, a saber el hecho de que la cuerda es rígida. Usando esta relación es posible, si se da el valor de una de las variables (x por ejemplo), obtener la otra (y). Es en este sentido que decimos que el sistema de coordenadas cartesianas es *redundante* para describir la dinámica del péndulo simple.

Con estas ideas en la cabeza podemos proceder a definir una serie de conceptos que serán fundamentales en lo que resta de la construcción del formalismo Lagrangiano.

Definición 9.1

Espacio de coordenadas. Es el espacio geométrico en el que se desarrolla la dinámica del sistema. En la física clásica, este espacio tiene tres dimensiones y por tanto la ubicación de los puntos en él se especifican usando tres coordenadas por partícula. El sistema *natural* de coordenadas de cualquier sistema de partículas, es el sistema cartesiano.

Es importante entender que el espacio *físico* es el mismo para todas las partículas que constituye el sistema. Sin embargo, para especificar la configuración de N partículas 3 coordenadas no son suficientes. En realidad es necesario especificar $3N$ coordenadas cartesianas, que describiremos en general como $\{\vec{r}_i\}_N$, o equivalentemente

$$\{x_i^k\}_{3N}$$

donde x^k con $k : (1, 2, 3)$ son las coordenadas cartesianas (x_i, y_i, z_i) de la partícula i -esima.

Definición 9.2

Restricción. Entendemos por restricción cualquier función o desigualdad que involucre las coordenadas cartesianas del sistema y que especifica las regiones del *espacio físico* a las que tiene acceso el sistema.

En el ejemplo del péndulo la Ec. (9.14) es una restricción en el sentido de la definición anterior.

Definición 9.3

Restricción holonómica. Son aquellas restricciones que conectan las coordenadas cartesianas del sistema a través de una igualdad del tipo:

$$f_k(\{\vec{r}_i\}, t) = 0 \quad (9.15)$$

donde el índice k simboliza el hecho que en un mismo problema puede existir más de una restricción.

El péndulo simple, por ejemplo, esto sometida a dos restricciones holonómicas:

$$\begin{aligned} f_1(\vec{r}, t) &\equiv z = 0 \\ f_2(\vec{r}, t) &\equiv x^2 + y^2 - L^2 = 0 \end{aligned}$$

Definición 9.4

Restricción no holonómica. Son aquellas restricciones que conectan las coordenadas cartesianas del sistema de una forma que no puede reducirse a la forma de una función elemental. Un caso particular de restricciones no holonómicas son por ejemplo las restricciones que se escriben como desigualdades:

$$f_k(\{\vec{r}_i\}, t) \leq 0$$

Este tipo de restricciones son utilizadas para delimitar regiones del espacio físico a las que el sistema puede o no puede acceder. Un ejemplo de una restricción no holonómica es la que debemos aplicar, por ejemplo, si queremos describir el movimiento de las partículas de un gas contenido en una caja. En ese caso las coordenadas cartesianas pueden ser cualquiera excepto si están por fuera de la caja.

Otro tipo de restricción no holonómica se obtiene en un sistema como el mostrado en la figura abajo. Un cuerpo se mueve sobre un cascarón esférico en un campo gravitacional.

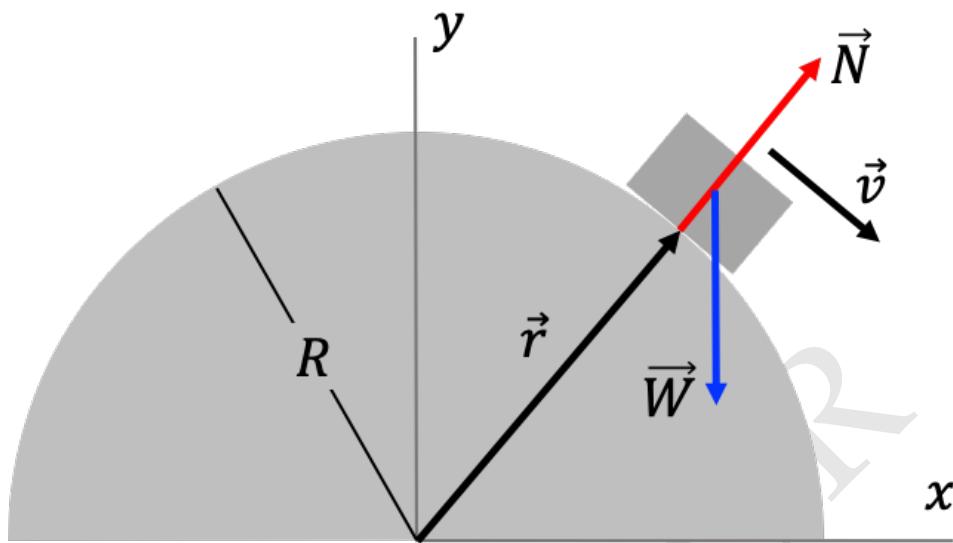


Figura 9.3: Un cuerpo desliza por la superficie de un cuenco invertido en presencia de un campo gravitacional uniforme. En algún punto en su descenso, el cuerpo puede desprenderse de la superficie.

En este ejemplo, tenemos ambas, restricciones holonómicas y no holonómicas:

$$f_1(\vec{r}, t) = z = 0 \quad (9.16)$$

$$f_2(\vec{r}, t) = x^2 + y^2 - R^2 \geq 0 \quad (9.17)$$

Es importante anotar que las restricciones no holonómicas no se son solamente a aquellas que se expresan en términos de desigualdades. Otro tipo de restricciones no holonómicas comunes son aquellas que se escriben en términos de *velocidades*. En ese caso, no siempre es posible expresar la condición en la forma:

$$f_n(\{\vec{r}_i\}, t) = 0$$

y por lo tanto tampoco podemos llamarla una restricción holonómica.

En las definiciones matemáticas de las restricciones (por ejemplo en la Ec. 9.15) aparece el tiempo. ¿Es esto valido?. En el caso del péndulo simple, ciertamente la restricción no depende del tiempo, pero existen otras restricciones que si pueden depender de él. Esto nos lleva a las siguientes definiciones:

Definición 9.5

Restricción esclerónica y reónoma. Las restricciones **esclerónomas*** son aquellas restricciones que no dependen *explícitamente* del tiempo. En contraposición, las restricciones **reónomas**, si dependen explícitamente de él.

El adverbio *explícitamente* es muy importante aquí, en tanto las restricciones siempre involucran variables dinámicas que cambian *intrínsecamente* con el tiem-

po. Una restricción es reónoma solo si el tiempo aparece en su fórmula como variable independiente.

Para ilustrar el caso de una condición reónoma, imagine que en la situación de la [Figura 9.3](#) el centro del cuenco se moviera con velocidad constante u , de modo que en el tiempo t tuviera abscisa $x_c(t) = ut$. La segunda restricción del sistema se escribiría como:

$$f_2(\vec{r}, t) = [x - x_c(t)]^2 + y^2 - R^2 \geq 0$$

o equivalentemente,

$$f_2(\vec{r}, t) = (x - ut)^2 + y^2 - R^2 \geq 0$$

Ambas fórmulas corresponden a restricciones reónomas, incluso si en la primera no se escribe la fórmula explícita de $x_c(t)$. De manera más general, entonces, para que una restricción sea reónoma, es necesario que el tiempo aparezca explícitamente o que una cantidad en la restricción dependa del tiempo de una manera conocida e independiente de la solución al problema dinámico.

Nota

el origen de las palabras. La palabra *esclerónoma* es ciertamente ajena al lenguaje cotidiano. Esta palabra viene del griego antiguo *sklero* que significa *duro* y de la partícula *nomos* o *nomía* que se refiere a una ley. Es decir, una restricción esclerónica se llama así porque es una “regla fija”, que no se modifica con el tiempo.

La palabra *reónomo* tampoco es común. Para recordarla basta recordar que *reo-* viene del griego *rheos* que significa flujo, corriente. Es decir una restricción reónoma para un griego antiguo sonaría algo así a una *regla cambiante*.

9.3.1. Fuerzas de restricción

Es interesante mencionar en este punto el hecho de que si en un sistema hay una restricción es porque pueden existir interacciones entre las partículas y su entorno que justamente mantengan al sistema constreñido. Así por ejemplo, en el cuerpo que desciende por el cuenco, una fuerza normal \vec{N} es la que mantiene el bloque a una distancia al menos igual al radio del cuenco.

A este tipo de fuerzas se las conoce como **fuerzas de restricción**. Estas fuerzas son, en general, muy difíciles de modelar en la mecánica Newtoniana y en la mayoría de las ocasiones es casi imposible conocerlas a priori. La fuerza total sobre una partícula del sistema puede siempre descomponerse como:

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^a + \vec{f}_i$$

donde llamaremos a \vec{F}_i^a la *fuerza aplicada* (por ejemplo producto de las interacciones entre las partículas) y \vec{f}_i la fuerza de restricción.

Dado que en la aplicación del principio de d'Alambert-Lagrange solo pueden usarse desplazamientos virtuales compatibles con las restricciones, es muy común encontrar que estos desplazamientos terminan siendo perpendiculares a las fuerzas de restricción. Por la misma razón el *trabajo virtual* realizado por las fuerzas de restricción es nulo.

Este resultado nos permite generalizar reescribir el principio de d'Alambert-Lagrange prescindiendo completamente de las fuerzas de restricción:

$$\sum_i (\vec{F}_i - \dot{\vec{p}}_i) \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_i (\vec{F}_i^a - \dot{\vec{p}}_i) \cdot \delta \vec{r}_i = 0 \quad (9.18)$$

Esta idea, que parece trivial, en realidad es una de las características más notorias del formalismo Lagrangiano. En este formalismo las desconocidas fuerzas de restricción no juegan (aparte de determinar las restricciones mismas) ningún papel en la dinámica del sistema. Esta es la razón por la cuál, por ejemplo, en el péndulo simple, la tensión, que juega el papel de una fuerza de restricción, no aparece en la ecuación final de movimiento.

9.3.2. Variables generalizadas

En el cuadro de Nota de la sección anterior en la que explicábamos el origen de las palabras *esclerónica* y *reónoma* bien podríamos haber explicado también la razón por la cuál las restricciones que se expresan con igualdades se conocen como *restricciones holónomas*. ¿Qué significado tiene el término *holónomo* en este contexto?.

La palabra *holonomía* tiene significados muy específicos en matemáticas, en particular en geometría. Si bien la raíz griega *holos* significa todos, la holonomía hace referencia a la manera como las propiedades geométricas de un sistema se modifican cuando se produce un desplazamiento en el espacio. La holonomía hace referencia por lo tanto en las matemáticas, a una transformación. Esta es la misma acepción por la que se usa la palabra en la mecánica analítica.

Cuando las variables cartesianas de un sistema dinámico están sujetas a restricciones holónómicas, sabemos que es posible describir el estado o *configuración* del sistema usando un conjunto *reducido* de variables en lugar de usar todas las coordenadas físicas del sistema. Así por ejemplo, en el caso del péndulo simple, las dos restricciones holónomas impuesta por la cuerda, permiten describir el sistema usando una sola variable, en lugar de las tres coordenadas cartesianas. Esta condición permite introducir un concepto nuevo y crucial en el formalismo Lagrangiano.

Definición 9.6

Número de grados de libertad, M, de un sistema dinámico. El *número de grados de libertad* de un sistema dinámico es el número mínimo de variables que pueden usarse para describir sin redundancias la configuración del sistema. Si un sistema de N partículas está sometido a K restricciones holónomas, el número de grados de libertad M es:

Definición 9.6 (Cont.)

$$M = 3N - K$$

En el péndulo simple, donde $N = 1$ y $K = 2$, el número de grados de libertad es $M = 3 \times 1 - 2 = 1$, que coincide justamente con nuestra intuición y con el procedimiento que seguimos en la [Sección 9.2.2](#), donde vimos que solo es necesaria una variable, en particular un ángulo, para especificar la posición de la partícula.

Ahora bien, ¿cuáles son las variables que pueden usarse en lugar de las coordenadas físicas del sistema para describir la configuración del mismo?. La respuesta a esta pregunta no es única. Así por ejemplo, en el caso del péndulo simple podríamos usar la coordenada x solamente, el ángulo θ , la longitud del arco l medido a lo largo del movimiento, la altura h sobre el nivel del techo, etc. Más interesante aún sería utilizar como variable la velocidad tangencial v_t , la energía potencial gravitacional U u otras variables dinámicas. Es decir, para especificar la configuración de un sistema no solo pueden usarse *coordenadas* sino que también podrían usarse otras cantidades físicas (energías, velocidades, momentos).

Definición 9.7

Variables generalizadas. Cualquier conjunto de M de variables físicas (siendo M el número de grados de libertad) que permitan describir únicamente la configuración de un sistema dinámico se conocen como *variables generalizadas*. En lo sucesivo para referirnos a ella usaremos la notación:

$$\{q_j\}_M$$

Las restricciones *holonomas* permiten que podamos encontrar funciones matemáticas o transformaciones que conecten las coordenadas del sistema con las variables generalizadas. Estas transformaciones pueden escribirse de forma general como:

$$\{\vec{x}_{k,i} = \vec{x}_{k,i}(t, \{q_j\}_M)\}_{3N} \quad (9.19)$$

En términos matemáticos, las coordenadas del sistema y sus variables generalizadas se relacionan a través de una *holonomía*. Esta es justamente la acepción que tiene esta palabra en el contexto del formalismo lagrangiano.

Aunque no siempre es seguro, asumiremos en lo sucesivo que las funciones en la Ec. (9.19) pueden ser invertidas para encontrar las variables generalizadas como función de las coordenadas:

$$\{q_j = q_j(t, \{\vec{r}_i\}_N)\}_M \quad (9.20)$$

Como ilustración de estas relaciones abstractas, usemos nuevamente el caso del péndulo simple. En este caso si tomamos como variable generalizada q_1 el ángulo θ , las ecuaciones de transformación (Ec. 9.19) se escriben como:

$$\begin{aligned}x_1(t, q_1) &= L \sin q_1 \\y_1(t, q_1) &= -L \cos q_1 \\z_1(t, q_1) &= 0\end{aligned}$$

y su inversa (Ecs. 9.20) como:

$$q_1(t, x_1, y_1, z_1) = \tan^{-1}(y_1/x_1)$$

Por definición, en el caso en el que un sistema tenga restricciones holónomas esclerónomas, las ecuaciones de transformación no dependerán explícitamente del tiempo. Por otro lado, si las restricciones son holónomas reónomas, el tiempo aparecerá explícitamente en las ecuaciones de transformación.

NOTA

Variables generalizadas independientes. Un importante detalle para tener en cuenta sobre las variables generalizadas es que al elegirlas no se trata simplemente de escoger M números en lugar de $3N$.

Las variables escogidas deben ser tales que sean completamente *independientes*. Esto significa que una variable puede cambiar sin que otras variables generalizadas cambien también.

Imaginen por ejemplo el caso del péndulo cónico mostrado en la ???. En esta situación el número de grados de libertad es de 2. ¿cuáles podrían ser las variables generalizadas?

Podría elegir por ejemplo como variables generalizadas las coordenadas cartesianas x, y (tenga presente que y va en la dirección vertical). El problema es que dadas las restricciones del sistema, no es posible variar la coordenada x sin que se produzca un cambio en la coordenada y . Es decir, este par de variables no es el más apropiado para describir el sistema. Lo mismo podría ocurrir si elijo la coordenada y y la energía potencial U .

Sin embargo si elijo como variables generalizadas la coordenada z y el ángulo θ es posible imaginar un desplazamiento virtual que implique un cambio en θ sin que se modifique z y viceversa. O bien, puedo escoger como variables generalizadas (esta sería la elección más apropiada) dos ángulos, el ángulo θ del péndulo respecto a la vertical, y un ángulo horizontal ϕ . En este caso, de nuevo, puedo imaginarme desplazamientos virtuales que impliquen el cambio de un ángulo sin que el otro se modifique.

El concepto de variables independientes conduce, finalmente, a la última definición importante de esta sección:

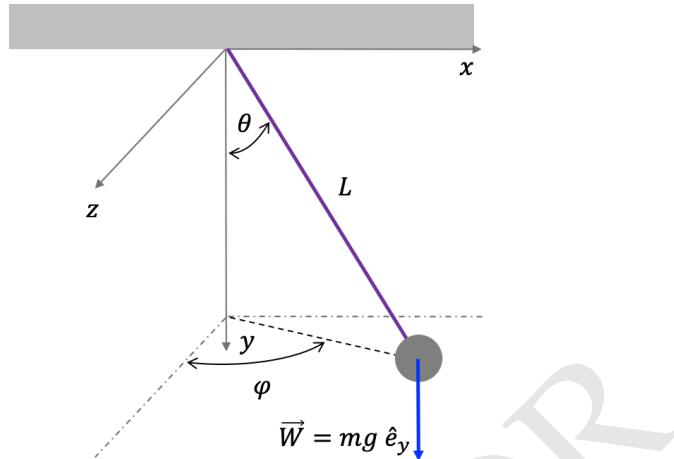


Figura 9.4: En el péndulo cónico generalizado, la partícula puede moverse libremente oscilando en y alrededor de la dirección vertical.

Definición 9.8

Espacio de configuración. Al espacio definido por las variables generalizadas de un sistema dinámico lo llamaremos *espacio de configuración*. Este espacio es en general diferente del espacio coordenado (con la excepción de sistemas que no tengan restricciones). Cada punto del espacio de configuración está determinado por M coordenadas (las variables generalizadas del punto).

9.3.3. Propiedades matemáticas de las reglas de transformación

Muchos de los resultados sobre los que se basa la construcción del formalismo Lagrangiano dependen de propiedades matemáticas específicas de las reglas de transformación $\vec{r}_i(t, \{q_j\},)$ que definimos antes. He aquí algunas de ellas.

- **Desplazamientos virtuales en el espacio de configuración.** Un desplazamiento virtual en el espacio coordenado se puede expresar como desplazamiento virtual en el espacio de configuraciones usando la regla de la cadena:

$$\delta \vec{r}_i = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \delta t \right)$$

Dado que por definición, los desplazamientos virtuales no implican un cambio verdadero en la configuración del sistema, los cambios no implican la variable tiempo. De allí que la relación estrictamente correcta es:

$$\delta \vec{r}_i = \sum \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \quad (9.21)$$

- **Velocidad coordenada y velocidad generalizada.** Usando también la regla de la cadena podemos escribir las relaciones entre la velocidad en el espacio coordenado y en el espacio de configuración:

$$\dot{\vec{r}}_i = \sum \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \quad (9.22)$$

- **Arbitrariedad en el orden de las derivadas.** Una propiedad útil muy importante de las reglas de transformación es que es posible intercambiar las derivadas temporales con las derivadas espaciales:

$$\frac{\partial}{\partial q_l} \left(\frac{d\vec{r}_i}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_l} \right) \quad (9.23)$$

En la sección de Problemas se propone la demostración de esta propiedad.

- **Regla de cancelación de “puntos”.** Si derivamos la velocidad con respecto de la componente de la velocidad generalizada q_k obtenemos:

$$\frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_k} = \sum \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{q}_k} + \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial \dot{q}_j \partial t}$$

Si reconocemos que $\partial \dot{q}_j / \partial \dot{q}_k = \delta_{jk}$ siendo δ_{jk} el delta de kroenecker, entonces:

$$\frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_l} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_l} \quad (9.24)$$

Llamamos a esta la *regla de cancelación de puntos* en tanto parece como si los puntos en el numerador y el denominador se cancelaran.

Un ilustración de la regla de cancelación de puntos se puede obtener volviendo sobre el ejemplo del péndulo simple. En ese caso la refleja de transformación de la coordenada x se escribe como:

$$x(q) = L \sin(q)$$

Derivando a ambos lados con respecto al tiempo obtenemos:

$$\dot{x}(q, \dot{q}) = L \cos(q) \dot{q}$$

De donde vemos que efectivamente $\partial \dot{x} / \partial \dot{q}$ es igual a $\partial x / \partial q$.

9.4. Las ecuaciones de Lagrange

Una vez definidos apropiadamente los conceptos en el contexto del formalismo lagrangiano, procederemos en esta sección a encontrar una expresión o una receta matemática que, partiendo del principio de d'Alambert-Lagrange, permita describir un sistema dinámico sin los artificios propios de la aplicación de ese principio.

Para empezar, expresaremos el principio de d'Alambert-Lagrange, pero no en términos de las coordenadas cartesianas como lo hicimos en la Ec. (9.18), sino como función de las variables generalizadas. Para ello, usaremos la expresión que deducimos para los desplazamientos virtuales $\delta\vec{r}_i$ como función de las variables generalizadas y que expresamos como la Ec. (9.21). En estos términos el principio se escribe como:

$$\sum_i \sum_j \vec{F}_i^a \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j - \sum_i \sum_j \vec{p}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j = 0$$

Consideraremos por separado los dos términos de esta ecuación.

El segundo término, que apodaremos temporalmente el *termino inercial* del principio de d'Alambert-Lagrange, después de algunas transformaciones algebraicas simples, se puede escribir en la forma:

$$\sum_i \sum_j \vec{p}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_j \left\{ \sum_i \frac{d}{dt} \left(m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) - m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) \right\} \delta q_j$$

Si usamos la ley de cancelación de "puntos" (Ec. 9.24) y la arbitrariedad del orden de la derivada parcial y total (Ec. 9.23), este término puede escribirse de una forma más conveniente como:

$$\sum_i \sum_j \vec{p}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_j \left\{ \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \sum_i \left(\frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^2 \right) \right] - \frac{\partial}{\partial q_j} \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^2 \right\} \delta q_j \quad (9.25)$$

En esta expresión reconocemos claramente la energía cinética total del sistema⁶¹,

$$T \equiv \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i^2 / 2 \quad (9.26)$$

Es importante entender que en esta expresión, las cantidades $\dot{\vec{r}}_i$ no son cantidades física convencionales, es decir, los vectores de velocidad de las partículas, como pensaría uno en un primer vistazo. En realidad, por la manera como venimos realizando esta deducción, tanto \vec{r}_i como $\dot{\vec{r}}_i$ son funciones de las variables generalizadas $\{q_j\}$ y sus derivadas respecto del tiempo $\{\dot{q}_j\}$. Por esta misma razón, la energía cinética escrita en la forma de la Ec. (9.27) es en realidad un *funcional*: una función de funciones.

Otra manera de expresar este hecho fundamental es escribir explícitamente la dependencia intrínseca de la energía cinética de las variables generalizadas:

⁶¹En el Capítulo 6 habíamos utilizado la letra K para referirnos a esta cantidad. Aquí, para ser consistentes con buena parte de la literatura en el tema, usaremos en los sucesivos la letra T .

$$T(\{q_j\}, \{\dot{q}_j\}, t) = \sum_i m_i \dot{r}_i^2 / 2 \quad (9.27)$$

En términos de la energía cinética el término inercial del principio de d'Alambert-Lagrange se puede escribir finalmente como:

$$\sum_i \sum_j \dot{p}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_j \left\{ \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right] - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right\} \delta q_j \quad (9.28)$$

Analicemos ahora el término que involucra las fuerzas aplicadas. Por simplicidad en lo sucesivo escribiremos $\vec{F}_i \equiv \vec{F}_i^a$, y por tanto todas las fuerzas a las que nos referimos en lo sucesivo excluyen las fuerzas de restricción. El término mencionado se puede simplificar si introducimos una cantidad nueva.

$$\sum_j \sum_i \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_j Q_j \delta q_j \quad (9.29)$$

donde a Q_j la llamaremos la **fuerza generalizada** asociada a la variable q_j y por definición es igual a:

$$Q_j \equiv \sum_i \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \quad (9.30)$$

Reemplazando el término inercial en la Ec. (9.25) con el término de fuerza en la Ec. (9.29), el principio de d'Alambert-Lagrange se puede escribir como:

$$\sum_j \left[Q_j - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) + \frac{\partial T}{\partial q_j} \right] \delta q_j = 0$$

En este punto es importante recordar que las variables generalizadas son completamente independientes. Recordemos que esto significa que se puede producir un desplazamiento virtual en el que solo una de ellas cambie $\delta q_j \neq 0$, mientras las demás se mantengan constantes. Si aún en esta condición la igualdad anterior es válida podemos concluir que las M cantidades contenidas entre corchetes deben ser simultáneamente cero. Esta conclusión conduce al conjunto de ecuaciones diferenciales que describen completamente la dinámica del sistema:

$$\left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \right\}_M \quad (9.31)$$

Llamamos a estas las **Ecuaciones de Lagrange**.

Las ecuaciones de Lagrange, dictan la manera como se relacionan las componentes de la aceleración generalizada $\{\ddot{q}_j\}$, la velocidad generalizada $\{\dot{q}_j\}$ y las variables generalizadas $\{q_j\}$ con las fuerzas, también generalizadas, que actúan sobre el sistema. Estas ecuaciones son, en el formalismo lagrangiano, el equivalente a las leyes de Newton.

9.4.1. Un ejemplo: el péndulo elástico

La deducción realizada en la sección anterior es correcta y general desde el punto de vista matemático. Sin embargo, es tan abstracta que deja muy a menudo, en quién la conoce por primera vez, el sin sabor de que el formalismo Lagrangiano no puede ser una opción mejor que el formalismo newtoniano con sus intuitivos vectores y fuerzas.

Para hacer más concretos los resultados muy generales y abstractos deducidos aquí y entender mejor las primeras ventajas que exhibe la aproximación lagrangiana a los problemas mecánicos, consideremos un nuevo ejemplo. Hagámoslo esta vez con un sistema mecánico que si bien, no imposible de tratar desde el formalismo vectorial, sí es lo suficientemente complejo para permitirnos, por un lado ilustrar la metodología general del nuevo formalismo y por el otro mostrar sus ventajas evidentes. El sistema, que se ilustra esquemáticamente en la [Figura 9.5](#), es el conocido como **péndulo elástico**.

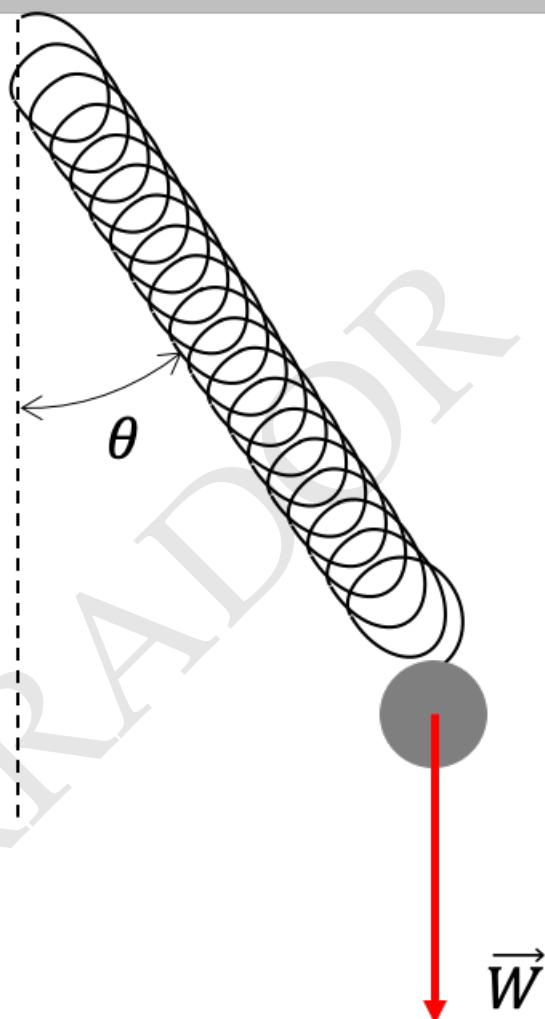


Figura 9.5: Representación esquemática del péndulo elástico. Una partícula se suspende del extremo de un resorte y se deja oscilar bajo la acción de un campo gravitacional uniforme. La longitud del resorte cuando no se aplica ninguna fuerza es L . En un momento dado el resorte puede estar estirado una distancia e respecto a la longitud de equilibrio.

Para deducir las ecuaciones de Lagrange de este sistema (y de cualquiera que estudiemos) podemos seguir el siguiente conjunto ordenado de pasos:

1. **Escojer las Variables generalizadas.** El péndulo elástico tiene 3 coordenadas cartesianas (1 partícula) y una sola restricción (movimiento en un plano). Esto implica que se necesitan dos variables generalizadas para describir la configuración del sistema. No es difícil identificar como las variables más

idóneas para este propósito, el ángulo que forma el péndulo con la vertical $q_1 = \theta$ y la elongación del resorte $q_2 = e$ (la diferencia entre la longitud instantánea del resorte y su longitud L en equilibrio). Estas dos variables son independientes como se comprueba del hecho de que puedo realizar un desplazamiento virtual en el espacio coordenado, cambiando una de ellas y dejando la otra invariable..

2. **Deducir las reglas de transformación y las velocidades coordenadas.** Las reglas de transformación que nos permiten, en este caso, pasar del conjunto de variables generalizadas a las coordenadas cartesianas son:

$$\begin{aligned} x(q_1, q_2, t) &= (L + q_2) \sin q_1 \\ y(q_1, q_2, t) &= -(L + q_2) \cos q_1 \\ z(q_1, q_2, t) &= 0 \end{aligned} \quad (9.32)$$

Como vemos la restricciones y por lo tanto las reglas de transformación, son esclerónomas (no dependen explícitamente del tiempo).

Una de las funciones básicas de las reglas de transformación es escribir las velocidades coordenadas como función de las variables generalizadas y sus velocidades. Derivando las expresiones anteriores, obtenemos:

$$\begin{aligned} \dot{x}(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2, t) &= (L + q_2) \cos q_1 \dot{q}_1 + \dot{q}_2 \sin q_1 \\ \dot{y}(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2, t) &= (L + q_2) \sin q_1 \dot{q}_1 - \dot{q}_2 \cos q_1 \end{aligned}$$

3. **Escribir la función de energía cinética y calcular sus derivadas parciales.** Usando las reglas de transformación podemos ahora escribir la función de energía cinética. Con un poco de álgebra el resultado es:

$$T((q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2, t)) = \frac{1}{2}m \left[(1 + q_2)^2 \dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 \right]$$

Con esta forma de la función podemos ahora obtener las derivadas parciales de T que necesitaremos más adelante:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial q_1} &= 0 \\ \frac{\partial T}{\partial q_2} &= m(L + q_2)\dot{q}_1^2 \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} &= m(L + q_2)^2\dot{q}_1 \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} &= m\dot{q}_2 \end{aligned} \quad (9.33)$$

y las derivadas totales respecto al tiempo de los dos últimos términos:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} &= 2m(L+q_2)\dot{q}_2\dot{q}_1 + m(L+q_2)^2\ddot{q}_1 \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} &= m\ddot{q}_2\end{aligned}\tag{9.34}$$

- 4. Calcular la forma de las fuerzas generalizadas.** Necesitamos escribir las fuerzas generalizadas asociadas a cada una de las variables generalizadas en el problema. Para ello es necesario conocer, primero, la expresión de las fuerzas coordenadas como función de las variables generalizadas. Es fácil mostrar que las componentes cartesianas de las fuerzas que actúan sobre el péndulo son simplemente:

$$\vec{F} = -kq_2 \sin q_1 \hat{e}_x + (-W + kq_2 \cos q_1) \hat{e}_y$$

De allí la fuerza generalizada asociada con la primera variable ($q_1 \equiv \theta$) es:

$$Q_1 = \sum_i \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_1} = \vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} = \vec{F} \cdot \left(\frac{\partial x}{\partial q_1} \hat{e}_x + \frac{\partial y}{\partial q_1} \hat{e}_y \right)$$

Que, con un poco de álgebra, puede probarse es igual a:

$$Q_1 = -W(L+q_2) \sin q_1$$

De la misma manera puede calcularse la fuerza generalizada asociada con la segunda variable generalizada para obtener:

$$Q_2 = W \cos q_1 - kq_2$$

- 5. Escribir explícitamente las ecuaciones de Lagrange.** Ahora podemos reemplazar algunos de los insumos matemáticos obtenidos en los apartes anteriores en las ecuaciones de Lagrange (Ecs. 9.31):

$$2m(L+q_2)\dot{q}_2\dot{q}_1 + m(L+q_2)^2\ddot{q}_1 = -W(L+q_2) \sin q_1$$

$$m\ddot{q}_2 - m(L+q_2)\dot{q}_1^2 = W \cos q_1 - kq_2$$

Como vemos, en su forma explícita, las ecuaciones de Lagrange son ecuaciones diferenciales de segundo orden en las variables generalizadas.

- 6. Escribir explícitamente las ecuaciones de movimiento.** Normalmente las ecuaciones de Lagrange se obtienen de forma *desordenada* con términos que admiten todavía alguna simplificación. Particularmente interesante es explorar la posibilidad de organizar las ecuaciones dejando los términos de segundas derivadas en un sólo lado de la ecuación (lo que facilita su implementación y solución numérica, cuando haya lugar a esta aproximación). En este

caso, las ecuaciones de Lagrange obtenidas en el numeral anterior se pueden escribir como:

$$\ddot{q}_1 = -\frac{2\dot{q}_1\dot{q}_2}{L+q_2} - \frac{g \sin q_1}{L+q_2} \quad (9.35)$$

$$\ddot{q}_2 = g \cos q_1 - (k/m)q_2 + (L+q_2)\dot{q}_1^2 \quad (9.36)$$

El procedimiento realizado aquí no requiere de ningún “truco”, exige una mínima intuición física y solo necesita paciencia y un buen manejo del cálculo diferencial y el álgebra. El resultado final, las ecuaciones de movimiento, si bien puede obtenerse usando la mecánica newtoniana, es inevitable si se siguen cuidadosamente los pasos descritos. He aquí la primera ventaja del formalismo Lagrangiano: su poderosa, por llamarlo de alguna manera, *inevitabilidad analítica*.

Como acostumbramos hacer en el libro, pongamos a prueba el resultado obtenido resolviendo la ecuación de movimiento y visualizando la dinámica del sistema. Para ello, primero debemos linealizar las ecuaciones de movimiento (Esc. 9.35 y 9.36) e implementarlas como una rutina:

```
def edm_penduloelastico(Y,t,L,k,m):
    #Constantes físicas
    g=9.81

    # Lee variables
    q1,q2,q1p,q2p=Y

    # Velocidades
    dq1dt=q1p
    dq2dt=q2p

    # Aceleraciones
    from numpy import sin,cos
    dq1pdt=(-g*sin(q1)-2*q1p*q2p)/(L+q2)
    dq2pdt=(L+q2)*q1p**2+g*cos(q1)-(k/m)*q2

    return [dq1dt,dq2dt,dq1pdt,dq2pdt]
```

Definir las propiedades del sistema y sus condiciones iniciales. Para ello debemos recordar el significado físico de q_1 (un ángulo) y de q_2 (elongación del resorte). Para este ejemplo soltaremos el péndulo en reposo en un ángulo de 30° y con una elongación inicial de 0,1.

```
#Propiedades del sistema
L=1.0
k=20.0
m=1.0

#Condiciones iniciales
from numpy import pi
y=[pi/3,0.1,0.0,0.0]
```

```
#Tiempos de integración
from numpy import linspace
Nt=200
ts=linspace(0,10,Nt)
```

Finalmente resolvemos numéricamente las ecuaciones de movimiento y extraemos el valor de las variables generalizadas como función del tiempo:

```
from scipy.integrate import odeint
solucion=odeint(edm_penduloelastico,y,ts,args=(L,k,m))
q1s=solucion[:,0]
q2s=solucion[:,1]
```

Podemos visualizar el valor de las variables generalizadas como función del tiempo con el siguiente algoritmo:

(Algoritmo 9.1)

```
import matplotlib.pyplot as plt
fig,axs=plt.subplots(2,1,sharex=True)
axs[0].plot(ts,q1s*180/pi)
axs[0].set_ylabel("Ángulo")
axs[1].plot(ts,q2s)
axs[1].set_ylabel("Elongación")
axs[1].set_xlabel("Tiempo")
fig.tight_layout()
```

ver Figura 9.6

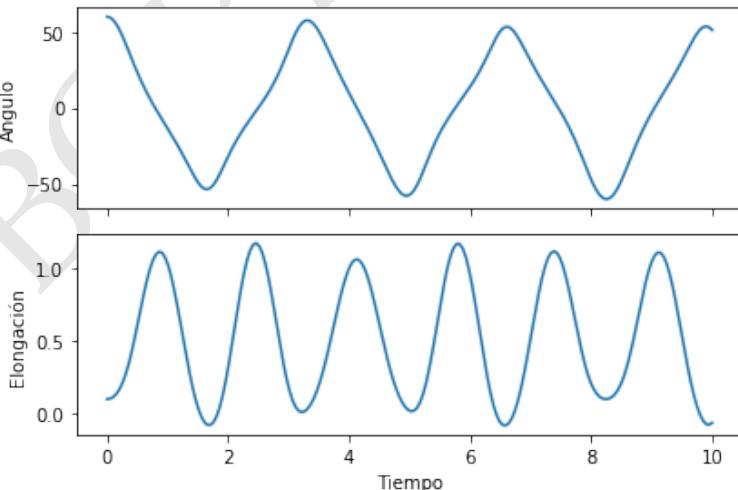


Figura 9.6: Figura correspondiente al código 9.1.

Sin embargo, la mejor manera de comprobar que la dinámica se ajusta a nues-

tras expectativas es mostrar el movimiento del sistema en el espacio de coordenadas. Para ello es necesario que hagamos la transformación de variables generalizadas a coordenadas usando las reglas en las Ecs. (9.32)

```
from numpy import sin,cos,zeros_like
xs=(L+q2s)*sin(q1s)
ys=-(L+q2s)*cos(q1s)
zs=zeros_like(xs)
```

Una gráfica de la trayectoria de la partícula en el espacio físico se obtiene finalmente con este código:

(Algoritmo 9.2)

```
fig=plt.figure()
ax=fig.gca()

ax.plot(xs,ys)
ax.set_xlabel("x")
ax.set_ylabel("y")
ax.set_title("Espacio Coordenado")
from pymcel.plot import fija_ejes_proporcionales
fija_ejes_proporcionales(ax,(xs,ys),xcm=0);
```

ver Figura 9.7

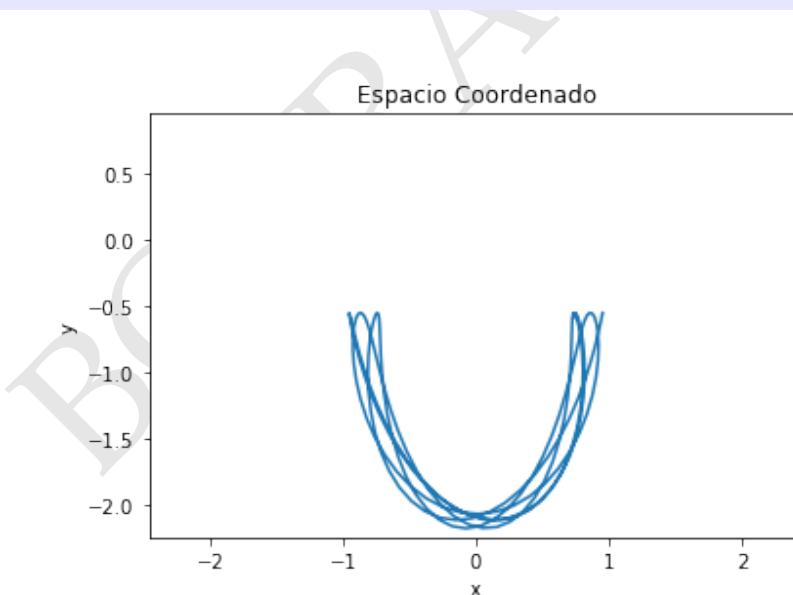


Figura 9.7: Figura correspondiente al código 9.2.

Que finalmente coincide con lo que esperábamos: la partícula oscila como péndulo, pero su distancia al punto de pivote del resorte cambia también.

Busque las figuras interactivas y las animaciones incluídas en el [sitio en línea](#)

del libro⁶².

9.5. La función lagrangiana

En la sección anterior vimos que la evolución de cualquier sistema dinámico obedece las **ecuaciones de Lagrange**:

$$\left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \right\}_M$$

donde $T(\{q_j\}, \{\dot{q}_j\}, t) = \sum_i m_i \vec{r}_i(\{q_j\}, \{\dot{q}_j\}, t)^2 / 2$ es la función de energía cinética, $\{q_j\}$ son las denominadas variables generalizadas del sistema, y Q_j se conoce como la fuerza generalizada, que se expresa, en términos de las fuerzas convencionales y las reglas de transformación de variables generalizadas a vectores coordenados, como:

$$Q_j = \sum_i \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$$

A pesar de que el formalismo lagrangiano expresado por las definiciones de las secciones anteriores y coronado por este conjunto de ecuaciones, es una versión alternativa para el formalismo vectorial, su aplicación sigue siendo muy elaborada. Es cierto, como mencionamos antes, que cualquiera con las habilidades matemáticas correctas puede usar el formalismo para encontrar al menos las ecuaciones de movimiento, usando para ello un procedimiento analítico claramente definido y que no requiere de una desarrollada intuición física. Aún así, el cálculo, por ejemplo, de las fuerzas generalizadas, puede llegar a ser matemáticamente engorroso.

Existen sin embargo algunas situaciones comunes en los que el formalismo se simplifica considerablemente. Considere por ejemplo el caso de sistemas dinámicos en las que las fuerzas involucradas son todas fuerzas conservativas; es decir, fuerzas que pueden obtenerse a partir de una función de energía potencial:

$$\vec{F}_i(\vec{r}_i, t) = -\nabla_i U_i(\{\vec{r}_j\}, t)$$

Nótese que la función U_i considerada aquí solo depende de las posiciones de las partículas, y posiblemente del tiempo.

Para fuerzas de este tipo, las fuerzas generalizadas se pueden escribir en la forma:

$$Q_j = - \sum_i \nabla_i U_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$$

que por propiedades de la regla de la cadena puede probarse es equivalente a:

$$Q_j = - \frac{\partial U}{\partial q_j}$$

donde:

⁶²http://seap-udea.org/MecanicaCeleste_Zuluaga

$$U(\{\vec{r}_j\}, t) = \sum U_i(\{\vec{r}_j\}, t)$$

Si reemplazamos en las ecuaciones de Lagrange obtenemos una versión más compacta de esas mismas ecuaciones:

$$\left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial(T - U)}{\partial q_j} = 0 \right\}_M$$

y con esto nos hemos liberado de las engorrosas fuerzas generalizadas. Pero el milagro no termina ahí.

Dado que la función de energía potencial U solo depende de las coordenadas o, lo que es lo mismo de las variables generalizadas y no de sus velocidades, una condición que matemáticamente se puede escribir como

$$\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j} = 0$$

una forma más “elegante” de escribir las ecuaciones de Lagrange en términos de la energía cinética y la función e energía potencial, sería:

$$\left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial(T - U)}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial(T - U)}{\partial q_j} = 0 \right\}_M$$

Hay que mirar esta ecuación con el respeto que se merece. Si bien nuestra motivación original era encontrar una versión menos engorrosa de las ecuaciones de Lagrange y lo obtenido es producto esencialmente de realizar un par de convenientes manipulaciones matemáticas, el mensaje en esta ecuación es bastante claro: dado un sistema dinámico en el que las fuerzas aplicadas son conservativas, el funcional $T - U$ es fundamental en la descripción de su dinámica.

Y no hay que confundir este funcional con aquel otro que conocemos bastante bien en la mecánica newtoniana: $T + U$, la energía mecánica. Si bien más adelante demostraremos una sutil entre ellos, la importancia de $T - U$ en el contexto del formalismo Lagrangiano es tal que merece su propio nombre:

Definición 9.9

Función Lagrangiana. Dado un sistema dinámico con función de energía cinética $T(\{q_j\}, \{\dot{q}_j\}, t)$, en el que todas las partículas están sujetas a fuerzas conservativas que derivan de funciones de energía potencial $U_i(\{q_j\}, t)$, definimos la función lagrangiana del sistema $L(\{q_j\}, \{\dot{q}_j\}, t)$ como:

$$L \equiv T - U$$

donde $U(\{q_j\}, t) = \sum U_i(\{q_j\}, t)$. A la función lagrangiana la llamaremos también el **Lagrangiano del sistema**.

En términos del Lagrangiano las ecuaciones de Lagrange se escriben como:

$$\left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \right\}_M \quad (9.37)$$

que por razones que explicaremos en una sección posterior se conocen también como las **Ecuaciones de Euler-Lagrange**.



Nota

No siempre hay un lagrangiano. Es importante entender que no a todos los sistemas dinámicos se les puede asociar un Lagrangiano. Es obvio que si alguna de las fuerzas aplicadas que actúan sobre las partículas no es conservativa, no podrá definirse una función de energía potencial y por tanto tampoco podrá construirse un Lagrangiano. Pero la condición es aún más compleja. De manera general las condiciones necesarias y suficientes para que podamos definir un Lagrangiano en un sistema dinámico son:

1. El sistema debe estar sometido a restricciones holonómicas de modo que pueda encontrarse un conjunto de variables generalizadas independientes para describirlo.
2. Las fuerzas generalizadas sobre el sistema deben derivar de un potencial.

9.5.1. El potencial generalizado

Si bien, en el desarrollo anterior, la condición de que las fuerzas sobre el sistema derivaran de un potencial, se restringían a las clásicas fuerzas conservativas, en el formalismo Lagrangiano es posible extender esta condición a un conjunto más amplio de fuerzas.

Si en lugar de la condición de que $Q_i = \partial U / \partial q_i$, las fuerzas generalizadas satisfacen la condición más general que:

$$Q_j = -\frac{\partial U_{\text{gen}}}{\partial q_j} + \frac{d}{dt} \frac{\partial U_{\text{gen}}}{\partial \dot{q}_j} \quad (9.38)$$

también es posible escribir una función Lagrangiana. A la función U_{gen} la llamamos una **función de energía potencial generalizada** o en breve un **potencial generalizado**.

Nótese que para fuerzas de este tipo, el potencial U_{gen} puede en general depender de las velocidades generalizadas. Esto, sin embargo, no significa necesariamente que el potencial de las fuerzas reales depende de velocidades coordenadas. Aún así, esta generalización permite incluir en el formalismo lagrangiano una amplia diversidad de fuerzas que van más allá de las restrictivas fuerzas conservativas de la mecánica newtoniana original.

9.5.2. Un ejemplo: el Lagrangiano del péndulo elástico

Para ilustrar la construcción de la función Lagrangiana, volvamos a nuestro ejemplo del péndulo elástico. Para ello debemos primero demostrar que las fuerzas generalizadas Q_i , derivan de un potencial $U(\{q_j\})$ mediante la regla:

$$Q_i = -\frac{\partial}{\partial q_i} U(\{q_j\})$$

En la [Sección 9.4.1](#), habíamos encontrado que las fuerzas generalizadas en el sistema tienen la forma:

$$Q_1 = -W(L + q_2) \sin q_1 \quad (9.39)$$

$$Q_2 = W \cos q_1 - kq_2 \quad (9.40)$$

Es fácil mostrar (ver Problemas al final del capítulo) que estas fuerzas derivan de una única función de energía potencial dada por:

$$U(q_1, q_2) = -W(L + q_2) \cos q_1 + \frac{kq_2^2}{2}$$

Si escribimos esta función de energía potencial en términos de las coordenadas originales (coordenadas cartesianas y la elongación del resorte), la función resulta ser muy familiar para nosotros:

$$U(x, y) = -mgy + \frac{ke^2}{2}$$

Este resultado es más que natural, en tanto, cuando en un sistema solo intervienen fuerzas conservativas (como lo hacen en este caso la gravedad y la fuerza elástica) la función U en el formalismo Lagrangiano no es distinta de la misma función en el formalismo vectorial, excepto porque la primera usa las variables generalizadas en lugar de las coordenadas cartesianas. Esta importante propiedad se puede describir matemáticamente como:

$$U(\{q_j\}, t) = U(\{\vec{r}_j(\{q_k\}, t)\}, t)$$

Con esto el Lagrangiano del péndulo elástico se puede escribir finalmente como :

$$L_{PE} = \frac{1}{2}m \left[(1 + q_2)^2 \dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 \right] - W(L + q_2) \cos q_1 + \frac{kq_2^2}{2}$$

Nota

No confundir L con L. En lo sucesivo, al escribir la función lagrangiana agregaremos un sencillo subíndice que indique a qué sistema dinámico esta asociado. En el caso que vimos en esta sección hemos agregado “PE” para indicar que se trata del lagrangiano del “Péndulo Elástico”. Este subíndice además nos permitirá distinguir a la importante función lagrangiana de otras cantidades física que se representan con la misma letra, por ejemplo la Longitud (en el ejemplo visto aquí), la inductancia en un circuito, etc.

9.6. El principio de Hamilton

En la sección anterior vimos que para un sistema dinámico con Lagrangiano L , las ecuaciones de Lagrange adoptan la forma particular de las ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$\left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \right\}_M$$

Ya habíamos visto una ecuación análoga a estas en la [Sección 4.1.10](#). Allí nos habíamos preguntado cuál era la función $f(t)$ que un intervalo $[a, b]$, hacía mínimo el funcional:

$$I[f] = \int_a^b L(f(t), \dot{f}(t), t) dt \quad (9.41)$$

donde $L(f(t), \dot{f}(t), t)$, en aquel contexto, era una función de los valores de $f(t)$ y sus derivadas en el intervalo de integración. Aplicando los métodos del cálculo variacional encontramos que la función en cuestión debía satisfacer la ecuación:

$$\frac{\partial L}{\partial f} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{f}} = 0$$

Si bien el ejemplo desarrollado en aquel capítulo, aplicaba solo para encontrar una sola función $f(t)$, no es difícil generalizarlo al caso más general de la mecánica, en el que tenemos que encontrar M funciones $\{q_j(t)\}$ y donde el papel de la función L en la Ec. (9.41) lo juega el mismo Lagrangiano. Más interesante aún es reconocer el hecho de que las ecuaciones de Euler-Lagrange de la mecánica que derivamos antes en este capítulo comenzando con el principio de d'Alambert-Lagrange, pueden en realidad obtenerse a partir de un principio físico distinto y completamente nuevo:

Principio 9.2

Principio de Hamilton. La evolución de un sistema dinámico con lagrangiano L entre dos instantes t_1 y t_2 es tal que la **integral de acción** o simplemente **acción**,

$$S \equiv \int_{t_1}^{t_2} L(\{q_j(t)\}, \{\dot{q}_j(t)\}, t) dt$$

tiene un valor estacionario (es máximo, mínimo o corresponde a un punto de inflexión) cuando es evaluada a lo largo de la trayectoria real del sistema en el espacio de configuración y que denotaremos como $\{q_j^0(t)\}$. En la notación del cálculo variacional:

$$\delta S|_{\{q_j^0(t)\}} = \delta \left(\int_{t_1}^{t_2} L dt \right) \Big|_{\{q_j^0(t)\}} = 0$$

Por la misma razón a este principio se lo llama también **principio de acción estacionaria**.

El principio de Hamilton es un principio geométrico cuyo profundo significado físico no puede menospreciarse. La primera consecuencia de este principio es que si la acción es estacionaria, entonces el lagrangiano del sistema dinámico $L = T - U$ satisface las ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$\left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j^0} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j^0} = 0 \right\}_M$$

que sabemos (lo hemos ilustrado con varios ejemplos) son equivalentes a la aplicación de las leyes de Newton sobre el sistema. Es decir, las sacrosantas leyes de Newton, que sabemos fueron inspiradas originalmente por intuiciones basadas en experiencias mecánicas, a la luz de este principio tienen en realidad una profunda base geométrica.

La mecánica, formulada a partir del principio de Hamilton, muestra además el papel central que juega el Lagrangiano en la determinación de toda la dinámica del sistema. El lagrangiano está en el corazón de la acción, $S = \int L dt$ que es justamente la cantidad física que es estacionaria a lo largo de la trayectoria del sistema. Para ponerlo en términos analógicos, todas las propiedades y simetrías de L se verán reflejadas en el camino que siga el sistema en el espacio de configuración. En las siguientes secciones nos ocuparemos justamente de estudiar esas propiedades y simetrías del Lagrangiano que nos permitirán intuir las propiedades de los sistemas dinámicos incluso antes de escribir explícitamente las ecuaciones de movimiento.

9.6.1. Un ejemplo: el péndulo simple

Como es costumbre en el libro, para afinar nuestra intuición sobre el principio de Hamilton, pongamos algunos números a las cantidades y fórmulas que dedujimos en la sección anterior. Este ejercicio particular, posiblemente no nos ayudará a resolver un problema dinámico específico en tanto la formulación de las ecuaciones de Euler-Lagrange y la solución de las ecuaciones de movimiento resultantes son con mucho la manera más efectiva de hacerlo. Aún así al intentar convertir estas ideas en algoritmos podemos hacernos a una idea más clara de las cantidades y relaciones involucradas.

Consideremos para ello el sistema físico más sencillo que introdujimos en las secciones anteriores: el péndulo simple. No es difícil encontrar el Lagrangiano de este sistema usando como variable generalizada el ángulo q de la cuerda respecto de la vertical:

$$L_{PS} = \frac{1}{2}mL^2\dot{q}^2 - mgL \cos q$$

donde L es la longitud del péndulo. Usando este lagrangiano podemos definir la acción en el sistema en un intervalo de tiempo arbitrario:

$$S_{PS}(t) = \int_{t_1}^{t_2} L_{PS} dt$$

La primera pregunta que podemos formularnos en el contexto del principio de Hamilton es: ¿cómo varía la acción de este sistema en las vecindades de una trayectoria de referencia $q_0(t)$ en el espacio de configuración?

Primero implementemos el cálculo del lagrangiano como una rutina:

```
#Valor global de la aceleración de la gravedad
g=9.81

#Ruina del lagrangiano del péndulo simple
def lagrangiano_pendulo_simple(q,dqdt,t,teta0=0,m=1,L=1):
    from numpy import cos
    L_PS=0.5*m*L**2*dqdt**2-m*g*L*cos(q)
    return L_PS
```

A continuación debemos definir nuestra función de referencia. Es razonable, sin resolver la ecuación de movimiento del sistema, suponer que la solución se encontrará cerca a:

$$q_0(t) = \theta_0 \cos(\omega t) \quad (9.42)$$

donde $\omega = \sqrt{g/L}$ y θ_0 es el valor inicial de la variable q . Podemos implementar esta función como una rutina:

```
def q0_pendulo_simple(t,teta0=0,m=1,L=1):
    from numpy import sqrt,cos
    w=sqrt(g/L)
    q=teta0*cos(w*t)
    return q
```

Es importante que los parámetros opcionales de la rutina `lagrangiano_pendulo_simple` y `q0` sean exactamente los mismos por razones que mostraremos más adelante.

Ahora necesitamos una función de plantilla $\eta(t)$ (tal que $\eta(t_1) = \eta(t_2) = 0$) que cuantifique la desviación de una trayectoria de prueba $q(t)$ respecto a la trayectoria de referencia $q_0(t)$:

$$q(t) = q_0(t) + \epsilon\eta(t)$$

donde ϵ es un valor real arbitrario.

Una elección adecuada para la función plantilla es, como lo hicimos en la Sección 4.1.10, la función seno:

$$\eta(t) = \sin(\omega t/2)$$

Esta función es cero solamente en los extremos del intervalo de interés, que asumiremos esta entre $t_1 = 0$ y $t_2 = 2\pi/\omega$. La función plantilla también se implementa en el siguiente algoritmo:

```
def eta_pendulo_simple(t,teta0=0,m=1,L=1):
    from numpy import sqrt,sin
    w=sqrt(g/L)
    eta=sin(w*t/2)
    return eta
```

Con estos elementos solo nos queda implementar el cálculo de la acción. Para ello podemos definir una rutina general que permita determinar la acción dado cualquier lagrangiano, función de referencia y función plantilla. En el siguiente algoritmo, que se construye usando como modelo el [Sección 4.4](#), se define una rutina que calcula esta función acción:

(Algoritmo 9.3)

```
def accion_hamilton(lagrangiano,q0,eta,epsilon,t1,t2,**opciones_de_L):

    #Definimos las función con su variación
    q=lambda t:q0(t,**opciones_de_L)+epsilon*eta(t,**opciones_de_L)

    #La derivada de q la calculamos con derivative
    from scipy.misc import derivative
    dqdt=lambda t:derivative(q,t,0.01)

    #Lagrangiano del péndulo simple
    Lsistema=lambda t:lagrangiano(q(t),dqdt(t),t,**opciones_de_L)

    #El funcional es la integral definida del integrando
    from scipy.integrate import quad
    integral=quad(Lsistema,t1,t2)
    S=integral[0]

    return S
```

Con todos estos elementos a la mano, podemos ahora calcular el valor de la acción, por ejemplo, a lo largo de la trayectoria de referencia; esto es, usando $\epsilon = 0$:

```
#Propiedades del sistema
longitud=1
masa=1

#Condición inicial
from numpy import pi,sqrt
teta0=pi/3

#Parametro omega
w=sqrt(g/longitud)

#Intervalo de interés
t1=0.0
t2=2*pi/w

#Valor de la acción
epsilon=0.0
S=accion_hamilton(lagrangiano_pendulo_simple,
                   q0_pendulo_simple,
                   eta_pendulo_simple,
                   epsilon,
                   t1,t2,
```

```
teta0=teta0,L=longitud,m=masa)
S_PS (epsilon = 0.0) = -9.249488346756534
```

Un gráfico de la acción como función de ϵ se puede elaborar con este algoritmo:

(Algoritmo 9.4)

```
#Simplificamos el cálculo de la acción definiendo una función lambda
S_eps=lambda eps:accion_hamilton(lagrangiano_pendulo_simple,
                                    q0_pendulo_simple,
                                    eta_pendulo_simple,
                                    eps,
                                    t1,t2,
                                    teta0=teta0,L=longitud,m=masa)

#Valores posibles de epsilon
from numpy import linspace
eps=linspace(-2,2,20)

#Valores de la acción
S=[S_eps(epsilon) for epsilon in eps]

#Gráfico
import matplotlib.pyplot as plt
fig=plt.figure()
ax=fig.gca()
ax.plot(eps,S);
#Decoración
ax.set_xlabel("$\epsilon$");
ax.set_ylabel("$S_{\text{PS}}$");
```

ver Figura 9.8

En la [Figura 9.8](#) podemos ver que el valor de la acción no es mínimo cuando $\epsilon = 0$. Es decir, la solución no es igual a la función de referencia que definimos en la Ec. (9.42). Para encontrar el valor exacto de ϵ podemos usar la rutina `minimize` de SciPy:

```
from scipy.optimize import minimize
solucion=minimize(S_eps,0.0)

Resultado de la minimización:
  fun: -12.371224415368705
  hess_inv: array([[0.08692453]])
  jac: array([3.57627869e-07])
  message: 'Optimization terminated successfully.'
  nfev: 15
  nit: 4
  njev: 5
  status: 0
  success: True
  x: array([0.74565162])
```

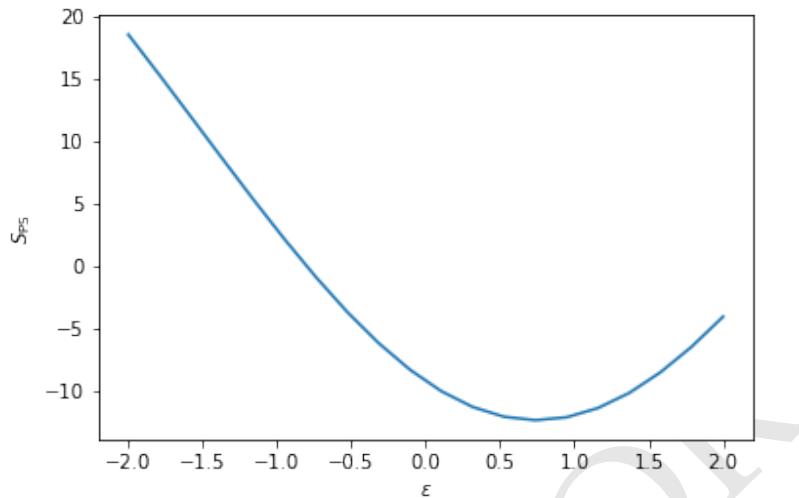


Figura 9.8: Figura correspondiente al código 9.4.

Este resultado muestra que cuando el péndulo empieza en $t = 0$ en una posición $\theta_0 = \pi/3$, la trayectoria de mínima acción hasta $t = 2\pi/\omega$ será aproximadamente:

$$\begin{aligned} q^0(t) &\approx \theta_0 \cos(\omega t) + \epsilon_{\min} \sin(\omega t/2) \\ &\approx \pi/3 \cos(\omega t) + 0,746 \sin(\omega t/2) \end{aligned}$$

Es interesante anotar aquí, sin embargo, que al buscar la solución al problema usando directamente el principio de Hamilton y especificando solamente el valor inicial de la variable q , el valor de la velocidad inicial queda especificado por la solución. En particular:

$$\dot{q}^0(0) \approx \frac{\epsilon_{\min}\omega}{2} \approx 0,563$$

Esto contrasta con el procedimiento tradicional de solución analítica usando las ecuaciones de Euler-Lagrange que requiere normalmente que se especifique el valor inicial de la posición y de la velocidad.

Un gráfico de la trayectoria de mínima acción del péndulo y algunas trayectorias “vecinas” con un valor de la acción mayor se puede elaborar con esta algoritmo:

(Algoritmo 9.5)

```
fig=plt.figure()
ax=fig.gca()

#Tiempos
from numpy import linspace
ts=linspace(t1,t2,100)

eps_min=solucion.x[0]
```

```

eps_men=0.1*eps_min
eps_may=1.9*eps_min
for epsilon in [eps_men,eps_may]:
    #Calcula el valor de la acción
    S=S_eps(epsilon)
    #Calculo de la función
    qs=q0_pendulo_simple(ts,teta0=teta0,m=masa,L=longitud)+\
        epsilon*eta_pendulo_simple(ts,teta0=teta0,m=masa,L=longitud)
    ax.plot(ts,qs,ls='--',
            label=f"S(\epsilon={epsilon:.2f}) = {S:.2f}$")

epsilon=eps_min
S=S_eps(epsilon)
qs=q0_pendulo_simple(ts,teta0=teta0,m=masa,L=longitud)+\
    epsilon*eta_pendulo_simple(ts,teta0=teta0,m=masa,L=longitud)
ax.plot(ts,qs,'k-',lw=3,label=f"S(\epsilon={epsilon:.2f}) = {S:.2f}$")

#Decoración
ax.legend()
ax.set_xlabel("$t$");
ax.set_ylabel("$q(t)$");

```

ver Figura 9.9

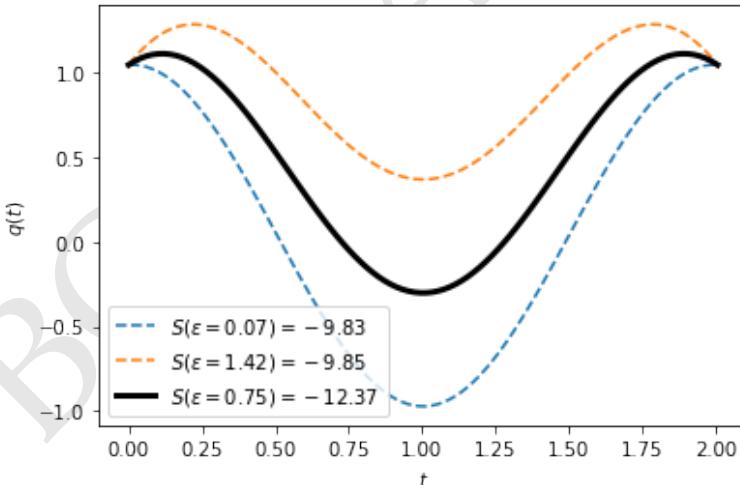


Figura 9.9: Figura correspondiente al código 9.5.

¿Es en realidad la trayectoria mostrada en la Figura 9.9 la solución al problema del péndulo simple? ¡No necesariamente!. A lo sumo lo que podemos decir es que la trayectoria real del sistema que pasa por $t_1 = 0, q(t_1) = \pi/3$ y $t = 2\pi/\omega, q(t_2) = \pi/3$ es cercana a esa curva. Tan cercana como no lo permite nuestra función de referencia y la plantilla que usamos.

9.7. Simetrías y leyes de conservación

Uno de los aspectos mejor conocidos del formalismo escalar de la mecánica, es su capacidad implícita para revelar propiedades de los sistemas dinámicos que no son fáciles de descubrir con el formalismo vectorial. Este es el caso por ejemplo, de las denominadas cantidades conservadas (constantes de movimiento, primeras integrales o cuadraturas) que tanta utilidad han tenido en capítulos anteriores en la descripción de los sistemas dinámicos de la mecánica celeste.

El poder de las simetrías para revelar aspectos profundos de los sistemas físicos y entender su comportamiento, es uno de los *descubrimientos* más importantes de la física moderna y merece una consideración relativamente detallada. El resultado más importante en esta materia fue descubierto y publicado en 1915 por la matemática alemana Emmy Noether (“[Emi noutar](#)”⁶³).



Figura 9.10: Emmy Noether (1883-1935), considerada como una de las matemáticas más importantes de la historia, descubrió el teorema que lleva su nombre y que juega un papel fundamental en la física contemporánea. Crédito: Erlangen Konrad Jacobs (1930).

⁶³<https://forvo.com/search/Emmy%20Noether/de/>

Proposición 9.1

El teorema de Noether. Si la acción $S[\{q_j(t)\}] = \int_{t_1}^{t_2} L(\{q_j(t)\}, \{\dot{q}_j(t)\}, t) dt$ de un sistema dinámico es simétrica bajo una *transformación continua local* de coordenadas o de tiempo, existe una cantidad conservada (*corriente conservada*) asociada a esa transformación.

Pero ¿qué es exactamente una simetría en este contexto?. En la vida cotidiana, una simetría es una propiedad, normalmente geométrica, que tiene un cuerpo y que lo hace ver igual incluso al cambiar la manera como lo observamos. Así por ejemplo, un cuerpo esférico se ve igual no importa en qué dirección lo veamos. Un cilindro es el mismo, si lo rotamos alrededor de su eje principal, pero cambia si lo rotamos alrededor de un eje perpendicular a él (no es simétrico alrededor de ese eje).

Las simetrías a las que hace referencia el teorema de Noether no son simetrías geométrica de los cuerpos implicados en el sistema dinámico. Una *simetría matemática* se manifiesta cuando una función relevante para el sistema, la acción o el lagrangiano por ejemplo, mantiene la misma *forma matemática* después de una transformación de las coordenadas o del tiempo. En física, decimos que la función correspondiente es *covariante* bajo la transformación indicada.

Consideren por ejemplo el Lagrangiano de un partícula unida a un resorte de constante elástica k , que puede oscilar en 2 dimensiones:

$$L(x, y, \dot{x}, \dot{y}, t) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{1}{2}k(x^2 + y^2)$$

Nótese que hemos usado las coordenadas cartesianas x, y como variables generalizadas en el sistema.

Hay dos posibles transformaciones que mantienen la forma funcional de este Lagrangiano. Por ejemplo, si cambiamos el valor del tiempo t por uno nuevo $t' = t + \epsilon$, el Lagrangiano seguirá siendo el mismo:

$$L(x, y, \dot{x}, \dot{y}, t') = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{1}{2}k(x^2 + y^2)$$

Decimos que el sistema es covariante o simétrico bajo una *traslación temporal*.

Considere ahora la siguiente transformación geométrica:

$$\begin{aligned} x' &= x + \epsilon y \\ y' &= y - \epsilon x \end{aligned} \tag{9.43}$$

Al reemplazar las variables originales por las nuevas variables primadas en el Lagrangiano original, obtenemos:

$$L(x', y', \dot{x}', \dot{y}', t') = \frac{1}{2}m[\dot{x}'^2 + \dot{y}'^2 + \epsilon^2(\dot{x}'^2 + \dot{y}'^2)] - \frac{1}{2}k[x'^2 + y'^2 + \epsilon^2(x'^2 + y'^2)]$$

Si suponemos que ϵ es muy pequeño (que es justamente a lo que hace referencia el teorema de Noether al referirse a una transformación local), el Lagrangiano se puede escribir en la forma:

$$L(x', y', \dot{x}', \dot{y}', t') = \frac{1}{2}m(\dot{x}'^2 + \dot{y}'^2) - \frac{1}{2}k(x'^2 + y'^2)$$

que es funcionalmente idéntica (covariante) a la forma del Lagrangiano original. Decimos por tanto que el sistema es simétrico frente a la transformación local dada por las Ecs. (9.43).

Como la dinámica de un sistema depende esencialmente de la forma funcional del Lagrangiano, una simetría implicará que la dinámica si el sistema es descrita tan en términos de las variables x', y', t' como en términos de las variables originales.

De acuerdo con el teorema de Noether, las dos simetrías mencionadas hasta aquí tienen asociada una cantidad conservada. Pero ¿cuál es esa cantidad? ¿cómo se determina?

Supongamos que una transformación continua local de las variables generalizadas de un sistema dinámico se puede escribir de forma general como:

$$q'_j(\epsilon) = q_j + \epsilon K_j(\{q_k\}) \quad (9.44)$$

donde K_j es una función arbitraria de todas las variables generalizadas y ϵ un parámetro que caracteriza todas las posibles transformaciones de una determinada familia.

Asumamos que bajo esta transformación el Lagrangiano mantiene su forma matemática $L(\{q'_j\}, \{\dot{q}'_j\}, t) = L(\{q_j\}, \{\dot{q}_j\}, t)$ de modo que sigue satisfaciendo las ecuaciones de Euler-Lagrange, pero ahora respecto a las coordenadas transformadas:

$$\left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}'_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q'_j} = 0 \right\}_M$$

La invarianza del Lagrangiano (y por tanto de la acción) frente a esta transformación se puede expresar matemáticamente en términos del parámetro ϵ en la forma:

$$\frac{d}{d\epsilon} L(\{q'_j(\epsilon)\}, \{\dot{q}'_j(\epsilon)\}, t) = 0$$

Esta condición básicamente expresa el hecho de que al aplicar la transformación no quedan *rastros* implícitos o explícitos de ella en el lagrangiano.

Usando la regla de la cadena la condición anterior se convierte en:

$$\frac{d}{d\epsilon} L(\{q'_j(\epsilon)\}, \{\dot{q}'_j(\epsilon)\}, t) = \sum_j \left(\frac{\partial L}{\partial q'_j} \frac{\partial q'_j}{\partial \epsilon} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}'_j} \frac{\partial \dot{q}'_j}{\partial \epsilon} \right) = 0$$

Si ahora tenemos en cuenta que de acuerdo a la Ec. (9.44),

$$\frac{\partial q'_j}{\partial \epsilon} = K_j$$

y

$$\frac{\partial \dot{q}'_j}{\partial \epsilon} = \dot{K}_j$$

y además aprovechamos el hecho que el Lagrangiano original y el transformado satisfacen las ecuaciones de Euler-Lagrange, la condición de invarianza adopta la forma:

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} K_j \right) = 0$$

Aquí podemos identificar claramente la cantidad conservada asociada a la transformación en la Ec. (9.44):

$$P(\{q_j\}, \{\dot{q}_j\}) \equiv \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} K_j$$

que recibe el nombre de *momento conservado*.

Podemos sintetizar entonces este resultado como nuevo teorema:

Proposición 9.2

Teorema de Noether para el Lagrangiano. Si un sistema dinámico es tal que su Lagrangiano es simétrico bajo la local $q'_j(\epsilon) = q_j + \epsilon K_j(\{q_k\})$, entonces la siguiente cantidad es conservada:

$$P(\{q_j\}, \{\dot{q}_j\}) \equiv \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} K_j \quad (9.45)$$

9.7.1. Conservación del momento angular

En el ejemplo del oscilador armónico bidimensional, habíamos demostrado que la transformación,

$$\begin{aligned} x' &= x + \epsilon y \\ y' &= y - \epsilon x \end{aligned}$$

deja invariante el Lagrangiano. Si comparamos esta transformación con la forma general de la Ec. (9.44) vemos que ella corresponde a una transformación continua local con

$$\begin{aligned} K_1 &= y \\ K_2 &= -x \end{aligned}$$

De acuerdo al teorema de Noether para el lagrangiano, la cantidad conservada será por lo tanto:

$$P(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = (m\dot{x})y + (m\dot{y})(-x) = m(y\dot{x} - x\dot{y})$$

que no es otra cosa que la componente z del momentum angular total de la partícula.

Pero ¿qué clase de transformación es exactamente aquella que se expresa en la forma de las Ecs. (9.43)? Consideré el caso de una rotación en un ángulo muy pequeño $\delta\theta$ alrededor del eje z . Sabemos que en este caso las coordenadas del sistema rotado y el sistema original se relacionan de acuerdo a la transformación matricial:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \delta\theta & \sin \delta\theta & 0 \\ -\sin \delta\theta & \cos \delta\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Despreciando términos de orden cuadrático y superior en $\delta\theta$, podemos escribir $\cos \delta\theta \approx 1$ y $\sin \delta\theta \approx \delta\theta$, con lo que la transformación se puede escribir explícitamente como:

$$\begin{aligned} x' &= x + \delta\theta y \\ y' &= -\delta\theta x + y \end{aligned}$$

que tiene justamente la misma forma que la transformación en las Ecs. (9.43). Este resultado nos permite formular el siguiente corolario del teorema de Noether:

Proposición 9.3

Conservación del momento angular. Si el lagrangiano de un sistema dinámico es invariante bajo una rotación infinitesimal alrededor de un eje arbitrario en dirección \hat{n} , entonces la componente del momento angular total $L_n = \vec{L} \cdot \hat{n}$ se conserva.

9.7.2. Conservación del momento lineal

El tipo más trivial de transformación continua local es una traslación infinitesimal en la dirección de un vector unitario $\hat{\tau} : (\tau_x, \tau_y, \tau_z)$. Matemáticamente la transformación se puede escribir como:

$$\begin{aligned} x' &= x + \epsilon \tau_x \\ y' &= y + \epsilon \tau_y \\ z' &= z + \epsilon \tau_z \end{aligned}$$

En coordenadas cartesianas, la función de energía potencial no depende de la velocidad. Por lo tanto si el lagrangiano es invariante bajo la traslación, el teorema de Noether para lagrangianos implica que la siguiente cantidad es conservada:

$$P = p_x \tau_x + p_y \tau_y + p_z \tau_z = \vec{p} \cdot \hat{\tau}$$

Este resultado se puede expresar de forma general con el siguiente teorema:

Proposición 9.4

Conservación del momento lineal. Si el lagrangiano de un sistema dinámico es invariante bajo una traslación infinitesimal en una dirección arbitraria $\hat{\tau}$, entonces la componente $p_{\tau} = \vec{p} \cdot \hat{\tau}$ del momento lineal total del sistema se conserva.

9.7.3. Variables cíclicas

Hay un caso aún más simple de transformación, simetría y cantidades conservadas que las consideradas hasta aquí. Considere por ejemplo una transformación en la que una de las variables generalizadas se modifica de acuerdo a la regla:

$$q'_j = q_j + \epsilon \quad (9.46)$$

De acuerdo con el teorema de Noether, la transformación mencionada se caracteriza por tener $K_j = 1$ y por lo tanto, si un Lagrangiano es simétrico bajo esa transformación, el “momento” conservado será, de acuerdo a la Ec. (9.45):

$$P_j \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$$

Si esta cantidad es constante, la ecuación de Euler-Lagrange correspondiente a la variable j será:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} &= 0 \\ \frac{\partial L}{\partial q_j} &= 0 \end{aligned}$$

de donde concluimos que un lagrangiano simétrico bajo la transformación en la Ec. (9.46) es simplemente uno en el que la variable q_j no aparece explícitamente.

Definición 9.10

Variable cílica y momento generalizado. Una variable generalizada q_j es una **variable cílica** respecto al Lagrangiano L si la variable no aparece explícitamente en el Lagrangiano. Matemáticamente, la condición:

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$$

es necesaria y suficiente para que una variable sea cílica.

El **momento generalizado** asociado a la variable j se define como:

$$P_j \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$$

y es una cantidad constante si y solo si la variable q_j es cílica.

Para ilustrar esta simetría, considere el Lagrangiano de una partícula que se mueve en un campo gravitacional uniforme de intensidad g :

$$L_{CL} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz$$

En este caso, observamos que las variables x y y son variables cílicas porque

no aparecen explícitamente en el Lagrangiano. De aquí, concluimos que sus momentums generalizados,

$$P_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$$

y

$$P_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}$$

son cantidades constantes en el sistema dinámico.

El hecho de que en un campo gravitacional uniforme las componentes de la velocidad del cuerpo en dirección perpendicular al campo sean constantes, fue justamente lo que intuyó originalmente Galileo cuando describió correctamente las características del movimiento parabólico. Es interesante mostrar, después de tantos años de evolución de la física, que esta propiedad también se puede explicar como resultado de una simetría del sistema; a saber, el hecho de que la dinámica del movimiento parabólico no depende del lugar sobre el plano $x - y$ desde el que se lanza la partícula.

9.7.4. La función de Jacobi y la conservación de la energía

En las secciones anteriores analizamos los casos de transformaciones espaciales. ¿Qué podemos decir ahora de la invarianza respecto a una traslación temporal?. La invarianza temporal implica que el lagrangiano mantiene su forma cuando se realiza la transformación $t' = t + \epsilon$. Una familia muy general de lagrangianos que tienen esta simetría es aquella para la cual la forma funcional del lagrangiano no depende explícitamente del tiempo:

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0$$

¿Cuál es la cantidad física conservada en este caso?. Consideremos para ello, la derivada total del Lagrangiano, que puede calcularse usando la regla de la cadena como:

$$\frac{dL}{dt} = \sum_j \frac{\partial L}{\partial q_j} \dot{q}_j + \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial t}$$

Si despejamos de allí la derivada parcial del lagrangiano respecto al tiempo y nos valemos de las ecuaciones de Euler-Lagrange para reemplazar el primer término del lado izquierdo, obtenemos:

$$\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{d}{dt} \left(\sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - L \right)$$

Si definimos la función entre parentesis en el lado derecho de la ecuación como:

$$h \equiv \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - L \quad (9.47)$$

la derivada total del lagrangiano se puede escribir equivalentemente como:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\partial L}{\partial t}$$

De allí se sigue, finalmente que si un lagrangiano es simétrico bajo una traslación temporal (el tiempo no aparece explícitamente en su fórmula) la función

$$h(\{q_j\}, \{\dot{q}_j\}) = \sum_j \frac{\partial L(\{q_j\}, \{\dot{q}_j\})}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - L(\{q_j\}, \{\dot{q}_j\})$$

se conserva. Llamamos a esta la **función de Jacobi** y juega, en el caso de la simetría temporal, el papel que jugaron los momentos en las simetrías espaciales.

En las secciones anteriores habíamos visto que los momentos conservados por el teorema de Noether para el lagrangiano, se relacionan en algunas situaciones concretas con cantidades en la mecánica newtoniana bien conocidas. En particular, demostramos que en el caso de sistemas con simetría rotacional el momento conservado es el momento angular, mientras que en sistemas sistemas con simetría translacional se conserva el momento lineal. En el caso de sistemas con simetría temporal ¿cuál es el análogo newtoniano, si lo tiene, de la función de Jacobi?. No es fácil responder esta pregunta en general, pero existen situaciones en las que la h está relacionada con una cantidad muy conocida.

Consideremos por ejemplo los casos en los que el potencial generalizado solo depende de las coordenadas $U(\{q_j\})$ (fuerzas conservativas en el sentido clásico). En esta situación, la función de Jacobi se puede escribir simplemente como:

$$h \equiv \sum_j \dot{q}_j \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - T + U \quad (9.48)$$

Ahora bien, la función de energía cinética que en términos de las coordenadas cartesianas es

$$T = \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i^2 / 2$$

se puede escribir explícitamente en términos de las variables generalizadas como:

$$\begin{aligned} T &= \sum_i \frac{1}{2} m_i \left(\sum_j \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \right)^2 \\ &= \sum_i \frac{1}{2} m_i \left[\sum_j \sum_k \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_j \dot{q}_k + 2 \sum_j \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} + \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (9.49)$$

Si asumimos que las ecuaciones de transformación no dependen explícitamente del tiempo (restricciones son *esclerónomas*), solo el primer término de la ecuación anterior sobrevivirá:

$$T = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \sum_k m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_j \dot{q}_k$$

Es decir, bajo esta condición, la energía cinética será siempre una función cuadrática de las velocidades generalizadas. Esta propiedad nos permite aprovechar el *teorema de Euler para funciones homogéneas*, que establece que si $f(\{x_i\})$ es un función de grado k en $\{x_i\}$, es decir, si $f(\{\lambda x_i\}) = \lambda^k f(\{x_i\})$, entonces:

$$\sum x_i f(x_i) = k f(x_i)$$

Usando esta propiedad y teniendo en cuenta que como mostramos anteriormente, la energía cinética es una función homogénea de grado 2 en las velocidades generalizadas, el primer término de la Ec. (9.48) queda:

$$\sum_j \dot{q}_j \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = 2T$$

Finalmente, la función de Jacobi en este tipo de sistemas resulta ser

$$h = T + U$$

que no es otra cosa que la energía mecánica total del sistema.

Es importante sin embargo precisar que tanto h , en general, como T y L en particular, no son cantidades numéricas sino funciones de las variables generalizadas. Es decir la expresión:

$$h(\{q_j\}, \{\dot{q}_j\}) = E$$

es lo que en los capítulos anteriores llamamos una cuadratura del sistema.

Proposición 9.5

Teorema de conservación de la energía mecánica. Si en un sistema dinámico se cumplen las siguientes condiciones:

1. La dinámica puede ser descrita completamente con una función lagrangiana $L = T - U$ de las variables y velocidades generalizadas $\{q_j\}, \{\dot{q}_j\}$.
2. La función Lagrangiana no depende explícitamente del tiempo, esto es $\partial L / \partial t = 0$.
3. La función de energía potencial solo depende de las variables generalizadas y no de las velocidades, es decir $U(\{q_j\})$.
4. Las transformaciones entre las coordenadas cartesianas y las variables generalizadas, no dependen explícitamente del tiempo, $\vec{r}_i = \vec{r}_i(\{q_j\})$ (restricciones esclerónomas).

Entonces:

1. La función de Jacobi es $h = T + U$.
2. El valor de la función de Jacobi es igual la energía mecánica.
3. El valor de la función de Jacobi y por tanto la energía mecánica se conserva.

9.8. Mecánica celeste en el formalismo Lagrangiano

Después de haber introducido en las secciones anteriores los elementos básicos del formalismo Hamiltoniano, ha llegado el momento de que volvamos sobre los problemas de la mecánica celeste pero que lo hagamos ahora con las herramientas del nuevo formalismo. En las siguientes secciones volveremos sobre temas que ya tratamos en capítulos anteriores. Este ejercicio académico nos permitirá aplicar y conocer mejor el formalismo Lagrangiano. Pero no todo será una duplicación de resultados conocidos. Algunas de las características únicas del nuevo formalismo nos permitirá estudiar nuevos problemas o reconocer propiedades que desconocíamos de sistemas ya estudiados con el formalismo vectorial.

9.8.1. El Lagrangiano de N cuerpos

Como hicimos a lo largo del libro, consideraremos los problemas de la mecánica celeste, a la luz del formalismo escalar de la mecánica, en el orden en el que lo estudiamos con el formalismo vectorial: el problema de los N-cuerpos, el problema de los N-cuerpos jerárquico, el problema de los 2 cuerpos y el problema de los 3 cuerpos.

Cómo es natural, la primera pregunta que debemos resolver es ¿cuál es el Lagrangiano del problema de los N-cuerpos?

Un sistema de N-cuerpos que interactúan únicamente por efecto de su mutua fuerza gravitacional, no tiene ninguna restricción. Todas las partículas tienen acceso irrestringido (por principio) a todos los puntos del espacio. Por la misma razón concluimos que el sistema tiene $3N$ grados de libertad y exactamente el mismo número de variables generalizadas que describen su dinámica.

En una primera aproximación al problema, podemos usar las coordenadas cartesianas de las partículas como variables generalizadas del problema. Si como hicimos en la [Sección 9.3](#) llamamos $\{x_i^k\}_{3N}$ al conjunto de componentes cartesianas $x^k : (x, y, z)$ de las partículas del sistema, podemos escribir la función de energía cinética como:

$$T_{NB}(\{\dot{x}_i^k\}) = \sum_{i,k} \frac{1}{2} m_i (\dot{x}_i^k)^2$$

Por otro lado, la función de energía potencial la habíamos desarrollado en la [Sección 6.2.5](#) y la podemos escribir de la forma no restringida (Ec. 6.15):

$$U_{NB}(\{x_i^k\}) = -\frac{1}{2} \sum_i \sum_{j \neq i} \frac{m_i \mu_j}{r_{ij}(x_i^k, x_j^k)}$$

donde $\vec{r}_{ij} = \sum_k (x_i^k - x_j^k) \hat{e}_k$.

Con esto el Lagrangiano más general para el problema de los N cuerpos en mecánica celeste se puede escribir como:

$$L_{NB}(\{x_i^k\}, \{\dot{x}_i^k\}) = \sum_{i,k} \frac{1}{2} m_i (\dot{x}_i^k)^2 + \frac{1}{2} \sum_i \sum_{j \neq i} \frac{m_i \mu_j}{r_{ij}(x_i^k, x_j^k)} \quad (9.50)$$

9.8.2. Simetrías del lagrangiano de N cuerpos

¿Qué simetrías tiene el Lagrangiano y por tanto cuáles son las cantidades conservadas asociadas con él?.

La primera y más evidente simetría de este Lagrangiano es su independencia explícita del tiempo,

$$\frac{\partial L_{\text{NB}}}{\partial t} = 0$$

De acuerdo con el Teorema de conservación de la energía mecánica, además de esta condición el problema satisface todas las condiciones necesarias y suficientes para garantizar que la función de Jacobi sea una cuadratura del sistema:

$$h(\{x_i^k\}, \{\dot{x}_i^k\}) = \sum_{i,k} \frac{1}{2} m_i \dot{x}_{i,k}^2 - \frac{1}{2} \sum_i \sum_{j \neq i} \frac{m_i \mu_j}{r_{ij}} = E$$

El Lagrangiano L_{NB} no tiene ninguna variable cíclica de modo que ninguno de los momentos generalizados:

$$p_i = \frac{\partial L_{\text{NB}}}{\partial \dot{x}_i^k} = m_i \dot{x}_i^k$$

es conservado independientemente.

Sin embargo, dado que el Lagrangiano depende únicamente de la distancia relativa entre las partículas, el origen de coordenadas puede elegirse en cualquier punto del espacio y la forma del Lagrangiano seguirá siendo la misma. Esto implica que el sistema es simétrico bajo traslaciones espaciales del tipo:

$$x_i^k = x_i^k + \epsilon \tau^k$$

Ahora bien. Dado que no importa la dirección en la que realicemos la traslación, el Lagrangiano se mantiene covariante (no cambia), usando el Teorema de Noether para el Lagrangiano, podemos concluir que las 3 componentes del momento total son constantes:

$$P^k = \sum_i m_i \dot{x}_i^k$$

Si ahora definimos

$$x_{\text{CM}}^k \equiv \frac{\sum_i m_i x_i^k}{M}$$

donde $M = \sum_i m_i$, entonces la componente del momento total conservado P^k se puede escribir también como:

$$P^k = M \dot{x}_{\text{CM}}^k$$

Integrando directamente obtenemos:

$$x_{\text{CM}}^k = \frac{P^k}{M} t + x_{\text{CM},0}^k$$

donde $x_{CM,0}^k$ son también constantes de movimiento.

Nuevamente, dado que la función de energía potencial del sistema solo depende de las distancias entre ella, el sistema es simétrico bajo rotaciones alrededor de cualquier eje en el espacio. De acuerdo con el Teorema de conservación del momento angular (que en realidad es un corolario del Teorema de Noether para el Lagrangiano), todas las componentes L^k del momento angular, y que se pueden escribir en general como:

$$L^k = \sum_i m_i \epsilon_{kmn} x_i^m x_i^n$$

donde ϵ_{kmn} son los símbolos de Levi-Civita, son también constantes de movimiento.

Como hemos visto aquí, el formalismo Lagrangiano permite encontrar todas las cuadraturas conocidas del problema de los N-cuerpos simplemente aplicando argumentos de simetría. Estos argumentos conducen, a través del teorema de Noether a procedimientos matemáticos breves y compactos. En comparación los procedimientos utilizados en el formalismo vectorial y que vimos en la [Sección 6.2.1](#) se antojan ahora un poco arbitrarios, en tanto dependen, por ejemplo de elecciones heurísticas de las operaciones que deben hacerse sobre las ecuaciones de movimiento o los factores integrantes que deben utilizarse.

9.8.3. El lagrangiano de un sistema de N cuerpos jerárquico

Como habíamos visto antes en este libro, muchos sistemas de N cuerpos de interés astronómico, pueden descomponerse como un conjunto de $N - 1$ sistemas anidados de solo 2 cuerpos. Así por ejemplo la interacción del Sol con los 8 planetas del sistema solar ($N = 9$) puede describirse, a primer orden, como 8 problemas de dos cuerpos: Sol-Mercurio, Sol-Venus, Sol-Tierra, ..., Sol-Neptuno.

En términos del formalismo lagrangiano podemos decir que la dinámica de un sistema de N cuerpos jerárquico puede ser descrita (sus simetrías y ecuaciones de movimiento) por $N - 1$ lagrangianos independientes, análogos al Legrangiano de la Ec. (9.50), pero en el que solamente aparezcan dos cuerpos interactuantes.

Explícitamente, el lagrangianos de dos de los cuerpos del sistema, puede escribirse como:

$$L_{2B,G} = \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{z}_1^2) + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 + \dot{z}_2^2) + \quad (9.51)$$

$$+ \frac{G m_1 m_2}{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}} \quad (9.52)$$

donde en lugar de la notación general x_i^k hemos usado explícitamente las letras de las coordenadas cartesianas y los dos cuerpos están numerados como 1 y 2, a pesar de que en un sistema general podrían tratarse de los cuerpos 45 y 801, por poner un ejemplo.

Este lagrangiano tiene exactamente las mismas simetrías y cantidades conservadas del lagrangiano general de los N cuerpos de la Ec. (9.50). Sin embargo, no es difícil reconocer, en este caso, que la elección de las coordenadas cartesianas como variables generalizadas del problema, no es la más conveniente. Una elección

apropiada de las 6 variables generalizadas necesarias para describir el problema puede conducirnos a un Lagrangiano más simple y con nuevas simetrías.

Para ello comenzemos por considerar el hecho conocido de que el centro de masa de este tipo de sistemas,

$$\vec{r}_{CM} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{M}$$

donde usaremos la notación vectorial aquí simplemente para abreviar pero no porque sea una característica fundamental de los desarrollos en lo sucesivo, se encuentra exactamente en la línea que une los dos cuerpos en el espacio.

Esta condición nos permite introducir un nuevo conjunto de variables generalizadas, a saber las componentes del vector relativo $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ y las del vector posición del centro de masa \vec{r}_{CM} , que se relacionan con las coordenadas cartesianas originales del sistema a través de las reglas de transformación:

$$\begin{aligned}\vec{r}_1 &= \vec{r}_{CM} - \frac{m_2}{M} \vec{r} \\ \vec{r}_2 &= \vec{r}_{CM} + \frac{m_2}{M} \vec{r}\end{aligned}\tag{9.53}$$

y

$$\begin{aligned}\dot{\vec{r}}_1 &= \dot{\vec{r}}_{CM} - \frac{m_2}{M} \dot{\vec{r}} \\ \dot{\vec{r}}_2 &= \dot{\vec{r}}_{CM} + \frac{m_2}{M} \dot{\vec{r}}\end{aligned}\tag{9.54}$$

Con esta transformación, es posible mostrar (ver Problemas al final del capítulo) que la función de energía potencial del sistema se simplifica como:

$$T_{2B,R} = \frac{1}{2} m_1 \dot{\vec{r}}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\vec{r}}_2^2 = \frac{1}{2} M \dot{\vec{r}}_{CM}^2 + \frac{1}{2} m_r \dot{\vec{r}}^2$$

donde hemos introducido una nueva cantidad

$$m_r \equiv \frac{m_1 m_2}{M}$$

que llamaremos la **masa reducida** del sistema. Adicionalmente el subíndice R que hemos agregado al nombre del Lagrangiano $L_{2B,R}$, hace referencia al hecho de que estamos usando la posición relativa de los dos cuerpos.

Con este cambio de variables, el Lagrangiano de los dos cuerpos se puede escribir ahora como:

$$L_{2B,R} = \frac{1}{2} M \dot{\vec{r}}_{CM}^2 + \frac{1}{2} m_r \dot{\vec{r}}^2 + \frac{GMm_r}{r}\tag{9.55}$$

Es importante insistir que el uso de cantidades vectoriales aquí tiene el único propósito de abreviar la escritura del lagrangiano. Es claro que esta última cantidad es escalar, como lo son todos los factores que involucran cantidades vectoriales en la fórmula anterior.

El cambio realizado hasta ahora implica simplemente pasar del conjunto de variables originales $(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2)$ a un nuevo conjunto de variables generalizadas que pueden describir también la configuración del sistema: $(x, y, z, x_{\text{CM}}, y_{\text{CM}}, z_{\text{CM}})$. El Lagrangiano escrito en este nuevo conjunto de variables (Ec. 9.55) tiene simetrías que no tenía el lagrangiano general original (Ec. 9.56). En particular, podemos ver que las variables generalizadas $x_{\text{CM}}, y_{\text{CM}}, z_{\text{CM}}$ son ahora coordenadas cíclicas:

$$\frac{\partial L}{\partial x_{\text{CM}}} = \frac{\partial L}{\partial y_{\text{CM}}} = \frac{\partial L}{\partial z_{\text{CM}}} = 0$$

Esto implica que los momentos generalizados asociados con ellas, $P_{\text{CM},x} = M\dot{x}_{\text{CM}}$, $P_{\text{CM},y} = M\dot{y}_{\text{CM}}$, $P_{\text{CM},z} = M\dot{z}_{\text{CM}}$ se conservan. Pero esto no es ninguna novedad: es un *redescubrimiento* de la conservación del momento lineal total del sistema que viene de su simetría translacional. Estos nos enseña una interesante lección nueva: una simetría en un conjunto de variables generalizadas (p.e. simetría translacional) puede equivaler a otra simetría en un conjunto de variables distintas (p.e. simetría de variables cíclicas).

Pero hay un elemento verdaderamente novedoso en el Lagrangiano de la Ec. (9.55). Si reemplazamos el primer término del lagrangiano en términos de las constantes \vec{P}_{CM} , el Lagrangiano queda:

$$L_{\text{2B,R}} = \frac{P_{\text{CM}}^2}{2M} + \frac{1}{2}m_r\dot{r}^2 + \frac{GMm_r}{r}$$

Ahora bien, dado que el primer término es una constante (un número), al usar el Lagrangiano para escribir las ecuaciones de movimiento del sistema, usando para ello las Ecuaciones de Euler-Lagrange,

$$\left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \right\}_{3N}$$

y dado que estas ecuaciones dependen de derivadas del Lagrangiano, el término constante desaparecerá de la descripción última de la dinámica sistema. Dicho en otros términos, el Lagrangiano escrito antes describe tan bien la dinámica del sistema como el siguiente Lagrangiano:

$$L'_{\text{2B,R}} = \frac{1}{2}m_r\dot{r}^2 + \frac{GMm_r}{r} \quad (9.56)$$

Podemos expresar esta importante propiedad en la forma de un poderoso teorema general (para una demostración ver Problemas al final del capítulo):

Proposición 9.6

Libertad del Lagrangiano. La dinámica de un sistema dinámico, dictada directamente por las ecuaciones de Euler-Lagrange, es descrita igual de bien con el Lagrangiano original del sistema L o con cualquier otro Lagrangiano L' que cumpla con la condición:

Proposición 9.6 (Cont.)

$$L' = L + \frac{d}{dt}F(\{q_j\}, t)$$

Como vemos, la libertad de *eliminar* términos del Lagrangiano es más general que aquella de remover simplemente cantidades constantes. Cualquier término del Lagrangiano que pueda expresarse, en general, como la derivada total de una función de las variables generalizadas y del tiempo, puede removese sin alterar la dinámica resultante. Como una curiosidad (pero solo como eso), para el problema de los dos cuerpos, la función F sería:

$$F = \frac{p_{CM}^2}{2M}t$$

Esta propiedad particular del formalismo Lagrangiano conduce a una reconocida regla heurística:

Definición 9.11

Procedimiento de Routh. Si un sistema dinámico contiene variables cíclicas, entonces se pueden eliminar del Lagrangiano todos los términos que solo dependan de los momentos generalizados conservados correspondientes a esas variables cíclicas.

Ejemplo: El lagrangiano más general de una partícula que cae libremente en un campo gravitacional uniforme de intensidad g es:

$$L_{CL} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz$$

Dado que las variables x, y son cíclicas, podemos remover los términos del lagrangiano que solo dependen de los momentos $m\dot{x}$ y $m\dot{y}$, de modo que el Lagrangiano puede escribirse como:

$$L_{CL} = \frac{1}{2}m\dot{z}^2 - mgz$$

Podríamos creer que con lo anterior hemos agotado todas las posibles simplificaciones que puede sufrir el Lagrangiano de un sistema de dos cuerpos. Pero existe una última simplificación y una muy poderosa, que se obtiene al realizar un cambio del sistema de coordenadas cartesianas al sistema de coordenadas esférico:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \phi \cos \theta \\ y &= r \cos \phi \sin \theta \\ z &= r \sin \phi \end{aligned}$$

donde debemos recordar que en mecánica celeste usamos ϕ para referirnos al *ángulo de elevación* sobre ese plano $x - y$ y θ para el ángulo azimuthal sobre el plano.

En términos de las nuevas coordenadas r, ϕ, θ el Lagrangiano de la Ec. (9.50) queda:

$$L_{2B} = \frac{1}{2} m_r (\dot{r}^2 + r^2 \cos^2 \phi \dot{\theta}^2 + r^2 \dot{\phi}^2) + \frac{GMm_r}{r} \quad (9.57)$$

En este Lagrangiano identificamos una nueva simetría: la coordenada angular θ es cíclica y tiene como cantidad conservada el momentum generalizado:

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = L_r \equiv m_r r^2 \cos^2 \phi \dot{\theta}$$

Ahora bien, por la conservación del momento angular, que demostramos en general para el Lagrangiano del problema de los N cuerpos y que se hereda para el Lagrangiano de este sistema, sabemos que existe un plano (el plano invariante de Laplace) sobre el cual se produce el movimiento del sistema. Si fijamos el plano $x - y$ en el plano invariante de Laplace, entonces, una nueva constante emerge: $\phi = 0$. Esta constante implica que también $\dot{\phi} = 0$.

Con estas dos consideraciones, el Lagrangiano del problema de los dos cuerpos relativo, escrito en coordenadas esféricas definidas con respecto al plano invariante de Laplace será finalmente:

$$L_{2B} = \frac{1}{2} m_r \left(\dot{r}^2 + \frac{L_r^2}{m_r^2 r^2} \right) + \frac{GMm_r}{r} \quad (9.58)$$

donde $L_r = m_r r^2 \dot{\theta}$, una cantidad fundamental que llamaremos el *momento angular reducido*.

Todas las simplificaciones realizadas a lo largo de esta sección, nos permitieron convertir un sistema con un Lagrangiano (Ec. 9.50) definido en un espacio de configuración de $3N$ dimensiones (el problema general de los N cuerpos), primero, a un sistema cuya dinámica es la superposición elemental de $N - 1$ subsistemas de dos cuerpos con lagrangianos generales definidos en 3 dimensiones (Ec. 9.51, hasta llegar finalmente a probar, que la dinámica de cada uno de esos subsistemas puede en realidad describirse con un lagrangiano (Ec. 9.58) que depende de una sola variable, r .

Para ser precisos, en realidad el problema reducido de los dos cuerpos, que es descrito por el Lagrangiano en la Ec. (9.58), tiene dos grados de libertad: r y θ . Sin embargo por las simetrías del problema, la ecuación de movimiento de la variable cíclica θ es simplemente:

$$\dot{\theta} = \frac{L_r}{m_r r^2} \quad (9.59)$$

9.8.4. El problema general de los dos cuerpos

En la sección anterior probamos, partiendo del lagrangiano del problema de los N-cuerpos y mediante un conjunto de transformaciones de coordenadas, además de la aplicación del procedimiento de Routh, que en el plano invariante de Laplace, el problema gravitacional de los dos cuerpos tiene dos grados de libertad r, θ y el Lagrangiano general se escribe:

$$L_{2B} = \frac{1}{2} m_r \left(\dot{r}^2 + \frac{L_r^2}{m_r^2 r^2} \right) - U(r)$$

donde $L_r = m_r r^2 \dot{\theta}$ y $U(r) = -GMm_r/r$

Pero ¿es este resultado exclusivo de la interacción gravitacional o puede extenderse a otras interacciones? Si revisamos el procedimiento y los argumentos utilizados a lo largo de las secciones anteriores, notaremos una propiedad bastante notable: ninguna de las simetrías y cantidades conservadas encontradas para el Lagrangiano de los N cuerpos o para el más restringido problema de los dos cuerpos que interactúan gravitacionalmente, depende en realidad de la forma funcional específica de la función de energía potencial $U(r)$. Esto contrasta abiertamente con los procedimientos que usamos en el formalismo vectorial para encontrar las cuadraturas a través de manipulaciones de la ecuación de movimiento.

La única suposición de fondo que hemos hecho hasta aquí es que la función de energía potencial solamente dependa de la distancia (la magnitud de los vectores posición) entre las partículas. En el lagrangiano reducido de los dos cuerpos (Ec. 9.56), esta suposición implica que la función de energía potencial solo depende de la distancia al origen de coordenadas. La fuerza generalizada asociada con un potencial como este será:

$$\vec{F} = -\frac{\partial U}{\partial r} \hat{e}_r$$

que apunta en dirección al origen de coordenadas (centro), aunque puede ir en sentido de ese mismo origen (fuerza atractiva) o en sentido contrario, fuerza repulsiva.

Esto implica que el Lagrangiano que escribimos en la Ec. (??) aplica en realidad a cualquier problema de **fuerzas centrales**, sea este gravitacional, eléctrico e incluso producto de la interacción con un espacio-tiempo curvo. Es esta la razón por la que hablaremos aquí, y en el contexto del formalismo escalar de la mecánica, de un **problema de los dos cuerpos general**, en lugar de restringirnos al problema de los dos cuerpos de la mecánica celeste.

9.8.5. El potencial efectivo y las regiones de exclusión

El Lagrangiano reducido de los dos cuerpos cumple todas las condiciones del Teorema de conservación de la energía, y por tanto la función de Jacobi asociada con él:

$$h = \frac{\partial L_{2B}}{\partial \dot{r}} \dot{r} - L_{2B} = \frac{1}{2} m_r \dot{r}^2 + \frac{1}{2} \frac{L_r^2}{m_r r^2} + U(r)$$

es una cuadratura del sistema. Al valor constante de esta cuadratura lo llamaremos E_r .

Si dividimos h por m_r y llamamos

$$\begin{aligned} \epsilon &\equiv E_r / m_r \\ h &\equiv L_r / m_r \\ V(r) &\equiv U(r) / m_r \end{aligned}$$

o energía reducida específica, momento angular reducido específico y potencial, respectivamente, la cuadratura asociada a la función de Jacobi se puede escribir como:

$$\epsilon = \frac{1}{2}\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\frac{h^2}{r^2} + V(r)$$

Despejando \dot{r}^2 en función de las constantes ϵ y h obtenemos:

$$\frac{1}{2}\dot{r}^2 = \epsilon - \left[V(r) + \frac{1}{2}\frac{h^2}{r^2} \right]$$

o bien

$$\dot{r}^2 = 2[\epsilon - V_{\text{eff}}(r)] \quad (9.60)$$

donde hemos definido

$$V_{\text{eff}}(r) \equiv V(r) + \frac{h^2}{2r^2}$$

que llamaremos en lo sucesivo el **potencial efectivo**.

Nótese que el potencial efectivo, que puede considerarse como la fuente de la que deriva la fuerza radial que sufre la partícula, se puede descomponer como la suma del potencial convencional $V(r)$ y un potencial adicional $V_{\text{cen}} = h^2/(2r^2)$ que llamaremos en lo sucesivo el **potencial centrífugo**.

La Ec. (9.60) tiene una estructura similar a la ecuación que nos permitió definir las regiones de exclusión en el problema circular restringidos de los 3 cuerpos (ver Sección 8.11). Pero no es de extrañar; esta ecuación tiene origen en una cantidad conservada análoga a la constante de Jacobi.

Para entender cómo “funcionan” las regiones de exclusión en este caso, hagamos un gráfico del potencial efectivo en el problema restringido de los dos cuerpos en el caso general de un potencial con la forma funcional $V(r) = -\mu/r^n$, siendo μ una constante (que no debe ser confundida en general con el parámetro gravitacional) y n un número real. Naturalmente, el potencial gravitacional newtoniano es un caso particular de este potencial para el cuál μ es la constante gravitacional del sistema y $n = 1$.

Para ello implementemos primero los potenciales (de fuerza, centrífugo y efectivo) como rutinas:

(Algoritmo 9.6)

```
def Vfuerza(r,**parametros):
    V=-parametros["mu"]/r**parametros["n"]
    return V

def Vcen(r,**parametros):
    V=parametros["h"]**2/(2*r**2)
    return V

def Veff(r,Vf,**parametros):
    V=Vf(r,**parametros)+Vcen(r,**parametros)
    return V
```

Aquí por comodidad hemos “empacado” en el argumento `**parametros` todas las cantidades constantes, n , μ y h de las que dependen los potenciales. Una gráfica del potencial efectivo, para valores característicos de los parámetros, se puede obtener con este algoritmo:

(Algoritmo 9.7)

```

#Parámetros del potencial
mu=1.0
n=1.0
h=0.5

#Puntos en los que calculamos el potencial
rmax=2
from numpy import linspace
rs=linspace(1e-3,rmax,1000)

#Valores del potencial
Vs=Vfuerza(rs,mu=mu,n=n)
Vcens=Vcen(rs,h=h)
Veffs=Veff(rs,Vfuerza,h=h,mu=mu,n=n)

#Valores mínimo y máximo para el gráfico
Vmin=-1.5*abs(Veffs.min())
Vmax=+1.5*abs(Veffs.max())

#Gráfico
import matplotlib.pyplot as plt
fig=plt.figure()
ax=fig.gca()
ax.plot(rs,Vs,'g--',label='Potencial de fuerza')
ax.plot(rs,Vcens,'b--',label='Potencial Centrífugo')
ax.plot(rs,Veffs,'k-',lw=2,label="Potencial efectivo")

#Decoracion
ax.axhspan(Vmin,0,color='k',alpha=0.2)
ax.set_xlim((0,rmax))
ax.set_ylim((Vmin,Vmax))
ax.set_xlabel(r"$r$".format(),fontsize=14)
ax.set_ylabel(r"$V(r)$".format(),fontsize=14)
ax.set_title(f"${mu}={mu}, $h={h}, $n={n}$")
ax.legend()
ax.grid()
fig.tight_layout();
fig.savefig("./figures/raw/potencial_efectivo.png")

```

ver Figura 9.11

Como vemos en la Figura 9.11 el potencial efectivo gravitacional (es decir con $n = 1$), tiene varias características:

1. Cerca al origen $r \rightarrow 0$ el valor del potencial crece hasta valores positivos muy grandes. Esta es una característica típica de un potencial repulsivo. Este crecimiento obedece a la dependencia del potencial centrífugo del inverso del cuadrado de la distancia $V_{\text{cen}} \sim 1/r^2$. Esta dependencia es más fuerte que la dependencia del inverso de la distancia $V_{\text{grav}} \sim -1/r$ del potencial gravitacional.

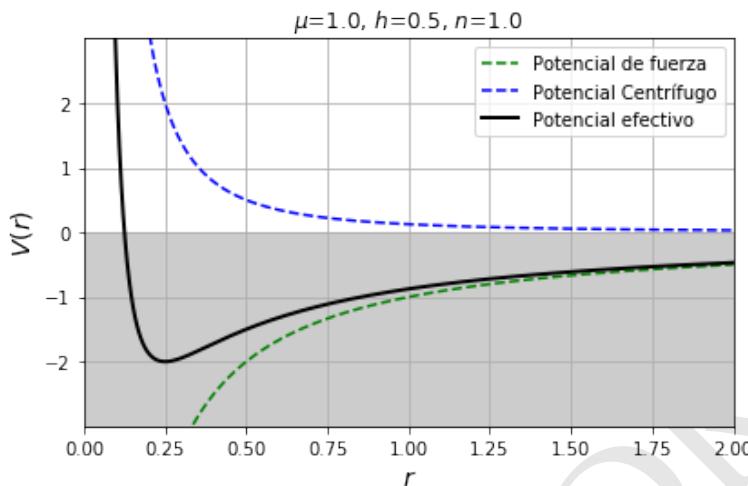


Figura 9.11: Figura correspondiente al código 9.7.

2. Lejos del origen el potencial efectivo se vuelve negativo (potencial atractivo). En general si $n > 0$, el potencial tiende a cero cuando $r \rightarrow \infty$. Esto es debido a la dependencia $V \sim -1/r^n$ que, para al menos para los casos en los que $n < 2$, es una caída más lenta que la caída proporcional a $1/r^2$ del potencial centrífugo.
3. El hecho de que el potencial gravitacional y el potencial centrífugo tengan signos diferentes y caigan a ritmos diferentes, hace que el potencial efectivo tenga un valor mínimo a una distancia finita $r = r_{\min}$ del origen.

Pero ¿cuáles son las regiones de exclusión? ¿qué significado tiene la distancia r_{\min} ?

Las condiciones iniciales de la partícula en el problema restringido de los dos cuerpos que venimos estudiando en esta sección, determinan el valor de h , que a su vez fija la forma (abstracta) del potencial efectivo. Pero esas mismas condiciones iniciales determinan un valor de la energía reducida específica ϵ . Esta cantidad tiene las mismas unidades que V_{eff} y puede representarse en figuras como la [Figura 9.11](#). En la [Figura 9.12](#) se representan 3 situaciones en las que las condiciones iniciales determinan el mismo valor de h pero distintos valores de ϵ .

De acuerdo con la Ec. (9.60) la partícula *no* podrá encontrarse en ningún lugar en el cual se cumpla la condición:

$$\epsilon - V_{\text{eff}}(r) < 0$$

De hacerlo, el valor del cuadrado de la velocidad sería negativo.

Independientemente de si sabemos cómo se mueve o no la partícula (de si tenemos o no una solución a las ecuaciones de movimiento) podemos decir a qué distancias del origen *no* estará. O al contrario: podemos delimitar claramente los valores de la coordenada radial que sí visitará. En la [Figura 9.12](#) podemos recono-

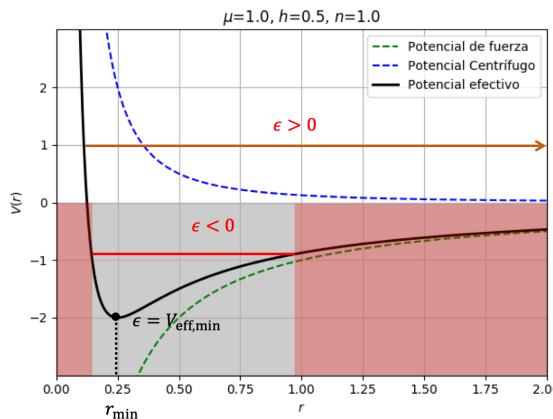


Figura 9.12: Regiones de exclusión y regiones permitidas en un problema de fuerzas centrales

cer 3 casos especiales, que si bien han sido calculados aquí para el caso gravitacional ($n = 1$), pueden extenderse a situaciones en las que $0 < n < 2$:

1. Si $\epsilon > 0$ la partícula puede acercarse al centro hasta una distancia mínima, pero puede alejarse de él a una distancia arbitrariamente grande. Esta situación es familiar, en el caso del potencial gravitacional newtoniano $n = 1$, para las órbitas abiertas (parabólicas e hiperbólicas) donde la distancia mínima es la distancia al periapsis. En el caso de potenciales distintos al gravitacional newtoniano, el resultado sigue siendo válido.
2. Si $\epsilon < 0$ la partícula solo puede estar en un intervalo de distancias y nunca más cerca de una distancia mínima o más lejos de una distancia máxima. Esta condición corresponde al caso de una órbita elíptica cuando $n = 1$; en este caso las distancias mínima y máxima no son otra cosa que las distancias al periapsis y al apoapsis, respectivamente. Más interesante aún es descubrir que la misma condición aplica para valores de n diferentes de 1, es decir incluso en el caso de fuerzas muy diferentes a la gravitacional, en la que las trayectorias no son necesariamente elipses, también habrá una distancia mínima y una máxima (aunque no necesariamente esas distancias extremas ocurran en puntos individuales de la trayectoria).
3. Si $\epsilon = V_{\text{eff},\min}$, donde está última cantidad corresponde al valor mínimo del potencial efectivo, la partícula solo puede estar a una distancia constante $r = r_{\min}$ del centro. Esta condición equivale simplemente a decir que la partícula sigue una trayectoria circular de radio r_{\min} . En este caso la “circularidad” de la trayectoria para este punto en particular es independiente del valor de n .

Estos resultados tienen un nivel de generalidad muy amplio, que demuestra, una vez más las ventajas notables del formalismo escalar y en particular del formalismo Lagrangiano respecto del formalismo vectorial para tratar los problemas de la mecánica celeste.

9.8.6. Ecuación de movimiento de la variable radial

Teniendo el Lagrangiano del problema reducido de los dos cuerpos (Ec. 9.58) podemos proceder a determinar la ecuación de movimiento de la variable r . Para ello debemos simplemente reemplazar L_{2B} en la respectiva ecuación de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{2B}}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial L_{2B}}{\partial r} = 0$$

El resultado es la ecuación general:

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - f(r) = 0$$

donde a $f(r) = -\partial V/\partial r$ la llamaremos (como ya es usual) la **fuerza específica**.

Si recordamos que la variable angular satisface la ecuación:

$$\dot{\theta} = \frac{h}{r^2} \quad (9.61)$$

Entonces la ecuación de movimiento de la variable radial se puede escribir como:

$$\ddot{r} = f(r) + \frac{h^2}{r^3} \quad (9.62)$$

Para ganar un poco de intuición sobre el sistema, especialmente para los casos en los que el potencial no es necesariamente el gravitacional newtoniano $V = -\mu/r$, resolvamos numéricamente este conjunto de ecuaciones diferenciales. Asumiremos para ello y como hicimos antes un potencial del tipo:

$$V(r) = -\frac{\mu}{r^n}$$

para el cuál la fuerza específica esta dada por:

$$f(r) = -\frac{n\mu}{r^{n+1}}$$

Antes de resolver las ecuaciones, escribamos primero las rutinas que nos permiten determinar el valor de la fuerza específica para cualquier valor de r y naturalmente definir el sistema linearizado de ecuaciones de movimiento.

```
def fuerza_especifica(r,**parametros):
    f=-n*parametros["mu"]/r**(parametros["n"]+1)
    return f

def edm_doscuerpos_general(Y,t,fuerza,parametros):
    #Leemos las variables
    r=Y[0]
    vr=Y[1]
    teta=Y[2]
    #Calculamos las derivadas
    drdt=vr
    dvrdt=fuerza(r,**parametros)+parametros["h"]**2/r**3
```

```
dtetadt=parametros["h"]/r**2
return [drdt,dvrdt,dtetadt]
```

Definamos ahora los parámetros y condiciones iniciales del sistema:

```
#Parámetros del potencial
mu=1
n=1.1

#Condiciones iniciales
r=1.0
teta=0.0
r_dot=0.0
teta_dot=0.5

#Momento angular específico
h=r**2*teta_dot

#Energía específica
from pymcel.export import Vfuerza,Vcen
epsilon=0.5*r_dot**2+Vfuerza(r,mu=mu,n=n)+Vcen(r,h=h)

#Tiempos de integración
Nt=1000
from numpy import linspace
ts=linspace(0.0,10.0,Nt)
```

Condiciones iniciales:
 $(r, teta) = (1.0, 0.0)$
 $(r_dot, teta_dot) = (0.0, 0.5)$

Constantes de movimiento:
 $h = 0.5$
 $h = -0.875$

Integrando las ecuaciones de movimiento obtenemos:

```
from scipy.integrate import odeint
solucion=odeint(edm_doscueros_general,[r,r_dot,teta],ts,
                 args=(fuerza_especifica,dict(h=h,mu=mu,n=n)))
rs=solucion[:,0]
from numpy import mod,pi
tetas=mod(solucion[:,2],2*pi)
```

Aquí hemos usado la rutina `mod` de NumPy para que los valores de la variable angular estén todos contenidos en el intervalo $[0, 2\pi)$

Una gráfica del valor de la coordenada radial y la coordenada angular como función del tiempo se puede elaborar con este algoritmo:

(Algoritmo 9.8)

```

import matplotlib.pyplot as plt
fig,axs=plt.subplots(2,1,sharex=True)
axs[0].plot(ts,rs)
axs[0].set_ylabel('r')
axs[0].grid()
axs[0].set_title(f"$\mu$={mu}, $h$={h}, $n$={n} [$\epsilon$={epsilon}]")
from numpy import mod
axs[1].plot(ts,tetas)
axs[1].set_ylabel("$\theta$")
axs[1].set_xlabel("$t$ [u.c.]");
axs[1].grid()

```

ver Figura 9.13

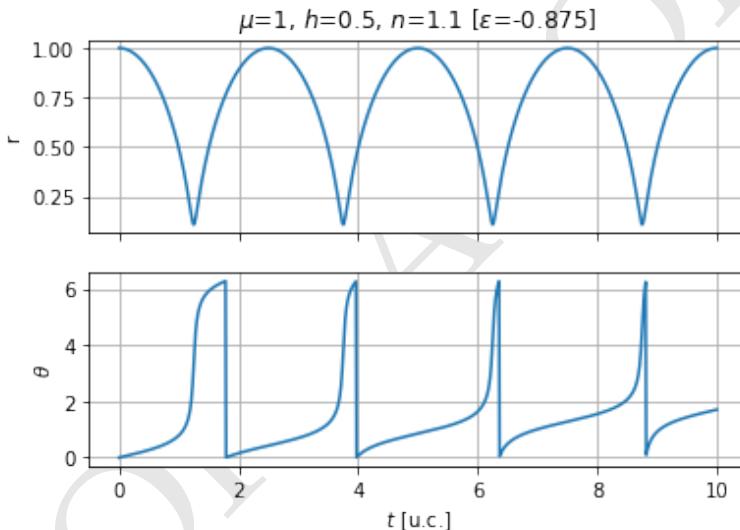


Figura 9.13: Figura correspondiente al código 9.8.

Aunque no es mucho lo que la Figura 9.13 nos parece enseñar, ciertamente confirma lo que habíamos predicho en la sección anterior; a saber, que para valores de $\epsilon < 0$ el valor de la coordenada radial se mantiene restringido a un rango específico.

Otro detalle interesante de la Figura 9.13, resulta de reconocer que el punto de mínima distancia (mínimos de la curva de la variable radial) no coincide con la posición angular $\theta = \pi$, ni en la primera vuelta, ni en la segunda, etc. Es más, el ángulo en el que se produce la máxima proximación cambia continuamente de una vuelta a otra. Esta observación revela dos hechos básicos: 1) que no se trata de un movimiento sobre una órbita elíptica (para la cual el apoapsis y el periapsis ocurren siempre en las mismas posiciones $\theta = 0$ y $\theta = \pi$). Y 2) que el punto de mínima distancia no ocurre en la misma posición de la trayectoria.

Para comprender estos resultados, lo mejor es representar la trayectoria en el espacio coordenado:

(Algoritmo 9.9)

```
#Conversión de (r,teta) a (x, y)
from numpy import cos,sin
xs=rs*cos(tetas)
ys=rs*sin(tetas)

#Gráfico
fig=plt.figure(figsize=(5,5))
ax=fig.gca()
ax.plot(xs,ys)

#Decoración
ax.set_xlabel("x")
ax.set_ylabel("y")
ax.set_title(f"\mu={mu}, h={h}, n={n}")
ax.grid();
from pymcel.plot import fija_ejes_proporcionales
fija_ejes_proporcionales(ax,(xs,ys),margin=0.1);
```

ver Figura 9.14

En la figura Figura 9.14 se hacen más evidentes las conclusiones que acabamos de derivar de las curvas de las variables radial y angular.

Finalmente podemos hacer un gráfico del potencial efectivo para este sistema, que nos permitirá conectar la solución a las ecuaciones de movimiento con la teoría del potencial y las regiones de exclusión que estudiamos en la sección anterior:

(Algoritmo 9.10)

```
#Calculo del potencial
rmax=1.5*rs.max()
res=linspace(1e-3,rmax,1000)
from pymcel.export import Veff
Veffs=Veff(res,Vfuerza,h=h,mu=mu,n=n)
Vmin=-1.5*abs(Veffs.min())
Vmax=+1.0*abs(Veffs.min())

#Gráfico
fig=plt.figure()
ax=fig.gca()
ax.plot(res,Veffs,'k-')
ax.axhspan(Vmin,0,color='k',alpha=0.2)
ax.axhline(epsilon,color='r',ls='--')

#Valores de rs
from numpy import ones_like
ax.plot(rs,epsilon*ones_like(rs),'rv',ms=2)

#Decoración
```

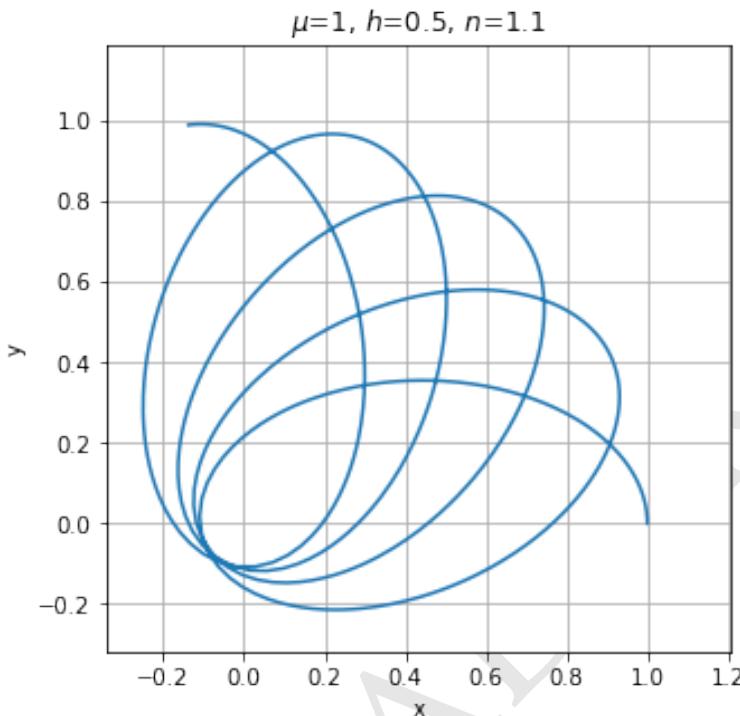


Figura 9.14: Figura correspondiente al código 9.9.

```

ax.set_xlim((0,rmax))
ax.set_ylim((Vmin,Vmax))
ax.set_xlabel(r"$r$")
ax.set_ylabel(r"$V(r)$")
ax.set_title(f"\mu={mu}, h={h}, n={n}")
ax.set_title(r"$h=%g, n=%g$%(h,n))
ax.grid()

```

ver Figura 9.15

Como podemos ver en la [Figura 9.15](#) las predicciones de la teoría del potencial efectivo coinciden con lo obtenido con la solución numérica a las ecuaciones de movimiento, en especial los valores visitados por la partícula (línea sólida gruesa) se encuentran restringidos dentro de los límites definidos por el potencial efectivo.

9.8.7. Ecuación de la forma orbital

En la sección anterior estudiamos la solución numérica a las e.d.m. del problema reducido de los dos cuerpos para el caso de fuerzas centrales. Pero ¿es posible encontrar una solución analítica, al menos, como lo vimos en el [Capítulo 7](#), partiendo de las Ecs. (9.62) y (9.62)?.

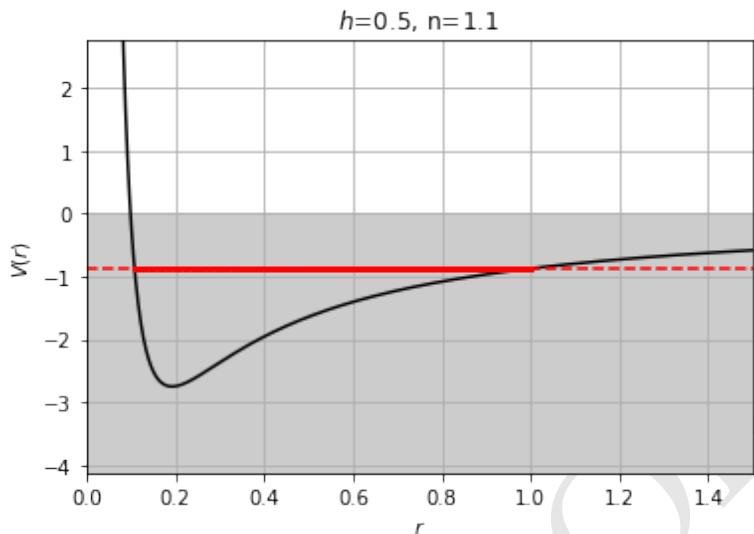


Figura 9.15: Figura correspondiente al código 9.10.

Para hacerlo, hagamos primero dos cambios de variables en la ecuación radial. Así, en lugar de describir el problema en términos de la función r hágámoslo en términos de la u :

$$u = \frac{1}{r}$$

y en lugar de usar como variable independiente el tiempo, usemos la variable angular θ . La transformación del operador derivada total respecto al tiempo a la nueva variable independiente se hace con la regla⁶⁴:

$$\frac{d}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \frac{d}{d\theta} = \frac{h}{r^2} \frac{d}{d\theta}$$

De allí, la velocidad queda:

$$\begin{aligned}\dot{r} &= \frac{h}{r^2} \frac{dr}{d\theta} \\ &= -h \frac{du}{d\theta}\end{aligned}\tag{9.63}$$

Y la aceleración

⁶⁴Hay que admitir que este cambio de variables no es una cosa que se le ocurre a cualquiera de la noche a la mañana. La inspiración principal para hacerlo viene de la solución conocida por medios independientes al problema en el caso de $n = 1$. En este caso la variable radial tiene solución $r(\theta) = p/(1 + e \cos \theta)$. De aquí se entiende por qué es mejor utilizar θ como variable independiente. También se entiende por qué es mejor usar $u(\theta) \equiv 1/r = (1 + e \cos \theta)/p$.

$$\ddot{r} = -h \frac{d}{dt} \frac{du}{d\theta} = -h^2 u^2 \frac{d^2 u}{d\theta^2}$$

Reemplazando en la Ec. (9.62), la ecuación para la coordenada radial queda:

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = -\frac{1}{h^2 u^2} f\left(\frac{1}{u}\right) \quad (9.64)$$

que se conoce como la **ecuación de la forma orbital**.

Para aplicar en la práctica esta nueva ecuación consideremos por ejemplo el caso Newtoniano en el que $f(r) = -\mu/r^2 = -\mu u^2$. Reemplazando en la Ec. (9.64) obtenemos:

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = \frac{\mu}{h^2} \quad (9.65)$$

La solución a esta ecuación diferencial puede obtenerse encontrando primero la solución a la ecuación diferencial homogénea correspondiente:

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = 0$$

Una función que resuelve esta ecuación diferencial es:

$$u(\theta) = A \cos(\theta - \theta_0)$$

donde A y θ_0 son constantes.

Por otro lado la función $u(t) = \mu/h^2$ es una solución a la ecuación diferencial no homogénea original.

De acuerdo a la teoría de ecuaciones diferenciales, la suma de las dos funciones anteriores es también una solución a la ecuación diferencial original:

$$u(\theta) = A \cos(\theta - \theta_0) + \frac{\mu}{h^2}$$

Si escribimos esta solución general de la forma:

$$u = \frac{\mu}{h^2} [1 + e \cos(\theta - \theta_0)]$$

donde llamamos $e \equiv Ah^2/\mu$, podemos finalmente escribir la ecuación en coordenadas cilíndricas de la trayectoria de la partícula sometida a una fuerza del tipo $f(r) = -\mu/r^2$:

$$r = \frac{h^2/\mu}{1 + e \cos(\theta - \theta_0)}$$

Comprobamos que se trata de una curva cónica con $p = h^2/\mu$ y donde e es la excentricidad.

En el marco de esta deducción ¿qué podemos decir sobre el valor del parámetro e y su relación con las demás variables dinámicas del sistema?. Si derivamos la solución en la Ec. (??) con respecto al tiempo:

$$\dot{r} = -\frac{\mu}{h^2} \dot{\theta} r^2 e \sin(\theta - \theta_0)$$

y usamos la ecuación de la variable angular (Ec. 9.61) para expresar $r^2\dot{\theta} = h$ podemos escribir:

$$\dot{r} = -\frac{\mu}{h}e \sin(\theta - \theta_0)$$

Despejando \dot{r} de la definición ϵ ,

$$\frac{1}{2}\dot{r}^2 = \epsilon - \left[V(r) + \frac{1}{2}\frac{h^2}{r^2} \right]$$

y reemplazando la solución obtenida anteriormente obtenemos la igualdad:

$$\frac{1}{2}\frac{\mu^2}{h^2}e^2 \sin^2 \theta' = \epsilon + \frac{\mu^2}{h^2}(1 + e \cos \theta') - \frac{1}{2}\frac{\mu^2}{h^2}(1 + e \cos \theta')^2$$

donde $\theta' = \theta - \theta_0$.

Con un poco de álgebra (ver Problemas al final del capítulo) se encuentra finalmente que:

$$e = \sqrt{1 + \frac{2\epsilon h^2}{\mu^2}}$$

Este resultado coincide con el que habíamos obtenido independientemente en el Capítulo 7 usando el formalismo vectorial.

La solución anterior solo muestra como depende la distancia al centro del ángulo θ , pero no nos dice como resolver el problema en el tiempo.

Una manera de obtener esta solución es partir nuevamente de la ecuación de la cuadratua de la energía:

$$\frac{1}{2}\dot{r}^2 = \epsilon - \left[V(r) + \frac{1}{2}\frac{h^2}{r^2} \right]$$

Esta es en realidad una ecuación diferencial separable que puede escribirse en la forma:

$$\frac{r dr}{\sqrt{2r^2\epsilon - 2r^2V(r) - h^2}} = dt \quad (9.66)$$

Si usamos la ecuación de la trayectoria escrita en términos de la anomalía excentrica:

$$r = a(1 - e \cos E)$$

para la cual $dr = -ae \sin EdE$ y usamos el hecho que $h^2/\mu = a(1 - e^2)$, la Ec. (9.66) se puede escribir después de un poco de álgebra (ver Problemas al final del capítulo) como:

$$(1 - e \cos E)dE = n dt \quad (9.67)$$

Donde hemos hecho $n = \sqrt{\mu/a^3}$.

La Ec. (9.67) se integra trivialmente para producir:

$$E - e \sin E = n(t - t_0)$$

que no es otra que la archiconocida ecuación de Kepler.

9.8.8. El problema de los dos cuerpos con n arbitrario

Como vimos experimentando con la solución numérica al problema de los dos cuerpos sometidos a fuerzas centrales, esto es con una función de energía potencial $U(r)$ que solo depende de la distancia relativa, si n no es 2 las trayectorias resultantes del vector relativo tienen una estructura peculiar: no se cierran sobre sí mismas y parecen elipses que precesan alrededor del origen de coordenadas. Aunque solo en el caso de $n = 1$ parece existir una solución matemáticamente simple y regular, las variaciones observadas de la variable radial r y la variable angular θ , incluso para valores arbitrarios reales de $0 < n < 2$, siguen siendo relativamente *regulares*.

¿Qué podemos decir, desde el punto de vista analítico, sobre las trayectorias de partículas sometidas a fuerzas centrales con $n \neq 1$? En particular podemos preguntarnos por aquellos sistemas que tienen un n valores de n muy cercanos a 1.

Consideremos por ejemplo el movimiento de una partícula sometida a una fuerza específica del tipo:

$$f(r) = -\frac{\mu}{r^2} - \frac{\sigma}{r^4} \quad (9.68)$$

donde $\sigma \ll \mu r^2$ para todos los valores de r relevantes para el sistema. Si bien esta elección de la fuerza parece completamente arbitraria, y bien podríamos comenzar analizando el caso de una fuerza del tipo $f(r) = -\mu/r^{2+\delta}$ con δ pequeño, hay dos razones para que la sencilla exploración que realizaremos en los siguientes párrafos utilice esta forma específica. La primera es que esta forma de la fuerza es una perturbación de la forma newtoniana que aparece explícitamente en el primer término. La segunda razón la descubriremos a lo largo del desarrollo: esta fuerza permite una descripción analítica adecuada para los propósitos del libro. Y la tercera y quizás la más importante, es el hecho de esta es la dependencia funcional que tiene la fuerza específica efectiva en la teoría general de la relatividad. Es decir, no estamos tratando aquí con una fórmula arbitraria, sino con una que puede llegar a tener un verdadero interés físico.

Si reemplazamos $f(r)$ en la ecuación de la forma orbital (Ec. 9.64), la ecuación radial para esta forma particular de la fuerza adopta la forma:

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = \frac{\mu}{h^2} + \frac{\sigma}{h^2} u^2 \quad (9.69)$$

Podemos comprobar que se trata de una ecuación diferencial no homogénea muy similar a la ecuación análoga para el caso newtoniano (Ec. 9.65). La única diferencia con aquella es el término adicional al lado derecho $\sigma u^2/h^2$. Como es común en la teoría de ecuaciones diferenciales, podemos proponer una solución a esta ecuación que sea la suma de la solución encontrada para la Ec. (9.65) y una función adicional, desconocida que podemos llamar $g(\theta)$:

$$u(\theta) = \frac{1}{p}(1 + e \cos \theta) + g(\theta)$$

donde $p = h^2/\mu$. Asumiremos que $g(\theta)$ contiene términos que dependen de σ y que hacen que en general $g(\theta) \ll u(\theta)$.

Si reemplazamos la solución propuesta en la Ec. (9.69) obtenemos:

$$\frac{d^2g}{dt^2} + g = q \left[\frac{1}{p}(1 + e \cos \theta) + g(\theta) \right]^2$$

donde hemos introducido un nuevo parámetro $q = \sigma/h^2$

Si ahora desarrollamos el lado derecho de la ecuación y eliminamos todos los términos cuadráticos o de orden superior en q o $g(\theta)$, la ecuación diferencial para g nos queda:

$$\frac{d^2g}{dt^2} + g \approx \frac{q}{2p^2}(2 + e^2 + 4e \cos \theta + e^2 \cos 2\theta)$$

Podemos absorber el factor constante $(2p^2/q)$ en la función g y escribir la función resultante $g'(\theta) = 2p^2g(\theta)/q$ como la superposición de tres funciones

$$g' = g'_0 + g'_1(\theta) + g'_2(\theta)$$

donde la primera es una constante que no depende de θ . La segunda depende de funciones trigonométricas con argumento θ ($\cos \theta$ o $\sin \theta$) y la tercera es una función que depende de funciones trigonométricas con argumento 2θ .

No es difícil mostrar (ver Problemas al final del capítulo) que las funciones resultantes son:

$$\begin{aligned} g'_0 &= 2 + e^2 \\ g'_1 &= 2e\theta \sin \theta \\ g'_2 &= -\frac{1}{3}e^2 \cos 2\theta \end{aligned} \tag{9.70}$$

De este modo una solución general a la ecuación diferencial en Ec. (9.69) se puede escribir en la forma:

$$u(\theta) \approx \frac{1}{p} \left[1 + e \cos \theta + \frac{q}{p} \left(1 + \frac{e^2}{2} \right) + \frac{q}{p} e \theta \sin \theta - \frac{q}{p} \frac{e}{6} \cos 2\theta \right] \tag{9.71}$$

Como vemos $u(\theta)$ en el caso de la fuerza postulada, es casi una cónica pero esta perturbada por 3 términos pequeños (proporcionales a q) que producen contribuciones que podríamos clasificar como:

1. Un término constante $(q/p)(1 + e^2/2)$. Este término aumenta ligeramente el valor de $u(\theta)$ (disminuye el valor de r), pero lo hace de forma independiente de la posición angular.
2. Un término cuyo valor aumenta monótonamente, $(qe/p)\theta \sin \theta$. Llamamos a este el **término secular**.
3. Y un término pequeño, que oscila alrededor de cero con amplitud proporcional $-qe/p$ y con un período cercano a la mitad del *período kepleriano* (el período que tendría la órbita si la fuerza fuera la gravedad newtoniana). Llamamos a este el **término oscilatorio**.

El siguiente algoritmo permite comparar, visualmente, la contribución que cada uno de estos términos hace en la solución final obtenida en la Ec. (9.71).

(Algoritmo 9.11)

```
#Parametros del sistema
q=0.05
p=1.0
e=0.1

#Valores de teta
from numpy import linspace,sin,cos,pi
teta_min=0.0
teta_max=5*pi
tetas=linspace(teta_min,teta_max,1000)

#Términos de u
u_conica=(1/p)*(1+e*cos(tetas))
u_constante=(q/p)*(1+e**2/2)
u_secular=(q/p)*e*tetas*sin(tetas)
u_oscilatorio=-(q/p)*(e/6)*cos(2*tetas)

#Gráfico
import matplotlib.pyplot as plt
fig=plt.figure()
ax=fig.gca()

ax.plot(tetas,u_conica+u_constante,'k--',label="cónica+constante")
ax.plot(tetas,u_conica+u_constante+10*u_oscilatorio,'r:',
        label="cónica+constante+oscilatorio")
ax.plot(tetas,u_conica+u_constante+u_oscilatorio+u_secular,'b:',
        label="cónica+constante+oscilatorio+secular")

#Decoración
ax.legend(loc='lower right')
ax.set_xlabel("$\theta$ [rad]")
ax.set_ylabel("u($\theta$) [rad]")
ax.set_xlim((teta_min,teta_max))
ax.set_ylim((0.8,1.2))
ax.grid();
```

ver Figura 9.16

En la solución representada en la [Figura 9.16](#) vemos que el término oscilatorio (que esta multiplicado allí artificialmente por un factor de 10) no tiene casi ningún efecto en modificar la cónica original. Como mencionamos antes el término constante simplemente modifica la distancia al periapsis y al apoapsis (extremos de la curva punteada), sin modificar sustancialmente la forma de la misma. Solo el término secular introduce modificaciones significativas en la trayectoria y es responsable del efecto que observabamos en secciones anteriores: la precesión del periapsis.

Teniendo en cuenta estos resultados, podemos simplificar aún más la Ec. (9.71)

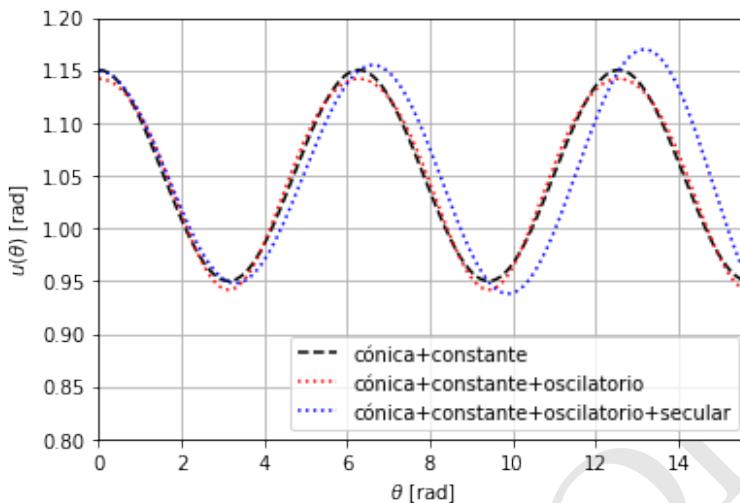


Figura 9.16: Figura correspondiente al código 9.11.

escribiéndola como:

$$u'(\theta) \approx \frac{1}{p'} \left[1 + e \cos \theta + \frac{qe}{p} \theta \sin \theta \right]$$

donde p' es un semilatus rectum efectivo (debido al cambio en la distancia al periapsis y al apoapsis de la órbita por efecto del término constante).

El segundo término del lado derecho lo podemos escribir también en la forma:

$$\cos \theta + \frac{q}{p} \theta \sin \theta \approx \cos \left(\theta - \frac{q\theta}{p} \right)$$

donde nos hemos valido del hecho que como $q/p \ll 1$, entonces $\sin(q\theta/p) \approx q\theta/p$ y $\cos(q\theta/p) \approx 1$

De allí, finalmente, la solución para la ecuación orbital del sistema relativo de dos cuerpos sometidos a una fuerza del tipo dado por la Ec. (9.68) se puede aproximar como:

$$u'(\theta) \approx \frac{1}{p'} [1 + e \cos(\theta - q\theta/p)]$$

al menos para θ no muy grande (las primeras vueltas de la partícula).

La característica más notable de esta trayectoria es que los puntos de máximo (o de mínimo) no se repiten, como en el caso de la cónica kepleriana, exactamente cada 2π radianes. Después de $\theta = 0$ el siguiente máximo de $u'(\theta)$, es decir, el siguiente periapsis, se produce cuando:

$$\theta_p - \frac{q\theta_p}{p} = 2\pi$$

Despejando θ_p obtenemos:

$$\theta_p = \frac{2\pi}{1 - q/p} \approx 2\pi(1 + q/p)$$

Es decir, por cada vuelta se produce un desplazamiento en la posición del perihelio correspondiente a:

$$\Delta\theta_p \approx \frac{2\pi q}{p} \quad (9.72)$$

Un poco de historia

el avance del perihelio de Mercurio. En el año 1915, el físico Suizo-Americano Albert Einstein (*“ainshtain”*^a) estaba en una carrera contra el tiempo buscando las que se convertirían a la larga en las “verdaderas” leyes de la gravitación universal. Desde el año 1907 Einstein ya sospechaba que el fenómeno gravitacional era algo más que lo que Newton había intuído que era y que nunca había podido precisar. A la larga, Einstein comprendió que la “fuerza de gravedad” no era en realidad una fuerza aplicada, sino una fuerza resultante, una manifestación del movimiento de los cuerpos en el espacio-tiempo “distorsionado” cerca a cuerpos muy masivos. Una de las primeras pruebas contundentes de la validez de su teoría, la obtuvo el 18 de noviembre de 1915 cuando resolvió uno de los problemas abiertos mejor conocidos de la mecánica celeste: la precesión anómala del perihelio de Mercurio.

Desde hacía más de 50 años las observaciones precisas de la órbita del planeta Mercurio, habían revelado que el perihelio del planeta no ocurría en cada orbital en el mismo lugar que en la anterior. El perihelio se desplazaba un poco (1.38 segundos de arco o *arcsec* por cada vuelta, o equivalentemente 575 arcsec por siglo), alargando la llegada de Mercurio a este punto en su órbita. Usando la mejor mecánica celeste de la época, los astrónomos habían determinado que las perturbaciones gravitacionales de los planetas podían explicar la mayor parte del efecto: si la teoría de la gravitación de Newton era correcta el Perihelio de Mercurio se debía desplazar 1.28 arcsec por vuelta o lo que es lo mismo 532 arcsec por siglo. Por mucho que intentaron corregir la cifra (que era inferior a las mejores estimaciones astronómicas hechas en aquella época por 43 segundos de arco por siglo) no lo consiguieron. Intentaron poniendo un planeta perturbador entre el Sol y Mercurio (Vulcano lo llamaron) pero nunca lo encontraron. Intentaron poner un cinturón de asteroides, pero no consiguieron ver nada como eso cerca al Sol.

Lo que la teoría de Einstein decía en 1915 era, basicamente, que la teoría Newtoniana de la gravedad solo era una aproximación de primer orden, a la verdadera ley de gravitación universal. En particular, después de utilizar la nueva teoría de Einstein, puede probarse que la ecuación radial de movimiento para un partícula que se mueve cerca al Sol, tiene una forma idéntica a la ecuación de la forma orbital que dedujimos en esta sección. Sin embargo el término asociado con la fuerza específica en la mecánica celeste clásica, es diferente. Esta diferencia puede explicarse si se asume que la fuerza específica que mueve a las partículas alrededor de nuestra estrella (y en realidad alrededor de cualquier cuerpo esférico), es, en lugar de la newtoniana $f(r) = -\mu/r^2$, una fuerza de la forma:

$$f(r) = -\frac{\mu}{r^2} - \frac{3\mu h^2}{c^2 r^4}$$

donde h es el momento angular reducido específico y c es la velocidad de la luz. Esta es justamente la forma funcional que tiene la fuerza central no Newtoniana que

Un poco de historia (Cont.)

estudiamos en este capítulo donde reconocemos el valor de la constante

$$\sigma = \frac{3\mu h^2}{c^2}$$

De allí podemos calcular a su vez el valor del parámetro q :

$$q = \frac{3\mu}{c^2}$$

Con esto podemos y teniendo en cuenta que $p = a(1 - e^2)$, el avance del perihelio por vuelta, predicho por la teoría que desarrollamos en esta sección y que calculamos con la Ec. (9.72) será:

$$\Delta\theta_p = \frac{6\pi\mu}{c^2 a (1 - e^2)}$$

Reemplazando los valores conocidos para la masa del Sol (μ), la velocidad de la luz y el semijememayor y excentricidad promedio de mercurio se obtiene:

$$\Delta\theta_p = 0,1030 \text{ arcsec}$$

por vuelta. Teniendo en cuenta que el período de revolución de Mercurio es 87.97 días y un siglo contiene 36.525 días, el avance por siglo, calculado según la ecuación Ec. (9.72) y usando la fuerza específica equivalente de la relatividad general, será:

$$\frac{36,525 \Delta\theta_p}{87,97} = 42,66 \text{ arcsec}$$

que corresponde a la anomalía observada.

^a<https://forvo.com/search/Albert%20Einstein/de/>

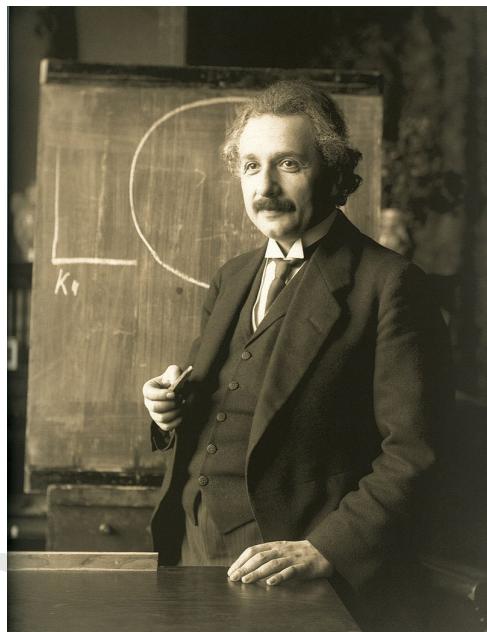


Figura 9.17: Albert Einstein durante una conferencia en Viena en 1921, seis años después de resolver uno de los problemas más esquivos de la mecánica celeste, la precesión anómala del perihelio de Mercurio. Crédito: *National Library of Austria.

9.9. Problemas seleccionados

1. **Libertad del Lagrangiano.** Sea $L(\{q\}, \{\dot{q}\}, t)$ un Lagrangiano para un sistema con n variables generalizadas (q_1, q_2, \dots, q_n) que satisface las ecuaciones de Lagrange. Muestre por sustitución directa que

$$L'(\{q\}, \{\dot{q}\}, t) = L(\{q\}, \{\dot{q}\}, t) + \frac{d}{dt} F(\{q\}, t)$$

también satisface las ecuaciones de Lagrange, donde F es cualquier función diferenciable respecto a sus argumentos.

1. Solución

Distribuyendo, por un lado,

$$\frac{\partial L'}{\partial q_j} = \frac{\partial}{\partial q_j} \left(L + \frac{d}{dt} F \right) \quad (9.73)$$

$$= \frac{\partial L}{\partial q_j} + \frac{\partial}{\partial q_j} \frac{d}{dt} F. \quad (9.74)$$

Pero, derivando totalmente F con respecto a sus argumentos, sabemos que

$$\frac{d}{dt} F = \sum_i \frac{\partial F}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial F}{\partial t},$$

por lo que, reemplazando y teniendo en cuenta que $\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_j} = 0$ (dados que las coordenadas generalizadas son independientes unas de otras), se tiene

$$\frac{\partial L'}{\partial q_j} = \frac{\partial L}{\partial q_j} + \sum_i \frac{\partial^2 F}{\partial q_j \partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial^2 F}{\partial q_j \partial t}.$$

Por otro lado,

$$\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(L + \frac{d}{dt} F \right) \quad (9.75)$$

$$\text{distribuyendo } \rightarrow = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \frac{d}{dt} F. \quad (9.76)$$

$$\text{reemplazando } \dot{F} \text{ y derivando el producto } \rightarrow = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} + \sum_i \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\frac{\partial F}{\partial q_i} \right) \dot{q}_i + \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{q}_j} \right] + \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial F}{\partial t} \quad (9.77)$$

Aquí hacemos dos observaciones: primero, que como $F = F(\{q\}, t)$, entonces $\frac{\partial F}{\partial q_i}$ y $\frac{\partial F}{\partial t}$ también es función de $\{q\}$ y t , por lo que sus derivadas parciales respecto a \dot{q}_j son cero; segundo, que $\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{q}_j} = \delta_{ij}$ y $\sum_i f_i \delta_{ij} = f_j$. Así,

$$\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial F}{\partial q_j}.$$

Entonces,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial F}{\partial q_j} \right) \quad (9.78)$$

$$\text{distribuyendo} \rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial q_j} \right) \quad (9.79)$$

$$\text{derivando totalmente el segundo término} \rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) + \sum_k \frac{\partial^2 F}{\partial q_k \partial q_j} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial q_j} \quad (9.80)$$

Así, restando ambos resultados,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L'}{\partial q} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) + \sum_k \frac{\partial^2 F}{\partial q_k \partial q_j} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial q_j} - \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} + \sum_i \frac{\partial^2 F}{\partial q_j \partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial^2 F}{\partial q_j \partial t} \right),$$

pero sabemos que L satisface las ecuaciones de Euler-Lagrange, luego queda solamente

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L'}{\partial q} = \sum_k \frac{\partial^2 F}{\partial q_k \partial q_j} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial q_j} - \sum_i \frac{\partial^2 F}{\partial q_j \partial q_i} \dot{q}_i - \frac{\partial^2 F}{\partial q_j \partial t}.$$

Por último, asumiendo que F está bien comportada en sus argumentos, sus derivadas cruzadas se pueden permutar, por lo que

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L'}{\partial q} = 0,$$

lo que significa que L' satisface las ecuaciones de Euler-Lagrange.

2. **Transformaciones puntuales.** Sea $L(\{q\}, \{\dot{q}\}, t)$ un Lagrangiano para un sistema con n variables generalizadas (q_1, q_2, \dots, q_n) que satisface las ecuaciones de Lagrange. Suponga que se hace una *transformación puntual*, es decir, a otro conjunto de coordenadas independientes s_1, \dots, s_n por medio de las siguientes ecuaciones

$$q_l = q_l(s_1, \dots, s_l, t), \quad l = 1, \dots, n.$$

Muestre que si el Lagrangiano se expresa como función de s_j , \dot{s}_j y t a través de las ecuaciones de transformación puntual, entonces L satisface las ecuaciones de Lagrange con respecto a las nuevas coordenadas s ,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{s}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial s_j} = 0.$$

En otras palabras, muestre que las ecuaciones de Lagrange son invariantes (su forma matemática no cambia) bajo las llamadas *transformaciones puntuales*.

2. Solución

Aplicando la regla de la cadena, tenemos

$$\frac{\partial L}{\partial s_j} = \sum_k \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} \frac{\partial q_k}{\partial s_j} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial s_j} \right).$$

y

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{s}_j} = \sum_k \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} \frac{\partial q_k}{\partial \dot{s}_j} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \dot{s}_j} \right).$$

Notemos dos cosas: una, dado que $q_l = q_l(s_1, \dots, s_l, t)$ no es función de \dot{s}_j , entonces $\frac{\partial q_k}{\partial \dot{s}_j} = 0$; dos, que

$$\frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \dot{s}_j} = \frac{\partial}{\partial \dot{s}_j} \frac{d}{dt} q_k \quad (9.81)$$

$$\text{derivando totalmente } \rightarrow = \frac{\partial}{\partial \dot{s}_j} \left(\sum_m \frac{\partial q_k}{\partial s_m} \frac{\partial s_m}{\partial t} \right) \quad (9.82)$$

$$\text{notando que } \frac{\partial s_m}{\partial t} = \dot{s}_m \rightarrow = \frac{\partial}{\partial \dot{s}_j} \left(\sum_m \frac{\partial q_k}{\partial s_m} \dot{s}_m \right) \quad (9.83)$$

$$\text{derivando el producto } \rightarrow = \sum_m \left(\dot{s}_m \frac{\partial}{\partial \dot{s}_j} \frac{\partial q_k}{\partial s_m} + \frac{\partial q_k}{\partial s_m} \frac{\partial \dot{s}_m}{\partial \dot{s}_j} \right) \quad (9.84)$$

$$\text{notando que } \frac{\partial}{\partial \dot{s}_j} \frac{\partial q_k}{\partial s_m} = 0 \text{ ya que } \frac{\partial q_k}{\partial s_m} \text{ no depende de los } \dot{s}_j \rightarrow = \sum_m \left(\frac{\partial q_k}{\partial s_m} \frac{\partial \dot{s}_m}{\partial \dot{s}_j} \right) \quad (9.85)$$

$$\text{escribiendo } \frac{\partial \dot{s}_m}{\partial \dot{s}_j} = \delta_{jm} \rightarrow = \sum_m \frac{\partial q_k}{\partial s_m} \delta_{jm} \quad (9.86)$$

$$\text{sumando } \rightarrow = \frac{\partial q_k}{\partial s_j}. \quad (9.87)$$

Reemplazando resultados,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{s}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial s_j} = \frac{d}{dt} \left(\sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{\partial q_k}{\partial s_j} \right) - \sum_k \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{\partial q_k}{\partial s_j} + \frac{\partial L}{\partial q_k} \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial s_j} \right)$$

$$\text{derivando el producto y juntando sumatorias } \rightarrow = \sum_k \left[\frac{\partial q_k}{\partial s_j} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{d}{dt} \frac{\partial q_k}{\partial s_j} - \frac{\partial L}{\partial q_k} \frac{\partial q_k}{\partial s_j} \right]$$

$$\text{agrupando términos semejantes } \rightarrow = \sum_k \left[\frac{\partial q_k}{\partial s_j} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} \right) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial q_k}{\partial s_j} \right) \right]$$

Miremos de nuevo dos cosas: el primer paréntesis de la última ecuación es la ecuación de Euler-Lagrange para las coordenadas generalizadas q_l , luego es igual a cero; por otro lado,

$$\frac{\partial \dot{q}_k}{\partial s_j} = \frac{\partial}{\partial s_j} \frac{d}{dt} q_k = \frac{d}{dt} \frac{\partial q_k}{\partial s_j},$$

pues q_k depende únicamente de los s y el tiempo, entonces las derivadas con intercambiables. Se concluye, entonces, que

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{s}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial s_j} = 0,$$

es decir, las ecuaciones de Lagrange son invariantes bajo transformaciones puntuales.

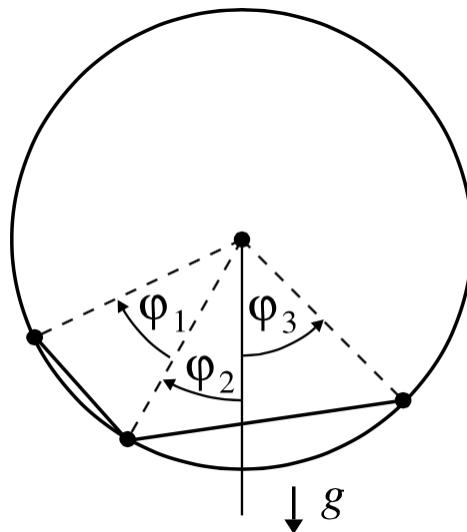


Figura 9.18: Tres masas unidas por barras deslizan por un aro.

3. **Ligaduras.** Tres masitas puntuales m_1 , m_2 y m_3 se fijan a los extremos de dos barras sin masa y se deslizan sin fricción en un aro circular de radio R , que permanece vertical en el campo gravitacional de la Tierra.
- ¿Cuántas ligaduras tiene el sistema? Escriba las ecuaciones de ligadura (restricciones) del sistema.
 - ¿Cuántos grados de libertad tiene el sistema? ¿Cuántas variables generalizadas hacen falta para describir el sistema? Defina el conjunto de coordenadas generalizadas independientes que va a usar para definir el Sistema
 - Encuentre la función Lagrangiana para este sistema.
 - Escriba las ecuaciones de movimiento.
 - Encuentre la posición de equilibrio del sistema y la frecuencia de pequeñas oscilaciones alrededor de esa posición.

3. Solución

- a. Claramente las tres masitas están restringidas a moverse en el plano de la figura, por lo que podemos decir que $z_1 = z_2 = z_3 = 0$ son tres ligaduras. Por otro lado, están restringidas a moverse sobre el aro, por lo que $r_1 = r_2 = r_3 = R$ son otras tres ligaduras. Además, si llamamos θ_{13} y θ_{23} a los ángulos fijos que forman las posiciones de m_1 y m_2 con la de m_3 , tenemos que $\theta_3 - \theta_1 = \theta_{13}$ y $\theta_3 - \theta_2 = \theta_{23}$ son otras dos restricciones. Por lo tanto, el sistema tiene 8 ligaduras .

- b. Antes de las restricciones, dado que hay 3 masas, el sistema tiene 9 grados de libertad. Pero, dadas las 8 restricciones, el sistema tiene un solo grado de libertad y una sola variable generalizada hace falta para describir el sistema. Usaré φ_3 , la posición de m_3 como mi conjunto de variables generalizadas.
- c. Claramente las velocidades de las tres masitas son las mismas: $v_1 = v_2 = v_3 = R\dot{\varphi}_3$, por lo que la función de energía cinética del sistema sería

$$T = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 + \frac{1}{2}m_3v_3^2 = \frac{3}{2}MR^2\dot{\varphi}_3^2,$$

donde $M = m_1 + m_2 + m_3$. Las posiciones verticales de cada una, respecto al centro del aro, serían

$$y_1 = -m_1g \cos \theta_1 = -m_1g \cos (\varphi_3 - \theta_{13}) \quad (9.91)$$

$$y_2 = -m_2g \cos \theta_2 = -m_2g \cos (\varphi_3 - \theta_{23}) \quad (9.92)$$

$$y_3 = -m_3g \cos \theta_3 = -m_3g \cos \varphi_3 \quad (9.93)$$

de forma que la función de energía potencial del sistema sería

$$V = -g(m_1 \cos(\varphi_3 - \theta_{13}) + m_2 \cos(\varphi_3 - \theta_{23}) + m_3 \cos \varphi_3).$$

Así, la lagrangiana del sistema sería

$$L = \frac{3}{2}MR^2\dot{\varphi}_3^2 + g(m_1 \cos(\varphi_3 - \theta_{13}) + m_2 \cos(\varphi_3 - \theta_{23}) + m_3 \cos \varphi_3).$$

- d. Nótese que

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_3} = 3MR^2\dot{\varphi}_3, \quad (9.94)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_3} \right) = 3MR^2\ddot{\varphi}_3, \quad (9.95)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi_3} = -g(m_1 \sin(\varphi_3 - \theta_{13}) + m_2 \sin(\varphi_3 - \theta_{23}) + m_3 \sin \varphi_3) \quad (9.96)$$

Así, la ecuación de movimiento del sistema está dado por la ecuación de Euler-Lagrange para φ_3 :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_3} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi_3} = 0 \implies 3MR^2\ddot{\varphi}_3 + g(m_1 \sin(\varphi_3 - \theta_{13}) + m_2 \sin(\varphi_3 - \theta_{23}) + m_3 \sin \varphi_3) = 0$$

- e. La posición de equilibrio $\varphi_3 = \varphi_{eq}$ del sistema es tal que $\dot{\varphi}_3 = 0$.
Expandiendo, esta condición sigue que

$$m_1 (\sin \varphi_{eq} \cos \theta_{13} - \cos \varphi_{eq} \sin \theta_{13}) + m_2 (\sin \varphi_{eq} \cos \theta_{23} - \cos \varphi_{eq} \sin \theta_{23}) + m_3 \sin \varphi_{eq} = 0.$$

Despejando,

$$\varphi_{eq} = \arctan \left(\frac{m_1 \sin \theta_{13} + m_2 \sin \theta_{23}}{m_1 \cos \theta_{13} + m_2 \cos \theta_{23} + m_3 \sin \varphi_{eq}} \right).$$

Ahora, para encontrar la frecuencia de pequeñas oscilaciones alrededor de φ_{eq} , expandamos $\sin(\varphi_3 - \theta)$ en series de Taylor alrededor de φ_{eq} :

$$\sin(\varphi_3 - \theta) = \sin(\varphi_{eq} - \theta) + \cos(\varphi_{eq} - \theta)(\varphi_3 - \varphi_{eq}) + O(\varphi_3 - \varphi_{eq})^2.$$

Despreciando los términos de orden 2 en adelante (considerando pequeñas oscilaciones) y sustituyendo en la ecuación de movimiento, tenemos

$$3MR^2 \ddot{\varphi}_3 + g (m_1 (\sin(\varphi_{eq} - \theta_{13}) + \cos(\varphi_{eq} - \theta_{13})(\varphi_3 - \varphi_{eq})) + m_2 (\sin(\varphi_{eq} - \theta_{23}) + \cos(\varphi_{eq} - \theta_{23})(\varphi_3 - \varphi_{eq})) + m_3 \sin \varphi_{eq} = 0.$$

Organizando, se obtiene

$$\ddot{\varphi}_3 + \omega^2 \varphi_3 + C = 0,$$

donde

$$\omega^2 = \frac{g}{3MR^2} (m_1 \cos(\varphi_{eq} - \theta_{13}) + m_2 \cos(\varphi_{eq} - \theta_{23}) + m_3 \cos \varphi_{eq})$$

es la frecuencia de las pequeñas oscilaciones pedida y

$$C = \frac{g}{3MR^2} (m_1 \sin(\varphi_{eq} - \theta_{13}) - m_1 \cos(\varphi_{eq} - \theta_{13}) \varphi_{eq} + m_2 \sin(\varphi_{eq} - \theta_{23}) - m_2 \cos(\varphi_{eq} - \theta_{23}) \varphi_{eq})$$

es una constante.

4. Partícula en campo electromagnético. De los resultados básicos de la teoría electromagnética se sabe que una partícula de masa m moviéndose con velocidad \vec{v} respecto a un campo electromagnético, puede describirse mediante el siguiente lagrangiano

$$L = \frac{1}{2}mv^2 - q\phi + q\vec{A} \cdot \vec{v},$$

donde los campos eléctrico \vec{E} y magnético \vec{B} pueden derivarse a partir de los campos ϕ (el potencial escalar) y \vec{A} (el potencial vectorial) como

$$\vec{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \quad (9.97)$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}. \quad (9.98)$$

Encuentre las ecuaciones de Euler-Lagrange para la partícula. Hágalo para una sola coordenada generalizada (x , por ejemplo) y generalice el resultado a tres dimensiones. Evidentemente, deberá obtener las ecuaciones de Lorentz.

4. Solución

Escribamos L explícitamente en coordenadas cartesianas como

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - q\phi(x, y, z) + q(A_x\dot{x} + A_y\dot{y} + A_z\dot{z}).$$

De igual manera, se satisface para los campos que

$$E_x = -\frac{\partial\phi}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial t}, \quad (9.99)$$

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \quad (9.100)$$

$$B_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \quad (9.101)$$

$$B_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}. \quad (9.102)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -q\frac{\partial\phi}{\partial x} + q\left(\frac{\partial A_x}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial A_y}{\partial x}\dot{y} + \frac{\partial A_z}{\partial x}\dot{z}\right), \quad (9.103)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\ddot{x} + qA_x, \quad (9.104)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = m\ddot{x} + q\frac{dA_x}{dt} = m\ddot{x} + q\left(\frac{\partial A_x}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial A_x}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial A_x}{\partial z}\dot{z} + \frac{\partial A_x}{\partial t}\right) \quad (9.105)$$

Así, la ecuación de Euler-Lagrange para x se escribe como

$$m\ddot{x} + q \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial A_x}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial A_x}{\partial z} \dot{z} + \frac{\partial A_x}{\partial t} \right) + q \frac{\partial \phi}{\partial x} - q \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial A_y}{\partial x} \dot{y} + \frac{\partial A_z}{\partial x} \dot{z} \right) \quad (9.106)$$

$$m\ddot{x} + q \left(\frac{\partial A_x}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) - q \left[\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \dot{y} + \left(\frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z} \right) \dot{z} \right] \quad (9.107)$$

$$m\ddot{x} - qE_x - q(B_z \dot{y} - B_y \dot{z}) \quad (9.108)$$

$$m\ddot{x} - qE_x - q(\vec{v} \times \vec{B})_x \quad (9.109)$$

Nótese que esto se puede reescribir como la fuerza en la dirección x que actúa sobre la partícula:

$$F_x = qE_x + q(\vec{v} \times \vec{B})_x,$$

donde evidentemente qE_x es la fuerza ejercida por el campo eléctrico en la dirección x , $q(\vec{v} \times \vec{B})_x$ es la ejercida por el campo magnético en la dirección x y, por lo tanto, F_x es la componente x de la fuerza de Lorentz. El resultado se puede generalizar y escribir

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}.$$

5. **Función de disipación de Rayleigh.** Cuando se estudia el movimiento de un cuerpo en un medio resistivo, la fricción suele modelarse como una función que depende linealmente de la velocidad del objeto relativa al medio. Siendo la fricción una fuerza no conservativa, es claro que no puede derivarse de un potencial escalar dependiente de la posición. Aún así, es posible derivarla a través de la *función de disipación de Rayleigh*

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^N k (\dot{x}_l^2 + \dot{y}_l^2 + \dot{z}_l^2),$$

donde la suma se hace sobre las N partículas del sistema y k es una constante que depende entre otras cosas de la geometría del objeto. Entonces la fuerza de fricción sobre la i -ésima partícula se escribe como

$$\vec{F}_f^i = \nabla_v^i \mathcal{F}.$$

Debe notarse que en la expresión anterior, el operador gradiente actúa sobre las velocidades, no sobre las posiciones como es usual con las fuerzas conservativas. Cuando fuerzas derivables de una función de disipación como la de Rayleigh están presentes, las ecuaciones de Euler-Lagrange se escriben así

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{q}_j},$$

donde la energía potencial presente en el Lagrangiano contiene aquellos potenciales dependientes de las posiciones y también puede contener aquellos que dependen de las velocidades.

- Obtenga la ecuación de movimiento para una partícula cayendo verticalmente y desde el reposo bajo la influencia de la gravedad y de una fuerza de fricción derivable de una función de disipación de la forma $kv^2/2$.
- Integre la ecuación para obtener la velocidad como una función del tiempo y muestre que en el límite cuando $t \rightarrow \infty$ la velocidad de la partícula toma un valor constante igual a mg/k .

5. Solución

- Claramente en este caso $N = 1$ y $\mathcal{F} = kv^2/2$, como se dice. Además, si ubicamos nuestro sistema coordenado tal que el plano xy coincide con el suelo y el eje z con la línea de caída de la partícula, tenemos como ligaduras $x = y = 0$. De esta manera, la lagrangiana del sistema está dado por

$$L = \frac{1}{2}m\ddot{z}^2 - mgz$$

y la ecuación de movimiento en el sistema disipativo es

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \right) - \frac{\partial L}{\partial z} = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{z}} \quad (9.110)$$

$$m\ddot{z} + mg = -k\dot{z} \quad \Rightarrow \quad \ddot{z} + \frac{k}{m}\dot{z} + g = 0. \quad (9.111)$$

- Reescribamos la ecuación de movimiento como

$$\frac{d\dot{z}}{dt} = - \left(\frac{k}{m}\dot{z} + g \right).$$

Separando variables,

$$\frac{d\dot{z}}{\frac{k}{m}\dot{z} + g} = -dt.$$

Integramos el tiempo entre 0 y t y la velocidad entre 0 (se suelta desde el reposo) y v :

$$\frac{m}{k} \ln \left(\frac{\frac{k}{m}v + g}{g} \right) = -t.$$

Despejamos v :

$$v(t) = \frac{mg}{k} \left(e^{-\frac{m}{k}t} - 1 \right).$$

Claramente cuando $t \rightarrow \infty$, $v \rightarrow mg/k$, constante. Esta rapidez se conoce como rapidez terminal de un objeto en caída libre.

6. **Partícula en un aro hueco rotante.** Un tubo cilíndrico delgado y hueco es doblado para formar un anillo circular hueco de masa m y radio R . El anillo está atado por medio de un par de radios sin masa a un eje vertical alrededor del cuál puede rotar sin fricción sobre un plano horizontal. Dentro del anillo, un objeto puntual P de masa m (con la misma masa del anillo) es libre de moverse sin fricción pero en todo momento está conectada a un punto H de el anillo por medio de un resorte sin masa que ejerce sobre P una fuerza restitutiva de magnitud $k\Delta s$ donde Δs es la longitud del arco HP . Tome a las variables generalizadas como los ángulos θ y ϕ definidas como se muestra en la figura. Desprecie los efectos de la gravedad.

- a) Escriba el lagrangiano del sistema en función de las variables $\xi = (\phi + \theta) / \sqrt{2}$ y $\eta = (\phi - \theta) / \sqrt{2}$.
- b) Derive las ecuaciones de movimiento para ξ y η .
- c) Integre las ecuaciones de movimiento (para ξ y η) para las siguientes condiciones iniciales: en $t = 0$, $\theta = -\pi/4$, $\phi = \pi/4$ y $\dot{\theta} = \dot{\phi} = 0$.
- d) Finalmente, escriba la solución de las variables originales $\theta(t)$ y $\phi(t)$.

6. Solución

- a. La energía cinética del sistema se puede escribir como la suma de la energía cinética rotacional del anillo más la transnacional del objeto:

$$T = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mR^2\dot{\phi}^2.$$

La energía potencial del sistema es la que se puede almacenar en el resorte y se puede escribir como

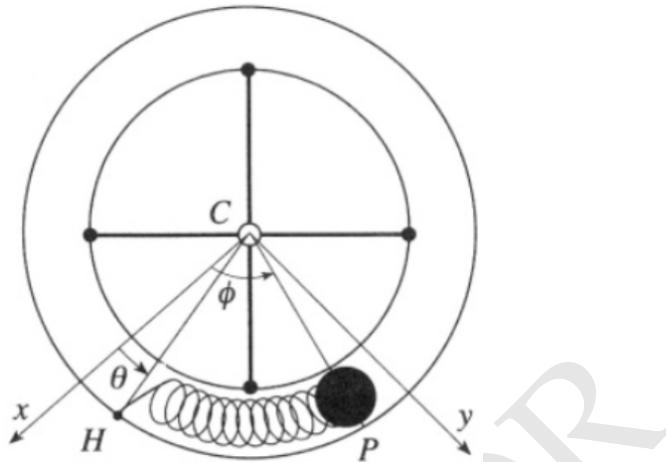


Figura 9.19: Un canal con forma de dona tiene un cuerpo adentro atado a un resorte.

$$V = \frac{1}{2}k(\Delta s)^2 = \frac{1}{2}kR^2(\phi - \theta)^2.$$

Por lo tanto, la lagrangiana del sistema sería

$$L = T - V = \frac{1}{2}mR^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2) - \frac{1}{2}kR^2(\phi - \theta)^2.$$

En términos de ξ y η , se tiene que $(\phi - \theta)^2 = 2\eta^2$ y que $\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 = \dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2$, por lo que

$$L = \frac{1}{2}mR^2(\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2) - kR^2\eta^2.$$

b. Dado que ξ es cíclica, una ecuación de movimiento es

$$p_\xi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}} = mR^2\dot{\xi} = \text{constante.}$$

Ahora, para η , tenemos

$$\frac{\partial L}{\partial \eta} = -2kR^2\eta, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}} = mR^2\dot{\eta}, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}}\right) = mR^2\ddot{\eta},$$

de manera que la otra ecuación de movimiento es

$$mR^2\ddot{\eta} + 2kR^2\eta = 0 \quad \text{o mejor} \quad \ddot{\eta} + \frac{2k}{m}\eta = 0,$$

que es la ecuación de un movimiento armónico simple para η con frecuencia $\omega = \sqrt{2k/m}$.

c. La solución de estas ecuaciones es, entonces, sencilla:

$$\eta(t) = A \cos(\omega t + \varphi), \quad (9.112)$$

$$\dot{\eta}(t) = -A\omega \sin(\omega t + \varphi). \quad (9.113)$$

Dado que $\dot{\theta}(0) = \dot{\phi}(0) = 0$, entonces $\dot{\eta}(0) = 0$ también, por lo que $\varphi = 0$. Y dado que $\theta(0) = -\pi/4$, $\phi(0) = \pi/4$, entonces $\eta(0) = \pi/2\sqrt{2}$, por lo que $A = \pi/2\sqrt{2}$. Además, dado que $\dot{\eta}(0) = \dot{\xi}(0) = 0$, entonces el momento canónico asociado a ξ , que es constante, es $p_\xi = 0$ también, por lo que

$$\dot{\xi} = 0 \implies \xi(t) = C,$$

pero $\xi(0) = 0$, por lo que $C = 0$. Así,

$$\eta(t) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \cos \sqrt{\frac{2k}{m}} t \quad \text{y} \quad \xi(t) = 0.$$

d. Claramente

$$\phi(t) = \frac{\xi(t) + \eta(t)}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4} \cos \sqrt{\frac{2k}{m}} t \quad \text{y} \quad \theta(t) = \frac{\xi(t) - \eta(t)}{\sqrt{2}} = -\frac{\pi}{4} \cos \sqrt{\frac{2k}{m}} t.$$

Esta solución quiere decir que, mientras el anillo gira en alguna dirección, el objeto debe estar girando en la otra, necesariamente, para conservar la posición del centro de masa —que inicialmente estaba en reposo— y la cantidad de movimiento.

7. **Cilindros no deslizantes.** Un cilindro sólido de radio R descansa sobre otro igual que a su vez se apoya sobre el suelo en equilibrio inestable.

Si el sistema se perturba levemente y no hay deslizamiento entre las superficies de contacto, demuestre que mientras los cilindros permanecen en contacto el ángulo θ que forma la línea que une los centros con la vertical satisface

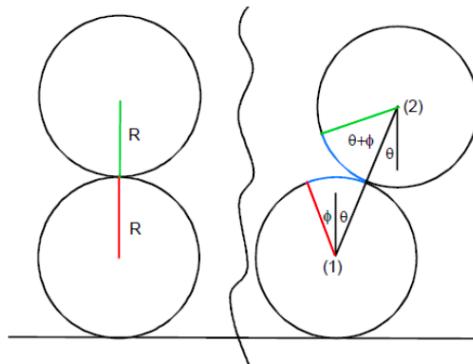


Figura 9.20: Dos cilindros en contacto.

$$\dot{\theta}^2 = \frac{12g(1 - \cos\theta)}{R(17 + 4\cos\theta - 4\cos^2\theta)}$$

7. Solución

Nótese que mientras el radio vector del cilindro 1 gira un ángulo ϕ , el radio vector del cilindro 2 gira un ángulo $2\theta + \phi$. Estos ángulos determinan las velocidades angulares $\omega_1 = \dot{\phi}$ y $\omega_2 = 2\dot{\theta} + \dot{\phi}$ de los cilindros alrededor de su eje de simetría. Ahora hallemos las velocidades del centro de masa de cada uno. Puesto que el cilindro 1 gira un ángulo ϕ , entonces se desplaza una coordenada

$$x_1 = -R\phi,$$

mientras que su cordenada vertical se mantiene en

$$y_1 = 0$$

(fijando el eje $y = 0$ sobre el centro del cilindro 1). Ahora note que la distancia horizontal entre los centros de los cilindros es $2R \sin\theta$ y la vertical $2R \cos\theta$, de manera que las coordenadas del centro del cilindro 2 son

$$x_2 = -R\phi + 2R \sin\theta, \quad (9.114)$$

$$y_2 = 2R \cos\theta. \quad (9.115)$$

Así, las velocidades de cada cilindro son tales que

$$v_1^2 = R^2 \dot{\phi}^2, \quad (9.116)$$

$$v_2^2 = (-R\dot{\phi} + 2R\dot{\theta} \cos \theta)^2 + 4R^2\dot{\theta}^2 \sin^2 \theta. \quad (9.117)$$

Escribamos la energía cinética del sistema:

$$T = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}I\omega_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{2}I\omega_2^2.$$

Dado que el momento de inercia de un cilindro de masa m y radio R alrededor de su eje es $I = mR^2/2$, reemplazando se sigue

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}mR^2\dot{\phi}^2 + \frac{1}{4}mR^2\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}m((-R\dot{\phi} + 2R\dot{\theta} \cos \theta)^2 + 4R^2\dot{\theta}^2) \\ \text{expandiendo} &\rightarrow = \frac{3}{4}mR^2\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}m(R^2\dot{\phi}^2 - 4R^2\dot{\phi}\dot{\theta} \cos \theta + 4R^2\dot{\theta}^2) + \frac{1}{4}mR^2(\\ \text{sumando términos semejantes} &\rightarrow = \frac{3}{2}mR^2\dot{\phi}^2 + 3mR^2\dot{\theta}^2 - 2mR^2\dot{\phi}\dot{\theta} \cos \theta + mR^2\dot{\theta}\dot{\phi}. \end{aligned}$$

Es claro que la energía potencial del sistema (dado el nivel cero de potencial en el centro del disco 1) es

$$V = 2mgR \cos \theta.$$

Así, la lagrangiana del sistema es

$$L = \frac{3}{2}mR^2\dot{\phi}^2 + 3mR^2\dot{\theta}^2 - 2mR^2\dot{\phi}\dot{\theta} \cos \theta + mR^2\dot{\phi}\dot{\theta} - 2mgR \cos \theta.$$

Nótese que la coordenada ϕ es cíclica, de manera que

$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = 3mR^2\dot{\phi} - 2mR^2\dot{\theta} \cos \theta + mR^2\dot{\theta}.$$

Dado que en el instante inicial $\dot{\theta}_0 = \dot{\phi}_0 = 0$, entonces $p_\phi = 0$ y se cumple

$$\dot{\phi} = \frac{2}{3}\dot{\theta} \cos \theta - \frac{1}{3}\dot{\theta}.$$

Ahora, dada la simetría temporal en la función lagrangiana, sabemos que la energía total en este sistema debe conservarse. Luego

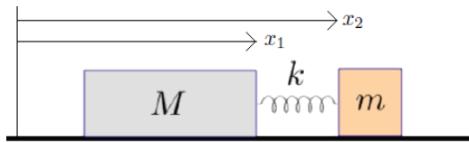


Figura 9.21: Dos masas unidas por resortes que pueden deslizar.

$$E = \frac{3}{2}mR^2\dot{\phi}^2 + 3mR^2\dot{\theta}^2 - 2mR^2\dot{\phi}\dot{\theta} \cos \theta + mR^2\dot{\theta}^2 + 2mgR \cos \theta = 2mgR.$$

Reemplazando $\dot{\phi}$, tenemos

$$\begin{aligned} & \frac{3}{2} \left(\frac{2}{3}\dot{\theta} \cos \theta - \frac{1}{3}\dot{\theta} \right)^2 + 3\dot{\theta}^2 - 2 \left(\frac{2}{3}\dot{\theta} \cos \theta - \frac{1}{3}\dot{\theta} \right) \dot{\theta} \cos \theta + \dot{\theta} \\ & \text{distribuyendo} \rightarrow \frac{2}{3}\dot{\theta}^2 \cos^2 \theta - \frac{2}{3}\dot{\theta}^2 \cos \theta + \frac{1}{6}\dot{\theta}^2 + 3\dot{\theta}^2 - \frac{4}{3}\dot{\theta}^2 \cos^2 \theta + \frac{2}{3}\dot{\theta}^2 \cos \theta \end{aligned}$$

sumando términos semejantes $\rightarrow 4\dot{\theta}^2 \cos^2 \theta - 4\dot{\theta}^2 \cos \theta + \dot{\theta}^2 + 18\dot{\theta}^2 - 8\dot{\theta}^2 \cos^2 \theta + 4\dot{\theta}^2 \cos \theta + \dots$

$$\text{despejando } \dot{\theta}^2 = \frac{12g(1 - \cos \theta)}{R(17 + 4\cos \theta - 4\cos^2 \theta)}.$$

8. **Bloques unidos por un resorte.** Dos bloques están conectados por un resorte de constante elástica k y están libres de moverse sobre una superficie horizontal sin fricción. La longitud natural del resorte es a .
- Escriba el lagrangiano del sistema y obtenga la ecuación de movimiento de cada bloque.
 - Encuentre las cantidades conservadas del sistema.

8. Solución

Dadas las coordenadas generalizadas x_1 y x_2 mostradas en la figura, la función de energía cinética del sistema es

$$T = \frac{1}{2}M\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2.$$

Siendo la elongación del resorte entre las masas $\Delta s = (x_2 - x_1 - a)$, la función de energía potencial del sistema es

$$V = \frac{1}{2}k(x_2 - x_1 - a)^2.$$

Luego la lagrangiana viene dada por

$$L = \frac{1}{2}M\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 - \frac{1}{2}k(x_2 - x_1 - a)^2.$$

Las ecuaciones de Euler-Lagrange para cada una de las variables generalizadas se escriben como

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_1} = 0 \quad \Rightarrow \quad M\ddot{x}_1 - k(x_2 - x_1 - a) = 0,$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_2} = 0 \quad \Rightarrow \quad m\ddot{x}_2 + k(x_2 - x_1 - a) = 0.$$

Dado que las variables que describen el sistema son indenpendientes entre sí, y el lagrangiano no depende explícitamente del tiempo la constante de Jacobi:

$$h = T + V = \frac{1}{2}M\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}k(x_2 - x_1 - a)^2$$

es una cantidad conservada y coincide con la energía mecánica del sistema. Por otro lado, si el lagrangiano es covariante bajo las r -transformaciones espaciales $\{q_j \rightarrow q_j + \epsilon K_j(\{q_k\})\}_r$, la cantidad $P(\{q_j\}_r, \{\dot{q}_j\}_r) = \sum_{j=1}^r \partial L / \partial \dot{q}_j K_j$ se conserva. Es decir, si al realizar un pequeño cambio en las posiciones el lagrangiano mantiene su estructura inicial, se conserva. Miremos un cambio arbitrario de una de las variables generalizadas, $q'_k = q_k + \epsilon$. En este caso $K_k = 1$ y de acuerdo al teorema de Noether la cantidad conservada será

$$p_k \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$$

$$L = \frac{1}{2}M(x'_1 + \epsilon)^2 + \frac{1}{2}m(x'_2 + \epsilon)^2 - \frac{1}{2}k(x'_2 + \epsilon - x'_1 - \epsilon - a)^2.$$

Luego,

$$L = \frac{1}{2}M(x'_1)^2 + \frac{1}{2}M(\epsilon)^2 + M\dot{x}'_1\epsilon + \frac{1}{2}m(x'_2)^2 + \frac{1}{2}m(\epsilon)^2 + m\dot{x}'_2\epsilon - \frac{1}{2}k(x'_2 - x'_1 - a)^2.$$

Para ϵ muy pequeños,

$$L = T - V = \frac{1}{2}M\dot{x}'_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}'_2^2 + \frac{1}{2}k(x'_2 - x'_1)^2.$$

Esto quiere decir que el momento lineal del sistema $M\dot{x}_1 + m\dot{x}_2$ se conserva, debido a que el lagrangiano es covariante bajo transformaciones espaciales.

9. **El péndulo doble.** Considere el sistema de dos masas m_1 y m_2 unidas por dos barras sin masa de longitudes l_1 y l_2 como se muestra.

- Encuentre las ecuaciones de movimiento.
- Soluciónelas numéricamente y realice una animación que simule el movimiento del sistema para las condiciones:

$$l_1 = 0,5 \text{ m} \quad (9.125)$$

$$l_2 = 1,0 \text{ m} \quad (9.126)$$

$$m_1 = 1,5 \text{ kg} \quad (9.127)$$

$$m_2 = 1,0 \text{ kg} \quad (9.128)$$

$$\theta_1(0) = 1,3 \frac{\pi}{2} \text{ rad} \quad (9.129)$$

$$\theta_2(0) = \dot{\theta}_1(0) = \dot{\theta}_2(0) = 0 \quad (9.130)$$

c) Grafique $\dot{\theta}_1(t)$.

d) Vuelva a solucionar las ecuaciones de movimiento cambiando únicamente $\theta_1(0) = 1,3 \frac{\pi}{2} + 0,01 \text{ rad}$.

d) Vuelva a graficar $\dot{\theta}_1(t)$ y compare con la gráfica anterior. Discuta.

9. Solución

Escogiendo el origen del sistema de coordenadas en el pivote del péndulo, las posiciones y velocidades de cada una de las masas son

$$x_1 = l_1 \sin \theta_1, \quad (9.131)$$

$$y_1 = -l_1 \cos \theta_1, \quad (9.132)$$

$$x_2 = l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin \theta_2, \quad (9.133)$$

$$y_2 = -l_1 \cos \theta_1 - l_2 \cos \theta_2, \quad (9.134)$$

$$v_1^2 = \dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 = (l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1)^2 + (l_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1)^2 = l_1^2 \dot{\theta}_1^2, \quad (9.135)$$

$$v_2^2 = \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 = (l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + l_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2)^2 + (l_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 + l_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2)^2 \quad (9.136)$$

$$= l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + 2l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 (\cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2), \quad (9.137)$$

$$= l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + 2l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2). \quad (9.138)$$

De esta manera, la energía potencial y cinética del sistema son

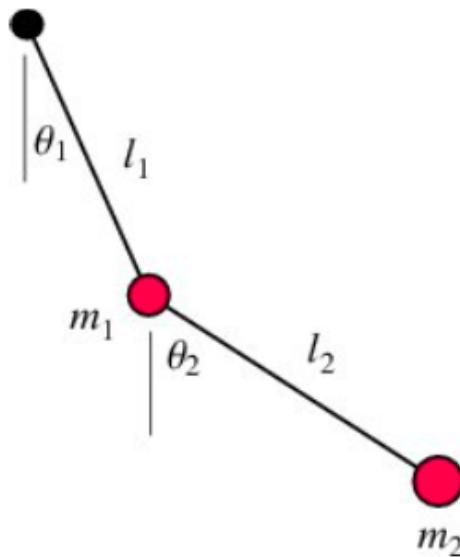


Figura 9.22: Péndulo doble.

$$V = m_1 gy_1 + m_2 gy_2 \quad (9.139)$$

$$= -(m_1 + m_2) gl_1 \cos \theta_1 + m_2 gl_2 \cos \theta_2, \quad (9.140)$$

$$T = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \quad (9.141)$$

$$= \frac{1}{2} (m_1 + m_2) l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \quad (9.142)$$

y el lagrangiano es

$$L = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + (m_1 + m_2) gl_1 \cos \theta_1 + m_2 gl_2 \cos \theta_2$$

Las ecuaciones de movimiento del sistema para θ_1 y θ_2 son

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_1} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \theta_2} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} = 0.$$

Notemos que

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = -m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - (m_1 + m_2) g l_1 \sin \theta_1, \quad (9.143)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \ddot{\theta}_1} = (m_1 + m_2) l_1^2 \dot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2), \quad (9.144)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = (m_1 + m_2) l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 [\ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) - \dot{\theta}_2 (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) \sin(\theta_1 - \theta_2)], \quad (9.145)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_2} = m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - m_2 g l_2 \sin \theta_2, \quad (9.146)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} = m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2), \quad (9.147)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} = m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 [\ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) \sin(\theta_1 - \theta_2)], \quad (9.148)$$

y por lo tanto las ecuaciones de movimiento son

$$m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - (m_1 + m_2) g l_1 \sin \theta_1 + (m_1 + m_2) l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 [\ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) - \dot{\theta}_2 (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) \sin(\theta_1 - \theta_2)] = 0$$

y

$$m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - m_2 g l_2 \sin \theta_2 - m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 [\ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) \sin(\theta_1 - \theta_2)] = 0$$

10. **Cicloide.** Una partícula de masa m y carga eléctrica e se mueve en un campo electrostático uniforme cuyo potencial es $\varphi = Ex_1$ y un campo magnético uniforme cuyo potencial vectorial es $\vec{A} = Bx_1 \hat{i}$, donde E y B son constantes.
- Escriba el lagrangiano y muestre que el movimiento es a lo largo de cicloides; más específicamente, que es un movimiento circular uniforme en el plano xy superpuesto por un movimiento con velocidad constante \vec{v} en el plano yz .
 - Escriba la rapidez angular ω del movimiento circular y la componente v_y del movimiento lineal, ambos en términos de las condiciones iniciales.
 - Asuma el la componente $v_z = 0$. Encuentre condiciones ideales para los siguientes tres casos:
 - La partícula a veces se mueve en la dirección opuesta a \vec{v} .
 - La partícula ocasionalmente está en reposo.
 - La partícula nunca se mueve en la dirección opuesta a \vec{v} .

- IV. Grafique los tres tipos de trayectorias del inciso anterior.
- e. Encuentre las condiciones iniciales para las cuales la parte circular del movimiento se elimina, por lo que la partícula se moverá con velocidad constante en el plano yz . Compruebe que esto sí sucede mediante una gráfica de la situación.

10. Solución

Recordemos que el lagrangiano de una partícula de carga e en un campo electromagnético es

$$L = T - e\phi + e\vec{v} \cdot \vec{A}.$$

Escribiendo la velocidad de la partícula como $\vec{v} = \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} + \dot{z}\hat{k}$, el lagrangiano queda

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - eEx + eBx\dot{y}.$$

Escribiendo las ecuaciones de Lagrange como $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i}$ obtenemos

$$\text{para } x: m\ddot{x} + eE - eB\dot{y} = 0 \quad (9.149)$$

$$\text{para } y: m\ddot{y} + eB\dot{x} = 0 \quad (9.150)$$

$$\text{para } z: \dot{z} = \text{constante}. \quad (9.151)$$

La solución para z es inmediata:

$$z = \dot{z}_0 t + z_0.$$

Derivando la ecuación para x con respecto al tiempo obtenemos

$$\ddot{y} = \frac{m}{eB} \frac{d\dot{x}}{dt}$$

y reemplazando este resultado en la ecuación para y obtenemos la ecuación diferencial para \dot{x} :

$$\frac{d^2\dot{x}}{dt^2} + \left(\frac{eB}{m}\right)^2 \dot{x} = 0,$$

cuya solución es

$$\dot{x} = A \sin(\omega t + \varphi),$$

donde $\omega = \sqrt{eB/m}$. Reemplazando en la ecuación para x da lugar a

$$\dot{y} = A \cos(\omega t + \varphi) + \frac{E}{B}.$$

Al integrarlas obtenemos la solución para x y y :

$$x = -\frac{A}{\omega} \cos(\omega t + \varphi) + C_1, \quad (9.152)$$

$$y = \frac{A}{\omega} \sin(\omega t + \varphi) + \frac{E}{B}t + C_2, \quad (9.153)$$

donde A , φ , C_1 y C_2 son constantes que dependen de las condiciones iniciales de posición y velocidad, así:

$$\dot{x}_0 = A \sin \varphi \quad (9.154)$$

$$\dot{y}_0 = A \cos \varphi + E/B \quad (9.155)$$

$$x_0 = -\frac{A}{\omega} \cos \varphi + C_1 \quad (9.156)$$

$$y_0 = \frac{A}{\omega} \sin \varphi + C_2. \quad (9.157)$$

Claramente, se ve que el primer término de las soluciones para x y y describen un movimiento armónico simple con rapidez angular $\omega = \sqrt{eB/m}$, mientras que el segundo término de la solución para x , junto con el segundo y tercer término de la solución para y describen una línea recta en dirección de y y con rapidez constante $V_2 = E/B$.

Eliminando la tercera componente del movimiento (haciendo $\dot{z}_0 = 0$), podemos darnos cuenta de que la dirección de movimiento de la partícula con respecto a \vec{V} (la velocidad constante en el plano xy) depende de la relación entre A y E/B , así:

Si $A > E/B$ la partícula a veces se mueve en la dirección opuesta a \vec{V} . Si $A < E/B$ la partícula nunca se mueve en la dirección opuesta a \vec{V} . Si $A = E/B$ la partícula ocasionalmente llega al reposo.

Las condiciones iniciales para las cuales la parte circular del movimiento se elimina son tales que

$$x = x_0 \quad (9.158)$$

$$y = \frac{E}{B} t + y_0 \quad (9.159)$$

$$\dot{x} = 0 \quad (9.160)$$

$$\dot{y} = \frac{E}{B} \quad (9.161)$$

11. **Órbitas elípticas.** Muestre que para movimiento elíptico, con semieje a y excentricidad e en un potencial gravitacional de la forma $-k/r$, la velocidad radial puede ser escrita como

$$\dot{r} = \frac{\omega a}{r} \sqrt{a^2 e^2 - (r - a)^2},$$

dónde $\omega = \left(\frac{k}{m_r a^3} \right)^{1/2}$

11. Solución

Recordemos, primero, que la energía total del problema de fuerzas centrales para dos cuerpos, vistos desde su centro de masa, se puede escribir como

$$E = \frac{1}{2} m_r \dot{r}^2 + U(r) + \frac{l^2}{2m_r r^2}.$$

De aquí, la velocidad radial puede ser escrita como

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2}{m_r} \left(E - U(r) - \frac{l^2}{2m_r r^2} \right)} = \sqrt{\frac{2}{m_r} \left(E + \frac{k}{r} - \frac{l^2}{2m_r r^2} \right)}.$$

Recordemos también que, al solucionar el problema, la excentricidad de la órbita se puede escribir como

$$e = \sqrt{1 + \frac{2l^2 E}{m_r k^2}},$$

de donde

$$E = \frac{(e^2 - 1) m_r k^2}{2l^2}.$$

Pero además, de la ecuación de *vis-viva*, sabemos que la energía total de estos sistemas es

$$E = -\frac{k}{2a},$$

por lo que, igualando estas últimas dos expresiones, se obtiene el momento angular como

$$l^2 = \frac{a(1-e^2)m_r k^2}{k}.$$

Reemplazando estos resultados en la velocidad radial, se sigue

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2}{m_r} \left(-\frac{k}{2a} + \frac{k}{r} - \frac{a(1-e^2)k}{2r^2} \right)}.$$

Sacando factor común $k/2ar^2$,

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{k}{m_r ar^2} (-r^2 + 2ar - a^2(1-e^2))}.$$

Reorganizando,

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{k}{m_r ar^2} (a^2 e^2 - (r-a)^2)}.$$

Multiplicando y dividiendo entre a^2 ,

$$\dot{r} = \frac{a}{r} \sqrt{\frac{k}{m_r a^3} (a^2 e^2 - (r-a)^2)}.$$

Definiendo $\omega = \left(\frac{k}{m_r a^3}\right)^{1/2}$,

$$\dot{r} = \frac{\omega a}{r} \sqrt{a^2 e^2 - (r-a)^2},$$

que era lo que queríamos demostrar.

11. Solución

- Dado que se puede hablar de un potencial, la fuerza debe ser conservativa y debe satisfacer la condición

$$\vec{F} = -\nabla U.$$

Como U es radial, luego podemos decir que

$$F(r) = -\frac{\partial U(r)}{\partial r} = -k \left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{ar} \right) e^{-r/a}.$$

- b. Recordemos que el potencial efectivo del problema de fuerzas centrales se escribe como

$$U_{eff} = U(r) + \frac{l}{2m_r r^2}.$$

Así, el potencial efectivo asociado a la interacción de núcleos y partículas en el centro de las estrellas es de la forma

$$U_{eff} = -\frac{k}{r} e^{-r/a} + \frac{l}{2m_r r^2}.$$

```
%matplotlib inline
```

(Algoritmo 9.12)

```
import numpy as np
#tomemos l**2/2m como lm en la ecuacion
def Ueff(r,lm,k,a):
    return lm/r**2 - (k/r)*np.exp(-r/a)

r = np.linspace(0.1,3.0,100)
a = 5.
k = 1
lm= np.array([0.1,0.2,0.3,0.4,0.5])
U0 = Ueff(r,lm[0],k,a)
U1 = Ueff(r,lm[1],k,a)
U2 = Ueff(r,lm[2],k,a)
U3 = Ueff(r,lm[3],k,a)
U4 = Ueff(r,lm[4],k,a)

import matplotlib.pyplot as plt
plt.figure(figsize=(5,5))
plt.plot(r,U0, color = "b")
plt.plot(r,U1, color = "g")
plt.plot(r,U2, color = "y")
plt.plot(r,U3, color = "r")
plt.plot(r,U4, color = "black")
plt.xlabel("r")
```

```
plt.ylabel("l^2/2m")
plt.xlim(0,1)
plt.grid()
plt.show()
```

ver Figura 9.23

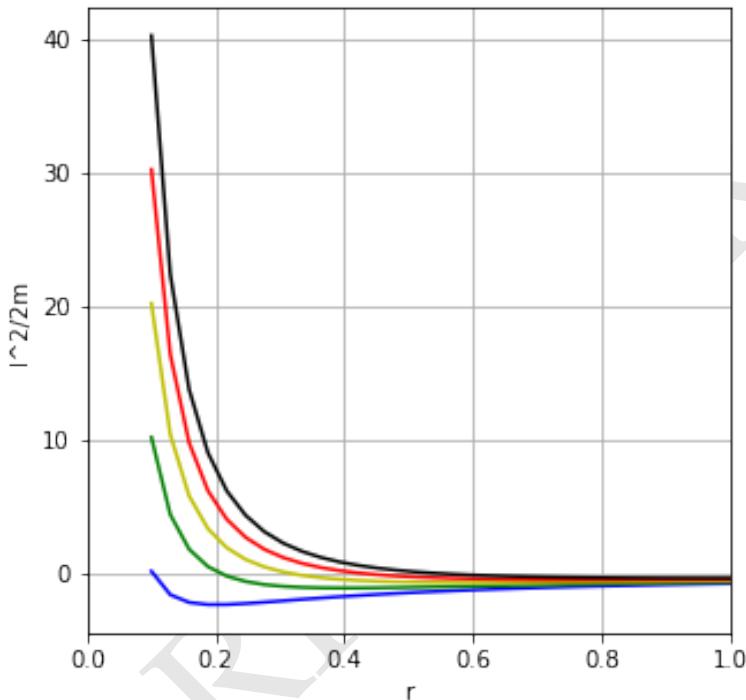


Figura 9.23: Figura correspondiente al código 9.12.

c. Nótese que

$$F'(r) = k \left(\frac{2}{r^3} + \frac{2}{ar^2} + \frac{1}{a^2r} \right) e^{-r/a},$$

que

$$\frac{F'(r)}{F(r)} = -\frac{\frac{2}{r^2} + \frac{2}{ar} + \frac{1}{a^2}}{\frac{1}{r} + \frac{1}{a}}$$

y que

$$\frac{F'(r)}{F(r)} + \frac{3}{r} = \frac{\frac{1}{r} + \frac{1}{a} - \frac{r}{a^2}}{\frac{1}{r} + \frac{1}{a}}.$$

Así, para el movimiento estable frente a una perturbación de la partícula en una órbita circular de radio $r = \rho$ en este potencial, se debe cumplir que

$$\frac{F'(\rho)}{F(\rho)} + \frac{3}{\rho} = \frac{\frac{1}{\rho} + \frac{1}{a} - \frac{\rho}{a^2}}{\frac{1}{\rho} + \frac{1}{a}} > 0,$$

esto es, que

$$\frac{a^2}{\rho^2} + \frac{a}{\rho} - 1 > 0,$$

o mejor, que

$$\left(\frac{a}{\rho} - \frac{\sqrt{5}-1}{2} \right) \left(\frac{a}{\rho} - \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \right) > 0.$$

dado que $a/\rho > 0$ y que $-1 - \sqrt{5} < 0$, entonces, para que se satisfaga la desigualdad, debe suceder necesariamente que

$$\frac{a}{\rho} - \frac{\sqrt{5}-1}{2} > 0,$$

o lo que es lo mismo, que

$$\frac{\rho}{a} < \frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

que era lo que queríamos.

BORRADOR

Capítulo 10

El formalismo hamiltoniano y la mecánica celeste

Resumen

En este último capítulo presentamos una introducción a una de las alternativas más poderosas a la mecánica newtoniana: el formalismo hamiltoniano. Las cantidades, principios y métodos de este formalismo han sido usados por más de 150 años no solo para describir los problemas mecánicos más diversos, incluyendo los de la mecánica celeste, sino también en áreas tan aparentemente distintas como la óptica, la relatividad o la teoría cuántica. Introduciremos aquí la función hamiltoniana y las ecuaciones canónicas de Hamilton, el espacio de fase, la teoría básica de transformaciones canónicas y el poderoso método de Hamilton-Jacobi. Como lo hicimos antes con el formalismo lagrangiano veremos algunas aplicaciones básicas del formalismo en Mecánica Celeste.

10.1. Motivación

Como hemos visto en el Capítulo anterior, el formalismo Lagrangiano ofrece innegables ventajas teóricas sobre el formalismo vectorial de la mecánica. Las cantidades implicadas son todas funciones escalares, normalmente más fáciles de manipular. Las fuerzas de restricción, que son difíciles de modelar resultan excluidas desde la descripción misma del sistema. Las constantes de movimiento pueden obtenerse pueden obtenerse a partir de simples consideraciones de simetría. Y por último, pero no menos importante, las ecuaciones de movimiento pueden obtenerse a partir de un principio *geométrico* (el Principio de Hamilton) lo que le otorga al formalismo una elegancia y belleza matemática superior a la del formalismo vectorial.

Sin embargo, en términos prácticos, el formalismo Lagrangiano todavía adolece de algunas limitaciones. Así por ejemplo, lagrangianos incluso muy sencillos pueden conducir a ecuaciones de movimiento intratables, tanto analíticamente, como numéricamente. En los sistemas de ejemplo descritos a continuación, ofrecemos un vistazo a las limitaciones del formalismo lagrangiano que justamente justifican la

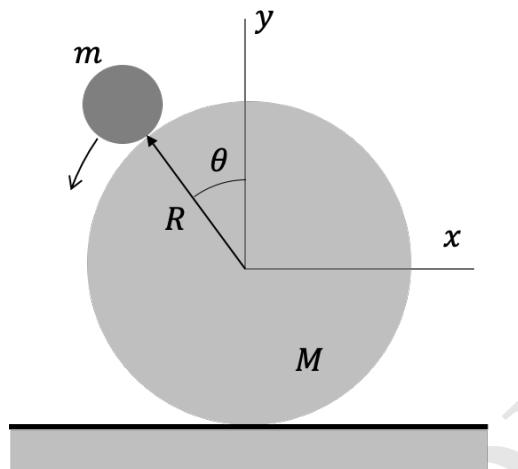


Figura 10.1: Sistema mecánico usado para ilustrar la complejidad de las ecuaciones de movimiento en el formalismo Lagrangiano, incluso de sistemas relativamente simples.

búsqueda de un nuevo formalismo en el que estas limitaciones puedan superarse. Ese nuevo formalismo es justamente el formalismo Hamiltoniano del que nos ocuparemos en este capítulo.

10.1.1. El problema de las ecuaciones de movimiento

Considere el sistema mostrado en la [Figura 10.1](#). En él, una partícula de masa m (partícula 1) puede rodar sin fricción sobre una esfera de masa M y radio R (partícula 2) que a su vez esta sobre una superficie horizontal dura sin fricción (es decir, puede deslizar sobre esa superficie).

El sistema tiene 2 grados de libertad (6 coordenadas cartesianas, 2 restricciones sobre la partícula 1 - movimiento sobre la esfera y movimiento en el plano del papel y 2 restricciones para la partícula 1 - movimiento en el plano y movimiento sobre el piso). Las variables generalizadas más convenientes para describir la dinámica del sistema son la posición angular θ de la partícula 1 sobre el partícula 2 y la coordenada x de la partícula 2.

En términos de estas variables generalizadas, las coordenadas cartesianas de la partícula 1 se pueden escribir como:

$$\begin{aligned} x_1 &= x - R \sin \theta \\ y_1 &= R \cos \theta \end{aligned}$$

Usando esta transformación el Lagrangiano del sistema resulta ser (ver Problemas al final del capítulo):

$$L_{\text{EE}} = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + R^2 \dot{\theta}^2 - 2R \dot{x} \dot{\theta} \cos \theta) - mgR \cos \theta$$

Reemplazando en las Ecuaciones de Euler Lagrange, podemos deducir las ecuaciones de movimiento del sistema como:

$$\begin{aligned}(M+m)\ddot{x} - mR \cos \theta \ddot{\theta} + mR \sin \theta \dot{\theta} &= 0 \\ r\ddot{\theta} - \ddot{x} \cos \theta - g \sin \theta &= 0\end{aligned}$$

¿Cuál es la solución a este sistema de ecuaciones?. Ciertamente la simplicidad mecánica del sistema original no se compara con la complejidad matemática de las ecuaciones de movimiento resultantes. Podría uno pensar que siempre es posible apelar a una solución numérica. Para esto último, sin embargo y como hemos mostrado a través de este libro, es necesario primero linearizar las ecuaciones de movimiento. Para hacerlo normalmente introducimos variables del tipo $v_x = \dot{x}$, $v_\theta = \dot{\theta}$ y despejamos las primeras derivadas de estas variables. En este caso sin embargo, las derivadas de las variables generalizadas están tan fuertemente acopladas que los despejes necesarios para escribir un conjunto de ecuaciones que sean fáciles de implementar como algoritmos no son tareas triviales.

La búsqueda de simetrías y cuadraturas no parece tampoco sencilla. No hay variables cíclicas, ni simetrías translacional o rotacional. A lo sumo podemos asegurar que la energía se conserva, de la que podríamos deducir al menos una cuadratura. En síntesis, incluso un sistema mecánico tan sencillo, usando el poderoso formalismo lagrangiano, parece lejos de poder resolverse.

10.1.2. Degeneración del espacio de configuración

Hay una propiedad más sutil que muestra la inconveniencia de los dos formalismos de la mecánica estudiados hasta aquí, el formalismo vectorial y el formalismo lagrangiano. Este inconveniente tiene que ver con una propiedad de los espacios geométricos sobre los que se definen las cantidades relativas en ambos formalismos. En el formalismo vectorial la dinámica se describe sobre el espacio de coordenadas (el espacio físico). En el formalismo lagrangiano la dinámica está referida al espacio de configuración (el espacio de las variables generalizadas).

En ambos formalismos, un punto en el espacio correspondiente (ver panel izquierdo de la Figura 10.2) representa tan solo una configuración posible del sistema, pero no su estado de movimiento completo. Es decir, si no se especifica la velocidad del sistema en el punto en cuestión y no se proveen las fuerzas o el Lagrangiano del sistema, por ese mismo punto del espacio coordenado o del espacio de configuración, pasan en principio infinitas trayectorias posibles. Llamamos a este problema la **degeneración del espacio de configuración**.

Es interesante anotar que la razón por la cual los sistemas dinámicos en el formalismo vectorial y en el formalismo Lagrangiano tienen esta característica, reside justamente en el hecho de que en ambos casos el movimiento es descrito por ecuaciones diferenciales de segundo orden (el postulado de fuerzas de Newton o las ecuaciones de Euler-Lagrange). Sabemos que para resolver este tipo de ecuaciones es necesario especificar no solamente la “posición” inicial del sistema (su configuración) sino también la “velocidad” inicial del mismo. La degeneración geométrica del espacio de configuración tiene pues un origen matemático.

Existen soluciones ingeniosas para este problema. Considere por ejemplo el caso de un sistema formado por una partícula unida a un resorte y que se puede mover en virtud de sus restricciones solo en una dirección (un grado de libertad). Tanto en el formalismo vectorial como en el formalismo lagrangiano la ecuación de movimiento del cuerpo es simplemente:

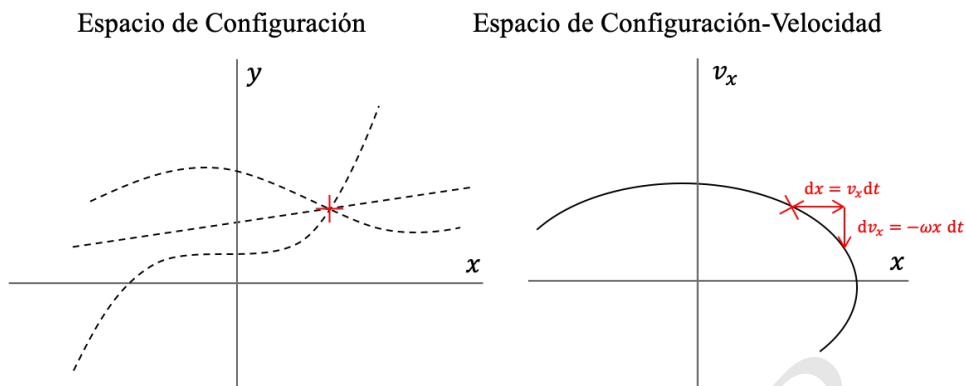


Figura 10.2: El espacio coordenado o espacio de configuración (panel de la izquierda) es degenerado: por un punto cualquier pasan en principio infinitas trayectorias posibles del sistema dinámico correspondiente. El espacio de posición-velocidad (o espacio de fase como definiremos más adelante) no es degenerado: por un punto, una vez provistas las fuerzas, pasa una y solo una trayectoria.

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \quad (10.1)$$

Como explicamos hace un momento el hecho que esta ecuación sea de segundo grado hace que con solo especificar la posición de la partícula en el espacio de configuración (conocer el valor de x) no sea posible saber hacia dónde se mueve la partícula; esto incluso sabiendo la aceleración que es provista justamente por la ecuación de movimiento.

Si introducimos ahora la variable auxiliar $v_x = \dot{x}$, la ecuación de segundo orden anterior es equivalente al sistema de ecuaciones de primer orden dado a continuación:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v_x \\ \dot{v}_x &= -\omega^2 x \end{aligned} \quad (10.2)$$

Si ahora, en lugar de usar el espacio de configuración, describimos la dinámica en un espacio geométrico nuevo, bidimensional, cuyas coordenadas son x y v_x (al que podemos llamar espacio configuración-velocidad), la dinámica se hace mucho más sencilla (ver panel a la derecha en la Figura 10.2). Nótese que en este espacio por cada punto pasa una y solo una trayectoria (una vez se han especificado los parámetros del sistema). Esto es así porque la variación instantánea de cada una de las coordenadas, dada por el sistema de ecuaciones diferenciales en las Ecs. (10.2) depende solamente de las coordenadas mismas del punto.

¿Podrá una construcción geométrica como la que hicimos aquí en el caso de un oscilador armónico, generalizarse para cualquier sistema dinámico? ¿será posible construir un espacio *generalizado* que combine información sobre la configuración y las velocidades generalizadas de modo que la dinámica no esté degenerada?. Esta es justamente una de las ideas en el corazón del formalismo Hamiltoniano que introduciremos en este capítulo.

10.2. Las ecuaciones de Hamilton

Las ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$\left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \right\}_M$$

son ecuaciones de segundo orden que hacen que el espacio de configuración sea degenerado. El problema que nos proponemos ahora resolver es encontrar un sistema de ecuaciones equivalente que sea de primer orden.

Una primera idea podría ser la de usar una sustitución análoga a la que usamos para la linearización de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden. Así, por ejemplo podría bastar con introducir como variables auxiliares los que llamaremos en lo sucesivo **momentos canónicos conjugados**:

$$p_j \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$$

Si usando esta identidad podemos invertir las coordenadas y velocidades generalizadas para escribir funciones del tipo:

$$\dot{q}_j = \dot{q}_j(\{q_k\}, \{p_k\})$$

el Lagrangiano podría expresarse como función de q_j y p_j :

$$L_{qp}(\{q_j\}, \{p_j\}) \equiv L(\{q_j\}, \dot{q}_j(\{q_k\}, \{p_k\}), t)$$

Nótese que en la definición anterior hemos cambiado el nombre del Lagrangiano clásico L , que depende de las variables generalizadas q y sus velocidades \dot{q} , por L_{qp} para que sea claro que este último lagrangiano que depende del nuevo conjunto de variables. Estos dos lagrangianos son matemáticamente diferentes y no deben nunca confundirse.

Reemplazando en las ecuaciones de Euler-Lagrange y despejando \dot{p}_j , obtenemos el conjunto de ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$\left\{ \dot{p}_j = \frac{\partial L_{qp}}{\partial q_j} \right\}_M \quad (10.3)$$

Para ilustrar este aparentemente confuso cambio de variables, consideremos nuevamente el caso del oscilador armónico simple. El Lagrangiano del sistema es:

$$L_{MAS}(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2$$

Si introducimos la nueva variable auxiliar:

$$p_x \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$$

el lagrangiano modificado queda:

$$L_{MAS, xp} = \frac{1}{2m}p_x^2 - \frac{1}{2}kx^2$$

La ecuación de movimiento linearizada (Ec. 10.2) queda:

$$\begin{aligned}\dot{p}_x &= \frac{\partial L_{xp}}{\partial x} \\ &= -kx\end{aligned}$$

Hasta aquí todo parece andar a las mil maravillas, excepto por un inconveniente: M ecuaciones diferenciales de segundo orden (las ecuaciones de Euler-Lagrange) no son equivalentes a M ecuaciones de primer orden (las ecuaciones para las nuevas variables $\{p_j\}$, Ecs. 10.2). Hace falta todavía otras M ecuaciones diferenciales que describan la variación de las variables generalizadas, q_j .

Cuando linearizamos ecuaciones diferenciales ordinarias, las definiciones mismas de las variables auxiliares, por ejemplo $v_x = \dot{x}$ en el caso del oscilador armónico simple, eran en sí mismas ecuaciones diferenciales del sistema.

Si bien podría decirse que nuestra definición de los momentos canónicos conjugados,

$$\left\{ p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right\}_M$$

es intrínsecamente un conjunto de ecuaciones diferenciales de primer orden, en tanto el lagrangiano depende de $\{\dot{q}_j\}$, buscamos un sistema de ecuaciones que sea mucho más simétrico.

¿Podría existir un sistema de ecuaciones diferenciales análogo a las (Ecs.) para el caso de las variables generalizadas?. En particular, podríamos escribir:

$$\left\{ \dot{q}_j = \frac{\partial L_{qp}}{\partial p_j} \right\}_M ?$$

Veamos precisamente qué es $\partial L_{qp} / \partial p_j$. Por la regla de la cadena:

$$\frac{\partial L_{qp}}{\partial p_j} = \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial p_j} = \sum_k p_k \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial p_j}$$

Nótese que en esta última expresión \dot{q}_j es una función $\dot{q}_j(\{q_k\}, \{p_k\})$ y no una variable cualquiera.

Otra manera de escribir la expresión anterior es hacerlo en la forma:

$$\frac{\partial L_{qp}}{\partial p_j} = \sum_k \frac{\partial}{\partial p_j} (p_k \dot{q}_k) - \dot{q}_j$$

Despejando \dot{q}_j obtenemos:

$$\dot{q}_j = \sum_k \frac{\partial}{\partial p_j} (p_k \dot{q}_k) - \frac{\partial L_{qp}}{\partial p_j}$$

es decir, el sueño de tener dos conjuntos de ecuaciones diferenciales de primer orden tanto para p_j como para q_j con una estructura similar no es posible.

Sin embargo, si juntamos los términos del lado derecho de la ecuación anterior, arribamos a la siguiente ecuación:

$$\left\{ \dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j} \right\}_M$$

en la que hemos introducido una nueva función:

$$H(\{q_j\}, \{p_j\}, t) \equiv \sum_k p_k \dot{q}_k(\{q_l\}, \{p_l\}, t) - L_{qp}(\{q_l\}, \{p_l\}, t) \quad (10.4)$$

A esta nueva función la llamaremos el **Hamiltoniano del sistema**.

Nota

El Hamiltoniano no es la función de Jacobi. Nótese la similaridad del Hamiltoniano con la función de Jacobi h que habíamos definido en la [Sección 9.7.4](#). Es importante, sin embargo insistir en que ambas funciones son sutilmente diferentes. La función de Jacobi depende de las coordenadas y velocidad generalizadas, así como del Lagrangiano clásico. En sistemas que cumplen las condiciones del teorema de conservación de la energía, esta función constituye una cuadratura del sistema (constante de movimiento). Por otro lado el Hamiltoniano del sistema depende de las coordenadas y los momentos canónicos conjugados (tratados estos como variables independientes) y del Lagrangiano modificado.

Para el movimiento armónico simple, por ejemplo, la función de Jacobi es:

$$h(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2$$

mientras que el Hamiltoniano se escribe:

$$H(x, p_x) = \frac{p_x^2}{2m} - \frac{1}{2}kx^2$$

En síntesis, la dinámica de cualquier sistema dinámico (para el cuál se pueda escribir un Lagrangiano) se puede describir con el siguiente conjunto de $2M$ ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$\left\{ \dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j} \right\}_M \quad (10.5)$$

$$\left\{ \dot{p}_j = \frac{\partial L_{qp}}{\partial q_j} \right\}_M \quad (10.6)$$

$$(10.7)$$

Llamamos aquí a este conjunto de ecuaciones, las **ecuaciones de Hamilton**.

Hemos logrado nuestro objetivo: la dinámica del sistema dinámico se puede ahora escribir con un conjunto de ecuaciones diferenciales de primer orden. Estas

ecuaciones están definidas sobre el espacio geométrico que definen las variables generalizadas $\{q_j\}$ y sus momentos canónicos conjugados $\{p_j\}$. Este espacio no es degenerado y lo llamaremos en lo sucesivo el **espacio de fase** del sistema.

Un poco de historia

De la óptica a la mecánica. “*The formalism described above arose out of Hamilton's interest in the theory of optics. The ideas were published in a series of books entitled “Theory of Systems of Rays”, the first of which appeared while Hamilton was still an undergraduate at Trinity College, Dublin. They also contain the first application of the Hamilton-Jacobi formulation (which we shall see in Section 4.7) and the first general statement of the principle of least action, which sometimes goes by the name of “Hamilton's Principle”. Hamilton's genius was recognised early. His capacity to soak up classical languages and to find errors in famous works of mathematics impressed many. In an unprecedented move, he was offered a full professorship in Dublin while still an undergraduate. He also held the position of “Royal Astronomer of Ireland”, allowing him to live at Dunsink Observatory even though he rarely did any observing. Unfortunately, the later years of Hamilton's life were not happy ones. The woman he loved married another and he spent much time depressed, mired in drink, bad poetry and quaternions.*” (Tomado de Haltiton-1)

10.3. Las ecuaciones canónicas de Hamilton

Pero hay un defecto de las ecuaciones de Hamilton: no son en realidad el conjunto de ecuaciones diferenciales de primer orden más simple que podemos encontrar equivalentes a las ecuaciones de Euler-Lagrange. Para describir el movimiento de un sistema dinámico usando las ecuaciones de Hamilton, es necesario encontrar dos funciones (interrelacionadas), L_{qp} y H . ¿Existirá alguna manera de describir la dinámica en términos de una sola función?

La transformación de coordenadas:

$$p_j \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$$

tiene una forma conocida en física-matemática como *transformación de Legendre*. El uso de este tipo de transformaciones de coordenadas es común en termodinámica para cambiar de un conjunto de variables de estado a otro.

Considere la función Hamiltoniana $H(\{q_j\}, \{p_j\}, t)$ cuyo diferencial total se puede escribir en general como:

$$dH = \sum_j \frac{\partial H}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial H}{\partial p_j} dp_j + \frac{\partial H}{\partial t} dt \quad (10.8)$$

Por otro lado, por la definición misma del Hamiltoniano:

$$H(\{q_j\}, \{p_j\}, t) \equiv \sum_k p_k \dot{q}_k(\{q_l\}, \{p_l\}, t) - L_{qp}(\{q_l\}, \{p_l\}, t)$$

otra forma del diferencial total será:

$$dH = \sum_k (\dot{q}_k dp_k + p_k d\dot{q}_k) - \sum_j \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} dq_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} d\dot{q}_k + \frac{\partial L}{\partial t} dt \right)$$

Este último diferencial contiene sin embargo la incómoda (y fuera de lugar) variable \dot{q}_k . Una forma de eliminarla es justamente usando la transformación de Legendre $p_j = \partial L / \partial \dot{q}_j$ y la ecuación de Euler-Lagrange $\dot{p}_j = \partial L / \partial q_j$ en la ecuación anterior para obtener:

$$dH = \sum_k \left(\dot{q}_k dp_k - \dot{p}_k dq_k + \frac{\partial L}{\partial t} dt \right) \quad (10.9)$$

Dado que las variables p_k , q_k y t son completamente independientes, los coeficientes que acompañan el diferencial de las Ecs. (10.8) y (10.9) serán iguales. Esta condición conduce al conjunto de ecuaciones:

$$\left\{ \dot{q}_j = +\frac{\partial H}{\partial p_j} \right\}_M \quad (10.10)$$

$$\left\{ \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j} \right\}_M \quad (10.11)$$

$$(10.12)$$

con la propiedad adicional

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L_{qp}}{\partial t}$$

Las Ecuaciones (10.10) y (10.11), que son también un conjunto de $2M$ ecuaciones diferenciales lineales ordinarias equivalentes a las ecuaciones de Euler-Lagrange, como las ecuaciones de Hamilton deducidas en la sección anterior, solo necesitan que se especifique una función, el Hamiltoniano para determinar completamente (a través de las ecuaciones anteriores) la dinámica del sistema. Llamamos a este sistema conjunto de ecuaciones, las **ecuaciones canónicas de Hamilton**.

Definición 10.1

Variables canónicas conjugadas. Dos cantidades físicas cuya dinámica se relaciona a través de las ecuaciones canónicas de Hamilton, se dice que son **variables canónicas conjugadas**. En sistemas dinámicos y en el formalismo hamiltoniano, p_j es el *momento canónico conjugado* de q_j . Sin embargo, esta terminología es utilizada en otras aplicaciones de la física moderna (no solamente en mecánica analítica) donde la función no necesariamente es el Hamiltoniano H .

10.4. El principio de Hamilton modificado

La deducción de las ecuaciones canónicas de Hamilton que realizamos en la sección anterior ha seguido un procedimiento de naturaleza *heurística*. El resultado surgió como respuesta a nuestra búsqueda de la forma más simple de un conjunto de ecuaciones diferenciales de primer orden equivalente a las ecuaciones de Euler-Lagrange. ¿Existe alguna manera de deducir estas ecuaciones desde primeros principios?

En el [Capítulo 9](#) habíamos comprobado que las ecuaciones de ese formalismo, es decir las ecuaciones de Euler-Lagrange, podían obtenerse a partir del **principio de Hamilton** que establece que la acción es estacionaria a lo largo de la trayectoria real del sistema. Matemáticamente:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L(\{q_j\}, \{\dot{q}_j\}, t) dt = 0$$

Por definición sabemos que la función Hamiltoniana se relaciona con el Lagrangiano a través de la Ec. [\(10.4\)](#):

$$H(\{q_j\}, \{p_j\}, t) = \sum p_k \dot{q}_k - L_{qp}(\{q_j\}, \{\dot{q}_j\}, t)$$

o lo que es lo mismo:

$$L_{qp}(\{q_j\}, \{\dot{q}_j\}, t) = \sum p_k \dot{q}_k - H(\{q_j\}, \{p_j\}, t)$$

Si reemplazamos L_{pq} usando la relación anterior, en la fórmula para la acción⁶⁵, obtenemos:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} [\sum p_k \dot{q}_k - H(\{q_j\}, \{p_j\}, t)] dt = 0 \quad (10.13)$$

A este resultado se lo conoce como el **principio de Hamilton modificado**.

Pero ¿qué puede tener de útil modificar el principio de Hemilton?. Una respuesta inmediata a esta pregunta es que la aplicación del cálculo variacional sobre este principio puede darnos justamente lo que estamos buscando: las ecuaciones canónicas.

En el principio de Hamilton modificado la función en el integrando es mucho más completa que el lagrangiano en el principio original. Podemos escribir el principio modificado como:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} f(\{q_k\}, \{p_k\}, \{\dot{q}_k\}, \{\dot{p}_k\}, t) dt = 0 \quad (10.14)$$

donde

$$f(\{q_k\}, \{p_k\}, \{\dot{q}_k\}, \{\dot{p}_k\}, t) = \sum p_k \dot{q}_k - H(\{q_j\}, \{p_j\}, t) \quad (10.15)$$

La Ecuación [\(10.14\)](#), no es muy distinta del principio de Hamilton original, donde ahora la función f juega el papel del Lagrangiano y las variables generalizadas se han ahora duplicado en número para incluir los momentos canónicos conjugados. La función f cumple entonces con las ecuaciones de Euler que podemos escribir como:

$$\left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial f}{\partial q_j} = 0 \right\}_M$$

⁶⁵Es importante aclarar que el hecho básico expresado por el principio de Hamilton, a saber que la acción sea estacionaria a través de la trayectoria real, no depende de si calculamos el Lagrangiano como función de las variables q y \dot{q} o si lo hacemos en su lugar con las variables q y p .

$$\left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{p}_j} \right) - \frac{\partial f}{\partial p_j} = 0 \right\}_M$$

Reemplazando f en las ecuaciones anteriores y teniendo en cuenta que H no depende ni de \dot{q}_j ni de \dot{p}_j , obtenemos:

$$\begin{aligned} \dot{p}_j + \frac{\partial H}{\partial q_j} &= 0 \\ -\dot{q}_j + \frac{\partial H}{\partial p_j} &= 0 \end{aligned} \quad (10.16)$$

(10.17)

que no son otra cosa que las ecuaciones canónicas de Hamilton.

En síntesis, las ecuaciones canónicas de Hamilton, como las ecuaciones de Euler-Lagrange, se pueden obtener también de un principio geométrico, el principio de Hamilton modificado. Volveremos sobre este principio en la [Sección 10.7](#).

10.5. Dinámica en el espacio de fase

Como vimos en secciones anteriores, las ecuaciones canónicas de Hamilton surgieron, en la presentación que estamos haciendo aquí del formalismo Hamiltoniano, como solución al problema de la linearización de las ecuaciones de Euler-Lagrange. Linearización que a su vez nos permitió eliminar la degeneración del espacio de configuración. Pero las consecuencias geométricas derivadas de las Ecs. (10.10) y (10.11) van mucho más allá que la solución a un problema de degeneración geométrica.

En el espacio de fase $\{p_j\} - \{q_j\}$, el Hamiltoniano se puede interpretar como un campo escalar que toma un valor específico en cada punto. Las derivadas parciales que aparecen en las ecuaciones canónicas no son otra cosa que las componentes de un *gradiente generalizado* del Hamiltoniano. Las ecuaciones canónicas mismas, indican la dirección y el sentido en el que se moverá el sistema dinámico a partir de un determinado punto.

Pero ¿qué significa que la ecuación que nos informa la dirección y tasa de cambio de q_j dependa de la componente del gradiente en dirección de p_j ? ¿cómo interpretar que la ecuación para la tasa de cambio de p_j tenga un signo negativo?. En la figura [Figura 10.3](#) hemos representado esquemáticamente todas las cantidades relevantes que aparecen en las ecuaciones canónicas de Hamilton y la manera como ellas determinan la dirección y sentido del movimiento.

Como vemos en la gráfica, en el espacio de fase el movimiento del sistema se produce sobre líneas de igual valor de H . La razón de ello viene justamente de que la tasa de cambio de q sea proporcional a la componente p el gradiente y viceversa. Por otro lado, el signo negativo de la tasa de variación de p_j determina el sentido de movimiento del sistema en el espacio de fase, que siempre ocurre en la dirección que va de los eje(s) p a el(los) eje(s) x . Para sistemas con solo un grado de libertad, esto significa que la partícula se mueve en el espacio de fase siempre en el sentido de las manecillas del reloj.

La dinámica, en el formalismo Hamiltoniano, ¡es pura geometría!.

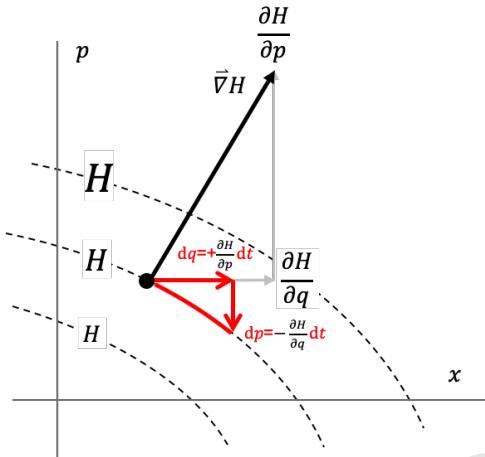


Figura 10.3: Interpretación de las cantidades relevantes en el formalismo Hamiltoniano y de las ecuaciones canónicas en el espacio de fase.

10.5.1. El péndulo simple en el espacio de fase

Para ilustrar estos conceptos y otros asociados a ellos, consideremos un sistema específico: el péndulo simple. Conocemos bien el comportamiento de este sistema, lo hemos estudiado tanto con el formalismo vectorial como con el formalismo lagrangiano. Este conocimiento nos permitirá comprobar si lo que predecimos con el geométrico formalismo Hamiltoniano es correcto.

Para empezar necesitamos escribir el Hamiltoniano del sistema. Para ello es necesario, primero, escribir el Lagrangiano clásico del sistema. No es difícil mostrar (ver Problemas al final del capítulo) que el Lagrangiano del péndulo simple es:

$$L_{PS}(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2} mL^2 \dot{\theta}^2 + mgL \cos \theta \quad (10.18)$$

El momento generalizado asociado a la variable θ está dado por (la transformación de Legendre):

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mL^2 \dot{\theta}$$

La velocidad generalizada $\dot{\theta}$ será en términos del momento p_θ :

$$\dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mL^2}$$

que usarse para reemplazar $\dot{\theta}$ en el lagrangiano clásico y de ese modo obtener el Lagrangiano modificado L_{qp} :

$$L_{PS,\theta p} = \frac{p_\theta^2}{2mL^2} + mgL \cos \theta$$

Con esto la función Hamiltoniana queda finalmente como:

$$H_{PS}(\theta, p_\theta) = p_\theta \dot{\theta} - L_{\theta p} = \frac{p_\theta^2}{mL^2} - \frac{p_\theta^2}{2mL^2} - mgL \cos \theta$$

que simplificando se convierte en:

$$H_{PS}(\theta, p_\theta) = \frac{p_\theta^2}{2mL^2} - mgL \cos \theta$$

Conocer el Hamiltoniano del péndulo simple, nos permitió hacer un mapa de la dinámica en el espacio de fase. Para ello, es necesario dibujar la curvas de contorno de H_{PS} que marcan el camino que seguirán partículas de prueba puestas en cualquier lugar del espacio de fase. Con el siguiente algoritmo creamos una malla coordenada en el espacio de fase y calculamos los valores sobre la malla del Hamiltoniano:

```
#Parámetros del sistema
m=1.0 #kg
g=9.81 #m/s^2
L=1.0 #m

#Malla coordenada
from numpy import pi,linspace,meshgrid
ptetas=linspace(-10.0,10.0,100)
tetas=linspace(-pi,pi,100)
TETAS,PTETAS=meshgrid(tetas,ptetas)

#Cálculo del Hamiltoniano sobre la malla
from numpy import cos
HS=PTETAS**2/(2*m*L**2)-m*g*L*cos(TETAS)
```

Un gráfico de contornos del Hamiltoniano puede elaborarse con el siguiente algoritmo:

(Algoritmo 10.1)

```
import matplotlib.pyplot as plt
fig=plt.figure(figsize=(6,6))
ax=fig.gca()

#Contorno de colores
c=ax.contourf(TETAS,PTETAS,HS,10,cmap="jet")

#Lineas de contornos
c=ax.contour(TETAS,PTETAS,HS,linspace(-m*g*L,m*g*L,10))
c.clabel(colors='w')

#Contorno de H=0
c=ax.contour(TETAS,PTETAS,HS,[0],colors=[ 'w'],linewidths=2)

#Decoración
ax.set_xlabel(r"\$\theta\$ [rad]")
ax.set_ylabel(r"\$p_\theta\$")
fig.tight_layout();
```

ver Figura 10.4

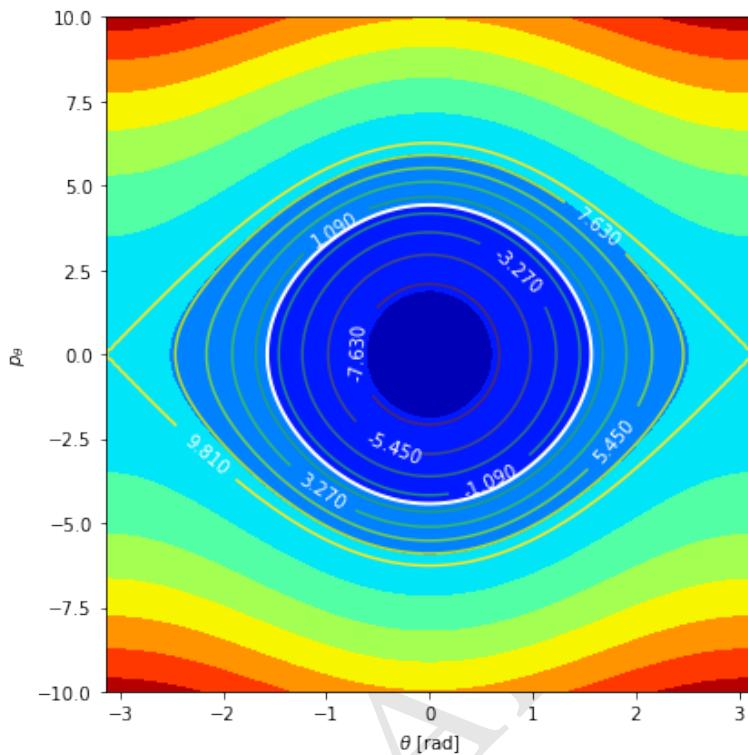


Figura 10.4: Figura correspondiente al código 10.1.

¿Cómo interpretamos el diagrama de contornos del Hamiltoniano en el espacio de fase?. Al fijar unas condiciones iniciales (ángulo y momentum angular p_θ), estamos escogiendo un punto de partida en el espacio de fase. Supongamos por ejemplo que comenzamos con $\theta = 45^\circ$ y $p_\theta = 0$. Las ecuaciones canónicas de Hamilton indican que la partícula se moverá siguiendo una trayectoria de igual valor de H . En este caso:

$$H_{PS} = -mgL \cos 45^\circ$$

El valor de H para estas condiciones iniciales es negativo.

En la 10.4 todos los valores negativos de H están dentro del contorno blanco ($H = 0$). Los contornos de H en esa región del espacio de fase tienen una forma ovalada (elíptica). Estas elipses tienen centro en el origen del espacio de fase y su eje mayor está limitado a lado y lado por el valor inicial de $\theta = 45^\circ$. Sabemos, por el análisis realizado en la sección anterior que la partícula se moverá en el espacio de fase sobre esa elipse siguiendo las manecillas del reloj. Es decir, si empieza en el extremo del eje mayor (en el que $p_\theta = 0$) con el tiempo su momento se irá haciendo negativo hasta alcanzar un valor mínimo (máxima velocidad) cuando $\theta = 0$. Después de eso la rapidez empezará a disminuir a medida que el ángulo θ se hace negativo pero más grande en valor absoluto hasta alcanzar el otro extremo del eje mayor. Allí, la rapidez será nuevamente cero ($p_\theta = 0$). Pero el movimiento

continúa. Ahora el momento empezará a aumentar y será positivo, hasta alcanzar nuevamente un valor máximo cuando la partícula pase por $\theta = 0$ y finalmente volverá a su posición inicial, para repetir después de nuevo la misma sucesión de movimientos.

El análisis anterior no es otra cosa que una versión muy elaborada de la cinemática que conocemos bastante bien de un péndulo. Lo interesante de todo esto es ver como ese movimiento pendular que tan bien conocemos en el espacio físico corresponde a una órbita cerrada en el espacio de fase. Tener la capacidad para relacionar lo que pasa en el espacio de fase con movimientos en el espacio físico, es una importante habilidad en la mecánica moderna.

¿Qué pasa ahora si lanzamos la partícula en reposo pero en un ángulo $\theta = 90^\circ$ ($\theta = 1,57$ rad). En este caso el Hamiltoniano alcanza un valor crítico

$$H_{PS} = -mgL \cos 90^\circ = 0$$

sin embargo la trayectoria sigue estando acotada (es una elipse en el espacio de fases).

Para ángulos iniciales mayores a 90° la trayectoria todavía es acotada, pero la forma de la misma en el espacio de fase se va modificando. Ya no tiene la clásica forma de una elipse sino que se parece ahora al contorno de un *ojito* (ver curvas de contorno con $H > 0$ en la 10.4).

La situación se vuelve crítica cuando soltamos el péndulo desde un ángulo de $\theta = 180^\circ$. Todavía la trayectoria en el espacio de fase es acotada y la partícula vuelve exactamente a donde partió pero hay una pequeña diferencia respecto a los casos anteriores. Si en lugar de soltar la partícula en $\theta = 180^\circ$, la lanzamos con una pequeña velocidad angular inicial dirigida al punto de equilibrio (es decir el punto inicial se encuentra un poco por debajo del vértice del contorno correspondiente a $\theta = 180^\circ, p_\theta = 0$) el movimiento en el espacio de fase ya no está *acotado*. La partícula comienza a recorrer el espacio de fase en una trayectoria sinuosa en la que siempre $p_\theta < 0$, pero cuyo valor absoluto se hace mínimo es $\theta = \pi, -\pi, -3\pi, \dots$, y se hace máximo en valor absoluto cuando $\theta = 0, 2\pi, 4\pi, \dots$

Por muchas palabras que usemos, la mejor manera de comprender la conexión entre el *mapa del Hamiltoniano* del péndulo simple y las peculiaridades de las trayectorias del sistema en el espacio físico es justamente resolviendo las ecuaciones de movimiento del sistema y representando la solución en el espacio de fase.

Para ello necesitamos primero deducir las ecuaciones de movimiento del sistema. En el formalismo Hamiltoniano, dichas ecuaciones se obtienen directamente de reemplazar el Hamiltoniano de sistema en las ecuaciones canónicas de Hamilton. En el caso del péndulo simple el resultado es:

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{mL^2} \quad (10.19)$$

$$\dot{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = -mgL \sin \theta \quad (10.20)$$

$$(10.21)$$

Al escribir explícitamente las ecuaciones canónicas de Hamilton de un sistema concreto, reconocemos inmediatamente el éxito de nuestra empresa original.

En lugar de tener una ecuación diferencial de segundo orden, como la que nos entregaría la aplicación del formalismo lagrangiano, el formalismo Hamiltoniano nos entrega dos ecuaciones de primer orden en las que las tasas de cambio de una variable no se mezclan de forma desorganizada con las de las otras variables.

Podemos implementar estas ecuaciones diferenciales con la rutina:

```
def edm_pendulosimple_hamiltoniano(Y,t,m,L):
    #Constantes
    g=9.81

    #Variables
    teta=Y[0]
    pteta=Y[1]

    #Derivadas
    from numpy import sin
    dtetadt=pteta/(m*L**2)
    dptetadt=-m*g*L*sin(teta)

    return [dtetadt,dptetadt]
```

Asignamos valores específicos a los parámetros del sistema y resolvemos numéricamente las ecuaciones de movimiento:

```
#Parámetros del sistema
m=1.0
L=1.0
g=9.81
#Período de oscilación teórico
from numpy import sqrt
T=2*pi*sqrt(L/g)

#Factor de conversión
from numpy import pi,linspace
deg=pi/180
rad=1/deg

#Condiciones iniciales
from numpy import pi,linspace
Y=[45*deg,0.0]
ts=linspace(0,T,100)

#Solución numérica de las e.d.m.
from scipy.integrate import odeint
solucion=odeint(edm_pendulosimple_hamiltoniano,Y,ts,args=(m,L))

#Extraemos y convertimos los ángulos al intervalo [-pi,pi]
from numpy import mod
tetas=mod(solucion[:,0],2*pi)
tetas[tetas>pi]=tetas[tetas>pi]-2*pi
#Extraemos los momentos
```

```

ptetas=solucion[:,1]

#Posiciones en el espacio coordenado
from numpy import sin,cos
xs=L*sin(tetas)
ys=-L*cos(tetas)

```

Con el siguiente algoritmo podemos representar la trayectoria tanto en el espacio coordenado como en el espacio de fase (en el que además superponemos el *mapa de contornos* del Hamiltoniano):

(Algoritmo 10.2)

```

fig,axs=plt.subplots(1,2,figsize=(8,4))

#Espacio coordenado
axs[0].plot(xs,ys,'ko')
axs[0].set_xlim((-1.2*L,1.2*L))
axs[0].set_ylim((-1.2*L,1.2*L))
axs[0].set_xlabel(r"$x$")
axs[0].set_ylabel(r"$y$")
axs[0].set_title("Espacio coordenado")

#Espacio de Fase
axs[1].plot(tetas*rad,ptetas,'w.',alpha=0.3)
axs[1].contourf(TETAS*rad,PTETAS,HS,linspace(-m*g*L,5*m*g*L,10))
axs[1].set_xlabel(r"$\theta$ [grados]")
axs[1].set_ylabel(r"$p_\theta$")
axs[1].set_title("Espacio de Fase")

fig.tight_layout()

```

ver Figura 10.5

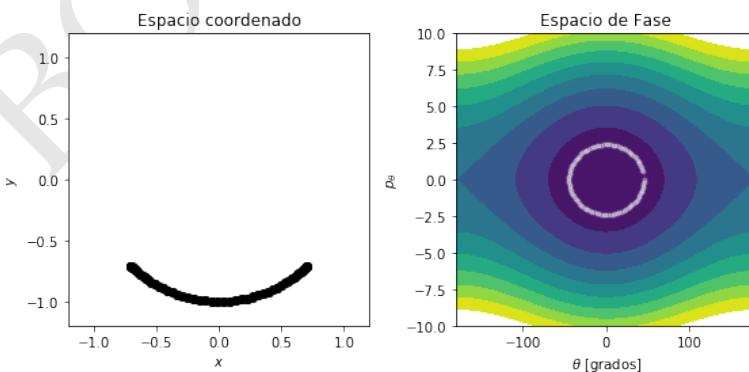


Figura 10.5: Figura correspondiente al código 10.2.

Para ver una versión animada de este gráfico consulte la [versión web o interac-](#)

tiva⁶⁶ del libro.

10.6. Simetrías y candidatas conservadas

Uno de las ventajas más notables del formalismo Lagrangiano frente al formalismo vectorial de la mecánica, era la posibilidad de conocer propiedades de un sistema dinámico sin resolver explícitamente las ecuaciones de movimiento, estudiando únicamente las simetrías del Lagrangiano. Con estas simetrías era posible, a través del teorema de Noether para el Lagrangiano, deducir las cuadraturas o cantidades conservadas.

Siendo el Hamiltoniano un formalismo escalar con una conexión profunda con el formalismo Lagrangiano, es válido hacerse la pregunta de cómo esos resultados, simetrías y cantidades conservadas, se aplican aquí. En los siguientes párrafos nos ocuparemos de estudiar la relación entre las simetrías del Hamiltoniano y las constantes de movimiento asociadas con ellas.

10.6.1. Variables cílicas

Como sucede en el formalismo Lagrangiano, las variables cílicas del Hamiltoniano (variables que no aparecen explícitamente en su fórmula) corresponden directamente a cantidades conservadas. En el nuevo formalismo, sin embargo, estas cantidades conservadas son triviales.

Si analizamos directamente las ecuaciones canónicas de Hamilton:

$$\begin{cases} \dot{q}_j = +\frac{\partial H}{\partial p_j} \\ \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j} \end{cases} \Big|_M \quad (10.22)$$

vemos que basta que una de las variables del Hamiltoniano no aparezca explícitamente en su fórmula, para que la variable conjugada correspondiente sea inmediatamente una constante de movimiento.

Teorema: Variables cílicas del Hamiltoniano. Si una variable del Hamiltoniano q_k o p_k , no aparece explícitamente en su fórmula, entonces la variable canónica conjugada p_k o q_k es una constante de movimiento.
Simbólicamente:

$$\text{Si } \frac{\partial H}{\partial q_k} = 0 \rightarrow p_k : \text{cte}$$

o bien:

⁶⁶http://seap-udea.org/MecanicaCeleste_Zuluaga

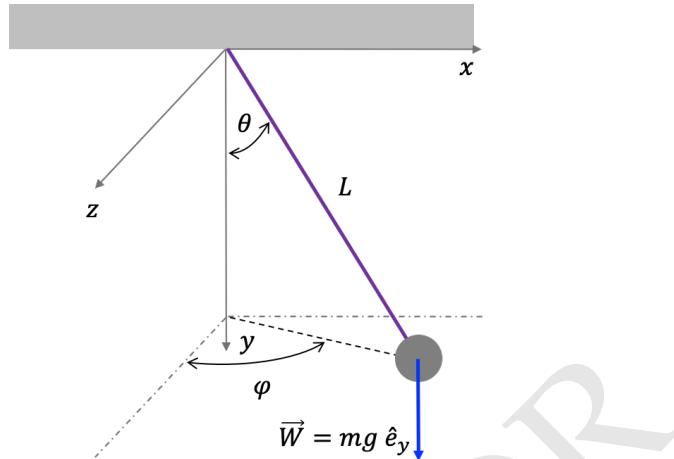


Figura 10.6: En el péndulo cónico generalizado, la partícula puede moverse libremente oscilando en y alrededor de la dirección vertical.

$$\text{Si } \frac{\partial H}{\partial p_k} = 0 \rightarrow q_k : \text{cte}$$

Nótese el contraste entre las cantidades conservadas asociadas a las variables cílicas del Hamiltoniano y aquellas del lagrangiano. De un lado, mientras en este último formalismo, solo las variables generalizadas cílicas tenían asociada una cantidad conservada, sus velocidades generalizadas \dot{q}_j no. Además la fórmula de la cantidad conservada asociada a una variable cílica q_k :

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$$

podía llegar a ser realmente complicada.

Más interesantes aún son las implicaciones geométricas de esta simetría del Hamiltoniano (recordemos que este formalismo tiene una profunda raíz geométrica). Un ejemplo simple puede ayudarnos a entender mejor esas implicaciones.

10.6.2. Un ejemplo: el péndulo cónico

Volvamos nuestra atención sobre un sistema que habíamos introducido ya en la [Sección 9.3.2](#). En la ?? reproducimos una representación esquemática del sistema que se conoce como el péndulo cónico.

Como vemos el problema tiene dos grados de libertad y por lo tanto puede ser descrito por dos variables generalizadas independientes θ y ϕ . Sin embargo el espacio de fase del problema es (para los estándares de los ejemplos simples considerados hasta ahora) *enorme*. Tiene en total de 4 dimensiones ($\theta, \phi, p_\theta, p_\phi$). Este hecho hace que sea muy difícil representar gráficamente o siquiera imaginarse

la dinámica del sistema en el espacio de fase. Las simetrías del problema pueden sin embargo ayudarnos en la representación geométrica de la dinámica.

Para escribir el Hamiltoniano del péndulo cónico, debemos primero escribir el Lagrangiano. No es difícil mostrar que dicho Lagrangiano tiene la forma (ver Problemas al final del capítulo):

$$L_{PC} = \frac{1}{2}m(L^2\dot{\theta}^2 + L^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2) + mgL \cos \theta$$

Los momentos canónicos conjugados serán en este caso:

$$\begin{aligned} p_\theta &= \partial L / \partial \dot{\theta} = mL^2 \dot{\theta} \\ p_\phi &= \partial L / \partial \dot{\phi} = mL^2 \sin^2 \theta \dot{\phi} \end{aligned}$$

Con esto el Lagrangiano escrito en términos de p_θ, p_ϕ será:

$$L_{PC,qp} = \frac{p_\theta^2}{2mL^2} + \frac{p_\phi^2}{2mL^2 \sin^2 \theta} + mgL \cos \theta$$

Y el Hamiltoniano

$$H_{PC} = p_\theta \dot{\theta} + p_\phi \dot{\phi} - L_{PC,qp}$$

queda:

$$H_{PC} = \frac{p_\theta^2}{2mL^2} + \frac{p_\phi^2}{2mL^2 \sin^2 \theta} - mgL \cos \theta$$

Como vemos en la fórmula anterior, la variable ϕ es cíclica, por lo tanto su momento canónico conjugado es una constante de movimiento:

$$p_\phi \equiv \alpha_\phi = \text{cte.}$$

Con esta constante, las ecuaciones de movimiento para las variables restantes será:

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &= \frac{\alpha_\phi^2}{mL^2 \sin^2 \theta} \\ \dot{\theta} &= \frac{p_\theta^2}{mb^2} \\ \dot{p}_\theta &= \frac{\alpha_\phi^2 \cos \theta}{mb^2 \sin^3 \theta} - mbg \sin \theta \end{aligned} \tag{10.23}$$

y el Hamiltoniano del sistema se escribe como:

$$H = \frac{p_\theta^2}{2mb^2} + \frac{\alpha_\phi^2}{2mb^2 \sin^2 \theta} - mbg \cos \theta$$

Vemos pues que con la identificación de una variable cíclica, este sistema que tiene dos grados de libertad (y por lo tanto un espacio de fase de 4 dimensiones) se puede describir completamente en un espacio de solo 3 dimensiones : θ, ϕ y p_θ . En

otras palabras, el espacio de fase sigue siendo de 4 dimensiones pero la dinámica ocurre exclusivamente sobre la hipersuperficie constante $p_\phi = \alpha\phi$.

Para visualizar el movimiento del sistema en el espacio de coordenadas y el espacio fase, implementemos primeros las ecuaciones de movimiento (Ecs. 10.23):

```

def edm_penduloconico_hamiltoniano(Y,t,alfa_fi,L,m):
    #Constantes
    g=9.81
    #Variables
    teta=Y[0]
    fi=Y[1]
    pteta=Y[2]
    #Derivadas
    from numpy import sin,cos
    dtetadt=pteta/(m*L**2)
    dfidt=alfa_fi/(m*L**2*sin(teta)**2)
    dptetadt=alfa_fi**2*cos(teta)/(m*L**2*sin(teta)**3)-m*L*g*sin(teta)
    return [dtetadt,dfidt,dptetadt]

```

Las propiedades del sistema, condiciones y solución numérica de las ecuaciones de movimiento se obtienen con el siguiente algoritmo:

```

#Propiedades
g=9.81
L=1.0
m=1.0

#Factores de conversión
from numpy import pi,linspace
grados=pi/180

#Condiciones iniciales
teta_0=15*grados
fi_0=0.0*grados
pteta_0=0.0
alfa_fi=0.8

#Tiempos de integración
from numpy import pi,sqrt,linspace
T=2*pi*sqrt(L/g)
Nt=300
ts=linspace(0,3*T,Nt)

#Solución numérica
from scipy.integrate import odeint
solucion=odeint(edm_penduloconico_hamiltoniano
                 [teta_0,fi_0,pteta_0],ts,
                 args=(alfa_fi,L,m))

#Extrae momentos

```

```

tetas=solucion[:,0]
fis=solucion[:,1]
ptetas=solucion[:,2]

#Coordenadas cartesianas
from numpy import sin,cos
xs=L*sin(tetas)*cos(fis)
ys=L*sin(tetas)*sin(fis)
zs=-L*cos(tetas)

```

Un gráfico de la trayectoria de la partícula en el espacio coordenado (físico) y en el espacio de fase, se puede obtener con el siguiente algoritmo:

(Algoritmo 10.3)

```

#Preparación del gráfico
import matplotlib.pyplot as plt
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
fig=plt.figure(figsize=(8,4))
ax_coord=fig.add_subplot(121,projection='3d')
ax_fase=fig.add_subplot(122,projection='3d')

#Gráfico en el espacio de coordenadas
ax_coord.plot(xs,ys,zs,'k-')

#Gráfico en el espacio de fases
ax_fase.plot(tetas,fis,ptetas,'b-')

#Decoración
ax_coord.set_xlabel("$x$")
ax_coord.set_ylabel("$y$")
ax_coord.set_zlabel("$z$")
ax_coord.set_title("Espacio coordenado")
from pymcel.plot import fija_ejes3d_proporcionales
fija_ejes3d_proporcionales(ax_coord)

ax_fase.set_xlabel("$\theta$")
ax_fase.set_ylabel("$\phi$")
ax_fase.set_zlabel("$p_{\theta}$")
ax_fase.set_title("Espacio de fase")

fig.tight_layout()

```

ver Figura 10.7

Para ver una versión animada de este gráfico consulte la [versión web o interactiva⁶⁷](#) del libro.

⁶⁷http://seap-udea.org/MecanicaCeleste_Zuluaga

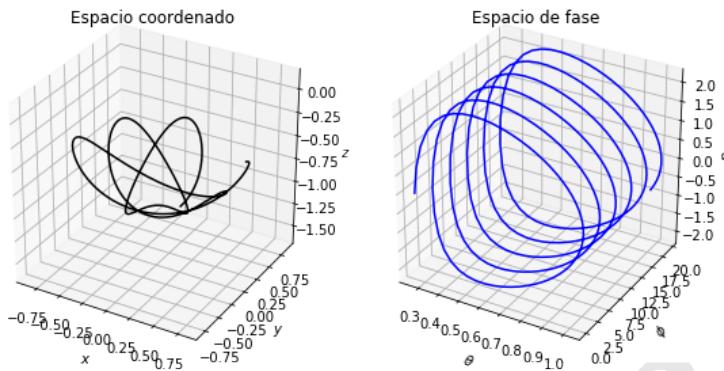


Figura 10.7: Figura correspondiente al código 10.3.

10.6.3. Conservación del Hamiltoniano

Una interesante simetría del Hamiltoniano de encuentra si consideramos la derivada total de la función con respecto al tiempo:

$$\frac{dH}{dt} = \sum_i \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) + \frac{\partial H}{\partial t}$$

Reemplazando \dot{q}_i y \dot{p}_i por sus equivalentes de acuerdo a las ecuaciones canónicas de Hamilton, encontramos que:

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}$$

de donde se sigue el siguiente teorema:

Proposición 10.1

Conservación del Hamiltoniano. Si el Hamiltoniano de un sistema dinámico no depende explícitamente del tiempo (es simétrico frente a una traslación temporal), es decir si:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = 0$$

el Hamiltoniano mismo es una cuadratura o constante de movimiento del sistema:

$$\frac{dH}{dt} = 0$$

El Hamiltoniano hereda además algunas de las condiciones que demostramos para que la función de Jacobi fuera igual a la energía mecánica del sistema. En particular si se cumple que las ecuaciones de transformación entre las cooredenadas cartesianas y las variables generalizadas no dependen del tiempo y que la función de energía potencial no depende de las velocidades entonces:

$$H = T + U$$

Este último resultado implica que bajo las condiciones indicadas, el *Teorema de conservación del Hamiltoniano* es equivalente al teorema de conservación de la energía mecánica que habíamos formulado en el contexto del formalismo lagrangiano.

10.6.4. Cantidades conservadas y los corchetes de Poisson

Consideremos ahora una cantidad física arbitraria que sea función de las coordenadas del espacio de fase y en general del tiempo, $f(\{q_j\}, \{p_j\}, t)$. La derivada total de la función f respecto al tiempo es por la regla de la cadena es:

$$\frac{df}{dt} = \sum_j \left(\frac{\partial f}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial f}{\partial p_j} \dot{p}_j \right) + \frac{\partial f}{\partial t}$$

Reemplazando \dot{q}_j y \dot{p}_j por sus equivalentes de acuerdo a las ecuaciones canónicas de Hamilton, encontramos que:

$$\frac{df}{dt} = \sum_j \left(\frac{\partial f}{\partial q_j} \frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial H}{\partial q_j} \right) + \frac{\partial f}{\partial t}$$

La cantidad entre paréntesis aparece en distintos contextos en la física moderna y amerita una definición independiente:

Definición 10.2

Corchetes de Poisson. Llamamo *corchete de Poisson* de las funciones $f(\{q_j\}, \{p_j\}, t)$ y $g(\{q_j\}, \{p_j\}, t)$ definidas en el espacio de fase, a la función que es resultado de la siguiente operación:

$$\{f, g\} \equiv \sum_j \left(\frac{\partial f}{\partial q_j} \frac{\partial g}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial g}{\partial q_j} \right)$$

En términos de los corchetes de Poisson la derivada total de la cantidad C se escribe:

$$\frac{df}{dt} = \{f, H\} + \frac{\partial f}{\partial t}$$

Está última expresión permite escribir un poderoso teorema para identificar las cuadraturas o constantes de un sistema dinámico:

Toerema 10.2

Commutación de Poisson con el Hamiltoniano. Una cantidad física $f(\{q_j\}, \{p_j\}, t)$ es una cuadratura o constante de movimiento de un sistema dinámico si se cumple que:

1. f no depende explícitamente del tiempo

Toerema 10.2 (Cont.)

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

2. El corchete de Poisson entre f y el Hamiltoniano H del sistema dinámico es tal que:

$$\{f, H\} = 0$$

A esta última propiedad la llamamos **comutación de Poisson con el Hamiltoniano**.

El teorema de conservación del Hamiltoniano podría considerarse un corolario de este teorema más general, en tanto, independientemente de si H depende o no del tiempo explícitamente, siempre se cumple que:

$$\{H, H\} = 0$$

La propiedad 2 contenida en el teorema anterior es particularmente útil, si no para encontrar cantidades conservadas, al menos sí para evaluar cuáles son constantes y cuáles no. Para esto último pueden llegar a ser muy útiles algunas propiedades matemáticas básicas de los corchetes de Poisson que resumimos en el siguiente teorema (para su demostración ver Sección de Problemas al final del Capítulo):

Proposición 10.3

Propiedades de los corchetes de Poisson. Dadas funciones $f(\{q_j\}, \{p_j\}, t)$, $g(\{q_j\}, \{p_j\}, t)$ y $h(\{q_j\}, \{p_j\}, t)$ y una constante arbitraria α , las siguientes son propiedades de los corchetes de Poisson:

- $\{f, g\} = -\{g, f\}$ (no comutatividad).
- $\{f + g, h\} = \{f, h\} + \{g, h\}$ (distributividad respecto a la suma).
- $\{fg, h\} = \{f, h\}g + f\{g, h\}$ (distributividad respecto al producto).
- $\{q_j, p_k\} = \{p_j, q_k\} = \delta_{jk}$ (identidad).
- $\{q_j, q_k\} = \{p_j, p_k\} = 0$ (variables canónicas conjugadas).
- $\{f, f\} = 0$ (Inversa).
- $\{\alpha f, g\} = \alpha\{f, g\}$ (linealidad).
- $\{\alpha f, g\} = \{f, \alpha g\}$ (intercambio).
- $\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0$ (propiedad cíclica).

10.7. Transformaciones canónicas

Una de las características más poderosas del formalismo Hamiltoniano es la manera como puede *manipularse* tanto el espacio de fase, como la función hamiltoniana misma, para simplificar la solución a problemas dinámicos muy complicados o para analizar algunas de sus propiedades más sutiles.

Para ilustrar esta flexibilidad del formalismo consideremos por ejemplo un problema muy estudiado en los últimos dos capítulos: el oscilador armónico simple. Una cuerda de masa m está unida a un resorte de constante elástica k y solo puede oscilar en una dimensión. Es fácil mostrar que el Hamiltoniano del sistema es simplemente:

$$H_{\text{MAS}}(x, p_x) = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2m}(p_x^2 + m^2\omega^2x^2)$$

donde $\omega \equiv \sqrt{k/m}$.

Consideremos ahora el siguiente cambio de coordenadas:

$$\begin{aligned} p_x &= C\sqrt{P} \cos X \\ x &= \frac{C\sqrt{P}}{m\omega} \sin X \end{aligned}$$

donde C es una constante desconocida.

Reemplazando en el Hamiltoniano obtenemos una nueva función:

$$K(X, P) \equiv H(x(X, P), p_x(X, P)) = \frac{C^2 P}{2m}$$

Aunque esta función es mucho más simple que el Hamiltoniano original no podemos asegurar que K sea una alternativa válida al Hamiltoniano para describir la dinámica del sistema. La razón esencial de esto es que no sabemos si las nuevas variables X y P , junto con la nueva función K satisfacen un conjunto de ecuaciones idéntica a las ecuaciones canónicas:

$$\dot{X} = +\frac{\partial K}{\partial P} \tag{10.24}$$

$$\dot{P} = -\frac{\partial K}{\partial X} \tag{10.25}$$

$$(10.26)$$

Definición 10.3

Transformación Canónica. Una transformación puntual (invertible) en el espacio de fase:

$$Q_k = Q_k(\{q_j\}, \{p_j\}, t) \tag{10.27}$$

$$P_k = P_k(\{q_j\}, \{p_j\}, t) \tag{10.28}$$

Definición 10.3 (Cont.)

se llama *transformación canónica* si es posible encontrar una función $K(\{Q_k\}, \{P_k\}, t)$ tal que:

$$\begin{cases} \dot{Q}_j = +\frac{\partial K}{\partial P_j} \\ \dot{P}_j = -\frac{\partial K}{\partial Q_j} \end{cases} \quad M \quad (10.29)$$

En otras palabras una transformación es canónica si la variable correspondiente al momento sigue siendo canónica conjugada de la variable generalizada correspondiente.

¿Cómo saber *exactamente* si una transformación es canónica? ¿qué condiciones matemáticas deben cumplir las ecuaciones de transformación (10.43) y (10.28) o sus inversas para satisfacer que exista una función que relacione sus tasas de variación a través de ecuaciones canónicas?

El conjunto de transformaciones consideradas en la definición anterior es muy amplio e incluye transformaciones en las que es posible que la relación entre el nuevo conjunto de variables y el conjunto original dependa del tiempo. Si nos restringimos a transformaciones puntuales que no dependen del tiempo (como la transformación postulada en el ejemplo del oscilador armónico simple):

$$Q_k = Q_k(\{q_j\}, \{p_j\}) \quad (10.30)$$

$$P_k = P_k(\{q_j\}, \{p_j\}) \quad (10.31)$$

la condición de transformación canónica adopta una forma relativamente simple.

Una transformación geométrica como la indicada arriba no debería cambiar el Hamiltoniano mismo. A lo sumo podemos postular que la función K de la definición no es otra cosa el Hamiltoniano original en el que simplemente cambiamos las variables originales por las nuevas variables a través de las transformaciones inversas :

$$K(\{Q_j\}, \{P_j\}, t) = H(\{q_j(\{Q_k, P_k\})\}, \{p_j(\{Q_k, P_k\})\}, t)$$

La pregunta que nos hacemos es si esta nueva función K es tal que:

$$\dot{Q}_j = \frac{\partial K}{\partial P_j} \quad (10.32)$$

En la igualdad anterior, Q_j y P_j son consideradas variables independientes. Pero podemos, por un momento tratarlas como las funciones de transformación, que a su vez dependen de q_j y p_j . En este caso:

$$\dot{Q}_j = \frac{\partial Q_j}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial Q_j}{\partial p_j} \dot{p}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j} \left(\frac{\partial Q_j}{\partial q_j} \right)_{q,p} - \frac{\partial H}{\partial q_j} \left(\frac{\partial Q_j}{\partial p_j} \right)_{q,p} \quad (10.33)$$

donde hemos utilizado las ecuaciones canónicas para reemplazar \dot{q}_j y \dot{p}_j en el lado derecho.

La notación $(\partial Q_j / \partial p_j)_{q,p}$ y $(\partial Q_j / \partial q_j)_{q,p}$ refuerza el hecho de que en estas derivadas las variables originales q y p juegan el papel de variables independientes.

Por otro lado, por la regla de la cadena y teniendo en cuenta las transformaciones inversas:

$$\frac{\partial K}{\partial P_j} = \frac{\partial K}{\partial p_j} \frac{\partial p_j}{\partial P_j} + \frac{\partial K}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial P_j} = \frac{\partial H}{\partial p_j} \left(\frac{\partial p_j}{\partial P_j} \right)_{Q,P} + \frac{\partial H}{\partial q_j} \left(\frac{\partial q_j}{\partial P_j} \right)_{Q,P} \quad (10.34)$$

aquí se ha usado el hecho de que en realidad K es el mismo Hamiltoniano H pero expresado en términos de las nuevas variables; pero cuando se toma una derivada como $\partial K / \partial q_j$ en realidad necesitamos volver a la forma funcional original de H y es por eso que hacemos $\partial K / \partial q_j = \partial H / \partial q_j$.

Para que se cumpla entonces la Ec. (10.32), el lado derecho de las Ecs. (10.33) y (10.34) deben ser iguales. Comparando término a término, la igualdad se satisface si y solo si:

$$\left(\frac{\partial Q_j}{\partial q_j} \right)_{q,p} = \left(\frac{\partial p_j}{\partial P_j} \right)_{Q,P} \quad (10.35)$$

$$\left(\frac{\partial Q_j}{\partial p_j} \right)_{q,p} = \left(\frac{\partial q_j}{\partial P_j} \right)_{Q,P} \quad (10.36)$$

Si se utilizó un procedimiento análogo pero partiendo de la ecuación:

$$\dot{P}_j = - \frac{\partial K}{\partial Q_j}$$

se obtienen las condiciones:

$$\left(\frac{\partial P_j}{\partial q_j} \right)_{q,p} = - \left(\frac{\partial p_j}{\partial Q_j} \right)_{Q,P} \quad (10.37)$$

$$\left(\frac{\partial P_j}{\partial p_j} \right)_{q,p} = \left(\frac{\partial q_j}{\partial Q_j} \right)_{Q,P} \quad (10.38)$$

A las condiciones expresadas en las Ecs. (10.35)-(10.38) se las conoce como *condiciones directas* para transformaciones canónicas restringidas.

Podemos usar este conjunto de condiciones para poner a prueba las transformaciones propuestas antes para el movimiento armónico simple:

$$p_x = C\sqrt{P} \cos X$$

$$x = \frac{C\sqrt{P}}{m\omega} \sin X$$

Para ello necesitamos primero obtener las transformaciones inversas:

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{C^2}(p_x^2 + m^2\omega^2x^2) \\ X &= \tan^{-1}\left(\frac{m\omega x}{p_x}\right) \end{aligned}$$

Pongamos a prueba la transformación con la condición:

$$\left(\frac{\partial Q_j}{\partial q_j}\right)_{q,p} = \left(\frac{\partial p_j}{\partial P_j}\right)_{Q,P}$$

que en este caso se expresaría como:

$$\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_{x,p_x} = \left(\frac{\partial p_x}{\partial P}\right)_{X,P}$$

El lado izquierdo de esta ecuación se puede escribir como:

$$\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_{x,p_x} = \frac{m\omega p_x}{p_x^2 + m^2\omega^2x^2}$$

Si usamos las reglas de transformación para p_x y para P la anterior relación queda:

$$\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_{x,p_x} = \frac{m\omega C\sqrt{P} \cos X}{C^2 P} = \frac{m\omega \cos X}{C\sqrt{P}} \quad (10.39)$$

Por otro lado:

$$\left(\frac{\partial p_x}{\partial P}\right)_{X,P} = \frac{C \cos X}{2\sqrt{P}} \quad (10.40)$$

Las Ecs. (10.39) y (10.40) son iguales si y solo si:

$$\frac{m\omega}{C} = \frac{C}{2}$$

o bien $C = \sqrt{2m\omega}$.

Es decir, la transformación:

$$x = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \sin X$$

$$p_x = \sqrt{2m\omega P} \cos X$$

satisface al menos una de las condiciones directas para ser una transformación canónica. Es posible mostrar (ver Problemas al final del capítulo) que esta transformación cumple también todas las demás condiciones directas, de donde concluimos que *es* canónica y que el hamiltoniano del sistema es, en el nuevo sistema de coordenadas:

$$K = \omega P \quad (10.41)$$

¿Qué importancia tienen las transformaciones canónicas?. El ejemplo del oscilador armónico simple (si bien muy sencillo para una técnica tan sofisticada) nos permite ilustrar nuevamente el poder de este tipo de transformaciones. Dicho Hamiltoniano en el nuevo sistema de coordenadas dado por la Ec. (10.41), tiene una serie de propiedades muy interesantes:

1. A diferencia del Hamiltoniano original, en el nuevo sistema de variables, X es cíclica y por lo tanto su momento canónico conjugado P es constante. Esto básicamente significa que la transformación canónica realizada convirtió el espacio de fase, de uno en el que los contornos de igual valor de H eran elipses, a otro en el que son líneas rectas horizontales (ver ??). La dinámica en el espacio transformado es trivial. Dado un punto inicial, el sistema se mueve sobre una línea recta horizontal con ecuación de movimiento dado por:

$$\dot{X} = \frac{\partial K}{\partial P} = \omega$$

que puede resolverse analíticamente como:

$$X = X_0 + \omega t$$

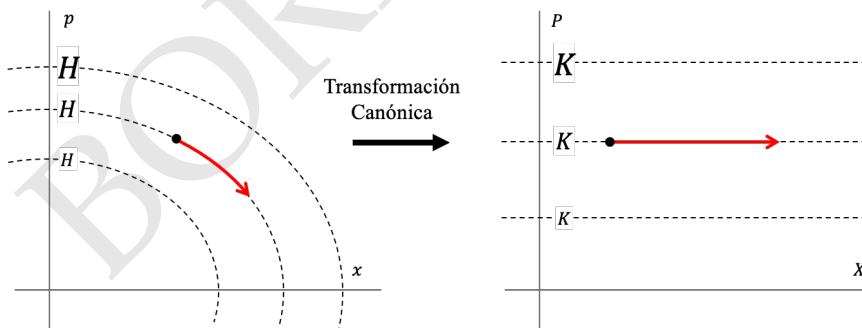


Figura 10.8: Ilustración del efecto en el espacio de fase y en la descripción de la dinámica de un sistema dinámico de una transformación canónica. En este caso se ilustra el oscilador armónico simple cuyo espacio de fase es tradicionalmente el de la izquierda, y el mismo sistema después de una transformación canónica convenientemente escogida (panel de la derecha).

2. Tanto el Hamiltoniano original, como el nuevo, satisfacen las condiciones que permiten identificarlo, primero como una constante y segundo como la energía mecánica:

$$\omega P = E$$

de donde se sigue que:

$$P = \frac{E}{\omega}$$

que habíamos dicho también es constante.

3. Las propiedades del sistema en el nuevo conjunto de variables y los resultados muy sencillos obtenidos en los apartes anteriores, nos permiten finalmente escribir la solución analítica al problema en las coordenadas generalizadas originales como:

$$x = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \sin(\omega t + X_0)$$

$$p_x = \sqrt{2mE} \cos(\omega t + X_0)$$

Es decir, en este caso, la transformación canónica propuesta nos permitió resolver completamente el problema al simplificar significativamente la dinámica del sistema en el espacio de fase. Esta es una de las aplicaciones posibles de este tipo de transformaciones.

Definición 10.4

Sistema integrable.

10.7.1. La función generatriz

En la sección anterior definimos e ilustramos el concepto de transformación canónica y de su utilidad estudiando un sistema muy conocido: el oscilador armónico simple. Los métodos heurísticos que usamos allí podrían ser utilizados para unos cuantos sistemas dinámicos relativamente simples. Pero ¿existe algún método analítico, alguna sistemática que nos permita encontrar transformaciones canónicas que sean útiles para una amplia diversidad de sistemas dinámicos?. Esta es justamente la pregunta que responde el denominado *formalismo de la función generatriz* que describimos a continuación.

Comencemos por considerar el principio de Hamilton:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0$$

Habíamos aprendido en el [Capítulo 9](#) que existe una cierta libertad en la elección de la función lagrangiana que satisface la ecuación anterior. En particular si una función L' es tal que:

$$L' = L - \frac{dF}{dt} \quad (10.42)$$

donde F es una función cualquiera de las variables generalizadas y del tiempo entonces el principio de Hamilton sigue siendo válido para L' así como lo son las correspondientes ecuaciones de Euler-Lagrange. L' es también un Lagrangiano del sistema. Pero ¿que es físicamente la función F ?

Una aplicación muy interesante de este resultado tiene que ver justamente con la determinación de las propiedades de las transformaciones de coordenadas que estamos estudiando en estas secciones. Así, suponga que cambiamos las variables generalizadas originales del Hamiltoniano $\{q_j\}$ por unas nuevas variables y lo hacemos a través de un conjunto invertible de reglas de transformación

$$Q_j = Q_j(\{q_k\}, t) \quad (10.43)$$

A este tipo de transformación la llamamos una **transformación puntual** en el espacio de configuración.

Si reemplazamos la inversa de esta transformación $\{q_j(\{Q_k\}, t)\}$ en el lagrangiano original obtendremos una nueva función $L'(\{Q_j\}, \{\dot{Q}_j\}, t)$. La pregunta es, como nos la hicimos en la sección anterior con el Hamiltoniano, si L' sigue siendo una función apropiada para describir la dinámica del sistema usando el principio de Hamilton o equivalentemente las ecuaciones de Euler-Lagrange.

Utilizando la propiedad expresada en la Ec. (10.7.2) podemos afirmar que si la nueva función es tal que se cumple:

$$L'(\{Q_j\}, \{\dot{Q}_j\}, t) = L(\{q_j\}, \{\dot{q}_j\}, t) - \frac{dF(\{q_j\}, \{Q_j\}, t)}{dt}$$

entonces el principio de Hamilton con L' en lugar de L seguirá siendo válido. Nótese que en esta nueva expresión la *misteriosa* F puede ser ahora función de las variables originales y de las nuevas variables.

Si usamos la regla de la cadena para expresar la derivada total de F respecto al tiempo, la ecuación anterior se puede escribir como:

$$L'(\{Q_j\}, \{\dot{Q}_j\}, t) = L(\{q_j\}, \{\dot{q}_j\}, t) - \sum_k \left(\frac{\partial F_{qQ}}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial F_{qQ}}{\partial Q_k} \dot{Q}_k \right) + \frac{\partial F_{qQ}}{\partial t}$$

donde hemos introducido la notación F_{qQ} que indica que la función F escrita aquí es función solo de las variables generalizadas. Esta notación será usada sistemáticamente en lo sucesivo.

Una interesante consecuencia de este resultado es que los momentos canónicos conjugados $p_j = \partial L / \partial \dot{q}_j$ y $P_j = \partial L' / \partial \dot{Q}_j$, en ambos sistemas de coordenadas, obedecen relaciones muy interesantes con la misteriosa función F . Así por ejemplo, si derivamos parcialmente la ecuación anterior por \dot{Q}_j y tenemos en cuenta que L no depende explícitamente de esa cantidad obtenemos:

$$P_j = - \frac{\partial F_{qQ}}{\partial Q_k} \quad (10.44)$$

De forma similar si derivamos respecto a \dot{q}_j obtenemos la relación:

$$p_j = \frac{\partial F_{qQ}}{\partial q_k} \quad (10.45)$$

Las dos ecuaciones anteriores no son ecuaciones cualquiera. Implícitamente expresan la manera como los momentos canónicos conjugados se relacionan con las variables generalizadas de uno y otro sistema. Estas ecuaciones *son* las reglas de transformación de los momentos canónicos que mantienen la estructura formal de la descripción dinámica del sistema.

En otras palabras, podemos estar seguros que tanto el lagrangiano como el Hamiltoniano del sistema, escrito en términos de las variables generalizadas $\{Q_j\}$ o de los momentos canónicos conjugados $\{P_j\}$, que obedecen las ecuaciones de transformación (10.43) y (10.44), respectivamente, seguirán satisfaciendo también las ecuaciones de Euler-Lagrange y las ecuaciones canónicas de Hamilton. Esta última es justamente la condición de una transformación canónica.

En resumen, hemos descubierto como *generar* una transformación canónica, partiendo de una transformación puntual y una función $F(\{q_j\}, \{Q_j\}, t)$ dada. Es justamente por esta razón que llamamos a la función F , la **función generatriz** y al procedimiento esbozado en los párrafos anteriores el **formalismo de la función generatriz** de las transformaciones canónicas.

Para clarificar un poco todo lo anterior, consideremos una función generatriz específica y trivial:

$$F_{qQ} = \sum Q_k q_k$$

Si aplicamos las Ecs. (10.44) y (10.45) para este caso obtenemos:

$$P_j = -q_j$$

y

$$p_j = Q_j$$

Es decir, si *en cualquier sistema dinámico* invertimos los momentos por las variables generalizadas y viceversa:

$$\begin{aligned} Q_j &= p_j \\ P_j &= -q_j \end{aligned} \tag{10.46}$$

tanto el Lagrangiano como el Hamiltoniano resultante seguirán satisfaciendo las ecuaciones de Euler-Lagrange y las ecuaciones canónicas de Hamilton, respectivamente. Es decir, las transformaciones dadas por las Ecs. (10.46) son transformaciones canónicas.

¿Tienen todas las transformaciones canónicas una función generatriz asociada? ¿Dada una transformación que simplifica el Hamiltoniano de un sistema (y por lo tanto su dinámica) cómo encontrar la función generatriz correspondiente? ¿Son todas las funciones generatrices de la forma $F_{qQ} = F(\{q_j\}, \{Q_j\}, t)$?

10.7.2. Transformaciones canónicas básicas

Los mismos resultados teóricos que obtuvimos al analizar el principio de Hamilton en la sección anterior y su rol en la evaluación de las transformaciones puntuales, podemos aplicarlo ahora con el principio de Hamilton modificado (Ec. 10.13):

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (\sum p_k \dot{q}_k - H) dt = 0 \quad (10.47)$$

En la [Sección 10.4](#) habíamos probado que de este principio geométrico se derivan las ecuaciones canónicas de Hamilton. Esto implica, para transformaciones en el espacio de fase o **transformaciones de contacto**, que si en el nuevo conjunto de coordenadas (variables generalizadas y momentos), el Hamiltoniano es una función K , también se satisface para ella:

$$\delta \int \left(\sum_k P_k \dot{Q}_k - K \right) dt = 0 \quad (10.48)$$

La condición para que se cumpla esta relación es análoga a la que encontramos en el caso del Lagrangiano (Ec.):

$$\sum_k P_k \dot{Q}_k - K = \sum p_k \dot{q}_k - H - \frac{dF}{dt} \quad (10.49)$$

La novedad en esta última expresión es que ahora es claro que la función generatriz F puede en realidad depender de todas las variables implicadas en el problema $\{q_j\}, \{p_j\}, \{Q_j\}, \{P_j\}$ o de algunas combinaciones de ellas y no solo de las variables $\{q_j\}$ y $\{Q_j\}$ como se implicaba en la sección anterior.

En el caso particular en el que la función generatriz sea del tipo $F_{qQ} = F(\{q_j\}, \{Q_j\}, t)$ deberíamos reproducir las condiciones de la transformación canónica en las Ecs. [\(10.44\)](#) y [\(10.45\)](#). Pongamos entonces a prueba, con esta función generatriz particular, la nueva condición en la Ec. [\(10.49\)](#). Si utilizamos la regla de la cadena para escribir dF/dt y despejamos K obtenemos:

$$K = H + \sum \left(-p_k + \frac{\partial F_{qQ}}{\partial q_k} \right) \dot{q}_k + \sum \left(P_k + \frac{\partial F_{qQ}}{\partial Q_k} \right) \dot{Q}_k + \frac{\partial F_{qQ}}{\partial t} \quad (10.50)$$

En esta ecuación ni K , ni H , ni $\partial F/\partial t$ dependen de \dot{q}_j o de \dot{Q}_j . No existe ninguna manera de que esta ecuación sea consistente mientras cualquiera de los términos en las sumatorias sea distinto de cero. Puesto de otro modo, si derivamos parcialmente a ambos lados de la ecuación con respecto a \dot{q}_j el resultado será:

$$-p_j + \frac{\partial F_{qQ}}{\partial q_j} = 0$$

para cualquier j . Un razonamiento similar puede usarse para mostrar que:

$$P_j + \frac{\partial F_{qQ}}{\partial Q_j} = 0$$

Esto implica que la Ecuación [\(10.50\)](#) solo es válida si se cumplen las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} p_j &= \frac{\partial F_{qQ}}{\partial q_j} \\ P_j &= -\frac{\partial F_{qQ}}{\partial Q_j} \\ K &= H + \frac{\partial F_{qQ}}{\partial t} \end{aligned}$$

De estas, las primeras dos condiciones son justamente las que habíamos derivado en la sección anterior. Sin embargo la última es una condición nueva y muy interesante: no basta con reemplazar las variables antiguas en el hamiltoniano original para obtener el nuevo Hamiltoniano. Si la función generatriz depende explícitamente del tiempo, es necesario agregar al hamiltoniano original el término $\partial F_{qQ}/\partial t$ para que la nueva función K sea un Hamiltoniano.

El procedimiento anterior puede repetirse para el caso, por ejemplo, en el que asumimos que la función generatriz F depende de las variables generalizadas originales $\{q_j\}$ y de los nuevos momentos conjugados $\{P_j\}$. Es decir, usando la notación introducida antes F_{qP} . Usando la regla de la cadena, la Ec. (10.49) quedaría:

$$K = H + \sum \left(-p_k + \frac{\partial F_{qP}}{\partial q_k} \right) \dot{q}_k + \sum P_k \dot{Q}_k + \sum_k \frac{\partial F_{qP}}{\partial P_k} \dot{P}_k + \frac{\partial F_{qP}}{\partial t} \quad (10.51)$$

En este caso, sin embargo, tenemos una proliferación de variables que nos conduce a un callejón sin salida matemático. Una posible salida a ese callejón es usar como función generatriz, no una función del tipo F_{qP} sino una de la forma:

$$F(\{q_j\}, \{P_j\}, \{Q_j\}) = F_{qP} - \sum Q_k P_k$$

de ese modo a los términos de la Ecuación (10.51), agregaríamos los términos nuevos $-\sum(P_k \dot{Q}_k + Q_k \dot{P}_k)$, que permitirían eliminar de un lado el segundo término $\sum P_k \dot{Q}_k$ y del otro, reunir los factores proporcionales a \dot{P}_k para obtener finalmente:

$$K = H + \sum \left(-p_k + \frac{\partial F_{qP}}{\partial q_k} \right) \dot{q}_k + \sum_k \left(-Q_k + \frac{\partial F_{qP}}{\partial P_k} \right) \dot{P}_k + \frac{\partial F_{qP}}{\partial t}$$

Como hicimos en el caso de la función generatriz del tipo F_{qQ} , la anterior condición conduce a las siguientes relaciones que definen la transformación canónica generada por F_{qP} :

$$\begin{aligned} p_j &= \frac{\partial F_{qP}}{\partial q_j} \\ Q_j &= \frac{\partial F_{qP}}{\partial P_j} \\ K &= H + \frac{\partial F_{qP}}{\partial t} \end{aligned}$$

Un ejemplo trivial de una transformación de este tipo sería aquella que tiene función generatriz:

$$F_{qP} = \sum q_k P_k$$

En este caso la transformación queda:

$$p_j = P_j$$

$$q_j = Q_j$$

$$K = H$$

es decir, $F_{qP} = \sum q_k P_k$ es la función generatriz de la **transformación canónica identidad**.

Una síntesis de los tipos de transformaciones canónicas básicas obtenidos siguiendo procedimientos análogos a los que usamos en esta sección y sus propiedades básicas, se presentan a continuación:

Proposición 10.4

Transformaciones canónicas básicas. Las siguientes son los únicos tipos de función generatriz y transformaciones canónicas que involucran todos los grados de libertad de las variables generalizadas y los momentos, y que se obtienen por transformaciones de legendre a partir del tipo básico F_{qQ} :

- **Transformación de tipo qQ .** $F = F_{qQ}$, Transformación: $p_j = \partial F_{qQ} / \partial q_j$, $P_j = -\partial F_{qQ} / \partial Q_j$.
- **Transformación de tipo qP .** $F = F_{qP} - \sum Q_k P_k$, Transformación: $p_j = \partial F_{qP} / \partial q_j$, $Q_j = \partial F_{qP} / \partial P_j$.
- **Transformación de tipo pQ .** $F = F_{pQ} + \sum q_k p_k$, Transformación: $q_j = -\partial F_{pQ} / \partial p_j$, $P_j = -\partial F_{pQ} / \partial Q_j$.
- **Transformación de tipo pP .** $F = F_{pP} + \sum q_k p_k - \sum Q_k P_k$, Transformación: $q_j = -\partial F_{pP} / \partial p_j$, $Q_j = -\partial F_{pP} / \partial P_j$.

En todos los casos:

$$K = H + \frac{\partial F}{\partial t} \quad (10.52)$$

10.8. El método de Hamilton-Jacobi

Como vimos en las secciones anteriores, las transformaciones canónicas permiten, en muchas situaciones, simplificar el Hamiltoniano de un sistema dinámico hasta lograr que todas (o gran parte) de las nuevas coordenadas del sistema (normalmente las variables generalizadas) sean cíclicas. Una vez conseguido esto, las variables conjugadas (normalmente momentos) en el nuevo sistema de coordenadas se vuelven constantes y la solución al problema es prácticamente trivial.

¿Será posible, dado un sistema dinámico, encontrar una (súper) transformación canónica tal que todas las coordenadas y momentos sean constantes de movimiento? Matemáticamente:

$$\begin{aligned}\dot{Q}_j &= \frac{\partial K}{\partial P_j} = 0 \\ \dot{P}_j &= -\frac{\partial K}{\partial Q_j} = 0\end{aligned}$$

Una manera de conseguir este ideal sería encontrar una transformación canónica tal que el Hamiltoniano K transformado fuera constante o lo que es lo mismo cero. Esta condición puede escribirse matemáticamente usando la Ecuación (10.52):

$$H(\{q_j\}, \{p_j\}, t) + \frac{\partial F}{\partial t} = 0 \quad (10.53)$$

El reto consiste entonces en encontrar, dado el Hamiltoniano H del sistema, la función generatriz F que satisface la ecuación diferencial en derivadas parciales escrita arriba. Pero ¿qué tan complejo puede llegar a ser este problema? En principio la función generatriz F puede depender de todas las cantidades relevantes involucradas, las variables originales $\{q_j\}, \{p_j\}$ así como las nuevas $\{Q_j\}, \{P_j\}$ y el tiempo.

Una primera idea (que puede no funcionar para todos los sistemas dinámicos posibles), podría ser la de restringir la función generatriz a uno de los tipos básicos introducidos en la sección anterior. Así por ejemplo si suponemos que la función es del tipo F_{qP} , sabemos que el momento conjugado de las variables q_j estará dado por:

$$p_j = \frac{\partial F_{qP}}{\partial q_j}$$

Esta identidad nos permite escribir la condición en la Ec. (10.53) de la forma:

$$H\left(\{q_j\}, \left\{ \frac{\partial F_{qP}}{\partial q_j} \right\}, t\right) + \frac{\partial F_{qP}}{\partial t} = 0 \quad (10.54)$$

Esta ecuación es central a todo el formalismo que sigue y la llamaremos la **Ecuación de Hamilton-Jacobi**. Para abreviar, además, en lo sucesivo usaremos la notación $S \equiv F_{qP}$ y llamaremos a esta última **función principal de Hamilton**.

Nota

Interpretación física de S . Existe una interesante interpretación de la función principal de Hamilton que se obtiene si se toma la derivada total de la función respecto al tiempo y se desarrolla usando la regla de la cadena:

Nota (Cont.)

$$\frac{dS}{dt} = \sum_j \frac{\partial S}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial S}{\partial t}$$

Si ahora utilizamos la propiedad de la función generatriz $p_j = \partial S / \partial q_j$ y la ecuación de Hamilton-Jacobi (Ec. 10.54) $\partial S / \partial t = -H$, encontramos:

$$\frac{dS}{dt} = \sum_j p_j \dot{q}_j - H = L$$

Integrando, obtenemos:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt + k$$

donde k es una constante. Es decir, la función principal de Hamilton difiere por una constante de la acción.

10.8.1. Ejemplo 1: el oscilador armónico en una dimensión

La mejor manera de ilustrar el uso de la ecuación de Hamilton-Jacobi es considerar al menos un problema concreto. Ya lo hemos hecho para poner a prueba muchos conceptos abstractos de los últimos dos capítulos y la haremos aquí para hacer mostrar el poder del método de Hamilton-Jacobi.

Consideremos nuevamente el oscilador armónico, cuyo Hamiltoniano ya habíamos escrito antes:

$$H_{MAS} = \frac{1}{2m}(p_x^2 + m^2\omega^2x^2)$$

La ecuación de Hamilton-Jacobi se obtiene *reemplazando* $p_x = \partial S / \partial x$:

$$\frac{1}{2m} \left[\left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + m^2\omega^2x^2 \right] + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

La meta es encontrar, a partir de esta ecuación la función principal de Hamilton S , que genera la transformación que hace al Hamiltoniano cíclico en todas las variables.

La invarianza implícita del tiempo del Hamiltoniano original implica que la siguiente cuadratura es válida:

$$H_{MAS} = E$$

donde E es la energía mecánica del sistema. Ahora bien, por la definición misma de S es cierto también que:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -H_{MAS} = -E$$

Esta última ecuación puede integrarse para producir:

$$S = W - Et$$

donde la nueva función W , que no depende del tiempo, se llamamos frecuentemente **función característica de Hamilton**. El procedimiento anterior es fundamental en tanto nos permite separar la dependencia del tiempo de la función principal de Hamilton y dejar abierto solamente el problema de su dependencia de las demás variables generalizadas, dependencia que queda restringida a la función característica.

En términos de W , la ecuación de Jamilton-Jacobi se convierte en:

$$\frac{1}{2m} \left[\left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 + m^2 \omega^2 x^2 \right] = E$$

Esta ecuación diferencial es separable y se integra como:

$$W(x) = \sqrt{2mE} \int_0^x \sqrt{1 - \frac{m\omega^2 x'^2}{2E}} dx'$$

y de ella se puede obtener finalmente la función de Hamilton del sistema:

$$S(x, E, t) = \sqrt{2mE} \int_0^x \sqrt{1 - \frac{m\omega^2 x'^2}{2E}} dx' - Et$$

¿Qué propósito tiene exactamente esta función?. No debemos perder de vista que S es una función generatriz de tipo F_{qP} de una transformación canónica que hace al Hamiltoniano igual a 0. De acuerdo con las propiedades de una función generatriz de este tipo, se cumple que:

$$p_x = \frac{\partial S}{\partial x}$$

$$Q = \frac{\partial S}{\partial P}$$

¿Qué cantidades físicas juegan, en el contexto de esta transformación, el papel del momento canónico P o de la variable generalizada Q ? Esta es quizás una de las características más peculiares de lo que llamaremos aquí, el **método de Hamilton-Jacobi**. Dado que el hamiltoniano en las variables Q y P es 0, estas dos cantidades deben ser cuadraturas o constantes del sistema dinámico. Esto implica que en principio podemos escoger de entre todas las cantidades constantes aquellas que puedan jugar de la manera más conveniente posible el papel del momento P . Una vez elegida P , el significado y valor de Q deberá obtenerse a partir de la ecuación $\partial S / \partial P$.

En el caso del sistema que estamos estudiando en este ejemplo, examinando la fórmula de la función principal de Hamilton, nos damos cuenta que la energía E puede ser una elección adecuada para el momento P . Con esta elección Q queda:

$$Q = \frac{\partial S}{\partial P} = \frac{\partial S}{\partial E} = \sqrt{\frac{m}{2E}} \int_0^x \frac{dx'}{\sqrt{1 - \frac{m\omega^2 x'^2}{2E}}} - t$$

que integrando se convierte en:

$$\omega Q = \sin^{-1} \left(\sqrt{\frac{m\omega^2}{2E}} x \right) - \omega t$$

Si llamamos $\beta \equiv \omega Q$, la relación anterior nos permite encontrar la solución del problema para x :

$$x = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \sin(\omega t + \beta)$$

Este es uno de las características más importantes del método de Hamilton-Jacobi: permite encontrar la trayectoria del sistema mientras buscamos el valor de las constantes de movimiento después de la transformación canónica.

Finalmente S nos permite encontrar la solución para p_x usando la relación:

$$p_x = \frac{\partial S}{\partial x} = \sqrt{2mE} \sqrt{1 - \frac{m\omega^2 x^2}{2E}}$$

donde hemos usado el teorema fundamental del cálculo. Con un poco de álgebra y usando la solución para x obtenemos finalmente:

$$p_x = \sqrt{2mE} \cos(\omega t + \beta)$$

Podemos resumir el procedimiento anterior de la siguiente manera:

1. **Hamiltoniano original.** Un sistema dinámico con un grado de libertad tiene el siguiente Hamiltoniano:

$$H_{MAS} = \frac{1}{2m}(p_x^2 + m^2\omega^2 x^2)$$

Queremos encontrar $x(t)$ y $p_x(t)$.

2. **Variables y Hamiltoniano objetivo.** Para resolver el problema sabemos que existe una transformación canónica $(x, p_x) \rightarrow (Q, P)$ tal que en el nuevo conjunto de variables:

$$\begin{aligned} K(Q, P) &= 0 \\ \dot{P} &= 0 \\ \dot{Q} &= 0 \end{aligned}$$

3. **Propiedades de la transformación.** Asumimos que la transformación canónica tiene una función generatriz del tipo F_{qP} que llamaremos $S(x, P)$, tal que:

$$\begin{aligned} p_x &= \frac{\partial S}{\partial x} \\ Q &= \frac{\partial S}{\partial P} \\ 0 &= H + \frac{\partial S}{\partial t} \end{aligned} \tag{10.55}$$

4. La energía y la ecuación de Hamilton-Jacobi. La última ecuación del apartado anterior tiene dos implicaciones posibles.

- Dado que el hamiltoniano del sistema cumple las condiciones del teorema de conservación de la energía, esta ecuación puede ser vista como una relación numérica entre la derivada parcial de la función generatriz con respecto al tiempo y la energía mecánica total del sistema E :

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -E$$

que además puede integrarse para obtener:

$$S(x, P, t) = W(x, P) - Et$$

Este resultado además nos permite identificar el momento en el nuevo sistema de coordenadas

$$P = E$$

- La misma ecuación puede ser vista como una cuadratura, es decir una fórmula en la que se escribe H de forma como función de x y p_x . Ahora bien, aprovechamos la relación $p_x = \partial S / \partial x = \partial W / \partial x$, para que la cuadratura adopte la forma de una ecuación diferencial:

$$\frac{1}{2m} \left[\left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + m^2 \omega^2 x^2 \right] = E$$

A esta ecuación la llamamos la **Ecuación de Hamilton-Jacobi** y su solución debe provernos en últimas la función generatriz S de la transformación.

- Solución a la ecuación de Hamilton-Jacobi y la función generatriz.** La ecuación de Hamilton-Jacobi de este sistema es directamente separable y la función principal de Hamilton resulta ser:

$$S(x, E, t) = \sqrt{2mE} \int_0^x \sqrt{1 - \frac{m\omega^2 x'^2}{2E}} dx' - Et$$

- Variable generalizada en el nuevo sistema.** De acuerdo con las propiedades de la transformación, la variable generalizada $Q = \partial S / \partial E$ resulta ser:

$$Q = \frac{1}{\omega} \sin^{-1} \left(\sqrt{\frac{m\omega^2}{2E}} x \right) - t$$

Como sabemos que Q es una constante, de esta ecuación podemos despejar x y obtener la solución:

$$x = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \sin(\omega t + \beta)$$

donde hemos llamado $\beta \equiv \omega Q$

7. **Momentos del sistema original.** De otra parte $p_x = \partial S / \partial x$, de donde podemos obtener la solución para p_x a partir de la función generatriz:

$$p_x = \sqrt{2mE} \cos(\omega t + \beta)$$



Nota

¿Método, formalismo o teoría?. Aunque no estemos muy familiarizados con el método de Hamilton-Jacobi, este método representa una tercera alternativa para resolver problemas mecánicos. Es por esto que muchos autores lo llaman también el **formalismo de Hamilton-Jacobi** o la **teoría de Hamilton-Jacobi**.

10.8.2. Ejemplo 2: partícula en caída libre

Una de las características que hace complicada la aplicación del método de Hamilton-Jacobi, es que los pormenores del método dependen mucho del sistema que estemos estudiando. La mejor manera de aprender a aplicarlo es aplicándolo al mayor número posible de sistemas.

Un tipo importante de ejemplo que debemos conocer antes de aplicar el método a la mecánica celeste, es el de sistemas con más de un grado de libertad. Consideremos por ejemplo el caso de una partícula que se mueve sin restricciones en un campo gravitacional homogéneo $\vec{g} = -g\hat{e}_z$. Para organizar la solución al problema la presentaremos de la misma manera que lo hicimos con la síntesis del problema del oscilador armónico simple en la última sesión.

1. **Hamiltoniano original.** El hamiltoniano del sistema es

$$H_{CL} = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + mgz$$

Queremos encontrar $x(t), y(t), z(t)$ y $p_x(t), p_y(t), p_z(t)$.

2. **Variables y Hamiltoniano objetivo.** Para resolver el problema sabemos que existe una transformación canónica $(x, y, z, p_x, p_y, p_z) \rightarrow (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ tal que en el nuevo conjunto de variables:

$$\begin{aligned} K(\{\beta_j\}, \{\alpha_j\}) &= 0 \\ \dot{\beta}_j &= 0 \\ \dot{\alpha}_j &= 0 \end{aligned}$$

3. **Propiedades de la transformación.** Asumimos que la transformación canónica tiene una función generatriz del tipo F_{qP} que llamaremos $S(\{x_j\}, \{\alpha_j\}, t)$ donde $\{x_j\} : (x, y, z)$ tal que:

$$\begin{aligned}
 p_j &= \frac{\partial S}{\partial x_j} \\
 \beta_j &= \frac{\partial S}{\partial \alpha_j} \\
 0 &= H + \frac{\partial S}{\partial t}
 \end{aligned}
 \tag{10.56}$$

4. La energía y la ecuación de Hamilton-Jacobi. La última ecuación del apartado anterior tiene dos implicaciones posibles.

1. Dado que el hamiltoniano del sistema cumple las condiciones del teorema de conservación de la energía se cumple que:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -E$$

que puede integrarse para obtener:

$$S(\{x_j\}, \{\alpha_j\}, t) = W(\{x_j\}, \{\alpha_j\}) - Et$$

2. La ecuación de Hamilton-Jacobi en este caso será:

$$\frac{1}{2m} \left[\left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial z} \right)^2 \right] + mgz = E$$

5. Solución a la ecuación de Hamilton-Jacobi y la función generatriz. La ecuación de Hamilton-Jacobi en este caso es un poco más complicada. Aún así, al menos para este sistema, podemos aplicar un método conocido en la teoría de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales como separación de variables. Para ello asumimos que la función característica W puede escribirse como una suma:

$$W = W_x + W_y + W_z$$

donde, por ejemplo la función W_x no depende de y , ni de z . Siendo este el caso, la ecuación de Hamilton-Jacobi es equivalente en realidad a 3 ecuaciones diferenciales de primer orden en cada una de las variables:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial W_x}{\partial x} \right)^2 &= \alpha_1 \\
 \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial W_y}{\partial y} \right)^2 &= \alpha_1 \\
 \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial W_z}{\partial z} \right)^2 &= \alpha_3 - mgz
 \end{aligned}
 \tag{10.57}$$

donde α_1, α_2 y α_3 son tres constantes (que asumiremos iguales a los momentos canónicos en el nuevo sistema de coordenadas) que cumplen:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = E$$

Las ecuaciones individuales son integrables y producen la siguiente solución:

$$\begin{aligned} W_x &= \sqrt{2m\alpha_1}x \\ W_y &= \sqrt{2m\alpha_1}y \\ W_z &= \sqrt{\frac{8}{9mg^2}}(\alpha_3 - mgz)^{3/2} \end{aligned} \tag{10.58}$$

y con esto la función generatriz de la transformación canónica queda:

$$S = \sqrt{2m\alpha_1}x + \sqrt{2m\alpha_1}y + \sqrt{\frac{8}{9mg^2}}(\alpha_3 - mgz)^{3/2} - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)t$$

donde reemplazamos $E = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$.

6. **Variable generalizada en el nuevo sistema.** Las variables generalizadas $\beta_j = \partial S / \partial \alpha_j$ se obtienen derivando la función generatriz:

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \sqrt{\frac{m}{2\alpha_1}}x - t \\ \beta_2 &= \sqrt{\frac{m}{2\alpha_2}}y - t \\ \beta_3 &= \sqrt{\frac{2(\alpha_3 - mgz)}{mg^2}} - t \end{aligned}$$

De aquí podemos despejar x, y, z para finalmente obtener la solución:

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{\frac{2\alpha_1}{m}}(\beta_1 + t) \\ y &= \sqrt{\frac{2\alpha_2}{m}}(\beta_2 + t) \\ z &= \frac{\alpha_3}{mg} - \frac{g}{2}(\beta_3 + t)^2 \end{aligned}$$

7. **Momentos del sistema original.** Los momentos originales $p_j = \partial S / \partial x_j$ se obtienen también de la función generatriz:

$$\begin{aligned} p_x &= \sqrt{2m\alpha_1} \\ p_y &= \sqrt{2m\alpha_2} \\ p_z &= -\sqrt{2m}(\alpha_3 - mgz)^{1/2} \end{aligned}$$

¿Coinciden estos resultados con aquellos que conocemos de la mecánica (o la cinemática) newtoniana?. Los momentos lineales en el punto 7 coinciden con la expectativa de que el momento es constante en dirección de x y de y (lo que también es consistente con el hecho de que estas variables son cíclicas en el Lagrangiano original). Además podemos hacer la identificación:

$$\begin{aligned} v_x &= \sqrt{\frac{2\alpha_1}{m}} \\ v_y &= \sqrt{\frac{2\alpha_2}{m}} \end{aligned} \tag{10.59}$$

que son constantes en el sistema de coordenadas original.

De aquí reconocemos que las constantes:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{1}{2}mv_x^2 \\ \alpha_2 &= \frac{1}{2}mv_y^2 \end{aligned} \tag{10.60}$$

coinciden con las que identificamos en la mecánica newtoniana como partes de la energía cinética en dirección de x y en dirección de y .

Con esto la solución para las componentes de la posición de la partícula sobre el plano $x - y$ se pueden escribir como:

$$\begin{aligned} x &= v_x(t + \beta_1) \\ y &= v_y(t + \beta_2) \end{aligned} \tag{10.61}$$

que coincide con lo que sabemos de la cinemática galileana. De aquí podemos ver que las constantes β_1 y β_2 están relacionadas con la posición inicial de la partícula (x_0, y_0):

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \frac{x_0}{v_x} \\ \beta_2 &= \frac{y_0}{v_x} \end{aligned} \tag{10.62}$$

Un poco más difícil es juzgar la solución en dirección de z . Desarrollando la expresión obtenida para $z(t)$:

$$z(t) = \left(\frac{\alpha_3}{mg} - \frac{1}{2}g\beta_3^2 \right) - \beta_3 g t - \frac{gt^2}{2}$$

Comparando con nuestras expectativas galileanas podemos reconocer que $\beta_3 = v_{0z}/g$ (componente inicial de la velocidad en dirección z) y $\alpha_3 = mgz_0 + \frac{1}{2}mv_{0z}^2$ (parte de la energía total asociada con la posición y velocidad en z).

Finalmente si elevamos al cuadrado la solución obtenida para p_z y reemplazamos α_3 obtenemos:

$$\frac{p_z^2}{2m} = \frac{1}{2}mv_{0z}^2 + mg(z - z_0)$$

que escrita en términos de la velocidad v_z ,

$$v_z^2 = v_{0z}^2 + 2g(z - z_0)$$

coincide con un conocido resultado de la cinemática galileana.

En conclusión el método de Hamilton-Jacobi es equivalente a los métodos newtonianos.

10.9. Mecánica celeste en el formalismo hamiltoniano

Después de haber introducido en las secciones anteriores los elementos básicos del formalismo Hamiltoniano, ha llegado el momento de que volvamos sobre los problemas de la mecánica celeste pero que lo hagamos ahora con las herramientas del nuevo formalismo. Ya habíamos hecho un ejercicio similar en el caso del formalismo lagrangiano. La idea en esta sección no es que volvamos sobre los mismos problemas que estudiamos allí, sino de que tratemos con las particularidades del formalismo Hamiltoniano otros aspectos de algunos sistemas de la mecánica celeste que conocimos bien usando el formalismo vectorial.

10.9.1. El hamiltoniano del problema de los dos cuerpos

En el Capítulo 9 habíamos deducido la forma general del Lagrangiano del problema relativo de dos cuerpos usando como variables generalizadas las coordenadas esféricas. El resultado que obtuvimos fue (Ec. 9.57):

$$L_{2B} = \frac{1}{2}m_r(\dot{r}^2 + r^2\cos^2\phi\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\phi}^2) + \frac{\mu m_r}{r}$$

donde recordemos $m_r = Gm_1m_2/M$ es la masa reducida del sistema. Podemos, partiendo de este lagrangiano y con las herramientas y métodos estudiados en este capítulo, escribir el Hamiltoniano del sistema y estudiar sus propiedades.

Para ello primero debemos encontrar los momentos canónicos conjugados de las variables generalizadas:

$$\begin{aligned}
 p_r &= \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m_r \dot{r} \\
 p_\theta &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m_r r^2 \cos^2 \phi \dot{\theta} \\
 p_\phi &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = m_r r^2 \dot{\phi}
 \end{aligned} \tag{10.63}$$

e invertir para obtener las velocidades generalizadas como función de estos momentos:

$$\begin{aligned}
 \dot{r} &= \frac{p_r}{m_r} \\
 \dot{\theta} &= \frac{p_\theta}{m_r r^2 \cos^2 \phi} \\
 \dot{\phi} &= \frac{p_\phi}{m_r r^2}
 \end{aligned} \tag{10.64}$$

Usando la definición de la función Hamiltoniana para este caso:

$$H_{2B} = (r, \theta, \phi, p_r, p_\theta, p_\phi) = p_r \dot{r} + p_\theta \dot{\theta} + p_\phi \dot{\phi} - L_{qp}$$

y reemplazando las velocidades generalizadas como función de los momentos y variables generalizadas en esta expresión y en el lagrangiano original obtenemos:

$$H_{2B}(r, \theta, \phi, p_r, p_\theta, p_\phi) = \frac{1}{2m_r} \left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{\cos^2 \phi r^2} + \frac{p_\phi^2}{r^2} \right) - \frac{m_r \mu}{r}$$

¿Qué simetría podemos reconocer en este Hamiltoniano?. Hay dos bastante evidentes y que conducen a resultados muy conocidos:

- Variables cíclicas o ignorables.** La variable θ no aparece explícitamente en el Hamiltoniano y por lo tanto es ignorable. Esto implica que la ecuación de movimiento para su momento canónico conjugado

$$p_\theta = -\frac{\partial H_{2B}}{\partial \theta} = 0$$

de donde se sigue por lo tanto que p_θ es una cuadratura del sistema:

$$m_r r^2 \cos^2 \phi \dot{\theta} = \alpha_\theta$$

con α_θ una constante⁶⁸

⁶⁸Aquí hemos utilizado la notación que usamos en la Sección 10.8 y en la que la letra α está reservada para los momentos canónicos conjugados que son constantes en un determinado sistema.

2. **Simetría temporal.** El Lagrangiano del problema de los dos cuerpos no depende explícitamente del tiempo:

$$\frac{\partial H_{2B}}{\partial t} = 0$$

de donde se sigue que también es una cuadratura del sistema:

$$\frac{1}{2m_r} \left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{\cos^2 \phi r^2} + \frac{p_\phi^2}{r^2} \right) - \frac{m_r \mu}{r} = E$$

siendo E una constante, que además corresponde a la energía mecánica total del sistema.

Más allá de estas dos simetrías, el problema relativo de los dos cuerpos descrito en coordenadas esféricas en el espacio de tres dimensiones no tiene otras simetrías evidentes (volveremos sobre simetrías menos evidentes más adelante).

Si fijamos el plano $x - y$ sobre el plano invariante de Laplace, el Hamiltoniano del sistema se simplifica:

$$H_{2B,\text{Lap}}(r, \theta, p_r, p_\theta) = \frac{1}{2m_r} \left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} \right) - \frac{m_r \mu}{r} \quad (10.65)$$

donde

$$\begin{aligned} p_r &= m_r \dot{r} \\ p_\theta &= m_r r^2 \dot{\theta} \end{aligned} \quad (10.66)$$

10.9.2. Conservación del vector de excentricidad

En el [Capítulo 7](#) aprendimos que el siguiente vector aparece en diferentes problemas de mecánica:

$$\vec{e} = \frac{\vec{r} \times \vec{h}}{\mu} - \frac{\vec{r}}{r}$$

y demostramos, usando el formalismo vectorial, que en el problema de los dos cuerpos es una constante de movimiento.

Hay una manera alternativa, usando el formalismo Hamiltoniano, de probar que este vector, al que llamamos antes el vector de **vector de excentricidad** o **vector de Laplace-Hamilton**, es constante.

Para comenzar expresemos el vector de una forma más compatible con el Hamiltoniano del problema de los dos cuerpos y para ello multipliquemos \vec{e} por el factor constante μm_r :

$$\vec{A} \equiv \mu m_r \vec{e} = \vec{p} \times \vec{L} - \mu m_r \hat{r}$$

Aquí $\vec{p} \equiv m_r \dot{\vec{r}}$ y $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ son los momentos lineal y angular reducidos. El vector expresado de esta manera es conocido también en la literatura como el **vector de Laplace-Runge-Lenz**.

Probar que este vector es constante implica demostrar que $d\vec{A}/dt = \vec{0}$. En coordenadas cilíndricas y sobre el plano invariante de Laplace (donde residen ambos la trayectoria del vector relativo y el vector \vec{A}), esto implica demostrar que las componentes del vector:

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \left(\frac{dA_r}{dt} - A_\theta \dot{\theta} \right) \hat{a}_r + \left(\frac{dA_\theta}{dt} + A_r \dot{\theta} \right) \hat{a}_\theta \quad (10.67)$$

son también nulas.

En la [Sección 10.6.4](#) habíamos mostrado que es posible calcular la derivada total de una función f de las coordenadas del espacio de fase de un sistema usando los corchetes de Poisson:

$$\frac{df}{dt} = \{f, H\} + \frac{\partial f}{\partial t}$$

En nuestro caso, podemos usar esta relación para calcular las derivadas dA_r/dt y dA_θ/dt .

Para ello debemos primero escribir estas componentes, de forma explícita, como función de las coordenadas del espacio de fase del sistema:

$$\vec{A} = \left(p_r \hat{a}_r + \frac{p_\theta}{r} \hat{a}_\theta \right) \times p_\theta \hat{a}_z - \mu m_r \hat{a}_r$$

Realizando el producto cruz encontramos que las componentes del vector \vec{A} son:

$$\begin{aligned} A_r &= \frac{p_\theta^2}{r} - \mu m_r \\ A_\theta &= -p_r p_\theta \end{aligned}$$

Evaluemos por separado el corchete de Poisson de cada componente del vector, con el Hamiltoniano del problema de los dos cuerpos en el plano de Laplace:

$$H = \frac{1}{2m_r} \left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} \right) - \frac{\mu m_r}{r}$$

El corchete correspondiente a la componente radial del vector es:

$$\{A_r, H\} = \left\{ \frac{p_\theta^2}{r}, H \right\} \quad (10.68)$$

$$= \left\{ \frac{p_\theta^2}{r}, \frac{p_r^2}{2m_r} \right\} + \left\{ \frac{p_\theta^2}{r}, \frac{p_\theta^2}{2m_r r^2} \right\} - \left\{ \frac{p_\theta^2}{r}, \frac{\mu m_r}{r} \right\} \quad (10.69)$$

Dado que por definición:

$$\{f, g\} = \sum_j \left(\frac{\partial f}{\partial q_j} \frac{\partial g}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial g}{\partial q_j} \right)$$

una manera de saber si un corchete de Poisson de una expresión relativamente complicada es nulo es formular la pregunta: ¿contiene la función f una variable y al mismo tiempo la función g su canónica conjugada?. Si la respuesta a esta pregunta es negativa, entonces el corchete es nulo.

Al aplicar este criterio a los corchetes en el lado derecho de la Ec. (10.68) nos damos cuenta que solo el primer corchete no es nulo y su valor viene dado por la definición por:

$$\{A_r, H\} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{p_\theta^2}{r} \right) \frac{\partial}{\partial p_r} \left(\frac{p_r^2}{2m_r} \right) = -\frac{p_r p_\theta^2}{m_r r^2} = -A_\theta \dot{\theta}$$

Por otro lado el corchete de Poisson de la componente A_θ viene dado por:

$$\{A_\theta, H\} = - \left\{ p_r p_\theta, \frac{p_r^2}{2m_r} \right\} - \left\{ p_r p_\theta, \frac{p_\theta^2}{2m_r r^2} \right\} + \left\{ p_r p_\theta, \frac{\mu m_r}{r} \right\}$$

y aplicando el mismo criterio anterior:

$$\{A_\theta, H\} = \frac{\partial}{\partial p_r} (p_r p_\theta) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{p_\theta^2}{2m_r r^2} \right) - \frac{\partial}{\partial p_r} (p_r p_\theta) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\mu m_r}{r} \right)$$

Derivando queda:

$$\{A_\theta, H\} = -\frac{p_\theta^3}{m_r r^3} + \frac{\mu m_r p_\theta}{r^2}$$

que se puede probar es igual a:

$$\{A_\theta, H\} = -A_r \dot{\theta}$$

Reemplazando en la Ec. (10.67) obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{A}}{dt} &= (\{A_r, H\} - A_\theta \dot{\theta}) \hat{a}_r + (\{A_\theta, H\} + A_r \dot{\theta}) \hat{a}_\theta \\ &= (A_\theta \dot{\theta} - A_\theta \dot{\theta}) \hat{a}_r (-A_r \dot{\theta} + A_r \dot{\theta}) \hat{a}_\theta \\ &= \vec{0} \end{aligned}$$

con lo que queda demostrado que el vector de Laplace-Runge-Lenz y por lo tanto el vector de excentricidad son cuadraturas del problema de los dos cuerpos.

10.9.3. El método de Hamilton-Jacobi en mecánica celeste

Si de encontrar simetrías adicionales del problema de los dos cuerpos se trata, no hay un método mejor de hallarlas que el de Hamilton-Jacobi. Usemos el procedimiento general que presentamos en la Sección 10.8 para buscar una transformación canónica que produzca el Hamiltoniano más simétrico posible en el problema

de los dos cuerpos y del que podamos además derivar el mayor número adicional de constantes de movimiento.

1. **Hamiltoniano original.** El Hamiltoniano de partida es el del problema de los dos cuerpos referido al plano invariante de Laplace:

$$H = \frac{1}{2m_r} \left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} \right) - \frac{m_r \mu}{r} \quad (10.70)$$

2. **Variables y Hamiltoniano objetivo.** Para resolver el problema sabemos que existe una transformación canónica $(r, \theta, p_r, p_\theta) \rightarrow (\beta_r, \beta_\theta, \alpha_r, \alpha_\theta)$ tal que en el nuevo conjunto de variables:

$$\begin{aligned} K(\beta_r, \beta_\theta, \alpha_r, \alpha_\theta) &= 0 \\ \dot{\beta}_r &= 0 \\ \dot{\beta}_\theta &= 0 \\ \dot{\alpha}_r &= 0 \\ \dot{\alpha}_\theta &= 0 \end{aligned}$$

3. **Propiedades de la transformación.** Asumimos que la transformación canónica tiene una función generatriz del tipo F_{qP} que llamaremos $S(r, \theta, \alpha_1, \alpha_2, t)$, tal que:

$$\begin{aligned} p_r &= \frac{\partial S}{\partial r} \\ p_\theta &= \frac{\partial S}{\partial \theta} \\ \beta_r &= \frac{\partial S}{\partial \alpha_r} \\ \beta_\theta &= \frac{\partial S}{\partial \alpha_\theta} \\ 0 &= H + \frac{\partial S}{\partial t} \end{aligned} \quad (10.71)$$

4. **La energía y la ecuación de Hamilton-Jacobi.** La última ecuación del apartado anterior tiene dos implicaciones posibles.

1. Dado que el hamiltoniano del sistema cumple las condiciones del teorema de conservación de la energía se cumple que:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -E$$

que puede integrarse para obtener:

$$S(r, \theta, \alpha_r, \alpha_\theta, t) = W(r, \theta, \alpha_r, \alpha_\theta) - Et$$

2. La ecuación de Hamilton-Jacobi en este caso será:

$$\frac{1}{2m_r} \left[\left(\frac{\partial W}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial W}{\partial \theta} \right)^2 \right] - \frac{m_r \mu}{r} = E$$

5. **Solución a la ecuación de Hamilton-Jacobi y la función generatriz.** Si asumimos que la función característica W puede escribirse como:

$$W = W_r + W_\theta$$

la ecuación de Hamilton Jacobi se convierte ahora en dos ecuaciones:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial W_r}{\partial r} \right)^2 + \frac{\alpha_\theta}{r^2} &= 2m_r \left(E + \frac{m_r \mu}{r} \right) \\ \frac{\partial W_\theta}{\partial \theta} &= \alpha_\theta \end{aligned} \tag{10.72}$$

En estas dos ecuaciones, hay dos constantes: E y α_θ . En lo que sigue asignaremos el rol de α_r a la energía.

Las ecuaciones individuales son integramos y producen:

$$\begin{aligned} W_r &= \int dr \sqrt{2m_r \left(E + \frac{m_r \mu}{r} \right) - \frac{\alpha_\theta^2}{r^2}} \\ W_\theta &= \alpha_\theta \theta \end{aligned} \tag{10.73}$$

Aquí es importante anotar que en el problema de los dos cuerpos $p_\theta = m_r r^2 \dot{\theta} = m_r h$ donde h es el momento angular relativo específico. Por otro lado, por las propiedades de la función generatriz:

$$p_\theta = \frac{\partial S}{\partial \theta} = \alpha_\theta$$

donde hemos usado la solución para W_θ obtenida anteriormente. De aquí identificamos la constante $\alpha_\theta = m_r h$ que reemplazaremos aquí y allá.

Con estos resultados la función generatriz queda:

$$S(r, \theta, E, \alpha_\theta) = \alpha_\theta \theta + \int dr \sqrt{2m_r \left(E + \frac{m_r \mu}{r} \right) - \frac{\alpha_\theta^2}{r^2} - Et}$$

6. **Variable generalizada en el nuevo sistema.** Las variables generalizadas β_r y β_θ se obtienen derivando la función generatriz

$$\beta_r = \frac{\partial S}{\partial E} = I_r - t$$

donde I_r es la integral:

$$I_r = \int \frac{m_r dr}{\sqrt{2m_r(E + m_r\mu/r) - \alpha_\theta^2/r^2}}$$

Por otro lado:

$$\beta_\theta = \frac{\partial S}{\partial \alpha_\theta} = \theta - I_\theta$$

Donde I_θ es:

$$I_\theta = \int \frac{\alpha_\theta^2 dr}{r^2 \sqrt{2m_r(E + m_r\mu/r) - \alpha_\theta^2/r^2}}$$

Resolviendo para las variables originales:

$$t = \int \frac{m_r dr}{\sqrt{2m_r(E + m_r\mu/r) - \alpha_\theta^2/r^2}} - \beta_r \quad (10.74)$$

$$\theta = \beta_\theta + \int \frac{\alpha_\theta^2 dr}{r^2 \sqrt{2m_r(E + m_r\mu/r) - \alpha_\theta^2/r^2}} \quad (10.75)$$

La primera ecuación debería darnos en principio la dependencia de r del tiempo. La segunda nos da la dependencia de θ de r .

En este problema el paso 7, que corresponde el cálculo de los momentos del sistema original, no es tan relevante. Por un lado uno de esos momento p_θ , que hemos llamado aquí α_θ , es constante y su valor fue asumido como parte del procedimiento (se puede determinar a partir de las condiciones iniciales). Del otro lado las resultados obtenidas al final del procedimiento son suficientes para especificar completamente la trayectoria del sistema en el espacio coordenado que es, en última instancia, el interés central del problema.

No deja de sorprender sin embargo como un problema al que dedicamos tanto tiempo y espacio en capítulos anteriores (aunque naturalmente dijimos mucho sobre él más allá de resolverlo) puede verse reducido a los 6 pasos del procedimiento anterior. El problema de Kepler es justamente uno de esos problemas mecánicos en el que el poder del método de Hamilton-Jacobi se hace más evidente.

10.9.4. El espacio de fase de los elementos orbitales

Existen diversas maneras de convertir las soluciones escritas en las Ec. (10.74) y (10.75) en soluciones útiles en mecánica celeste.

Así por ejemplo, si derivamos la Ec. (10.74) con respecto a r obtenemos:

$$\frac{dt}{dr} = \frac{m_r}{\sqrt{2m_r(E + m_r\mu/r) - \alpha_\theta^2/r^2}}$$

e invertimos, obtenemos una ecuación familiar para nosotros en el problema de los dos cuerpos:

$$\frac{1}{2}\dot{r}^2 = \frac{E}{m_r} - \left(-\frac{\mu}{r} + \frac{h^2}{2r^2} \right)$$

donde hemos hecho $\alpha_\theta = m_r h$. Derivando una vez respecto al tiempo y haciendo el cambio de variables $u = 1/r$ esta ecuación finalmente se convierte en la que llamamos la *ecuación de la forma orbital*:

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{1}{h^2u^2}f\left(\frac{1}{u}\right)$$

de la que se sigue sin demora que la trayectoria del sistema es una cónica.

Por otro lado, si en la integral de la misma Ec. (10.74), hacemos el cambio de variable:

$$r = a(1 - e \cos E), dr = ae \sin E \, dE \quad (10.76)$$

después de un poco de álgebra, la ecuación se convierte en:

$$t = \frac{a^{3/2}}{\sqrt{\mu}}(E - e \sin E) - \beta_r$$

y si llamamos $n = \sqrt{\mu/a^3}$, la ecuación anterior no es otra cosa que la ecuación de Kepler:

$$n(t + \beta_r) = E - e \sin E$$

lo que nos permite identificar la constante β_r (una de las variables generalizadas en el nuevo espacio de fase) con el negativo del tiempo de paso del cuerpo por el periapsis t_p :

$$\beta_r = -t_p$$

Es decir, una sola de las ecuaciones obtenidas con el método de Hamilton-Jacobi es suficiente para darnos la ecuación de la trayectoria y la solución del problema en el tiempo.

¿Qué información contiene la segunda ecuación (Ec. 10.75)? Si hacemos el mismo cambio de variable de la Ec. (10.76) para resolver la integral de esta ecuación, obtenemos (ver Problemas al final del Capítulo):

$$\theta = \beta_\theta + \frac{\alpha_\theta}{m_r} \frac{f}{\sqrt{a\mu(1-e^2)}}$$

donde f es la anomalía verdadera. Si tenemos en cuenta que $\alpha_\theta = m_r h$ y $h = \sqrt{\mu p} = \sqrt{a\mu(1-e^2)}$ entonces:

$$\theta = \beta_\theta + f$$

de donde podemos interpretar que β_θ no es otra cosa que el *argumento del perihelio* ω , o lo que es lo mismo, el ángulo entre la dirección del eje x y el peripasis.

En síntesis, el problema de los dos cuerpos sobre el plano invariante de Laplace, puede describirse con un Hamiltoniano y en un espacio de fases dado por:

$$\begin{aligned} K(Q_1, Q_2, P_1, P_2) &= 0 \\ Q_1 &= -t_0 \\ Q_2 &= \omega \\ P_1 &= -\frac{m_r \mu}{2a} \\ P_2 &= m_r \sqrt{\mu a (1 - e^2)} \end{aligned} \tag{10.77}$$

donde hemos reemplazado $E = -m_r \mu / (2a)$.

Es decir, una transformación canónica apropiada nos permite pasarnos del espacio de fase original $(r, \theta, p_r, p_\theta)$ en el que la dinámica es relativamente completa, a un espacio de fase donde las coordenadas son esencialmente funciones de los elementos orbitales (constantes) del problema (t_0, ω, a, e) y en el que el sistema se mantiene en total reposo ($K = 0$). ¡Esta si que es una poderosa simplificación del problema!

10.9.5. Las variables de Delaunay

Un procedimiento similar al que seguimos en la [Sección 10.9.3](#) puede usarse para resolver el problema de los dos cuerpos en el espacio de tres dimensiones, donde el Hamiltoniano es:

$$H = \frac{1}{2m_r} \left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{\cos^2 \phi r^2} + \frac{p_\phi^2}{r^2} \right) - \frac{m_r \mu}{r}$$

Al hacerlo y expresar de forma análoga a como lo hicimos en el caso del sistema en dos dimensiones, las nuevas variables del espacio de fase en términos de elementos orbitales, se obtiene:

$$\begin{aligned}
 K(Q_1, Q_2, Q_3, P_1, P_2, P_3) &= 0 \\
 Q_1 &= -t_0 \\
 Q_2 &= \omega \\
 Q_3 &= \Omega \\
 P_1 &= -\frac{m_r \mu}{2a} \\
 P_2 &= m_r \sqrt{\mu a(1 - e^2)} \\
 P_3 &= m_r \sqrt{\mu a(1 - e^2)} \cos i
 \end{aligned} \tag{10.78}$$

Este nuevo sistema admite dos simplificaciones adicionales que son de amplio uso en la mecánica celeste. La primera tiene que ver con la eliminación del incómodo parámetro m_r . Para ello podemos usar una transformación de coordenadas tal que :

$$\begin{aligned}
 q_i &= Q_i \\
 p_i &= P_i / m_r
 \end{aligned}$$

Es trivial mostrar que este nuevo conjunto de coordenadas también son canónicas conjugadas y que el Hamiltoniano correspondiente $K' = 0$. Con esto el sistema anterior se transforma en:

$$\begin{aligned}
 K'(q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3) &= 0 \\
 q_1 &= -t_0 \\
 q_2 &= \omega \\
 q_3 &= \Omega \\
 p_1 &= -\frac{\mu}{2a} \\
 p_2 &= \sqrt{\mu a(1 - e^2)} \\
 p_3 &= \sqrt{\mu a(1 - e^2)} \cos i
 \end{aligned} \tag{10.79}$$

En este nuevo sistema de coordenadas, las variables generalizadas q_2 y q_3 son ángulos, pero no lo es la variable q_1 . Preguntémonos cuál debería ser una transformación canónica tal que las nuevas coordenadas del espacio de fase tueren la forma:

$$\begin{aligned}
l_D &= n(t + q_1) = n(t - t_p) = M \\
g_D &= q_2 = \omega \\
h_D &= q_3 = \Omega \\
L_D &= ? \\
G_D &= p_2 = m_r \sqrt{\mu a(1 - e^2)} \\
H_D &= p_3 = m_r \sqrt{\mu a(1 - e^2)} \cos i
\end{aligned} \tag{10.80}$$

donde la forma funcional del momento canónico conjugado de la nueva variable l_D esta por determinarse.

De la teoría de transformaciones canónicas básicas, sabemos que una transformación una función generatriz del tipo F_{qP} , permite obtener la variable l_D por medio de la expresión:

$$l_D = \frac{\partial F_{qP}}{\partial L_D}$$

Si queremos entonces cambiar la variable l_D para que tenga la forma deseada, manteniendo las demás variables inalteradas, la función generatriz debe tener la forma:

$$F_{qP}(q_1, q_2, q_3, L_D, G_D, H_D, t) = n(t + q_1)L_D + q_2G_D + q_3H_D$$

La función generatriz nos permite además encontrar la forma de L_D a través de la relación:

$$p_1 = \frac{\partial F_{qP}}{\partial q_1} = nL_D$$

donde sabemos que $p_1 = -\mu/(2a)$ y por lo tanto:

$$L_D = -\frac{\sqrt{\mu a}}{2}$$

Una forma aún más simple para L_D puede obtener si se usa la función generatriz:

$$F_{qP}(q_1, q_2, q_3, L_D, G_D, H_D, t) = \left(nL_D - \frac{3\mu}{2a}\right)(t + q_1) + q_2G_D + q_3H_D$$

que no altera en nada el objetivo original de que $l_D = M$, pero para el cuál el momento canónico conjugado queda:

$$L_D = \sqrt{\mu a}$$

Una consecuencia de que la función generatriz de la nueva transformación dependa explícitamente del tiempo (que es el precio a pagara para que l_D sea la anomalía media) es que el Hamiltoniano en estas nuevas variables ya no es 0:

$$K_D(l_D, g_D, h_D, L_D, G_D, H_D) = K'(q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3) + \frac{\partial F_{QP}}{\partial t}$$

En síntesis, el sistema después de las simplificaciones realizadas queda:

$$\begin{aligned} K_D &= -\frac{\mu^2}{2L^2} \\ l_D &= M \\ g_D &= \omega \\ h_D &= \Omega \\ L_D &= \sqrt{\mu a} \\ G_D &= \sqrt{\mu a(1 - e^2)} \\ H_D &= \sqrt{\mu a(1 - e^2)} \cos i \end{aligned} \tag{10.81}$$

A este conjunto de variables, ampliamente conocido en la mecánica celeste, se lo conoce como las **variables de Delaunay**. Si bien su utilidad y poder no será explorada en este texto, basta con decir que son de uso muy frecuente en la teoría de perturbaciones que queda para un libro más avanzado.

10.10. Problemas seleccionados

1. **Partícula deslizándose sobre un alambre parabólico.** Una partícula de masa m se desliza bajo la acción de la gravedad y sin fricción sobre un alambre con forma de parábola.

- a. Demuestre que el Hamiltoniano de este sistema se escribe como

$$H(x, p) = \frac{p^2}{2m(1+x^2)} + \frac{mg}{2}x^2$$

- b. Grafique los contornos de nivel de este Hamiltoniano.

1. Solución.

- a. El movimiento de la partícula está restringido al plano $z = 0$ y a una parábola de la forma $y = ax^2$, donde a es una constante que define la forma de la parábola. Por lo tanto, la partícula tiene un solo grado de libertad y su lagrangiana viene dada por

$$L = T - V \quad (10.82)$$

$$= \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy \quad (10.83)$$

$$= \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + (2ax\dot{x})^2) - mgax^2 \quad (10.84)$$

$$= \frac{1}{2}m(1 + 4a^2x^2)\dot{x}^2 - mgax^2. \quad (10.85)$$

El momento de la variable x es tal que

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m(1 + 4a^2x^2)\dot{x} \implies \dot{x} = \frac{p}{m(1 + 4a^2x^2)},$$

de tal forma que el lagrangiano $L_{x,p}$ como función de las coordenadas del espacio de fase es

$$L_{x,p} = \frac{p_x^2}{2m(1 + 4a^2x^2)} - mgax^2.$$

Claramente L no depende explícitamente del tiempo y la función de energía potencial de la partícula no depende de p , por lo que el hamiltoniano del sistema se puede escribir como

$$H(x, p) = T + V = \frac{p_x^2}{2m(1 + 4a^2x^2)} + mgax^2.$$

Nótese que se cumple en general para toda parábola con parámetro a . En particular, cuando $a = 1/2$, se satisface lo pedido.

b. El algoritmo se presenta a continuación

```
%matplotlib inline
```

(Algoritmo 10.4)

```
import numpy as np

#Definimos el momento conjugado p del problema en términos de x y c (el valor del Hamiltoniano)
def p(x, c):
    g= 9.8
    m=1.0
    p= np.sqrt( (c - m*g*x**2/2.0) * (2*m*(1+x**2)) )
    return p

#Declaramos el vector x y una lista vacía para agragar los valores de p (en este caso "y")
x= np.linspace(-10, 10, 1e6)
y= []

#Realizamos un arreglo de labels y colores para poder usar en un ciclo mas adelante.
colors= ["blue", "red", "black", "orange", "purple", "green", "brown", "grey", "pink"]
legends= ["c= 1", "c= 2", "c= 3", "c= 4", "c= 5", "c= 6", "c= 7", "c= 8", "c= 9"]

#Evaluamos p en todo el arreglo de x y variaremos el valor de la constante.
for i in range(0, 10):
    y.append( p(x, i) )

#Graficamos cada uno de los arreglos resultantes de p variando el valor de la constante.
import matplotlib.pyplot as plt
plt.figure(figsize=(5,5))
for i in range(len(y)):
    plt.plot(x, y[i], color= colors[i-1], label= legends[i-1])
    plt.plot(x, -y[i], color= colors[i-1])
plt.xlim(-1.5, 2.5)
plt.ylim(-4.5, 4.5)
plt.legend()
plt.grid()
```

ver Figura 10.9

```
/Users/jzuluaga/anaconda/lib/python3.6/site-packages/ipykernel_launcher.py:7: RuntimeWarning:
  import sys
/Users/jzuluaga/anaconda/lib/python3.6/site-packages/IPython/core/events.py:88: UserWarning:
  func(*args, **kwargs)
/Users/jzuluaga/anaconda/lib/python3.6/site-packages/IPython/core/pylabtools.py:128: UserWarning:
  fig.canvas.print_figure(bytes_io, **kw)
```

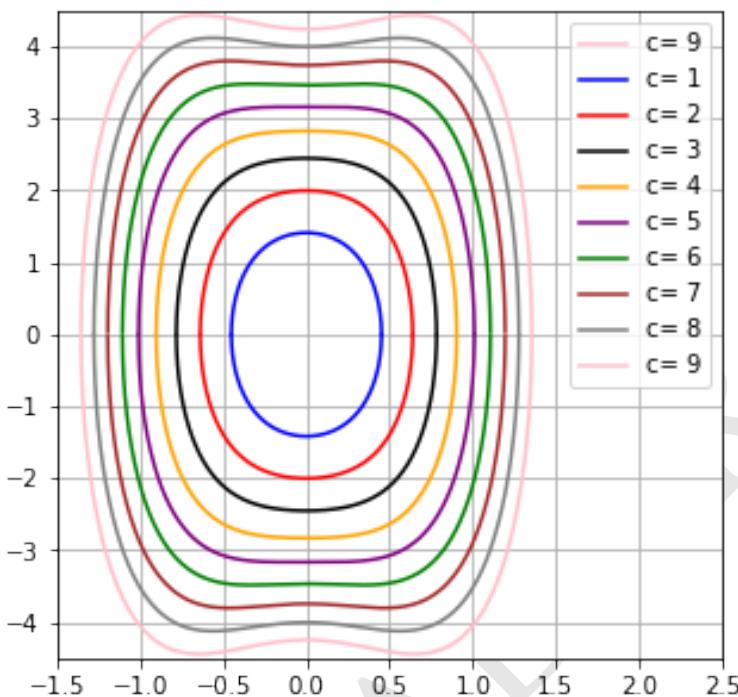


Figura 10.9: Figura correspondiente al código 10.4.

2. **Ecuación de Kepler hiperbólica.** En un movimiento hiperbólico bajo un potencial de la forma $1/r$, el ángulo análogo a la anomalía excéntrica es F definido mediante la ecuación

$$r = a(1 - e \cosh F)$$

donde $a(e - 1)$ es la distancia al periápsis. Encuentre, usando el formalismo Lagrangiano de la teoría de sistemas sometidos a fuerzas centrales, el análogo a la ecuación de Kepler expresando a t como función de F .

2. Solución

Partiendo del resultado del problema anterior, al separar variables, tenemos

$$\frac{r dr}{\omega a \sqrt{a^2 e^2 - (r - a)^2}} = dt.$$

Teniendo $r = a(1 - e \cosh F)$ y $dr = -ae \sinh F dF$, al reemplazar:

$$\frac{-a(1-e\cosh F)ae\sinh FdF}{\omega a\sqrt{a^2e^2-(ae\cosh F)^2}} = dt \quad (10.86)$$

$$\frac{-(1-e\cosh F)ae\sinh FdF}{\sqrt{\frac{k}{m_ra^3}}ae\sqrt{1-\cosh^2 F}} = dt \quad (10.87)$$

$$\frac{-(1-e\cosh F)\sinh FdF}{\sqrt{\frac{k}{m_ra^3}}\sqrt{-\sinh^2 F}} = dt \quad (10.88)$$

$$\frac{-(1-e\cosh F)dF}{\sqrt{\frac{-k}{m_ra^3}}} = dt. \quad (10.89)$$

Nótese que $n = \sqrt{\frac{-k}{m_ra^3}}$ es real, pues recordemos que en el caso de la hipérbola, a es negativa. Así, podemos decir que n es el movimiento medio del cuerpo en dicho movimiento hiperbólico. Integrando la relación anterior, se obtiene

$$-F + e\sinh F = n\Delta t,$$

que es el análogo a la ecuación de Kepler para órbitas hiperbólicas.

3. Ecuaciones canónicas de Hamilton. Dado el siguiente lagrangiano

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}\dot{q}^2 + q\dot{q} + 3q^2,$$

encuentre la función Hamiltoniana y *solucione* las ecuaciones canónicas.

3. Solución. Recordemos que la función Hamiltoniana se calcula como

$$H(q_j, p_j, t) = \sum_j \dot{q}_j p_j - L(q_j, \dot{q}_j, t).$$

En este caso tenemos un solo grado de libertad y L no depende del tiempo. Así que

$$H(q, p) = qp - \left(\frac{1}{2}\dot{q}^2 + q\dot{q} + 3q^2\right),$$

con

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \dot{q} + q \quad \Rightarrow \quad \dot{q} = p - q.$$

Así,

$$\begin{aligned} H(q, p) &= (p - q)p - \left[\frac{1}{2}(p - q)^2 + q(p - q) + 3q^2 \right] \\ &= p^2 - qp - \frac{1}{2}(p^2 - 2qp + q^2) - qp + q^2 - 3q^2 \quad \Rightarrow \quad H(q, p) = \frac{1}{2}p^2 - qp - \frac{1}{2}q^2 - 3q^2 \end{aligned} \quad (10.91)$$

Las ecuaciones canónicas se escriben como

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = p - q, \quad (10.92)$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = p + 5q. \quad (10.93)$$

Para solucionar estas ecuaciones, tomemos la derivada temporal a ambos lados de la primera ecuación:

$$\ddot{q} = \dot{p} - \dot{q} \quad (10.94)$$

$$= p + 5q - p + q \quad (10.95)$$

$$= 6q. \quad (10.96)$$

La solución a esta ecuación es conocida:

$$q(t) = Ae^{\sqrt{6}t} + Be^{-\sqrt{6}t},$$

en donde A y B son constantes restringidas por condiciones de frontera. Reemplazando este resultado en la ecuación de \dot{q} se sigue que

$$\sqrt{6}Ae^{\sqrt{6}t} - \sqrt{6}Be^{-\sqrt{6}t} = p(t) - Ae^{\sqrt{6}t} - Be^{-\sqrt{6}t} \quad \Rightarrow \quad p(t) = (\sqrt{6} + 1)Ae^{\sqrt{6}t} + (\dots)$$

4. **Corchetes de Poisson y constantes de movimiento.** Para un sistema de dos grados de libertad que es descrito por el Hamiltoniano

$$H = q_1 p_1 - q_2 p_2 - aq_1^2 + bq_2^2,$$

muestre, mediante el uso de corchetes de Poisson, que

$$F_1 = \frac{p_1 - aq_1}{q_2} \quad (10.97)$$

$$F_2 = q_1 q_2 \quad (10.98)$$

son constantes de movimiento.

- 4. Solución.** Recordemos que para una función $f = f(\{q_j\}, \{p_j\}, t)$, tenemos que

$$\frac{df}{dt} = \{f, H\} + \frac{\partial f}{\partial t},$$

en donde $\{q_j\}$ y $\{p_j\}$ son las coordenadas generalizadas de un sistema y sus momentos, H es el hamiltoniano del sistema y

$$\{f, H\} = \sum_j \left(\frac{\partial f}{\partial q_j} \frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial H}{\partial q_j} \right)$$

son los corchetes de Poisson sobre f y H . Claramente, f es una constante de movimiento si $df/dt = 0$. Miremos qué pasa con F_1 y F_2 . Las ecuaciones de Hamilton para el sistema son

$$\dot{q}_1 = \frac{\partial H}{\partial p_1} = q_1, \quad (10.99)$$

$$\dot{p}_1 = -\frac{\partial H}{\partial q_1} = -p_1 + 2aq_1, \quad (10.100)$$

$$\dot{q}_2 = \frac{\partial H}{\partial p_2} = -q_2, \quad (10.101)$$

$$\dot{p}_2 = -\frac{\partial H}{\partial q_2} = p_2 - 2bq_2. \quad (10.102)$$

Por otro lado, tenemos que

$$\frac{\partial F_1}{\partial q_1} = -\frac{a}{q_2}, \quad (10.103)$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial p_1} = \frac{1}{q_2}, \quad (10.104)$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial q_2} = -\frac{p_1 - aq_1}{q_2^2}, \quad (10.105)$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial p_2} = 0. \quad (10.106)$$

Por lo tanto, como $\frac{\partial F_1}{\partial t} = 0$,

$$\frac{dF_1}{dt} = \{F_1, H\} + \frac{\partial F_1}{\partial t} \quad (10.107)$$

$$= \sum_{j=1}^2 \left(\frac{\partial F_1}{\partial q_j} \frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial F_1}{\partial p_j} \frac{\partial H}{\partial q_j} \right) \quad (10.108)$$

$$= \left(-\frac{a}{q_2} \right) q_1 - \left(\frac{1}{q_2} \right) (p_1 - 2aq_1) + \left(-\frac{p_1 - aq_1}{q_2^2} \right) (-) \quad (10.109)$$

$$= -\frac{aq_1}{q_2} - \frac{p_1 - 2aq_1}{q_2} + \frac{p_1 - aq_1}{q_2} \quad (10.110)$$

$$= 0. \quad (10.111)$$

Es decir, F_1 es una constante de movimiento. De igual manera tenemos que

$$\frac{\partial F_2}{\partial q_1} = q_2, \quad (10.112)$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial p_1} = 0, \quad (10.113)$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial q_2} = q_1, \quad (10.114)$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial p_2} = 0. \quad (10.115)$$

Por lo que, como $\frac{\partial F_2}{\partial t} = 0$,

$$\frac{dF_2}{dt} = \{F_2, H\} + \frac{\partial F_2}{\partial t} \quad (10.116)$$

$$= \sum_{j=1}^2 \left(\frac{\partial F_2}{\partial q_j} \frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial F_2}{\partial p_j} \frac{\partial H}{\partial q_j} \right) \quad (10.117)$$

$$= q_2 q_1 + q_1 (-q_2) \quad (10.118)$$

$$= 0. \quad (10.119)$$

Es decir, F_2 también es una constante de movimiento.

5. **Rueda sin deslizar.** Una esfera maciza de radio r rueda sin deslizar en un plano vertical sobre un cascarón esférico cóncavo hacia arriba de radio $R > r$.

- a. Encuentre la función Hamiltoniana para este sistema.

- b. Escriba las ecuaciones de movimiento.
- c. Encuentre la posición de equilibrio del sistema y la frecuencia de pequeñas oscilaciones alrededor de esa posición.

5. Solución

- a. La posición del centro de masa de la esfera tiene las restricciones $z = 0$ y $x^2 + y^2 = (R - r)^2$, además de que rueda sin deslizar, por lo que el sistema tiene un solo grado de libertad y se escogerá a θ , el ángulo que forma la unión de los centros de las esferas con la vertical, como la variable generalizada que describirá el movimiento de la esfera.

Por un lado, siendo β el ángulo que gira la esfera cuando tiene una posición θ , dado que rueda sin deslizar, se debe satisfacer que $\beta r = \theta R$, por lo que la rapidez angular de la esfera alrededor de su centro de masa es $\dot{\beta} = \dot{\theta}R/r$. Por otro, la rapidez lineal del centro de masa será simplemente $v = (R - r)\dot{\theta}$, puesto que este se mueve en una circunferencia de radio $R - r$.

Así, la función de energía cinética de la esfera es

$$T = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \quad (10.120)$$

$$= \frac{1}{2}m(R - r)^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}mr^2\right)\dot{\beta}^2 \quad (10.121)$$

$$= \frac{1}{2}m(R - r)^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{5}mR^2\dot{\theta}^2 \quad (10.122)$$

$$= mC\dot{\theta}^2, \quad (10.123)$$

donde $C = \left(\frac{(R - r)^2}{2} + \frac{R^2}{5}\right)$. La función de energía potencial es simplemente $V = -mg(R - r)\cos\theta$ medida desde el centro del cascarón esférico. Así, la lagrangiana del sistema estaría dado por

$$L = mC\dot{\theta}^2 + mg(R - r)\cos\theta.$$

Claramente, esta función no depende explícitamente del tiempo y la función de energía potencial no depende explícitamente de las velocidades, por lo que el hamiltoniano se puede escribir como $H = T + V$. Pero para escribirlo en términos de las coordenadas del espacio de fase, primero calculemos el momento p_θ asociado a la coordenada generalizada θ :

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = 2mC\dot{\theta} \implies \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{2mC}.$$

Así, el hamiltoniano del sistema está dado por

$$H = \frac{p_\theta^2}{2mC} - mg(R - r)\cos\theta.$$

- b. Las ecuaciones de movimiento son las ecuaciones de Hamilton y se escriben

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{mC} \quad \text{y} \quad \dot{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = -mg(R - r)\sin\theta.$$

- c. La posición de equilibrio del sistema debe ser tal que $\ddot{\theta} = 0$. Para hallarla, derivemos la primera ecuación de movimiento y reemplazemos en ella la segunda:

$$\ddot{\theta} = \frac{\dot{p}_\theta}{mC} = -\frac{g(R - r)}{C}\sin\theta.$$

Se puede ver claramente que la posición de equilibrio se da en $\theta = 0$, lo cual tiene sentido, porque corresponde al punto más bajo del movimiento de la esfera en el cascarón. Para pequeñas oscilaciones, es decir, para $\theta \ll 1$, se satisface que $\sin\theta \approx \theta$, por lo que la ecuación para θ queda

$$\ddot{\theta} + \frac{g(R - r)}{C}\theta = 0,$$

la cual corresponde a un movimiento armónico simple para θ con frecuencia angular

$$\omega^2 = \frac{g(R - r)}{C}.$$

6. **El vector de Laplace-Runge-Lenz.** Muestre a partir de la condición de los corchetes de Poisson para cantidades conservadas que el vector de Laplace-Runge-Lenz

$$\vec{A} = \vec{p} \times \vec{L} - mk\hat{r}$$

es una constante de movimiento en el problema de Kepler.

6. Solución

Si se escribe $\vec{p} = p_x \hat{i} + p_y \hat{j}$, $\vec{L} = L_z \hat{k}$, tenemos

$$\vec{A} = \left(p_y L_z - \frac{m k x}{r} \right) \hat{i} - \left(p_x L_z + \frac{m k y}{r} \right) \hat{j}.$$

El hamiltoniano del problema de los dos cuerpos en coordenadas cartesianas como

$$H = \frac{1}{2m} \left(p_x^2 + p_y^2 \right) - \frac{k}{r},$$

donde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ (estamos asumiendo que estamos sobre el plano de Laplace $z = 0$). Para que \vec{A} sea constante, se quiere probar que $\{A_x, H\} = 0 = \{A_y, H\}$ (probar lo primero es equivalente a probar lo segundo). Se puede probar que

$$\{p_y, H\} = -\frac{ky}{r^3}, \quad (10.124)$$

$$\left\{ \frac{x}{r}, H \right\} = \frac{y L_z}{mr^3}, \quad (10.125)$$

de tal forma que al introducir todo en $\{A_x, H\}$ se prueba que es igual a cero (sin pérdida de generalidad, se satisface también que $\{A_y, H\} = 0$).

7. Condición Simplética.

Un sistema dinámico tiene un solo de grado de libertad. Se aplica sobre él una transformación canónica dada por:

$$Q = q \cos \alpha - p \sin \alpha \quad (10.126)$$

$$P = q \sin \alpha + p \cos \alpha \quad (10.127)$$

- Muestre que esta transformación satisface la condición simplética para cualquier valor del parámetro α .
- Encuentre la función generatriz de la transformación.
- ¿Cuál es el significado físico de la trasnformación para $\alpha = 0$ y $\alpha = \pi/2$?

7. Solución

Se puede invertir la transformación para obtener

$$q = Q \cos \alpha + P \sin \alpha, \quad (10.128)$$

$$p = -Q \sin \alpha + P \cos \alpha. \quad (10.129)$$

Se puede ver claramente que la transformación satisface la condición simpléctica para cualquier valor del parámetro α puesto que

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial q} \right)_{q,p} = \left(\frac{\partial p}{\partial P} \right)_{Q,P} = \cos \alpha, \quad (10.130)$$

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial p} \right)_{q,p} = - \left(\frac{\partial q}{\partial P} \right)_{Q,P} = -\sin \alpha. \quad (10.131)$$

Para encontrar una función generatriz de la transformación, supongamos una de tipo 2, función de q y P tal que

$$p = \frac{\partial F_2}{\partial q}, \quad (10.132)$$

$$Q = \frac{\partial F_2}{\partial P}. \quad (10.133)$$

Al integrar e igualar las expresiones para F_2 , se encuentra que

$$F_2 = Pq \sec \alpha - \frac{1}{2} (q^2 + P^2) \tan \alpha.$$

Es claro que para $\alpha = 0$ la transformación es una identidad y que para $\alpha = \pi/2$, lo único que sucede es una rotación de $\pi/2$ de los ejes del espacio de fase.

8. **Tipos de transformaciones canónicas.** Demuestre la relación entre las variables y la función generatriz para cada uno de los tipos de transformaciones canónicas, así:

- Transformación canónica de tipo 1: $\{p_j = \partial F_1 / \partial q_j, P_j = -\partial F_1 / \partial Q_j\}$
- Transformación canónica de tipo 2: $\{p_j = \partial F_2 / \partial q_j, Q_j = \partial F_2 / \partial P_j\}$
- Transformación canónica de tipo 3: $\{q_j = -\partial F_3 / \partial p_j, P_j = -\partial F_3 / \partial Q_j\}$
- Transformación canónica de tipo 4: $\{q_j = -\partial F_4 / \partial p_j, Q_j = -\partial F_4 / \partial P_j\}$

8. Solución

El conjunto de ecuaciones canónicas de Hamilton es equivalente al principio de Hamilton

$$\delta \int (\sum p_j \dot{q}_j - H) dt = 0.$$

Si queremos que un nuevo conjunto de variables satisfagan las ecuaciones canónicas se debe cumplir que

$$\delta \int (\sum P_i \dot{Q}_i - K) dt = 0.$$

Por comparación, estas dos ecuaciones se cumplen si la relación

$$\sum p_j \dot{q}_j - H = \sum P_i \dot{Q}_i - K + \frac{dF}{dt}$$

se satisface, donde $F = F(\{q_j\}, \{p_j\}, \{Q_i\}, \{P_i\}, t)$ es la función generatriz de las transformaciones.

Tomando la derivada total de cada tipo de F , reemplazándola en la condición anterior y teniendo en cuenta que las variables de cada espacio son independientes entre sí y entre ellas, se satisfacen todas las condiciones pedidas.

9. **El Hamiltoniano de Hénon-Heiles I.** En 1964, M. Hénon y C. Heiles estudiaban el movimiento de las estrellas alrededor del centro galáctico tratando de encontrar una tercera constante de movimiento a parte del momentum angular y la energía. Esto les llevó a proponer un potencial idealizado que restringía su acción solo al plano x, y . Este potencial se caracteriza por poseer dos términos cúbicos que involucran a las variables x, y haciendo a las ecuaciones de movimiento resultantes no lineales y acopladas. El Hamiltoniano asociado es el Hamiltoniano de Hénon-Heiles que en coordenadas cartesianas se escribe como

$$H = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + x^2y - \frac{1}{3}y^3$$

- Deduzca las ecuaciones Hamiltonianas de movimiento.
- Integre numéricamente las ecuaciones de movimiento usando por un lado el método de Euler y por el otro el *integrador simpléctico Leap-Frog*. Grafique el comportamiento de la energía como función del tiempo ¿Es la energía una cantidad conservada con ambos esquemas?
- Grafique la trayectoria obtenida en el punto anterior en el espacio de configuración.

9. Solución. Pendiente.

Capítulo 11

Algoritmos y rutinas útiles

En este apéndice compilamos todas aquellos algoritmos y rutinas útiles usados en el libro y que pueden aprovecharse en la solución de una amplia gama de problemas en mecánica celeste.

11.1. Rutina útiles

Del vector de estado a los elementos orbitales clásicos.

(Algoritmo 11.1)

```
def estado_a_elementos(mu,x):
    #Posición y velocidad del sistema relativo
    rvec=x[:3]
    vvec=x[3:]

    from numpy import cross
    from numpy.linalg import norm

    #Momento angular relativo específico
    hvec=cross(rvec,vvec)
    h=norm(hvec)
    #Vector excentricidad
    r=norm(rvec)
    evec=cross(vvec,hvec)/mu-rvec/r
    #Vector nodo ascendente
    nvec=cross([0,0,1],hvec)
    n=norm(nvec)

    #Semiáxis rectum y excentricidad
    p=h**2/mu
    e=norm(evec)

    #Orientación
    from numpy import dot,arccos,pi
```

```

i=arccos(hvec[2]/h)

Wp=arccos(nvec[0]/n)
W=Wp if nvec[1]>=0 else 2*pi-Wp

wp=arccos(dot(nvec,evec)/(e*n))
w=wp if evec[2]>=0 else 2*pi-wp

fp=arccos(dot(rvec,evec)/(r*e))
f=fp if dot(rvec,vvec)>0 else 2*pi-fp

return p,e,i,W,w,f

```

De los elementos orbitales clásicos al vector de estado:

(Algoritmo 11.2)

```

def elementos_a_estado(mu,elementos):
    #Extrae elementos
    p,e,i,W,w,f=elementos

    #Calcula momento angular relativo específico
    from numpy import sqrt
    h=sqrt(mu*p)

    #Calcula r
    from numpy import cos
    r=p/(1+e*cos(f))

    #Posición
    from numpy import cos,sin
    x=r*(cos(W)*cos(w+f)-cos(i)*sin(W)*sin(w+f))
    y=r*(sin(W)*cos(w+f)+cos(i)*cos(W)*sin(w+f))
    z=r*sin(i)*sin(w+f)

    #Velocidad
    muh=mu/h

    vx=muh*(-cos(W)*sin(w+f)-cos(i)*sin(W)*cos(w+f))\
        -muh*e*(cos(W)*sin(w)+cos(w)*cos(i)*sin(W))
    vy=muh*(-sin(W)*sin(w+f)+cos(i)*cos(W)*cos(w+f))\
        +muh*e*(-sin(W)*sin(w)+cos(w)*cos(i)*cos(W))
    vz=muh*(sin(i)*cos(w+f)+e*cos(w)*sin(i))

    from numpy import array
    return array([x,y,z,vx,vy,vz])

```

Método de Newton general:

(Algoritmo 11.3)

```
def metodo_newton(f,x0=1,delta=1e-5,args=()):
    #Valor inicial de la anomalía excéntrica
    xn=x0
    #Valor inicial del error relativo
    Dn=1
    #Contador de iteraciones
    ni=0
    while Dn>delta:
        #Inicializa el valor de En
        x=xn
        #Nuevo valor (regla de iteración)
        xn=x-f(x,*args)[0]/f(x,*args)[1]
        #Valor medio
        xmed=(x+xn)/2
        #Criterio de convergencia
        en=xn-x
        Dn=abs(en/xmed)
        ni+=1
    return xmed,Dn,ni
```

Método de Laguerre-Conway:

(Algoritmo 11.4)

```
def metodo_laguerre(f,x0=1,delta=1e-5,args=(),eta=5):
    #Varifica que el valor inicial sea apropiado
    disc=-1
    mi=0
    #Valor inicial de la anomalía excéntrica
    xn=x0
    #Valor inicial del error relativo
    Dn=1
    #Contador de iteraciones
    ni=0
    while Dn>delta:
        #Inicializa el valor de En
        x=xn
        disc=-1
        mi=0
        while disc<0:
            mi+=1
            #Valor de la función y sus derivadas
            y,yp,ypp=f(x,*args)
            #Discriminante
            disc=(eta-1)**2*yp**2-eta*(eta-1)*y*ypp
            eta=eta-1 if disc<0 else eta
        #Raiz del discriminante
        from numpy import sqrt
        raiz_disc=sqrt(disc)
        #Signo en el denominador
        sgn+=1 if abs(yp+raiz_disc)>abs(yp-raiz_disc) else -1
```

```

#Valor de en
en=eta*y/(yp+sgn*raiz_disc)
#Nuevo valor (regla de iteración)
xn=x-en
#Valor medio
xmed=(x+xn)/2
#Criterio de convergencia
en=xn-x
Dn=abs(en/xmed)
ni+=1
return xmed,Dn,ni+mi-1

```

La fuente original de este algoritmo esta disponible en línea⁶⁹.

```

def kepler_semanalitico(M,e):
    from math import sin,cos,pi

    #Casos extremos
    if M==0 or M==2*pi or e==1: return M,0,0
    Minp=M

    Ecorr=0;Esgn=1.0
    if M>pi:
        M=2*pi-M
        Ecorr=2*pi
        Esgn=-1.0

    #Circunferencia
    if e==0: return Ecorr+Esgn*M,0,0

    a=(1-e)*3/(4*e+0.5);
    b=-M/(4*e+0.5);
    y=(b**2/4 +a**3/27)**0.5;
    x=(-0.5*b+y)**(1./3)-(0.5*b+y)**(1./3);
    w=x-0.078*x**5/(1 + e);
    E=M+e*(3*w-4*w**3);

    #Corrección por Newton
    sE=sin(E)
    cE=cos(E)

    f=(E-e*sE-M);
    fd=1-e*cE;
    f2d=e*sE;
    f3d=-e*cE;
    f4d=e*sE;
    E=E-f/fd*(1+f*f2d/(2*fd*fd)+\
               f*f*(3*f2d*f2d-fd*f3d)/(6*fd**4)+\
               (10*fd*f2d*f3d-15*f2d**3-fd**2*f4d)*\

```

⁶⁹<http://smallsats.org/2013/04/20/keplers-equation-iterative-and-non-iterative-solver-comparison/>

```

f**3/(24*fd**6))

#Corrección por Newton
f=(E-e*sE-M);
fd=1-e*cE;
f2d=e*sE;
f3d=-e*cE;
f4d=e*sE;
E=E-f/fd*(1+f*f2d/(2*fd*fd)+\
           f*f*(3*f2d*f2d-fd*f3d)/(6*fd**4)+\
           (10*fd*f2d*f3d-15*f2d**3-fd**2*f4d)*\
           f**3/(24*fd**6))

E=Ecorr+Esgn*E

#Error relativo
Mnum=E-e*sin(E)
Dn=abs(Mnum-Minp)/Minp

return E,Dn,1

```

Si continuamos indefinidamente el proceso anterior es posible mostrar que la anomalía excéntrica puede calcularse como una *serie de Fourier* de la forma [40]:

$$E = M + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} a_{nk} \sin[(n - 2k)M] \quad (11.1)$$

donde:

$$a_{nk} = (-1)^k \frac{(n - 2k)^{n-1}}{(n - k)!k!}$$

Puede probarse que esta serie converge uniformemente para todos los valores de $e < 0,662743419349181$.⁷⁰

(Algoritmo 11.5)

```

def kepler_eserie(M,e,delta=0,orden=1):
    from math import sin,factorial,floor
    nfac=1
    En=M
    Dn=1
    n=0
    condicion=Dn>delta if delta>0 else n<=orden
    while condicion:
        n+=1
        E=En
        prefactor=e**n/2**((n-1))
        kmax=int(floor(n/2))
        sgn=-1

```

⁷⁰El valor de esta cota máxima es una constante matemática conocida como el *límite de Laplace* y es igual a la solución numérica de la ecuación $x \exp \sqrt{1+x^2} / (1 + \sqrt{1+x^2}) = 1$ [15].

```

#Los factoriales se calculan así para mayor eficiencia
nfac=nfac*n if n>0 else 1
kfac=1
nkfac=1
termino=0
for k in range(kmax+1):
    sgn*=-1
    kfac=kfac*k if k>0 else 1
    nkfac=nkfac/(n-k+1) if k>0 else nfac
    ank=sgn/(kfac*nkfac)*(n-2*k)**(n-1)
    termino+=ank*sin((n-2*k)*M)
dE=prefactor*termino
En+=dE
Dn=abs(dE/En)
#La condicion depende de si se pasa o no la tolerancia
condicion=Dn>delta if delta>0 else n<orden
return En,Dn,n

```

Esta rutina implementa la serie en la Ec. 7.78:

(Algoritmo 11.6)

```

def kepler_bessel(M,e,delta):
    from math import sin
    from scipy.special import jv
Dn=1
n=1
En=M
while Dn>delta:
    E=En
    dE=(2./n)*jv(n,n*e)*sin(n*M)
    En+=dE
    Emed=(E+En)/2
    Dn=abs(dE/Emed)
    n+=1
return En,Dn,n

```

Series de Stumpff. Devuelve el valor de la series y de su primera y segunda derivada.

(Algoritmo 11.7)

```

def serie_stumpff(t,k,N=15):
    from math import factorial
    sk=lambda n:t*((2*n+k+1)*(2*n+k+2))*(1-sk(n+1))\
        if n<N else 0
    return (1-sk(0))/factorial(k)

```

Bibliografía

- [1] T. M. APOSTOL, *CALCULUS volume I One-Variable Calculus, with an Introduction to Linear Algebra*, Blaisdell Publishing Company, John Wiley & Sons, 1967.
- [2] T. M. APOSTOL, *Calculus, Volume II: Multi-Variable Calculus and Linear Algebra, with Applications to Differential Equations and Probability*, John Wiley & Sons, 1969.
- [3] L. K. BABADZHANIANTS, *Existence of the Continuations in the N-Body Problem*, Celestial Mechanics, 20 (1979), pp. 43–57, <https://doi.org/10.1007/BF01236607>.
- [4] L. K. BABADZHANYANTS, *On the global solution of the N-body problem*, Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, 56 (1993), pp. 427–449, <https://doi.org/10.1007/BF00691812>.
- [5] E. BARRABÉS AND S. MIKKOLA, *Families of periodic horseshoe orbits in the restricted three-body problem*, Astronomy & Astrophysics, 432 (2005), pp. 1115–1129.
- [6] J. BARROW-GREEN, *The dramatic episode of Sundman*, Historia Mathematica, 37 (2010), pp. 164 – 203, <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.hm.2009.12.004>, <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0315086009001360>.
- [7] R. R. BATE, D. D. MUELLER, AND J. E. WHITE, *Fundamentals of astrodynamics*, Courier Corporation, 1971.
- [8] K. BATYGIN AND M. E. BROWN, *Evidence for a distant giant planet in the solar system*, The Astronomical Journal, 151 (2016), p. 22.
- [9] H. BRUNS, *Über die integrale des vielkörper-problems*, Acta Mathematica, 11 (1887), pp. 25–96.
- [10] T. BURKARDT AND J. DANBY, *The solution of kepler's equation, ii*, Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, 31 (1983), pp. 317–328.
- [11] J. A. BURNS, *Elementary derivation of the perturbation equations of celestial mechanics*, American Journal of Physics, 44 (1976), pp. 944–949.
- [12] S. CHANDRASEKHAR, *Newton's Principia for the common reader*, Oxford University Press, 2003.
- [13] G. E. CHRISTIANSON AND R. S. WESTFALL, *In the presence of the Creator: Isaac Newton and his times*, Free Press New York, 1984.
- [14] R. CLAUSIUS, *On a mechanical theorem applicable to heat*, The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science, 40 (1870), pp. 122–127.

- [15] P. COLWELL, *Solving kepler's equation over three centuries*, Richmond, Va.: Willmann-Bell, 1993., (1993).
- [16] B. A. CONWAY, *An Improved Algorithm due to Laguerre for the Solution of Kepler's Equation*, Celestial Mechanics, 39 (1986), pp. 199–211, <https://doi.org/10.1007/BF01230852>.
- [17] G. G. CORIOLIS, *Mémoire sur les équations du mouvement relatif des systèmes de corps*, Bachelier, 1835.
- [18] J. DANBY, *The solution of kepler's equation, iii*, Celestial mechanics, 40 (1987), pp. 303–312.
- [19] J. DANBY, *Fundamentals of celestial mechanics*, Richmond: Willman-Bell, | c1992, 2nd ed., (1992).
- [20] J. DANBY AND T. BURKARDT, *The solution of kepler's equation, i*, Celestial Mechanics, 31 (1983), pp. 95–107.
- [21] J. T. DEVREESE AND G. V. BERGHE, 'Magic is no magic': the wonderful world of Simon Stevin, WIT Press, 2008.
- [22] F. DIACU, *The solution of the n-body problem*, The mathematical intelligencer, 18 (1996), pp. 66–70.
- [23] P. P. EGGLERON, *Aproximations to the radii of Roche lobes.*, Ap.J., 268 (1983), pp. 368–369, <https://doi.org/10.1086/160960>.
- [24] H. W. EVES, *A Survey of Geometry: Rev. Ed*, Allyn and Bacon, 1972.
- [25] T. FUKUSHIMA, *A method solving kepler's equation without transcendental function evaluations*, Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, 66 (1996), pp. 309–319.
- [26] R. GAVAZZI, C. ADAMI, F. DURRET, J.-C. CUILLANDRE, O. ILBERT, A. MAZURE, R. PELLO, AND M. P. ULMER, *A weak lensing study of the coma cluster*, Astronomy & Astrophysics, 498 (2009), pp. L33–L36.
- [27] T. GERKEMA AND L. GOSTIAUX, *A brief history of the coriolis force*, Europhysics News, 43 (2012), pp. 14–17.
- [28] H. GOLDSTEIN, *Prehistory of the "runge-lenz"vector*, American Journal of Physics, 43 (1975), pp. 737–738.
- [29] H. GOLDSTEIN, C. POOLE, AND J. SAFKO, *Classical mechanics*, 2002.
- [30] C. M. GRANEY, *Coriolis effect, two centuries before coriolis*, Physics Today, 64 (2011), p. 8.
- [31] D. GREBOW, *Generating periodic orbits in the circular restricted three-body problem with applications to lunar south pole coverage*, MSAA Thesis, School of Aeronautics and Astronautics, Purdue University, (2006).
- [32] A. C. HINDMARSH, *Odepack, a systematized collection of ode solvers*, Scientific computing, (1983), pp. 55–64.
- [33] E. JULLIARD-TOSEL, *Brun's theorem: The proof and some generalizations*, Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, 76 (2000), pp. 241–281.
- [34] P. S. LAPLACE ET AL., *Oeuvres complètes de Laplace*, Gautier-Villars, 1835.
- [35] R. MEIRE, *An efficient method for solving barker's equation*, Journal of the British Astronomical Association, 95 (1985), p. 113.

- [36] C. D. MURRAY AND S. F. DERMOTT, *Solar system dynamics*, Cambridge university press, 1999.
- [37] I. NEWTON AND E. HALLEY, *Philosophiae naturalis principia mathematica*, vol. 62, Jussu Societatis Regiae ac typis Josephi Streater, prostant venales apud Sam . . . , 1780.
- [38] A. NIJENHUIS, *Solving kepler's equation with high efficiency and accuracy*, Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, 51 (1991), pp. 319–330.
- [39] A. ODELL AND R. GOODING, *Procedures for solving kepler's equation*, Celestial mechanics, 38 (1986), pp. 307–334.
- [40] H. C. K. PLUMMER, *An introductory treatise on dynamical astronomy*, University Press, 1918.
- [41] H. POINCARÉ, *Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique*, Acta mathematica, 13 (1890), pp. A3–A270.
- [42] H. POINCARÉ, *New methods of celestial mechanics*, vol. 13, Springer Science & Business Media, 1992.
- [43] H. POLLARD, *A sharp form of the virial theorem*, Bulletin of the American Mathematical Society, 70 (1964), pp. 703–705.
- [44] J. G. PORTILLA, *Principios de Mecánica Celeste*, Universidad Nacional de Colombia, 2019.
- [45] W. H. PRESS, S. A. TEUKOLSKY, W. T. VETTERLING, AND B. P. FLANNERY, *Numerical recipes 3rd edition: The art of scientific computing*, Cambridge university press, 2007.
- [46] W. QIU-DONG, *The global solution of the n-body problem*, Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, 50 (1990), pp. 73–88.
- [47] P. G. ROLL, R. KROTKOV, AND R. H. DICKE, *The equivalence of inertial and passive gravitational mass*, Annals of Physics, 26 (1964), pp. 442–517.
- [48] D. SOUAMI AND J. SOUCHAY, *The solar system's invariable plane*, Astronomy & Astrophysics, 543 (2012), p. A133.
- [49] M. F. STRUBLE AND H. J. ROOD, *A compilation of redshifts and velocity dispersions for aco clusters*, The Astrophysical Journal Supplement Series, 125 (1999), p. 35.
- [50] K. F. SUNDMAN, *Mémoire sur le problème des trois corps*, Acta Math., 36 (1913), pp. 105–179, <https://doi.org/10.1007/BF02422379>, <https://doi.org/10.1007/BF02422379>.
- [51] F. WILCZEK, *Whence the force of $f = ma$? i: Culture shock*, Physics Today, 57 (2004), pp. 11–12.
- [52] F. ZWICKY, *On the Masses of Nebulae and of Clusters of Nebulae*, Astrophysical Journal, 86 (1937), p. 217, <https://doi.org/10.1086/143864>.