

# MODÉLISATION ET INVERSION EN GÉOPHYSIQUE

## 4 - Inversion: Introduction

Bernard Giroux  
([bernard.giroux@ete.inrs.ca](mailto:bernard.giroux@ete.inrs.ca))

Institut national de la recherche scientifique  
Centre Eau Terre Environnement

Version 1.0.0  
Hiver 2018

Données et modèles

Problème discret

Systèmes linéaires

Difficultés

Exemples

Références

# Données et modèles

Données et modèles

Problème discret

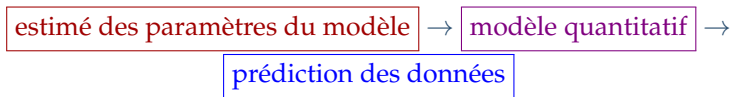
Systèmes linéaires

Difficultés

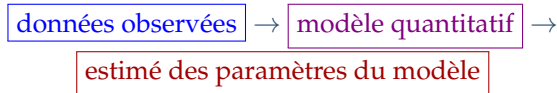
Exemples

Références

- Problème direct



- Problème inverse



## Données et modèles

### Problème discret

### Systèmes linéaires

### Difficultés

### Exemples

### Références

- Les données mesurées, notées  $d$ , constituent le point de départ de l'inversion.
- L'objectif est d'obtenir une information caractérisant l'objet étudié;
  - Cette information prends la forme de valeurs numériques : les paramètres du modèle, notés  $m$ .
- Les lois de la physique permettent de relier  $m$  et  $d$ ;
  - Ces lois sont décrites par une fonction  $G$ , telle que

$$G(m) = d. \quad (1)$$

- Les données peuvent être fonction du temps et/ou de l'espace, et sont généralement une série d'observations *discrètes*.

- En pratique, les données mesurées contiennent une erreur expérimentale.
- On assume que les données sont la somme des mesures obtenues d'une expérience "parfaite", notées  $d_{\text{vrai}}$ , et d'un bruit  $\eta$ , i.e.

$$d = G(m_{\text{vrai}}) + \eta \quad (2)$$

$$= d_{\text{vrai}} + \eta, \quad (3)$$

où

- $d_{\text{vrai}}$  satisfait l'éq. (1) lorsque  $m$  est égal au modèle vrai  $m_{\text{vrai}}$  ;
- la fonction  $G$  représente exactement la réalité.
- La présence de  $\eta$ , même faible, peut faire en sorte que  $m$  retrouvé par inversion soit très différent de  $m_{\text{vrai}}$ .
- En général, il existe un infinité de modèles  $m$  différents de  $m_{\text{vrai}}$  qui s'ajustent à  $d_{\text{vrai}}$ .

Données et modèles

**Problème discret**

Systèmes linéaires

Difficultés

Exemples

Références

# Problème discret

- La plupart du temps, le modèle est décrit par un nombre fini,  $M$ , de paramètres, i.e.

$$\mathbf{m} = [m_0, m_1, m_2, \dots, m_{M-1}] \quad (4)$$

- De façon similaire, on dispose d'un nombre fini,  $N$ , de données

$$\mathbf{d} = [d_0, d_1, d_2, \dots, d_{N-1}] \quad (5)$$

- On a alors affaire à un problème inverse discret de la forme

$$G(\mathbf{m}) = \mathbf{d}. \quad (6)$$

- Dans le cas contraire où le modèle et les données sont des fct continues, l'estimation de  $m$  à partir de  $d$  est un problème inverse continu ;
  - On peut souvent approximer un problème continu par un problème discret.

Données et modèles

Problème discret

Systèmes linéaires

Difficultés

Exemples

Références

- Lorsque le nombre de paramètres  $M$  est faible, on parle d'estimation de paramètres ;
- *A contrario*, lorsque  $M$  est élevé et qu'il est nécessaire d'appliquer des contraintes pour stabiliser la solution, on parle de problème inverse ;
  - On verra plus loin que des contraintes sont nécessaires lorsque le système à résoudre est *mal conditionné*.



Données et modèles

Problème discret

**Systèmes linéaires**

Difficultés

Exemples

Références

# Systèmes linéaires

- Les systèmes linéaires sont un type de modèle mathématique trouvant plusieurs applications ;
- Les systèmes linéaires obéissent au principe de superposition :

$$G(m_1 + m_2) = G(m_1) + G(m_2) \quad (7)$$

et à la mise à l'échelle :

$$G(\alpha m) = \alpha G(m). \quad (8)$$

- Dans le cas des problèmes inverses discrets, le problème devient un système linéaire d'équations algébriques :

$$G(\mathbf{m}) = \mathbf{G}\mathbf{m} = \mathbf{d}. \quad (9)$$

Données et modèles

Problème discret

Systèmes linéaires

Difficultés

Exemples

Références

- En géophysique, les modèles linéaires sont souvent utilisables ;
- La raison principale est que l'objet d'étude varie peu par rapport à son état d'équilibre ;
- Une relation linéaire permet de décrire adéquatement le phénomène ;
- Par exemple en sismique, les contraintes générées par le passage des ondes sont très faibles p/r aux modules d'élasticité ;
  - La relation contrainte/déformation est alors quasi linéaire.
- La gravimétrie et le magnétisme sont d'autres exemples où les champs sont faibles et où des modèles linéaires s'appliquent.

Données et modèles

Problème discret

Systèmes linéaires

**Difficultés**

Exemples

Références

# Difficultés

Données et modèles

Problème discret

Systèmes linéaires

**Difficultés**

Exemples

Références

- Il est crucial de demeurer critique face aux résultats de l'inversion ;
- La raison principale est qu'il peut y avoir plusieurs modèles qui s'ajustent aussi bien aux données ;
- Les éléments à l'origine de ce phénomène sont :
  - ① l'existence d'une solution ;
  - ② la non unicité de la solution ;
  - ③ l'instabilité du système.

Données et modèles

Problème discret

Systèmes linéaires

Difficultés

Exemples

Références

- Il est possible qu'aucun modèle ne s'ajuste *parfaitement* aux données;
- Les raisons sont :
  - le modèle physique est approximatif;
  - les données contiennent du bruit.
- Si l'ajustement n'est pas parfait, il est fort probable que le modèle estimé ne soit qu'une approximation du modèle réel.

Données et modèles

Problème discret

Systèmes linéaires

Difficultés

Exemples

Références

- Advenant que des solutions exactes existent, elles peuvent être non uniques, *même pour un nombre infini de données* ;
- L'exemple classique est la réponse d'une sphère en gravimétrie, qui dépend de la masse de la sphère et non de la distribution de densité.
  - Deux sphères donneront exactement la même réponse si

$$\rho_1 \frac{4}{3} \pi r_1^3 = \rho_2 \frac{4}{3} \pi r_2^3$$

- La non unicité est une caractéristique des systèmes linéaires pour lesquelles les équations ne sont pas toutes linéairement indépendantes ;
  - Le degré d'indépendance peut être évalué par l'analyse de la *résolution du modèle*.

Données et modèles

Problème discret

Systèmes linéaires

Difficultés

Exemples

Références

- Une solution est instable lorsqu'un faible changement dans une mesure (e.g., un faible bruit  $\eta$ ) produit une variation importante du modèle estimé ;
- De tels problèmes sont dits *mal conditionnés* dans le cas des problèmes discrets, ou *mal posés* dans le cas continu ;
- Il est possible de stabiliser la solution en imposant des contraintes qui vont biaiser (d'une façon souhaitée) la solution ;
  - on parle alors de *régularisation*.



Données et modèles

Problème discret

Systèmes linéaires

Difficultés

**Exemples**

Références

# Exemples

# Exemple 1 : Ajuster une droite

Données et modèles

Problème discret

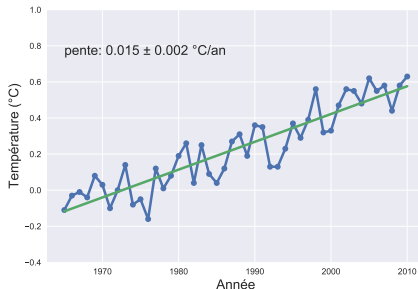
Systèmes linéaires

Difficultés

Exemples

Références

- On dispose d'un certain nombre ( $N$ ) de mesures de température prises à des temps  $t_i$  dans l'atmosphère.
  - Ces données constituent le vecteur  $\mathbf{d} = [T_0, T_1, T_2, \dots, T_{N-1}]^T$ .
- On assume que la température obéit à un modèle linéaire en fonction du temps :  $T = a + bt$ ;
  - L'ordonnée à l'origine  $a$  et la pente  $b$  sont les deux paramètres du modèle, i.e.  $\mathbf{m} = [a, b]^T$ .



# Exemple 1 : Ajuster une droite

Données et modèles

Problème discret

Systèmes linéaires

Difficultés

Exemples

Références

- Selon le modèle linéaire, la température doit satisfaire

$$T_0 = a + bt_0 \quad (10)$$

$$T_0 = a + bt_0 \quad (11)$$

$$\vdots \quad (12)$$

$$T_{N-1} = a + bt_{N-1} \quad (13)$$

- Sous forme matricielle, on a

$$\underbrace{\begin{bmatrix} T_0 \\ T_1 \\ \vdots \\ T_{N-1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{d}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & t_0 \\ 1 & t_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & t_{N-1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{G}} \underbrace{\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}}_{\mathbf{m}} \quad (14)$$

## Exemple 2 : Profilage sismique vertical

Données et modèles

Problème discret

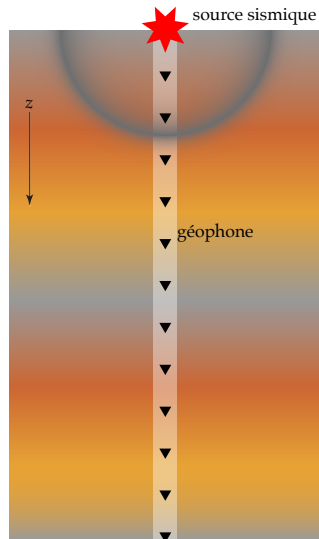
Systèmes linéaires

Difficultés

Exemples

Références

- Avec le profilage sismique vertical, on cherche à déterminer la distribution verticale de la vitesse sismique  $V$ ;
- Des géophones sont placés dans un forage et une source est actionnée à la surface;
- L'onde sismique est enregistrée aux géophones, ce qui permet de déterminer le temps de parcours  $t$ .



## Exemple 2 : Profilage sismique vertical

Données et modèles

Problème discret

Systèmes linéaires

Difficultés

Exemples

Références

- Le problème est non linéaire lorsque défini en terme de vitesse ;
- Le problème est linéaire si exprimé en terme de *lenteur* ( $s$ ), l'inverse de la vitesse, i.e.  $s = 1/V$ .
- Le temps de parcours à une profondeur  $z$  vaut

$$t(z) = \int_0^z s(l)dl \quad (15)$$

$$= \int_0^\infty s(l)H(z-l)dl \quad (16)$$

où  $H$  est la fonction de Heaviside, qui vaut 1 si  $z-l \geq 0$  et 0 si  $z-l < 0$ .

## Exemple 2 : Profilage sismique vertical

Données et modèles

Problème discret

Systèmes linéaires

Difficultés

Exemples

Références

- Le problème est résolu en discrétisant le milieu en couches
- Si le modèle compte  $M$  couches et le levé compte  $N$  géophones, l'intégrale devient, pour un  $i^e$  géophone

$$t_i = \sum_{j=0}^{N-1} H(y_i - z_j) s_j \Delta z \quad (17)$$

où  $N/M = \Delta y / \Delta z$  est un entier.

- Le vecteur des données est  $\mathbf{d} = [t_0, t_1, t_2, \dots, t_{N-1}]^T$  ;
- Les paramètres du modèle est sont regroupés dans le vecteur  $\mathbf{m} = [s_0, s_1, s_2, \dots, s_{M-1}]^T$  ;
- La matrice  $\mathbf{G}$  sera alors de dimension  $N \times M$  et contiendra les termes  $H(y_i - z_j) \Delta z$ .

# Exemple 2 : Profilage sismique vertical

Données et modèles

Problème discret

Systèmes linéaires

Difficultés

Exemples

Références



## Exemple 2 : Profilage sismique vertical

Données et modèles

Problème discret

Systèmes linéaires

Difficultés

Exemples

Références

- Sous forme matricielle, pour l'ensemble des données de la figure, on obtient

$$\underbrace{\begin{bmatrix} t_0 \\ t_1 \\ \vdots \\ t_{10} \\ t_{11} \end{bmatrix}}_{\mathbf{d}} = \Delta z \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{G}} \underbrace{\begin{bmatrix} s_0 \\ s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_9 \end{bmatrix}}_{\mathbf{m}} \quad (18)$$



## Exemple 3 : Tomographie

Données et modèles

Problème discret

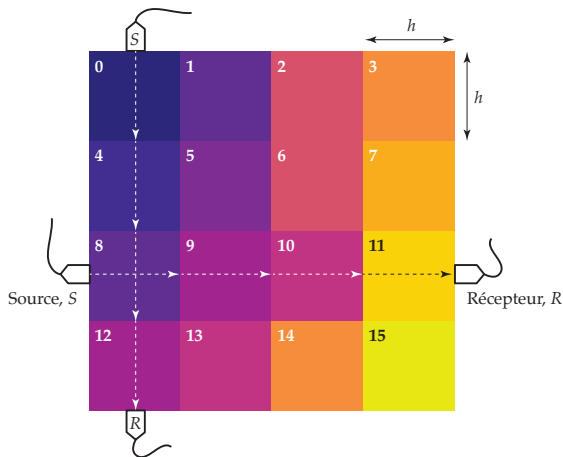
Systèmes linéaires

Difficultés

Exemples

Références

- En tomographie, on cherche à évaluer la vitesse de propagation ou l'atténuation des ondes dans un milieu.
- Soit l'exemple d'un mur de briques de vitesses différentes :



## Exemple 3 : Tomographie

Données et modèles

Problème discret

Systèmes linéaires

Difficultés

Exemples

Références

- Deux séries de mesures sont faites, une première le long des lignes et la seconde le long des colonnes, pour un total de  $N=8$  mesures.
- Le vecteur des données est  $\mathbf{d} = [t_0, t_1, t_2, \dots, t_7]^T$
- On suppose que chaque brique est de vitesse  $V$  uniforme ;
- Le temps de parcours dans une brique  $j$  est proportionnel à la distance parcourue dans la brique,  $h$ , et vaut  $t_j = hs_j$ , où  $s$  est la lenteur.
- Le modèle comporte  $M=16$  paramètres, et est dans ce cas  $\mathbf{m} = [s_0, s_1, s_2, \dots, s_{15}]^T$

## Exemple 3 : Tomographie

Données et modèles

Problème discret

Systèmes linéaires

Difficultés

Exemples

Références

- On relie les données aux paramètres du modèle par

$$\text{ligne 1 : } t_0 = hs_0 + hs_1 + hs_2 + hs_3$$

$$\text{ligne 2 : } t_1 = hs_4 + hs_5 + hs_6 + hs_7$$

$$\vdots$$

$$\text{colonne 3 : } t_6 = hs_2 + hs_6 + hs_{10} + hs_{14}$$

$$\text{colonne 4 : } t_7 = hs_3 + hs_7 + hs_{11} + hs_{15}$$

- Sous forme matricielle, nous avons

$$\begin{bmatrix} t_0 \\ t_1 \\ \vdots \\ t_6 \\ t_7 \end{bmatrix} = h \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_0 \\ s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_{15} \end{bmatrix} \quad (19)$$

Données et modèles

Problème discret

Systèmes linéaires

Difficultés

Exemples

Références

# Références

Données et modèles

Problème discret

Systèmes linéaires

Difficultés

Exemples

Références

- Aster, R. C., Borchers, B., and Thurber, C. H. (2013). *Parameter Estimation and Inverse Problems*. Academic Press, 2nd edition
- Menke, W. (2012). *Geophysical Data Analysis : Discrete Inverse Theory*. Academic Press, 3<sup>rd</sup> edition