

Introduction

Modélisation en  
ondes complètes –  
Sismique

Références

# **GEO1302 – Modélisation et inversion en géophysique**

## **3 - Géoradar et sismique**

Bernard Giroux  
[\(bernard.giroux@ete.inrs.ca\)](mailto:bernard.giroux@ete.inrs.ca)

Institut national de la recherche scientifique  
Centre Eau Terre Environnement

Version 1.2.4  
Hiver 2020

**Introduction**

Modélisation en  
ondes complètes –  
Sismique

Références

# Introduction

# Introduction

Introduction

Modélisation en  
ondes complètes –  
Sismique

Références

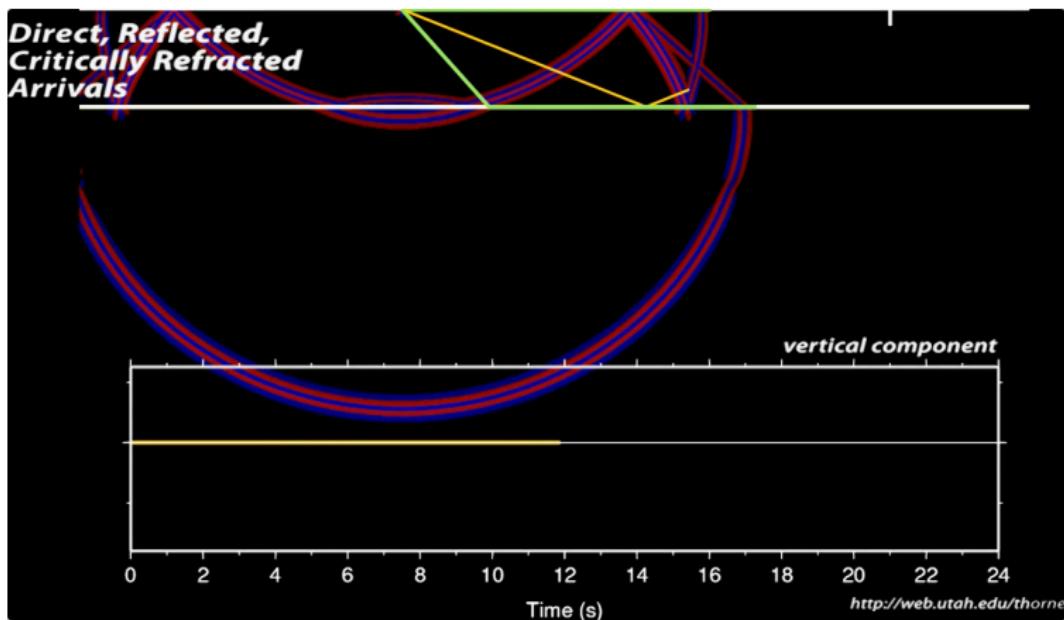
- Avec le géoradar ou en sismique, une source permet de générer une **onde** qui se propage dans le milieu et qui est éventuellement enregistrée à un ou des capteurs localisés à une certaine distance de la source.
- Selon l'application, on peut être intéressé à modéliser
  - la **forme de l'onde** complète,
  - le **temps d'arrivée** d'une phase particulière (P ou S, réfléchie, directe, réfractée, ...),
  - sa **trajectoire** et/ou
  - son **amplitude**.
- Ces applications sont principalement la migration et la tomographie.

# Introduction

Introduction

Modélisation en  
ondes complètes –  
Sismique

Références



# Introduction

Introduction

Modélisation en  
ondes complètes –  
Sismique

Références

- On distingue *grossost modo* trois familles de méthodes pour modéliser les phénomènes ondulatoires :
  - La **modélisation en ondes complètes** (*full waveform modeling*), où un système d'équation aux dérivées partielles est solutionné sur un maillage numérique ;
  - Le **tracé de rais** (*ray tracing*), qui repose sur une solution asymptotique en haute fréquence ;
  - Les **méthodes intégrales** (*Integral-equation methods*), basées sur le principe de Huygens (superposition de fronts d'ondes originants de sources ponctuelles).
- Chaque famille compte elle-même plusieurs méthodes et algorithmes :
  - formalisme en temps ou en fréquences,
  - différences finies, éléments finis, éléments spectraux, méthode pseudospectrale,
  - inflexion des rais (*ray bending*), méthode des tirs (*ray shooting*), méthode des graphes,
  - et *tutti quanti*.

# Introduction

Introduction

Modélisation en  
ondes complètes –  
Sismique

Références

- Que ce soit en sismique ou en géoradar (EM), il est fréquent de faire des hypothèses simplificatrices pour accélérer les calculs;
  - Général : modélisation 1D, 2D ou 2.5D, ignorer l'anisotropie, ignorer la non linéarité des propriétés du milieu;
  - Sismique : négliger le module de cisaillement et modéliser l'onde P seulement, ignorer les interactions matrice poreuse / fluides;
  - EM : négliger la conductivité électrique.
- Également, il est important de se rappeler que le tracé de rayon est en soi une simplification (on considère une fréquence infinie).
- Ces simplifications peuvent très bien être justifiées, il demeure néanmoins important de rester conscient des implications qu'elles entraînent, en particulier lorsqu'on souhaite ajuster un modèle à des données expérimentales.

# Introduction

Introduction

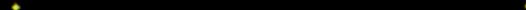
Modélisation en  
ondes complètes –  
Sismique

Références

## ***Small scale velocity perturbations***

*no scattering*

*scattering*



Introduction

**Modélisation en  
ondes complètes –  
Sismique**

Généralités

Théorie

Méthode FDTD

FDTD - Discrétisation

FDTD - Source

FDTD - Marche  
temporelle

FDTD - Stabilité

FDTD - Dispersion

FDTD - Cond. limites

FDTD - PML

FDTD - CPML

Références

# Modélisation en ondes complètes – Sismique

# Généralités

Introduction

Modélisation en  
ondes complètes –  
Sismique

Généralités

Théorie

Méthode FDTD

FDTD - Discréttisation

FDTD - Source

FDTD - Marche  
temporelle

FDTD - Stabilité

FDTD - Dispersion

FDTD - Cond. limites

FDTD - PML

FDTD - CPML

Références

- Avec la modélisation en onde complète, le milieu géologique est représenté par un maillage numérique, sur un domaine spatial fini.
- Les équations aux dérivées partielles peuvent être solutionnées par différences finies, éléments finis, etc.
- Pour un formalisme dans le domaine du temps, la variable temporelle  $t$  doit être discrétisée ;
  - une *marche temporelle* doit être effectuée pour simuler la progression du front d'onde.
- Pour un formalisme dans le domaine des fréquences, le front d'onde est modélisé fréquence par fréquence ;
  - peut s'avérer avantageux en inversion en onde complète.
- Le front d'onde en entier est modélisé sur tout le domaine spatial considéré ;
  - il est important d'imposer des conditions aux limites *absorbantes* aux frontières du domaine, pour éviter des réflexions artificielles et simuler adéquatement le fait qu'une onde réelle se propagerait au delà du domaine numérique.

# Théorie

Introduction

Modélisation en  
 ondes complètes –  
 Sismique

Généralités

Théorie

Méthode FDTD

FDTD - Discrétilisation

FDTD - Source

FDTD - Marche  
 temporelle

FDTD - Stabilité

FDTD - Dispersion

FDTD - Cond. limites

FDTD - PML

FDTD - CPML

Références

- Soit une **contrainte**  $\tau$  agissant sur un matériau élastique et provoquant une **déformation**  $\epsilon$ .
- Suite à cette contrainte, le matériau est hors d'équilibre.
- Si  $\tau$  est appliquée dans le plan  $\perp$  à  $x$ , les forces par unité de volume selon  $x$ ,  $y$  et  $z$  s'écrivent comme

$$\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x}, \quad \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}, \quad \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}.$$

- Voyons comment ces forces peuvent être reliées à une quantité mesurable.
- Définissons le vecteur de **déplacement d'une particule** (ou élément de volume) par

$$\mathbf{u} = u_x \hat{x} + u_y \hat{y} + u_z \hat{z}.$$

# Théorie

Introduction

Modélisation en  
ondes complètes –  
Sismique

Généralités

**Théorie**

Méthode FDTD

FDTD - Discrétisation

FDTD - Source

FDTD - Marche  
temporelle

FDTD - Stabilité

FDTD - Dispersion

FDTD - Cond. limites

FDTD - PML

FDTD - CPML

Références

# Théorie

Introduction

Modélisation en  
ondes complètes –  
Sismique

Généralités

Théorie

Méthode FDTD

FDTD - Discrétisation

FDTD - Source

FDTD - Marche  
temporelle

FDTD - Stabilité

FDTD - Dispersion

FDTD - Cond. limites

FDTD - PML

FDTD - CPML

Références

- **u** (ou sa dérivée dans le temps) est la quantité mesurée en sismique.
- La **2<sup>e</sup> loi de Newton** relie  $\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}$  (l'accélération) à la force exercée

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \text{Forces agissant sur le volume selon } x \\ = \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \quad (1)$$

où  $\rho$  est la densité (constante) du matériau.

# Théorie

Introduction

Modélisation en  
ondes complètes –  
Sismique

Généralités

Théorie

Méthode FDTD

FDTD - Discrétisation

FDTD - Source

FDTD - Marche  
temporelle

FDTD - Stabilité

FDTD - Dispersion

FDTD - Cond. limites

FDTD - PML

FDTD - CPML

Références

- Par ailleurs, les déformations  $\epsilon$  sont exprimées en termes des composantes de  $\mathbf{u}$ , i.e.

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right).$$

- La loi de Hooke relie contraintes et déformations.
- La forme générale de la loi de Hooke s'écrit

$$\tau_{ij} = c_{ijpq} \epsilon_{pq}, \quad (2)$$

où  $c_{ijpq}$  est un tenseur d'ordre 4, à 21 coefficients indépendants.

- Pour un milieu isotrope, on a  $\tau_{ii} = \lambda \Delta + 2\mu \epsilon_{ii}$ , et  $\tau_{ij} = \mu \epsilon_{ij}$ , ( $i \neq j$ );
  - $\lambda$  et  $\mu$  sont les constantes de Lamé;
  - $\Delta$  est le coefficient de dilatation :  $\Delta = \epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz} \equiv \nabla \cdot \mathbf{u}$ .

# Théorie

Introduction

Modélisation en  
 ondes complètes –  
 Sismique

Généralités

Théorie

Méthode FDTD

FDTD - Discréttisation

FDTD - Source

FDTD - Marche  
 temporelle

FDTD - Stabilité

FDTD - Dispersion

FDTD - Cond. limites

FDTD - PML

FDTD - CPML

Références

On arrive ainsi à

$$\begin{aligned}
 \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} &= \lambda \frac{\partial \Delta}{\partial x} + 2\mu \frac{\partial \epsilon_{xx}}{\partial x} + \mu \frac{\partial \epsilon_{xy}}{\partial y} + \mu \frac{\partial \epsilon_{xz}}{\partial z} \\
 &= \lambda \frac{\partial \Delta}{\partial x} + \mu \left[ 2 \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \left( \frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \left( \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right) \right] \\
 &= \lambda \frac{\partial \Delta}{\partial x} + \mu \nabla^2 u_x + \mu \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \\
 &= (\lambda + \mu) \frac{\partial \Delta}{\partial x} + \mu \nabla^2 u_x. \tag{3}
 \end{aligned}$$

# Théorie

Introduction

Modélisation en  
 ondes complètes –  
 Sismique

Généralités

Théorie

Méthode FDTD

FDTD - Discrétisation

FDTD - Source

FDTD - Marche  
 temporelle

FDTD - Stabilité

FDTD - Dispersion

FDTD - Cond. limites

FDTD - PML

FDTD - CPML

Références

- Selon les axes  $y$  et  $z$ , on obtient

$$\rho \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \frac{\partial \Delta}{\partial y} + \mu \nabla^2 u_y \quad (4)$$

et

$$\rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \frac{\partial \Delta}{\partial z} + \mu \nabla^2 u_z. \quad (5)$$

- On peut exprimer les équations (3), (4) et (5) sous forme vectorielle comme

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \nabla \Delta + \mu \nabla^2 \mathbf{u}$$

(6)

- Cette équation permet de décrire le mouvement des particules dans un milieu *élastique, homogène et isotrope*.

# Théorie

Introduction

Modélisation en  
ondes complètes –  
Sismique

Généralités

Théorie

Méthode FDTD

FDTD - Discréttisation

FDTD - Source

FDTD - Marche  
temporelle

FDTD - Stabilité

FDTD - Dispersion

FDTD - Cond. limites

FDTD - PML

FDTD - CPML

Références

- Lorsque le module de cisaillement  $\mu$  dans le matériau est nul, l'équation (6) se simplifie à

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \lambda \nabla \Delta = \lambda \nabla \nabla \cdot \mathbf{u}. \quad (7)$$

- À partir de la définition du champ de pression  $p = -K \nabla \cdot \mathbf{u}$ , où  $K = \lambda + \frac{2}{3}\mu$  est le module d'élasticité, on arrive à l'équation *acoustique* pour un milieu *homogène* et *isotrope*

$$\boxed{\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \nabla p} \quad (8)$$

# Méthode FDTD

Introduction

Modélisation en  
ondes complètes –  
Sismique

Généralités

Théorie

Méthode FDTD

FDTD - Discréttisation

FDTD - Source

FDTD - Marche  
temporelle

FDTD - Stabilité

FDTD - Dispersion

FDTD - Cond. limites

FDTD - PML

FDTD - CPML

Références

- La méthode des différences finies dans le domaine du temps (*finite-difference time-domain* (FDTD) compte parmi les plus populaires en modélisation sismique.
- La méthode FDTD a été présentée par Yee en 1966 pour résoudre les équations de Maxwell,
- En sismique, la première mouture a été proposée pour le cas élastique 2D dans les années soixantes (Altermann et Karal, 1968),
- Plusieurs variantes et améliorations ont été développées par la suite (grille décalée (*staggered grid*), 3D, anisotropie, viscoélastique, DF d'ordre élevé, *perfectly matched layers* (PML), etc).

# Méthode FDTD

Introduction

Modélisation en  
ondes complètes –  
Sismique

Généralités

Théorie

Méthode FDTD

FDTD - Discrétisation

FDTD - Source

FDTD - Marche  
temporelle

FDTD - Stabilité

FDTD - Dispersion

FDTD - Cond. limites

FDTD - PML

FDTD - CPML

Références

- La méthode FDTD sera introduite dans ce cours à partir du cas élastique 2D.
- En 2D, on pose que les propriétés du milieu *ne varient pas* selon l'axe  $y$ ;
- Si on s'intéresse aux ondes P et SV, il n'y a pas de mouvement des particules selon  $y$ , i.e.  $u_y = 0$ .
- La 2<sup>e</sup> loi de Newton (éq. (1)) devient alors

$$\rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \quad (9)$$

$$\rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} = \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \quad (10)$$

# Méthode FDTD

Introduction

Modélisation en  
ondes complètes –  
Sismique

Généralités

Théorie

Méthode FDTD

FDTD - Discrétisation

FDTD - Source

FDTD - Marche  
temporelle

FDTD - Stabilité

FDTD - Dispersion

FDTD - Cond. limites

FDTD - PML

FDTD - CPML

Références

- La loi de Hooke (équation (2)) s'écrit par ailleurs

$$\tau_{xx} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_x}{\partial x} + \lambda \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad (11)$$

$$\tau_{zz} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_z}{\partial z} + \lambda \frac{\partial u_x}{\partial x} \quad (12)$$

$$\tau_{xz} = \mu \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right). \quad (13)$$

# Méthode FDTD

## Introduction

Modélisation en  
ondes complètes –  
Sismique

Généralités

Théorie

Méthode FDTD

FDTD - Discrétisation

FDTD - Source

FDTD - Marche  
temporelle

FDTD - Stabilité

FDTD - Dispersion

FDTD - Cond. limites

FDTD - PML

FDTD - CPML

Références

- Virieux (dans ses papiers de 1984 et 1986) a proposé une approche basée sur les équations reliant contrainte ( $\tau$ ) et vitesse de déplacement des particules ( $v = \partial u / \partial t$ ).
- Les équations précédentes prennent alors la forme

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) \quad (14)$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right) \quad (15)$$

$$\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial t} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v_x}{\partial x} + \lambda \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (16)$$

$$\frac{\partial \tau_{zz}}{\partial t} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v_z}{\partial z} + \lambda \frac{\partial v_x}{\partial x} \quad (17)$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial t} = \mu \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right). \quad (18)$$

# Méthode FDTD – Discrétisation

Introduction

Modélisation en  
ondes complètes –  
Sismique

Généralités

Théorie

Méthode FDTD

FDTD - Discrétisation

FDTD - Source

FDTD - Marche  
temporelle

FDTD - Stabilité

FDTD - Dispersion

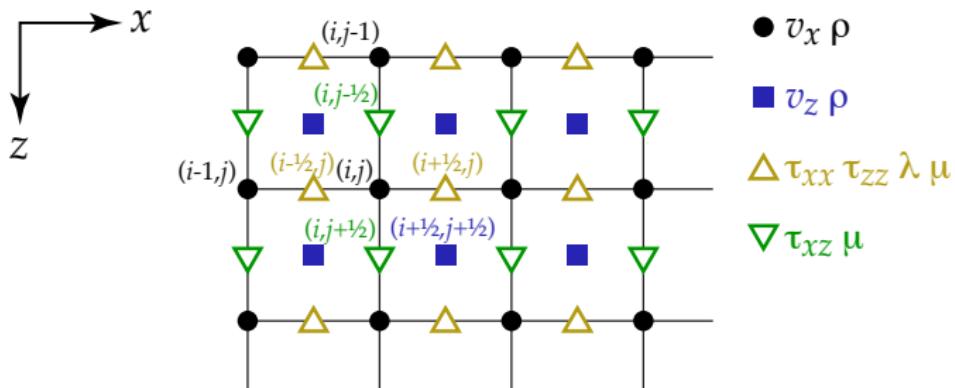
FDTD - Cond. limites

FDTD - PML

FDTD - CPML

Références

- Pour discréteriser les équations, Virieux a utilisé des différences finies centrées définies sur une **grille décalée**, dans **l'espace et dans le temps**
- Dans l'espace :



- L'indice  $i$  permet d'incrémenter selon  $x$ , et l'indice  $j$  selon  $z$ .

# Méthode FDTD – Discrétisation

Introduction

Modélisation en  
ondes complètes –  
Sismique

Généralités

Théorie

Méthode FDTD

FDTD - Discrétisation

FDTD - Source

FDTD - Marche  
temporelle

FDTD - Stabilité

FDTD - Dispersion

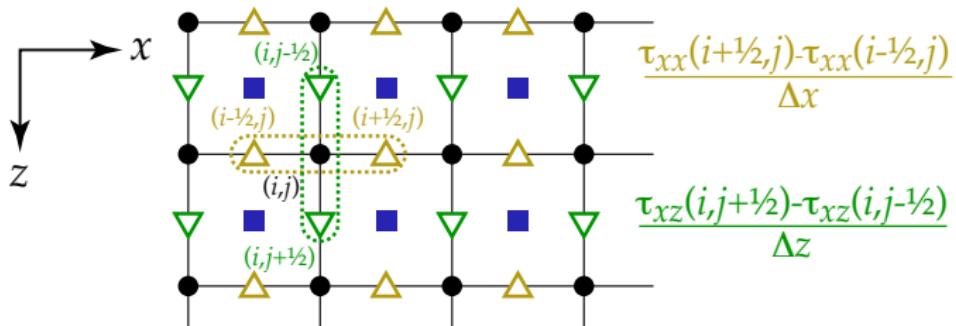
FDTD - Cond. limites

FDTD - PML

FDTD - CPML

Références

- Sur la grille spatiale décalée, les différences finies centrées sont définies pour  $\frac{1}{2}$  pas.
- Par exemple, pour l'éq. (14), les dérivées partielles  $\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x}$  et  $\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}$  sont évaluées à la position de  $v_x$ .



# Méthode FDTD – Discrétisation

Introduction

Modélisation en  
ondes complètes –  
Sismique

Généralités

Théorie

Méthode FDTD

FDTD - Discrétisation

FDTD - Source

FDTD - Marche  
temporelle

FDTD - Stabilité

FDTD - Dispersion

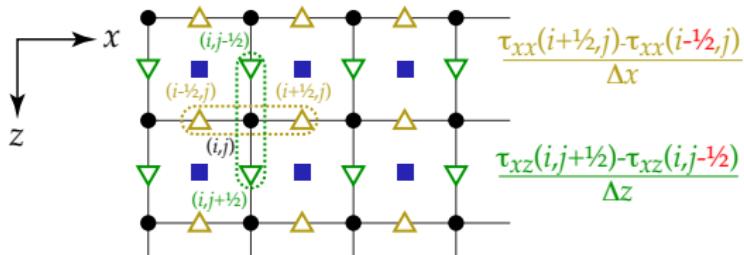
FDTD - Cond. limites

FDTD - PML

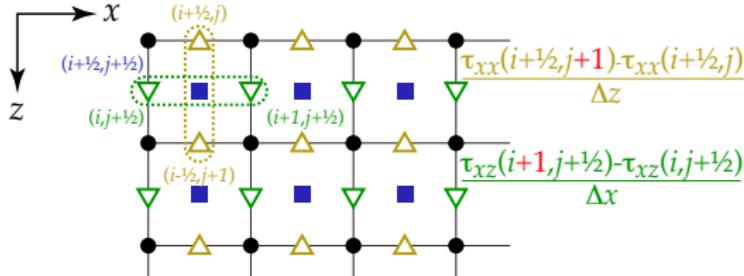
FDTD - CPML

Références

- Dans la littérature, on trouve parfois les termes *opérateur avant* et *opérateur arrière* pour désigner des opérateurs centrés sur grilles décalées ; cela fait référence aux noeuds utilisés par rapport au noeud où est évalué la dérivée.
- Opérateur « arrière » :



- Opérateur « avant » :



# Méthode FDTD – Discrétisation

Introduction

Modélisation en  
ondes complètes –  
Sismique

Généralités

Théorie

Méthode FDTD

FDTD - Discrétisation

FDTD - Source

FDTD - Marche  
temporelle

FDTD - Stabilité

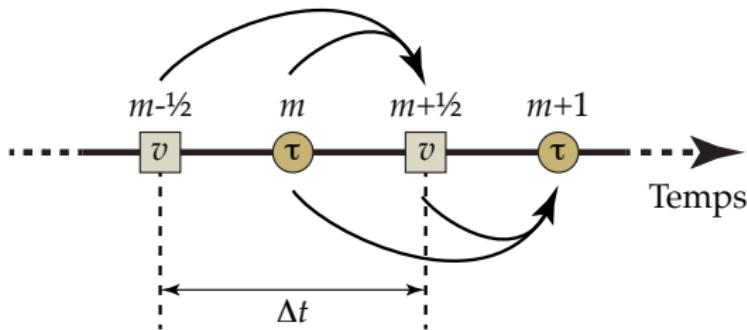
FDTD - Dispersion

FDTD - Cond. limites

FDTD - PML

FDTD - CPML

Références



- Dans le temps :
  - $v_x$  et  $v_z$  sont mis à jour à  $t + 1/2\Delta t$  à partir de  $\tau_{xx}$ ,  $\tau_{zz}$  et  $\tau_{xz}$  définis à  $t$ , et de  $v_x$  et  $v_z$  définis à  $t - 1/2\Delta t$ ;
  - $\tau_{xx}$ ,  $\tau_{zz}$  et  $\tau_{xz}$  sont mis à jour à  $t + \Delta t$  à partir de  $v_x$  et  $v_z$  définis à  $t + 1/2\Delta t$ , et de  $\tau_{xx}$ ,  $\tau_{zz}$  et  $\tau_{xz}$  définis à  $t$ .
- Il s'agit dans ce cas d'un schéma explicite (de type *leapfrog*) : la variables courante dépend des valeurs définies à un temps antérieur uniquement.

# Méthode FDTD – Discrétisation

Introduction

Modélisation en  
ondes complètes –  
Sismique

Généralités

Théorie

Méthode FDTD

FDTD - Discrétisation

FDTD - Source

FDTD - Marche  
temporelle

FDTD - Stabilité

FDTD - Dispersion

FDTD - Cond. limites

FDTD - PML

FDTD - CPML

Références

- Pour un schéma implicite, les valeurs courantes dépendent des valeurs passées et futures, et leur traitement nécessite l'inversion de grosses matrices, ce qui s'avère très coûteux en calcul et en mémoire.
- L'avantage des schémas implicites est qu'ils sont inconditionnellement stables, contrairement aux schémas explicites (voir diapo 55).

# Méthode FDTD – Discrétisation

Introduction

Modélisation en  
ondes complètes –  
Sismique

Généralités

Théorie

Méthode FDTD

FDTD - Discrétisation

FDTD - Source

FDTD - Marche  
temporelle

FDTD - Stabilité

FDTD - Dispersion

FDTD - Cond. limites

FDTD - PML

FDTD - CPML

Références

- En général en FDTD, le pas temporel  $\Delta t$  et les pas spatiaux  $\Delta x$  et  $\Delta z$  sont constants (et  $\Delta z = \Delta x$ ).
- L'équation (14) sous forme discrète est ainsi

$$\frac{v_x^{m+1/2}(i,j) - v_x^{m-1/2}(i,j)}{\Delta t} = \frac{1}{\rho(i,j)} \left( \frac{\tau_{xx}^m(i + 1/2, j) - \tau_{xx}^m(i - 1/2, j)}{\Delta x} + \frac{\tau_{xz}^m(i, j + 1/2) - \tau_{xz}^m(i, j - 1/2)}{\Delta x} \right) \quad (19)$$

où  $m$  est utilisé comme indice temporel.

# Méthode FDTD – Discrétisation

Introduction

Modélisation en  
ondes complètes –  
Sismique

Généralités

Théorie

Méthode FDTD

FDTD - Discrétisation

FDTD - Source

FDTD - Marche  
temporelle

FDTD - Stabilité

FDTD - Dispersion

FDTD - Cond. limites

FDTD - PML

FDTD - CPML

Références

- L'équation (19) peut être réécrite

$$v_x^{m+1/2}(i,j) = v_x^{m-1/2}(i,j) + \frac{\Delta t}{\rho(i,j)\Delta x} [(\tau_{xx}^m(i+1/2,j) - \tau_{xx}^m(i-1/2,j)) + (\tau_{xz}^m(i,j+1/2) - \tau_{xz}^m(i,j-1/2))] , \quad (20)$$

qui est l'équation de mise à jour (*update equation*) de  $v_x$ .

- De façon similaire, on arrive l'équation de mise à jour de  $v_z$  qui est

$$v_z^{m+1/2}(i+1/2,j+1/2) = v_z^{m-1/2}(i+1/2,j+1/2) + \frac{\Delta t}{\rho(i+1/2,j+1/2)\Delta x} [(\tau_{xz}^m(i+1,j+1/2) - \tau_{xz}^m(i,j+1/2)) + (\tau_{zz}^m(i+1/2,j+1) - \tau_{zz}^m(i+1/2,j))] . \quad (21)$$

# Méthode FDTD – Discrétisation

Introduction

Modélisation en  
ondes complètes –  
Sismique

Généralités

Théorie

Méthode FDTD

FDTD - Discrétisation

FDTD - Source

FDTD - Marche  
temporelle

FDTD - Stabilité

FDTD - Dispersion

FDTD - Cond. limites

FDTD - PML

FDTD - CPML

Références

- Les équations de mise à jour des contraintes sont les suivantes :

$$\begin{aligned} \tau_{xx}^{m+1}(i + 1/2, j) &= \tau_{xx}^m(i + 1/2, j) + \\ \frac{(\lambda(i + 1/2, j) + 2\mu(i + 1/2, j)) \Delta t}{\Delta x} [v_x^{m+1/2}(i + 1, j) - v_x^{m+1/2}(i, j)] &+ \\ \frac{\lambda(i + 1/2, j) \Delta t}{\Delta x} [v_z^{m+1/2}(i + 1/2, j + 1/2) - v_z^{m+1/2}(i + 1/2, j - 1/2)], & \quad (22) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{zz}^{m+1}(i + 1/2, j) &= \tau_{zz}^m(i + 1/2, j) + \\ \frac{(\lambda(i + 1/2, j) + 2\mu(i + 1/2, j)) \Delta t}{\Delta x} [v_z^{m+1/2}(i + 1/2, j + 1/2) - v_z^{m+1/2}(i + 1/2, j - 1/2)] &+ \\ \frac{\lambda(i + 1/2, j) \Delta t}{\Delta x} [v_x^{m+1/2}(i + 1, j) - v_x^{m+1/2}(i, j)], & \quad (23) \end{aligned}$$

# Méthode FDTD – Discrétisation

Introduction

Modélisation en  
ondes complètes –  
Sismique

Généralités

Théorie

Méthode FDTD

FDTD - Discrétisation

FDTD - Source

FDTD - Marche  
temporelle

FDTD - Stabilité

FDTD - Dispersion

FDTD - Cond. limites

FDTD - PML

FDTD - CPML

Références

- et finalement

$$\begin{aligned} \tau_{xz}^{m+1}(i, j + 1/2) = & \tau_{xz}^m(i, j + 1/2) + \\ & \frac{\mu(i, j + 1/2)\Delta t}{\Delta x} \left[ \left( v_x^{m+1/2}(i, j + 1) - v_x^{m+1/2}(i, j) \right) + \right. \\ & \left. \left( v_z^{m+1/2}(i + 1/2, j + 1/2) - v_z^{m+1/2}(i - 1/2, j + 1/2) \right) \right] \quad (24) \end{aligned}$$

- Note : les termes impliquant  $\rho$ ,  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\Delta x$  et  $\Delta t$  ne varient pas dans le temps ;
  - ils peuvent être stockés à l'avance dans des variables de calcul.

# Méthode FDTD – Discrétisation

Introduction

Modélisation en  
ondes complètes –  
Sismique

Généralités

Théorie

Méthode FDTD

FDTD - Discrétisation

FDTD - Source

FDTD - Marche  
temporelle

FDTD - Stabilité

FDTD - Dispersion

FDTD - Cond. limites

FDTD - PML

FDTD - CPML

Références

- On remarque par ailleurs que pour utiliser les équations (20) à (24), les propriétés physiques du milieu doivent être définies en différents points :
  - $\rho$  à  $(i, j)$  et  $(i + 1/2, j + 1/2)$ ;
  - $\lambda$  à  $(i + 1/2, j)$ ;
  - $\mu$  à  $(i + 1/2, j)$  et  $(i, j + 1/2)$ .
- Une façon courante de procéder est de définir  $\rho$ ,  $\lambda$  et  $\mu$  aux noeuds  $(i, j)$  et d'interpoler les valeurs aux points requis.
  - Moczo *et al.* (2002) ont montré que
    - une moyenne arithmétique doit être utilisée pour  $\rho$ ,
    - une moyenne harmonique doit être utilisée pour  $\lambda$  et  $\mu$ .

# Méthode FDTD – Discrétisation

Introduction

Modélisation en  
ondes complètes –  
Sismique

Généralités

Théorie

Méthode FDTD

FDTD - Discrétisation

FDTD - Source

FDTD - Marche  
temporelle

FDTD - Stabilité

FDTD - Dispersion

FDTD - Cond. limites

FDTD - PML

FDTD - CPML

Références

- Créez une classe **GrilleFDTD** en vous basant sur votre classe **Grille**
  - le constructeur aura pour arguments d'entrée les coordonnées des noeuds **x** et **z**
  - les attributs **nx** et **nz** sont le nombre de *noeuds* dans chaque dimension
- Ajoutez une méthode **defProp** ayant en entrée
  - **Vp**, **Vs** et **rho** : trois **ndarray** de taille **nx × nz**  
**Important** : l'indicage se fera selon **[i, j]**
  - **dt**
- La méthode **defProp** doit calculer :
  - **b1** :  $\frac{\Delta t}{\rho \Delta x}$  défini à **(i, j)**
  - **b2** :  $\frac{\Delta t}{\rho \Delta x}$  défini à **(i + 1/2, j + 1/2)**
  - **l<sub>m</sub>** :  $\frac{(\lambda+2\mu)\Delta t}{\Delta x}$  défini à **(i + 1/2, j)**
  - **l** :  $\frac{\lambda \Delta t}{\Delta x}$  défini à **(i + 1/2, j)**
  - **m** :  $\frac{\mu \Delta t}{\Delta x}$  défini à **(i, j + 1/2)**

qui sont tous de taille **nx × nz**.

# Méthode FDTD – Discrétisation

Introduction

Modélisation en  
ondes complètes –  
Sismique

Généralités

Théorie

Méthode FDTD

FDTD - Discrétisation

FDTD - Source

FDTD - Marche  
temporelle

FDTD - Stabilité

FDTD - Dispersion

FDTD - Cond. limites

FDTD - PML

FDTD - CPML

Références

- La fonction `interp1d` du module `scipy.interpolate` vous sera utile pour interpoler les propriétés;
- Les arguments de cette fonction sont :
  - un tuple contenant les vecteurs des coordonnées des noeuds de la grille;
  - un `ndarray` 2D contenant les valeurs aux noeuds de la grille;
  - un `ndarray` de dimensions `nx*nz × 2` contenant les coordonnées des points où interpoler.
- `interp1d` retourne un *vecteur* contenant les valeurs interpolées, *dans l'ordre spécifié par le 3<sup>e</sup> argument*.
  - Il faudra faire un `reshape` de ce vecteur pour le ramener à la dimension `nz × nx`
  - Attention : `reshape` incrémente *d'abord le dernier axe* (les colonnes en 2D).

# Méthode FDTD – Discrétisation

Introduction

Modélisation en  
ondes complètes –  
Sismique

Généralités

Théorie

Méthode FDTD

FDTD - Discrétisation

FDTD - Source

FDTD - Marche  
temporelle

FDTD - Stabilité

FDTD - Dispersion

FDTD - Cond. limites

FDTD - PML

FDTD - CPML

Références

- Testez votre code avec

```
x = np.arange(0.0, 200.1, 50.0)
z = np.arange(0.0, 150.1, 50.0)

g = GrilleFDTD(x, z)

Vp = 4000.0 + np.zeros((x.size, z.size))
Vp[1, 1] = 5000.0
Vp[2, 1] = 3000.0
sigma = 0.25           # coeff Poisson
Vs = Vp * np.sqrt((0.5-sigma)/(1.0-sigma))
rho = 2670.0 + np.zeros( Vp.shape )
rho[1, 1] = 2500.0
rho[2, 2] = 2700.0
dt = 0.007

g.defProp(Vp, Vs, rho, dt)
```

- Vous devriez obtenir les résultats de la diapo suivante.

# Méthode FDTD – Discrétisation

## Introduction

Modélisation en  
ondes complètes –  
Sismique

Généralités

Théorie

Méthode FDTD

FDTD - Discrétisation

FDTD - Source

FDTD - Marche  
temporelle

FDTD - Stabilité

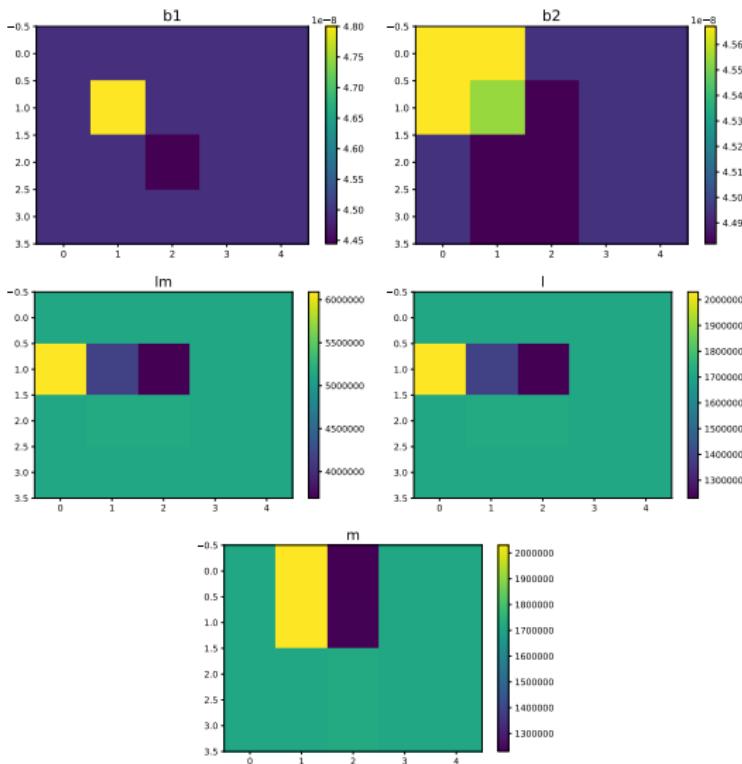
FDTD - Dispersion

FDTD - Cond. limites

FDTD - PML

FDTD - CPML

Références



# Méthode FDTD – Source

Introduction

Modélisation en  
ondes complètes –  
Sismique

Généralités

Théorie

Méthode FDTD

FDTD - Discrétisation

FDTD - Source

FDTD - Marche  
temporelle

FDTD - Stabilité

FDTD - Dispersion

FDTD - Cond. limites

FDTD - PML

FDTD - CPML

Références

- Une source explosive peut être simulée en imposant des contraintes  $\tau_{xx}$  et  $\tau_{zz}$  égales en un point de l'espace ;
  - La discrétisation adoptée permet de simuler facilement ce type de source car  $\tau_{xx}$  et  $\tau_{zz}$  sont effectivement définies aux mêmes noeuds ;
  - Concrètement, la source est appliquée en *additionnant* le terme source aux variables  $\tau_{xx}$  et  $\tau_{zz}$ , à chaque itération, au noeud approprié ;
- Différentes fonctions temporelles peuvent être adoptées pour simuler la signature de la source :
  - impulsion gaussienne :  $f(t) = \exp(-\alpha(t - t_0)^2)$  ;
  - dérivée d'impulsion gaussienne :  
$$g(t) = -2\alpha(t - t_0) \exp(-\alpha(t - t_0)^2);$$
  - ondelette de Ricker :  $r(t) = (1 - 2\pi^2 f_{dom}^2 t^2) \exp(-\pi^2 f_{dom}^2 t^2)$

# Méthode FDTD – Source

## Introduction

Modélisation en  
ondes complètes –  
Sismique

Généralités

Théorie

Méthode FDTD

FDTD - Discrétisation

FDTD - Source

FDTD - Marche  
temporelle

FDTD - Stabilité

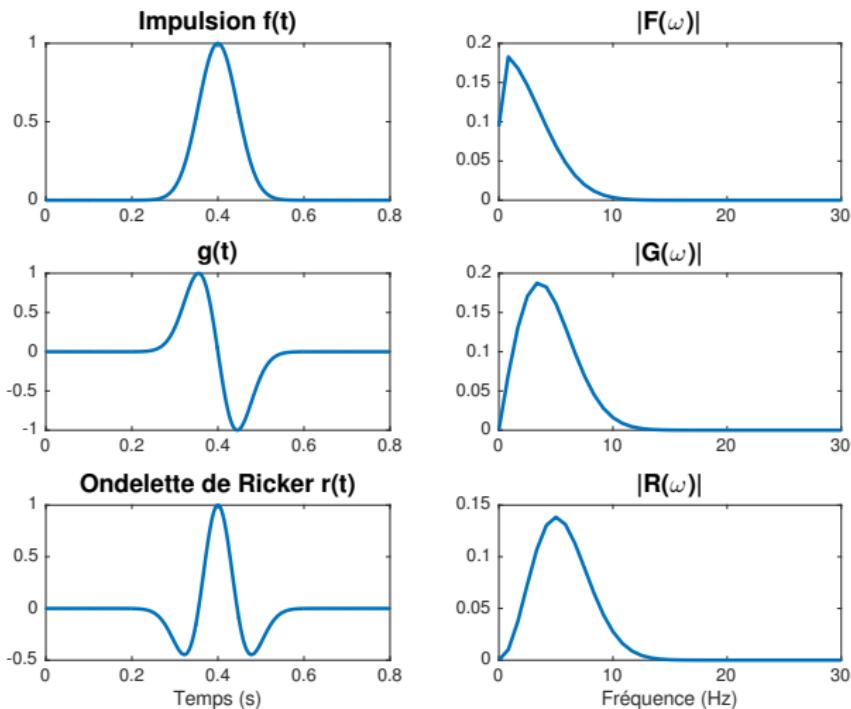
FDTD - Dispersion

FDTD - Cond. limites

FDTD - PML

FDTD - CPML

Références



# Méthode FDTD – Source

Introduction

Modélisation en  
ondes complètes –  
Sismique

Généralités

Théorie

Méthode FDTD

FDTD - Discrétisation

FDTD - Source

FDTD - Marche  
temporelle

FDTD - Stabilité

FDTD - Dispersion

FDTD - Cond. limites

FDTD - PML

FDTD - CPML

Références

- Une façon alternative de définir la source est d'appliquer une force externe  $\mathbf{f}_{\text{ext}} = [f_x \ f_z]$ , i.e.

$$\rho \frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + f_x \quad (25)$$

$$\rho \frac{\partial v_z}{\partial t} = \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} + f_z \quad (26)$$

- En combinant différentes composantes de  $\mathbf{f}$  en différents points, on peut créer des diagrammes de rayonnement particuliers permettant de représenter des mécanismes au foyer particuliers .
  - En sismologie, on peut procéder par inversion pour déterminer les composantes correspondant à un mécanisme donné.
- En sismique réflexion, il est plus courant de simplement utiliser une source ponctuelle.

# Méthode FDTD – Source

Introduction

Modélisation en  
ondes complètes –  
Sismique

Généralités

Théorie

Méthode FDTD

FDTD - Discrétisation

FDTD - Source

FDTD - Marche  
temporelle

FDTD - Stabilité

FDTD - Dispersion

FDTD - Cond. limites

FDTD - PML

FDTD - CPML

Références

Définissez d'abord une classe mère pour les fonctions sources

```
class Source:  
    """  
        Classe mère pour les fonctions sources  
    """  
    def __init__(self, i, j, A):  
        """  
            Paramètres  
            i: indice du noeud en x où est appliquée la source  
            j: indice du noeud en z où est appliquée la source  
            A: amplitude de la source  
        """  
        self.i = i  
        self.j = j  
        self.A = A  
    def __call__(self, ind):  
        """  
            Valeur de la fct source à l'indice temporel ind  
        """  
        if ind < self.f.size:  
            return self.A * self.f[ind]  
        else:  
            return 0.0
```

# Méthode FDTD – Source

Introduction

Modélisation en  
ondes complètes –  
Sismique

Généralités

Théorie

Méthode FDTD

FDTD - Discrétisation

FDTD - Source

FDTD - Marche  
temporelle

FDTD - Stabilité

FDTD - Dispersion

FDTD - Cond. limites

FDTD - PML

FDTD - CPML

Références

- La source impulsionnelle est dérivée de Source

```
class Impulsion(Source):  
    def __init__(self, i, j, alpha, t0, dt, A=1.0):  
        Source.__init__(self, i, j, A)  
        t = np.arange(0.0, 2.0*t0 + dt/3, dt)  
        self.f = np.exp(-alpha * (t-t0)**2 )
```

- La méthode `__call__` de la classe mère permet d'utiliser la source ainsi :

```
src = Impulsion(200, 150, 200.0, 0.2, dt)  
  
for m in range(nstep):  
    # applique la source au noeud (i+1/2, j)  
    tau_zz[src.i, src.j] += src(m)  
    tau_xx[src.i, src.j] += src(m)
```

# Méthode FDTD – Marche temporelle

Introduction

Modélisation en  
ondes complètes –  
Sismique

Généralités

Théorie

Méthode FDTD

FDTD - Discrétilisation

FDTD - Source

FDTD - Marche  
temporelle

FDTD - Stabilité

FDTD - Dispersion

FDTD - Cond. limites

FDTD - PML

FDTD - CPML

Références

- Pour la dimension temporelle, on pose que le milieu est à l'équilibre à  $t = 0^-$ , i.e. les contraintes  $\tau_{xx}$ ,  $\tau_{zz}$  et  $\tau_{xz}$  ainsi que les vitesses  $v_x$  et  $v_z$  sont nulles sur tout le domaine pour  $t < 0$ .
- La marche temporelle (*time stepping*) est une boucle s'amorçant à  $m=0$  et qui comporte les étapes suivantes :
  - la source est appliquée sur les contraintes ;
  - $m + \frac{1}{2}$  : les vitesses sont mises à jour (eqns (20) et (21));
  - $m + 1$  : les contraintes sont mises à jour (eqns (22), (23) et (24));
  - $m = m + 1$  et retour au début de la boucle.

# Méthode FDTD – Marche temporelle

Introduction

Modélisation en  
ondes complètes –  
Sismique

Généralités

Théorie

Méthode FDTD

FDTD - Discrétisation

FDTD - Source

FDTD - Marche  
temporelle

FDTD - Stabilité

FDTD - Dispersion

FDTD - Cond. limites

FDTD - PML

FDTD - CPML

Références

Au voisinage de la source -  $m=0$

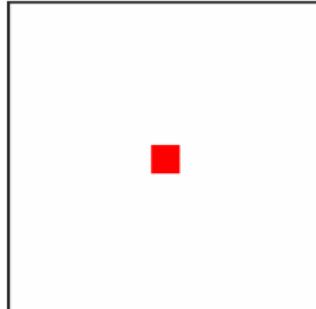
$v_x$



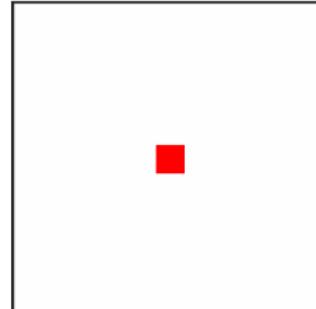
$v_z$



$\tau_{xx}$



$\tau_{zz}$



$\tau_{xz}$



# Méthode FDTD – Marche temporelle

Introduction

Modélisation en  
ondes complètes –  
Sismique

Généralités

Théorie

Méthode FDTD

FDTD - Discrétisation

FDTD - Source

FDTD - Marche  
temporelle

FDTD - Stabilité

FDTD - Dispersion

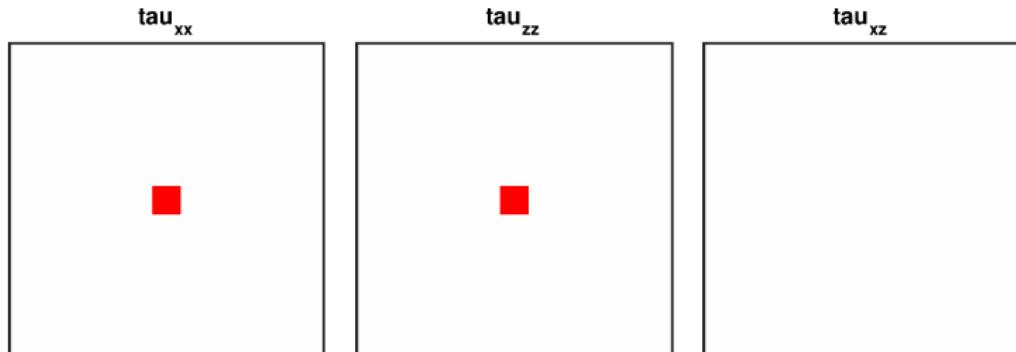
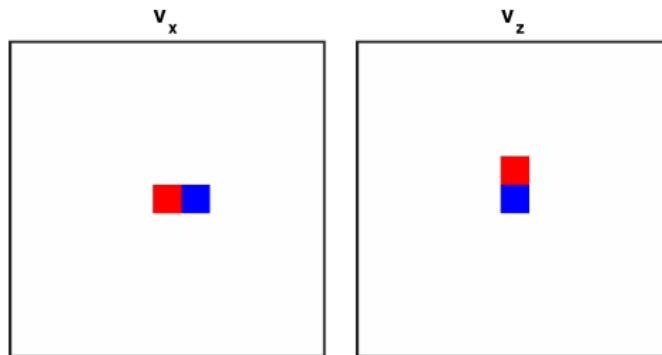
FDTD - Cond. limites

FDTD - PML

FDTD - CPML

Références

Au voisinage de la source -  $m=1/2$



# Méthode FDTD – Marche temporelle

Introduction

Modélisation en  
ondes complètes –  
Sismique

Généralités

Théorie

Méthode FDTD

FDTD - Discrétisation

FDTD - Source

FDTD - Marche  
temporelle

FDTD - Stabilité

FDTD - Dispersion

FDTD - Cond. limites

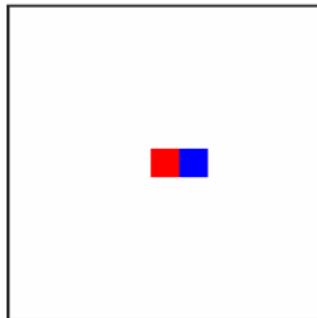
FDTD - PML

FDTD - CPML

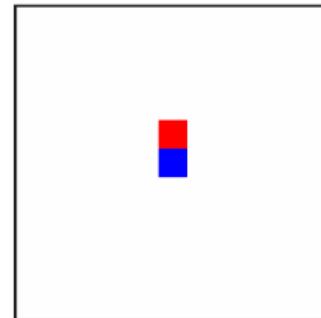
Références

Au voisinage de la source -  $m=1$

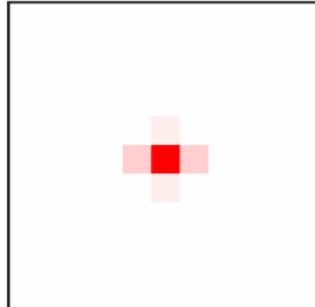
$v_x$



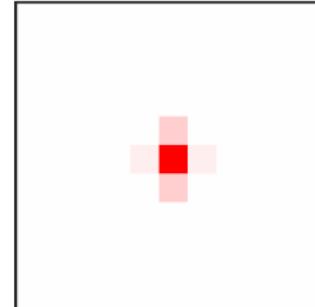
$v_z$



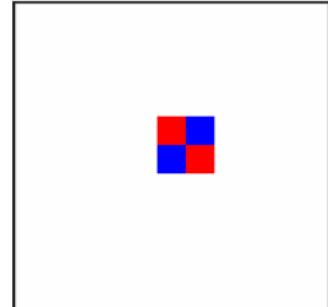
$\tau_{xx}$



$\tau_{zz}$



$\tau_{xz}$



# Méthode FDTD – Marche temporelle

Introduction

Modélisation en  
ondes complètes –  
Sismique

Généralités

Théorie

Méthode FDTD

FDTD - Discrétisation

FDTD - Source

FDTD - Marche  
temporelle

FDTD - Stabilité

FDTD - Dispersion

FDTD - Cond. limites

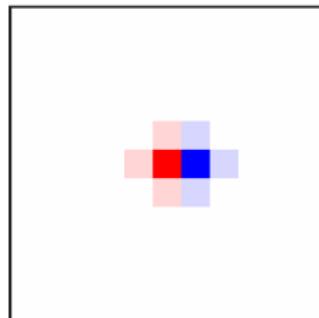
FDTD - PML

FDTD - CPML

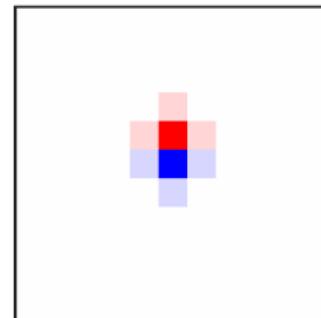
Références

Au voisinage de la source -  $m=1+1/2$

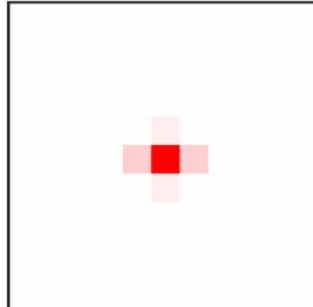
$v_x$



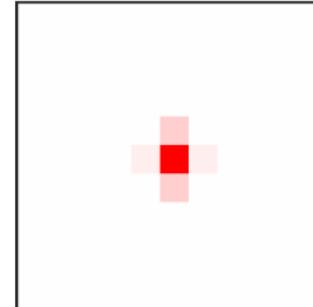
$v_z$



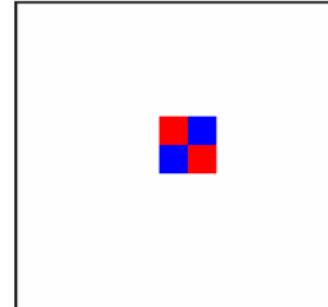
$\tau_{xx}$



$\tau_{zz}$



$\tau_{xz}$



# Méthode FDTD – Marche temporelle

Introduction

Modélisation en  
ondes complètes –  
Sismique

Généralités

Théorie

Méthode FDTD

FDTD - Discrétisation

FDTD - Source

FDTD - Marche  
temporelle

FDTD - Stabilité

FDTD - Dispersion

FDTD - Cond. limites

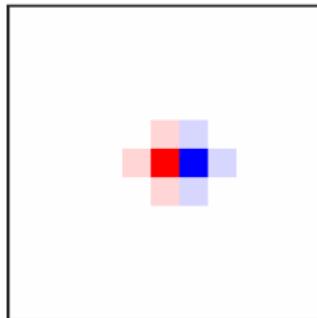
FDTD - PML

FDTD - CPML

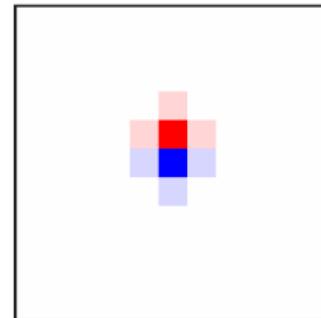
Références

Au voisinage de la source -  $m=2$

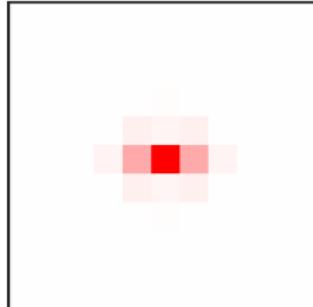
$v_x$



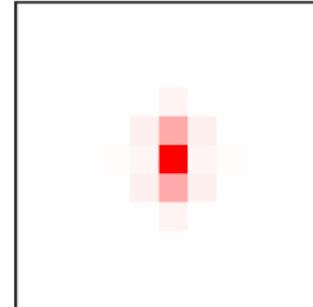
$v_z$



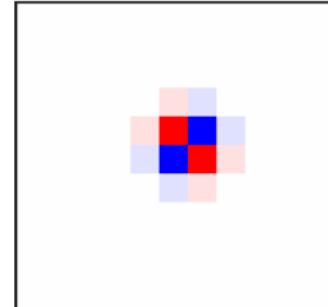
$\tau_{xx}$



$\tau_{zz}$



$\tau_{xz}$



# Méthode FDTD – Marche temporelle

Introduction

Modélisation en  
ondes complètes –  
Sismique

Généralités

Théorie

Méthode FDTD

FDTD - Discrétisation

FDTD - Source

FDTD - Marche  
temporelle

FDTD - Stabilité

FDTD - Dispersion

FDTD - Cond. limites

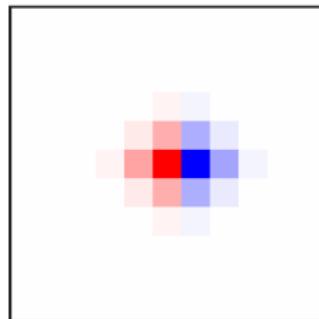
FDTD - PML

FDTD - CPML

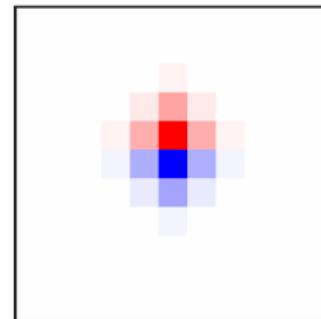
Références

Au voisinage de la source -  $m=2+1/2$

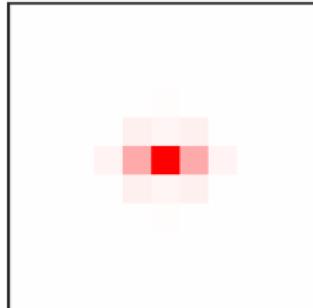
$v_x$



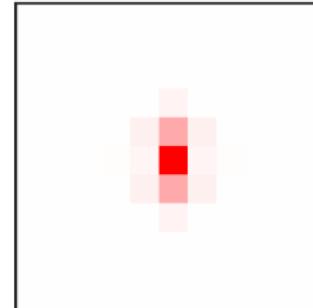
$v_z$



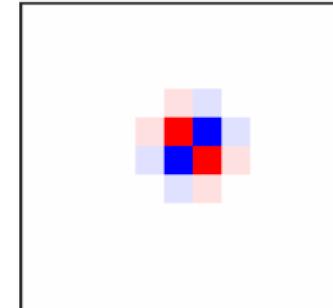
$\tau_{xx}$



$\tau_{zz}$



$\tau_{xz}$



# Méthode FDTD – Marche temporelle

Introduction

Modélisation en  
ondes complètes –  
Sismique

Généralités

Théorie

Méthode FDTD

FDTD - Discrétisation

FDTD - Source

FDTD - Marche  
temporelle

FDTD - Stabilité

FDTD - Dispersion

FDTD - Cond. limites

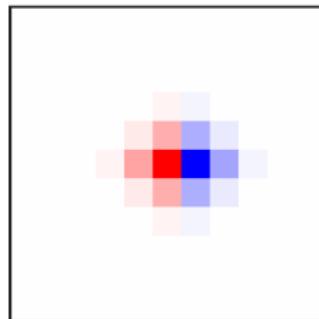
FDTD - PML

FDTD - CPML

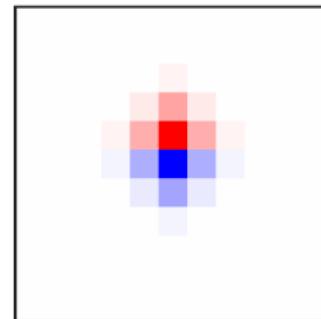
Références

Au voisinage de la source -  $m=3$

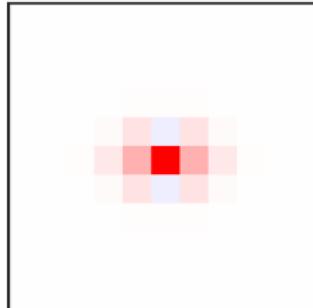
$v_x$



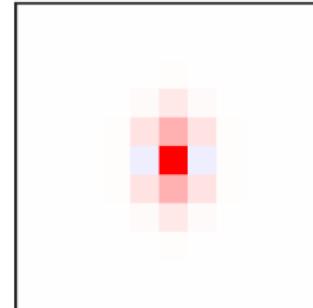
$v_z$



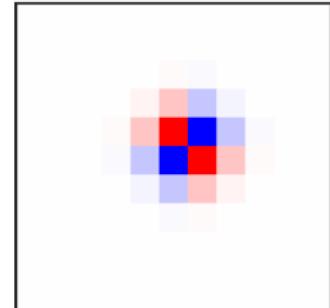
$\tau_{xx}$



$\tau_{zz}$



$\tau_{xz}$



# Méthode FDTD – Marche temporelle

Introduction

Modélisation en  
ondes complètes –  
Sismique

Généralités

Théorie

Méthode FDTD

FDTD - Discrétisation

FDTD - Source

FDTD - Marche  
temporelle

FDTD - Stabilité

FDTD - Dispersion

FDTD - Cond. limites

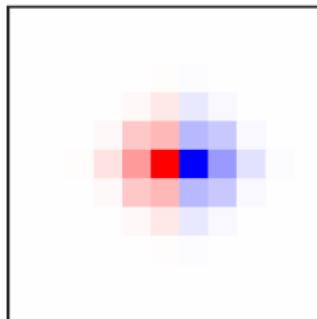
FDTD - PML

FDTD - CPML

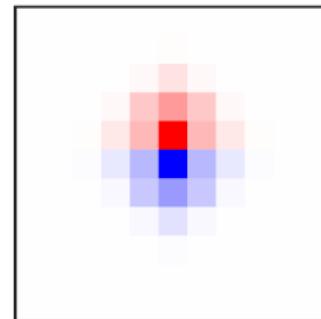
Références

Au voisinage de la source -  $m=3+1/2$

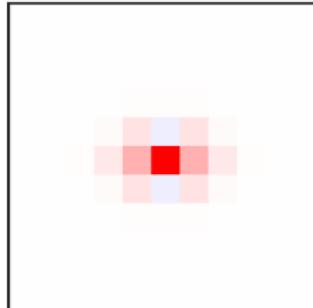
$v_x$



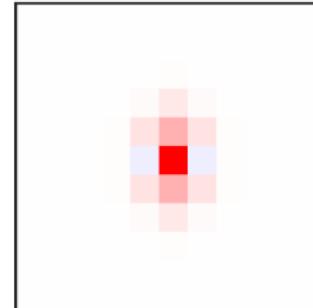
$v_z$



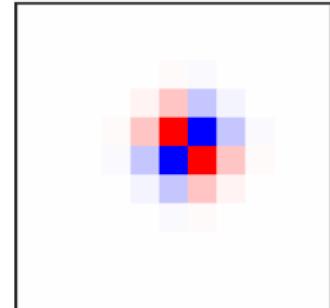
$\tau_{xx}$



$\tau_{zz}$



$\tau_{xz}$



# Méthode FDTD – Implémentation

Introduction

Modélisation en  
ondes complètes –  
Sismique

Généralités

Théorie

Méthode FDTD

FDTD - Discréttisation

FDTD - Source

FDTD - Marche  
temporelle

FDTD - Stabilité

FDTD - Dispersion

FDTD - Cond. limites

FDTD - PML

FDTD - CPML

Références

- Ajoutez une méthode `propage` à votre classe `GrilleFDTD` pour propager les champs dans le temps, pour une source explosive;
- Cette méthode consiste en une boucle principale à l'intérieur de laquelle la source est appliquée et les équations (20) à (24) sont implémentées;
- Cette méthode aura en entrée
  - `src` : l'instance de la source utilisée;
  - `t` : la durée de la propagation;
  - `showPlot` : un booléen indiquant s'il faut afficher les champs  $v_x$  et  $v_z$ .
- Pour l'instant, ignorez les conditions aux limites.

# Méthode FDTD – Implémentation

## Introduction

Modélisation en  
ondes complètes –  
Sismique

Généralités

Théorie

Méthode FDTD

FDTD - Discrétisation

FDTD - Source

FDTD - Marche  
temporelle

FDTD - Stabilité

FDTD - Dispersion

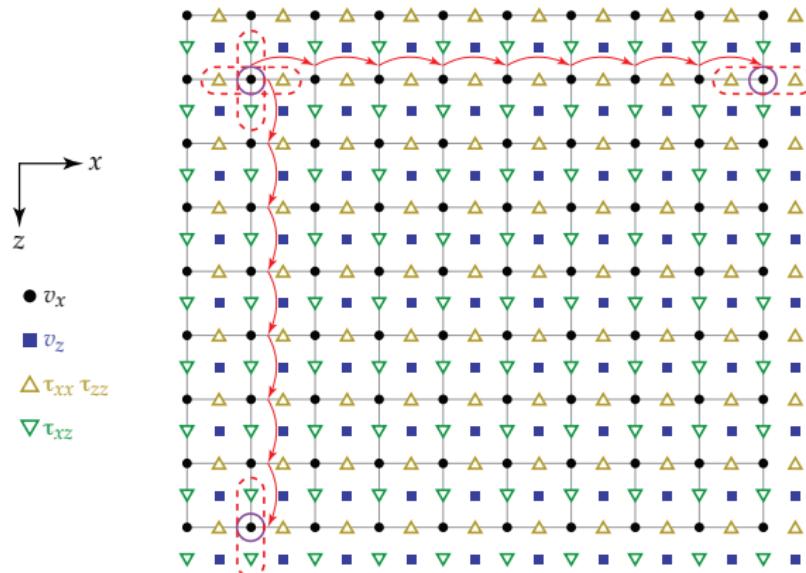
FDTD - Cond. limites

FDTD - PML

FDTD - CPML

Références

$$v_x^{m+1/2}(i, j) = v_x^{m-1/2}(i, j) + \frac{\Delta t}{\rho(i, j)\Delta x} [(\tau_{xx}^m(i + 1/2, j) - \tau_{xx}^m(i - 1/2, j)) + (\tau_{xz}^m(i, j + 1/2) - \tau_{xz}^m(i, j - 1/2))]$$



# Méthode FDTD – Implémentation

## Introduction

Modélisation en  
ondes complètes –  
Sismique

Généralités

Théorie

Méthode FDTD

FDTD - Discrétisation

FDTD - Source

FDTD - Marche  
temporelle

FDTD - Stabilité

FDTD - Dispersion

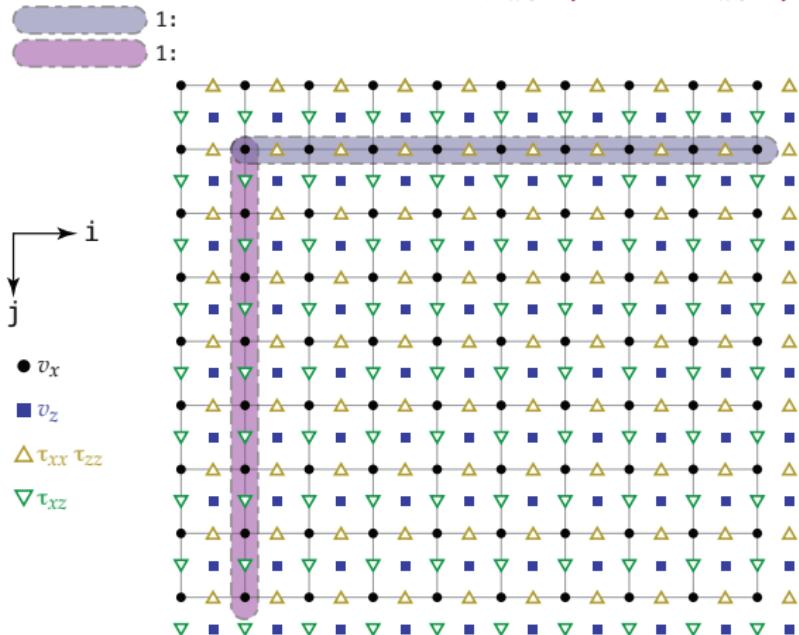
FDTD - Cond. limites

FDTD - PML

FDTD - CPML

Références

$$v_x^{m+1/2}(i, j) = v_x^{m-1/2}(i, j) + \frac{\Delta t}{\rho(i, j)\Delta x} [(\tau_{xx}^m(i + 1/2, j) - \tau_{xx}^m(i - 1/2, j)) + (\tau_{xz}^m(i, j + 1/2) - \tau_{xz}^m(i, j - 1/2))]$$



# Méthode FDTD – Implémentation

Introduction

Modélisation en  
ondes complètes –  
Sismique

Généralités

Théorie

Méthode FDTD

FDTD - Discrétisation

FDTD - Source

FDTD - Marche  
temporelle

FDTD - Stabilité

FDTD - Dispersion

FDTD - Cond. limites

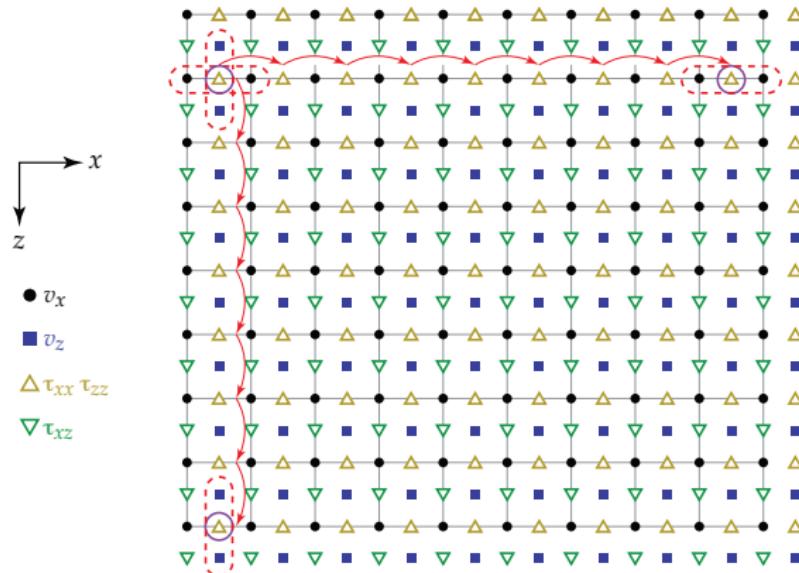
FDTD - PML

FDTD - CPML

Références

$$\tau_{xx}^{m+1}(i+1/2, j) = \tau_{xx}^m(i+1/2, j) + \frac{(\lambda + 2\mu) \Delta t}{\Delta x} [v_x^{m+1/2}(i+1, j) - v_x^{m+1/2}(i, j)] +$$

$$\frac{\lambda \Delta t}{\Delta x} [v_z^{m+1/2}(i+1/2, j+1/2) - v_z^{m+1/2}(i+1/2, j-1/2)]$$



# Méthode FDTD – Implémentation

Introduction

Modélisation en  
ondes complètes –  
Sismique

Généralités

Théorie

Méthode FDTD

FDTD - Discrétisation

FDTD - Source

FDTD - Marche  
temporelle

FDTD - Stabilité

FDTD - Dispersion

FDTD - Cond. limites

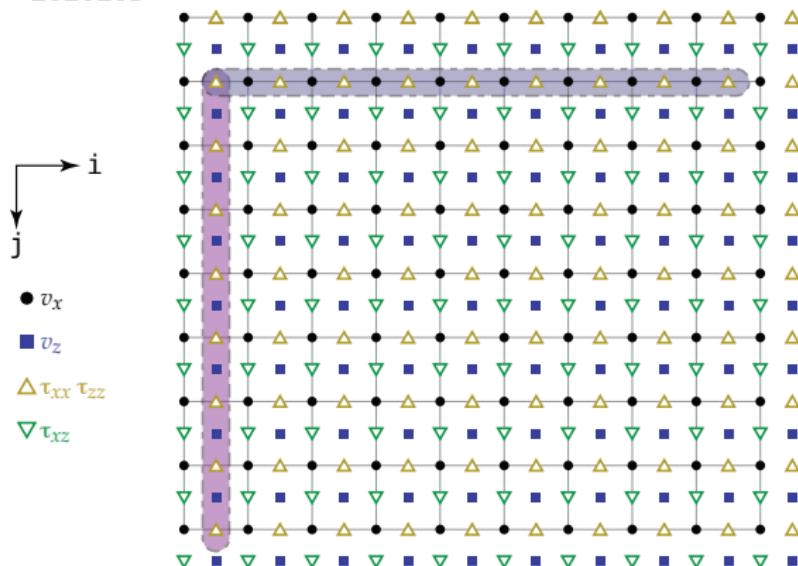
FDTD - PML

FDTD - CPML

Références

$$\tau_{xx}^{m+1}(i+1/2, j) = \tau_{xx}^m(i+1/2, j) + \frac{(\lambda + 2\mu) \Delta t}{\Delta x} [v_x^{m+1/2}(i+1, j) - v_x^{m+1/2}(i, j)] + \frac{\lambda \Delta t}{\Delta x} [v_z^{m+1/2}(i+1/2, j+1/2) - v_z^{m+1/2}(i+1/2, j-1/2)]$$

:-1  
1:



# Méthode FDTD – Implémentation

Introduction

Modélisation en  
ondes complètes –  
Sismique

Généralités

Théorie

Méthode FDTD

FDTD - Discrétisation

FDTD - Source

FDTD - Marche  
temporelle

FDTD - Stabilité

FDTD - Dispersion

FDTD - Cond. limites

FDTD - PML

FDTD - CPML

Références

- Gérez l'affichage de  $v_x$  et  $v_z$  ainsi :

- Avant la boucle de la marche temporelle :

```
if showPlot:  
    fig, (ax1, ax2) = plt.subplots(ncols=2)  
    im1 = ax1.imshow(v_x.T)  
    im2 = ax2.imshow(v_z.T)  
    plt.show(block=False)
```

- Dans la boucle :

```
if showPlot and np.remainder(m, 20) == 0:  
    im1.set_data(v_x.T)  
    im1.set_clim(v_x.min(), v_x.max())  
    im2.set_data(v_z.T)  
    im2.set_clim(v_z.min(), v_z.max())  
    fig.canvas.draw()  
    plt.pause(0.01)
```

- Testez votre méthode avec les valeurs des diapos précédentes
- Répétez avec  $dt = 0.0072$

# Méthode FDTD – Stabilité

Introduction

Modélisation en  
ondes complètes –  
Sismique

Généralités

Théorie

FDTD - Méthode

FDTD - Discrétilisation

FDTD - Source

FDTD - Marche  
temporelle

FDTD - Stabilité

FDTD - Dispersion

FDTD - Cond. limites

FDTD - PML

FDTD - CPML

Références

- L'**analyse de von Neumann** permet d'étudier la stabilité de systèmes d'équations aux dérivées partielles solutionnés par différences finies.
- Cette analyse est basée sur la décomposition de l'erreur numérique en série de Fourier;
  - Un schéma de différences finies sera **stable** si les erreurs commises à un pas de temps ne font pas augmenter le cumul des erreurs au fil des itérations.
- Pour illustrer cette analyse, nous allons nous limiter à l'équation d'onde en 1D pour alléger la notation.
  - Pour un milieu où la **vitesse de propagation V** est constante, nous avons ainsi l'équation hyperbolique

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = V^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (27)$$

# Méthode FDTD – Stabilité

Introduction

Modélisation en  
ondes complètes –  
Sismique

Généralités

Théorie

Méthode FDTD

FDTD - Discrétisation

FDTD - Source

FDTD - Marche  
temporelle

**FDTD - Stabilité**

FDTD - Dispersion

FDTD - Cond. limites

FDTD - PML

FDTD - CPML

Références

- L'équation (27) peut être réécrite en un système de deux équations du 1<sup>e</sup> ordre :

$$\frac{\partial r}{\partial t} = V \frac{\partial s}{\partial x} \quad (28)$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} = V \frac{\partial r}{\partial x} \quad (29)$$

où

$$r \equiv V \frac{\partial u}{\partial x} \quad (30)$$

$$s \equiv \frac{\partial u}{\partial t}. \quad (31)$$

(Notez la similarité avec le passage de l'équation (6) au formalisme contrainte-vitesse)

# Méthode FDTD – Stabilité

Introduction

Modélisation en  
ondes complètes –  
Sismique

Généralités

Théorie

Méthode FDTD

FDTD - Discrétisation

FDTD - Source

FDTD - Marche  
temporelle

FDTD - Stabilité

FDTD - Dispersion

FDTD - Cond. limites

FDTD - PML

FDTD - CPML

Références

- On reviendra au système (28) et (29), considérons d'abord la forme la plus simple

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -V \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (32)$$

- Cette équation peut être discrétisée avec différents opérateurs : avant, arrière, centré, d'ordre supérieur...
- Testons le cas d'une grille régulière où un opérateur avant est utilisé selon  $t$  et un opérateur centré selon  $x$ , ce qui donne

$$\frac{u_i^{m+1} - u_i^m}{\Delta t} = -V \left( \frac{u_{i+1}^m - u_{i-1}^m}{2\Delta x} \right), \quad (33)$$

qui est un schéma explicite appelé FTCS (*forward time centered space*).

# Méthode FDTD – Stabilité

Introduction

Modélisation en  
ondes complètes –  
Sismique

Généralités

Théorie

Méthode FDTD

FDTD - Discrétisation

FDTD - Source

FDTD - Marche  
temporelle

FDTD - Stabilité

FDTD - Dispersion

FDTD - Cond. limites

FDTD - PML

FDTD - CPML

Références

- Posons pour point de départ de l'analyse de von Neumann que le domaine spatial est de longueur  $L$  et que  $u$  est nul aux extrémités.
- Une solution du type **série de Fourier** s'applique

$$u(x, t) = \sum_{l=1}^{\infty} A_l e^{-(l\pi/L)^2 t} \sin\left(\frac{l\pi x}{L}\right). \quad (34)$$

# Méthode FDTD – Stabilité

Introduction

Modélisation en  
ondes complètes –  
Sismique

Généralités

Théorie

Méthode FDTD

FDTD - Discrétilisation

FDTD - Source

FDTD - Marche  
temporelle

FDTD - Stabilité

FDTD - Dispersion

FDTD - Cond. limites

FDTD - PML

FDTD - CPML

Références

- Pour un domaine  $[0, L]$ , la représentation de Fourier prolonge la fonction par antisymétrie sur  $[-L, 0]$ , ce qui admet une longueur d'onde maximale  $\lambda_{\max} = 2L$ .
- Par définition, le nombre d'onde  $k$  vaut

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

(35)

ce qui fait que  $k_{\min} = \pi/L$ .

# Méthode FDTD – Stabilité

Introduction

Modélisation en  
ondes complètes –  
Sismique

Généralités

Théorie

Méthode FDTD

FDTD - Discrétilisation

FDTD - Source

FDTD - Marche  
temporelle

FDTD - Stabilité

FDTD - Dispersion

FDTD - Cond. limites

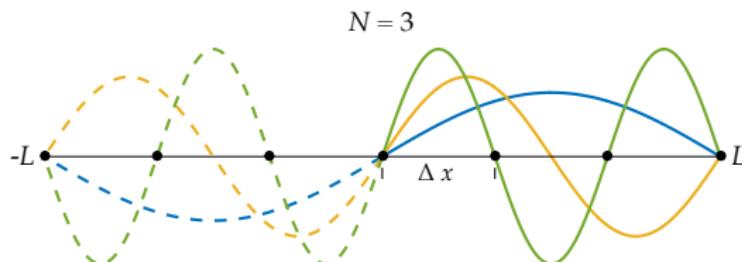
FDTD - PML

FDTD - CPML

Références

- De plus, Nyquist nous dit que la plus petite longueur d'onde représentable est  $\lambda_{\min} = 2\Delta x$ , ce qui fait que  $k_{\max} = \pi/\Delta x$ .
- Pour une grille comportant  $N$  intervalles ( $N = L/\Delta x$ ), les harmoniques représentables sont ainsi

$$k_l = l \frac{\pi}{N\Delta x} \quad l = 1, 2, \dots, N \quad (36)$$



# Méthode FDTD – Stabilité

Introduction

Modélisation en  
ondes complètes –  
Sismique

Généralités

Théorie

Méthode FDTD

FDTD - Discrétisation

FDTD - Source

FDTD - Marche  
temporelle

FDTD - Stabilité

FDTD - Dispersion

FDTD - Cond. limites

FDTD - PML

FDTD - CPML

Références

- En introduisant (36) dans (34), la solution à  $t = 0$  est

$$u(x, 0) = \sum_{l=1}^N A_l \sin(k_l x) \equiv \sum_{l=-N}^N c_l^0 e^{\imath(k_l x)} \quad (37)$$

avec  $\imath = \sqrt{-1}$  et  $c_l^0$  l'amplitude de chaque harmonique.

- La solution discrète, évaluée à  $x_i = i\Delta x$ , est alors

$$u_i^0 = \sum_{l=-N}^N c_l^0 e^{\imath(k_l i\Delta x)} \quad (38)$$

# Méthode FDTD – Stabilité

Introduction

Modélisation en  
ondes complètes –

Sismique

Généralités

Théorie

Méthode FDTD

FDTD - Discrétilisation

FDTD - Source

FDTD - Marche  
temporelle

FDTD - Stabilité

FDTD - Dispersion

FDTD - Cond. limites

FDTD - PML

FDTD - CPML

Références

- L'idée de l'analyse est d'examiner si les amplitudes des harmoniques sont amplifiées *dans le temps*.
- Puisque le problème est linéaire, on peut considérer les harmoniques indépendamment.
- Désignons  $\xi$ , un coefficient d'amplification de l'harmonique entre  $t$  et  $t + \Delta t$ , tel que

$$c^1 = \xi c^0$$

$$c^2 = \xi c^1 = \xi (\xi c^0) = \xi^2 c^0$$

⋮

$$c^m = \xi^m c^0.$$

où l'indice  $m$  affecté à  $c$  indique la  $m^e$  itération, alors que l'indice  $m$  affecté à  $\xi$  est la puissance de  $\xi$ .

# Méthode FDTD – Stabilité

Introduction

Modélisation en  
ondes complètes –  
Sismique

Généralités

Théorie

Méthode FDTD

FDTD - Discrétisation

FDTD - Source

FDTD - Marche  
temporelle

FDTD - Stabilité

FDTD - Dispersion

FDTD - Cond. limites

FDTD - PML

FDTD - CPML

Références

- Avec cette définition, les solutions de l'équation discrétisée sont donc de la forme

$$u_i^m = \xi^m e^{i k i \Delta x} \quad (39)$$

où  $\xi = \xi(k)$  apparaît comme une grandeur complexe fonction de  $k$ .

- L'élément clé de l'analyse est que la dépendance temporelle de (39) est définie par l'exposant de  $\xi$  ;
  - à chaque pas temporel, l'exposant  $m$  est incrémenté de 1 ;
  - si  $|\xi(k)| > 1$  (pour une ou quelques harmoniques) le système est instable car la solution augmente de façon exponentielle.

# Méthode FDTD – Stabilité

Introduction

Modélisation en  
ondes complètes –  
Sismique

Généralités

Théorie

Méthode FDTD

FDTD - Discrétisation

FDTD - Source

FDTD - Marche  
temporelle

FDTD - Stabilité

FDTD - Dispersion

FDTD - Cond. limites

FDTD - PML

FDTD - CPML

Références

- Évaluons  $\xi(k)$  pour l'équation (33) en y insérant (39) :

$$\frac{\xi^{m+1} e^{i k i \Delta x} - \xi^m e^{i k i \Delta x}}{\Delta t} = -V \left( \frac{\xi^m e^{i k (i+1) \Delta x} - \xi^m e^{i k (i-1) \Delta x}}{2 \Delta x} \right) \quad (40)$$

- En divisant par  $\xi^m$  et en utilisant l'identité  $\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$ , on arrive à

$$\xi(k) = 1 - \nu \frac{V \Delta t}{\Delta x} \sin k \Delta x. \quad (41)$$

- On remarque que le module de (41) est  $>1$  pour toutes les valeurs de  $k$  ;
  - le schéma FTCS est *inconditionnellement instable*!
- Qu'en est-il pour un schéma de type *leapfrog* ?

# Méthode FDTD – Stabilité

Introduction

Modélisation en  
ondes complètes –  
Sismique

Généralités

Théorie

Méthode FDTD

FDTD - Discrétisation

FDTD - Source

FDTD - Marche  
temporelle

FDTD - Stabilité

FDTD - Dispersion

FDTD - Cond. limites

FDTD - PML

FDTD - CPML

Références

- Sur une grille décalée, les équations (28) et (29) discrétisées selon un schéma *leapfrog* nous donne

$$\frac{r_{i+1/2}^{m+1} - r_{i+1/2}^m}{\Delta t} = V \frac{s_{i+1}^{m+1/2} - s_i^{m+1/2}}{\Delta x} \quad (42)$$

$$\frac{s_i^{m+1/2} - s_i^{m-1/2}}{\Delta t} = V \frac{r_{i+1/2}^m - r_{i-1/2}^m}{\Delta x} \quad (43)$$

- Dans ce cas, les solutions sont de la forme

$$\begin{bmatrix} r_i^{m+1} \\ s_i^{m+1} \end{bmatrix} = \xi^m e^{\imath k i \Delta x} \begin{bmatrix} r^0 \\ s^0 \end{bmatrix} \quad (44)$$

# Méthode FDTD – Stabilité

Introduction

Modélisation en  
ondes complètes –  
Sismique

Généralités

Théorie

Méthode FDTD

FDTD - Discrétisation

FDTD - Source

FDTD - Marche  
temporelle

FDTD - Stabilité

FDTD - Dispersion

FDTD - Cond. limites

FDTD - PML

FDTD - CPML

Références

- En insérant une solution du type (44) dans les équations (42) et (43), on peut construire un système

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \mathcal{C} & \mathcal{D} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \begin{bmatrix} r^0 \\ s^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (45)$$

où

- $\mathcal{A} = -\frac{\cos(\frac{k\Delta x}{2})}{\sqrt{\xi}} + \sqrt{\xi} \cos\left(\frac{k\Delta x}{2}\right) - \frac{\iota \sin(\frac{k\Delta x}{2})}{\sqrt{\xi}} + \iota \sqrt{\xi} \sin\left(\frac{k\Delta x}{2}\right)$
- $\mathcal{B} = p - p \cos(k\Delta x) - \iota p \sin(k\Delta x)$
- $\mathcal{C} = -2\iota p \sin\left(\frac{k\Delta x}{2}\right)$
- $\mathcal{D} = -\frac{1}{\sqrt{\xi}} + \sqrt{\xi}$

et  $p = \frac{V\Delta t}{\Delta x}$ .

# Méthode FDTD – Stabilité

Introduction

Modélisation en  
ondes complètes –  
Sismique

Généralités

Théorie

Méthode FDTD

FDTD - Discrétilisation

FDTD - Source

FDTD - Marche  
temporelle

FDTD - Stabilité

FDTD - Dispersion

FDTD - Cond. limites

FDTD - PML

FDTD - CPML

Références

- Le système (45) admet une solution seulement si le déterminant de la matrice  $\mathbf{A}$  est nul;
- Cette condition nous permet de trouver deux racines pour  $\xi$ , soit

$$\xi = 1 - p^2 + p^2 \cos(k\Delta x) \pm \sqrt{p^2(\cos(k\Delta x) - 1)(2 - p^2 + p^2 \cos(k\Delta x))} \quad (46)$$

- Le système sera stable si  $|\xi| \leq 1$ , ce qui s'avère être le cas lorsque  $p \leq 1$  ou, autrement écrit, lorsque

$$\boxed{\frac{V\Delta t}{\Delta x} \leq 1} \quad (47)$$

qui est connue sous le nom de **condition de Courant-Friedrichs-Lowy**, ou simplement *condition de Courant*.

# Méthode FDTD – Stabilité

## Introduction

Modélisation en  
ondes complètes –  
Sismique

Généralités

Théorie

Méthode FDTD

FDTD - Discrétisation

FDTD - Source

FDTD - Marche  
temporelle

**FDTD - Stabilité**

FDTD - Dispersion

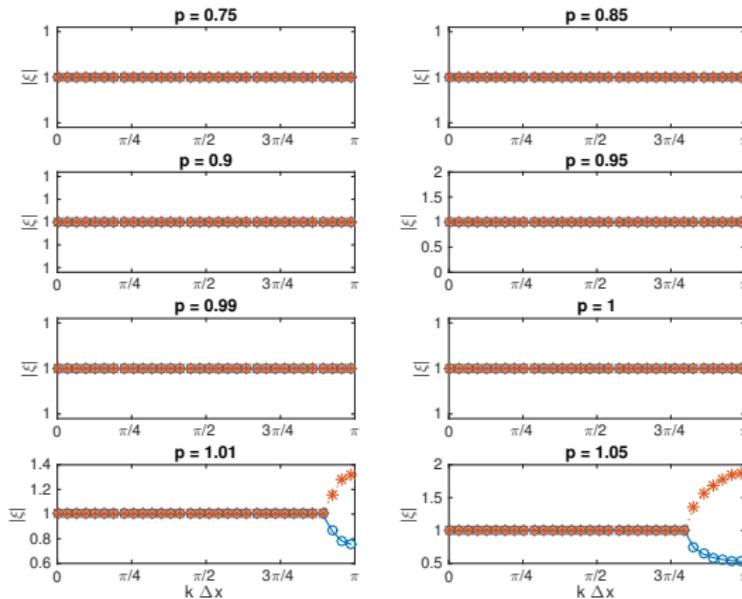
FDTD - Cond. limites

FDTD - PML

FDTD - CPML

Références

- Vérifiez que les racines (46) nous assurent la stabilité en tracant  $|\zeta|$  pour  $0 \leq k\Delta x \leq \pi$  avec des valeurs de  $p$  égales à  $p = [0.75, 0.85, 0.9, 0.95, 0.99, 1.0, 1.01, 1.05]$



# Méthode FDTD – Stabilité

Introduction

Modélisation en  
ondes complètes –  
Sismique

Généralités

Théorie

Méthode FDTD

FDTD - Discrétisation

FDTD - Source

FDTD - Marche  
temporelle

FDTD - Stabilité

FDTD - Dispersion

FDTD - Cond. limites

FDTD - PML

FDTD - CPML

Références

- Pour le **cas élastique 2D discrétisé avec des opérateurs d'ordre 2**, on peut montrer que les conditions découlant des racines du déterminant sont

$$\sqrt{2}V_P \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1 \quad (48)$$

$$\sqrt{2}V_S \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1 \quad (49)$$

où  $V_P$  et  $V_S$  sont les vitesses des ondes P et S.

- La condition définie par  $V_P$  est plus restrictive puisque  $V_P > V_S$ ; c'est celle qui est utilisée pour s'assurer que le pas temporel est adéquat, i.e. que

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{\sqrt{2}V_P}$$

(50)

- Cette expression varie selon l'ordre des opérateurs de différences finies.

# Méthode FDTD – Stabilité

Introduction

Modélisation en  
ondes complètes –  
Sismique

Généralités

Théorie

Méthode FDTD

FDTD - Discrétisation

FDTD - Source

FDTD - Marche  
temporelle

FDTD - Stabilité

FDTD - Dispersion

FDTD - Cond. limites

FDTD - PML

FDTD - CPML

Références

- Si  $\Delta x$  vaut 50 m, quel est le critère de stabilité lorsque
  - $V_P = 4000 \text{ m/s}$ ?
  - $V_P = 5000 \text{ m/s}$ ?

# Méthode FDTD – Dispersion numérique

Introduction

Modélisation en  
ondes complètes –  
Sismique

Généralités

Théorie

Méthode FDTD

FDTD - Discrétilisation

FDTD - Source

FDTD - Marche  
temporelle

FDTD - Stabilité

FDTD - Dispersion

FDTD - Cond. limites

FDTD - PML

FDTD - CPML

Références

- Avec l'analyse de stabilité, nous avons examiné comment se comporte *l'amplitude* des harmoniques.
- Or, le coefficient d'amplification  $\xi$  est une grandeur complexe qui peut être exprimée selon

$$\xi = |\xi| e^{i\Phi}, \quad (51)$$

où  $\Phi$  est l'angle de déphasage (fonction de  $k$ ).

- Lorsque  $\Phi$  diffère de l'angle de déphasage de la solution exacte ( $\Phi_e$ ), la solution numérique est en avance (+ rapide) ou en retard (+ lente) par rapport à la solution exacte ;
  - il se produit alors un phénomène de **dispersion numérique**.
- L'erreur de déphasage est définie  $\Phi - \Phi_e$ .
- Cependant, on utilise généralement la vitesse de phase discrète normalisée par la vitesse de phase exacte pour quantifier la dispersion.

# Méthode FDTD – Dispersion numérique

## Introduction

Modélisation en  
ondes complètes –  
Sismique

Généralités

Théorie

Méthode FDTD

FDTD - Discrétisation

FDTD - Source

FDTD - Marche  
temporelle

FDTD - Stabilité

**FDTD - Dispersion**

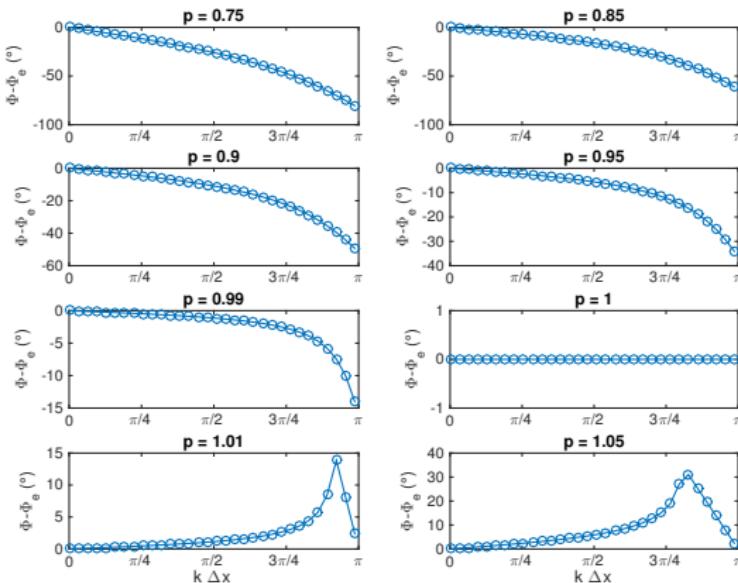
FDTD - Cond. limites

FDTD - PML

FDTD - CPML

Références

- Tracez l'erreur de déphasage de la racine (46) positive pour  $0 \leq k\Delta x \leq \pi$  avec des valeurs de  $p$  égales à  $p = [0.75, 0.85, 0.9, 0.95, 0.99, 1.0, 1.01, 1.05]$



# Méthode FDTD – Dispersion numérique

Introduction

Modélisation en  
ondes complètes –  
Sismique

Généralités

Théorie

Méthode FDTD

FDTD - Discrétilisation

FDTD - Source

FDTD - Marche  
temporelle

FDTD - Stabilité

**FDTD - Dispersion**

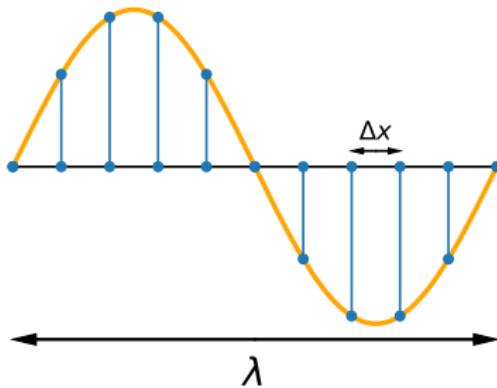
FDTD - Cond. limites

FDTD - PML

FDTD - CPML

Références

- On remarque que plus le produit  $k\Delta x$  est faible, plus l'erreur est faible.
  - Peut-on trouver un critère nous donnant une dispersion « acceptable » ?
- Soit  $G$  le nombre de noeuds de la grille par longueur d'onde, i.e.  $G = \lambda/\Delta x$ .



# Méthode FDTD – Dispersion numérique

Introduction

Modélisation en  
ondes complètes –  
Sismique

Généralités

Théorie

Méthode FDTD

FDTD - Discrétilisation

FDTD - Source

FDTD - Marche  
temporelle

FDTD - Stabilité

FDTD - Dispersion

FDTD - Cond. limites

FDTD - PML

FDTD - CPML

Références

- L'inverse de  $G$  nous permet d'exprimer le nombre d'onde en terme d'unités de pas spatial  $\Delta x$

$$K = \frac{1}{G} = \frac{\Delta x}{\lambda} = \frac{k\Delta x}{2\pi} \quad (52)$$

- Sachant que  $k_{\max} = \pi/\Delta x$ , on a que  $K_{\max} = 1/2$ .
- En examinant la dispersion en fonction de  $K$  plutôt que  $k\Delta x$ , on peut arriver à définir un critère en terme de nombre de noeuds par longueur d'onde.

# Méthode FDTD – Dispersion numérique

Introduction

Modélisation en  
ondes complètes –  
Sismique

Généralités

Théorie

Méthode FDTD

FDTD - Discrétisation

FDTD - Source

FDTD - Marche  
temporelle

FDTD - Stabilité

**FDTD - Dispersion**

FDTD - Cond. limites

FDTD - PML

FDTD - CPML

Références

- Pour le cas élastique 2D étudié dans ce cours avec
  - $V'_P$  et  $V'_S$  les vitesses de phase numériques ;
  - $V_P$  et  $V_S$  les vitesses de phase exactes,
 les vitesses de phase normalisées sont (Moczo *et al.*, 2000)

$$\frac{V'_P}{V_P} = q \frac{\sqrt{2}}{\pi} \frac{r}{pK} \sin^{-1} \left( \frac{1}{q\sqrt{2}} p F_{V_P} \right) \quad (53)$$

$$\frac{V'_S}{V_S} = q \frac{\sqrt{2}}{\pi} \frac{r}{pK} \sin^{-1} \left( \frac{1}{q\sqrt{2}} \frac{p}{r} F_{V_S} \right) \quad (54)$$

où

$$F_\eta = \left\{ [a \sin(3\pi\zeta \sin\theta) + b \sin(\pi\zeta \sin\theta)]^2 + [a \sin(3\pi\zeta \cos\theta) + b \sin(\pi\zeta \cos\theta)]^2 \right\}^{1/2} \quad (55)$$

et où

$$\zeta = \frac{K}{r} \quad \text{si} \quad \eta = V_P \quad \text{ou} \quad \zeta = K \quad \text{si} \quad \eta = V_S.$$

# Méthode FDTD – Dispersion numérique

Introduction

Modélisation en  
ondes complètes –  
Sismique

Généralités

Théorie

Méthode FDTD

FDTD - Discrétisation

FDTD - Source

FDTD - Marche  
temporelle

FDTD - Stabilité

**FDTD - Dispersion**

FDTD - Cond. limites

FDTD - PML

FDTD - CPML

Références

- $q, a$  et  $b$  sont des constantes qui dépendent de l'ordre de l'opérateur de dérivée spatiale ;
  - Pour un opérateur d'ordre 2,  $q = 1, a = 0$  et  $b = 1$ .
- $K = \Delta x / \lambda_S$ ;
- $p = q\sqrt{2}V_P \frac{\Delta t}{\Delta x}$ ;
- $r = V_P / V_S$ ;
- $\theta$  est l'angle de  $k$  par rapport à l'axe des  $x$ .

# Méthode FDTD – Dispersion numérique

Introduction

Modélisation en  
ondes complètes –  
Sismique

Généralités

Théorie

Méthode FDTD

FDTD - Discrétisation

FDTD - Source

FDTD - Marche  
temporelle

FDTD - Stabilité

**FDTD - Dispersion**

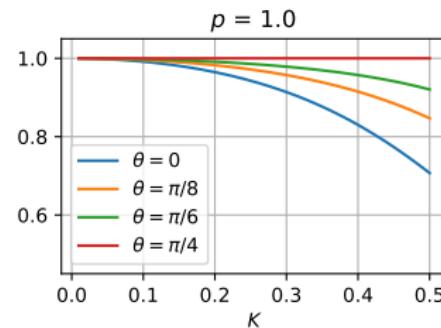
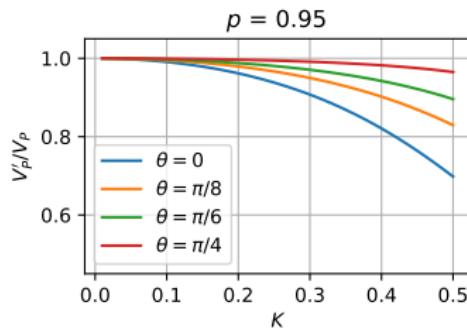
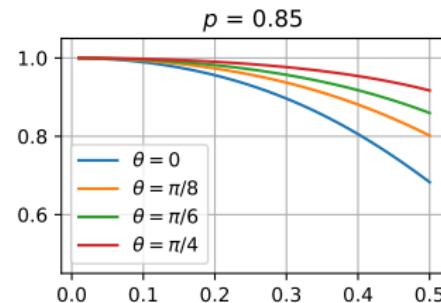
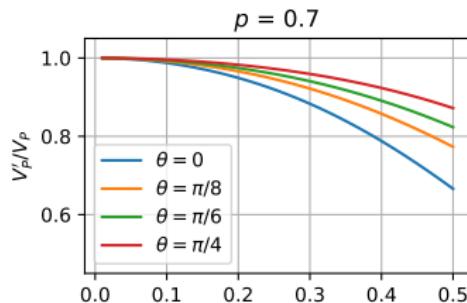
FDTD - Cond. limites

FDTD - PML

FDTD - CPML

Références

## Ondes P



# Méthode FDTD – Dispersion numérique

Introduction

Modélisation en  
ondes complètes –  
Sismique

Généralités

Théorie

Méthode FDTD

FDTD - Discrétisation

FDTD - Source

FDTD - Marche  
temporelle

FDTD - Stabilité

**FDTD - Dispersion**

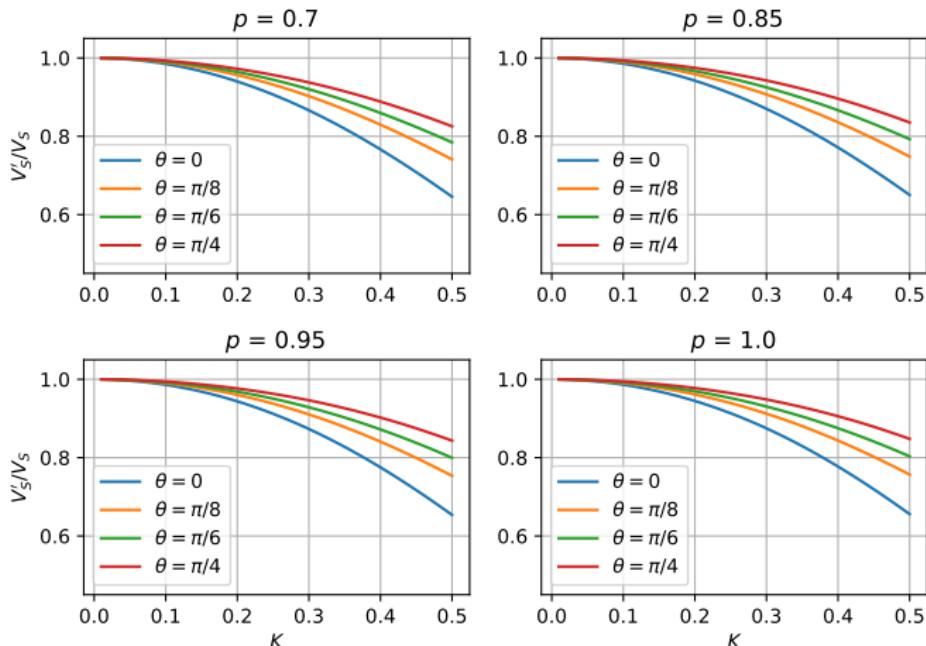
FDTD - Cond. limites

FDTD - PML

FDTD - CPML

Références

Ondes S ( $\sigma = 0.25$ )



# Méthode FDTD – Dispersion numérique

Introduction

Modélisation en  
ondes complètes –  
Sismique

Généralités

Théorie

Méthode FDTD

FDTD - Discrétisation

FDTD - Source

FDTD - Marche  
temporelle

FDTD - Stabilité

**FDTD - Dispersion**

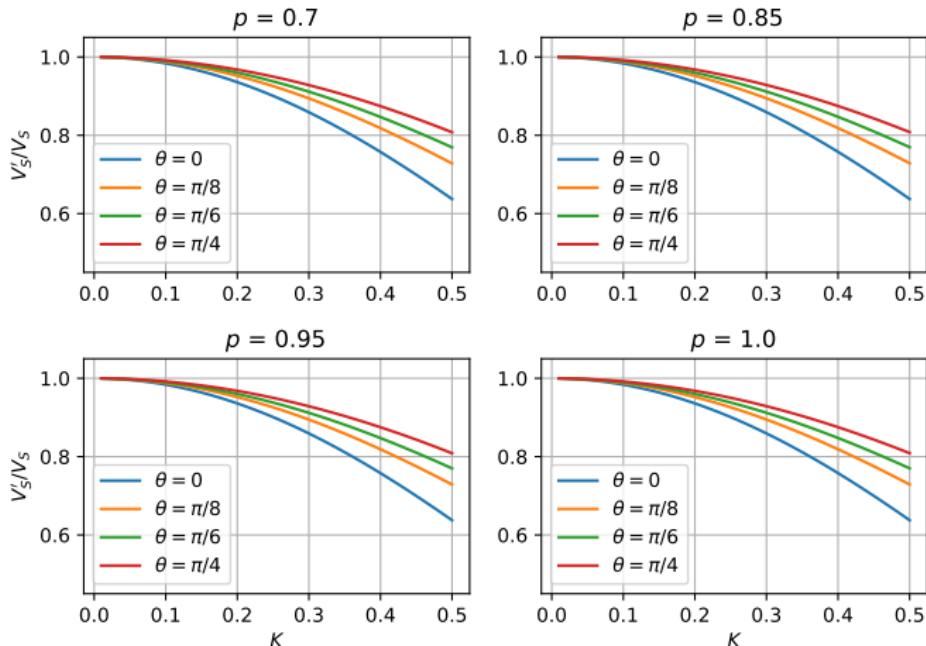
FDTD - Cond. limites

FDTD - PML

FDTD - CPML

Références

Ondes S ( $\sigma = 0.49$ )



# Méthode FDTD – Dispersion numérique

Introduction

Modélisation en  
ondes complètes –

Sismique

Généralités

Théorie

Méthode FDTD

FDTD - Discrétisation

FDTD - Source

FDTD - Marche  
temporelle

FDTD - Stabilité

FDTD - Dispersion

FDTD - Cond. limites

FDTD - PML

FDTD - CPML

Références

- Important : ces courbes sont valides pour un schéma  $O(2,2)$  (opérateurs d'ordre 2 en temps et dans l'espace);
- La dispersion varie en fonction de l'angle de propagation : **une anisotropie est générée par la dispersion numérique** ;
- Une règle empirique communément admise est de s'assurer que  $K_{\max} \leq 0.1$ , i.e. qu'on a *au moins 10 noeuds par longueur d'onde minimale*, ou

$$\Delta x \leq \lambda_{\min}/10$$

(56)

- On va souvent se donner un facteur de sécurité et utiliser 15 ou 20 noeuds par longueur d'onde.
- On remarque que **les ondes S sont plus affectées par la dispersion numérique** ;
  - il faut donc calculer  $\lambda_{\min}$  à partir de  $V_S$ .
- La dispersion numérique augmente en fonction du coefficient de Poisson.

# Méthode FDTD – Dispersion numérique

Introduction

Modélisation en  
ondes complètes –  
Sismique

Généralités

Théorie

Méthode FDTD

FDTD - Discrétisation

FDTD - Source

FDTD - Marche  
temporelle

FDTD - Stabilité

**FDTD - Dispersion**

FDTD - Cond. limites

FDTD - PML

FDTD - CPML

Références

- L'utilisation d'opérateurs d'ordres supérieurs à 2 permet de relaxer la règle, ce qui permet d'utiliser un pas  $\Delta x$  plus grand ;
- En utilisant un pas  $\Delta x$  plus grand, le temps de calcul est réduit :
  - pour le calcul des dérivées spatiales car le domaine comporte moins de noeuds (même si l'opérateur en soi est plus coûteux);
  - le pas  $\Delta t$  peut être plus grand et on réduit le nombre d'itérations pour une fenêtre de temps donnée.

# Méthode FDTD – Dispersion numérique

Introduction

Modélisation en  
ondes complètes –  
Sismique

Généralités

Théorie

Méthode FDTD

FDTD - Discrétisation

FDTD - Source

FDTD - Marche  
temporelle

FDTD - Stabilité

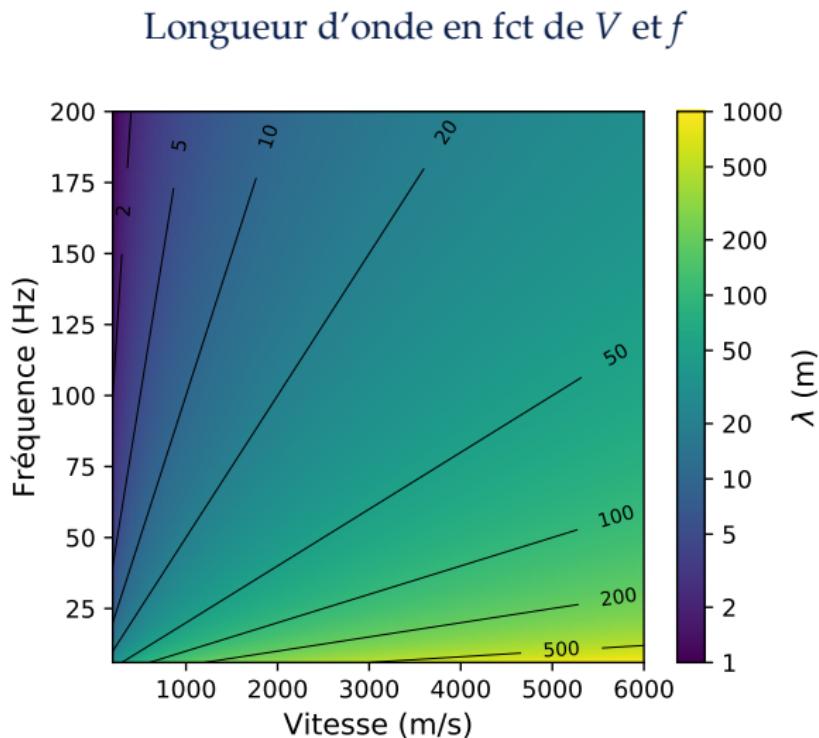
**FDTD - Dispersion**

FDTD - Cond. limites

FDTD - PML

FDTD - CPML

Références



# Méthode FDTD – Dispersion numérique

Introduction

Modélisation en  
ondes complètes –  
Sismique

Généralités

Théorie

Méthode FDTD

FDTD - Discréttisation

FDTD - Source

FDTD - Marche  
temporelle

FDTD - Stabilité

FDTD - Dispersion

FDTD - Cond. limites

FDTD - PML

FDTD - CPML

Références

- Modéliser la propagation dans un milieu où  $V_P$  vaut 4000 m/s,  $\sigma = 0.25$  et  $\rho = 2670 \text{ kg/m}^3$ , pour  $dx=25$ ,  $dx=50$ ,  $dx=80$  et  $dx=160$
- Pour chaque cas,
  - Utilisez  $dt = 0.99*dx/(4000*sqrt(2))$
  - Construisez la grille avec
    - $x = dx * np.arange(300)$
    - $z = dx * np.arange(300)$
  - Source : utilisez une ondelette de Ricker (diapo 35) avec  $fdom=5$  et placez la source au centre du domaine;
- Utilisez des temps de propagation respectifs de 1.1, 2.1, 3.2 et 6.4 s.

# Méthode FDTD – Conditions aux limites

Introduction

Modélisation en  
ondes complètes –  
Sismique

Généralités

Théorie

Méthode FDTD

FDTD - Discréttisation

FDTD - Source

FDTD - Marche  
temporelle

FDTD - Stabilité

FDTD - Dispersion

FDTD - Cond. limites

FDTD - PML

FDTD - CPML

Références

- Dans le domaine spatial, le choix des conditions aux limites dépendent du problème considéré :
  - contraintes nulles, correspondant à une surface libre (conditions de Neumann);
  - déplacements nuls, correspondant à une surface rigide (conditions de Dirichlet);
  - frontière absorbante simulant un domaine infini, basée sur une approximation paraxiale de l'équation d'onde;
  - domaine absorbant simulant un domaine infini, souvent implémenté avec les PML (*perfectly matched layers*).

# Méthode FDTD – Surface libre

Introduction

Modélisation en  
ondes complètes –  
Sismique

Généralités

Théorie

Méthode FDTD

FDTD - Discréttisation

FDTD - Source

FDTD - Marche  
temporelle

FDTD - Stabilité

FDTD - Dispersion

FDTD - Cond. limites

FDTD - PML

FDTD - CPML

Références

- L'implémentation d'une surface libre avec la méthode FDTD occasionne des difficultés en raison de la nature non-locale des opérateurs de différence finie.
  - Il est en effet requis de connaître  $v_x$  et  $v_z$  à  $j=-\frac{1}{2}$  (donc au dessus de la surface) pour calculer  $\tau_{xx}$  et  $\tau_{xz}$ , et  $\tau_{xz}$  à la même position pour calculer  $v_x$ .
- Différentes méthodes ont été proposées pour résoudre le problème.
- Une façon simple est de poser que les constantes d'élasticité sont nulles au dessus de la surface et que la densité est très faible (*vacuum formulation*).
  - Cette approche est souvent instable, et requiert un pas  $\Delta x$  très fin (jusqu'à 60 noeuds par longueur d'onde) lorsque la surface n'est pas plane.

# Méthode FDTD – Surface libre

Introduction

Modélisation en  
ondes complètes –  
Sismique

Généralités

Théorie

FDTD - Méthode

FDTD - Discrétilisation

FDTD - Source

FDTD - Marche  
temporelle

FDTD - Stabilité

FDTD - Dispersion

FDTD - Cond. limites

FDTD - PML

FDTD - CPML

Références

- Une autre méthode est basée sur l'image des contraintes.
- Dans le cas d'une surface libre, les composantes du tenseur de contrainte  $\tau$  normales à la surface libre  $z_0$  sont nulles, i.e.

$$\tau \cdot \mathbf{n}|_{z=z_0} = 0. \quad (57)$$

- Pour le cas 2D précédent, cela signifie que

$$\tau_{zz}|_{z=z_0} = 0 \quad (58)$$

$$\tau_{xz}|_{z=z_0} = 0 \quad (59)$$

- L'équation (58) peut être implémentée directement, alors que pour (59), la condition d'image des contraintes signifie que

$$\tau_{xz}(i, j + 1/2) = -\tau_{xz}(i, j - 1/2). \quad (60)$$

# Méthode FDTD – Surface libre

Introduction

Modélisation en  
ondes complètes –  
Sismique

Généralités

Théorie

Méthode FDTD

FDTD - Discrétisation

FDTD - Source

FDTD - Marche  
temporelle

FDTD - Stabilité

FDTD - Dispersion

FDTD - Cond. limites

FDTD - PML

FDTD - CPML

Références

- Les conditions (58) et (60) permettent d'évaluer explicitement  $v_x$  et  $v_z$  au dessus de la surface libre ( $\text{à } z < z_0$ ).
- Robertsson (1996) a proposé une approche plus pragmatique qui s'avère flexible et relativement précise : poser que  $v_x$  et  $v_z$  sont nuls pour  $z < z_0$  et utiliser (58) et (60) avec les équations de mise à jour.
  - Cette méthode est également facile à implémenter avec le schéma  $O(2,4)$ .

# Méthode FDTD – Frontière absorbante

Introduction

Modélisation en  
ondes complètes –

Sismique

Généralités

Théorie

Méthode FDTD

FDTD - Discrétisation

FDTD - Source

FDTD - Marche  
temporelle

FDTD - Stabilité

FDTD - Dispersion

FDTD - Cond. limites

FDTD - PML

FDTD - CPML

Références

- Plusieurs modèles de frontière absorbante basés sur l'approximation paraxiale de l'équation d'onde ont été proposés au fil du temps ;
- On doit à Clayton et Engquist (1977) la première formulation pour le cas élastique ;
- Considérons d'abord le cas acoustique 2D, pour lequel la relation de dispersion suivante s'applique :

$$\omega = V \sqrt{k_x^2 + k_z^2}. \quad (61)$$

- Si on considère la propagation selon  $z$ , la relation devient

$$k_z = \pm (\omega/V) \sqrt{1 - (V^2 k_x^2 / \omega^2)}, \quad (62)$$

où le signe  $\pm$  indique les directions opposées de propagation (le choix du signe dépend de la frontière considérée, de façon à empêcher le retour de l'onde dans le milieu).

# Méthode FDTD – Frontière absorbante

Introduction

Modélisation en  
ondes complètes –  
Sismique

Généralités

Théorie

Méthode FDTD

FDTD - Discrétisation

FDTD - Source

FDTD - Marche  
temporelle

FDTD - Stabilité

FDTD - Dispersion

FDTD - Cond. limites

FDTD - PML

FDTD - CPML

Références

- Lorsque  $|Vk_x/\omega| > 1$ , il y a présence d'ondes evanescentes ( $k_z$  est complexe) et il y a instabilité.
- L'approximation paraxiale consiste à trouver une solution qui élimine les ondes evanescentes, en restreignant la propagation à l'intérieur d'un « cône » centré sur  $z$ .
- Cela est possible en développant la racine carrée de (62) en une approximation en nombres rationnels pour  $Vk_x/\omega \ll 1$ .
- Pour la direction positive, les trois approximations suivantes sont possibles :

$$A1 : Vk_z/\omega = 1 + O(|Vk_x/\omega|^2) \quad (63)$$

$$A2 : Vk_z/\omega = 1 - \frac{1}{2} (Vk_x/\omega)^2 + O(|Vk_x/\omega|^4) \quad (64)$$

$$A3 : Vk_z/\omega = \frac{1 - \frac{3}{4} (Vk_x/\omega)^2}{1 - \frac{1}{4} (Vk_x/\omega)^2} + O(|Vk_x/\omega|^6) \quad (65)$$

# Méthode FDTD – Frontière absorbante

Introduction

Modélisation en  
ondes complètes –  
Sismique

Généralités

Théorie

Méthode FDTD

FDTD - Discrétisation

FDTD - Source

FDTD - Marche  
temporelle

FDTD - Stabilité

FDTD - Dispersion

FDTD - Cond. limites

FDTD - PML

FDTD - CPML

Références

- En exprimant les expressions précédentes sous forme différentielle, on trouve

$$A1 : \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{V} \frac{\partial p}{\partial t} = 0 \quad (66)$$

$$A2 : \frac{\partial^2 p}{\partial z \partial t} + \frac{1}{V} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \frac{V}{2} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0 \quad (67)$$

$$A3 : \frac{\partial^3 p}{\partial z \partial t \partial t} - \frac{V^2}{4} \frac{\partial^3 p}{\partial z \partial x \partial x} + \frac{1}{V} \frac{\partial^3 p}{\partial t^3} - \frac{3V}{4} \frac{\partial^3 p}{\partial t \partial x \partial x} = 0 \quad (68)$$

- Ces expressions expriment la propagation dans une seule direction selon  $z$ ;
- En utilisant une de ces expressions à la frontière du domaine, on « empêche » l'onde incidente à la frontière de retourner dans le domaine;
- Note : plus l'angle d'incidence augmente, moins bonne est l'absorption.

# Méthode FDTD – Frontière absorbante

## Introduction

Modélisation en  
ondes complètes –

Sismique

Généralités

Théorie

Méthode FDTD

FDTD - Discrétisation

FDTD - Source

FDTD - Marche  
temporelle

FDTD - Stabilité

FDTD - Dispersion

FDTD - Cond. limites

FDTD - PML

FDTD - CPML

Références

- Dans le cas élastique 2D, les conditions de type A1 s'écrivent, pour la direction  $z$ ,

$$\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{1}{V_S} \frac{\partial v_x}{\partial t} = 0, \quad (69)$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{1}{V_P} \frac{\partial v_z}{\partial t} = 0. \quad (70)$$

- Sous forme discrète, nous avons

$$\frac{v_x^{m-1/2}(i, j) - v_x^{m-1/2}(i, j-1)}{\Delta z} + \frac{v_x^{m+1/2}(i, j) - v_x^{m-1/2}(i, j)}{V_S(i, j)\Delta t} = 0, \quad (71)$$

$$\begin{aligned} & \frac{v_z^{m-1/2}(i + 1/2, j + 1/2) - v_z^{m-1/2}(i + 1/2, j - 1/2)}{\Delta z} + \\ & \frac{v_z^{m+1/2}(i + 1/2, j + 1/2) - v_z^{m-1/2}(i + 1/2, j + 1/2)}{V_P(i + 1/2, j + 1/2)\Delta t} = 0. \end{aligned} \quad (72)$$

# Méthode FDTD – Frontière absorbante

Introduction

Modélisation en  
ondes complètes –  
Sismique

Généralités

Théorie

Méthode FDTD

FDTD - Discrétisation

FDTD - Source

FDTD - Marche  
temporelle

FDTD - Stabilité

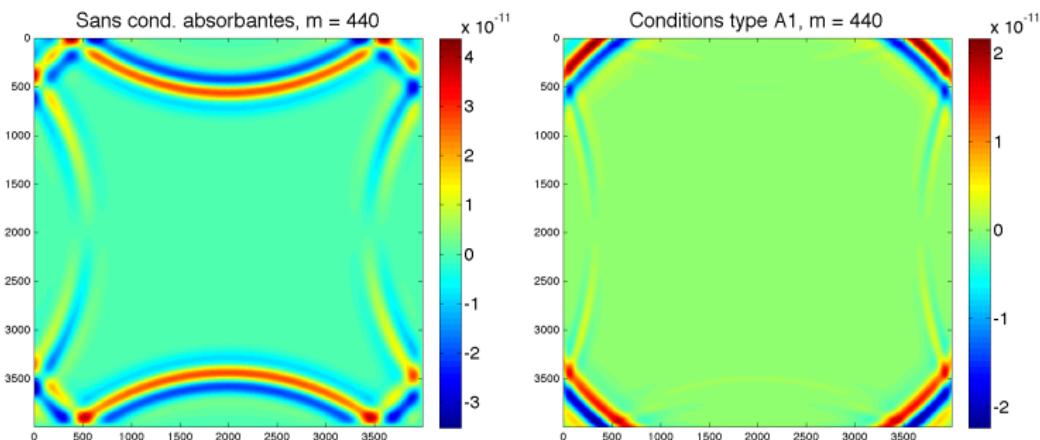
FDTD - Dispersion

**FDTD - Cond. limites**

FDTD - PML

FDTD - CPML

Références



# Méthode FDTD – Frontière absorbante

Introduction

Modélisation en  
ondes complètes –  
Sismique

Généralités

Théorie

Méthode FDTD

FDTD - Discrétisation

FDTD - Source

FDTD - Marche  
temporelle

FDTD - Stabilité

FDTD - Dispersion

FDTD - Cond. limites

FDTD - PML

FDTD - CPML

Références

- Les conditions de type A1 de Clayton et Engquist (1977) sont très simples à implémenter;
  - seulement deux dérivées premières doivent être discrétisées pour  $v_x$  et  $v_z$ .
- Leur performance est par contre insatisfaisante dans la majorité des cas, et plusieurs conditions d'ordres supérieurs ont été proposées, notamment par Higdon (1991);
  - l'implémentation des conditions d'ordres supérieurs peut cependant s'avérer fastidieuse.

# Méthode FDTD – PML

Introduction

Modélisation en  
ondes complètes –  
Sismique

Généralités

Théorie

Méthode FDTD

FDTD - Discrétilisation

FDTD - Source

FDTD - Marche  
temporelle

FDTD - Stabilité

FDTD - Dispersion

FDTD - Cond. limites

FDTD - PML

FDTD - CPML

Références

- Les *Perfectly Matched Layers* (PML) ont été proposées par Bérenger (1994) pour la modélisation FDTD en électromagnétisme sur des domaines illimités.
- Les PML sont devenus depuis la méthode standard pour toute une panoplie d'applications (EM, sismique, mécanique des fluides, etc)
- L'idée des PML est d'entourer le domaine de modélisation par un « matériau » absorbant qui ne produira pas de réflexion à l'interface avec le domaine.
- Cela se fait en couplant les équations valides pour le domaine de modélisation, avec des équations correspondantes pour les PML.

# Méthode FDTD – PML

Introduction

Modélisation en  
ondes complètes –  
Sismique

Généralités

Théorie

Méthode FDTD

FDTD - Discrétisation

FDTD - Source

FDTD - Marche  
temporelle

FDTD - Stabilité

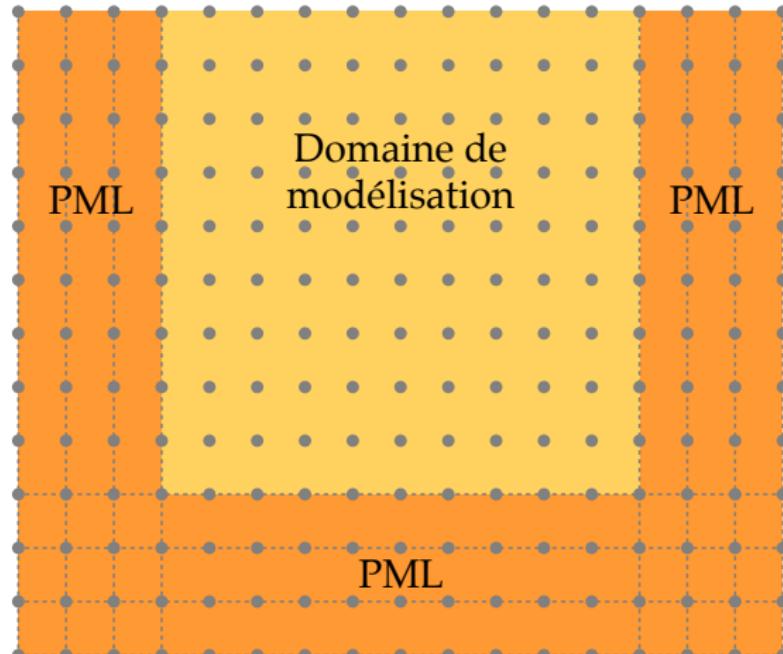
FDTD - Dispersion

FDTD - Cond. limites

**FDTD - PML**

FDTD - CPML

Références



# Méthode FDTD – PML

Introduction

Modélisation en  
 ondes complètes –  
 Sismique

Généralités

Théorie

Méthode FDTD

FDTD - Discrétisation

FDTD - Source

FDTD - Marche  
 temporelle

FDTD - Stabilité

FDTD - Dispersion

FDTD - Cond. limites

FDTD - PML

FDTD - CPML

Références

- Partons du cas générique 2D

$$\frac{\partial v}{\partial t} - A \frac{\partial v}{\partial x} - B \frac{\partial v}{\partial z} = 0. \quad (73)$$

- Bérenger a montré qu'on peut arriver au résultat voulu en décomposant  $v$  en deux parties telles que  $v = v^{\parallel} + v^{\perp}$ , où
  - $\parallel$  signifie qu'on garde seulement la dérivée parallèle à l'interface;
  - $\perp$  signifie qu'on garde seulement la dérivée perpendiculaire à l'interface.
- On a alors

$$\frac{\partial v^{\parallel}}{\partial t} - B \frac{\partial v^{\parallel}}{\partial z} = 0 \quad (74)$$

$$\frac{\partial v^{\perp}}{\partial t} - A \frac{\partial v^{\perp}}{\partial x} = 0 \quad (75)$$

# Méthode FDTD – PML

Introduction

Modélisation en  
ondes complètes –  
Sismique

Généralités

Théorie

Méthode FDTD

FDTD - Discrétisation

FDTD - Source

FDTD - Marche  
temporelle

FDTD - Stabilité

FDTD - Dispersion

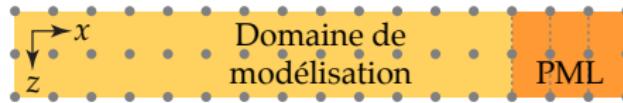
FDTD - Cond. limites

FDTD - PML

FDTD - CPML

Références

- Considérons une interface verticale entre le domaine de modélisation et les PML ;



- Dans la région correspondant aux PML, on introduit un facteur d'amortissement  $d_x(x)$  (réel et positif), tel que

$$\frac{\partial v^{\parallel}}{\partial t} - B \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \quad (76)$$

$$\frac{\partial v^{\perp}}{\partial t} + d_x(x)v^{\perp} - A \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (77)$$

où  $d_x$  vaut zéro à l'interface, et croît en s'éloignant vers l'extérieur des PML.

- $d_x$  vaut zéro dans le domaine de modélisation.

# Méthode FDTD – PML

Introduction  
 Modélisation en  
 ondes complètes –  
 Sismique  
 Généralités  
 Théorie  
 Méthode FDTD  
 FDTD - Discrétisation  
 FDTD - Source  
 FDTD - Marche  
 temporelle  
 FDTD - Stabilité  
 FDTD - Dispersion  
 FDTD - Cond. limites  
**FDTD - PML**  
 FDTD - CPML  
 Références

- En comparant la solution harmonique de (73), i.e.

$$\iota\omega\hat{v} - A \frac{\partial\hat{v}}{\partial x} - B \frac{\partial\hat{v}}{\partial z} = 0 \quad (78)$$

et la solution harmonique du système (76) et (77), i.e.

$$\iota\omega\hat{v}^{\parallel} - B \frac{\partial\hat{v}}{\partial z} = 0 \quad (79)$$

$$\iota\omega\hat{v}^{\perp} - \frac{\iota\omega}{\iota\omega + d_x} A \frac{\partial\hat{v}}{\partial x} = 0 \quad (80)$$

on remarque que les PML impliquent la substitution

$$\frac{\partial}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} = \frac{\iota\omega}{\iota\omega + d_x} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{s_x} \frac{\partial}{\partial x} \quad (81)$$

où  $s_x$  est appelé le facteur d'étirement, i.e.

$$s_x = 1 + \frac{d_x}{\iota\omega}. \quad (82)$$

# Méthode FDTD – PML

Introduction

Modélisation en  
ondes complètes –  
Sismique

Généralités

Théorie

Méthode FDTD

FDTD - Discrétilisation

FDTD - Source

FDTD - Marche  
temporelle

FDTD - Stabilité

FDTD - Dispersion

FDTD - Cond. limites

FDTD - PML

FDTD - CPML

Références

- Pour les milieux continus, les PML n'occasionnent aucune réflexion à l'interface avec le domaine de modélisation ;
- La situation est différente sur une grille numérique car le profile  $d_x$  n'est pas continu ;
- L'expérience a montré que la technique des PML est supérieure aux autres approches et que les réflexions produites à l'interface peuvent être très faibles ;
- Néanmoins, lorsqu'une onde atteint l'interface à incidence rasante, l'amplitude de la réflexion est plus élevée et peut devenir problématique ;
- Une cause de cette dégradation est la nature non causale des PML telles que formulées selon le facteur d'étirement (82), i.e.  $s_x \rightarrow -\infty$  lorsque  $\omega \rightarrow 0$ .
  - Heureusement, une modification simple permet de corriger le problème, et mène aux *convolutional perfectly matched layers* (CPML).

# Méthode FDTD – CPML

Introduction

Modélisation en  
ondes complètes –  
Sismique

Généralités

Théorie

Méthode FDTD

FDTD - Discrétilisation

FDTD - Source

FDTD - Marche  
temporelle

FDTD - Stabilité

FDTD - Dispersion

FDTD - Cond. limites

FDTD - PML

FDTD - CPML

Références

- En définissant le facteur d'étirement tel que

$$s_x(x) = \nu_x(x) + \frac{d_x(x)}{\alpha_x(x) + i\omega}, \quad (83)$$

avec  $\alpha_x \geq 0$  and  $\nu_x \geq 1$ , le pôle de  $s_x$  qui dépend de la fréquence est déplacé de l'axe des réels vers le plan complexe supérieur, une approche nommée *complex frequency-shifted* (CFS) PML.

- $\nu_x$  permet d'atténuer les ondes evanescentes (Roden et Gedney, 2000).
- En transformant (83) vers le domaine du temps, on obtient la convolution

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{x}} = \bar{s}_x(t) * \frac{\partial}{\partial x}, \quad (84)$$

où  $\bar{s}_x(t)$  est la transformée de Fourier inverse de  $1/s_x$ , où

$$\frac{1}{s_x} = \frac{1}{\nu_x} - \frac{d_x}{\nu_x^2} \frac{1}{(d_x/\nu_x + \alpha_x) + i\omega}. \quad (85)$$

# Méthode FDTD – CPML

Introduction

Modélisation en  
ondes complètes –  
Sismique

Généralités

Théorie

Méthode FDTD

FDTD - Discrétilisation

FDTD - Source

FDTD - Marche  
temporelle

FDTD - Stabilité

FDTD - Dispersion

FDTD - Cond. limites

FDTD - PML

FDTD - CPML

Références

- À partir de (85), on trouve

$$\bar{s}_x(t) = \frac{\delta(t)}{\nu_x} - \frac{d_x}{\nu_x^2} e^{-(d_x/\nu_x + \alpha_x)t} H(t) \equiv \frac{\delta(t)}{\nu_x} + \zeta_x(t), \quad (86)$$

avec  $\delta(t)$  le delta Dirac et  $H(t)$  la fonction Heaviside.

- La convolution devient

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{x}} = \frac{1}{\nu_x} \frac{\partial}{\partial x} + \zeta_x(t) * \frac{\partial}{\partial x}. \quad (87)$$

- La difficulté avec cette expression est l'implémentation de la convolution;

- La convolution numérique entre  $x$  et  $h$  est définie

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k], \text{ et implique le stockage en mémoire de toutes les valeurs passées de } x \text{ et } h!$$

# Méthode FDTD – CPML

Introduction

Modélisation en  
ondes complètes –  
Sismique

Généralités

Théorie

Méthode FDTD

FDTD - Discrétilisation

FDTD - Source

FDTD - Marche  
temporelle

FDTD - Stabilité

FDTD - Dispersion

FDTD - Cond. limites

FDTD - PML

FDTD - CPML

Références

- Heureusement (bis), une solution élégante existe : les variables *mémoire* (Carcione *et al.*, 1988);
- Une variable mémoire permet de remplacer la convolution par une seule variable qui est mise à jour à chaque pas de temps, i.e.

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{x}} = \frac{1}{\nu_x} \frac{\partial}{\partial x} + \zeta_x(t) * \frac{\partial}{\partial x} \equiv \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} = \frac{1}{\nu_x} \frac{\partial}{\partial x} + \psi_x \quad (88)$$

où  $\psi_x$  est mis à jour selon

$$\psi_x^m = b_x \psi_x^{m-1} + c_x \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^m, \quad (89)$$

avec, pour le cas des PML étudié ici,

$$b_x = e^{-(d_x/\nu_x + \alpha_x)\Delta t} \quad \text{et} \quad c_x = \frac{d_x}{\nu_x(d_x + \nu_x\alpha_x)}(b_x - 1). \quad (90)$$

# Méthode FDTD – CPML

Introduction

Modélisation en  
ondes complètes –  
Sismique

Généralités

Théorie

Méthode FDTD

FDTD - Discrétisation

FDTD - Source

FDTD - Marche  
temporelle

FDTD - Stabilité

FDTD - Dispersion

FDTD - Cond. limites

FDTD - PML

FDTD - CPML

Références

- Pour le cas élastique  $P-SV$ , il faut compter huit variables mémoires, soit pour les dérivées

$$\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x}, \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z}, \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} \text{ et } \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z},$$

ainsi que pour

$$\frac{\partial v_x}{\partial x}, \frac{\partial v_z}{\partial z}, \frac{\partial v_x}{\partial z} \text{ et } \frac{\partial v_z}{\partial x}.$$

- En insérant les variables mémoires dans le système d'équations (14) à (18), nous obtenons par exemple pour l'équation (14)

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \left( \frac{1}{\nu_x} \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \zeta_x(t) * \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{1}{\nu_z} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \zeta_z(t) * \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) \quad (91)$$

# Méth. FDTD – Implémentation des CPML

Introduction

Modélisation en  
ondes complètes –  
Sismique

Généralités

Théorie

Méthode FDTD

FDTD - Discrétisation

FDTD - Source

FDTD - Marche  
temporelle

FDTD - Stabilité

FDTD - Dispersion

FDTD - Cond. limites

FDTD - PML

FDTD - CPML

Références

- L'équation (91) sous forme discrète est ainsi

$$\frac{v_x^{m+1/2}(i,j) - v_x^{m-1/2}(i,j)}{\Delta t} = \frac{1}{\rho(i,j)} \left( \frac{\tau_{xx}^m(i + 1/2, j) - \tau_{xx}^m(i - 1/2, j)}{v_x(i,j)\Delta x} + \psi_{\tau_{xx,x}}^m(i,j) + \frac{\tau_{xz}^m(i, j + 1/2) - \tau_{xz}^m(i, j - 1/2)}{v_z(i,j)\Delta x} + \psi_{\tau_{xz,z}}^m(i,j) \right) \quad (92)$$

- L'indice de la variable  $\psi_{\tau_{xx,x}}$  la rattache à la dérivée  $\partial \tau_{xx} / \partial x$ .
- La mise à jour des variables mémoires est

$$\psi_{\tau_{xx,x}}^m(i,j) = b_x(i,j) \psi_{\tau_{xx,x}}^{m-1}(i,j) + c_x(i,j) \left( \frac{\tau_{xx}^m(i + 1/2, j) - \tau_{xx}^m(i - 1/2, j)}{\Delta x} \right) \quad (93)$$

$$\psi_{\tau_{xz,z}}^m(i,j) = b_z(i,j) \psi_{\tau_{xz,z}}^{m-1}(i,j) + c_z(i,j) \left( \frac{\tau_{xz}^m(i + 1/2, j) - \tau_{xz}^m(i - 1/2, j)}{\Delta x} \right) \quad (94)$$

# Méth. FDTD – Implémentation des CPML

Introduction

Modélisation en  
ondes complètes –  
Sismique

Généralités

Théorie

Méthode FDTD

FDTD - Discrétisation

FDTD - Source

FDTD - Marche  
temporelle

FDTD - Stabilité

FDTD - Dispersion

FDTD - Cond. limites

FDTD - PML

FDTD - CPML

Références

- Pour l'équation de mise à jour (21), on a

$$v_z^{m+1/2}(i + 1/2, j + 1/2) = v_z^{m-1/2}(i + 1/2, j + 1/2) + \frac{\Delta t}{\rho(i + 1/2, j + 1/2)} \left[ \frac{(\tau_{xz}^m(i + 1, j + 1/2) - \tau_{xz}^m(i, j + 1/2))}{v_x(i + 1/2, j + 1/2)\Delta x} + \psi_{\tau_{xz,x}}^m(i + 1/2, j + 1/2) \right. \\ \left. \frac{(\tau_{zz}^m(i + 1/2, j + 1) - \tau_{zz}^m(i + 1/2, j))}{v_z(i + 1/2, j + 1/2)\Delta x} + \psi_{\tau_{zz,z}}^m(i + 1/2, j + 1/2) \right] \quad (95)$$

- La mise à jour des variables mémoires est

$$\psi_{\tau_{xz,x}}^m(i + 1/2, j + 1/2) = b_x(i + 1/2, j + 1/2)\psi_{\tau_{xz,x}}^{m-1}(i + 1/2, j + 1/2) + \\ c_x(i + 1/2, j + 1/2) \left( \frac{\tau_{xz}^m(i + 1, j + 1/2) - \tau_{xz}^m(i, j + 1/2)}{\Delta x} \right) \quad (96)$$

$$\psi_{\tau_{zz,z}}^m(i + 1/2, j + 1/2) = b_z(i + 1/2, j + 1/2)\psi_{\tau_{zz,z}}^{m-1}(i + 1/2, j + 1/2) + \\ c_z(i + 1/2, j + 1/2) \left( \frac{\tau_{zz}^m(i + 1/2, j + 1) - \tau_{zz}^m(i + 1/2, j)}{\Delta x} \right) \quad (97)$$

# Méth. FDTD – Implémentation des CPML

Introduction

Modélisation en  
ondes complètes –  
Sismique

Généralités

Théorie

Méthode FDTD

FDTD - Discrétisation

FDTD - Source

FDTD - Marche  
temporelle

FDTD - Stabilité

FDTD - Dispersion

FDTD - Cond. limites

FDTD - PML

FDTD - CPML

Références

- Pour l'équation (22), on a

$$\begin{aligned} \tau_{xx}^{m+1}(i + 1/2, j) = & \tau_{xx}^m(i + 1/2, j) + \\ & [(\lambda(i + 1/2, j) + 2\mu(i + 1/2, j)) \Delta t] \\ & \left[ \frac{v_x^{m+1/2}(i + 1, j) - v_x^{m+1/2}(i, j)}{\nu_x(i + 1/2, j) \Delta x} + \psi_{v_{x,x}}^{m+1/2}(i + 1/2, j) \right] + \\ & [\lambda(i + 1/2, j) \Delta t] \\ & \left[ \frac{v_z^{m+1/2}(i + 1/2, j + 1/2) - v_z^{m+1/2}(i + 1/2, j - 1/2)}{\nu_z(i + 1/2, j) \Delta x} + \psi_{v_{z,z}}^{m+1/2}(i + 1/2, j) \right] \quad (98) \end{aligned}$$

- Les équations de mise à jour des variables mémoires sont définies avec les coefficients évalués à  $(i + 1/2, j)$ .

# Méth. FDTD – Implémentation des CPML

Introduction

Modélisation en  
ondes complètes –  
Sismique

Généralités

Théorie

Méthode FDTD

FDTD - Discrétisation

FDTD - Source

FDTD - Marche  
temporelle

FDTD - Stabilité

FDTD - Dispersion

FDTD - Cond. limites

FDTD - PML

FDTD - CPML

Références

- Pour l'équation (23), on a

$$\begin{aligned} \tau_{zz}^{m+1}(i + 1/2, j) = & \tau_{zz}^m(i + 1/2, j) + \\ & [(\lambda(i + 1/2, j) + 2\mu(i + 1/2, j)) \Delta t] \\ & \left[ \frac{v_z^{m+1/2}(i + 1/2, j + 1/2) - v_z^{m+1/2}(i + 1/2, j - 1/2)}{v_z(i + 1/2, j) \Delta x} + \psi_{v_{z,z}}^{m+1/2}(i + 1/2, j) \right] + \\ & [\lambda(i + 1/2, j) \Delta t] \left[ \frac{v_x^{m+1/2}(i + 1, j) - v_x^{m+1/2}(i, j)}{v_x(i + 1/2, j) \Delta x} + \psi_{v_{x,x}}^{m+1/2}(i + 1/2, j) \right] \quad (99) \end{aligned}$$

- Les équations de mise à jour des variables mémoires sont définies avec les coefficients évalués à  $(i + 1/2, j)$ .

# Méth. FDTD – Implémentation des CPML

Introduction

Modélisation en  
ondes complètes –  
Sismique

Généralités

Théorie

Méthode FDTD

FDTD - Discrétisation

FDTD - Source

FDTD - Marche  
temporelle

FDTD - Stabilité

FDTD - Dispersion

FDTD - Cond. limites

FDTD - PML

FDTD - CPML

Références

- Finalement, pour l'équation (24), on a

$$\begin{aligned} \tau_{xz}^{m+1}(i, j + 1/2) = & \tau_{xz}^m(i, j + 1/2) + \\ & [\mu(i, j + 1/2)\Delta t] \left[ \frac{v_x^{m+1/2}(i, j + 1) - v_x^{m+1/2}(i, j)}{\nu_z(i, j + 1/2)\Delta x} + \psi_{v_{x,z}}^{m+1/2}(i, j + 1/2) + \right. \\ & \left. \frac{v_z^{m+1/2}(i + 1/2, j + 1/2) - v_z^{m+1/2}(i - 1/2, j + 1/2)}{\nu_x(i, j + 1/2)\Delta x} + \psi_{v_{z,x}}^{m+1/2}(i, j + 1/2) \right] \quad (100) \end{aligned}$$

- Les équations de mise à jour des variables mémoires sont définies avec les coefficients évalués à  $(i, j + 1/2)$ .

# Méth. FDTD – Implémentation des CPML

Introduction

Modélisation en  
ondes complètes –  
Sismique

Généralités

Théorie

Méthode FDTD

FDTD - Discrétisation

FDTD - Source

FDTD - Marche  
temporelle

FDTD - Stabilité

FDTD - Dispersion

FDTD - Cond. limites

FDTD - PML

FDTD - CPML

Références

- L'ordre dans lequel les mises à jour sont effectuées est important;
- Par exemple,
  - la mise à jour des vitesses  $v^{m+1/2}$  dépend des contraintes  $\tau^m$  et des variables mémoire  $\psi^m$ ;
  - la mise à jour de  $\psi^m$  dépend de  $\tau^m$  et  $\psi^{m-1}$ ;
  - il faut donc mettre d'abord à jour  $\psi^m$  et ensuite  $v^{m+1/2}$ .
- Également, il faut sortir  $\Delta x$  des termes constants devant les dérivées (i.e.  $b_1$ ,  $b_2$ ,  $l_m$ ,  $l$  et  $m$ ), sinon la mise à jour des variables mémoires ne peut se faire correctement (voir l'équation (89)).

# Méth. FDTD – Implémentation des CPML

Introduction

Modélisation en  
ondes complètes –  
Sismique

Généralités

Théorie

Méthode FDTD

FDTD - Discrétisation

FDTD - Source

FDTD - Marche  
temporelle

FDTD - Stabilité

FDTD - Dispersion

FDTD - Cond. limites

FDTD - PML

FDTD - CPML

Références

- Une façon courante d'exprimer  $d_x$  est

$$d_x(x') = d_0 \left( \frac{x'}{N_{PML} \Delta x} \right)^{n_d}, \quad (101)$$

où

- $x'$  est la distance entre l'interface PML-domaine de modélisation, et la fin des PML;
- $n_d$  vaut généralement 2,
- $N_{PML}$  est le nombre de couches PML,
- $d_0$  est fonction du coefficient de réflexion théorique  $R_c$  d'une onde voyageant à  $V_p$  et atteignant la fin des PML à incidence normale, et vaut (Collino and Tsogka, 2001)

$$d_0 = (n_d + 1) \log \left( \frac{1}{R_c} \right) \frac{V_p}{2N_{PML} \Delta x}. \quad (102)$$

# Méth. FDTD – Implémentation des CPML

Introduction

Modélisation en  
ondes complètes –  
Sismique

Généralités

Théorie

Méthode FDTD

FDTD - Discrétisation

FDTD - Source

FDTD - Marche  
temporelle

FDTD - Stabilité

FDTD - Dispersion

FDTD - Cond. limites

FDTD - PML

FDTD - CPML

Références

- Le profile de  $\nu_x$  varie typiquement selon

$$\nu_x(x') = 1 + (\nu_0 - 1) \left( \frac{x'}{N_{PML}\Delta x} \right)^{n_\nu} \quad (103)$$

avec  $n_\nu = 2$  et  $\nu_0 \geq 1$ .

- Le profile de  $\alpha_x$  obéit habituellement à

$$\alpha_x(x') = \alpha_0 \left[ 1 - \left( \frac{x'}{N_{PML}\Delta x} \right)^{n_\alpha} \right]. \quad (104)$$

- Selon Roden et Gedney (2000), il est préférable que  $\alpha_x$  varie linéairement ( $n_\alpha = 1$ ) entre une valeur maximale  $\alpha_0$  à l'entrée des PML et zéro à la fin.
- Komatitsch et Martin (2007) proposent d'utiliser  $\alpha_0 = \pi f_0$ , où  $f_0$  est la fréquence dominante de la source.

# Méth. FDTD – Implémentation des CPML

## Introduction

Modélisation en ondes complètes – Sismique

Généralités

Théorie

Méthode FDTD

FDTD - Discrétilisation

FDTD - Source

FDTD - Marche temporelle

FDTD - Stabilité

FDTD - Dispersion

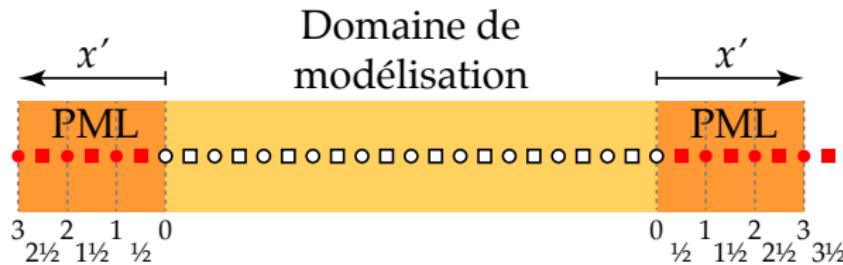
FDTD - Cond. limites

FDTD - PML

FDTD - CPML

Références

- On remarque que les coefficients des PML doivent être définis aux noeuds réguliers et au noeuds décalés, en fonction des variables impliquées.
  - Ces coefficients ( $\nu_x$ ,  $\nu_z$ ,  $b_x$ ,  $b_z$ ,  $c_x$  et  $c_z$ ) peuvent être calculés à l'avance et stockés en mémoire.
- Sur les noeuds décalés, il faut s'assurer d'évaluer correctement les coefficients.
  - Par exemple, pour 3 couches PML, il faut calculer 4 coefficients sur les noeuds décalés à la fin de la grille pour assurer une transition correcte au début des PML, *ceci dans le cas où les limites des PML sont définies aux noeuds réguliers.*



# Méth. FDTD – Implémentation des CPML

Introduction

Modélisation en  
ondes complètes –  
Sismique

Généralités

Théorie

Méthode FDTD

FDTD - Discrétisation

FDTD - Source

FDTD - Marche  
temporelle

FDTD - Stabilité

FDTD - Dispersion

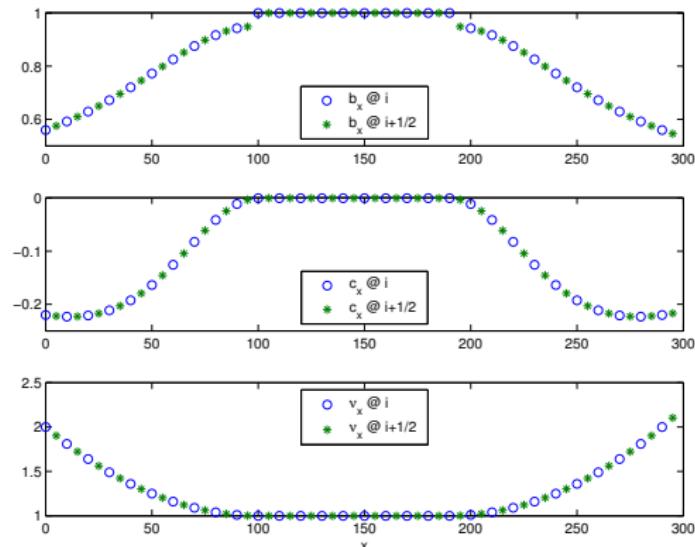
FDTD - Cond. limites

FDTD - PML

FDTD - CPML

Références

- Le choix du nombre de couches PML dépend du degré d'absorption désiré, typiquement 10 et plus;
- Habituellement, les coefficients des PML sont les mêmes selon  $x$  et  $z$ .
- Exemple pour  $nx = 30$ ,  $\Delta x = 10$ ,  $N_{PML} = 10$ ,  $R_c = 0.001$  ( $V_P = 4000$ ),  $\nu_0 = 2$  et  $\alpha_0 = 10\pi$



# Méth. FDTD – Implémentation des CPML

## Introduction

Modélisation en  
ondes complètes –  
Sismique

Généralités

Théorie

Méthode FDTD

FDTD - Discrétisation

FDTD - Source

FDTD - Marche  
temporelle

FDTD - Stabilité

FDTD - Dispersion

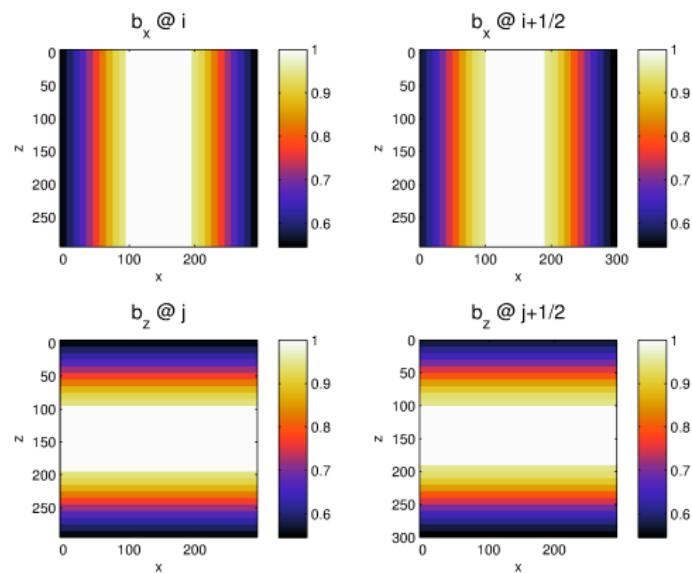
FDTD - Cond. limites

FDTD - PML

FDTD - CPML

Références

- En 2D, les coefficients affectés aux dérivées en  $x$  varient seulement selon cette direction;
- Il en est de même pour les dérivées en  $z$ .



# Méth. FDTD – Performance des PML

Introduction

Modélisation en  
ondes complètes –  
Sismique

Généralités

Théorie

Méthode FDTD

FDTD - Discrétilisation

FDTD - Source

FDTD - Marche  
temporelle

FDTD - Stabilité

FDTD - Dispersion

FDTD - Cond. limites

FDTD - PML

FDTD - CPML

Références

- Une façon d'évaluer la performance des PML est de mesurer l'énergie  $E$  pour tout le domaine de modélisation en fonction du temps, pour quantifier l'énergie résiduelle une fois que les ondes auraient dû être entièrement absorbées.
- L'énergie totale  $E$  est définie

$$E = \frac{1}{2} \rho \|\mathbf{v}\|^2 + \frac{1}{2} (\tau_{xx} \epsilon_{xx} + 2\tau_{xz} \epsilon_{xz} + \tau_{zz} \epsilon_{zz}) \quad (105)$$

où  $\mathbf{v} = [v_x \ v_z]$  et les déformations  $\epsilon$  sont évaluées avec l'équation (2).

- Concrètement, on calcule  $E$  en tout point du domaine de modélisation (*excluant les PML*), pour en faire la somme et stocker la valeur pour l'itération en cours.

# Méthode FDTD – Performance des PML

Introduction

Modélisation en  
ondes complètes –  
Sismique

Généralités

Théorie

Méthode FDTD

FDTD - Discrétisation

FDTD - Source

FDTD - Marche  
temporelle

FDTD - Stabilité

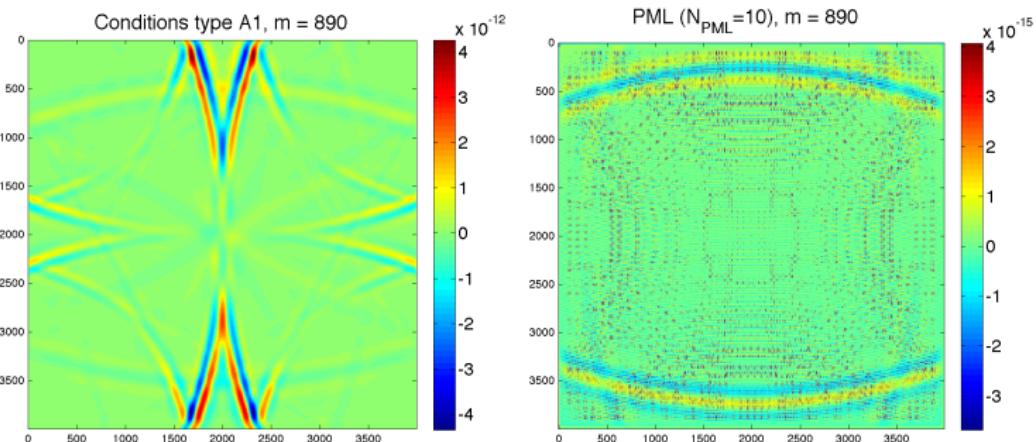
FDTD - Dispersion

FDTD - Cond. limites

FDTD - PML

FDTD - CPML

Références



# Méth. FDTD – Performance des PML

Introduction

Modélisation en  
ondes complètes –  
Sismique

Généralités

Théorie

Méthode FDTD

FDTD - Discrétisation

FDTD - Source

FDTD - Marche  
temporelle

FDTD - Stabilité

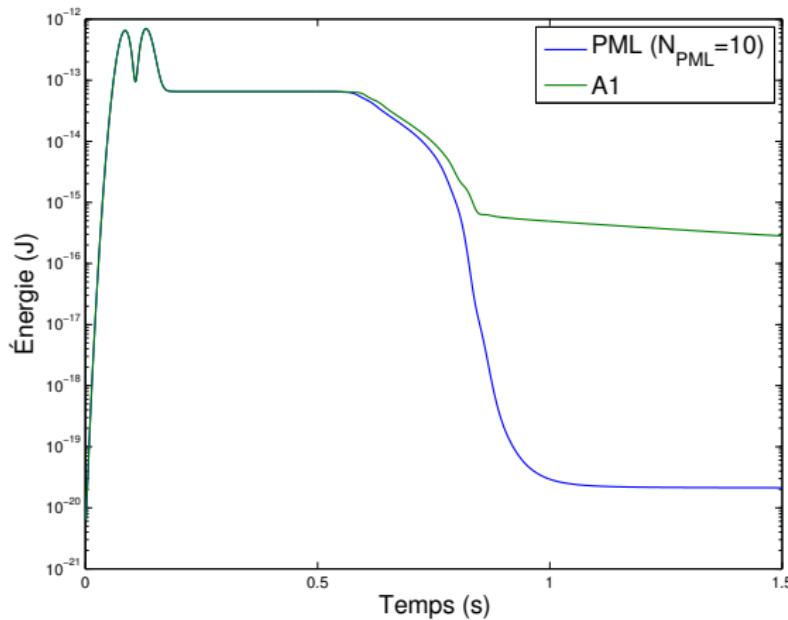
FDTD - Dispersion

FDTD - Cond. limites

FDTD - PML

FDTD - CPML

Références



Introduction

Modélisation en  
ondes complètes –  
Sismique

Références

## Références

# Références

Introduction

Modélisation en  
ondes complètes –  
Sismique

Références

- Bérenger, J.-P. (1994). A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves. *Journal of Computational Physics*, 114 :185–200
- Carcione, J. M., Kosloff, D., and Kosloff, R. (1988). Viscoacoustic wave propagation simulation in the earth. *Geophysics*, 53(6) :769–777
- Carcione, J. M., Herman, G. C., and ten Kroode, A. P. E. (2002). Seismic modeling. *Geophysics*, 67(4) :1304–1325
- Carcione, J. M. (2007). *Wave Fields in Real Media : Wave Propagation in Anisotropic, Anelastic, Porous and Electromagnetic Media*, volume 38 of *Handbook of Geophysical Exploration : Seismic Exploration*. Elsevier, 2<sup>nd</sup> edition

# Références

Introduction

Modélisation en  
ondes complètes –  
Sismique

Références

- Clayton, R. and Engquist, B. (1977). Absorbing boundary conditions for acoustic and elastic wave equations. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 67(6) :1529–1540
- Collino, F. and Tsogka, C. (2001). Application of the perfectly matched absorbing layer model to the linear elastodynamic problem in anisotropic heterogeneous media. *Geophysics*, 66(1) :294–307
- Komatitsch, D. and Martin, R. (2007). An unsplit convolutional perfectly matched layer improved at grazing incidence for the seismic wave equation. *Geophysics*, 72(5) :SM155–SM167
- Moczo, P., Kristek, J., and Bystrický, E. (2000). Stability and grid dispersion of the P-SV 4<sup>th</sup>-order staggered-grid finite-difference schemes. *Studia Geophysica et Geodaetica*, 44 :381–402

# Références

Introduction

Modélisation en  
ondes complètes –  
Sismique

Références

- Moczo, P., Kristek, J., Vavryčuk, V., Archuleta, R. J., and Halada, L. (2002). 3D heterogeneous staggered-grid finite-difference modeling of seismic motion with volume harmonic and arithmetic averaging of elastic moduli and densities. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 92(8) :3042–3066
- Robertsson, J. O. A. (1996). A numerical free-surface condition for elastic/viscoelastic finite-difference modeling in the presence of topography. *Geophysics*, 61(6) :1921–1934
- Roden, J. A. and Gedney, S. D. (2000). Convolution PML (CPML) : An efficient FDTD implementation of the CFS-PML for arbitrary media. *Microwave and Optical Technology Letters*, 27(5) :334–339

# Références

Introduction

Modélisation en  
ondes complètes –  
Sismique

Références

- Taflove, A. and Hagness, S. C. (2005). *Computational electrodynamics : the finite-difference time-domain method.* Artech House, 3rd edition
- Virieux, J. (1984). SH-wave propagation in heterogeneous media : Velocity-stress finite-difference method. *Geophysics*, 49(11) :1933–1942
- Virieux, J. (1986). P-SV wave propagation in heterogeneous media : Velocity-stress finite-difference method. *Geophysics*, 51(4) :889–901