GEO1303 – Méthodes sismiques
2 - Analyse spectrale et traitement du signal

Bernard Giroux

Institut national de la recherche scientifique
Centre Eau Terre Environnement

Version 1.0.8
Automne 2018

Introduction

Motivation

- L'analyse spectrale est une méthodologie permettant d'extraire certaines caractéristiques de nos mesures (appelées ici *signaux*) ;
- L'analyse spectrale est intéressante car
  1. elle permet d'observer les données par un angle différent : amélioration de la compréhension du phénomène ;
  2. elle nous donne des outils qui permettent de faciliter et souvent *d'accélérer* les calculs.

Théorie

Séries de Fourier

- Le point de départ de l'analyse spectrale est l'analyse de Fourier ;
- L'étude d'une fonction périodique par les séries de Fourier comprend deux volets :
  1. l'analyse, qui consiste en la détermination de la suite de ses coefficients de Fourier ;
  2. la synthèse, qui permet de retrouver, en un certain sens, la fonction à l'aide de la suite de ses coefficients.

Séries de Fourier

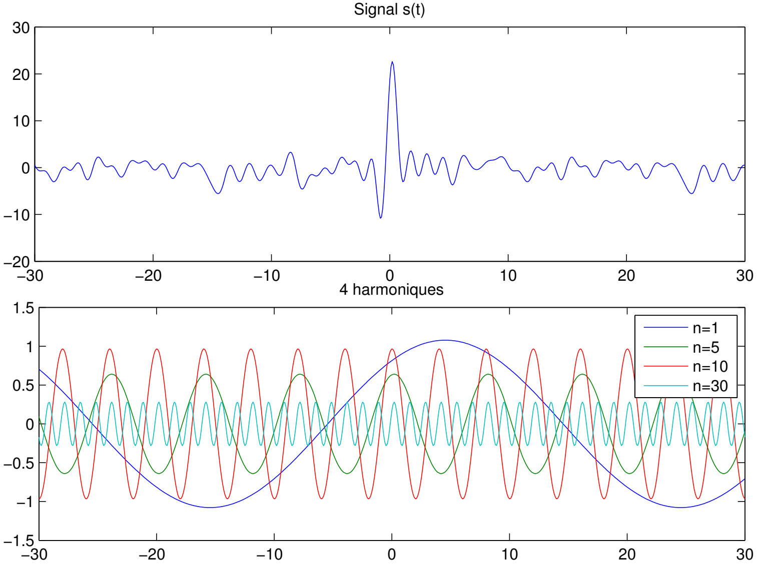
- Fourier a montré que si :
  1. $s(t)$ est une fonction périodique, c'est-à-dire si $s(t+T) = s(t)$ où T est la période ;
  2. $s(t)$ est continue par morceaux (*piecewise*) ;
  3. $s(t)$ possède un nombre fini de max et de min ;
  4. $s(t)$ est telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)| dt$ est finie ;

  alors, $s(t)$ peut s'écrire :

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2\pi n t}{T} + b_n \sin \frac{2\pi n t}{T} \right) \qquad (1)$$

où a_0, a_n et b_n sont des constantes à déterminer : les coefficients de Fourier.

Séries de Fourier



INRS
UNIVERSITÉ DE RECHERCHE

Séries de Fourier

Séries de Fourier

- $\cos\frac{2\pi nt}{T}$ et $\sin\frac{2\pi nt}{T}$ représentent des fonctions orthogonales :

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \sin\frac{2\pi nt}{T}\sin\frac{2\pi mt}{T}\,dt &= \int_0^\infty \cos\frac{2\pi nt}{T}\cos\frac{2\pi mt}{T}\,dt \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad m\neq n \\ \frac{T}{2} & \text{si} \quad m=n \end{cases}\end{aligned}$$

$$\boxed{\int_0^\infty \sin\frac{2\pi nt}{T}\cos\frac{2\pi mt}{T}\,dt = 0 \quad \forall \quad m,n.}$$

Séries de Fourier

- Les coefficients se trouvent en utilisant les propriétés d'orthogonalité :

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{T}\int_0^T s(t)\,dt; \\ a_n &= \frac{2}{T}\int_0^T s(t)\cos\frac{2\pi nt}{T}\,dt; \\ b_n &= \frac{2}{T}\int_0^T s(t)\sin\frac{2\pi nt}{T}\,dt. \end{aligned} \tag{2}$$

Séries de Fourier

- Exemple de décomposition pour $s(t) = \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$:
- Pour a_0

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{2}{T}\int_0^T \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\, dt \\
&= \frac{2}{T}\left[\frac{T}{2\pi}\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\right]_0^T \\
&= \frac{2}{T}\left[\sin(2\pi) - \sin(0)\right] \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Séries de Fourier

- Pour a_n

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T}\int_0^T \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\cos\left(\frac{2\pi n}{T}t\right)\,dt \\ &= \frac{2}{T}\left[\frac{nT\sin(2n\pi)}{2\left(n^2-1\right)\pi}\right] \\ &= \begin{array}{l} a_1 = 1 \quad \text{via la règle de l'Hôpital} \\ a_n = 0 \quad \forall \quad n \neq 1 \end{array} \end{aligned}$$

- Pour b_n

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{T}\int_0^T \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\sin\left(\frac{2\pi n}{T}t\right)\,dt \\ &= 0 \end{aligned}$$

- On n'a donc seulement a_1 non nul, et $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{2\pi nt}{T}+b_n\sin\frac{2\pi nt}{T}\right)$ donne bien $\cos\frac{2\pi t}{T}$.

Transformée de Fourier

- En analyse, la transformation de Fourier est un analogue de la théorie des séries de Fourier pour les fonctions *non périodiques* ;
- Elle permet de leur associer deux spectres en fréquences :
  - spectre d'amplitude ;
  - spectre de phase.

Transformée de Fourier

- On peut écrire

$$\begin{aligned}\cos\frac{2\pi nt}{T} &= \frac{1}{2}\left(e^{i\frac{2\pi nt}{T}} + e^{-i\frac{2\pi nt}{T}}\right)\\ \sin\frac{2\pi nt}{T} &= \frac{1}{2i}\left(e^{i\frac{2\pi nt}{T}} - e^{-i\frac{2\pi nt}{T}}\right)\end{aligned}$$

- i est le nombre complexe $\sqrt{-1}$.
- En introduisant cette notation dans l'équation (1), on a

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n - ib_n}{2}\right)e^{i\frac{2\pi nt}{T}} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n + ib_n}{2}\right)e^{-i\frac{2\pi nt}{T}}. \tag{3}$$

Transformée de Fourier

- Si on définit $s_n = \frac{a_n - ib_n}{2}$, on peut écrire, sachant que $b_0 = 0$

$$s(t) = s_0 + \sum_{n=1}^{\infty} s_n e^{i\frac{2\pi nt}{T}} + \sum_{n=1}^{\infty} s_n^* e^{-i\frac{2\pi nt}{T}}, \tag{4}$$

  où s_n^* est le conjugué complexe de s_n.

- Par ailleurs, on sait que $s_{-n} = s_n^*$, ce qui nous permet d'écrire

$$s(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} s_n e^{i\frac{2\pi nt}{T}}. \tag{5}$$

- Partant de la définition des coefficients de Fourier, on peut voir que

$$s_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} s(t) e^{-i\frac{2\pi nt}{T}} dt. \tag{6}$$

Transformée de Fourier

- Posons l'hypothèse que $s(t)$ est non périodique ;
- Cela revient à dire que $T \to \infty$, et alors

$$s(t) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \sum_{-\infty}^{+\infty} Ts_n e^{i2\pi f_n t} \tag{7}$$

où

$$f_n = n/T$$

et

$$Ts_n = \int_{-T/2}^{T/2} s(t) e^{-i\frac{2\pi n t}{T}} dt.$$

- Par ailleurs, lorsque $T \to \infty$, nous avons

$$\Delta f_n \to 0 \quad \text{car} \quad \Delta f_n = \frac{n+1}{T} - \frac{n}{T} = \frac{1}{T}.$$

Transformée de Fourier

- Si on définit $S(\omega_n) = Ts_n$ (avec $\omega_n = 2\pi f_n$), on peut reprendre l'équation (7)

$$s(t) = \lim_{\Delta\omega_n \to 0} \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Delta\omega_n}{2\pi} S(\omega_n) e^{i\omega_n t},$$

- Cette équation n'est ni plus ni moins que l'intégrale

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \tag{8}$$

- Ainsi, les fonctions $e^{i\omega t}$ forment une base complète pour la représentation de $s(t)$ dans l'intervalle $-\infty < t < \infty$.

Transformée de Fourier

- Partant de l'équation (6), on peut arriver à

$$S(\omega) = \lim_{T \to \infty} T s_n = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-i\omega t} dt. \tag{9}$$

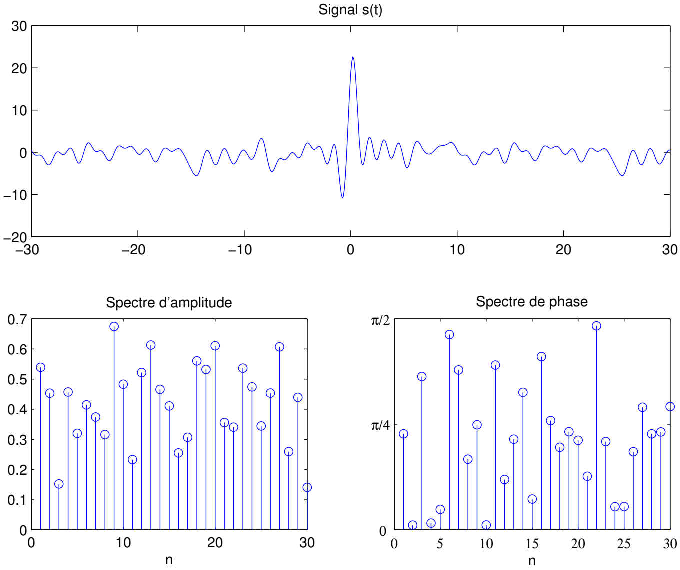
- $S(\omega)$ est une grandeur complexe :

$$S(\omega) = a(\omega) + ib(\omega) \qquad \text{ou bien} \qquad S(\omega) = |S(\omega)| e^{i\phi(\omega)},$$

où $|S(\omega)| = \sqrt{a^2 + b^2}$ et $\phi(\omega) = \tan^{-1}\left(\frac{a}{b}\right) + 2\pi n$.

- $S(\omega)$ est la transformée de Fourier de $s(t)$;
- $S(\omega)$ donne une mesure du contenu en fréquences de $s(t)$;
- $|S(\omega)|$ représente le spectre d'amplitude et $\phi(\omega)$ représente le spectre de phase.

Transformée de Fourier



Linéarité

- Si

$$\begin{aligned} x(t) &\leftrightarrow X(\omega) \\ y(t) &\leftrightarrow Y(\omega) \end{aligned}$$

  alors

$$ax(t) + by(t) \leftrightarrow aX(\omega) + bY(\omega). \tag{10}$$

- C'est une propriété importante pour la séparation des régionales et résiduelles dans le domaine spectral.

Symétrie

- Si

$$h(t) \leftrightarrow H(\omega)$$

alors

$$H(t) \leftrightarrow h(-\omega) \tag{11}$$
$$H(-t) \leftrightarrow h(\omega). \tag{12}$$

- Propriété importante pour anticiper les réponses.

Facteur d'échelle du temps

- Si
$$h(t) \leftrightarrow H(\omega)$$
alors
$$h(ct) \leftrightarrow \frac{1}{|c|} H(\omega/c). \tag{13}$$
- Une expansion du temps correspond à une contraction des fréquences.

Facteur d’échelle en fréquence

- Si
$$h(t) \leftrightarrow H(\omega)$$
alors
$$\frac{1}{|c|} h(t/c) \leftrightarrow H(c\omega). \tag{14}$$
- Propriété analogue au facteur d’échelle du temps.
- Peut être déduite par la propriété de symétrie.

Translation dans le temps

- Si

$$h(t) \leftrightarrow H(\omega)$$

alors

$$h(t - t_0) \leftrightarrow H(\omega)e^{-i\omega t_0}. \tag{15}$$

- Le spectre d'amplitude n'est pas affecté.

Translation en fréquence

- Si

$$h(t) \leftrightarrow H(\omega)$$

alors

$$h(t)e^{i\omega_0 t} \leftrightarrow H(\omega - \omega_0). \tag{16}$$

- C'est propriété est utilisée en modulation d'amplitude.

Dérivation

- Si
$$h(t) \leftrightarrow H(\omega)$$
alors
$$\frac{dh(t)}{dt} \leftrightarrow i\omega H(\omega). \tag{17}$$
- En général, si on écrit $\frac{d^n h(t)}{dt} = h^{(n)}(t)$, alors
$$h^{(n)}(t) \quad \leftrightarrow \quad (i\omega)^n H(\omega). \tag{18}$$
- Cette propriété présente un intérêt en modélisation numérique pour calculer les dérivées spatiales ou temporelles ;

Intégration

- Si

$$h(t) \leftrightarrow H(\omega)$$

alors

$$\int_{-\infty}^{t} h(t)dt \leftrightarrow \frac{1}{i\omega}H(\omega), \tag{19}$$

à condition que $H(\omega) = 0$ pour $\omega = 0$.

Convolution

- Le produit de convolution $y(t)$ entre deux fonctions $x(t)$ et $h(t)$ s'écrit

$$\begin{aligned} y(t) = x(t) * h(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)h(\tau)d\tau. \end{aligned} \tag{20}$$

- Si

$$\begin{aligned} x(t) &\leftrightarrow X(\omega) \\ h(t) &\leftrightarrow H(\omega) \end{aligned}$$

  alors

$$\begin{aligned} x(t) * h(t) &\leftrightarrow X(\omega) \cdot H(\omega) \\ x(t) \cdot h(t) &\leftrightarrow X(\omega) * H(\omega). \end{aligned}$$

- La convolution dans le domaine du temps correspond à la multiplication dans le domaine des fréquences, et vice-versa.

Convolution

Convolution

Transformée 2D

- Les données sismiques sont typiquement présentées sur des sections, avec un axe vertical temporel et un axe horizontal spatial,
  - i.e. sur un domaine *bidimensionnel*.
- En 2D, la transformée de Fourier devient

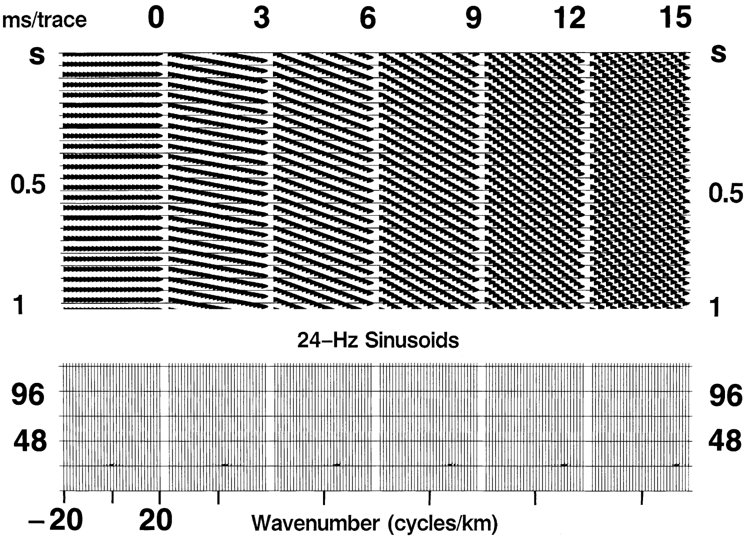
$$F(k_x, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,t)\, e^{ik_x x - i\omega t}\, dx\, dt, \tag{21}$$

- Son inverse est

$$f(x,t) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(k_x, \omega)\, e^{-ik_x x + i\omega t}\, dk_x\, d\omega. \tag{22}$$

- Le terme k_x est le nombre d'onde selon x ;
  - L'unité est le radian par unité de distance (i.e. rad/m si x est en mètres).

Transformée 2D



Transformée discrète de Fourier

- Dans la pratique, les mesures géophysiques sont enregistrées sur support numérique ;
- Les mesures sont constituées d'un nombre fini de valeurs ;
  - elles forment une représentation *discrète*, notée $s[n]$, d'une fonction continue $s(t)$.
- On dit alors que la fonction continue est échantillonnée.
- Si la période d'échantillonnage T_e est constante, $s[n] = s(nT_e)$ avec n un entier.
- Comment se traduit la transformée de Fourier pour un signal discret ?

Transformée discrète de Fourier

- Pour un signal de N échantillons, nous avons

$$S(k) = \sum_{n=0}^{N-1} s[n] e^{-2i\pi k \frac{n}{N}}, \tag{23}$$

- et sont inverse

$$s[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} S(k) e^{-2i\pi n \frac{k}{N}}. \tag{24}$$

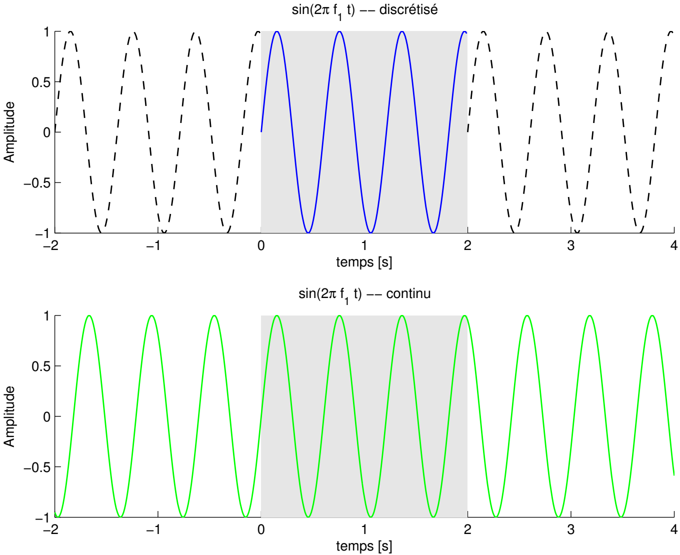
Transformée discrète de Fourier

- On obtient ainsi un ensemble de N valeurs discrètes renseignant sur le contenu fréquentiel du signal $s[n]$, correspondant au spectre échantillonné.
  - La Transformée discrète de Fourier peut être vue comme la Transformée de Fourier *échantillonnée*.
- Cette ensemble renseigne sur les fréquences comprises entre 0 et $f_e/2$, f_e étant la fréquence d'échantillonnage ($f_e = 1/T_e$).

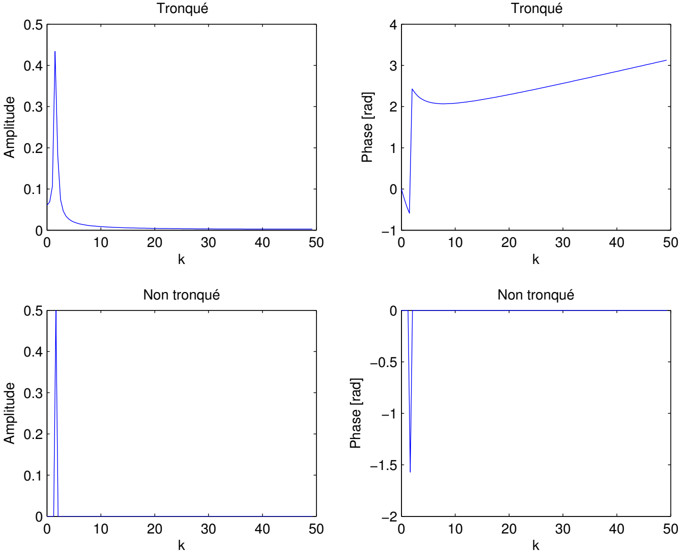
Troncation

- L'échantillonnage d'une fonction continue en un nombre fini de points peut occasionner une troncation du signal ;
- Ce phénomène a un incidence sur l'estimation du spectre d'amplitude et de phase du signal ;

Troncation


sin(2π f1 t) –– discrétisé
Amplitude
temps [s]
sin(2π f1 t) –– continu
Amplitude
temps [s]

Troncation


Tronqué
Amplitude
k
Tronqué
Phase [rad]
k
Non tronqué
Amplitude
k
Non tronqué
Phase [rad]
k

Troncation

- Une façon de réduire l'effet de la troncation consiste à
  1. soustraire un polynôme du premier ordre, ajusté aux extrémités du signal ;
  2. ajouter une zone tampon à chaque extrémité du signal ;
  3. interpoler les valeurs dans les zones tampons de façon à ce que les valeurs se rejoignent, i.e. de façon à pouvoir «connecter» le signal à ses répétitions périodiques.

Échantillonnage

- Le processus d'échantillonnage entraîne inévitablement une perte d'information lors de l'analyse ;
- La question se pose à savoir si cette perte d'information a des répercussion lors de la synthèse ;
- La réponse est donnée par le théorème d'échantillonnage, ou théorème de Nyquist (ou Nyquist-Shannon) ;
- Celui-ci stipule qu'un signal contenant une fréquence maximale f_{max} doit être échantillonné avec une fréquence $f_e (= 1/T_e)$ supérieure ou égale à $2f_{max}$, i.e.

$$\boxed{f_e \geq 2f_{max}}$$

Échantillonnage

- Soit un signal sinusoïdal d'amplitude a et de fréquence f

$$x(t) = a\cos(2\pi f t).$$

- En l'échantillonnant avec une période T_e, soit pour $t = nT_e$ où $n = 0, 1, 2, \ldots$, on obtient la suite de valeurs numériques

$$x[n] = a\cos(2\pi n f T_e).$$

- Soit un 2^e signal d'amplitude b et de fréquence $1/T_e - f$

$$y(t) = b\cos\left(2\pi\left(\frac{1}{T_e} - f\right)t\right).$$

- Une fois échantillonné à la même fréquence que le signal $x(t)$, il devient

$$y[n] = b\cos\left(2\pi n\left(\frac{1}{T_e} - f\right)T_e\right) = b\cos(2\pi n(1 - fT_e)).$$

Échantillonnage

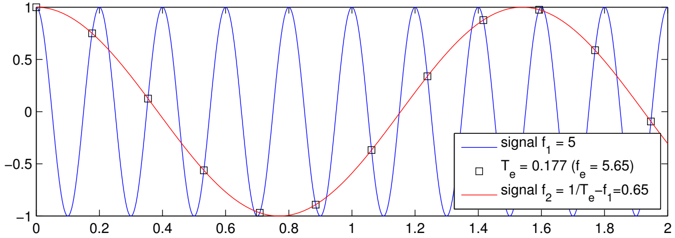
- La trigonométrie élémentaire conduit à

$$y[n] = b\cos(2\pi n f T_e).$$

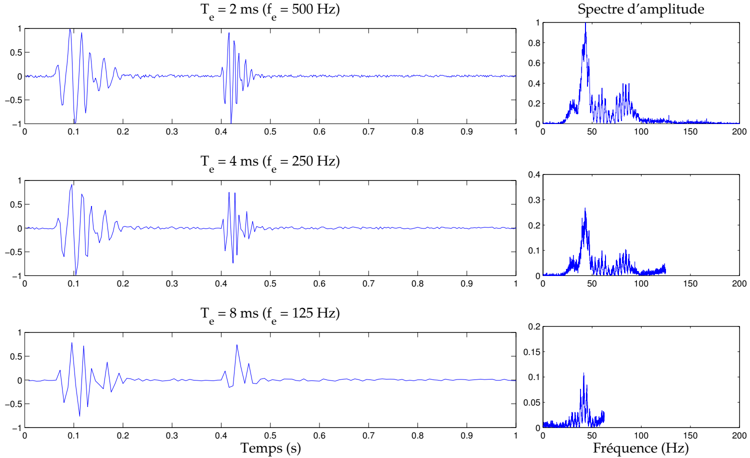
- Ainsi, dans la somme $x[n] + y[n]$, il est impossible de distinguer ce qui appartient au signal de fréquence f et à celui de fréquence $1/T_e - f$.
- Ce résultat conduit à l'effet de crénelage, repli de spectre ou encore *aliasing*, qui indique que l'on prend une sinusoïde pour une autre.

Échantillonnage

Illustration de l'effet de crénelage



Échantillonnage



Échantillonnage

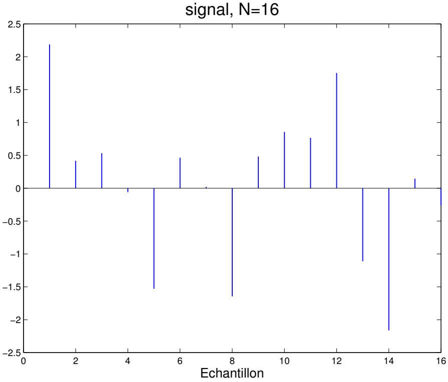
Pratique de bourrage de zéros (*zero-padding*)

- On a vu que la Transformée discrète de Fourier peut être vue comme la Transformée de Fourier *échantillonnée*.
- Si on a un signal échantillonné avec un nombre restreint de mesures, la T.F. sera échantillonnée avec peu de points.
- Ceci peut mener à une ambiguïté sur la détermination du nombre de fréquences contenues dans le signal.
- Or, la T.F. n'est pas affectée par des valeurs nulles du signal.
- En ajoutant des zéros au signal, on augmente «l'échantillonnage» de la T.F., sans pour autant augmenter la résolution de la T.F.

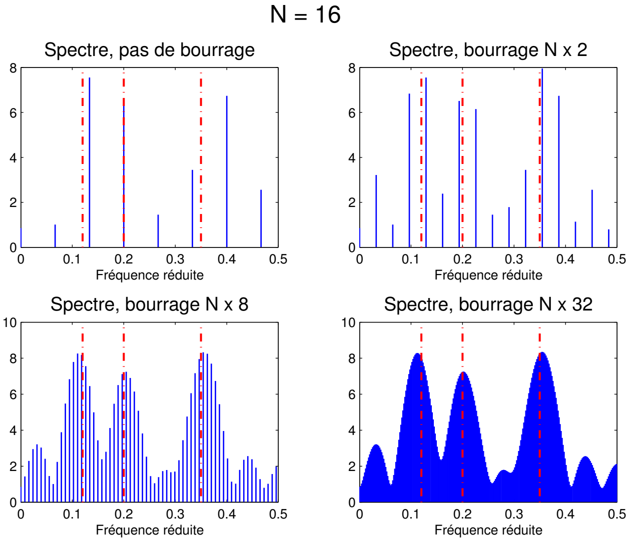
Échantillonnage

Soit un signal s comportant trois fréquences : f_1=0.12, f_2=0.2 et f_3=0.35

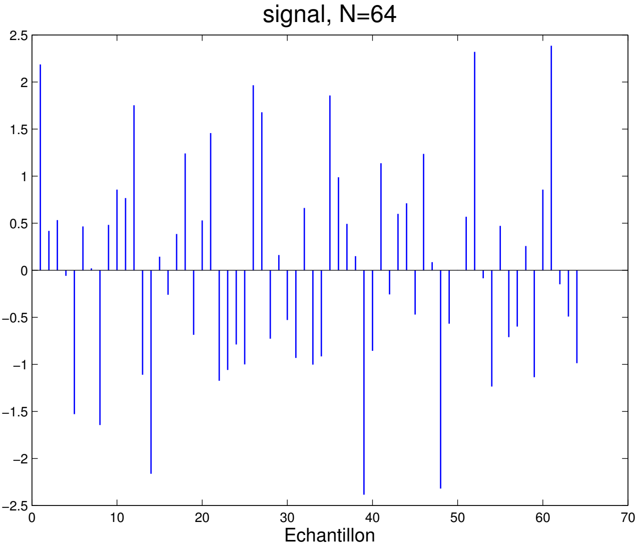
$$s[n] = 0.9 \sin[2\pi f_1 n] + 0.8 \sin[2\pi f_2 n] + \sin[2\pi f_3 n]$$



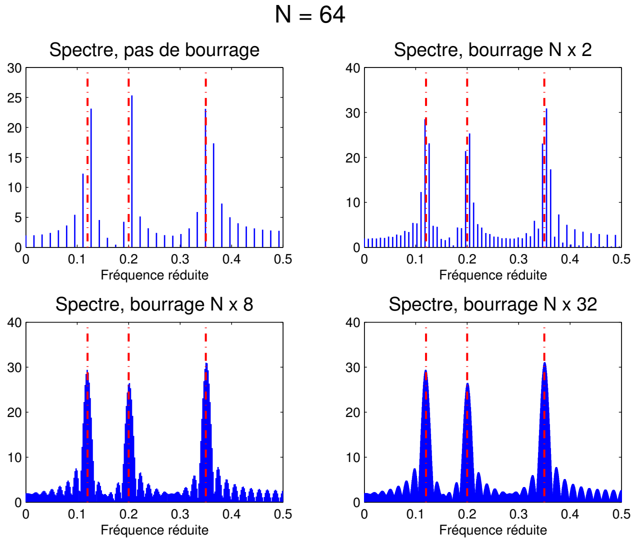
Échantillonnage



Échantillonnage



Échantillonnage



Échantillonnage spatial

- Tout comme dans le domaine du temps, le nombre d'onde de Nyquist est défini par

$$k_{Nyq} = \frac{1}{2\Delta x} \tag{25}$$

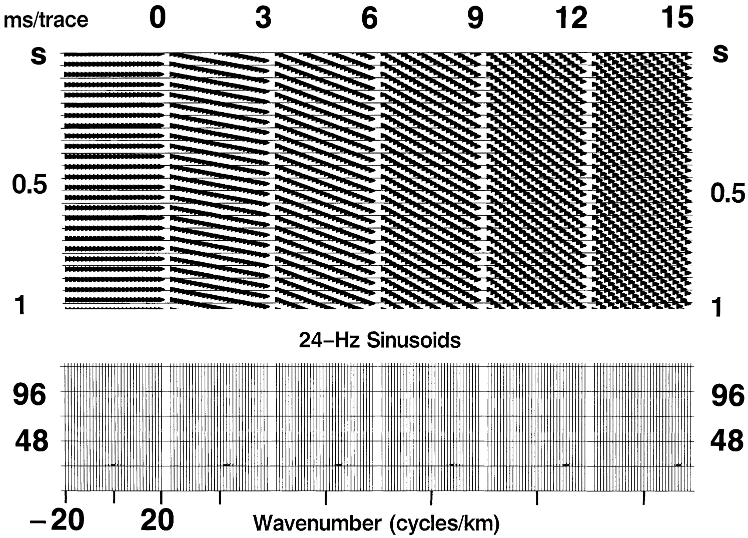
avec Δx le pas d'échantillonnage spatial.

- On peut montrer que l'inverse de la pente $\Delta t / \Delta x$ vaut

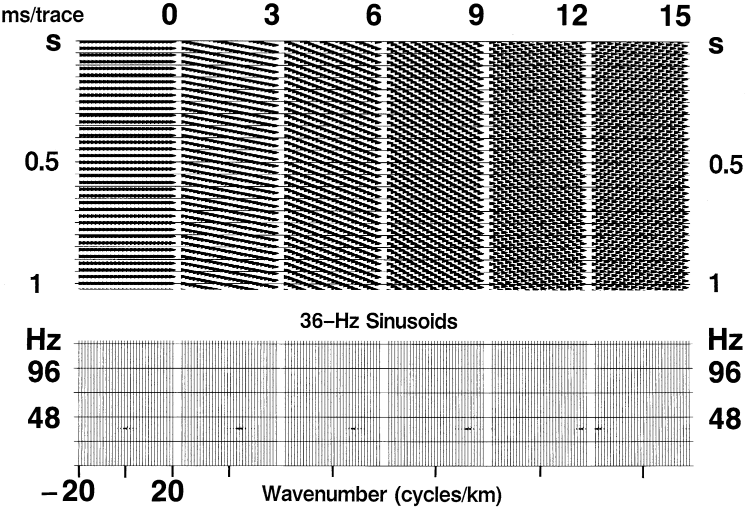
$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{f}{k}.$$

- Ainsi, pour une pente $\Delta t / \Delta x$ donnée, doubler la fréquence signifie doubler le nombre d'onde.
- Pour un contenu fréquentiel plus élevé, il faut un pas d'échantillonnage spatial plus court.

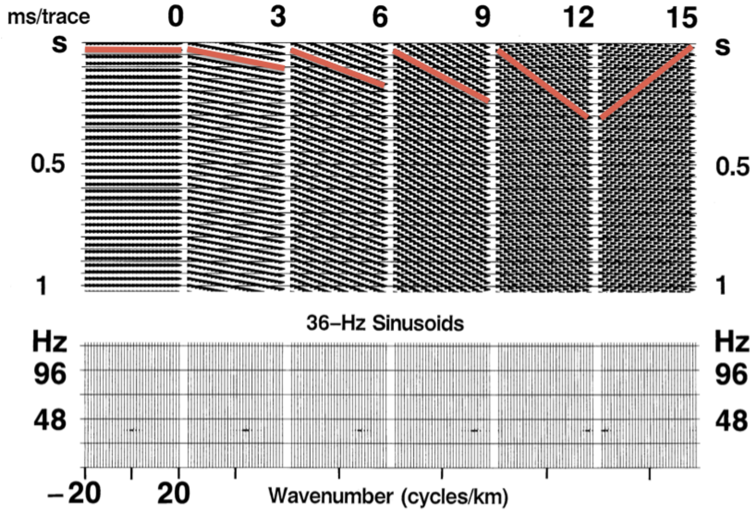
Échantillonnage spatial



Échantillonnage spatial



Échantillonnage spatial



L'opérateur d'intercorrélation

L'intercorrélation entre deux fonctions complexes $a(t)$ et $b(t)$ est par définition

$$a(t) \star b(t) = \int_{-\infty}^{\infty} a^*(\tau) b(t+\tau) d\tau. \tag{26}$$

Soient deux signaux réels discrets a et b :

- a contient m coefficients ;
- b contient n coefficients ;
- Les coefficients de l'intercorrélation sont

$$c_k = \sum_{j=0}^{n} a_j b_{k+j}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, m.$$

- L'intercorrélation n'est pas *commutative* ;
- La relation entre convolution et intercorrélation :

$$a(t) \star b(t) = a(-t) * b(t).$$

L'opérateur d'intercorrélation

- L'opérateur d'intercorrélation est utile pour estimer le spectre d'une fonction aléatoire (bruit) qui, compte tenu de sa nature, n'a pas de T.F. ;
- Soit $f(t)$ un processus stochastique stationnaire et sa fonction d'autocorrélation

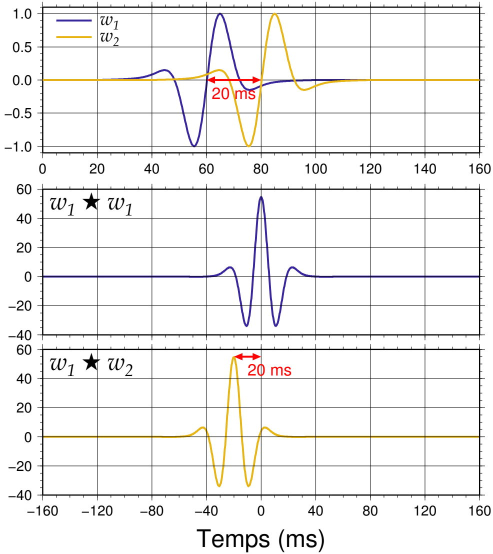
$$P(\tau) = f(t) \star f(t).$$

- On peut montrer (théorème de Wiener-Khinchin) que la T.F. de $P(\tau)$ correspond à la densité spectrale de puissance de $f(t)$

$$P(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} P(\tau) e^{-i\omega t} dt \tag{27}$$

L'opérateur d'intercorrélation

Détermination du délai entre deux signaux par intercorrélation



Transformée de Hilbert

- La transformée de Hilbert et son inverse sont par définition

$$g(\tau) = \mathcal{H}[f(t)] = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(t)}{t-\tau}dt \tag{28}$$

$$f(t) = \mathcal{H}^{-1}[g(\tau)] = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{g(\tau)}{\tau-t}d\tau, \tag{29}$$

  où la singularité à $t - \tau$ est traitée avec la valeur principale de Cauchy.

- Cette transformée a des propriétés intéressantes pour de multiples applications, notamment pour calculer l'enveloppe et la phase instantanée d'une trace sismique par l'utilisation du signal analytique.

Le signal analytique

- Par définition, le signal analytique d'un signal $x(t)$ est une variable complexe fonction du temps $u(t)$

$$u(t) = x(t) + iy(t), \tag{30}$$

où $y(t)$ est la transformée de Hilbert de $x(t)$.

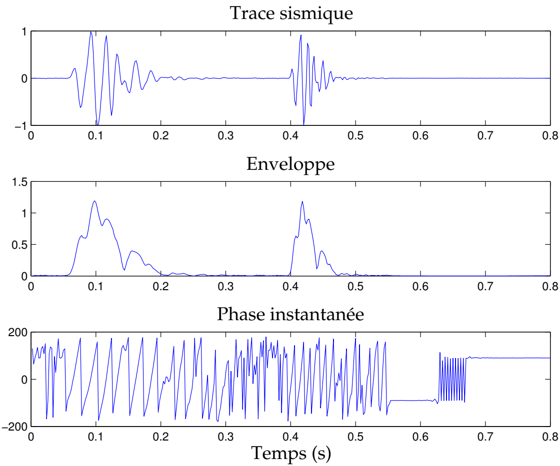
- Sous la forme polaire, nous avons

$$u(t) = R(t) \exp[i\phi(t)],$$

avec $R(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}$ et $\phi(t) = \tan^{-1} \frac{y(t)}{x(t)}$.

- En sismique, $R(t)$ représente l'amplitude instantanée, ou l'enveloppe, et $\phi(t)$ est la phase instantanée.

Le signal analytique

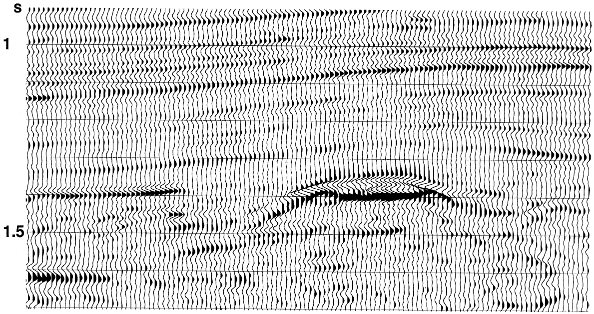


Le signal analytique

- On utilise l'enveloppe pour estimer l'intensité de la réflectivité, proportionnelle à la racine carrée de l'énergie contenue à un temps t ;
- La phase instantanée permet de mettre en relief la continuité latérale des réflexions ;
- Il est important de préserver les amplitudes et le contenu fréquentiel lors de la séquence de traitement !

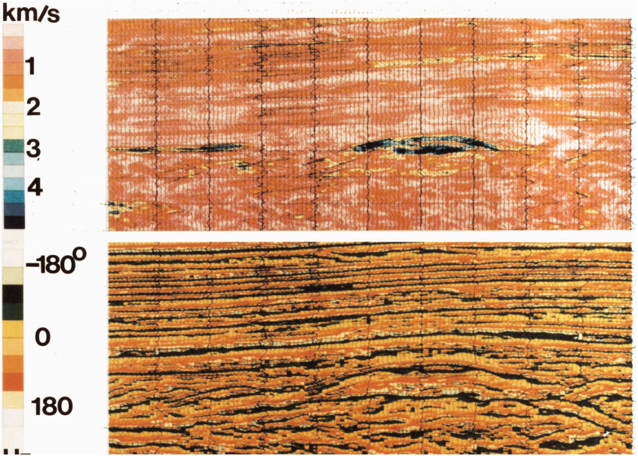
Le signal analytique

Section sismique



Le signal analytique

Enveloppe



Phase instantanée

Le signal analytique – Calcul

- Par définition, le signal analytique de $x(t)$ est

$$u(t) = x(t) + i\mathcal{H}[x(t)]. \tag{31}$$

- Or, la Transformée de Hilbert possède la propriété

$$\underbrace{\mathcal{F}\left[\mathcal{H}[x]\right]}_{\text{T.F. de } \mathcal{H}[x]} = -i\,\text{signe}(\omega)\,\mathcal{F}[x].$$

- On a alors que la Transformée de Fourier de $u(t)$ est

$$\mathcal{F}[u] = \mathcal{F}[x]\,(1 + \text{signe}(\omega)).$$

- On peut donc calculer le signal analytique en utilisant directement la Transformée de Hilbert, ou en
  1. calculant la Transformée de Fourier de x ;
  2. posant égal à 0 les valeurs à $\omega < 0$, et en doublant les valeurs à $\omega > 0$;
  3. en effectuant la T.F. inverse du résultat.

Transformée en Z

- Une série temporelle discrétisée de longueur finie peut s'écrire

$$x(t) = \sum_k x_k \delta(t - k\Delta t), \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n$$

  où Δt est la période d'échantillonnage et $\delta(t - k\Delta t)$ la fonction delta de Dirac.

- La transformée discrète est

$$X(\omega) = \sum_k x_k \exp(-i\omega k\Delta t), \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n$$

Transformée en Z

- On introduit une nouvelle variable

$$z = \exp(-i\omega\Delta t),$$

ce qui permet d'écrire

$$X(z) = x_0 + x_1 z + x_2 z^2 + \ldots + x_n z^{-n}$$

- La fonction $X(z)$ est appelée la transformée en Z de $x(t)$.
- Propriété : la convolution de deux séries temporelles est équivalente au produit de leurs transformées en Z.

Applications

Filtrage en fréquence

- Le filtrage permet d'éliminer ou d'extraire certaines caractéristiques du signal ;
- Le filtre linéaire invariant est l'outil permettant cette opération ;
- Définition :
  - système linéaire (c'est-à-dire satisfaisant le principe de superposition) et dont les caractéristiques sont indépendantes du temps ;
  - système dont la relation entrée-sortie est un produit de *convolution* ;

Filtrage en fréquence

- Pour caractériser le filtre
  - On définit la réponse impulsionnelle $h[n]$, la sortie du filtre à une entrée de type impulsion de Dirac ;
  - On définit la *réponse fréquentielle* $H(k)$ (ou *fonction de transfert*) la transformée de Fourier de $h[n]$.

$$x[n] \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow y[n]$$

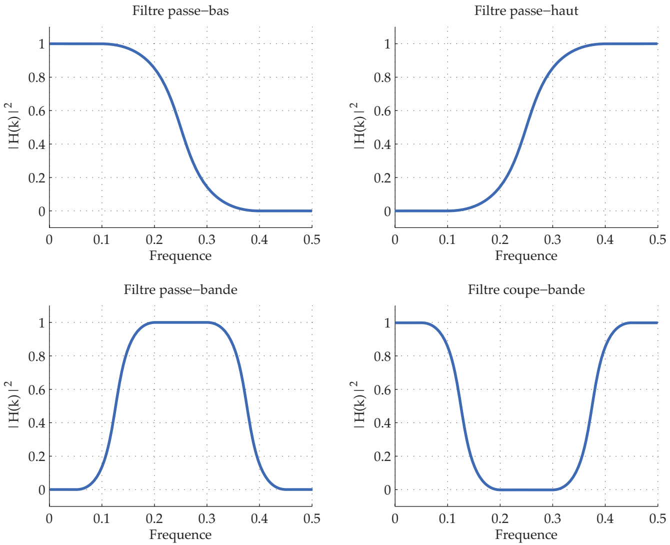
$$X(k) \longrightarrow \boxed{H(k)} \longrightarrow Y(k)$$

$$y[n] = x[n] * h[n] \qquad Y(k) = X(k) \cdot H(k)$$

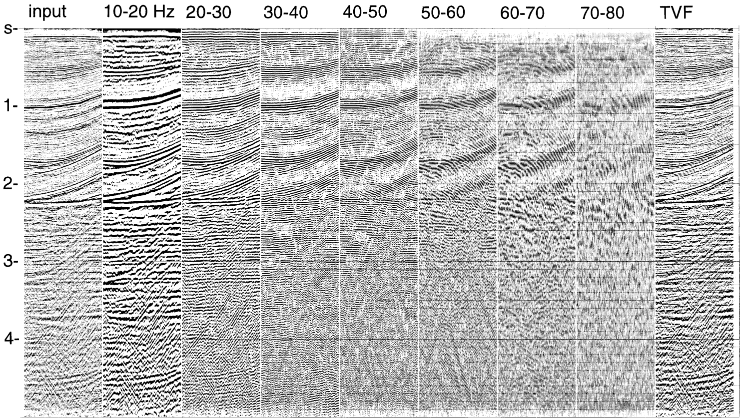
Filtrage en fréquence

- On retrouve quatre grands types de filtres
  1. les filtres passe-bas qui atténuent fortement les hautes fréquences ;
  2. les filtres passe-haut qui atténuent les basses fréquences ;
  3. les filtres passe-bande qui atténuent les basses et les hautes fréquences en laissant un intervalle de fréquence sans grand changement ;
  4. les filtres coupe-bande qui suppriment un intervalle de fréquence sans trop altérer les hautes et les basses fréquences.

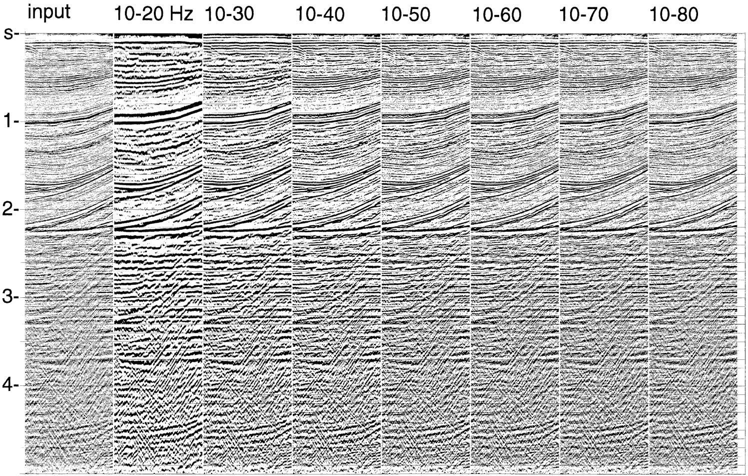
Filtrage en fréquence



Filtrage en fréquence



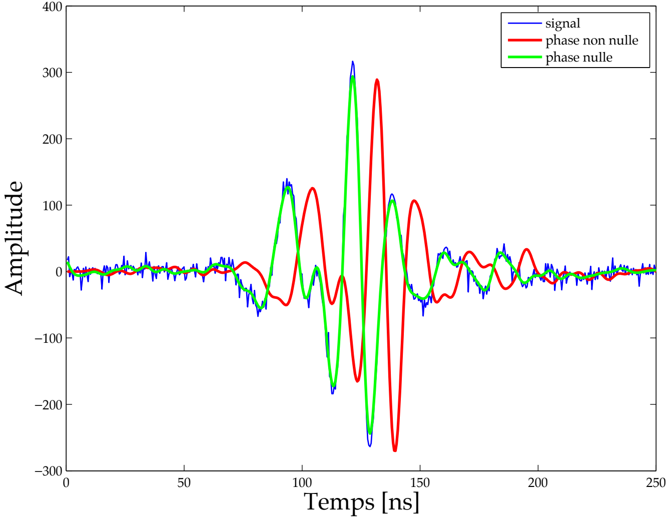
TVF : *time-varying filter*


input
10-20 Hz
10-30
10-40
10-50
10-60
10-70
10-80
s-
1-
2-
3-
4-

Filtrage en fréquence

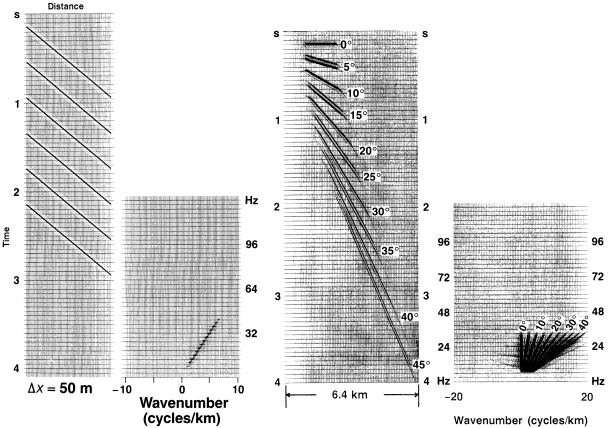
- Clairement, les paramètres du filtre sont fonction de l'objectif visé ;
- En général, on va s'attarder à la forme du *module* de la réponse fréquentielle (RF) ;
- La phase de la RF est tout aussi importante car elle peut avoir un impact important sur le signal de sortie ;
- Si la phase du filtre est non nulle, un retard est occasionné (voir éq. (15)) ;
  - astuce : filtrer deux fois en «retournant» la séquence à filtrer la 2^e fois (effet : annule la phase et élève le module de H au carré) ;
- En général, la conception des filtres est un problème d'optimisation.

Filtrage en fréquence



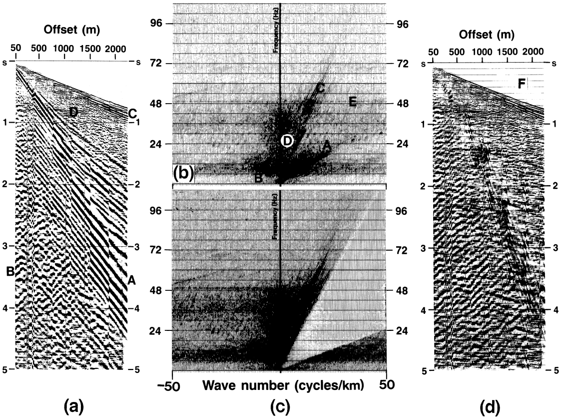
Filtrage dans le domaine f–k

- La représentation d'une section sismique dans le domaine f–k fait ressortir les structures linéaires :



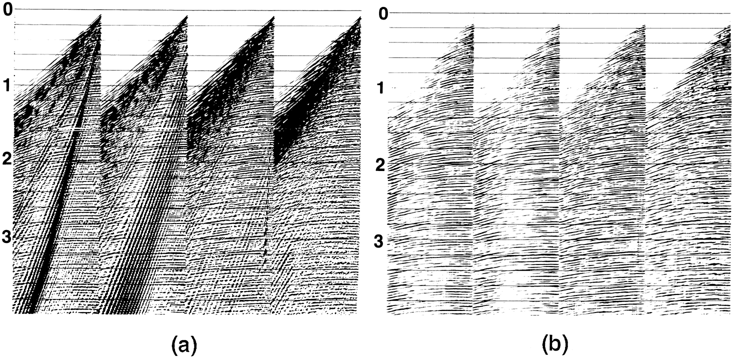
Filtrage dans le domaine f–k

- En éliminant une portion des données dans le domaine f–k, on élimine les événements associés à ces fréquences et nombres d'onde ;



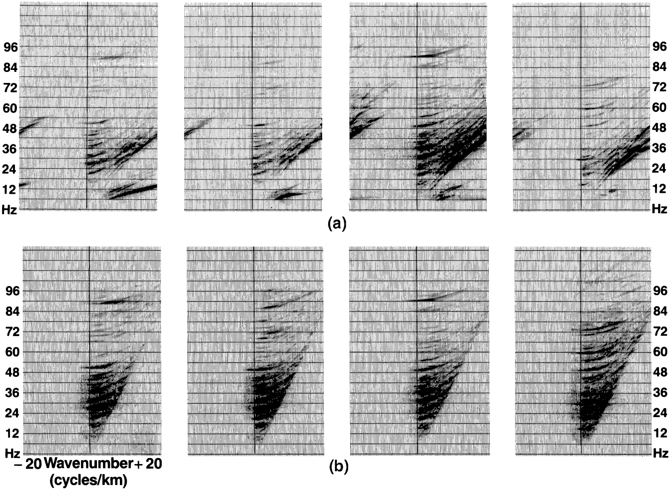
Filtrage du bruit linéaire

Élimination du *ground-roll*



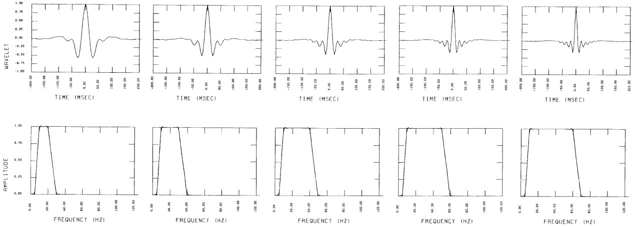
(a) avant filtre f–k (b) après filtre f–k

Spectres f–k des sections précédentes (a) non filtrés, (b) filtrés



Considérations pratiques

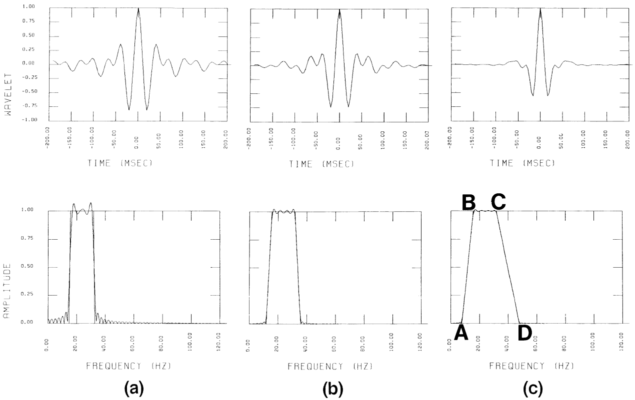
- Pour éviter les problèmes de *wraparound*, il faut étendre la section en ajoutant des zéros (au détriment de la rapidité des calculs) ;
- La largeur de la fenêtre de rejet ne doit pas être trop étroite, sinon on perd en résolution ;



(a) (b) (c) (d) (e)

Considérations pratiques

- Les limites de la fenêtre de rejet doivent être en pente, sinon problème de fuites spectrales ;



Considérations pratiques

- En présence d'*aliasing* spatial, la performance des filtres f–k est faible. Un solution peut être de faire la correction NMO avant d'appliquer le filtre f–k, de façon à redresser les événements, et de faire la NMO inverse une fois le filtre appliqué ;
- Le bruit cohérent linéaire est affecté par la topographie et les hétérogénéités du mort-terrain. En conséquence, il faut appliquer les corrections statiques avant de faire du filtrage dans le domaine f–k.

Références

Références

Deux classiques

- Bracewell, R. N. (2000). *The Fourier Transform and Its Applications*. McGraw-Hill, 3^{rd} edition
- Papoulis, A. (1991). *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes*. McGraw-Hill, 3rd edition

Spécifiques à la géophysique

- Coppens, F., Glangeaud, F., and Mari, J.-L. (2001). *Traitement du signal pour géologues et géophysiciens. 2 Techniques de base*. Editions Technip
- Robinson, E. A. and Treitel, S. (1980). *Geophysical Signal Analysis*. Prentice-Hall
- Yilmaz, O. (2001). *Seismic data Analysis*. Number 10 in Investigations in Geophysics. Society of Exploration Geophysicists, Tulsa, Oklahoma