

## MODÉLISATION ET INVERSION EN GÉOPHYSIQUE **2 - Gravimétrie et magnétisme**

Bernard Giroux  
(bernard.giroux@ete.inrs.ca)

Institut national de la recherche scientifique  
Centre Eau Terre Environnement

Version 1.2.0  
Hiver 2018

**Gravimétrie**

Théorie

Prisme rectangulaire droit

Prisme polygonal droit

Polyèdre

**Magnétisme**

Références

Annexes

# Gravimétrie

[Gravimétrie](#)[Théorie](#)[Prisme rectangulaire droit](#)[Prisme polygonal droit](#)[Polyèdre](#)[Magnétisme](#)[Références](#)[Annexes](#)

- Le potentiel gravitationnel obéit au **principe de superposition** : le potentiel gravitationnel d'un nombre fini de masses est la somme de l'attraction de chacune de ces masses.
- Si les masses sont infinitésimales ( $dm$ ), le potentiel  $U$  observé en  $P$  est ainsi

$$U(P) = G \int_V \frac{dm}{r} \quad (1)$$

ou bien

$$U(P) = G \int_V \frac{\rho(Q)}{r} dv, \quad (2)$$

où  $G$  est la constante gravitationnelle,  $V$  est le volume occupé par la masse totale,  $\rho$  est la densité,  $Q$  est le point d'intégration, et  $r$  est la distance entre  $P$  et  $Q$ .

Gravimétrie

Théorie

Prisme rectangulaire droit

Prisme polygonal droit

Polyèdre

Magnétisme

Références

Annexes

- L'attraction  $\mathbf{g}$  causée par un volume de densité  $\rho$  est le gradient du potentiel :

$$\begin{aligned}\mathbf{g} &= \nabla U \\ &= -G \int_V \rho \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} dv.\end{aligned}\quad (3)$$

- Dans la pratique, seule la composante verticale de  $\mathbf{g}$  est mesurée, ce qui donne (en coordonnées cartésiennes)

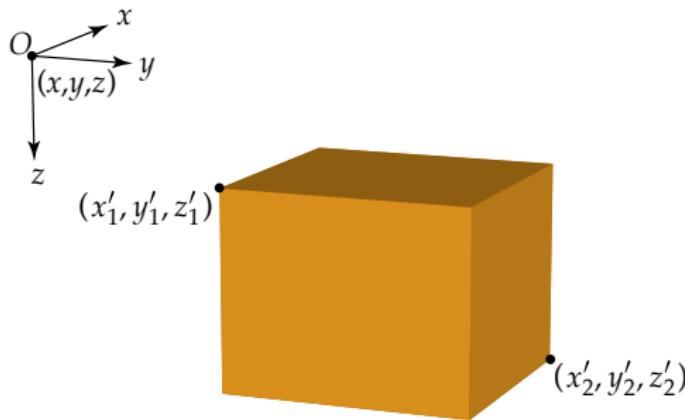
$$\begin{aligned}g(x, y, z) &= \frac{\partial U}{\partial z} \\ &= -G \int_{z'} \int_{y'} \int_{x'} \rho(x', y', z') \frac{z - z'}{r^3} dx' dy' dz',\end{aligned}\quad (4)$$

où  $r = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$ .

[Gravimétrie](#)[Théorie](#)[Prisme rectangulaire droit](#)[Prisme polygonal droit](#)[Polyèdre](#)[Magnétisme](#)[Références](#)[Annexes](#)

- Typiquement, la modélisation en gravimétrie consiste à calculer  $g(x, y, z)$  avec l'équation (4) pour toutes les cellules du modèle géologique.
- Mais dans les faits, on mesure la **variation de  $g$**  par rapport à un point de référence donné, pour estimer le **contraste de densité** ( $\Delta\rho$ ) par rapport à un encaissant ;
  - *On peut donc ne calculer que la réponse des corps qui ont une densité différente de celle de l'encaissant.*
- La solution de l'intégrale triple dépend de la discréttisation du corps.
- Des solutions particulières ont été proposées pour des
  - prismes rectangulaires droits ;
  - prismes polygonaux droits ;
  - polyèdres.

# Théorie - Prisme rectangulaire droit

[Gravimétrie](#)[Théorie](#)[\*\*Prisme rectangulaire droit\*\*](#)[Prisme polygonal droit](#)[Polyèdre](#)[Magnétisme](#)[Références](#)[Annexes](#)

- Pour un prisme rectangulaire droit défini par les limites  $x'_1 \leq x \leq x'_2$ ,  $y'_1 \leq y \leq y'_2$  et  $z'_1 \leq z \leq z'_2$ , la composante verticale  $g$  au point d'observation  $O$  vaut

$$g = -G\rho \int_{x'_1}^{x'_2} \int_{y'_1}^{y'_2} \int_{z'_1}^{z'_2} \frac{z - z'}{r^3} dx' dy' dz'. \quad (5)$$

# Théorie - Prisme rectangulaire droit

Gravimétrie

Théorie

Prisme rectangulaire droit

Prisme polygonal droit

Polyèdre

Magnétisme

Références

Annexes

- Plusieurs solutions ont été proposées pour le cas du prisme rectangulaire droit.
- Il est important de noter que *certaines solutions ne sont pas valides si le point d'observation est sur un des coins, une des faces, ou à l'intérieur du prisme.*
- Une solution valide sur les faces (excluant les arêtes) et à l'intérieur est (Li et Chouteau, 1998)

$$g = -G\rho \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 \mu_{ijk} \\ \times \left[ x_i \ln(y_j + r_{ijk}) + y_j \ln(x_i + r_{ijk}) + z_k \arctan \frac{z_k r_{ijk}}{x_i y_j} \right], \quad (6)$$

où  $x_i = x - x'_i$ ,  $y_j = y - y'_j$ ,  $z_k = z - z'_k$ ,

$r_{ijk} = \sqrt{x_i^2 + y_j^2 + z_k^2}$  et  $\mu_{ijk} = (-1)^i(-1)^j(-1)^k$ .

Gravimétrie

Théorie

**Prisme rectangulaire droit**

Prisme polygonal droit

Polyèdre

Magnétisme

Références

Annexes

- Note relative à l'implémentation de l'équation (6) sous Python/MATLAB :
  - la fonction atan2 (ou arctan2 sous numpy) doit être utilisée au détriment de atan (ou arctan sous numpy).

Pourquoi ?

# Exercice - Prisme rectangulaire droit

Gravimétrie

Théorie

Prisme rectangulaire droit

Prisme polygonal droit

Polyèdre

Magnétisme

Références

Annexes

- Créez un fichier Python `potent.py`;
- Dans ce fichier, écrivez une fonction `prd` pour calculer la réponse d'un prisme rectangulaire droit;
- Votre fonction doit prendre les variables suivantes en entrée :
  - `rho` : densité [ g/cm<sup>3</sup> ]
  - `x0` : coordonnées [x y z] du point d'observation [ m ]
  - `x` : coord inférieure et supérieure du prisme selon x [ m ]
  - `y` : coord inférieure et supérieure du prisme selon y [ m ]
  - `z` : coord inférieure et supérieure du prisme selon z [ m ]et doit retourner la réponse en mgal.
- Testez votre routine avec les valeurs `rho=0.2`,  
`x=(10, 15)`, `y=(20, 25)` et `z=(5, 15)` pour
  - `x0=(0, 0, 0)`
  - `x0=(12.5, 22.5, 10)`

# Théorie - Prisme polygonal droit

Gravimétrie

Théorie

Prisme rectangulaire droit

Prisme polygonal droit

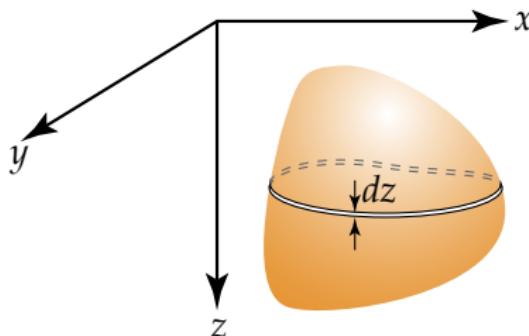
Polyèdre

Magnétisme

Références

Annexes

- Une autre approche longtemps populaire a été celle du prisme polygonal droit.
- Un empilement de prismes minces permet d'approximer la géométrie des corps étudiés.
- Cette approche a souvent été utilisée pour calculer les corrections de terrain car elle permet de bien épouser la topographie.



# Théorie - Prisme polygonal droit

Gravimétrie

Théorie

Prisme rectangulaire droit

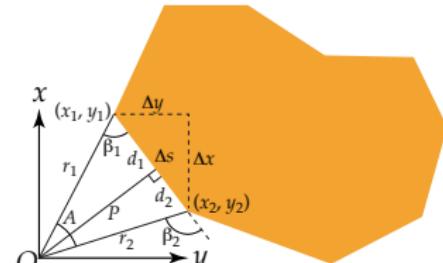
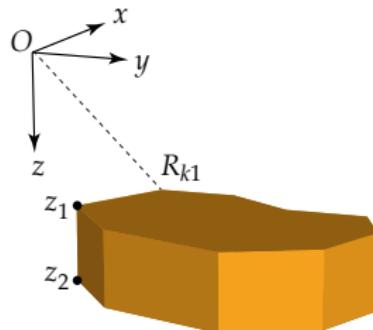
Prisme polygonal droit

Polyèdre

Magnétisme

Références

Annexes



- L'approche consiste à calculer la contribution de chacun des côtés verticaux du prisme.
- Convention retenue pour la géométrie décrite dans cette page :
  - Pour le  $i^e$  côté, l'indice  $k$  de  $R_{kj}$  correspond au sommet alors que  $j$  indique la face horizontale la plus proche de  $O$  ( $j = 1$ ) ou la plus éloignée ( $j = 2$ );
  - $k = 1$  correspond au 1<sup>e</sup> sommet (en sens horaire) et  $k = 2$  correspond au second.

# Théorie - Prisme polygonal droit

[Gravimétrie](#)[Théorie](#)[Prisme rectangulaire droit](#)[Prisme polygonal droit](#)[Polyèdre](#)[Magnétisme](#)[Références](#)[Annexes](#)

- L'équation pour un prisme à  $n$  côtés est (Plouff, 1976)

$$g = -G\rho s_m \sum_{i=1}^n [s_p A(z_2 - z_1) + z_2 \left( \arctan \frac{z_2 d_1}{PR_{12}} - \arctan \frac{z_2 d_2}{PR_{22}} \right) - z_1 \left( \arctan \frac{z_1 d_1}{PR_{11}} - \arctan \frac{z_1 d_2}{PR_{21}} \right) - P \ln \left( \frac{R_{22} + d_2}{R_{12} + d_1} \frac{R_{11} + d_1}{R_{21} + d_2} \right)], \quad (7)$$

où

$$P = \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{\Delta s} \quad (8)$$

$$\Delta s = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = |d_1 - d_2| \quad (9)$$

$$A = \arccos \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{r_1 r_2}. \quad (10)$$

# Théorie - Prisme polygonal droit

Gravimétrie

Théorie

Prisme rectangulaire droit

Prisme polygonal droit

Polyèdre

Magnétisme

Références

Annexes

- Dans l'équation (7), la variable  $s_m = 1$  si le centre de masse du prisme est sous le point  $O$ , et  $-1$  dans le cas contraire.
- Également,  $s_p = 1$  si  $P > 0$  et  $s_p = -1$  si  $P < 0$ .
- Dans le cas  $P = 0$ , la contribution du côté est nulle.
- Note : la somme des termes  $s_p A(z_2 - z_1)$ 
  - vaut  $2\pi$  si  $O$  est à l'intérieur du polygone;
  - est zéro si  $O$  est à l'extérieur du polygone;
  - vaut  $\pi$  si  $O$  est sur un côté;
  - est égal à l'angle interne si  $O$  est à l'intersection de deux côtés.

Comment en profiter pour accélérer les calculs ?

# Théorie - Polyèdre

Gravimétrie

Théorie

Prisme rectangulaire droit

Prisme polygonal droit

Polyèdre

Magnétisme

Références

Annexes

- Le polyèdre constitue la forme géométrique la plus versatile pour représenter des corps de géométrie arbitraire.



# Théorie - Polyèdre

Gravimétrie

Théorie

Prisme rectangulaire droit

Prisme polygonal droit

Polyèdre

Magnétisme

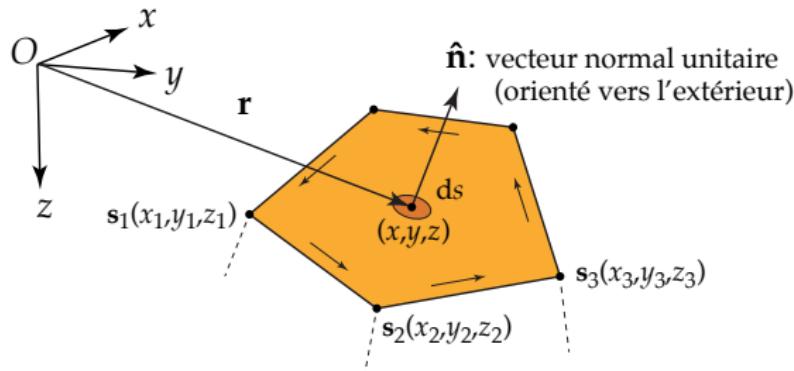
Références

Annexes

- Singh et Guptasarma (2001) : En vertu du théorème de flux-divergence, l'intégrale sur le volume de l'équation (3) peut être remplacée par une intégrale de surface.
- Il est alors possible d'évaluer la composante de la gravité  $\mathbf{g}$  dans la direction du vecteur unitaire  $\hat{\mathbf{a}}$  par

$$\mathbf{g} \cdot \hat{\mathbf{a}} = -G\rho \iint_S \left( \frac{1}{r} \right) \hat{\mathbf{a}} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, ds, \quad (11)$$

où  $r$  est la distance entre  $O$  et l'aire  $ds$  à la surface du corps, et  $\hat{\mathbf{n}}$  est le vecteur unitaire normal à  $ds$ .



# Théorie - Polyèdre

Gravimétrie

Théorie

Prisme rectangulaire droit

Prisme polygonal droit

Polyèdre

Magnétisme

Références

Annexes

- L'élément  $ds$  produit une attraction orientée selon  $\mathbf{r}$  mais de sens contraire, ce qui permet de remplacer  $\hat{\mathbf{a}}$  par  $-(\mathbf{r}/r)$ .
- Une expression pratique est obtenue en définissant une densité de masse surfacique ( $\sigma'$ ) par

$$\sigma' = \rho \mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{n}}. \quad (12)$$

- L'attraction d'un corps est la même que l'attraction produite par une distribution fictive de  $\sigma'$  sur la surface du corps.
- Nous avons maintenant

$$\begin{aligned} \mathbf{g} &= G\rho \iint (1/r)(\mathbf{r}/r) \cdot \hat{\mathbf{n}} \, ds \\ &= G \iint \left(\sigma'/r^2\right) \, ds. \end{aligned} \quad (13)$$

# Théorie - Polyèdre

Gravimétrie

Théorie

Prisme rectangulaire droit

Prisme polygonal droit

Polyèdre

Magnétisme

Références

Annexes

- La composante verticale  $g$  est obtenue en multipliant l'intégrande par le rapport  $(z/r)$ .
- Dans le cas où le corps est délimité par un polyèdre, i.e. un ensemble de  $n_f$  faces planes, nous avons

$$g = G \sum_{i=1}^{n_f} \rho d_i \iint_i \left( \frac{z}{r^3} \right) ds, \quad (14)$$

où  $d_i = \mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{n}}_i$ .

- Le vecteur  $\hat{\mathbf{n}}_i$  peut être obtenu à partir du produit vectoriel des arêtes de la face  $i$  :
  - Soient  $n_s$  sommets  $\mathbf{s}_{i,k}$  appartenant à la face  $i$ , où l'indice  $k$  définit l'ordre antihoraire lorsque l'objet est vu de l'extérieur ;
  - le vecteur  $\mathbf{n}_i$  vaut

$$\mathbf{n}_i = \sum_{l=2}^{n_s-1} (\mathbf{s}_{i,l} - \mathbf{s}_{i,1}) \times (\mathbf{s}_{i,l+1} - \mathbf{s}_{i,1}), \quad (15)$$

et, par définition,

$$\hat{\mathbf{n}}_i = \frac{\mathbf{n}_i}{|\mathbf{n}_i|}. \quad (16)$$

# Théorie - Polyèdre

Gravimétrie  
Théorie  
Prisme rectangulaire droit  
Prisme polygonal droit  
Polyèdre  
Magnétisme  
Références  
Annexes

- Pour arriver à une expression utilisable numériquement, l'intégrale de surface est convertie en intégrale de contour.
- On peut montrer que

$$\iint_i \left( \frac{z}{r^3} \right) ds = - (n\Omega + mP_i - \ell Q_i), \quad (17)$$

où  $(\ell, m, n)$  sont les composantes de  $\hat{\mathbf{n}}_i$ ,  $\Omega$  est l'angle solide de la face  $i$  au point  $O$ , et où  $P_i$  et  $Q_i$  sont les sommes

$$P_i = \sum_{j=1}^{n_a} P_{ij} \quad \text{et} \quad Q_i = \sum_{j=1}^{n_a} Q_{ij}, \quad (18)$$

avec  $n_a$  le nombre d'arêtes sur la face  $i$ .

# Théorie - Polyèdre

Gravimétrie

Théorie

Prisme rectangulaire droit

Prisme polygonal droit

Polyèdre

Magnétisme

Références

Annexes

- Les composantes  $P_{ij}$  et  $Q_{ij}$  sont égales à

$$P_{ij} = IL_x \quad \text{et} \quad Q_{ij} = IL_y \quad (19)$$

avec  $L_x = x_2 - x_1$  et  $L_y = y_2 - y_1$  où  $(x_1, y_1, z_1)$  et  $(x_2, y_2, z_2)$  sont les coordonnées du début et de la fin du segment, et où

$$I = \frac{1}{L} \ln \left[ \frac{\sqrt{L^2 + b + r_1^2} + L + \frac{b}{2L}}{r_1 + \frac{b}{2L}} \right] \quad \text{si } (r_1 + b/2L) \neq 0 \quad (20)$$

et

$$I = \frac{1}{L} \ln \left[ \frac{|L - r_1|}{r_1} \right] \quad \text{si } (r_1 + b/2L) = 0, \quad (21)$$

avec

$$L = \sqrt{L_x^2 + L_y^2 + L_z^2}, \quad b = 2(x_1 L_x + y_1 L_y + z_1 L_z) \quad (22)$$

Gravimétrie

Théorie

Prisme rectangulaire droit

Prisme polygonal droit

Polyèdre

Magnétisme

Références

Annexes

- Calcul des quantités  $L_x$ ,  $L_y$  et  $L_z$ 
  - Qu'est-il susceptible de se produire si l'arête est de très faible dimension par rapport à sa distance à l'origine ?

# kron - une commande numpy utile

Gravimétrie

Théorie

Prisme rectangulaire droit

Prisme polygonal droit

Polyèdre

Magnétisme

Références

Annexes

- À l'invite de commande python, entrez `help(np.kron)`
- Essayez `np.kron([[1,2],[3,4]], np.ones((2,1)))`
- Essayez `np.kron([[1,2],[3,4]], np.ones((1,2)))`
- Exercice :
  - Soient des points définis aux coordonnées
    - `x = np.arange(0.0,0.8,0.2)`
    - `y = np.arange(0.1,0.5,0.1)`
    - `z = np.arange(-0.3,0.4,0.3)`
  - Construisez une matrice  $n \times 3$  contenant les coordonnées  $x, y, z$  de chacun des points, un point par ligne
  - Faites varier d'abord la coordonnée  $z$ , ensuite la coordonnée  $y$  et finalement la coordonnée  $x$ , i.e.

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_1 & y_1 & z_2 \\ x_1 & y_2 & z_1 \\ x_1 & y_2 & z_2 \\ x_2 & y_1 & z_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

# Système matriciel

Gravimétrie

Théorie

Prisme rectangulaire droit

Prisme polygonal droit

Polyèdre

Magnétisme

Références

Annexes

- Lorsque le problème direct est linéaire, comme en gravimétrie, ou qu'il a été linéarisé, il est fréquent en inversion de le représenter par un produit matriciel, souvent noté

$$\mathbf{G}\mathbf{m} = \mathbf{d}, \quad (23)$$

où

- $\mathbf{m}$  est un vecteur  $M \times 1$  contenant les paramètres du modèle (la densité des corps en gravimétrie);
  - $\mathbf{d}$  est le vecteur  $N \times 1$  des données;
  - $\mathbf{G}$  est l'opérateur direct (*data kernel*), de taille  $N \times M$ ;
  - $\mathbf{G}(n, m) \equiv g_{nm}$ , la contribution du  $m^e$  corps à la  $n^e$  donnée.
- Pour une grille régulière, constituée de prismes rectangulaires droits, on aurait

$$g_{nm} = -G \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 \mu_{ijk} \left[ x_i \ln(y_j + r_{ijk}) + y_j \ln(x_i + r_{ijk}) + z_k \arctan \frac{z_k r_{ijk}}{x_i y_j} \right],$$

où  $x_i = x(n) - x'_i(m)$ ,  $y_j = y(n) - y'_j(m)$ , et  
 $z_k = z(n) - z'_k(m)$ .

# Système matriciel - Exercice

Gravimétrie

Théorie

Prisme rectangulaire droit

Prisme polygonal droit

Polyèdre

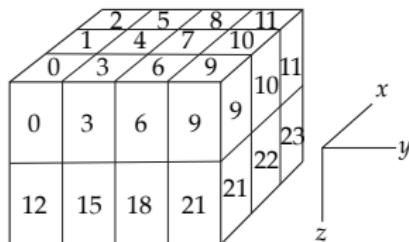
Magnétisme

Références

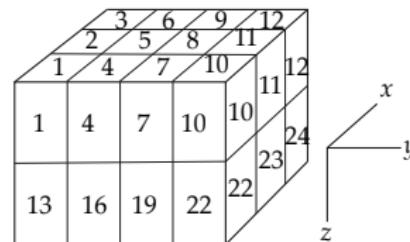
Annexes

Implémenter la construction de la matrice **G** pour une grille régulière (prismes rectangulaires droits)

- Pour construire le système matriciel, il faut se donner une convention pour numérotier les prismes ;
- Une convention possible est de faire varier
  - d'abord le numéro de ligne (indice  $i$  selon l'axe des  $x$ ),
  - ensuite le numéro de colonne (indice  $j$  selon l'axe des  $y$ ),
  - finalement le numéro de couche (indice  $k$  selon l'axe des  $z$ ).



Python



MATLAB

# Système matriciel - Exercice

Gravimétrie  
Théorie  
Prisme rectangulaire droit  
Prisme polygonal droit  
Polyèdre  
Magnétisme  
Références  
Annexes

- Créez une classe `Grille` pour gérer des grilles régulières (prismes rectangulaires droits)
- Le constructeur sera

```
class Grille:  
    def __init__(self, x, y, z):  
        """  
            Input  
            x: coordonnées des noeuds selon x (nx x 1)  
            y: coordonnées des noeuds selon y (ny x 1)  
            z: coordonnées des noeuds selon z (nz x 1)  
        """  
        self.x = x  
        self.y = y  
        self.z = z
```

- Définissez une méthode `ind` qui retourne l'indice  $m$  d'un prisme dans la grille, à partir de ses indices  $(i, j, k)$

# Système matriciel - Exercice

Gravimétrie  
Théorie  
Prisme rectangulaire droit  
Prisme polygonal droit  
Polyèdre  
Magnétisme  
Références  
Annexes

- Ajoutez finalement à votre classe `Grille` une méthode `prd_G`, qui utilise votre fonction `prd`, pour construire la matrice **G**

```
def prd_G(self, x0):  
    """
```

*PRD\_G – Opérateur direct gravimétrique pour une grille de prismes rectangulaires droits*

*G = prd\_G(g, x0)*

*Input*

*x0: coordonnées des points d'observation (N x 3)*

*Output*

*G: opérateur direct (array numpy N x M)*

"""

Gravimétrie  
Théorie  
Prisme rectangulaire droit  
Prisme polygonal droit  
Polyèdre  
Magnétisme  
Références  
Annexes

- Testez votre fonction avec les commandes

```
g = Grille(x=np.arange(-8.5,9.0),  
            y=np.arange(-10.5,11.0),  
            z=np.arange(10.0))  
  
x0 = np.array([[0.0, 0.0, 0.0],  
               [1.0, 0.0, 0.0],  
               [2.0, 0.0, 0.0]])  
  
G = g.prd_G(x0)  
  
rho = np.zeros((g.nc,))  
rho[ g.ind(8,10,5) ] = 1.0  
  
gz = np.dot(G, rho)
```

Gravimétrie

**Magnétisme**

Équations de Maxwell

Modèle linéaire

Volumes finis

Références

Annexes

# Magnétisme

# Équations de Maxwell

Gravimétrie  
Magnétisme  
Équations de Maxwell  
Modèle linéaire  
Volumes finis  
  
Références  
Annexes

- Le problème direct en magnétisme est solutionné en partant des équations de Maxwell :

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (24)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (25)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (26)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (27)$$

où

- $\mathbf{B}$  est le champ d'induction;
- $\mathbf{H}$  est le champ magnétique;
- $\mathbf{D}$  est le champ de déplacement;
- $\mathbf{E}$  est le champ électrique;
- $\rho$  est la densité de charge;
- $\mathbf{J}$  est la densité de courant électrique.

# Équations constitutives

Gravimétrie  
Magnétisme  
Équations de Maxwell  
Modèle linéaire  
Volumes finis  
Références  
Annexes

- Les grandeurs électriques  $\mathbf{D}$  et  $\mathbf{E}$  ainsi que les grandeurs magnétiques  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{H}$  sont liées par les équations constitutives :

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (28)$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) \quad (29)$$

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad (30)$$

où

- $\epsilon_0$  est la permittivité diélectrique du vide;
- $\mu_0$  est la perméabilité du vide;
- $\sigma$  est la conductivité électrique;
- $\mathbf{P}$  est la polarisation;
- $\mathbf{M}$  est l'aimantation.

# Équations constitutives

Gravimétrie

Magnétisme

Équations de Maxwell

Modèle linéaire

Volumes finis

Références

Annexes

- Dans les matériaux linéaires isotropes sans pertes,  $\mathbf{P}$  et  $\mathbf{M}$  sont des fonctions linéaires de  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{H}$  respectivement, i.e.

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} = \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E} \quad (31)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H} \quad (32)$$

avec  $\epsilon_r$  la permittivité relative et  $\mu_r$  la perméabilité relative.

- Si le milieu est anisotrope (et linéaire sans pertes),  $\epsilon_r$  et  $\mu_r$  deviennent les tenseurs  $\bar{\epsilon}_r$  et  $\bar{\mu}_r$  :

$$\bar{\epsilon}_r = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{bmatrix} \quad (33)$$

$$\bar{\mu}_r = \begin{bmatrix} \mu_{xx} & \mu_{xy} & \mu_{xz} \\ \mu_{yx} & \mu_{yy} & \mu_{yz} \\ \mu_{zx} & \mu_{zy} & \mu_{zz} \end{bmatrix} \quad (34)$$

Gravimétrie  
Magnétisme  
Équations de Maxwell  
Modèle linéaire  
Volumes finis  
Références  
Annexes

- En unités SI,

- $\mathbf{B}$  est exprimé en tesla (T) ou weber/m<sup>2</sup>;
- $\mathbf{H}$  est exprimé en A/m;
- $\mu_0$  vaut  $4\pi \times 10^{-7}$  (henry/m).
- $\chi$  est la susceptibilité (sans dimension).

- Dans le vide (ou dans l'air)

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}. \quad (35)$$

- Si la matière est polarisable, nous avons

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) \quad (36)$$

$$= \mu_0 (\mathbf{H} + \chi \mathbf{H}) \quad (37)$$

$$= \mu_0 (1 + \chi) \mathbf{H} \quad (38)$$

$$= \mu \mathbf{H}, \quad (39)$$

$$\mu = \mu_0 (1 + \chi) \quad (40)$$

- $\chi$  est la susceptibilité (sans dimension).

[Gravimétrie](#)[Magnétisme](#)[Équations de Maxwell](#)[Modèle linéaire](#)[Volumes finis](#)[Références](#)[Annexes](#)

- Si la matière possède une aimantation rémanente, elle s'ajoute à l'aimantation induite.
- L'aimantation totale  $\mathbf{M}$  vaut

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_i + \mathbf{M}_r \quad (41)$$

$$= \chi \mathbf{H} + \mathbf{M}_r \quad (42)$$

où l'aimantation induite est  $\mathbf{M}_i$  et l'aimantation rémanente est  $\mathbf{M}_r$ .

- Le tableau du lien suivant présente les unités en magnétisme : [http://www.ieemagnetics.org/index.php?option=com\\_content&view=article&id=118&Itemid=107](http://www.ieemagnetics.org/index.php?option=com_content&view=article&id=118&Itemid=107)

# Théorie - Modèle linéaire

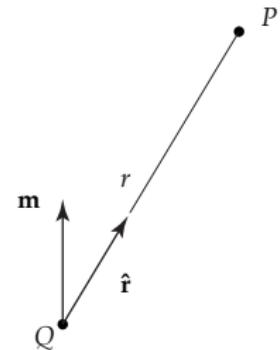
Gravimétrie  
Magnétisme  
Équations de Maxwell  
Modèle linéaire  
Volumes finis  
Références  
Annexes

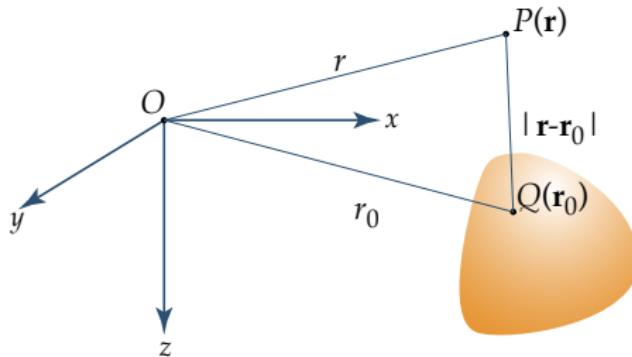
- Une approche simple et rapide consiste à considérer qu'un corps aimanté peut être représenté par une **somme de moments dipolaires  $\mathbf{m}_i$** . i.e.

$$\mathbf{M} = \frac{1}{V} \sum_i \mathbf{m}_i. \quad (43)$$

- Cette approche suppose que **les moments magnétiques sont faibles** et n'interagissent pas entre eux.
- Le potentiel magnétique d'un moment dipolaire est

$$V = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \cdot \hat{\mathbf{r}}}{r^2}. \quad (44)$$





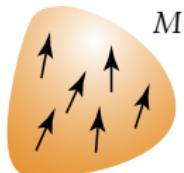
- Le champ magnétique d'un corps aimanté de volume  $V$ , observé au point  $P$  est

$$\mathbf{B} = -\nabla V = -\frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \int_V \mathbf{M} \cdot \nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} dv, \quad (45)$$

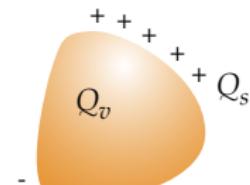
où  $\mu_0$  est la perméabilité magnétique du vide,  $\mathbf{M}$  est l'aimantation du corps, et  $\mathbf{r}_0$  est la position de l'élément de volume  $dv$ .

Gravimétrie  
Magnétisme  
Équations de Maxwell  
Modèle linéaire  
Volumes finis  
Références  
Annexes

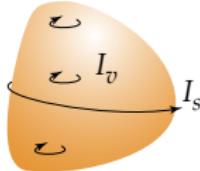
- L'aimantation du corps peut être considérée selon différents modèles



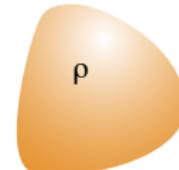
Volume d'aimantation



Charges surfaciques et volumiques



Courants surfaciques et volumiques



Relation de Poisson

# Théorie - Volume d'aimantation

Gravimétrie  
Magnétisme  
Équations de Maxwell  
Modèle linéaire  
Volumes finis  
Références  
Annexes

- Le modèle du volume d'aimantation s'avère pratique si on peut décomposer le corps en éléments de volume de faibles dimensions (comparativement à la distance au pt d'observation).
- Un  $i^e$  élément de volume  $V_i$  peut être vu comme un dipôle de moment magnétique

$$\mathbf{m}_i = V_i \chi_m \mathbf{H}, \quad (46)$$

où  $\chi_m$  est sa susceptibilité magnétique et  $\mathbf{H}$  est le champ magnétique terrestre.

- Comme on a vu, l'aimantation du corps vaut

$$\mathbf{M} = \frac{1}{V} \sum_i \mathbf{m}_i.$$

# Théorie - Volume d'aimantation

Gravimétrie  
Magnétisme  
Équations de Maxwell  
Modèle linéaire  
Volumes finis  
Références  
Annexes

- Le champ magnétique d'un dipôle  $\mathbf{m}_i$  à une distance  $\mathbf{r}_i$  du point d'observation est

$$\mathbf{B}_i = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \frac{3(\mathbf{m}_i \cdot \mathbf{r}_i) \mathbf{r}_i}{r_i^5} - \frac{\mathbf{m}_i}{r_i^3} \right]. \quad (47)$$

- Le champ mesuré à ce point d'observation est

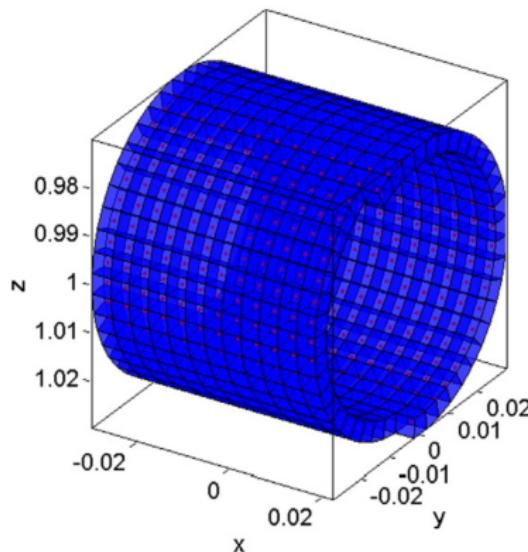
$$\mathbf{B} = \sum_{i=1}^N \mathbf{B}_i + \mu_0 \mathbf{H}, \quad (48)$$

où  $N$  est le nombre de dipôles.

# Exemple - Volume d'aimantation

Gravimétrie  
Magnétisme  
Équations de Maxwell  
Modèle linéaire  
Volumes finis  
Références  
Annexes

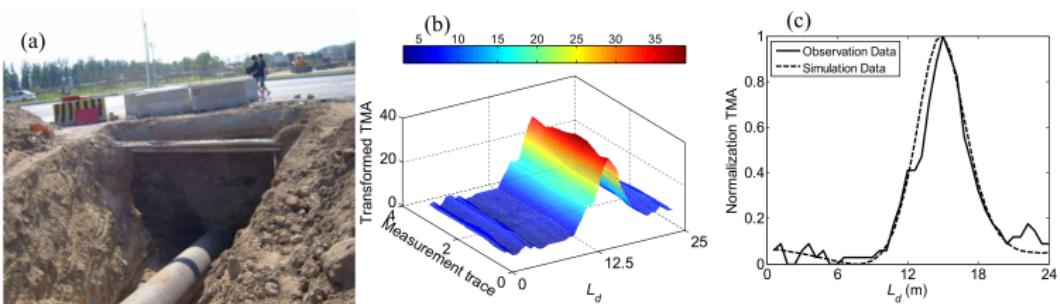
- Guo *et al.* (2015) ont utilisé l'approche du volume d'aimantation pour modéliser la réponse de conduits ferreux.
- Le conduit est discréteisé de sections cylindriques divisées en éléments :



# Exemple - Volume d'aimantation

Gravimétrie  
Magnétisme  
Équations de Maxwell  
Modèle linéaire  
Volumes finis  
Références  
Annexes

- La démagnétisation est prise en compte en ajustant la susceptibilité en fonction d'un facteur de démagnétisation (voir  en annexe) choisi de façon *ad hoc*.
- La réponse d'un conduit réel a pu être reproduite :



Gravimétrie  
Magnétisme  
Équations de Maxwell  
Modèle linéaire  
Volumes finis  
Références  
Annexes

- En utilisant l'identité  $\nabla \cdot (\phi \mathbf{A}) = \nabla \phi \cdot \mathbf{A} + \phi \nabla \cdot \mathbf{A}$  et le théorème de divergence, on a pour le potentiel magnétique

$$\begin{aligned} V &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \mathbf{M} \cdot \nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} dv \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \frac{\mathbf{M} \cdot \hat{\mathbf{n}}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} ds - \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\nabla \cdot \mathbf{M}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} dv \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \frac{Q_s}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} ds - \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{Q_v}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} dv. \end{aligned} \quad (49)$$

- Si l'aimantation est uniforme, la 2<sup>e</sup> intégrale est nulle.
- Les équations de Singh et Guptasarma (2001) peuvent être utilisées.

Gravimétrie  
Magnétisme  
Équations de Maxwell  
Modèle linéaire  
Volumes finis  
Références  
Annexes

- Pour un polyèdre d'aimantation  $\mathbf{M}$  ayant  $n_f$  faces, les composantes du champ magnétique sont

$$B_x = - \sum_{i=1}^{n_f} \sigma_i \iint_i \left( \frac{x}{r^3} \right) ds, \quad (50)$$

$$B_y = - \sum_{i=1}^{n_f} \sigma_i \iint_i \left( \frac{y}{r^3} \right) ds, \quad (51)$$

$$B_z = - \sum_{i=1}^{n_f} \sigma_i \iint_i \left( \frac{z}{r^3} \right) ds, \quad (52)$$

où  $\sigma_i \equiv Q_{si} = \mathbf{M} \cdot \hat{\mathbf{n}}_i$ .

Gravimétrie

Magnétisme

Équations de Maxwell

Modèle linéaire

Volumes finis

Références

Annexes

- En transformant l'intégrale de surface en intégrale de contour, nous avons

$$B_x = \sigma_i (\ell\Omega + nQ_i - mR_i), \quad (53)$$

$$B_y = \sigma_i (m\Omega + \ell R_i - nP_i), \quad (54)$$

$$B_z = \sigma_i (n\Omega + mP_i - \ell Q_i) \quad (55)$$

avec  $R_i = \sum_{j=1}^{n_a} R_{ij}$ , où pour chacune des  $n_a$  arête  $R_{ij} = IL_z$ .

# Théorie - Volumes finis

Gravimétrie  
Magnétisme  
Équations de Maxwell  
Modèle linéaire  
Volumes finis  
Références  
Annexes

- Le modèle du corps aimanté vu précédemment suppose que le champ induit est faible par rapport au champ primaire.
- Cette approximation n'est pas valide lorsque la susceptibilité est élevée, en particulier en présence de démagnétisation.
- Une **solution basée sur les équations de Maxwell** permet de tenir compte adéquatement des champs induits.
- La **méthode des volumes finis** (VF) permet de résoudre les équations de Maxwell pour le problème **magnétostatique** :
  - En l'absence de charges libres et de source de courant électrique et lorsqu'il n'y a pas de variation temporelle des champs, nous avons

$$\nabla \times \mathbf{H} = 0 \quad (56)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (57)$$

- La relation  $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$  est toujours valide.

# Théorie - Volumes finis

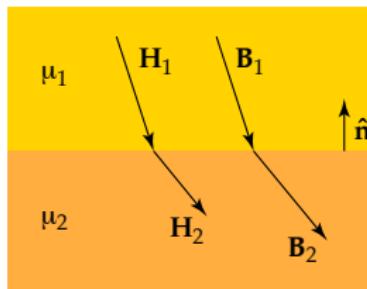
Gravimétrie  
Magnétisme  
Équations de Maxwell  
Modèle linéaire  
Volumes finis  
Références  
Annexes

- Avec la méthode des VF, le domaine est **discrétisé en voxels** à l'intérieur desquels la perméabilité  $\mu$  est constante, mais où  $\mu$  varie d'un voxel à l'autre.
- À l'interface entre deux voxels, *la composante tangentielle du champ  $\mathbf{H}$  est continue* :

$$\mathbf{H}_1 \times \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{H}_2 \times \hat{\mathbf{n}} \quad \text{ce qui implique} \quad \mu_1^{-1} \mathbf{B}_1 \times \hat{\mathbf{n}} = \mu_2^{-1} \mathbf{B}_2 \times \hat{\mathbf{n}} \quad (58)$$

- La *composante normale de l'induction  $\mathbf{B}$  est également continue* :

$$\mathbf{B}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{B}_2 \cdot \hat{\mathbf{n}} \quad \text{ce qui implique} \quad \mu_1 \mathbf{H}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}} = \mu_2 \mathbf{H}_2 \cdot \hat{\mathbf{n}} \quad (59)$$



# Théorie - Volumes finis

Gravimétrie  
Magnétisme  
Équations de Maxwell  
Modèle linéaire  
Volumes finis  
Références  
Annexes

- L'équation (56) permet d'exprimer le champ magnétique en fonction d'un **potentiel scalaire  $\phi$** , par

$$\mathbf{H} = \nabla\phi. \quad (60)$$

- L'équation (60), exprimée en terme de  $\mathbf{B}$  et  $\mu$ ,

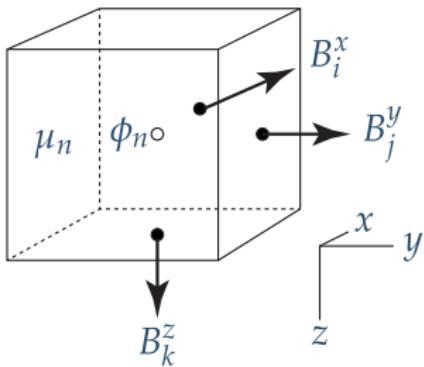
$$\mathbf{B} = \mu \nabla\phi \quad (61)$$

ainsi que les équations (57) et (59) seront discrétisées pour construire le système numérique à résoudre.

- L'approche présentée dans la suite est tirée de Lelièvre (2003).

# Théorie - Volumes finis

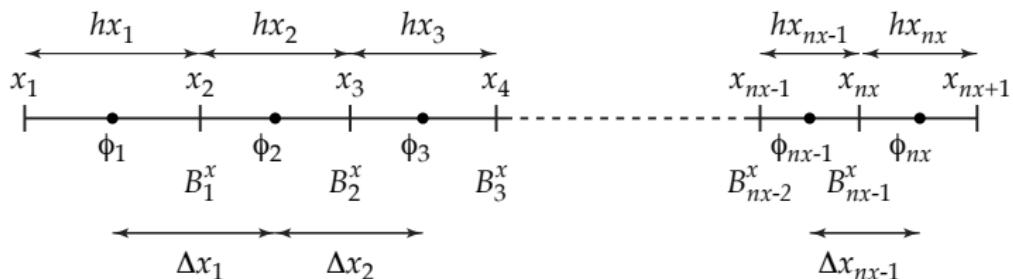
Gravimétrie  
Magnétisme  
Équations de Maxwell  
Modèle linéaire  
Volumes finis  
Références  
Annexes



- Le système discret repose sur une **grille décalée** :
  - les composantes du champ sont situées aux centres des faces du voxels;
  - le potentiel scalaire est localisé au centre du voxel.
- Ce schéma permet de respecter les conditions de continuités aux interfaces et de calculer la dérivée de  $\phi$  avec un opérateur de différence finie centrée.

# Théorie - Volumes finis

Gravimétrie  
Magnétisme  
Équations de Maxwell  
Modèle linéaire  
Volumes finis  
Références  
Annexes



- Le domaine est divisé en  $nc = nx \times ny \times nz$  voxels.
- Les coordonnées de noeuds sont

$$x_i : x_1, x_2, x_3, \dots, x_{nx+1} \quad (62)$$

$$y_j : y_1, y_2, y_3, \dots, y_{ny+1} \quad (63)$$

$$z_k : z_1, z_2, z_3, \dots, z_{nz+1} \quad (64)$$

# Théorie - Volumes finis

Gravimétrie  
Magnétisme  
Équations de Maxwell  
Modèle linéaire  
Volumes finis  
Références  
Annexes

- La longueur des côtés des voxels est

$$hx_i : hx_1, hx_2, \dots, hx_{nx} ; \quad hx_i = x_{i+1} - x_i \quad (65)$$

$$hy_j : hy_1, hy_2, \dots, hy_{ny} ; \quad hy_j = y_{j+1} - y_j \quad (66)$$

$$hz_k : hz_1, hz_2, \dots, hz_{nz} ; \quad hz_k = z_{k+1} - z_k \quad (67)$$

- Les coordonnées des centres des voxels sont

$$x_{i+1/2} : x_{1+1/2}, x_{2+1/2}, \dots, x_{nx+1/2} \quad (68)$$

$$y_{j+1/2} : y_{1+1/2}, y_{2+1/2}, \dots, y_{ny+1/2} \quad (69)$$

$$z_{k+1/2} : z_{1+1/2}, z_{2+1/2}, \dots, z_{nz+1/2} \quad (70)$$

- La distance entre les centres des voxels est

$$\Delta x_i : \Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_{nx-1} ; \quad \Delta x_i = x_{i+3/2} - x_{i+1/2} = (hx_i + hx_{i+1})/2 \quad (71)$$

$$\Delta y_j : \Delta y_1, \Delta y_2, \dots, \Delta y_{ny-1} ; \quad \Delta y_j = y_{j+3/2} - y_{j+1/2} = (hy_j + hy_{j+1})/2 \quad (72)$$

$$\Delta z_k : \Delta z_1, \Delta z_2, \dots, \Delta z_{nz-1} ; \quad \Delta z_k = z_{k+3/2} - z_{k+1/2} = (hz_k + hz_{k+1})/2 \quad (73)$$

# Théorie - Volumes finis

Gravimétrie  
Magnétisme  
Équations de Maxwell  
Modèle linéaire  
Volumes finis  
Références  
Annexes

- Créez une classe `GrilleVF` en vous basant sur votre classe `Grille`
- Ajoutez les attributs suivants
  - `hx, hy, hz` contenant les longueurs des côtés des voxels;
  - `xc, yc, zc` contenant les coordonnées des centres des voxels;
  - `dx, dy, dz` contenant les distances entre les centres des voxels;
  - Ajoutez aussi des attributs pour `nx, ny, nz, nc, nfx, nfy, nfz, nf`
- Modifiez finalement la méthode `ind` pour que `i, j` et `k` puisse contenir chacun plusieurs indices.
  - Les indices retournés doivent être classés en ordre croissant;
  - Vérifiez que les indices sont à l'intérieur de la grille.

# Théorie - Volumes finis

Gravimétrie  
Magnétisme  
Équations de Maxwell  
Modèle linéaire  
Volumes finis  
Références  
Annexes

- La solution du problème est obtenue en déterminant les valeurs de  $\phi$  et  $\mathbf{B}$  sur tout le domaine.
  - $\phi$  doit être évalué aux  $nc$  voxels;
  - $B^x$  doit être évalué aux  $(nx + 1) \times ny \times nz$  faces avec un vecteur normal selon  $x$ ;
  - $B^y$  doit être évalué aux  $nx \times (ny + 1) \times nz$  faces avec un vecteur normal selon  $y$ ;
  - $B^z$  doit être évalué aux  $nx \times ny \times (nz + 1)$  faces avec un vecteur normal selon  $z$ .
- Conditions aux frontières pratiques : poser que  $\mathbf{B}$  aux limites du domaine est égal au champ terrestre ambiant;
  - Il faut dans ce cas définir une zone tampon autour du domaine où  $\chi$  est égal à zéro, de façon à ce que le champ induit soit négligeable aux frontières.
  - Les valeurs de  $\mathbf{B}$  doivent alors être déterminées seulement sur les faces intérieures
  - Le nombre total d'inconnues pour  $\mathbf{B}$  est ainsi

$$nf = \underbrace{(nx - 1) \times ny \times nz}_{nfx} + \underbrace{nx \times (ny - 1) \times nz}_{nfy} + \underbrace{nx \times ny \times (nz - 1)}_{nfz}.$$

# Théorie - Volumes finis

Gravimétrie  
Magnétisme  
Équations de Maxwell  
Modèle linéaire  
Volumes finis  
Références  
Annexes

- Une discrétisation par volumes finis est une discrétisation de la formulation faible de l'équation aux dérivées partielles.
  - Qu'est-ce qu'une formulation faible implique ?
- Avec cette discrétisation, l'espace est décomposé en petits "volumes finis", qui correspondent aux voxels de la grille.
- Sur ces volumes, les équations devant être discrétisées sont

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{B} dv = 0 \tag{75}$$

$$\int_V \mathbf{B} dv = \int_V \mu \nabla \phi dv \quad \text{ou} \quad \int_V \mu^{-1} \mathbf{B} dv = \int_V \nabla \phi dv. \tag{76}$$

# Théorie - Volumes finis

Gravimétrie

Magnétisme

Équations de Maxwell

Modèle linéaire

Volumes finis

Références

Annexes

- L'approximation discrète de l'équation (75) est obtenue par le théorème de divergence

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{B} \, dv = \int_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, ds = 0$$

- En posant un flux sortant positif, la forme discrète de l'intégrale de surface devient, pour le voxel  $(i, j, k)$

$$\begin{aligned} \int_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, ds &\approx \left( B_{i,j+1/2,k+1/2}^x - B_{i-1,j+1/2,k+1/2}^x \right) hy_j hz_k \\ &+ \left( B_{i+1/2,j,k+1/2}^y - B_{i+1/2,j-1,k+1/2}^y \right) hx_i hz_k \\ &+ \left( B_{i+1/2,j+1/2,k}^z - B_{i+1/2,j+1/2,k-1}^z \right) hx_i hy_j = 0 \quad (77) \end{aligned}$$

# Théorie - Volumes finis

Gravimétrie

Magnétisme

Équations de Maxwell

Modèle linéaire

Volumes finis

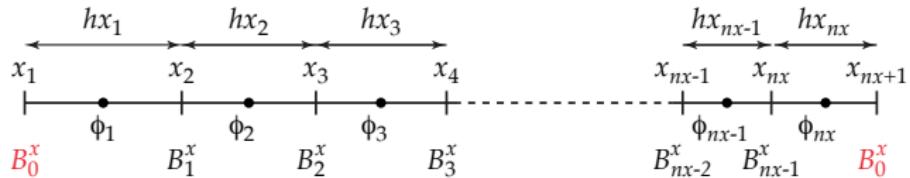
Références

Annexes

- On divisant (77) par le volume du voxel, on obtient  $nc$  équations de la forme

$$\begin{aligned} & \left( B_{i,j+1/2,k+1/2}^x - B_{i-1,j+1/2,k+1/2}^x \right) / hx_i \\ & + \left( B_{i+1/2,j,k+1/2}^y - B_{i+1/2,j-1,k+1/2}^y \right) / hy_j \\ & + \left( B_{i+1/2,j+1/2,k}^z - B_{i+1/2,j+1/2,k-1}^z \right) / hz_k = 0 \quad (78) \end{aligned}$$

- Les conditions aux limites complètent la discréttisation.
- On pose que partout aux limites du domaine le champ vaut  $\mathbf{B}_0 = (B_0^x, B_0^y, B_0^z)$ .



# Théorie - Volumes finis

Gravimétrie  
Magnétisme  
Équations de Maxwell  
Modèle linéaire  
Volumes finis  
Références  
Annexes

- Pour un voxel sur une face où  $i = 1$ , nous avons une équation de la forme

$$\begin{aligned} & B_{1,j+1/2,k+1/2}^x / hx_1 \\ & + \left( B_{i+1/2,j+1,k+1/2}^y - B_{i+1/2,j,k+1/2}^y \right) / hy_j \\ & + \left( B_{i+1/2,j+1/2,k+1}^z - B_{i+1/2,j+1/2,k}^z \right) / hz_k = B_0^x / hx_1. \end{aligned} \quad (79)$$

- Pour un voxel sur une face où  $i = nx$ , nous avons

$$\begin{aligned} & -B_{nx-1,j+1/2,k+1/2}^x / hx_{nx} \\ & + \left( B_{i+1/2,j+1,k+1/2}^y - B_{i+1/2,j,k+1/2}^y \right) / hy_j \\ & + \left( B_{i+1/2,j+1/2,k+1}^z - B_{i+1/2,j+1/2,k}^z \right) / hz_k = -B_0^x / hx_{nx}. \end{aligned} \quad (80)$$

# Théorie - Volumes finis

Gravimétrie  
Magnétisme  
Équations de Maxwell  
Modèle linéaire  
Volumes finis  
Références  
Annexes

- Sur une **arête** (e.g. où  $i = 1$  et  $j = 1$ ), nous avons une expression de la forme

$$\begin{aligned} & B_{i,j+1/2,k+1/2}^x/hx_i + B_{i+1/2,j,k+1/2}^y/hy_j \\ & + \left( B_{i+1/2,j+1/2,k+1}^z - B_{i+1/2,j+1/2,k}^z \right) /hz_k = B_0^x/hx_i + B_0^y/hy_j. \end{aligned} \quad (81)$$

- Sur un **coin** (e.g.  $i = 1, j = 1$  et  $k = 1$ ), nous avons une équation de la forme

$$\begin{aligned} & B_{i,j+1/2,k+1/2}^x/hx_i + B_{i+1/2,j,k+1/2}^y/hy_j + \\ & B_{i+1/2,j+1/2,k}^z/hz_k = B_0^x/hx_i + B_0^y/hy_j + B_0^z/hz_k. \end{aligned} \quad (82)$$

# Théorie - Volumes finis

[Gravimétrie](#)[Magnétisme](#)[Équations de Maxwell](#)[Modèle linéaire](#)[Volumes finis](#)[Références](#)[Annexes](#)

- En combinant les équations précédentes, il est possible de construire le système matriciel

$$\mathbf{DB} = \mathbf{q} \quad (83)$$

où  $\mathbf{D}$  est de taille  $nc \times nf$ ,  $\mathbf{B}$  de taille  $nf \times 1$  et où  $\mathbf{q}$  est de taille  $nc \times 1$  et contient les termes provenant des conditions aux frontières.

- $\mathbf{D}$  est appelée matrice de divergence.
- Le système matriciel peut être séparé de telle sorte que

$$\mathbf{DB} = \mathbf{q} \quad (84)$$

$$[\mathbf{D}_x \quad \mathbf{D}_y \quad \mathbf{D}_z] \begin{bmatrix} \mathbf{B}_x \\ \mathbf{B}_y \\ \mathbf{B}_z \end{bmatrix} = \mathbf{q} \quad (85)$$

$$\mathbf{D}_x \mathbf{B}_x + \mathbf{D}_y \mathbf{B}_y + \mathbf{D}_z \mathbf{B}_z = \mathbf{q}. \quad (86)$$

- La matrice  $\mathbf{D}_x$  est construite selon

$$\mathbf{D}_x = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{D}}_x & & & \\ & \tilde{\mathbf{D}}_x & & \\ & & \ddots & \\ & & & \tilde{\mathbf{D}}_x \end{bmatrix} \quad (87)$$

où

$$\tilde{\mathbf{D}}_x = \begin{bmatrix} hx_1^{-1} & & & & \\ -hx_2^{-1} & hx_2^{-1} & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & & -hx_{nx-1}^{-1} & hx_{nx-1}^{-1} \\ & & & & -hx_n^{-1} \end{bmatrix} \quad (88)$$

- La diagonale principale et la  $-1^e$  diagonale de  $\tilde{\mathbf{D}}_x$  sont remplies.  $\tilde{\mathbf{D}}_x$  est de taille  $nx \times (nx - 1)$ , et est répétée  $ny \times nz$  fois pour créer  $\mathbf{D}_x$ .

Gravimétrie

Magnétisme

Équations de Maxwell

Modèle linéaire

Volumes finis

Références

Annexes

- Ajoutez une méthode `fabrique_D` à la classe `GrilleVF`, pour construire la matrice  $D_x$ .
- $D_x$  devra être une matrice *creuse*.
  - Consultez la documentation du module `sparse` de la librairie `scipy`;
  - La forme la plus simple à utiliser est `coo_matrix`;

Gravimétrie  
Magnétisme  
Équations de Maxwell  
Modèle linéaire  
Volumes finis  
Références  
Annexes

- $\mathbf{D}_y$  est construite de façon similaire avec

$$\tilde{\mathbf{D}}_y = \begin{bmatrix} hy_1^{-1} & & & & \\ 0 & hy_1^{-1} & & & \\ \vdots & & \ddots & & \\ 0 & & & hy_1^{-1} & \\ -hy_2^{-1} & & & & hy_2^{-1} \\ & \ddots & & & \\ & & -hy_{ny-1}^{-1} & & hy_{ny-1}^{-1} \\ & & & -hy_{ny}^{-1} & \\ & & & & \ddots \\ & & & & \\ & & & & -hy_{ny}^{-1} \end{bmatrix} \quad (89)$$

- La diagonale principale et la  $-nx^e$  diagonale sont remplies.  $\tilde{\mathbf{D}}_y$  est de taille  $nx * ny \times nx * (ny - 1)$ , et est répétée  $nz$  fois pour créer  $\mathbf{D}_y$ .

Gravimétrie

Magnétisme

Équations de Maxwell

Modèle linéaire

Volumes finis

Références

Annexes

- Ajoutez la construction de la matrice  $D_y$  à votre méthode fabrique\_D.
- $D_y$  devra également être une matrice creuse.

# Théorie - Volumes finis

Gravimétrie

Magnétisme

Équations de Maxwell

Modèle linéaire

Volumes finis

Références

Annexes

- $\mathbf{D}_z$  contient des éléments sur la diagonale principale et la  $-nx * ny^e$  diagonale :

$$\mathbf{D}_z = \begin{bmatrix} hz_1^{-1} & & & & \\ 0 & hz_1^{-1} & & & \\ \vdots & & \ddots & & \\ -hz_2^{-1} & & & hz_2^{-1} & \\ & \ddots & & & \ddots \\ & & -hz_{nz-1}^{-1} & -hz_{nz}^{-1} & hz_{nz-1}^{-1} \\ & & & -hz_{nz}^{-1} & \\ & & & & \ddots \\ & & & & -hz_n^{-1} \end{bmatrix} \quad (90)$$

Gravimétrie

Magnétisme

Équations de Maxwell

Modèle linéaire

Volumes finis

Références

Annexes

- Ajoutez finalement la construction de  $D_z$  (creuse) à votre méthode `fabrique_D` et assemblez la matrice  $D$ .
- `fabrique_D` doit retourner  $D$ .
- Ajoutez également une méthode `fabrique_q` pour construire le vecteur  $q$ ;
  - Cette méthode doit avoir pour argument  $B_0$  (un vecteur contenant les trois composantes du champ ambiant).

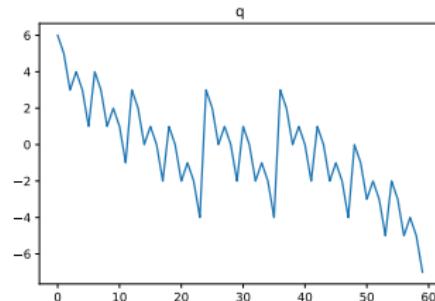
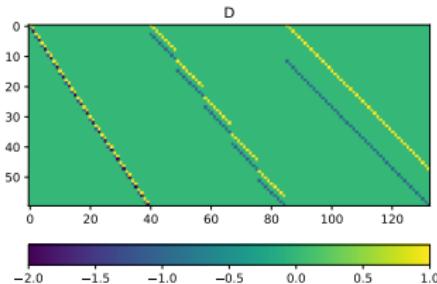
# Théorie - Volumes finis

Gravimétrie  
Magnétisme  
Équations de Maxwell  
Modèle linéaire  
Volumes finis  
Références  
Annexes

- Testez votre code avec :

```
x = [1, 2, 3, 3.5]
y = [1, 2, 3, 4, 5]
z = np.arange(6)
B0 = np.array([1., 2., 3.])
g = GrilleVF(x, y, z)
D = g.fabrique_D()
q = g.fabrique_q(B0)
```

- Vous devriez obtenir :



# Théorie - Volumes finis

Gravimétrie  
Magnétisme  
Équations de Maxwell  
Modèle linéaire  
Volumes finis  
Références  
Annexes

- Pour discréteriser l'équation (76), il est nécessaire de connaître  $\mu$  (ou  $\mu^{-1}$ ) sur les faces des voxels.
- En interpolant  $\mu$ , on obtient sa moyenne arithmétique alors qu'en interpolant  $\mu^{-1}$  on obtient la moyenne harmonique de  $\mu$ .
  - La moyenne harmonique est plus représentative de la perméabilité effective.
- On discrétise donc  $\mu^{-1}\mathbf{B} = \nabla\phi$ , qui est séparé en trois parties :

$$\mu^{-1}B_x = \nabla_x\phi \quad (91)$$

$$\mu^{-1}B_y = \nabla_y\phi \quad (92)$$

$$\mu^{-1}B_z = \nabla_z\phi. \quad (93)$$

# Théorie - Volumes finis

Gravimétrie  
Magnétisme  
Équations de Maxwell  
Modèle linéaire  
Volumes finis  
Références  
Annexes

- Le volume d'intégration couvre une face du voxel de sorte que l'induction  $B$  est au centre du volume, i.e. en  $x$

$$\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \int_{y_j}^{y_{j+1}} \int_{z_k}^{z_{k+1}} \frac{B_x}{\mu} dx dy dz = \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \int_{y_j}^{y_{j+1}} \int_{z_k}^{z_{k+1}} \nabla_x \phi dx dy dz \quad (94)$$

- Si on assume que  $B_x$  ne varie pas à l'intérieur du volume d'intégration, on peut le sortir de l'intégrale triple.
- La forme discrète, après avoir divisé par le volume d'intégration, est

$$\frac{B_{i,j+1/2,k+1/2}^x}{2\Delta x_i} \left( \frac{hx_{i+1}}{\mu_{i+1/2,j+1/2,k+1/2}} + \frac{hx_i}{\mu_{i-1/2,j+1/2,k+1/2}} \right) = \frac{\phi_{i+1/2,j+1/2,k+1/2} - \phi_{i-1/2,j+1/2,k+1/2}}{\Delta x_i} \quad (95)$$

# Théorie - Volumes finis

Gravimétrie

Magnétisme

Équations de Maxwell

Modèle linéaire

Volumes finis

Références

Annexes

- La notation est allégée en posant

$$\eta_{i,j+1/2,k+1/2}^x = 2\Delta x_i \left( \frac{hx_{i+1}}{\mu_{i+1/2,j+1/2,k+1/2}} + \frac{hx_i}{\mu_{i-1/2,j+1/2,k+1/2}} \right)^{-1} \quad (96)$$

ce qui donne

$$\frac{B_{i,j+1/2,k+1/2}^x}{\eta_{i,j+1/2,k+1/2}^x} = \frac{\phi_{i+1/2,j+1/2,k+1/2} - \phi_{i-1/2,j+1/2,k+1/2}}{\Delta x_i} \quad (97)$$

- On peut maintenant construire une système matriciel de la forme

$$\mathbf{M}_x^{-1} \mathbf{B}_x = \mathbf{G}_x \boldsymbol{\phi} \quad \text{ou} \quad \mathbf{B}_x = \mathbf{M}_x \mathbf{G}_x \boldsymbol{\phi} \quad (98)$$

où  $\mathbf{M}_x$  est une matrice diagonale contenant les coefficients  $\eta_{i,j+1/2,k+1/2}^x$ .

# Théorie - Volumes finis

Gravimétrie  
Magnétisme  
Équations de Maxwell  
Modèle linéaire  
Volumes finis  
Références  
Annexes

- En procédant de façon similaire selon  $y$  et  $z$ , on arrive à un système

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B}_x \\ \mathbf{B}_y \\ \mathbf{B}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_x & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{M}_y & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{M}_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{G}_x \\ \mathbf{G}_y \\ \mathbf{G}_z \end{bmatrix} \phi \quad (99)$$
$$\mathbf{B} = \mathbf{M} \mathbf{G} \phi$$

- $\mathbf{G}$  est appelée matrice de gradient (de taille  $nf \times nc$ );
- $\mathbf{M}$  est appelée matrice des perméabilité (de taille  $nf \times nf$ );
- $\phi$  est le vecteur du potentiel magnétique (de taille  $nc \times 1$ ).

Gravimétrie  
Magnétisme  
Équations de Maxwell  
Modèle linéaire  
Volumes finis  
Références  
Annexes

● M est construite suivant

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \eta_1^x & & & & & & \\ & \eta_2^x & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & \eta_{(nx-1)ny\,nz}^x & & & \\ & & & & \eta_1^y & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & \eta_{nx(ny-1)\,nz}^y \\ & & & & & & & \eta_1^z \\ & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & \eta_{nx\,ny(nz-1)}^z \\ & & & & & & & & & (100) \end{bmatrix}$$

# Théorie - Volumes finis

Gravimétrie  
Magnétisme  
Équations de Maxwell  
Modèle linéaire  
Volumes finis  
Références  
Annexes

## Construction des matrices $M_x$ , $M_y$ et $M_z$

- Il faut choisir soigneusement les indices des voxels

$M_x$

1	2	5	7	8	10	11
0	3	6	9	9	10	11
0	3	6	9	9	10	11
12	15	18	21	21	22	23
12	15	18	21	21	22	23

1	2	5	7	8	10	11
0	3	6	9	9	10	11
0	3	6	9	9	10	11
12	15	18	21	21	22	23
12	15	18	21	21	22	23

$M_y$

1	2	5	7	8	10	11
0	3	6	9	9	10	11
0	3	6	9	9	10	11
12	15	18	21	21	22	23
12	15	18	21	21	22	23

1	2	5	7	8	10	11
0	3	6	9	9	10	11
0	3	6	9	9	10	11
12	15	18	21	21	22	23
12	15	18	21	21	22	23

$M_z$

1	2	5	7	8	10	11
0	3	6	9	9	10	11
0	3	6	9	9	10	11
12	15	18	21	21	22	23
12	15	18	21	21	22	23

1	2	5	7	8	10	11
0	3	6	9	9	10	11
0	3	6	9	9	10	11
12	15	18	21	21	22	23
12	15	18	21	21	22	23

# Théorie - Volumes finis

Gravimétrie

Magnétisme

Équations de Maxwell

Modèle linéaire

Volumes finis

Références

Annexes

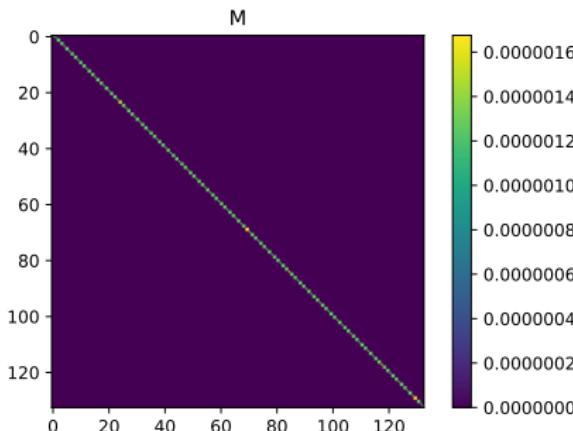
- Créez une méthode `fabrique_M` pour construire la matrice  $\mathbf{M}$  contenant les valeurs de la moyenne harmonique de  $\mu$ .
- Votre méthode aura pour argument `mu`, un vecteur de  $nc$  éléments contenant les valeurs de perméabilité des voxels.
- Notez que  $\mathbf{M}$  est également une matrice creuse.

Gravimétrie  
Magnétisme  
Équations de Maxwell  
Modèle linéaire  
Volumes finis  
Références  
Annexes

- Testez votre code avec :

```
chi = np.zeros((g.nc,))  
chi[g.ind(2,2,3)] = 1.0  
mu0 = 4 * math.pi * 1.e-7;  
mu = mu0 * (1.+chi)  
M = g.fabrique_M(mu)
```

- Vous devriez obtenir :



- Par ailleurs,

$$\mathbf{G}_x = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{G}}_x & & \\ & \tilde{\mathbf{G}}_x & \\ & & \ddots \\ & & & \tilde{\mathbf{G}}_x \end{bmatrix} \quad (101)$$

$$\tilde{\mathbf{G}}_x = \begin{bmatrix} -\Delta x_1^{-1} & \Delta x_1^{-1} & & & \\ & -\Delta x_2^{-1} & \Delta x_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & -\Delta x_{nx-1}^{-1} & \Delta x_{nx-1}^{-1} \end{bmatrix} \quad (102)$$

- La diagonale principale et la première diagonale sont remplies.
- $\tilde{\mathbf{G}}_x$  est de taille  $(nx - 1) \times nx$  et répétée  $ny * nz$  fois, ce qui fait que  $\mathbf{G}_x$  est de taille  $nfx \times nc$ .

• Également,

$$\mathbf{G}_y = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{G}}_y & & & \\ & \tilde{\mathbf{G}}_y & & \\ & & \ddots & \\ & & & \tilde{\mathbf{G}}_y \end{bmatrix} \quad (103)$$

$$\tilde{\mathbf{G}}_y = \begin{bmatrix} -\Delta y_1^{-1} & 0 & \cdots & 0 & \Delta y_1^{-1} & & \\ & \ddots & & & & \ddots & \\ & & -\Delta y_1^{-1} & & & & \Delta y_1^{-1} \\ & & & -\Delta y_2^{-1} & & & \Delta y_2^{-1} \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & -\Delta y_{ny-1}^{-1} & \Delta y_{ny-1}^{-1} \\ & & & & & & \ddots \end{bmatrix} \quad (104)$$

- La diagonale principale et la  $nx^e$  diagonale sont remplies.
- $\tilde{\mathbf{G}}_y$  est de taille  $nx * (ny - 1) \times nx * ny$  et répétée  $nz$  fois, ce qui fait que  $\mathbf{G}_y$  est de taille  $nfy \times nc$ .

# Théorie - Volumes finis

Gravimétrie

Magnétisme

Équations de Maxwell

Modèle linéaire

Volumes finis

Références

Annexes

## ● Finalement,

$$\mathbf{G}_z = \begin{bmatrix} -\Delta z_1^{-1} & 0 & \cdots & 0 & \Delta z_1^{-1} \\ \vdots & & & & \vdots \\ & -\Delta z_1^{-1} & & & \Delta z_1^{-1} \\ & & -\Delta z_2^{-1} & & \Delta z_2^{-1} \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & -\Delta z_{nz-1}^{-1} \\ & & & & \Delta z_{nz-1}^{-1} \end{bmatrix} \quad (105)$$

- La diagonale principale et la  $(nx * ny)^e$  diagonale sont remplies, et  $\mathbf{G}_z$  est de taille  $n fz \times nc$ .

Gravimétrie

Magnétisme

Équations de Maxwell

Modèle linéaire

Volumes finis

Références

Annexes

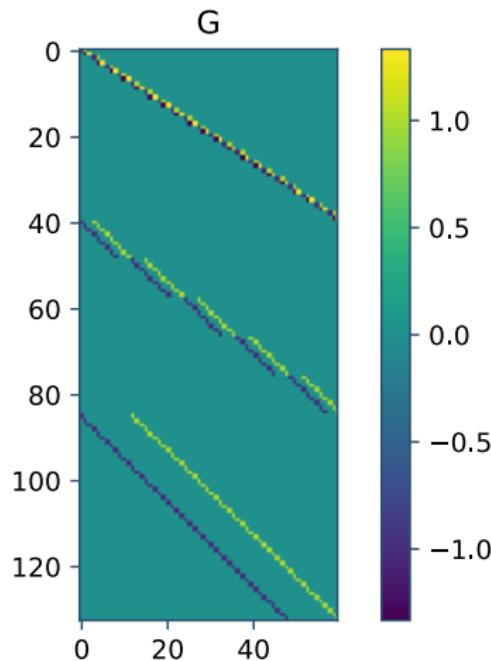
- Écrivez finalement une méthode `fabrique_G` pour construire la matrice  $\mathbf{G}$  contenant les opérateurs du gradient de  $\phi$ .
- Comme pour les matrices  $\mathbf{D}$  et  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{G}$  doit être creuse.

Gravimétrie  
Magnétisme  
Équations de Maxwell  
Modèle linéaire  
**Volumes finis**  
Références  
Annexes

- Testez votre code avec :

```
G = g.fabrique_G()
```

- Vous devriez obtenir :



# Théorie - Volumes finis

Gravimétrie

Magnétisme

Équations de Maxwell

Modèle linéaire

Volumes finis

Références

Annexes

- Les équations vues jusqu'à présent permettent de calculer le champ total  $\mathbf{B}$ .
- Nous avons les équations (83)

$$\mathbf{DB} = \mathbf{q}$$

et (99)

$$\mathbf{B} = \mathbf{MG}\phi$$

- On résoud le système pour  $\phi$  en insérant les conditions aux limites, i.e.

$$\underbrace{\mathbf{DMG}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\phi}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\mathbf{q}}_{\mathbf{b}}$$

- On utilise (99) pour finalement calculer  $\mathbf{B}$ .

# Théorie - Volumes finis

Gravimétrie  
Magnétisme  
Équations de Maxwell  
Modèle linéaire  
Volumes finis  
Références  
Annexes

- Il est souvent souhaitable de ne modéliser que le champ induit (ou secondaire) par la présence de corps magnétisables, i.e. de calculer l'anomalie magnétique (notée  $\mathbf{B}_s$ ).
- Il est possible d'extraire l'anomalie du champ total en soustrayant à ce dernier la valeur du champ ambiant  $\mathbf{B}_0$ , i.e.

$$\mathbf{B}_s = \mathbf{B} - \mathbf{B}_0. \quad (106)$$

- Cette approche peut être sujette aux erreurs d'arrondi car le champ secondaire est souvent plusieurs ordres de grandeur plus faible que  $\mathbf{B}_0$ .

# Théorie - Volumes finis

Gravimétrie  
Magnétisme  
Équations de Maxwell  
Modèle linéaire  
Volumes finis  
Références  
Annexes

- Il est possible de calculer directement le champ secondaire et de limiter les erreurs d'arrondi.
- Il suffit de décomposer les équations (83) et (99) selon

$$\mathbf{D} (\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_s) = \mathbf{f} + \mathbf{g} \quad (107)$$

$$\mathbf{M}^{-1} (\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_s) = \mathbf{G} (\phi_0 + \phi_s). \quad (108)$$

- Le vecteur  $\mathbf{f}$  est équivalent au vecteur  $\mathbf{q}$  de l'équation (83), i.e. il est calculé à partir de  $\mathbf{B}_0$  sur le pourtour du domaine.
- Le vecteur  $\mathbf{g}$  est similaire à  $\mathbf{f}$ , mais est dû au champ induit  $\mathbf{B}_s$  plutôt que  $\mathbf{B}_0$ .
  - Si les corps magnétiques sont loin des bords du domaine, on peut assumer que  $\mathbf{B}_s$  sera très faible au pourtour du domaine et donc que  $\mathbf{g} \approx 0$ .

# Théorie - Volumes finis

Gravimétrie  
Magnétisme  
Équations de Maxwell  
Modèle linéaire  
Volumes finis  
Références  
Annexes

- Pour le champ primaire, nous avons ainsi

$$\mathbf{D}\mathbf{B}_0 = \mathbf{f} \quad \text{et} \quad \mathbf{M}_0^{-1}\mathbf{B}_0 = \mathbf{G}\phi_0. \quad (109)$$

- $\mathbf{M}_0$  a des éléments non-nuls seulement sur la diagonale principale et  $\eta_0 = \mu_0$ , ce qui fait que  $\mathbf{M}_0 = \mu_0\mathbf{I}$ .
- Pour le champ secondaire, nous avons alors

$$\mathbf{D}\mathbf{B}_s = \mathbf{g} \quad (110)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^{-1}\mathbf{B}_s &= -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{B}_0 + \mathbf{G}\phi_0 + \mathbf{G}\phi_s \\ &= -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{B}_0 + \mathbf{M}_0^{-1}\mathbf{B}_0 + \mathbf{G}\phi_s \\ &= \left(\mu_0^{-1}\mathbf{I} - \mathbf{M}^{-1}\right)\mathbf{B}_0 + \mathbf{G}\phi_s. \end{aligned} \quad (111)$$

# Théorie - Volumes finis

Gravimétrie

Magnétisme

Équations de Maxwell

Modèle linéaire

Volumes finis

Références

Annexes

- On a finalement que

$$\mathbf{B}_s = \left( \mu_0^{-1} \mathbf{M} - \mathbf{I} \right) \mathbf{B}_0 + \mathbf{M} \mathbf{G} \phi_s, \quad (112)$$

où  $\phi_s$  est obtenu en solutionnant

$$\underbrace{\mathbf{D} \mathbf{M} \mathbf{G}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\phi_s}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\mathbf{g} - \mathbf{D} \left( \mu_0^{-1} \mathbf{M} - \mathbf{I} \right) \mathbf{B}_0}_{\mathbf{b}} \quad (113)$$

avec  $\mathbf{B}_0$  un vecteur de la taille de  $\mathbf{B}$  contenant les valeurs du champ ambiant.

- La méthode du gradient biconjugué stabilisé peut être utilisée pour résoudre ce système.

# Théorie - Volumes finis

Gravimétrie

Magnétisme

Équations de Maxwell

Modèle linéaire

Volumes finis

Références

Annexes

- La discréttisation du milieu en volumes finis entraîne une erreur.
- Pour évaluer l'ordre de grandeur cette erreur, partons de la série de Taylor à la surface d'un voxel en posant que les voxels sont cubiques de côté  $h$  :

$$\begin{aligned}\phi_{i+1/2,j+1/2,k+1/2} &= \phi_{i,j+1/2,k+1/2} \\ &+ \frac{h}{2} \phi'_{i,j+1/2,k+1/2} + \frac{h^2}{8} \phi''_{i,j+1/2,k+1/2} + \mathcal{O}(h^3)\end{aligned}\quad (114)$$

$$\begin{aligned}\phi_{i-1/2,j+1/2,k+1/2} &= \phi_{i,j+1/2,k+1/2} \\ &- \frac{h}{2} \phi'_{i,j+1/2,k+1/2} + \frac{h^2}{8} \phi''_{i,j+1/2,k+1/2} - \mathcal{O}(h^3)\end{aligned}\quad (115)$$

# Théorie - Volumes finis

Gravimétrie  
Magnétisme  
Équations de Maxwell  
Modèle linéaire  
Volumes finis  
Références  
Annexes

- En soustrayant les équations (114) et (115), on arrive à l'expression de l'opérateur de dérivé centrée suivant :

$$\frac{\phi_{i+1/2,j+1/2,k+1/2} - \phi_{i-1/2,j+1/2,k+1/2}}{h} = \phi'_{i,j+1/2,k+1/2} + \mathcal{O}(h^2) \quad (116)$$

- Or,  $\mathbf{B}$  est évalué à partir du potentiel  $\phi$ , i.e.

$$B_{i,j+1/2,k+1/2}^x = \eta_{i,j+1/2,k+1/2} \left( \frac{\phi_{i+1/2,j+1/2,k+1/2} - \phi_{i-1/2,j+1/2,k+1/2}}{h} \right), \quad (117)$$

où  $\eta_{i,j+1/2,k+1/2}$  est la moyenne harmonique des valeurs de perméabilité des voxels voisins à l'interface.

- La précision sur le calcul de  $\mathbf{B}$  est donc de l'ordre de  $\mathcal{O}(\eta_{\text{harm}} h^2)$ .
  - L'erreur est donc proportionnelle à la perméabilité.

# Théorie - Volumes finis

Gravimétrie

Magnétisme

Équations de Maxwell

Modèle linéaire

Volumes finis

Références

Annexes

- Changez le nom de votre méthode `fabrique_q` pour `fabrique_cf` et ajoutez-y la construction du vecteur `g`
- Suivez pour ce faire l'approche proposée par Lelièvre à la section 4.2 de son mémoire (disponible à <http://circle.ubc.ca/handle/2429/13931>)
- Cette méthode aura pour arguments `B0` et `chi`

# Théorie - Volumes finis

Gravimétrie  
Magnétisme  
Équations de Maxwell  
Modèle linéaire  
Volumes finis  
Références  
Annexes

- Implémentez finalement une méthode pour modéliser la réponse magnétique pour une distribution spatiale donnée de la susceptibilité  $\chi$
- Définissez la méthode selon

```
def magmod(self, chi, B0, xo, usecl, chtot)
```

où
  - $xo$  : points d'observation (ndarray de taille  $N \times 3$ )
  - `usecl` permet de préciser si  $g$  doit être considéré (booléen)
  - `chtot` indique s'il faut calculer le champ total ou  $B_s$  (booléen)
- La méthode doit retourner les valeurs de  $B_x$ ,  $B_y$  et  $B_z$  interpolées aux points d'observation  $xo$

# Volumes finis – Exemple

Gravimétrie

Magnétisme

Équations de Maxwell

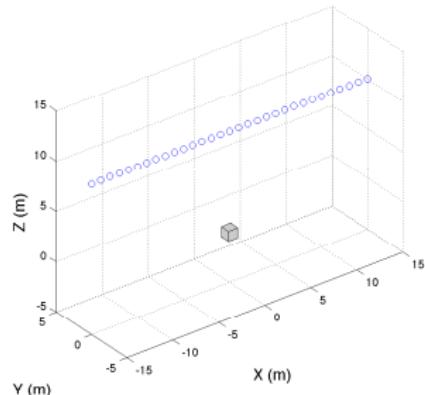
Modèle linéaire

Volumes finis

Références

Annexes

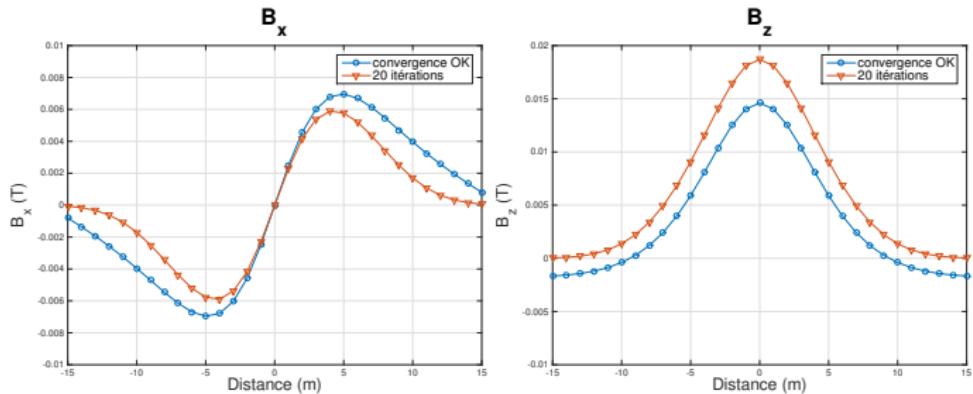
- Calculez l'anomalie causée par un cube de  $1 \text{ m}^3$ , de susceptibilité  $\chi = 0.01$ , et situé au centre d'une grille de  $33 \times 33 \times 33$  voxels (tous de  $1 \text{ m}^3$  de volume), pour un champ ambiant  $\mathbf{B}_0 = [0, 0, 10000]$  T.
- Le centre du cube aimanté est à la coordonnée (0,0,0).
- Utilisez le solveur `bicgstab` avec les paramètres par défaut.
- Tracez un profil de  $B_x$  et un profil de  $B_z$  pour les points ayant pour coordonnées  
`xp=np.arange(-15.0,15.1)`  
`yp=0`  
`zp=10`



# Volumes finis – Exemple

Gravimétrie  
Magnétisme  
Équations de Maxwell  
Modèle linéaire  
Volumes finis  
Références  
Annexes

- Influence du choix des paramètres de convergence de bicgstab



# Volumes finis – Exemple

Gravimétrie

Magnétisme

Équations de Maxwell

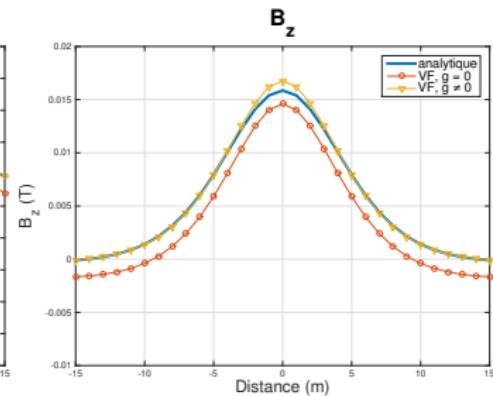
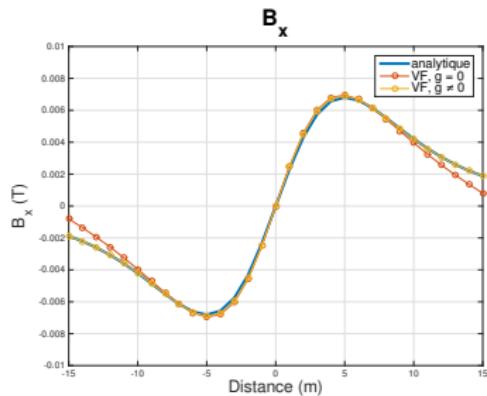
Modèle linéaire

Volumes finis

Références

Annexes

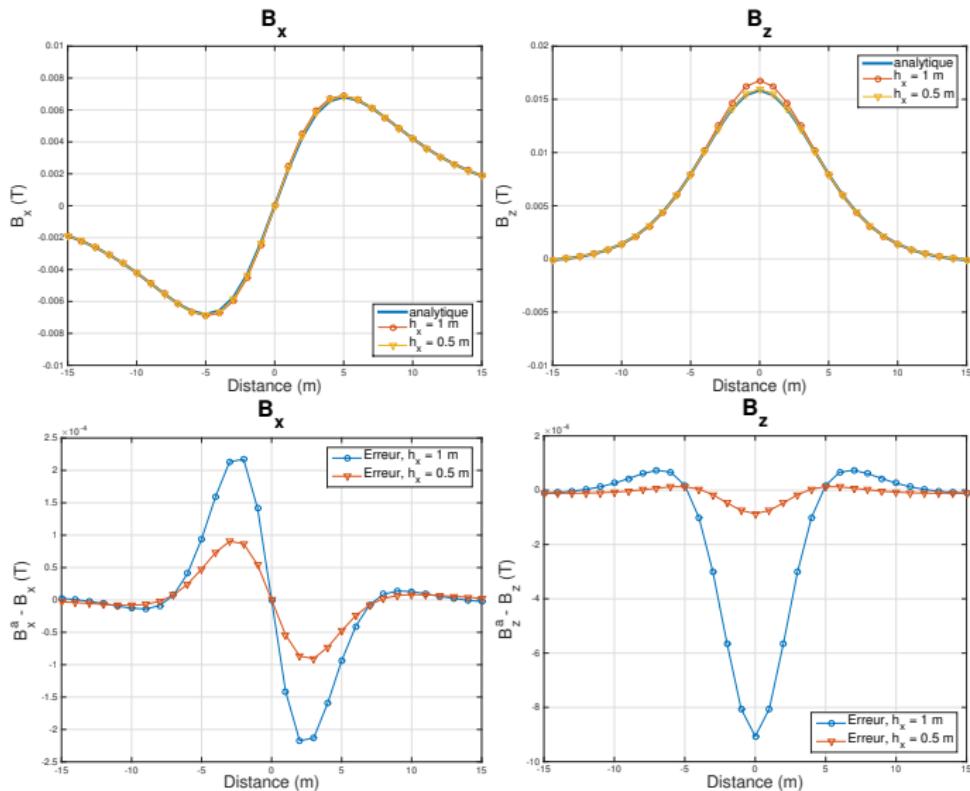
- Comparaison avec la solution analytique pour une sphère de volume égal à celui du cube.



# Volumes finis – Exemple

Gravimétrie  
Magnétisme  
Équations de Maxwell  
Modèle linéaire  
Volumes finis  
Références  
Annexes

## ● Influence de la taille des voxels



Gravimétrie  
Magnétisme  
Références  
Annexes

## Références

Gravimétrie  
Magnétisme  
Références  
Annexes

- Blakely, R. J. (1995). *Potential Theory in Gravity and Magnetic Applications*. Cambridge University Press
- Guo, Z.-Y., Liu, D.-J., Pan, Q., and Zhang, Y.-Y. (2015). Forward modeling of total magnetic anomaly over a pseudo-2D underground ferromagnetic pipeline. *Journal of Applied Geophysics*, 113 :14 – 30
- Lelièvre, P. G. (2003). Forward modeling and inversion of geophysical magnetic data. Master's thesis, University of British Columbia

- Li, X. and Chouteau, M. (1998). Three-dimentional gravity modeling in all space. *Surveys in Geophysics*, 19 :339–368
- Plouff, D. (1976). Gravity and magnetic fields of polygonal prisms and application to magnetic terrain corrections. *Geophysics*, 41 :727–741
- Singh, B. and Guptasarma, D. (2001). New method for fast computation of gravity and magnetic anomalies from arbitrary polyhedra. *Geophysics*, 66(2) :521–526

Gravimétrie

Magnétisme

Références

**Annexes**

Densité des roches

Propriétés magnétiques  
des roches

Aimantation rémanente

Susceptibilités

Démagnétisation

## Annexes

# Densité $\rho$

Gravimétrie

Magnétisme

Références

Annexes

Densité des roches

Propriétés magnétiques  
des roches

Aimantation rémanente

Susceptibilités

Démagnétisation

- C'est la masse par unité de volume;
- Unité habituelle : g/cm<sup>3</sup>;
- Strictement parlant : masse volumique.
- Pour un milieu poreux saturé, la densité du mélange est

$$\rho_m = (1 - \phi) \rho_h + \phi \rho_f$$

- $\phi$  est la porosité;
- $\rho_h$  la densité de la matrice hôte;
- $\rho_f$  est la densité du fluide.

# Densité $\rho$

Gravimétrie

Magnétisme

Références

Annexes

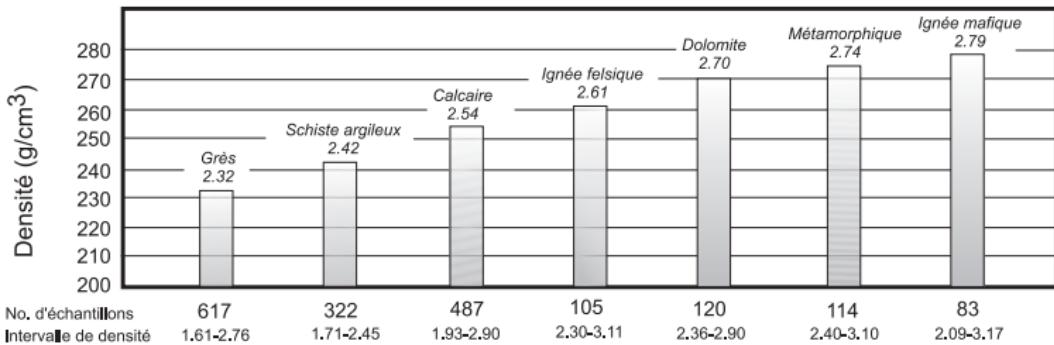
Densité des roches

Propriétés magnétiques  
des roches

Aimantation rémanente

Susceptibilités

Démagnétisation



# Propriétés magnétiques des roches

Gravimétrie

Magnétisme

Références

Annexes

Densité des roches

Propriétés magnétiques  
des roches

Aimantation rémanente

Susceptibilités

Démagnétisation

- Les roches sont un agencement de minéraux qui présentent des propriétés magnétiques différentes ;
- Les différents phénomènes en compétition :
  - diamagnétisme ;
  - paramagnétisme ;
  - ferromagnétisme ;
  - antiferromagnétisme ;
  - ferrimagnétisme.

Gravimétrie

Magnétisme

Références

Annexes

Densité des roches

Propriétés magnétiques  
des roches

Aimantation rémanente

Susceptibilités

Démagnétisation

- Toutes les substances sont magnétiques à l'échelle de l'atome.
- Un atome se comporte comme un dipôle :
  - spin des électrons ;
  - orbite des électrons autour du noyau.
- Physique quantique : max. deux électrons par niveau si les spins sont opposés.
  - Si on a deux électrons par niveau (paire), les moments s'annulent.

Gravimétrie

Magnétisme

Références

Annexes

Densité des roches

Propriétés magnétiques  
des roches

Aimantation rémanente

Susceptibilités

Démagnétisation

- Matière pour laquelle tous les niveaux atomiques sont remplis de paires d'électrons.
- Si on applique un champ  $\mathbf{H}$  :
  - la rotation des électrons s'oppose à  $\mathbf{H}$ ;
  - la susceptibilité  $\chi$  est ainsi négative;
  - cet effet est de faible magnitude.
- Cette matière offre une «résistance» au champ magnétique.

Gravimétrie

Magnétisme

Références

Annexes

Densité des roches

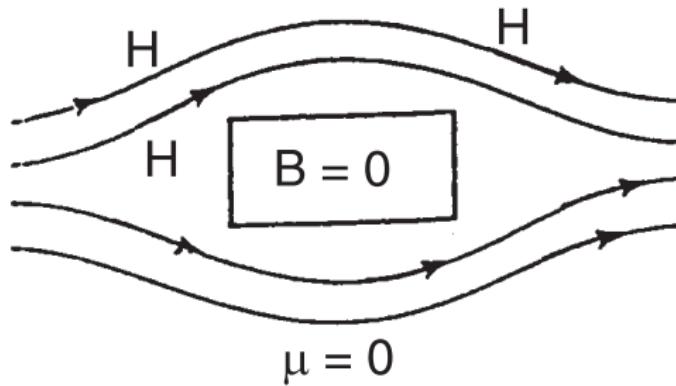
Propriétés magnétiques  
des roches

Aimantation rémanente

Susceptibilités

Démagnétisation

- Diamagnétisme parfait : le champ est nul à l'intérieur de l'objet.



Gravimétrie

Magnétisme

Références

Annexes

Densité des roches

Propriétés magnétiques  
des roches

Aimantation rémanente

Susceptibilités

Démagnétisation

- Quelques roches & matériaux diamagnétiques :

- graphite;
- gypse;
- quartz;
- sel;
- cuivre;
- diamant.

Gravimétrie

Magnétisme

Références

Annexes

Densité des roches

Propriétés magnétiques  
des roches

Aimantation rémanente

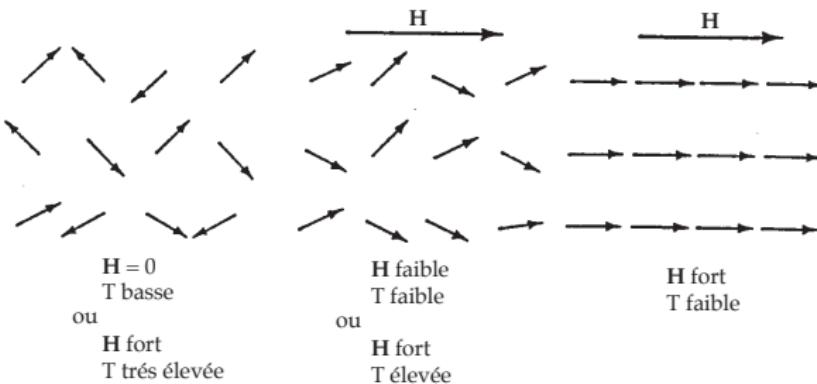
Susceptibilités

Démagnétisation

- Les niveaux ne sont pas tous remplis :
  - un champ magnétique résulte du spin des électrons solitaires.
- Si on applique un champ  $H$  :
  - les dipôles des électrons solitaires s'alignent avec  $H$ ;
  - la susceptibilité  $\chi$  est positive;
  - cette effet est de faible magnitude.

Gravimétrie  
Magnétisme  
Références  
Annexes  
Densité des roches  
Propriétés magnétiques des roches  
Aimantation rémanente  
Susceptibilités  
Démagnétisation

- La température  $T$  influence le comportement de la matière.
- Une température élevée excite les atomes :
  - limite l'effet du champ  $H$ .



Gravimétrie

Magnétisme

Références

Annexes

Densité des roches

Propriétés magnétiques  
des roches

Aimantation rémanente

Susceptibilités

Démagnétisation

- Exemples de substances paramagnétiques :

- la plupart des métaux;
- gneiss;
- dolomie;
- pegmatite;
- syénite.

# Ferromagnétisme

Gravimétrie

Magnétisme

Références

Annexes

Densité des roches

Propriétés magnétiques  
des roches

Aimantation rémanente

Susceptibilités

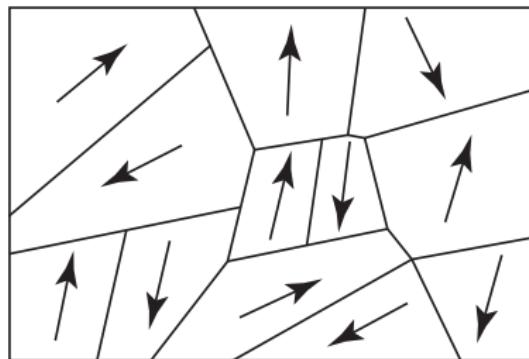
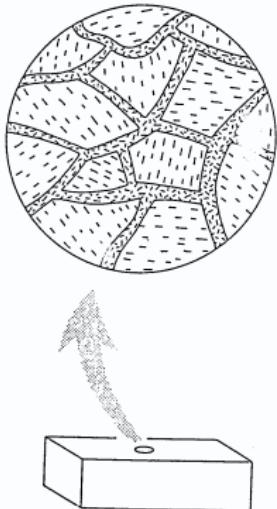
Démagnétisation

- Existe si, dans certains cristaux paramagnétiques, les moments atomiques sont alignés dans la même direction.
- Occurrence spontanée.
- Les régions où les moments sont alignés sont nommés domaines.
- Les limites entre les domaines sont nommées parois.
- Distribution aléatoire.

# Ferromagnétisme

Gravimétrie  
Magnétisme  
Références  
Annexes  
Densité des roches  
Propriétés magnétiques des roches  
Aimantation rémanente  
Susceptibilités  
Démagnétisation

- Si  $H$  nul, la somme des moments est nulle.



Gravimétrie

Magnétisme

Références

Annexes

Densité des roches

Propriétés magnétiques  
des roches

Aimantation rémanente

Susceptibilités

Démagnétisation

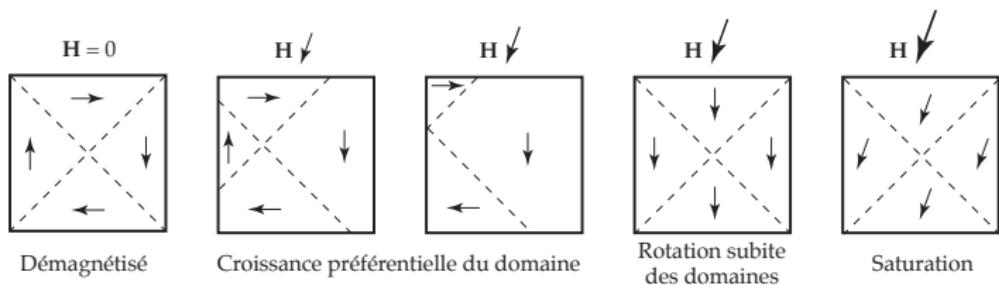
- Sous l'effet d'un **H** externe, les parois se déplacent ;
  - les domaines orientés selon **H** croissent ;
  - il y a augmentation de la magnétisation.
- Si l'intensité augmente, il y a rotation des domaines ;
  - augmentation accrue de la magnétisation.
- Donne lieu a des  $\chi$  élevés.

# Ferromagnétisme

Gravimétrie  
Magnétisme  
Références  
Annexes

Densité des roches  
Propriétés magnétiques  
des roches  
Aimantation rémanente  
Susceptibilités  
Démagnétisation

- L'alignement des domaines donne lieu à une magnétisation importante (susceptibilité élevée).



Gravimétrie

Magnétisme

Références

Annexes

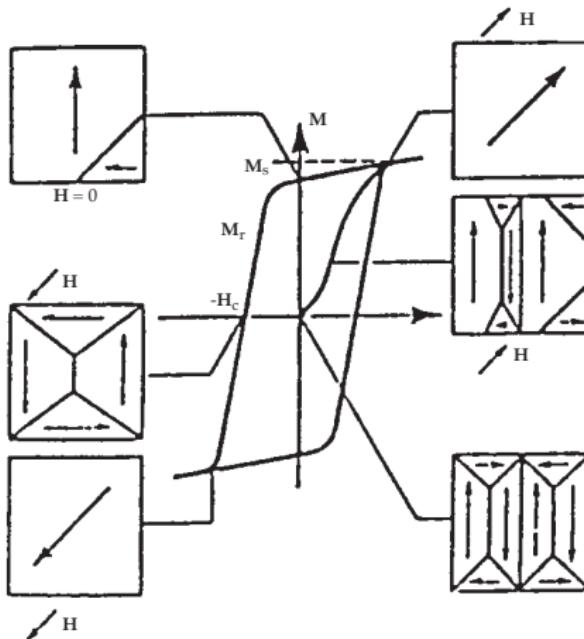
Densité des roches

Propriétés magnétiques  
des roches

Aimantation rémanente

Susceptibilités

Démagnétisation



Gravimétrie

Magnétisme

Références

Annexes

Densité des roches

Propriétés magnétiques  
des roches

Aimantation rémanente

Susceptibilités

Démagnétisation

- Parmi les substances ferromagnétiques :
  - fer;
  - cobalt;
  - nickel.
- Si la température de la matière dépasse le point de Curie, celle-ci passe à l'état paramagnétique.

# Antiferromagnétisme

Gravimétrie

Magnétisme

Références

Annexes

Densité des roches

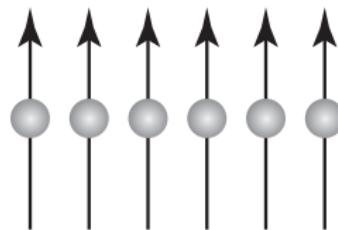
Propriétés magnétiques  
des roches

Aimantation rémanente

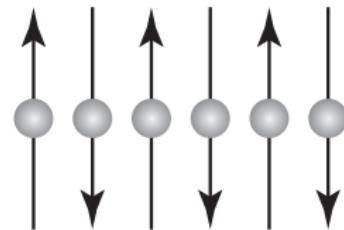
Susceptibilités

Démagnétisation

- Survient lorsque les dipôles au sein d'un cristal sont antiparallèles.



Ferromagnétisme



Antiferromagnétisme

- La susceptibilité  $\chi$  est très faible.
- L'hématite ( $\text{Fe}_2\text{O}_3$ ) : exemple d'antiferromagnétisme.

# Ferrimagnétisme

Gravimétrie

Magnétisme

Références

Annexes

Densité des roches

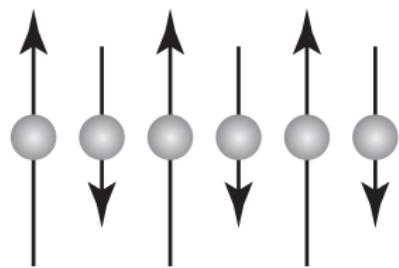
Propriétés magnétiques  
des roches

Aimantation rémanente

Susceptibilités

Démagnétisation

- Les dipôles sont antiparallèles,  
mais de magnitude différente ;
  - le moment net est non nul.
  - magnétite ( $\text{Fe}_3\text{O}_4$ ), ilménite  
( $\text{FeTiO}_3$ ), titanomagnétite,  
oxydes de fer ou de fer et titane.
- Donne lieu à des  $\chi$  élevés.



Ferrimagnétisme

# Ferrimagnétisme

Gravimétrie

Magnétisme

Références

Annexes

Densité des roches

Propriétés magnétiques  
des roches

Aimantation rémanente

Susceptibilités

Démagnétisation

- Existe également si le nombre de dipôles d'une direction est supérieur au nombre dans l'autre direction ;
  - cas de la pyrrhotite.

# Aimantation rémanente

Gravimétrie

Magnétisme

Références

Annexes

Densité des roches

Propriétés magnétiques  
des roches

Aimantation rémanente

Susceptibilités

Démagnétisation

- Une aimantation qui subsiste en l'absence de **H** est dite rémanente.
- Peut être causée par plusieurs mécanismes :
  - thermorémanence;
  - aimantation dépositionnelle ou détritique;
  - aimantation isotherme;
  - aimantation visqueuse;
  - aimantation chimique.

Gravimétrie

Magnétisme

Références

Annexes

Densité des roches

Propriétés magnétiques  
des roches

Aimantation rémanente

Susceptibilités

Démagnétisation

## ● Thermorémanence :

- Une roche chauffée au dessus de son point de Curie;
- Ses dipôles vont s'aligner dans le sens du **H** ambiant en refroidissant;
  - mémoire magnétique.
- Une magnétisation subsiste à T ambiante;
- proportionnelle à **H** au refroidissement.

Gravimétrie

Magnétisme

Références

Annexes

Densité des roches

Propriétés magnétiques  
des roches

Aimantation rémanente

Susceptibilités

Démagnétisation

- Aimantation détritique :
  - lors de la dépositions des sédiments ;
  - les minéraux magnétiques s'alignent avec le **H** ambiant.
- Aimantation isotherme :
  - due aux **H** exceptionnellement élevés (foudre).
- Aimantation visqueuse ;
  - lent déplacement des domaines sous l'effet du **H** ambiant, à **T** ambiante.
- Aimantation chimique :
  - peut survenir lors d'une transformation cristalline, ou causée par diagénèse ou métamorphisme.

# Aimantation rémanente

Gravimétrie

Magnétisme

Références

Annexes

Densité des roches

Propriétés magnétiques  
des roches

Aimantation rémanente

Susceptibilités

Démagnétisation

- L'intensité de l'aimantation rémanente  $\mathbf{M}_r$  peut dépasser l'aimantation induite  $\mathbf{M}_i$ ;
- Le rapport de Königsberger est défini comme  $Q = \mathbf{M}_r / \mathbf{M}_i = \mathbf{M}_r / \chi(\mathbf{H} / \mu_0)$ ;
- La direction de  $\mathbf{M}_r$  n'est pas nécessairement la même que celle de  $\mathbf{M}_i$ 
  - La résultante n'est plus alignée dans le champ  $\mathbf{H}$  ambiant.

Gravimétrie

Magnétisme

Références

Annexes

Densité des roches

Propriétés magnétiques  
des roches

**Aimantation rémanente**

Susceptibilités

Démagnétisation

- Le rapport  $Q$  peut valoir

- $\approx 1$  pour les roches ignées (cristallisation lente);
- $\approx 10$  pour les roches volcaniques;
- $\approx 30-50$  pour les roches basaltiques (cristallisation rapide);
- $< 1$  pour les roches sédimentaires et métamorphique, sauf si Fe présent.

# Magnétisme des roches

Gravimétrie

Magnétisme

Références

Annexes

Densité des roches

Propriétés magnétiques  
des roches

Aimantation rémanente

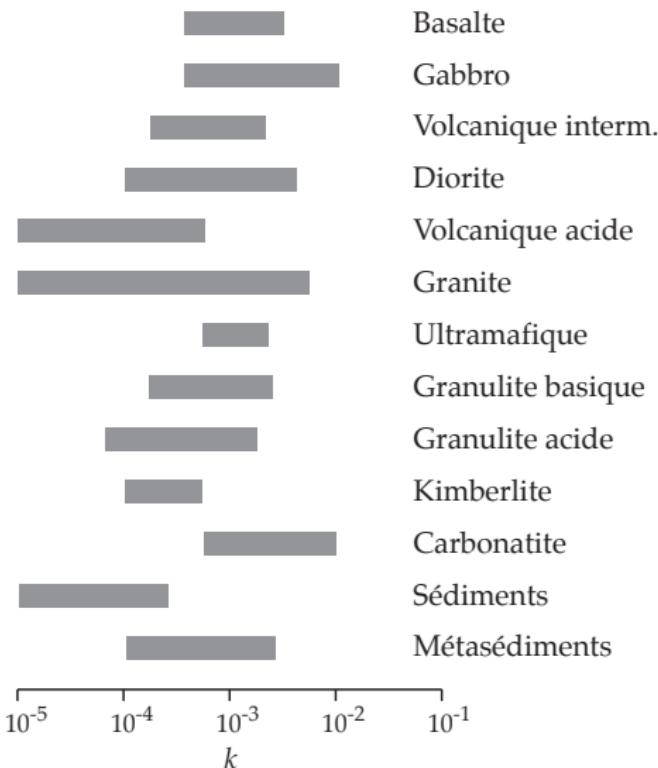
Susceptibilités

Démagnétisation

- La plupart des minéraux ont une  $\chi$  faible;
- La nature magnétique d'une roche est due à une petite quantité de minéraux magnétiques;
- Deux groupes géochimiques :
  - oxydes de fer (les plus courants);
    - magnétite, hématite...
  - sulfures de fer;
    - pyrrhotite.

# Susceptibilité

Gravimétrie  
Magnétisme  
Références  
Annexes  
Densité des roches  
Propriétés magnétiques des roches  
Aimantation rémanente  
**Susceptibilités**  
Démagétisation



# Susceptibilité

[Gravimétrie](#)[Magnétisme](#)[Références](#)[Annexes](#)[Densité des roches](#)[Propriétés magnétiques  
des roches](#)[Aimantation rémanente](#)[Susceptibilités](#)[Démagnétisation](#)

Roche/minéral	Plage	Moyenne
Dolomite	0 – 0.0009	0.0001
Calcaire	0 – 0.003	0.0003
Grès	0 – 0.02	0.0004
Schiste argileux	0.00001 – 0.015	0.0006
Amphibolite		0.0007
Schiste	0.0003 – 0.003	0.0014
Phyllite		0.0015
Gneiss	0.0001 – 0.025	
Quartzite		0.004
Serpentine	0.003 – 0.017	
Ardoise	0 – 0.035	0.006

Valeurs en SI

# Susceptibilité

Gravimétrie  
Magnétisme  
Références  
Annexes  
Densité des roches  
Propriétés magnétiques des roches  
Aimantation rémanente  
Susceptibilités  
Démagnétisation

Roche/minéral	Plage	Moyenne
Granite	0 – 0.05	0.0025
Rhyolite	0.0002 – 0.035	
Dolorite	0.001 – 0.035	0.017
Augite-syenite	0.03 – 0.04	
Olivine		0.025
Diabase	0.001 – 0.16	0.055
Porphyre	0.0003 – 0.2	0.060
Gabbro	0.001 – 0.09	0.07
Basaltes	0.0002 – 0.175	0.07
Diorite	0.0006 – 0.12	0.085
Pyroxénite		0.125
Péridotite	0.09 – 0.2	0.15
Andésite		0.16

Valeurs en SI

# Susceptibilité

Gravimétrie  
Magnétisme  
Références  
Annexes  
Densité des roches  
Propriétés magnétiques des roches  
Aimantation rémanente  
Susceptibilités  
Démagnétisation

Roche/minéral	Plage	Moyenne
Graphite		$1 \times 10^{-4}$
Quartz		$-1 \times 10^{-5}$
Anhydrite, gypse		$-1 \times 10^{-5}$
Calcite	$-1 \times 10^{-6} - -1 \times 10^{-5}$	
Charbon		$2 \times 10^{-5}$
Argiles		$2 \times 10^{-4}$
Chalcopyrite		$4 \times 10^{-4}$
Sphalérite		$7 \times 10^{-4}$
Cassitérite		$9 \times 10^{-4}$
Sidérite	$1 \times 10^{-3} - 4 \times 10^{-3}$	
Pyrite	$5 \times 10^{-5} - 5 \times 10^{-3}$	$1.5 \times 10^{-3}$
Limonite		$2.5 \times 10^{-3}$
Arsénopyrite		$3 \times 10^{-3}$

Valeurs en SI

# Susceptibilité

Gravimétrie

Magnétisme

Références

Annexes

Densité des roches

Propriétés magnétiques  
des roches

Aimantation rémanente

Susceptibilités

Démagnétisation

Roche/minéral	Plage	Moyenne
Hématite	$5 \times 10^{-5}$ – 0.035	$6.5 \times 10^{-3}$
Chromite	0.003 – 0.11	$7 \times 10^{-3}$
Franklinite		0.43
Pyrrhotite	0.001 – 6.0	1.5
Ilménite	0.3 – 3.5	1.8
Magnétite	1.2 – 19.2	6.0

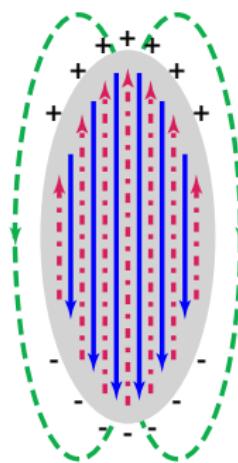
Valeurs en SI

# Cause de la démagnétisation

Gravimétrie  
Magnétisme  
Références  
Annexes  
Densité des roches  
Propriétés magnétiques des roches  
Aimantation rémanente  
Susceptibilités  
Démagnétisation

- Un objet magnétique placé dans un champ  $\mathbf{H}$  ambiant aura des «pôles» aux extrémités;

— Magnétisation  
- - - Démagnétisation  
- - - Champ externe



- Ces pôles génèrent un champ de démagnétisation interne  $\mathbf{H}_d$ .

# Observations

Gravimétrie

Magnétisme

Références

Annexes

Densité des roches

Propriétés magnétiques  
des roches

Aimantation rémanente

Susceptibilités

Démagnétisation

- Plus les pôles sont rapprochés, plus  $\mathbf{H}_d$  est élevé;
- Le champ  $\mathbf{H}_d$  a pour effet de réduire l'effet de  $\mathbf{H}$  sur la magnétisation du corps;
- Le champ  $\mathbf{H}_d$  est proportionnel à  $\mathbf{M}$ ;
- Le facteur de démagnétisation  $N$  est la constante de proportionnalité

$$\mathbf{H}_d = N\mathbf{M}. \quad (118)$$

# Susceptibilité apparente

Gravimétrie  
Magnétisme  
Références  
Annexes  
Densité des roches  
Propriétés magnétiques des roches  
Aimantation rémanente  
Susceptibilités  
Démagnétisation

- Le champ interne, dans l'objet, est

$$\mathbf{H}_i = \mathbf{H} - \mathbf{H}_d = \mathbf{H} - N\mathbf{M};$$

- La susceptibilité apparente  $k_a$  se distingue de la susceptibilité intrinsèque  $k$  en raison du facteur de démagnétisation :

$$k = \frac{\mathbf{M}}{\mathbf{H}_i};$$

$$k_a = \frac{\mathbf{M}}{\mathbf{H}};$$

$$\mathbf{M} = k\mathbf{H}_i = k_a (\mathbf{H}_i + Nk\mathbf{H}_i);$$

$$k_a = \frac{k}{1 + Nk}. \quad (119)$$

# Le facteur de démagnétisation

Gravimétrie  
Magnétisme  
Références  
Annexes  
Densité des roches  
Propriétés magnétiques des roches  
Aimantation rémanente  
Susceptibilités  
Démagnétisation

- Le facteur  $N$  dépend de la forme du corps;
- Règle générale :  $N_x + N_y + N_z = 1$ ;
- Pour une sphère :  $N_x = N_y = N_z = \frac{1}{3}$ ;
- Pour une tige infinie :
  - Perpendiculaire à l'axe :  $N_{\perp} = \frac{1}{2}$ ;
  - Parallèle à l'axe :  $N_{\parallel} = 0$ ;
- Pour une feuille mince infinie :
  - Perpendiculaire au plan :  $N_{\perp} = 1$ ;
  - Parallèle au plan :  $N_{\parallel} = 0$ ;
- On observe donc une anisotropie pour les corps ayant une dimension plus petite que les autres, causée par la démagnétisation;
  - cette anisotropie provoque une déviation de la magnétisation  $\mathbf{M}$  par rapport au champ  $\mathbf{H}$ .

# Influence effective

Gravimétrie

Magnétisme

Références

Annexes

Densité des roches

Propriétés magnétiques  
des roches

Aimantation rémanente

Susceptibilités

Démagnétisation

- La démagnétisation produit un effet notable si  $k > 0.01$  ;
- En général, significatif pour
  - pyrrhotite massive ;
  - roche avec plus de 5-10% de magnétite.
- Pour un corps donné, le facteur  $N$  est constant si la magnétisation est uniforme.