

Données et
modèles

Problème discret

Systèmes linéaires

Difficultés

Exemples

Nature aléatoire
des données

Algèbre linéaire –
Rappels

Références

Modélisation et inversion en géophysique

4 - Inversion : Introduction

Bernard Giroux
(bernard.giroux@ete.inrs.ca)

Institut national de la recherche scientifique
Centre Eau Terre Environnement

Version 1.1.3
Hiver 2019

Données et
modèles

Problème discret

Systèmes linéaires

Difficultés

Exemples

Nature aléatoire
des données

Algèbre linéaire –
Rappels

Références

Données et modèles

Données et
modèles

Problème discret

Systèmes linéaires

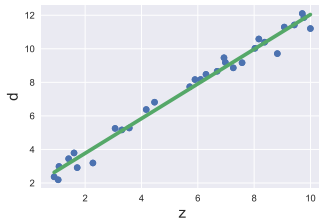
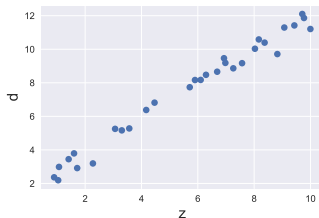
Difficultés

Exemples

Nature aléatoire
des données

Algèbre linéaire –
Rappels

Références



Données et
modèles

Problème discret

Systèmes linéaires

Difficultés

Exemples

Nature aléatoire
des données

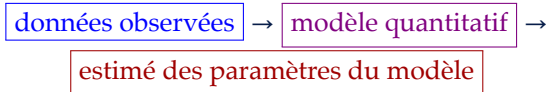
Algèbre linéaire –
Rappels

Références

- Problème direct



- Problème inverse



- Les données mesurées, notées d , constituent le point de départ de l'inversion.
- L'objectif est d'obtenir une information caractérisant l'objet étudié;
 - Cette information prends la forme de valeurs numériques : les paramètres du modèle, notés m .
- Les lois de la physique permettent de relier m et d ;
 - Ces lois sont décrites par une fonction G , telle que

$$G(m) = d. \quad (1)$$

- Les données peuvent être fonction du temps et/ou de l'espace, et sont généralement une série d'observations *discrètes*.

- En pratique, les données mesurées contiennent une erreur expérimentale.
- On assume que les données sont la somme des mesures obtenues d'une expérience "parfaite", notées d_{vrai} , et d'un bruit η , i.e.

$$d = G(m_{\text{vrai}}) + \eta \quad (2)$$

$$= d_{\text{vrai}} + \eta, \quad (3)$$

où

- d_{vrai} satisfait l'éq. (1) lorsque m est égal au modèle vrai m_{vrai} ;
- la fonction G représente exactement la réalité.
- La présence de η , même faible, peut faire en sorte que m retrouvé par inversion soit très différent de m_{vrai} .
- En général, il existe une infinité de modèles m différents de m_{vrai} qui s'ajustent à d_{vrai} .

Données et
modèles

Problème discret

Systèmes linéaires

Difficultés

Exemples

Nature aléatoire
des données

Algèbre linéaire –
Rappels

Références

Problème discret

Problème discret

Données et
modèles

Problème discret

Systèmes linéaires

Difficultés

Exemples

Nature aléatoire
des données

Algèbre linéaire –
Rappels

Références

- La plupart du temps, le modèle est décrit par un nombre fini, M , de paramètres, i.e.

$$\mathbf{m} = [m_0, m_1, m_2, \dots, m_{M-1}] \quad (4)$$

- De façon similaire, on dispose d'un nombre fini, N , de données

$$\mathbf{d} = [d_0, d_1, d_2, \dots, d_{N-1}] \quad (5)$$

- On a alors affaire à un problème inverse discret de la forme

$$G(\mathbf{m}) = \mathbf{d}. \quad (6)$$

- Dans le cas contraire où le modèle et les données sont des fct continues, l'estimation de m à partir de d est un problème inverse continu ;
 - On peut souvent approximer un problème continu par un problème discret.

Données et
modèles

Problème discret

Systèmes linéaires

Difficultés

Exemples

Nature aléatoire
des données

Algèbre linéaire –
Rappels

Références

- Lorsque le nombre de paramètres M est faible, on parle d'estimation de paramètres;
- *A contrario*, lorsque M est élevé et qu'il est nécessaire d'appliquer des contraintes pour stabiliser la solution, on parle de problème inverse;
 - On verra plus loin que des contraintes sont nécessaires lorsque le système à résoudre est *mal conditionné*.

Données et
modèles

Problème discret

Systèmes linéaires

Difficultés

Exemples

Nature aléatoire
des données

Algèbre linéaire –
Rappels

Références

Systèmes linéaires

Données et
modèles

Problème discret

Systèmes linéaires

Difficultés

Exemples

Nature aléatoire
des données

Algèbre linéaire –
Rappels

Références

- Les systèmes linéaires sont un type de modèle mathématique trouvant plusieurs applications;
- Les systèmes linéaires obéissent au principe de superposition :

$$G(m_1 + m_2) = G(m_1) + G(m_2) \quad (7)$$

et à la mise à l'échelle :

$$G(\alpha m) = \alpha G(m). \quad (8)$$

- Dans le cas des problèmes inverses discrets, le problème devient un système linéaire d'équations algébriques :

$$G(\mathbf{m}) = \mathbf{G}\mathbf{m} = \mathbf{d}. \quad (9)$$

où \mathbf{G} est de taille $N \times M$.

Données et
modèles

Problème discret

Systèmes linéaires

Difficultés

Exemples

Nature aléatoire
des données

Algèbre linéaire –
Rappels

Références

- En géophysique, les modèles linéaires sont souvent utilisables ;
- La raison principale est que l'objet d'étude varie peu par rapport à son état d'équilibre ;
- Une relation linéaire permet de décrire adéquatement le phénomène ;
- Par exemple en sismique, les contraintes générées par le passage des ondes sont très faibles p/r aux modules d'élasticité ;
 - La relation contrainte / déformation est alors quasi linéaire.
- La gravimétrie et le magnétisme sont d'autres exemples où les champs sont faibles et où des modèles linéaires s'appliquent.

Données et
modèles

Problème discret

Systèmes linéaires

Difficultés

Exemples

Nature aléatoire
des données

Algèbre linéaire –
Rappels

Références

Difficultés

Données et
modèles

Problème discret

Systèmes linéaires

Difficultés

Exemples

Nature aléatoire
des données

Algèbre linéaire –
Rappels

Références

- Il est crucial de demeurer critique face aux résultats de l'inversion;
- La raison principale est qu'il peut y avoir plusieurs modèles qui s'ajustent aussi bien aux données;
- Les éléments à l'origine de ce phénomène sont :
 - ❶ l'existence d'une solution;
 - ❷ la non unicité de la solution;
 - ❸ l'instabilité du système.

Données et
modèles

Problème discret

Systèmes linéaires

Difficultés

Exemples

Nature aléatoire
des données

Algèbre linéaire –
Rappels

Références

- Il est possible qu'aucun modèle ne s'ajuste *parfaitement* aux données ;
- Les raisons sont :
 - le modèle physique est approximatif ;
 - les données contiennent du bruit.
- Si l'ajustement n'est pas parfait, il est fort probable que le modèle estimé ne soit qu'une approximation du modèle réel.

Non unicité de la solution

Données et
modèles

Problème discret

Systèmes linéaires

Difficultés

Exemples

Nature aléatoire
des données

Algèbre linéaire –
Rappels

Références

- Advenant que des solutions exactes existent, elles peuvent être non uniques, *même pour un nombre infini de données* ;
- L'exemple classique est la réponse d'une sphère en gravimétrie, qui dépend de la masse de la sphère et non de la distribution de densité.
 - Deux sphères donneront exactement la même réponse si

$$\rho_1 \frac{4}{3} \pi r_1^3 = \rho_2 \frac{4}{3} \pi r_2^3$$

- La non unicité est une caractéristique des systèmes linéaires pour lesquelles les équations ne sont pas toutes linéairement indépendantes ;
 - Le degré d'indépendance peut être évalué par l'analyse de la *résolution du modèle*.

Données et
modèles

Problème discret

Systèmes linéaires

Difficultés

Exemples

Nature aléatoire
des données

Algèbre linéaire –
Rappels

Références

- Une solution est instable lorsqu'un faible changement dans une mesure (e.g., un faible bruit η) produit une variation importante du modèle estimé;
- De tels problèmes sont dits *mal conditionnés* dans le cas des problèmes discrets, ou *mal posés* dans le cas continu;
- Il est possible de stabiliser la solution en imposant des contraintes qui vont biaiser (d'une façon souhaitée) la solution;
 - on parle alors de *régularisation*.

Données et
modèles

Problème discret

Systèmes linéaires

Difficultés

Exemples

Nature aléatoire
des données

Algèbre linéaire –
Rappels

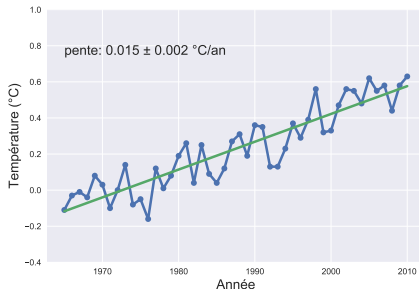
Références

Exemples

Exemple 1 : Ajuster une droite

Données et modèles
Problème discret
Systèmes linéaires
Difficultés
Exemples
Nature aléatoire des données
Algèbre linéaire – Rappels
Références

- On dispose d'un certain nombre (N) de mesures de température prises à des temps t_i dans l'atmosphère.
 - Ces données constituent le vecteur $\mathbf{d} = [T_0, T_1, T_2, \dots, T_{N-1}]^T$.
- On assume que la température obéit à un modèle linéaire en fonction du temps : $T = a + bt$;
 - L'ordonnée à l'origine a et la pente b sont les deux paramètres du modèle, i.e. $\mathbf{m} = [a, b]^T$.



Exemple 1 : Ajuster une droite

Données et
modèles

Problème discret

Systèmes linéaires

Difficultés

Exemples

Nature aléatoire
des données

Algèbre linéaire –
Rappels

Références

- Selon le modèle linéaire, la température doit satisfaire

$$T_0 = a + bt_0 \quad (10)$$

$$T_1 = a + bt_1 \quad (11)$$

$$\vdots \quad (12)$$

$$T_{N-1} = a + bt_{N-1} \quad (13)$$

- Sous forme matricielle, on a

$$\underbrace{\begin{bmatrix} T_0 \\ T_1 \\ \vdots \\ T_{N-1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{d}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & t_0 \\ 1 & t_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & t_{N-1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{G}} \underbrace{\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}}_{\mathbf{m}} \quad (14)$$

Exemple 2 : Profilage sismique vertical

Données et
modèles

Problème discret

Systèmes linéaires

Difficultés

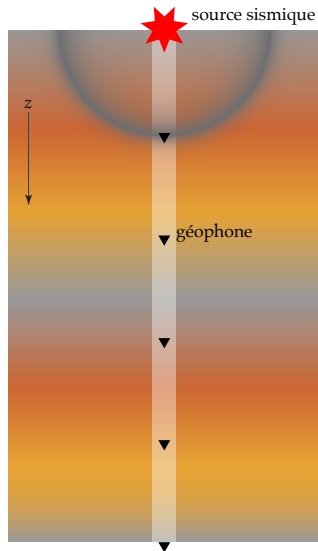
Exemples

Nature aléatoire
des données

Algèbre linéaire –
Rappels

Références

- Avec le profilage sismique vertical, on cherche à déterminer la distribution verticale de la vitesse sismique V ;
- Des géophones sont placés dans un forage et une source est actionnée à la surface;
- L'onde sismique est enregistrée aux géophones, ce qui permet de déterminer le temps de parcours t .



Exemple 2 : Profilage sismique vertical

Données et
modèles

Problème discret

Systèmes linéaires

Difficultés

Exemples

Nature aléatoire
des données

Algèbre linéaire –
Rappels

Références

- Le problème est non linéaire lorsque défini en terme de vitesse;
- Le problème devient linéaire si exprimé en terme de *lenteur* (s), l'inverse de la vitesse, i.e. $s = 1/V$.
- Le temps de parcours à une profondeur z vaut

$$t(z) = \int_0^z s(l)dl \quad (15)$$

$$= \int_0^\infty s(l)H(z-l)dl \quad (16)$$

où H est la fonction de Heaviside, qui vaut 1 si $z-l \geq 0$ et 0 si $z-l < 0$.

Exemple 2 : Profilage sismique vertical

Données et
modèles

Problème discret

Systèmes linéaires

Difficultés

Exemples

Nature aléatoire
des données

Algèbre linéaire –
Rappels

Références

- Le problème est résolu en discrétisant le milieu en couches
- Si le modèle compte M couches et le levé compte N géophones, l'intégrale devient, pour un i^e géophone à une position y_i

$$t_i = \sum_{j=0}^{M-1} H(y_i - z_j) s_j \Delta z \quad (17)$$

où $M/N = \Delta y / \Delta z$ est un entier.

- Le vecteur des données est $\mathbf{d} = [t_0, t_1, t_2, \dots, t_{N-1}]^T$;
- Les paramètres du modèle est sont regroupés dans le vecteur $\mathbf{m} = [s_0, s_1, s_2, \dots, s_{M-1}]^T$;
- La matrice \mathbf{G} sera alors de dimension $N \times M$ et contiendra les termes $H(y_i - z_j) \Delta z$.

Exemple 2 : Profilage sismique vertical

Données et
modèles

Problème discret

Systèmes linéaires

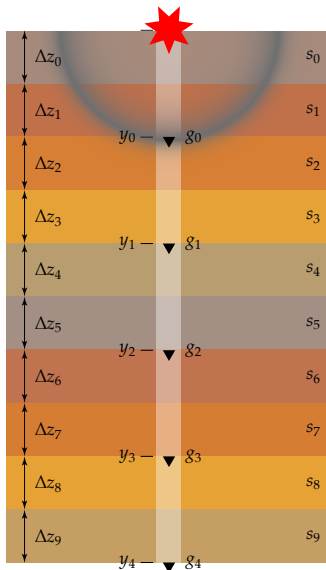
Difficultés

Exemples

Nature aléatoire
des données

Algèbre linéaire –
Rappels

Références



Exemple 2 : Profilage sismique vertical

Données et
modèles

Problème discret

Systèmes linéaires

Difficultés

Exemples

Nature aléatoire
des données

Algèbre linéaire –
Rappels

Références

- Pour le cas illustré à la figure précédente, $M/N = 2$.
- Sous forme matricielle, pour l'ensemble des données de la figure, on obtient

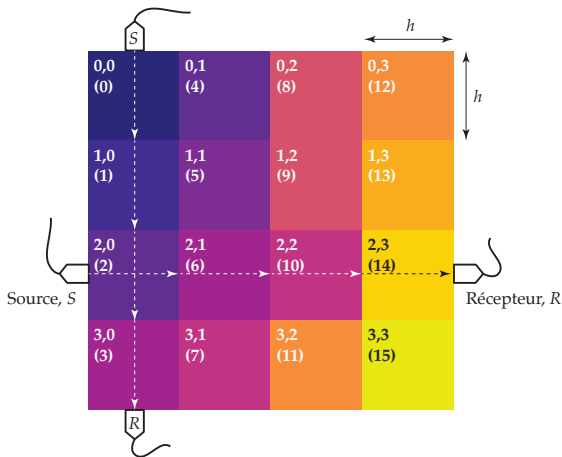
$$\underbrace{\begin{bmatrix} t_0 \\ t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \end{bmatrix}}_{\mathbf{d}} = \Delta z \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{G}} \underbrace{\begin{bmatrix} s_0 \\ s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_9 \end{bmatrix}}_{\mathbf{m}} \quad (18)$$

- Chaque ligne i contient $(i + 1) \cdot M/N$ éléments égaux à Δz et $M - (i + 1) \cdot M/N$ zéros.

Exemple 3 : Tomographie

Données et modèles
Problème discret
Systèmes linéaires
Difficultés
Exemples
Nature aléatoire des données
Algèbre linéaire –
Rappels
Références

- En tomographie, on cherche à évaluer la vitesse de propagation ou l'atténuation des ondes dans un milieu.
- Soit l'exemple d'un mur de briques de vitesses différentes :



Exemple 3 : Tomographie

Données et
modèles

Problème discret

Systèmes linéaires

Difficultés

Exemples

Nature aléatoire
des données

Algèbre linéaire –
Rappels

Références

- Deux séries de mesures sont faites, une première le long des colonnes et la seconde le long des lignes, pour un total de $N=8$ mesures.
- Le vecteur des données est $\mathbf{d} = [t_0, t_1, t_2, \dots, t_7]^T$
- On suppose que chaque brique est de vitesse V uniforme ;
- Le temps de parcours dans une brique j est proportionnel à la distance parcourue dans la brique, h , et vaut $t_j = hs_j$, où s est la lenteur.
- Le modèle comporte $M=16$ paramètres, et est dans ce cas $\mathbf{m} = [s_0, s_1, s_2, \dots, s_{15}]^T$

Exemple 3 : Tomographie

Données et
modèles

Problème discret

Systèmes linéaires

Difficultés

Exemples

Nature aléatoire
des données

Algèbre linéaire –
Rappels

Références

- On relie les données aux paramètres du modèle par

$$\text{colonne 1 : } t_0 = hs_0 + hs_1 + hs_2 + hs_3$$

$$\text{colonne 2 : } t_1 = hs_4 + hs_5 + hs_6 + hs_7$$

$$\vdots$$

$$\text{ligne 3 : } t_6 = hs_2 + hs_6 + hs_{10} + hs_{14}$$

$$\text{ligne 4 : } t_7 = hs_3 + hs_7 + hs_{11} + hs_{15}$$

- Sous forme matricielle, nous avons

$$\begin{bmatrix} t_0 \\ t_1 \\ \vdots \\ t_6 \\ t_7 \end{bmatrix} = h \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_0 \\ s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_{15} \end{bmatrix} \quad (19)$$

Données et
modèles

Problème discret

Systèmes linéaires

Difficultés

Exemples

**Nature aléatoire
des données**

Algèbre linéaire –
Rappels

Références

Nature aléatoire des données

Nature aléatoire des données

Données et
modèles

Problème discret

Systèmes linéaires

Difficultés

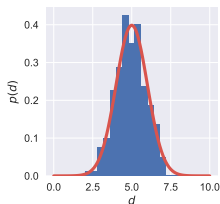
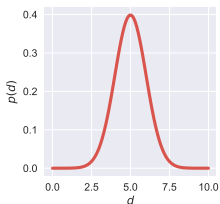
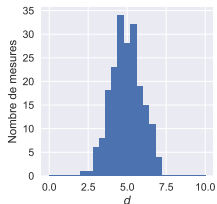
Exemples

Nature aléatoire
des données

Algèbre linéaire –
Rappels

Références

- Invariablement, une mesure expérimentale contient du bruit;
- Une observation répétée *au même point* donnera des mesures différentes;
 - On dit de la variable observée que c'est une **variable aléatoire**, et chaque mesure est une **réalisation** de cette variable aléatoire;
- Une variable aléatoire possède des propriétés précises qui dictent la *distribution* des valeurs observées;
 - Les réalisations permettent *d'estimer* ces propriétés.



Données et
modèles

Problème discret

Systèmes linéaires

Difficultés

Exemples

Nature aléatoire
des données

Algèbre linéaire –
Rappels

Références

- Les propriétés d'une variables aléatoire d sont spécifiées par sa *fonction de densité de probabilité* (f.d.p), notée $p(d)$;
 - Cette fonction donne la probabilité qu'une réalisation aura une valeur au voisinage de d .
- La fonction $p(d)$ est souvent compliquée et ne peut pas être évaluée directement.
- On résume plutôt ses caractéristiques principales avec quelques grandeurs particulières, par exemple :
 - la moyenne, notée $\langle d \rangle$;
 - la variance, notée σ^2 .

Données corrélées

Données et
modèles

Problème discret

Systèmes linéaires

Difficultés

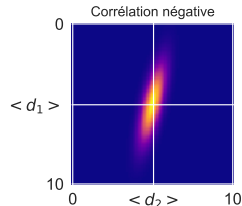
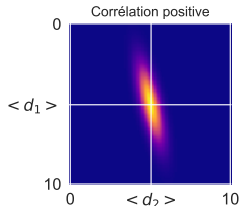
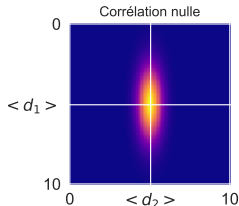
Exemples

Nature aléatoire
des données

Algèbre linéaire –
Rappels

Références

- Les levés géophysiques sont réalisés en prenant des mesures en plusieurs points;
- Il peut arriver que les mesures soient corrélées;
 - Des valeurs élevées en un point surviennent de façon consistante avec d'autres valeurs élevées (ou faibles) en un autre point.



Données et
modèles

Problème discret

Systèmes linéaires

Difficultés

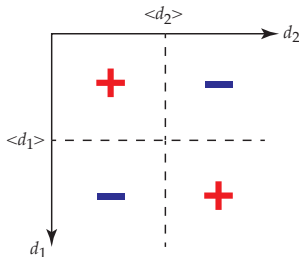
Exemples

Nature aléatoire
des données

Algèbre linéaire –
Rappels

Références

- Le degré de corrélation de deux variables d_1 et d_2 peut être quantifié en séparant la f.d.p. conjointe en 4 quadrants;



- Si les variables ne sont pas corrélées, la somme des valeurs de la f.d.p. conjointe de chaque quadrant sera nulle.

Données et
modèles

Problème discret

Systèmes linéaires

Difficultés

Exemples

Nature aléatoire
des données

Algèbre linéaire –
Rappels

Références

- Si la fonction permettant de construire les quadrants est $[d_1 - \langle d_1 \rangle][d_2 - \langle d_2 \rangle]$, la mesure du degré de corrélation est appelée **covariance**;
- Pour un ensemble de N données ayant chacune K réalisations regroupées dans une matrice \mathbf{D} de taille $K \times N$, la covariance expérimentale vaut

$$[\text{cov } \mathbf{d}]_{ij}^{\text{est}} = \frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} (D_{ki} - \langle D_i \rangle^{\text{est}}) (D_{kj} - \langle D_j \rangle^{\text{est}}). \quad (20)$$

où $\langle D_i \rangle^{\text{est}}$ est la moyenne expérimentale de la i^e donnée.

Données et
modèles

Problème discret

Systèmes linéaires

Difficultés

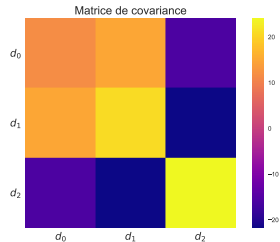
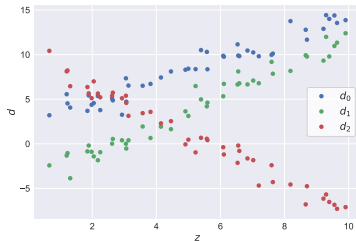
Exemples

Nature aléatoire
des données

Algèbre linéaire –
Rappels

Références

- Exemple de matrice de covariance pour trois variables aléatoires :



Données et
modèles

Problème discret

Systèmes linéaires

Difficultés

Exemples

Nature aléatoire
des données

**Algèbre linéaire –
Rappels**

Définitions

Références

Algèbre linéaire – Rappels

Algèbre linéaire – Rappels

Données et
modèles

Problème discret

Systèmes linéaires

Difficultés

Exemples

Nature aléatoire
des données

Algèbre linéaire –
Rappels

Définitions

Références

- Un système linéaire peut être résolu en utilisant l'élimination de Gauss-Jordan :

- Soit le système

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 14$$

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 11$$

$$x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 19$$

- En soustrayant la 1^{re} équation aux deux autres :

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 14$$

$$-x_3 = -3$$

$$x_2 + x_3 = 5$$

- On interchange les 2^e et 3^e équations

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 14$$

$$x_2 + x_3 = 5$$

$$-x_3 = -3$$

Données et
modèles

Problème discret

Systèmes linéaires

Difficultés

Exemples

Nature aléatoire
des données

Algèbre linéaire –
Rappels

Définitions

Références

- On élimine x_2 de la 1^{re} équation en soustrayant 2 fois la 2^e (on change le signe de la 3^e au passage...)

$$x_1 + x_3 = 4$$

$$x_2 + x_3 = 5$$

$$x_3 = 3$$

- On élimine finalement x_3 des deux premières équations pour arriver à la solution :

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = 2$$

$$x_3 = 3$$

Données et
modèles

Problème discret

Systèmes linéaires

Difficultés

Exemples

Nature aléatoire
des données

Algèbre linéaire –
Rappels

Définitions

Références

- On peut procéder avec une *matrice augmentée*, définie pour l'exemple précédent par

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 1 & 2 & 2 & 11 \\ 1 & 3 & 4 & 19 \end{array} \right]$$

- En effectuant les opérations de l'élimination de Gauss-Jordan sur les lignes de cette matrice, on arrive à

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right]$$

et les termes de la colonne de droite sont la solution.

Données et
modèles

Problème discret

Systèmes linéaires

Difficultés

Exemples

Nature aléatoire
des données

Algèbre linéaire –
Rappels

Définitions

Références

- Une matrice est dite *échelonnée réduite en lignes* (ERL)¹ si :
 - le premier élément non nul sur chaque ligne est un 1. Cet élément est appelé un *élément pivot*, la colonne où apparaît cet élément est une *colonne pivot*;
 - À part l'élément pivot, tout les autres éléments d'une colonne sont des 0;
 - Chaque élément pivot est à droite de l'élément pivot des lignes précédentes;
 - Des lignes ne comportant que des 0 sont situées au bas de la matrice.
- La résolution d'un système linéaire sous une forme de matrice augmentée consiste à la transformer en la forme ERL.

1. *reduced row echelon form* (RREF) en anglais

Données et
modèles

Problème discret

Systèmes linéaires

Difficultés

Exemples

Nature aléatoire
des données

Algèbre linéaire –
Rappels

Définitions

Références

- Soit le système à deux équations

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0$$

- La forme ERL du système est

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right],$$

ce qui revient à

$$x_1 = 0$$

$$x_2 + x_3 = 0$$

- Clairement, x_1 doit être 0;
- Par contre, x_2 et x_3 ne sont pas déterminés; on peut traiter x_3 comme une variable libre et alors $x_2 = -x_3$.

- Une **matrice identité** \mathbf{I} est une matrice comportant des 1 sur sa diagonale, les autres éléments étant des 0.
- Soit \mathbf{A} une matrice n par m . Si une matrice \mathbf{B} existe telle que

$$\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}, \quad (21)$$

alors \mathbf{B} est **l'inverse** de \mathbf{A} , et l'on note $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$.

- Des vecteurs $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ sont linéairement indépendants si le système

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \dots + c_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$$

n'admet que la solution $\mathbf{c} = \mathbf{0}$.

- Si les colonnes d'une matrice \mathbf{A} sont linéairement indépendantes, alors l'inverse de \mathbf{A} existe.

Exemple

- Soit la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

- On peut déterminer si les colonnes sont indépendantes à partir de la forme ERL de $\mathbf{A}\mathbf{c} = \mathbf{0}$, qui est

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

- Les solutions sont

$$\begin{aligned} c_1 &= c_3 \\ c_2 &= -2c_3 \\ 0c_3 &= 0 \end{aligned} \quad \text{et donc} \quad \mathbf{c} = c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Données et
modèles

Problème discret

Systèmes linéaires

Difficultés

Exemples

Nature aléatoire
des données

Algèbre linéaire –
Rappels

Définitions

Références

Exemple (suite)

- En posant $c_3 = 1$, on obtient la solution non nulle

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Puisque \mathbf{c} est différent de $\mathbf{0}$, les colonnes de \mathbf{A} sont linéairement dépendantes et \mathbf{A} n'a pas d'inverse.

Algèbre linéaire – Définitions

Données et
modèles

Problème discret

Systèmes linéaires

Difficultés

Exemples

Nature aléatoire
des données

Algèbre linéaire –
Rappels

Définitions

Références

- On note R^n un espace à n dimensions.
- Un sous-espace W de R^n est un sous-ensemble de R^n qui satisfait :
 - si x et y sont des vecteurs dans W , alors $x + y$ est aussi un vecteur dans W ;
 - si x est un vecteur dans W et s un scalaire réel, alors sx est aussi un vecteur dans W ;
 - **0 étant un vecteur dans W , le sous-espace est non-trivial s'il contient d'autres vecteurs que 0.**
- Par exemple, dans R^3 , le plan

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

est un sous-ensemble de R^n car il satisfait aux critères précédents.

Algèbre linéaire – Définitions

Données et
modèles

Problème discret

Systèmes linéaires

Difficultés

Exemples

Nature aléatoire
des données

Algèbre linéaire –
Rappels

Définitions

Références

- Soit \mathbf{A} une matrice m par n . Le *noyau* (*null space*) de \mathbf{A} , noté $S_0(\mathbf{A})$, est l'ensemble des vecteurs \mathbf{x} tels que $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$.
- On peut montrer que $S_0(\mathbf{A})$ est un sous-espace de R^n .
- En inversion, les propriétés du noyau sont critiques car un noyau non-trivial entraîne la non-unicité de la solution.
- Le noyau d'une matrice \mathbf{A} est déterminé en solutionnant $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$.

Données et
modèles

Problème discret

Systèmes linéaires

Difficultés

Exemples

Nature aléatoire
des données

Algèbre linéaire –
Rappels

Définitions

Références

- Posons que \mathbf{A} vaut

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 9 & 4 \\ 2 & 1 & 7 & 3 \\ 5 & 2 & 16 & 7 \end{bmatrix}$$

- On trouve le noyau de \mathbf{A} à partir de la forme ERL de la matrice augmentée :

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

- Les solutions sont

$$\mathbf{x} = x_3 \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Algèbre linéaire – Définitions

- N'importe quel vecteur dans $S_0(\mathbf{A})$ est une combinaison linéaire de ces vecteurs.
- Supposons que $\mathbf{b} = [22 \ 17 \ 39]^T$.
- Une solution possible au système $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ est $\mathbf{p} = [1 \ 2 \ 1 \ 2]^T$ et n'importe quelle combinaison

$$\mathbf{p} + x_3 \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

sera aussi une solution.

- De fait, si \mathbf{x} est dans $S_0(\mathbf{A})$, alors

$$\mathbf{A}(\mathbf{x} + \mathbf{p}) = \mathbf{Ax} + \mathbf{Ap}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{x} + \mathbf{p}) = \mathbf{0} + \mathbf{b}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{x} + \mathbf{p}) = \mathbf{b}$$

Algèbre linéaire – Définitions

Données et
modèles

Problème discret

Systèmes linéaires

Difficultés

Exemples

Nature aléatoire
des données

Algèbre linéaire –
Rappels

Définitions

Références

- La *base* du sous-espace W est un ensemble de vecteurs $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p$ tels que :
 - n'importe quel vecteur dans W est une combinaison linéaire des vecteurs de base ;
 - les vecteurs de base sont linéairement indépendants.
- Une *base standard* de R^n est un ensemble de vecteurs $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ tels que tout les éléments de \mathbf{e}_i sont des zéros sauf le i^e élément qui vaut 1.

Algèbre linéaire – Définitions

Données et
modèles

Problème discret

Systèmes linéaires

Difficultés

Exemples

Nature aléatoire
des données

Algèbre linéaire –
Rappels

Définitions

Références

- Soit W un sous-espace de R^n avec la base $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_p$. Toutes les bases de W ont p vecteurs et p est la *dimension* de W , notée $\dim W$.
- Soit \mathbf{A} une matrice m par n . L'espace colonne (*range*) de \mathbf{A} , noté $S_p(\mathbf{A})$, est l'ensemble des vecteurs \mathbf{b} tels que $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ possède au moins une solution.
 - Autrement dit, l'espace colonne est l'ensemble des vecteurs \mathbf{b} qui peuvent s'écrire comme une combinaison linéaire des colonnes de \mathbf{A} .
 - L'espace colonne est important en inversion car $S_p(\mathbf{G})$ est constitué de tout les vecteurs \mathbf{d} pour lesquels il y a un modèle \mathbf{m} tel que $\mathbf{G}\mathbf{m} = \mathbf{d}$.
- On peut montrer que $S_p(\mathbf{A})$ correspond aux colonnes pivot de \mathbf{A} et que $S_0(\mathbf{A})$ correspond aux colonnes non pivot. Il découle que

$$\dim N(\mathbf{A}) + \dim S_p(\mathbf{A}) = n$$

- Le **rang** d'une matrice \mathbf{A} est la dimension de $S_p(\mathbf{A})$.

Données et
modèles

Problème discret

Systèmes linéaires

Difficultés

Exemples

Nature aléatoire
des données

Algèbre linéaire –
Rappels

Références

Références

Données et
modèles

Problème discret

Systèmes linéaires

Difficultés

Exemples

Nature aléatoire
des données

Algèbre linéaire –
Rappels

Références

- Aster, R. C., Borchers, B., and Thurber, C. H. (2013). *Parameter Estimation and Inverse Problems*. Academic Press, 2nd edition
- Menke, W. (2012). *Geophysical Data Analysis : Discrete Inverse Theory*. Academic Press, 3rd edition