

# **GEO1303 – Méthodes sismiques**

## **2 - Analyse spectrale et traitement du signal**

Bernard Giroux  
[\(bernard.giroux@ete.inrs.ca\)](mailto:bernard.giroux@ete.inrs.ca)

Institut national de la recherche scientifique  
Centre Eau Terre Environnement

Version 1.0.9  
Automne 2019

Introduction  
Théorie  
Applications  
Références

# Introduction

# Motivation

Introduction  
Théorie  
Applications  
Références

- L'analyse spectrale est une méthodologie permettant d'extraire certaines caractéristiques de nos mesures (appelées ici *signaux*);
- L'analyse spectrale est intéressante car
  - ① elle permet d'observer les données par un angle différent : amélioration de la compréhension du phénomène;
  - ② elle nous donne des outils qui permettent de faciliter et souvent *d'accélérer* les calculs.

Introduction

**Théorie**

Séries de Fourier

Transformée de Fourier

Propriétés de la  
transformée de Fourier

Théorème de la  
convolution

Transformée en deux  
dimensions

Transformée discrète  
de Fourier

Théorème  
d'échantillonnage

L'opérateur  
d'intercorrélation

Transformée de Hilbert

Transformée en Z

Applications

Références

# Théorie

# Séries de Fourier

Introduction

Théorie

Séries de Fourier

Transformée de Fourier

Propriétés de la  
transformée de Fourier

Théorème de la  
convolution

Transformée en deux  
dimensions

Transformée discrète  
de Fourier

Théorème  
d'échantillonnage

L'opérateur  
d'intercorrélation

Transformée de Hilbert

Transformée en Z

Applications

Références

- Le point de départ de l'analyse spectrale est l'**analyse de Fourier**;
- L'étude d'une fonction périodique par les séries de Fourier comprend **deux volets** :
  - ① l'**analyse**, qui consiste en la détermination de la suite de ses coefficients de Fourier;
  - ② la **synthèse**, qui permet de retrouver, en un certain sens, la fonction à l'aide de la suite de ses coefficients.

# Séries de Fourier

Introduction

Théorie

Séries de Fourier

Transformée de Fourier

Propriétés de la transformée de Fourier

Théorème de la convolution

Transformée en deux dimensions

Transformée discrète de Fourier

Théorème d'échantillonnage

L'opérateur d'intercorrélation

Transformée de Hilbert

Transformée en Z

Applications

Références

● Fourier a montré que si :

- ①  $s(t)$  est une fonction périodique, c'est-à-dire si  $s(t + T) = s(t)$  où  $T$  est la période;
- ②  $s(t)$  est continue par morceaux (*piecewise*);
- ③  $s(t)$  possède un nombre fini de max et de min;
- ④  $s(t)$  est telle que  $\int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|dt$  est finie;

alors,  $s(t)$  peut s'écrire :

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{2\pi n t}{T} + b_n \sin \frac{2\pi n t}{T} \right) \quad (1)$$

où  $a_0$ ,  $a_n$  et  $b_n$  sont des constantes à déterminer : les coefficients de Fourier.

# Séries de Fourier

Introduction

Théorie

Séries de Fourier

Transformée de Fourier

Propriétés de la transformée de Fourier

Théorème de la convolution

Transformée en deux dimensions

Transformée discrète de Fourier

Théorème d'échantillonnage

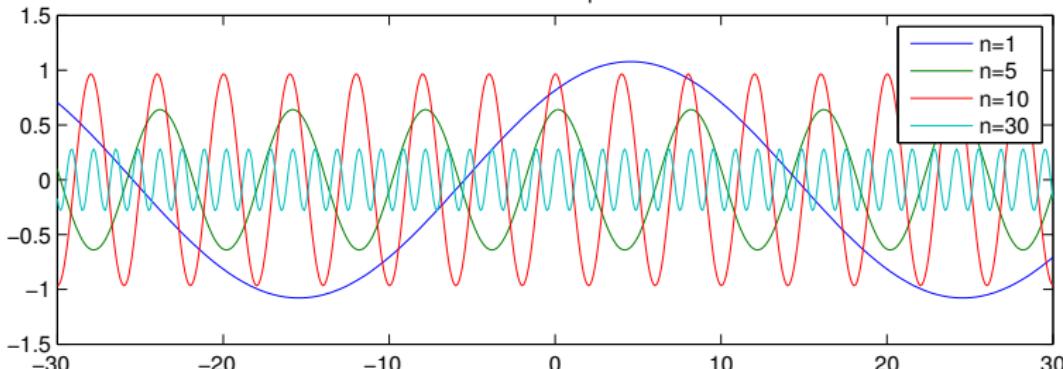
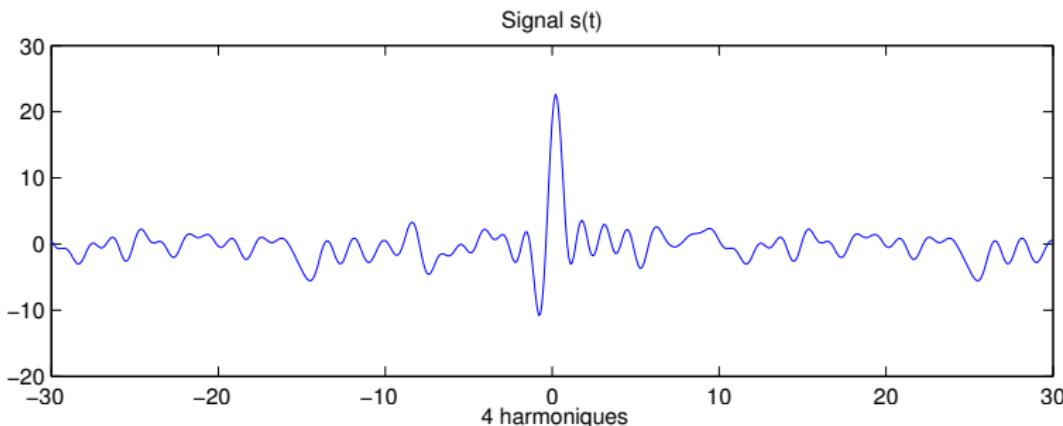
L'opérateur d'intercorrélation

Transformée de Hilbert

Transformée en Z

Applications

Références



# Séries de Fourier

Introduction

Théorie

**Séries de Fourier**

Transformée de Fourier

Propriétés de la  
transformée de Fourier

Théorème de la  
convolution

Transformée en deux  
dimensions

Transformée discrète  
de Fourier

Théorème  
d'échantillonnage

L'opérateur  
d'intercorrélation

Transformée de Hilbert

Transformée en Z

Applications

Références

# Séries de Fourier

Introduction

Théorie

Séries de Fourier

Transformée de Fourier

Propriétés de la transformée de Fourier

Théorème de la convolution

Transformée en deux dimensions

Transformée discrète de Fourier

Théorème d'échantillonnage

L'opérateur d'intercorrélation

Transformée de Hilbert

Transformée en Z

Applications

Références

- $\cos \frac{2\pi nt}{T}$  et  $\sin \frac{2\pi nt}{T}$  représentent des fonctions orthogonales :

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \sin \frac{2\pi nt}{T} \sin \frac{2\pi mt}{T} dt &= \int_0^\infty \cos \frac{2\pi nt}{T} \cos \frac{2\pi mt}{T} dt \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ \frac{T}{2} & \text{si } m = n \end{cases} \end{aligned}$$

$$\int_0^\infty \sin \frac{2\pi nt}{T} \cos \frac{2\pi mt}{T} dt = 0 \quad \forall m, n.$$

# Séries de Fourier

Introduction

Théorie

Séries de Fourier

Transformée de Fourier

Propriétés de la  
transformée de Fourier

Théorème de la  
convolution

Transformée en deux  
dimensions

Transformée discrète  
de Fourier

Théorème  
d'échantillonnage

L'opérateur  
d'intercorrélation

Transformée de Hilbert

Transformée en Z

Applications

Références

- Les coefficients se trouvent en utilisant les propriétés d'orthogonalité :

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{T} \int_0^T s(t) dt; \\ a_n &= \frac{2}{T} \int_0^T s(t) \cos \frac{2\pi nt}{T} dt; \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_0^T s(t) \sin \frac{2\pi nt}{T} dt. \end{aligned} \tag{2}$$

# Séries de Fourier

Introduction

Théorie

Séries de Fourier

Transformée de Fourier

Propriétés de la transformée de Fourier

Théorème de la convolution

Transformée en deux dimensions

Transformée discrète de Fourier

Théorème d'échantillonnage

L'opérateur d'intercorrélation

Transformée de Hilbert

Transformée en Z

Applications

Références

- Exemple de décomposition pour  $s(t) = \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$  :
- Pour  $a_0$

$$\begin{aligned}a_0 &= \frac{2}{T} \int_0^T \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) dt \\&= \frac{2}{T} \left[ \frac{T}{2\pi} \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \right]_0^T \\&= \frac{2}{T} [\sin(2\pi) - \sin(0)] \\&= 0\end{aligned}$$

# Séries de Fourier

Introduction

Théorie

Séries de Fourier

Transformée de Fourier

Propriétés de la transformée de Fourier

Théorème de la convolution

Transformée en deux dimensions

Transformée discrète de Fourier

Théorème d'échantillonnage

L'opérateur d'intercorrélation

Transformée de Hilbert

Transformée en Z

Applications

Références

## ● Pour $a_n$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \int_0^T \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \cos\left(\frac{2\pi n}{T}t\right) dt \\ &= \frac{2}{T} \left[ \frac{nT \sin(2n\pi)}{2(n^2 - 1)\pi} \right] \\ &= a_1 = 1 \quad \text{via la règle de l'Hôpital} \\ &= a_n = 0 \quad \forall n \neq 1 \end{aligned}$$

## ● Pour $b_n$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{T} \int_0^T \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \sin\left(\frac{2\pi n}{T}t\right) dt \\ &= 0 \end{aligned}$$

## ● On n'a donc seulement $a_1$ non nul, et

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{2\pi nt}{T} + b_n \sin \frac{2\pi nt}{T} \right)$$

donne bien  $\cos \frac{2\pi t}{T}$ .

# Transformée de Fourier

Introduction

Théorie

Séries de Fourier

Transformée de Fourier

Propriétés de la  
transformée de Fourier

Théorème de la  
convolution

Transformée en deux  
dimensions

Transformée discrète  
de Fourier

Théorème  
d'échantillonnage

L'opérateur  
d'intercorrélation

Transformée de Hilbert

Transformée en Z

Applications

Références

- En analyse, la transformation de Fourier est un analogue de la théorie des séries de Fourier pour les fonctions *non périodiques* ;
- Elle permet de leur associer deux spectres en fréquences :
  - spectre d'amplitude ;
  - spectre de phase.

# Transformée de Fourier

Introduction

Théorie

Séries de Fourier

Transformée de Fourier

Propriétés de la transformée de Fourier

Théorème de la convolution

Transformée en deux dimensions

Transformée discrète de Fourier

Théorème d'échantillonnage

L'opérateur d'intercorrélation

Transformée de Hilbert

Transformée en Z

Applications

Références

- On peut écrire

$$\begin{aligned}\cos \frac{2\pi n t}{T} &= \frac{1}{2} \left( e^{i \frac{2\pi n t}{T}} + e^{-i \frac{2\pi n t}{T}} \right) \\ \sin \frac{2\pi n t}{T} &= \frac{1}{2i} \left( e^{i \frac{2\pi n t}{T}} - e^{-i \frac{2\pi n t}{T}} \right)\end{aligned}$$

- $i$  est le nombre complexe  $\sqrt{-1}$ .
- En introduisant cette notation dans l'équation (1), on a

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{a_n - ib_n}{2} \right) e^{i \frac{2\pi n t}{T}} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{a_n + ib_n}{2} \right) e^{-i \frac{2\pi n t}{T}}. \quad (3)$$

# Transformée de Fourier

Introduction

Théorie

Séries de Fourier

Transformée de Fourier

Propriétés de la transformée de Fourier

Théorème de la convolution

Transformée en deux dimensions

Transformée discrète de Fourier

Théorème d'échantillonnage

L'opérateur d'intercorrélation

Transformée de Hilbert

Transformée en Z

Applications

Références

- Si on définit  $s_n = \frac{a_n - i b_n}{2}$ , on peut écrire, sachant que  $b_0 = 0$

$$s(t) = s_0 + \sum_{n=1}^{\infty} s_n e^{i \frac{2\pi n t}{T}} + \sum_{n=1}^{\infty} s_n^* e^{-i \frac{2\pi n t}{T}}, \quad (4)$$

où  $s_n^*$  est le conjugué complexe de  $s_n$ .

- Par ailleurs, on sait que  $s_{-n} = s_n^*$ , ce qui nous permet d'écrire

$$s(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} s_n e^{i \frac{2\pi n t}{T}}. \quad (5)$$

- Partant de la définition des coefficients de Fourier, on peut voir que

$$s_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) e^{-i \frac{2\pi n t}{T}} dt. \quad (6)$$

# Transformée de Fourier

Introduction

Théorie

Séries de Fourier

Transformée de Fourier

Propriétés de la transformée de Fourier

Théorème de la convolution

Transformée en deux dimensions

Transformée discrète de Fourier

Théorème d'échantillonnage

L'opérateur d'intercorrélation

Transformée de Hilbert

Transformée en Z

Applications

Références

- Posons l'hypothèse que  $s(t)$  est non périodique;
- Cela revient à dire que  $T \rightarrow \infty$ , et alors

$$s(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{-\infty}^{+\infty} Ts_n e^{i2\pi f_n t} \quad (7)$$

où

$$f_n = n/T$$

et

$$Ts_n = \int_{-T/2}^{T/2} s(t) e^{-i\frac{2\pi nt}{T}} dt.$$

- Par ailleurs, lorsque  $T \rightarrow \infty$ , nous avons

$$\Delta f_n \rightarrow 0 \quad \text{car} \quad \Delta f_n = \frac{n+1}{T} - \frac{n}{T} = \frac{1}{T}.$$

# Transformée de Fourier

Introduction

Théorie

Séries de Fourier

Transformée de Fourier

Propriétés de la transformée de Fourier

Théorème de la convolution

Transformée en deux dimensions

Transformée discrète de Fourier

Théorème d'échantillonnage

L'opérateur d'intercorrélation

Transformée de Hilbert

Transformée en Z

Applications

Références

- Si on définit  $S(\omega_n) = Ts_n$  (avec  $\omega_n = 2\pi f_n$ ), on peut reprendre l'équation (7)

$$s(t) = \lim_{\Delta\omega_n \rightarrow 0} \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Delta\omega_n}{2\pi} S(\omega_n) e^{i\omega_n t},$$

- Cette équation n'est ni plus ni moins que l'intégrale

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (8)$$

- Ainsi, les fonctions  $e^{i\omega t}$  forment une base complète pour la représentation de  $s(t)$  dans l'intervalle  $-\infty < t < \infty$ .

# Transformée de Fourier

Introduction

Théorie

Séries de Fourier

Transformée de Fourier

Propriétés de la transformée de Fourier

Théorème de la convolution

Transformée en deux dimensions

Transformée discrète de Fourier

Théorème d'échantillonnage

L'opérateur d'intercorrélation

Transformée de Hilbert

Transformée en Z

Applications

Références

- Partant de l'équation (6), on peut arriver à

$$S(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} Ts_n = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-i\omega t} dt. \quad (9)$$

- $S(\omega)$  est une grandeur complexe :

$$S(\omega) = a(\omega) + ib(\omega) \quad \text{ou bien} \quad S(\omega) = |S(\omega)|e^{i\phi(\omega)},$$

où  $|S(\omega)| = \sqrt{a^2 + b^2}$  et  $\phi(\omega) = \tan^{-1} \left( \frac{a}{b} \right) + 2\pi n$ .

- $S(\omega)$  est la **transformée de Fourier** de  $s(t)$ ;
- $S(\omega)$  donne une mesure du contenu en fréquences de  $s(t)$ ;
- $|S(\omega)|$  représente le spectre d'amplitude et  
 $\phi(\omega)$  représente le spectre de phase.

## Transformée de Fourier

Introduction

Théorie

## Séries de Fourier

Transformée de Fourier

## Propriétés de la

### Théorème de convolution

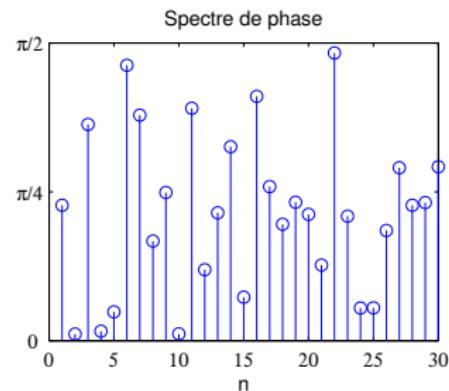
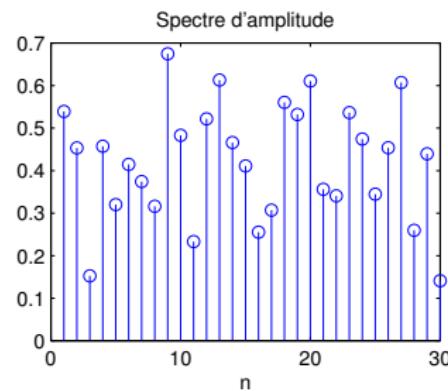
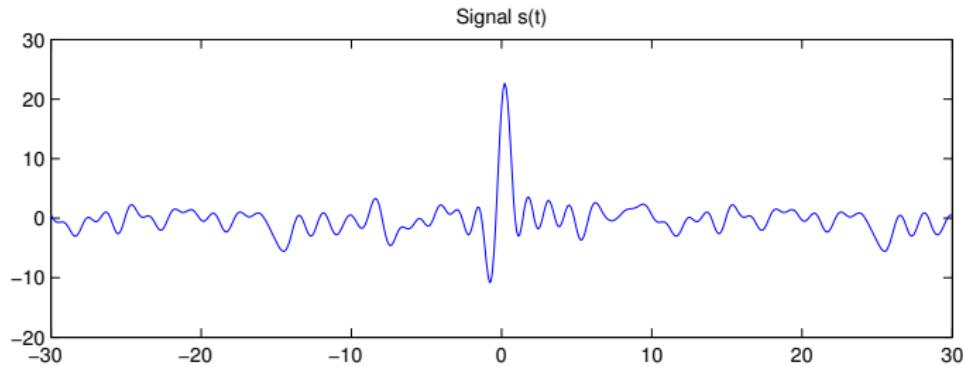
Transformée en deux dimensions

## Transformée discrète de Fourier

## Théorème d'échantillonnage

### L'opérateur d'intercorrélation

Transformée en 7



# Linéarité

Introduction

Théorie

Séries de Fourier

Transformée de Fourier

Propriétés de la  
transformée de Fourier

Théorème de la  
convolution

Transformée en deux  
dimensions

Transformée discrète  
de Fourier

Théorème  
d'échantillonnage

L'opérateur  
d'intercorrélation

Transformée de Hilbert

Transformée en Z

Applications

Références

● Si

$$x(t) \leftrightarrow X(\omega)$$

$$y(t) \leftrightarrow Y(\omega)$$

alors

$$ax(t) + by(t) \leftrightarrow aX(\omega) + bY(\omega). \quad (10)$$

● C'est une propriété importante pour la séparation des régionales et résiduelles dans le domaine spectral.

# Symétrie

Introduction

Théorie

Séries de Fourier

Transformée de Fourier

Propriétés de la  
transformée de Fourier

Théorème de la  
convolution

Transformée en deux  
dimensions

Transformée discrète  
de Fourier

Théorème  
d'échantillonnage

L'opérateur  
d'intercorrélation

Transformée de Hilbert

Transformée en Z

Applications

Références

● Si

$$h(t) \leftrightarrow H(\omega)$$

alors

$$H(t) \leftrightarrow h(-\omega) \tag{11}$$

$$H(-t) \leftrightarrow h(\omega). \tag{12}$$

● Propriété importante pour anticiper les réponses.

# Facteur d'échelle du temps

Introduction

Théorie

Séries de Fourier

Transformée de Fourier

Propriétés de la  
transformée de Fourier

Théorème de la  
convolution

Transformée en deux  
dimensions

Transformée discrète  
de Fourier

Théorème  
d'échantillonnage

L'opérateur  
d'intercorrélation

Transformée de Hilbert

Transformée en Z

Applications

Références

● Si

$$h(t) \leftrightarrow H(\omega)$$

alors

$$h(ct) \leftrightarrow \frac{1}{|c|}H(\omega/c). \quad (13)$$

● Une expansion du temps correspond à une contraction des fréquences.

# Facteur d'échelle en fréquence

Introduction

Théorie

Séries de Fourier

Transformée de Fourier

Propriétés de la  
transformée de Fourier

Théorème de la  
convolution

Transformée en deux  
dimensions

Transformée discrète  
de Fourier

Théorème  
d'échantillonnage

L'opérateur  
d'intercorrélation

Transformée de Hilbert

Transformée en Z

Applications

Références

● Si

$$h(t) \leftrightarrow H(\omega)$$

alors

$$\frac{1}{|c|} h(t/c) \leftrightarrow H(c\omega). \quad (14)$$

- Propriété analogue au facteur d'échelle du temps.
- Peut être déduite par la propriété de symétrie.

# Translation dans le temps

Introduction

Théorie

Séries de Fourier

Transformée de Fourier

Propriétés de la  
transformée de Fourier

Théorème de la  
convolution

Transformée en deux  
dimensions

Transformée discrète  
de Fourier

Théorème  
d'échantillonnage

L'opérateur  
d'intercorrélation

Transformée de Hilbert

Transformée en Z

Applications

Références

● Si

$$h(t) \leftrightarrow H(\omega)$$

alors

$$h(t - t_0) \leftrightarrow H(\omega)e^{-i\omega t_0}. \quad (15)$$

● Le spectre d'amplitude n'est pas affecté.

# Translation en fréquence

Introduction

Théorie

Séries de Fourier

Transformée de Fourier

Propriétés de la  
transformée de Fourier

Théorème de la  
convolution

Transformée en deux  
dimensions

Transformée discrète  
de Fourier

Théorème  
d'échantillonnage

L'opérateur  
d'intercorrélation

Transformée de Hilbert

Transformée en Z

Applications

Références

● Si

$$h(t) \leftrightarrow H(\omega)$$

alors

$$h(t)e^{i\omega_0 t} \leftrightarrow H(\omega - \omega_0). \quad (16)$$

● C'est propriété est utilisée en modulation d'amplitude.

# Dérivation

Introduction

Théorie

Séries de Fourier

Transformée de Fourier

Propriétés de la transformée de Fourier

Théorème de la convolution

Transformée en deux dimensions

Transformée discrète de Fourier

Théorème d'échantillonnage

L'opérateur d'intercorrélation

Transformée de Hilbert

Transformée en Z

Applications

Références

● Si

$$h(t) \leftrightarrow H(\omega)$$

alors

$$\frac{dh(t)}{dt} \leftrightarrow i\omega H(\omega). \quad (17)$$

● En général, si on écrit  $\frac{d^n h(t)}{dt} = h^{(n)}(t)$ , alors

$$h^{(n)}(t) \leftrightarrow (i\omega)^n H(\omega). \quad (18)$$

● Cette propriété présente un intérêt en modélisation numérique pour calculer les dérivées spatiales ou temporelles;

# Intégration

Introduction

Théorie

Séries de Fourier

Transformée de Fourier

Propriétés de la  
transformée de Fourier

Théorème de la  
convolution

Transformée en deux  
dimensions

Transformée discrète  
de Fourier

Théorème  
d'échantillonnage

L'opérateur  
d'intercorrélation

Transformée de Hilbert

Transformée en Z

Applications

Références

● Si

$$h(t) \leftrightarrow H(\omega)$$

alors

$$\int_{-\infty}^t h(t)dt \leftrightarrow \frac{1}{i\omega}H(\omega), \quad (19)$$

à condition que  $H(\omega) = 0$  pour  $\omega = 0$ .

# Convolution

Introduction

Théorie

Séries de Fourier

Transformée de Fourier

Propriétés de la transformée de Fourier

Théorème de la convolution

Transformée en deux dimensions

Transformée discrète de Fourier

Théorème d'échantillonnage

L'opérateur d'intercorrélation

Transformée de Hilbert

Transformée en Z

Applications

Références

- Le produit de convolution  $y(t)$  entre deux fonctions  $x(t)$  et  $h(t)$  s'écrit

$$\begin{aligned} y(t) = x(t) * h(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t - \tau)h(\tau)d\tau. \end{aligned} \tag{20}$$

- Si

$$x(t) \leftrightarrow X(\omega)$$

$$h(t) \leftrightarrow H(\omega)$$

alors

$$x(t) * h(t) \leftrightarrow X(\omega) \cdot H(\omega)$$

$$x(t) \cdot h(t) \leftrightarrow X(\omega) * H(\omega).$$

- La convolution dans le domaine du temps correspond à la multiplication dans le domaine des fréquences, et vice-versa.

# Convolution

Introduction

Théorie

Séries de Fourier

Transformée de Fourier

Propriétés de la  
transformée de Fourier

**Théorème de la  
convolution**

Transformée en deux  
dimensions

Transformée discrète  
de Fourier

Théorème  
d'échantillonnage

L'opérateur  
d'intercorrélation

Transformée de Hilbert

Transformée en Z

Applications

Références

# Convolution

Introduction

Théorie

Séries de Fourier

Transformée de Fourier

Propriétés de la  
transformée de Fourier

**Théorème de la  
convolution**

Transformée en deux  
dimensions

Transformée discrète  
de Fourier

Théorème  
d'échantillonnage

L'opérateur  
d'intercorrélation

Transformée de Hilbert

Transformée en Z

Applications

Références

# Transformée 2D

Introduction

Théorie

Séries de Fourier

Transformée de Fourier

Propriétés de la

transformée de Fourier

Théorème de la

convolution

Transformée en deux

dimensions

Transformée discrète

de Fourier

Théorème

d'échantillonnage

L'opérateur

d'intercorrélation

Transformée de Hilbert

Transformée en Z

Applications

Références

- Les données sismiques sont typiquement présentées sur des sections, avec un axe vertical temporel et un axe horizontal spatial,
  - i.e. sur un domaine *bidimensionnel*.
- En 2D, la transformée de Fourier devient

$$F(k_x, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, t) e^{ik_x x - i\omega t} dx dt, \quad (21)$$

- Son inverse est

$$f(x, t) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(k_x, \omega) e^{-ik_x x + i\omega t} dk_x d\omega. \quad (22)$$

- Le terme  $k_x$  est le **nombre d'onde** selon  $x$ ;
  - L'unité est le radian par unité de distance (i.e. rad/m si  $x$  est en mètres).

# Transformée 2D

Introduction

Théorie

Séries de Fourier

Transformée de Fourier

Propriétés de la transformée de Fourier

Théorème de la convolution

Transformée en deux dimensions

Transformée discrète de Fourier

Théorème d'échantillonnage

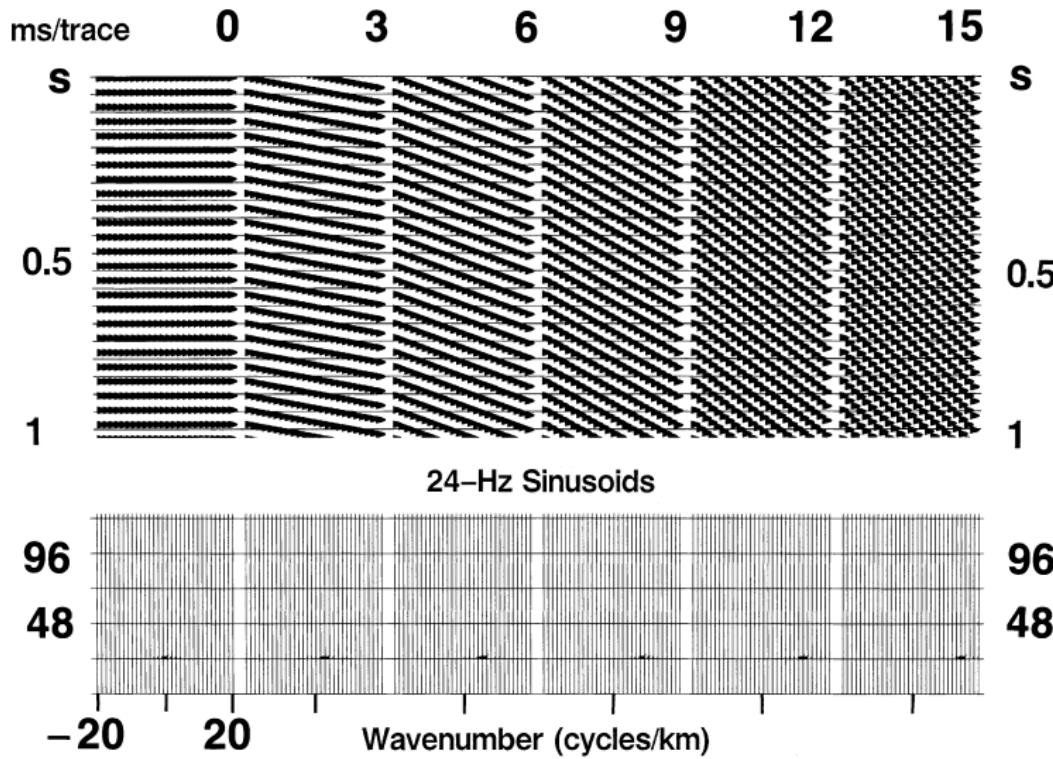
L'opérateur d'intercorrélation

Transformée de Hilbert

Transformée en Z

Applications

Références



# Transformée discrète de Fourier

Introduction

Théorie

Séries de Fourier

Transformée de Fourier

Propriétés de la transformée de Fourier

Théorème de la convolution

Transformée en deux dimensions

Transformée discrète de Fourier

Théorème d'échantillonnage

L'opérateur d'intercorrélation

Transformée de Hilbert

Transformée en Z

Applications

Références

- Dans la pratique, les mesures géophysiques sont enregistrées sur support numérique;
- Les mesures sont constituées d'un nombre fini de valeurs;
  - elles forment une représentation *discrète*, notée  $s[n]$ , d'une fonction continue  $s(t)$ .
- On dit alors que la fonction continue est échantillonnée.
- Si la période d'échantillonnage  $T_e$  est constante,  $s[n] = s(nT_e)$  avec  $n$  un entier.
- Comment se traduit la transformée de Fourier pour un signal discret?

# Transformée discrète de Fourier

Introduction

Théorie

Séries de Fourier

Transformée de Fourier

Propriétés de la  
transformée de Fourier

Théorème de la  
convolution

Transformée en deux  
dimensions

Transformée discrète  
de Fourier

Théorème  
d'échantillonnage

L'opérateur  
d'intercorrélation

Transformée de Hilbert

Transformée en Z

Applications

Références

- Pour un signal de  $N$  échantillons, nous avons

$$S(k) = \sum_{n=0}^{N-1} s[n] e^{-2i\pi k \frac{n}{N}}, \quad (23)$$

- et sont inverse

$$s[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} S(k) e^{-2i\pi n \frac{k}{N}}. \quad (24)$$

# Transformée discrète de Fourier

Introduction

Théorie

Séries de Fourier

Transformée de Fourier

Propriétés de la  
transformée de Fourier

Théorème de la  
convolution

Transformée en deux  
dimensions

Transformée discrète  
de Fourier

Théorème  
d'échantillonnage

L'opérateur  
d'intercorrélation

Transformée de Hilbert

Transformée en Z

Applications

Références

- On obtient ainsi un ensemble de  $N$  valeurs discrètes renseignant sur le contenu fréquentiel du signal  $s[n]$ , correspondant au spectre échantillonné.
  - La Transformée discrète de Fourier peut être vue comme la Transformée de Fourier échantillonnée.
  - Cette ensemble renseigne sur les fréquences comprises entre 0 et  $f_e/2$ ,  $f_e$  étant la fréquence d'échantillonnage ( $f_e = 1/T_e$ ).

# Troncation

Introduction

Théorie

Séries de Fourier

Transformée de Fourier

Propriétés de la  
transformée de Fourier

Théorème de la  
convolution

Transformée en deux  
dimensions

Transformée discrète  
de Fourier

Théorème  
d'échantillonnage

L'opérateur  
d'intercorrélation

Transformée de Hilbert

Transformée en Z

Applications

Références

- L'échantillonnage d'une fonction continue en un nombre fini de points peut occasionner une troncation du signal;
- Ce phénomène a un incidence sur l'estimation du spectre d'amplitude et de phase du signal;

# Troncation

Introduction

Théorie

Séries de Fourier

Transformée de Fourier

Propriétés de la transformée de Fourier

Théorème de la convolution

Transformée en deux dimensions

Transformée discrète de Fourier

Théorème d'échantillonnage

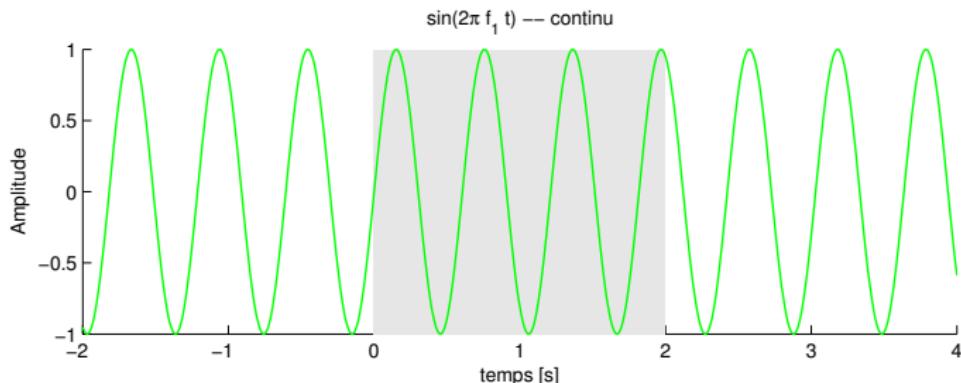
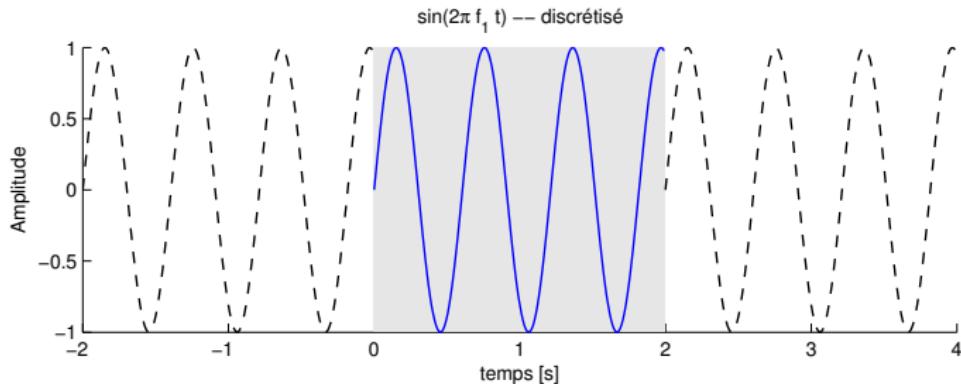
L'opérateur d'intercorrélation

Transformée de Hilbert

Transformée en Z

Applications

Références



# Troncation

Introduction

Théorie

Séries de Fourier

Transformée de Fourier

Propriétés de la transformée de Fourier

Théorème de la convolution

Transformée en deux dimensions

Transformée discrète de Fourier

Théorème d'échantillonnage

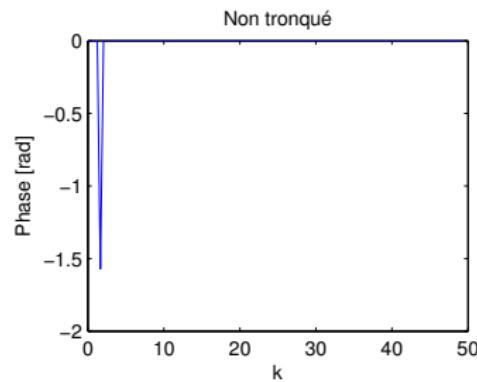
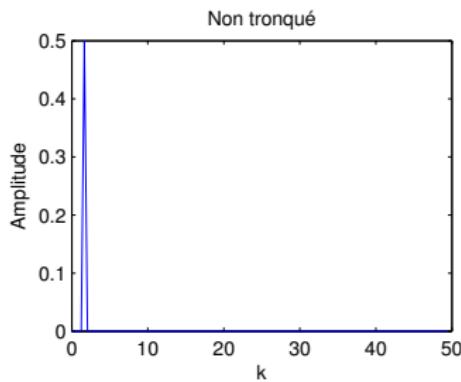
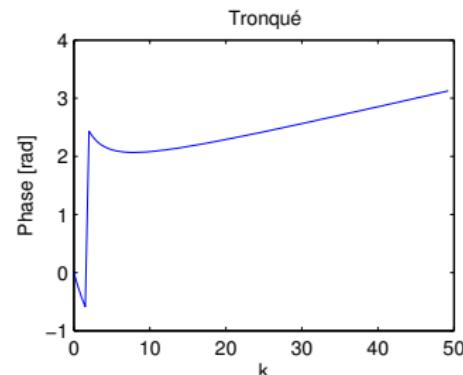
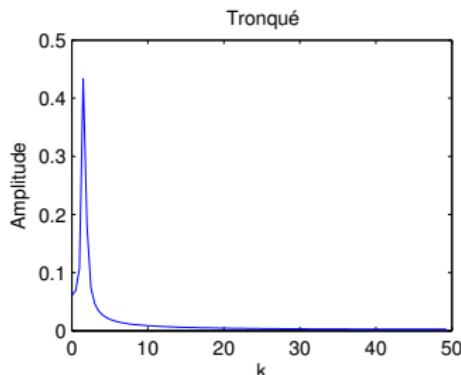
L'opérateur d'intercorrélation

Transformée de Hilbert

Transformée en Z

Applications

Références



# Troncation

Introduction

Théorie

Séries de Fourier

Transformée de Fourier

Propriétés de la  
transformée de Fourier

Théorème de la  
convolution

Transformée en deux  
dimensions

Transformée discrète  
de Fourier

Théorème  
d'échantillonnage

L'opérateur  
d'intercorrélation

Transformée de Hilbert

Transformée en Z

Applications

Références

- Une façon de réduire l'effet de la troncation consiste à
  - ① soustraire un polynôme du premier ordre, ajusté aux extrémités du signal;
  - ② ajouter une zone tampon à chaque extrémité du signal;
  - ③ interpoler les valeurs dans les zones tampons de façon à ce que les valeurs se rejoignent, i.e. de façon à pouvoir «connecter» le signal à ses répétitions périodiques.

# Échantillonnage

Introduction

Théorie

Séries de Fourier

Transformée de Fourier

Propriétés de la transformée de Fourier

Théorème de la convolution

Transformée en deux dimensions

Transformée discrète de Fourier

Théorème d'échantillonnage

L'opérateur d'intercorrélation

Transformée de Hilbert

Transformée en Z

Applications

Références

- Le processus d'échantillonnage entraîne inévitablement une perte d'information lors de l'analyse;
- La question se pose à savoir si cette perte d'information a des répercussions lors de la synthèse;
- La réponse est donnée par le **théorème d'échantillonnage, ou théorème de Nyquist** (ou Nyquist-Shannon);
- Celui-ci stipule qu'un signal contenant une fréquence maximale  $f_{max}$  doit être échantillonné avec une fréquence  $f_e (= 1/T_e)$  supérieure ou égale à  $2f_{max}$ , i.e.

$$f_e \geq 2f_{max}$$

# Échantillonnage

Introduction

Théorie

Séries de Fourier

Transformée de Fourier

Propriétés de la transformée de Fourier

Théorème de la convolution

Transformée en deux dimensions

Transformée discrète de Fourier

Théorème d'échantillonnage

L'opérateur d'intercorrélation

Transformée de Hilbert

Transformée en Z

Applications

Références

- Soit un signal sinusoïdal d'amplitude  $a$  et de fréquence  $f$

$$x(t) = a \cos(2\pi ft).$$

- En l'échantillonnant avec une période  $T_e$ , soit pour  $t = nT_e$  où  $n = 0, 1, 2, \dots$ , on obtient la suite de valeurs numériques

$$x[n] = a \cos(2\pi nfT_e).$$

- Soit un 2<sup>e</sup> signal d'amplitude  $b$  et de fréquence  $1/T_e - f$

$$y(t) = b \cos\left(2\pi\left(\frac{1}{T_e} - f\right)t\right).$$

- Une fois échantillonné à la même fréquence que le signal  $x(t)$ , il devient

$$y[n] = b \cos\left(2\pi n\left(\frac{1}{T_e} - f\right)T_e\right) = b \cos(2\pi n(1 - fT_e)).$$

# Échantillonnage

Introduction

Théorie

Séries de Fourier

Transformée de Fourier

Propriétés de la  
transformée de Fourier

Théorème de la  
convolution

Transformée en deux  
dimensions

Transformée discrète  
de Fourier

Théorème  
d'échantillonnage

L'opérateur  
d'intercorrélation

Transformée de Hilbert

Transformée en Z

Applications

Références

- La trigonométrie élémentaire conduit à

$$y[n] = b \cos(2\pi n f T_e).$$

- Ainsi, dans la somme  $x[n] + y[n]$ , il est impossible de distinguer ce qui appartient au signal de fréquence  $f$  et à celui de fréquence  $1/T_e - f$ .
- Ce résultat conduit à l'**effet de crénage**, repli de spectre ou encore *aliasing*, qui indique que l'on prend une sinusoïde pour une autre.

# Échantillonnage

Introduction

Théorie

Séries de Fourier

Transformée de Fourier

Propriétés de la  
transformée de Fourier

Théorème de la  
convolution

Transformée en deux  
dimensions

Transformée discrète  
de Fourier

Théorème  
d'échantillonnage

L'opérateur  
d'intercorrélation

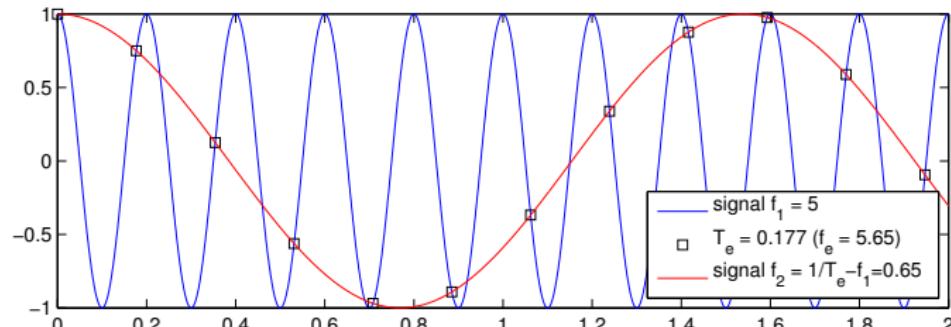
Transformée de Hilbert

Transformée en Z

Applications

Références

## Illustration de l'effet de crénélage



# Échantillonnage

Introduction

Théorie

Séries de Fourier

Transformée de Fourier

Propriétés de la transformée de Fourier

Théorème de la convolution

Transformée en deux dimensions

Transformée discrète de Fourier

Théorème d'échantillonnage

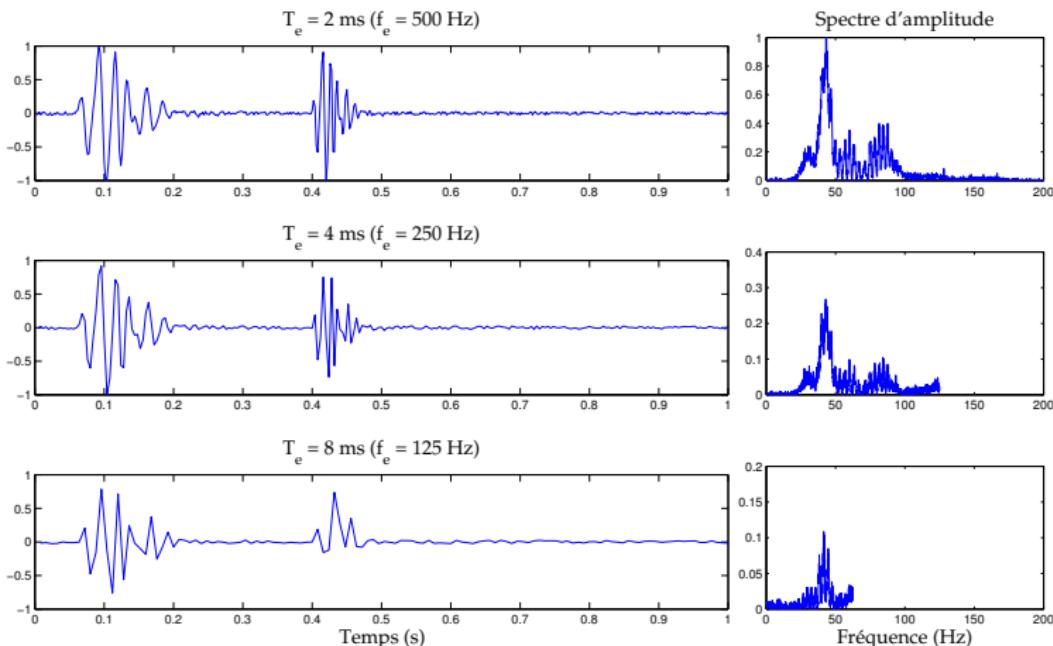
L'opérateur d'intercorrélation

Transformée de Hilbert

Transformée en Z

Applications

Références



# Échantillonnage

Introduction

Théorie

Séries de Fourier

Transformée de Fourier

Propriétés de la transformée de Fourier

Théorème de la convolution

Transformée en deux dimensions

Transformée discrète de Fourier

Théorème d'échantillonnage

L'opérateur d'intercorrélation

Transformée de Hilbert

Transformée en Z

Applications

Références

## Pratique de bourrage de zéros (*zero-padding*)

- On a vu que la Transformée discrète de Fourier peut être vue comme la Transformée de Fourier échantillonnée.
- Si on a un signal échantillonné avec un nombre restreint de mesures, la T.F. sera échantillonnée avec peu de points.
- Ceci peut mener à une ambiguïté sur la détermination du nombre de fréquences contenues dans le signal.
- Or, la T.F. n'est pas affectée par des valeurs nulles du signal.
- En ajoutant des zéros au signal, on augmente «l'échantillonnage» de la T.F., sans pour autant augmenter la résolution de la T.F.

# Échantillonnage

Introduction

Théorie

Séries de Fourier

Transformée de Fourier

Propriétés de la transformée de Fourier

Théorème de la convolution

Transformée en deux dimensions

Transformée discrète de Fourier

Théorème d'échantillonnage

L'opérateur d'intercorrélation

Transformée de Hilbert

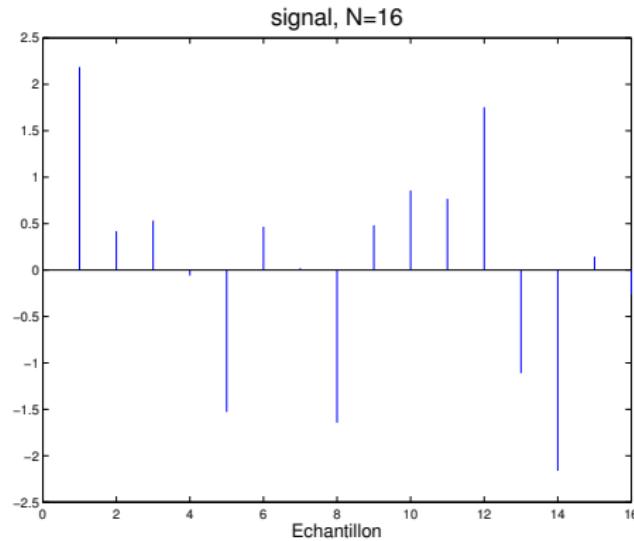
Transformée en Z

Applications

Références

Soit un signal  $s$  comportant trois fréquences :  
 $f_1=0.12$ ,  $f_2=0.2$  et  $f_3=0.35$

$$s[n] = 0.9 \sin[2\pi f_1 n] + 0.8 \sin[2\pi f_2 n] + \sin[2\pi f_3 n]$$



# Échantillonnage

Introduction

Théorie

Séries de Fourier

Transformée de Fourier

Propriétés de la transformée de Fourier

Théorème de la convolution

Transformée en deux dimensions

Transformée discrète de Fourier

Théorème d'échantillonnage

L'opérateur d'intercorrélation

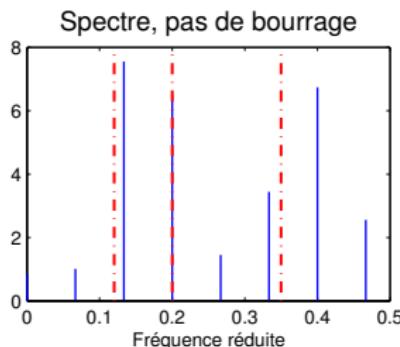
Transformée de Hilbert

Transformée en Z

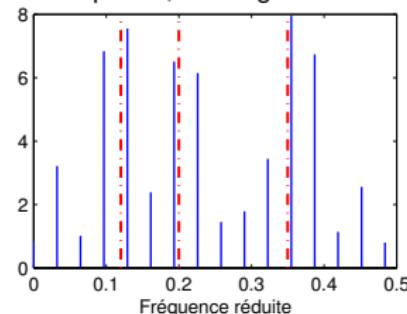
Applications

Références

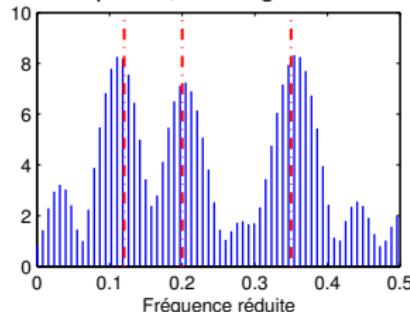
$N = 16$



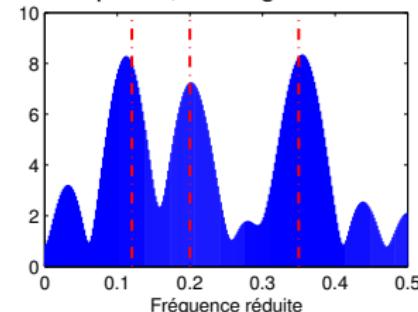
Spectre, bourrage  $N \times 2$



Spectre, bourrage  $N \times 8$



Spectre, bourrage  $N \times 32$



# Échantillonnage

Introduction

Théorie

Séries de Fourier

Transformée de Fourier

Propriétés de la transformée de Fourier

Théorème de la convolution

Transformée en deux dimensions

Transformée discrète de Fourier

Théorème d'échantillonnage

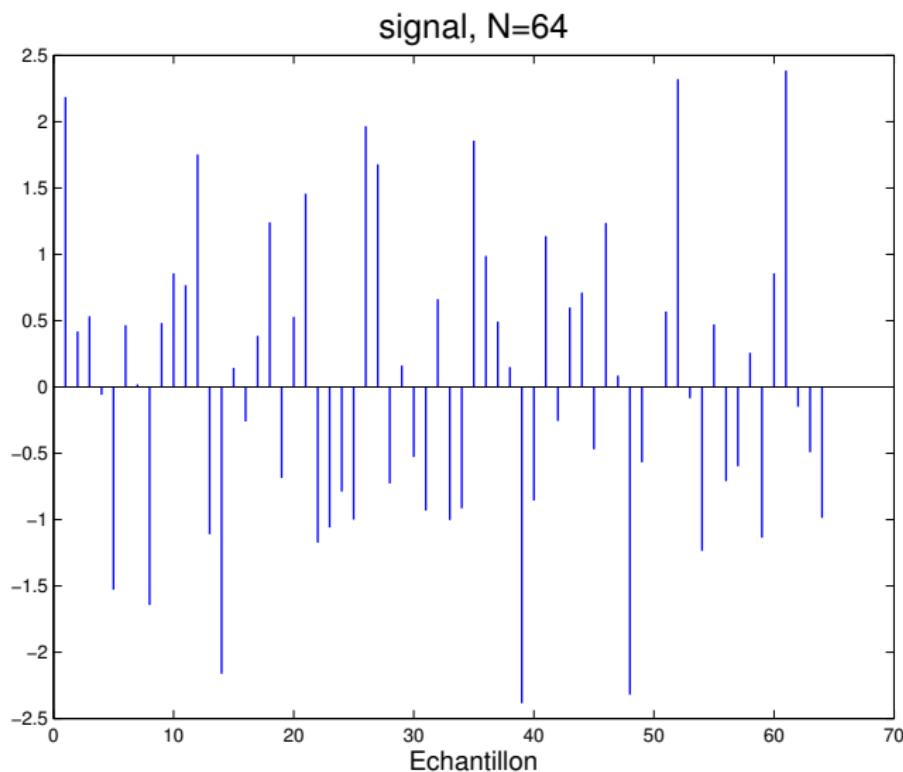
L'opérateur d'intercorrélation

Transformée de Hilbert

Transformée en Z

Applications

Références



# Échantillonnage

Introduction

Théorie

Séries de Fourier

Transformée de Fourier

Propriétés de la transformée de Fourier

Théorème de la convolution

Transformée en deux dimensions

Transformée discrète de Fourier

Théorème d'échantillonnage

L'opérateur d'intercorrélation

Transformée de Hilbert

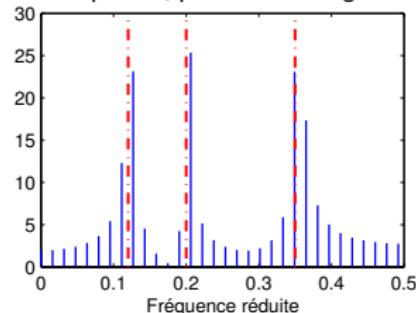
Transformée en Z

Applications

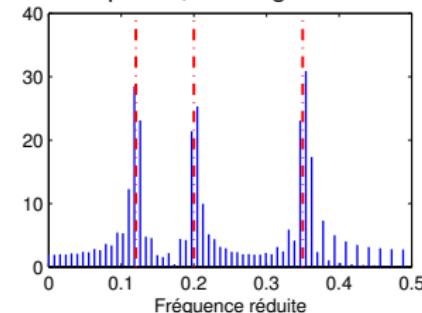
Références

$N = 64$

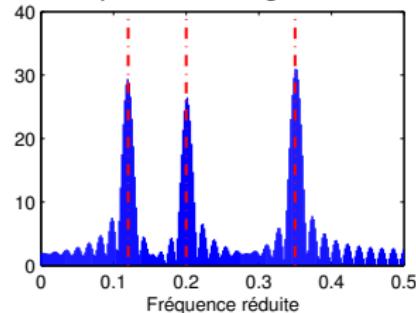
Spectre, pas de bourrage



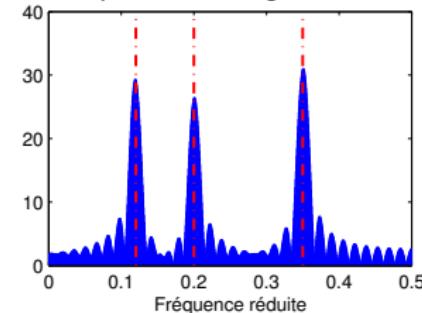
Spectre, bourrage  $N \times 2$



Spectre, bourrage  $N \times 8$



Spectre, bourrage  $N \times 32$



# Échantillonnage spatial

Introduction

Théorie

Séries de Fourier

Transformée de Fourier

Propriétés de la

transformée de Fourier

Théorème de la

convolution

Transformée en deux

dimensions

Transformée discrète

de Fourier

Théorème

d'échantillonnage

L'opérateur

d'intercorrélation

Transformée de Hilbert

Transformée en Z

Applications

Références

- Tout comme dans le domaine du temps, le nombre d'onde de Nyquist est défini par

$$k_{Nyq} = \frac{1}{2\Delta x} \quad (25)$$

avec  $\Delta x$  le pas d'échantillonnage spatial.

- On peut montrer que l'inverse de la pente  $\Delta t/\Delta x$  vaut

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{f}{k}.$$

- Ainsi, pour une pente  $\Delta t/\Delta x$  donnée, doubler la fréquence signifie doubler le nombre d'onde.
- Pour un contenu fréquentiel plus élevé, il faut un pas d'échantillonnage spatial plus court.

## Échantillonnage spatial

## Introduction

## Théorie

## Séries de Fourier

Transformée de Fourier

#### Propriétés de la

### Théorème de convolution

Transformée en deux dimensions

## Transformée discrète de Fourier

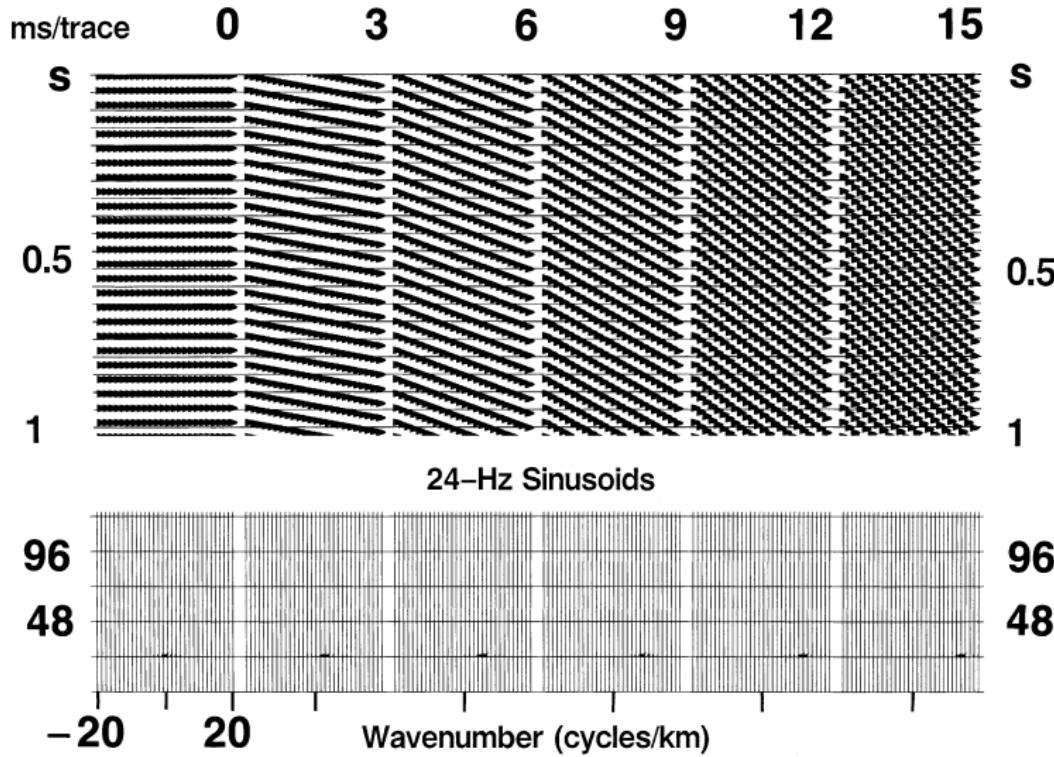
### Théorème d'échantillonnage

L'opérateur

Transformée en PDF

• 1998 •

## References



# Échantillonnage spatial

Introduction

Théorie

Séries de Fourier

Transformée de Fourier

Propriétés de la transformée de Fourier

Théorème de la convolution

Transformée en deux dimensions

Transformée discrète de Fourier

Théorème d'échantillonnage

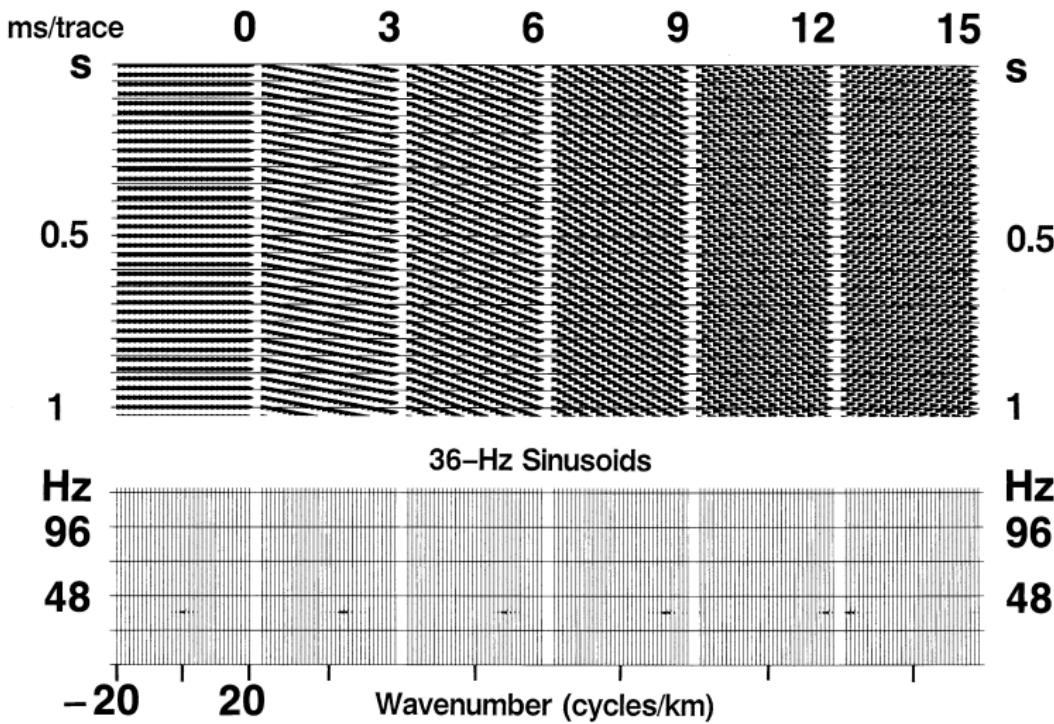
L'opérateur d'intercorrélation

Transformée de Hilbert

Transformée en Z

Applications

Références



# Échantillonnage spatial

Introduction

Théorie

Séries de Fourier

Transformée de Fourier

Propriétés de la transformée de Fourier

Théorème de la convolution

Transformée en deux dimensions

Transformée discrète de Fourier

Théorème d'échantillonnage

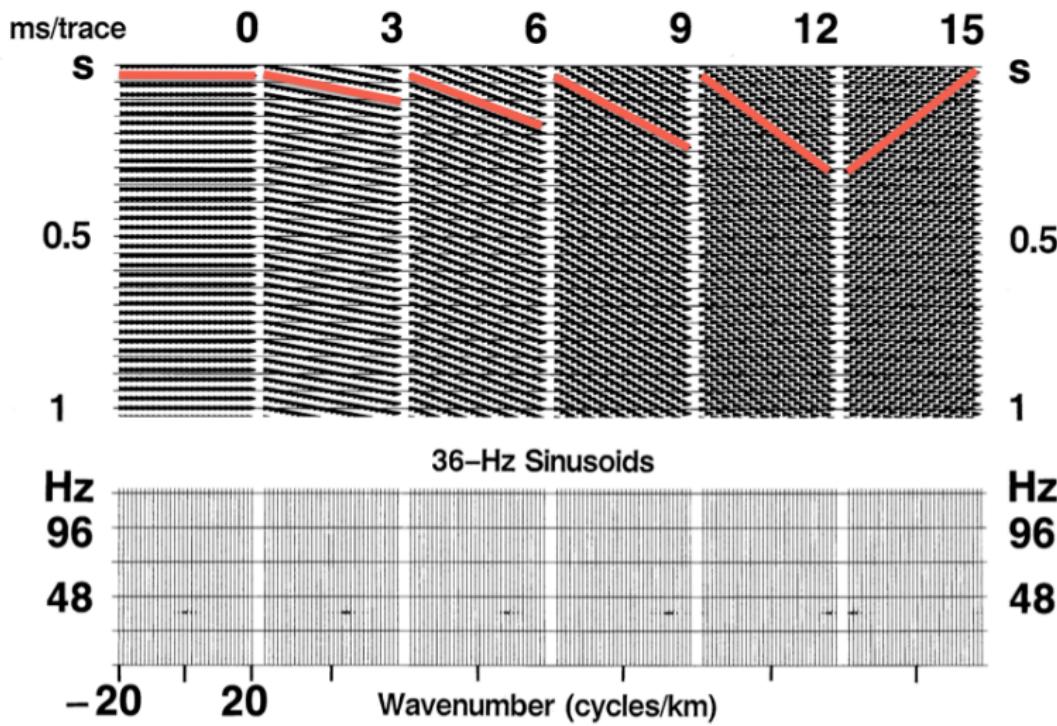
L'opérateur d'intercorrélation

Transformée de Hilbert

Transformée en Z

Applications

Références



# L'opérateur d'intercorrélation

Introduction
Théorie
Séries de Fourier
Transformée de Fourier
Propriétés de la transformée de Fourier
Théorème de la convolution
Transformée en deux dimensions
Transformée discrète de Fourier
Théorème d'échantillonnage
L'opérateur d'intercorrélation
Transformée de Hilbert
Transformée en Z
Applications
Références

L'**intercorrélation** entre deux fonctions complexes  $a(t)$  et  $b(t)$  est par définition

$$a(t) \star b(t) = \int_{-\infty}^{\infty} a^*(\tau) b(t + \tau) d\tau. \quad (26)$$

Soient deux signaux réels discrets  $a$  et  $b$  :

- $a$  contient  $m$  coefficients ;
- $b$  contient  $n$  coefficients ;
- Les coefficients de l'intercorrélation sont

$$c_k = \sum_{j=0}^n a_j b_{k+j}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, m.$$

- L'intercorrélation n'est pas *commutative* ;
- La relation entre convolution et intercorrélation :

$$a(t) \star b(t) = a(-t) * b(t).$$

# L'opérateur d'intercorrélation

Introduction

Théorie

Séries de Fourier

Transformée de Fourier

Propriétés de la transformée de Fourier

Théorème de la convolution

Transformée en deux dimensions

Transformée discrète de Fourier

Théorème d'échantillonnage

L'opérateur d'intercorrélation

Transformée de Hilbert

Transformée en Z

Applications

Références

- L'opérateur d'intercorrélation est utile pour estimer le spectre d'une fonction aléatoire (bruit) qui, compte tenu de sa nature, n'a pas de T.F.;
- Soit  $f(t)$  un processus stochastique stationnaire et sa fonction d'autocorrélation

$$P(\tau) = f(t) \star f(t).$$

- On peut montrer (théorème de Wiener-Khinchin) que la T.F. de  $P(\tau)$  correspond à la densité spectrale de puissance de  $f(t)$

$$P(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} P(\tau) e^{-i\omega t} dt \quad (27)$$

# L'opérateur d'intercorrélation

Introduction

Théorie

Séries de Fourier

Transformée de Fourier

Propriétés de la transformée de Fourier

Théorème de la convolution

Transformée en deux dimensions

Transformée discrète de Fourier

Théorème d'échantillonnage

L'opérateur d'intercorrélation

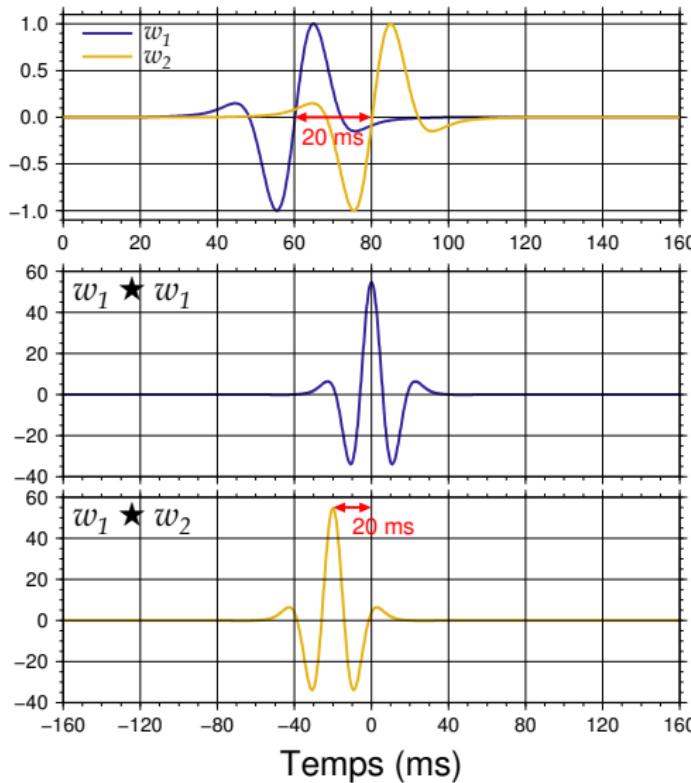
Transformée de Hilbert

Transformée en Z

Applications

Références

## Détermination du délai entre deux signaux par intercorrélation



# Transformée de Hilbert

Introduction

Théorie

Séries de Fourier

Transformée de Fourier

Propriétés de la transformée de Fourier

Théorème de la convolution

Transformée en deux dimensions

Transformée discrète de Fourier

Théorème d'échantillonnage

L'opérateur d'intercorrélation

Transformée de Hilbert

Transformée en Z

Applications

Références

- La transformée de Hilbert et son inverse sont par définition

$$g(\tau) = \mathcal{H}[f(t)] = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{t - \tau} dt \quad (28)$$

$$f(t) = \mathcal{H}^{-1}[g(\tau)] = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(\tau)}{\tau - t} d\tau, \quad (29)$$

où la singularité à  $t - \tau$  est traitée avec la valeur principale de Cauchy.

- Cette transformée a des propriétés intéressantes pour de multiples applications, notamment pour calculer l'enveloppe et la phase instantanée d'une trace sismique par l'utilisation du signal analytique.

# Le signal analytique

Introduction

Théorie

Séries de Fourier

Transformée de Fourier

Propriétés de la transformée de Fourier

Théorème de la convolution

Transformée en deux dimensions

Transformée discrète de Fourier

Théorème d'échantillonnage

L'opérateur d'autocorrélation

Transformée de Hilbert

Transformée en Z

Applications

Références

- Par définition, le signal analytique d'un signal  $x(t)$  est une variable complexe fonction du temps  $u(t)$

$$u(t) = x(t) + iy(t), \quad (30)$$

où  $y(t)$  est la transformée de Hilbert de  $x(t)$ .

- Sous la forme polaire, nous avons

$$u(t) = R(t) \exp[i\phi(t)],$$

avec  $R(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}$  et  $\phi(t) = \tan^{-1} \frac{y(t)}{x(t)}$ .

- En sismique,  $R(t)$  représente l'amplitude instantanée, ou l'enveloppe, et  $\phi(t)$  est la phase instantanée.

# Le signal analytique

Introduction

Théorie

Séries de Fourier

Transformée de Fourier

Propriétés de la transformée de Fourier

Théorème de la convolution

Transformée en deux dimensions

Transformée discrète de Fourier

Théorème d'échantillonnage

L'opérateur d'autocorrélation

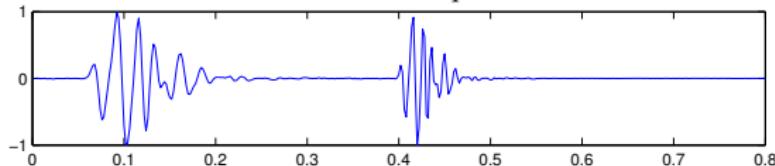
Transformée de Hilbert

Transformée en Z

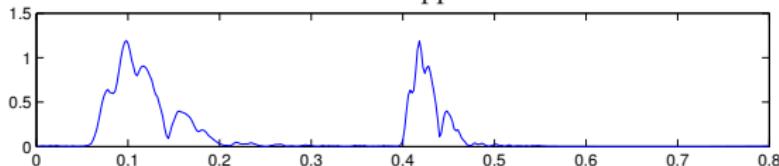
Applications

Références

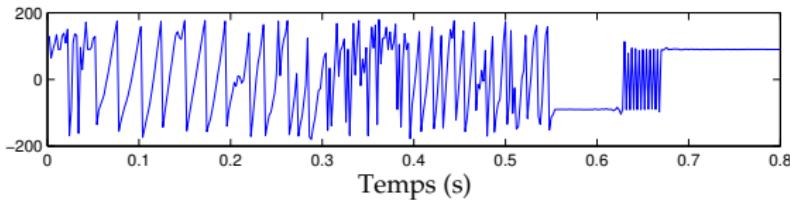
Trace sismique



Enveloppe



Phase instantanée



Temps (s)

# Le signal analytique

Introduction

Théorie

Séries de Fourier

Transformée de Fourier

Propriétés de la  
transformée de Fourier

Théorème de la  
convolution

Transformée en deux  
dimensions

Transformée discrète  
de Fourier

Théorème  
d'échantillonnage

L'opérateur  
d'intercorrélation

Transformée de Hilbert

Transformée en Z

Applications

Références

- On utilise l'enveloppe pour estimer l'intensité de la réflectivité, proportionnelle à la racine carrée de l'énergie contenue à un temps  $t$ ;
- La phase instantanée permet de mettre en relief la continuité latérale des réflexions;
- Il est important de préserver les amplitudes et le contenu fréquentiel lors de la séquence de traitement!

# Le signal analytique

Introduction

Théorie

Séries de Fourier

Transformée de Fourier

Propriétés de la  
transformée de Fourier

Théorème de la  
convolution

Transformée en deux  
dimensions

Transformée discrète  
de Fourier

Théorème  
d'échantillonnage

L'opérateur  
d'intercorrélation

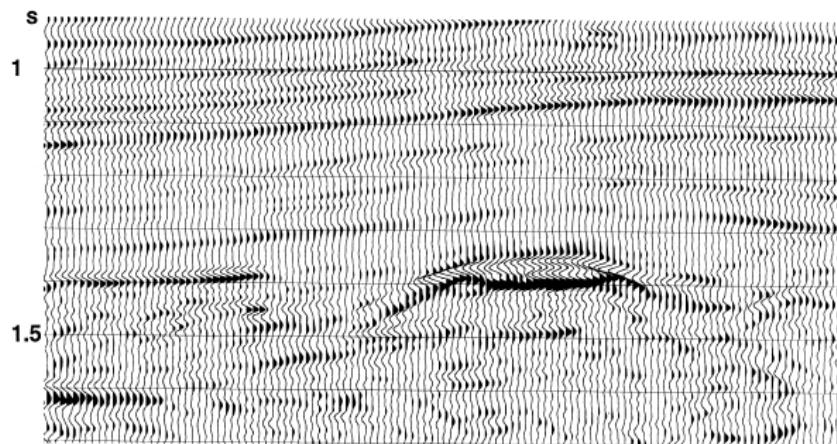
Transformée de Hilbert

Transformée en Z

Applications

Références

## Section sismique



# Le signal analytique

Introduction

Théorie

Séries de Fourier

Transformée de Fourier

Propriétés de la transformée de Fourier

Théorème de la convolution

Transformée en deux dimensions

Transformée discrète de Fourier

Théorème d'échantillonnage

L'opérateur d'intercorrélation

Transformée de Hilbert

Transformée en Z

Applications

Références

km/s

1

2

3

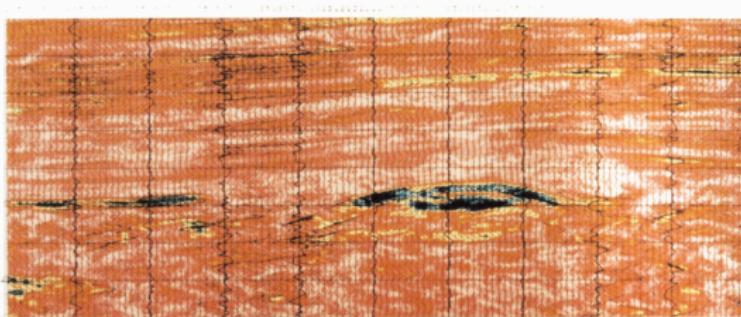
4

-180°

0

180

Enveloppe



Phase instantanée

# Le signal analytique – Calcul

Introduction

Théorie

Séries de Fourier

Transformée de Fourier

Propriétés de la transformée de Fourier

Théorème de la convolution

Transformée en deux dimensions

Transformée discrète de Fourier

Théorème d'échantillonnage

L'opérateur d'intercorrélation

Transformée de Hilbert

Transformée en Z

Applications

Références

- Par définition, le signal analytique de  $x(t)$  est

$$u(t) = x(t) + i\mathcal{H}[x(t)]. \quad (31)$$

- Or, la Transformée de Hilbert possède la propriété

$$\underbrace{\mathcal{F}[\mathcal{H}[x]]}_{\text{T.F. de } \mathcal{H}[x]} = -i \operatorname{signe}(\omega) \mathcal{F}[x].$$

- On a alors que la Transformée de Fourier de  $u(t)$  est

$$\mathcal{F}[u] = \mathcal{F}[x] (1 + \operatorname{signe}(\omega)).$$

- On peut donc calculer le signal analytique en utilisant directement la Transformée de Hilbert, ou en

- 1 calculant la Transformée de Fourier de  $x$ ;
- 2 posant égal à 0 les valeurs à  $\omega < 0$ , et en doublant les valeurs à  $\omega > 0$ ;
- 3 en effectuant la T.F. inverse du résultat.

# Transformée en Z

Introduction

Théorie

Séries de Fourier

Transformée de Fourier

Propriétés de la transformée de Fourier

Théorème de la convolution

Transformée en deux dimensions

Transformée discrète de Fourier

Théorème d'échantillonnage

L'opérateur d'intercorrélation

Transformée de Hilbert

Transformée en Z

Applications

Références

- Une série temporelle discrétisée de longueur finie peut s'écrire

$$x(t) = \sum_k x_k \delta(t - k\Delta t), \quad k = 0, 1, 2, \dots, n$$

où  $\Delta t$  est la période d'échantillonnage et  $\delta(t - k\Delta t)$  la fonction delta de Dirac.

- La transformée discrète est

$$X(\omega) = \sum_k x_k \exp(-i\omega k\Delta t), \quad k = 0, 1, 2, \dots, n$$

# Transformée en Z

Introduction

Théorie

Séries de Fourier

Transformée de Fourier

Propriétés de la  
transformée de Fourier

Théorème de la  
convolution

Transformée en deux  
dimensions

Transformée discrète  
de Fourier

Théorème  
d'échantillonnage

L'opérateur  
d'intercorrélation

Transformée de Hilbert

Transformée en Z

Applications

Références

- On introduit une nouvelle variable

$$z = \exp(-i\omega\Delta t),$$

ce qui permet d'écrire

$$X(z) = x_0 + x_1 z + x_2 z^2 + \dots + x_n z^{-n}$$

- La fonction  $X(z)$  est appelée la transformée en Z de  $x(t)$ .
- Propriété : la convolution de deux séries temporelles est équivalente au produit de leurs transformées en Z.

Introduction

Théorie

**Applications**

Filtrage en fréquence

Filtrage dans le domaine  
 $f-k$

Références

# Applications

# Filtrage en fréquence

- Le **filtrage** permet d'éliminer ou d'extraire certaines caractéristiques du signal;
- Le filtre linéaire invariant est l'outil permettant cette opération;
- Définition :
  - système linéaire (c'est-à-dire satisfaisant le principe de superposition) et dont les caractéristiques sont indépendantes du temps;
  - système dont la relation entrée-sortie est un produit de *convolution*;

# Filtrage en fréquence

Introduction

Théorie

Applications

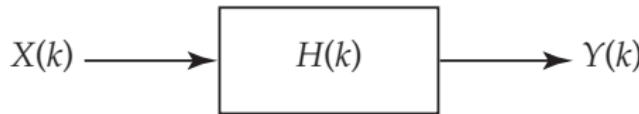
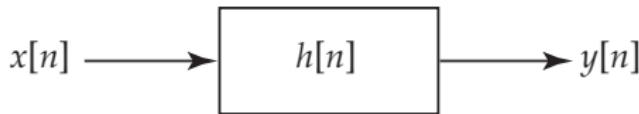
Filtrage en fréquence

Filtrage dans le domaine  
 $f-k$

Références

## ● Pour caractériser le filtre

- On définit la **réponse impulsionnelle  $h[n]$** , la sortie du filtre à une entrée de type impulsion de Dirac;
- On définit la **réponse fréquentielle  $H(k)$**  (ou **fonction de transfert**) la transformée de Fourier de  $h[n]$ .



$$y[n] = x[n] * h[n] \quad Y(k) = X(k) \cdot H(k)$$

# Filtrage en fréquence

Introduction

Théorie

Applications

Filtrage en fréquence

Filtrage dans le domaine  
 $f-k$

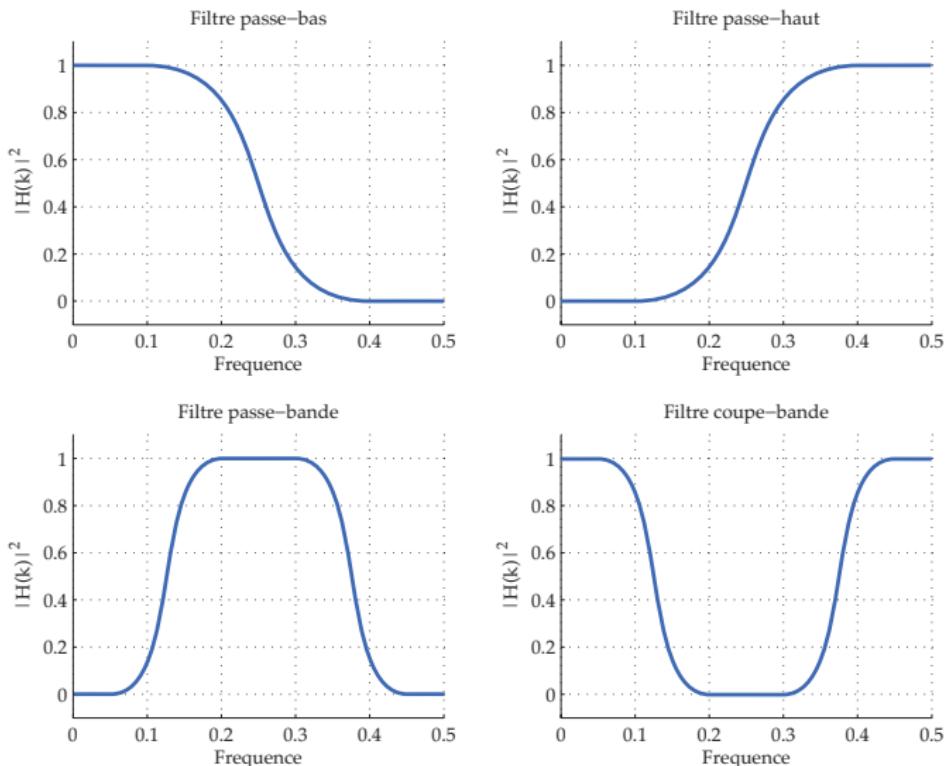
Références

- On retrouve quatre grands types de filtres

- 1 les filtres **passe-bas** qui atténuent fortement les hautes fréquences;
- 2 les filtres **passe-haut** qui atténuent les basses fréquences;
- 3 les filtres **passe-bande** qui atténuent les basses et les hautes fréquences en laissant un intervalle de fréquence sans grand changement;
- 4 les filtres **coupe-bande** qui suppriment un intervalle de fréquence sans trop altérer les hautes et les basses fréquences.

# Filtrage en fréquence

Introduction  
Théorie  
Applications  
Filtrage en fréquence  
Filtrage dans le domaine  
 $f-k$   
Références



# Filtrage en fréquence

Introduction

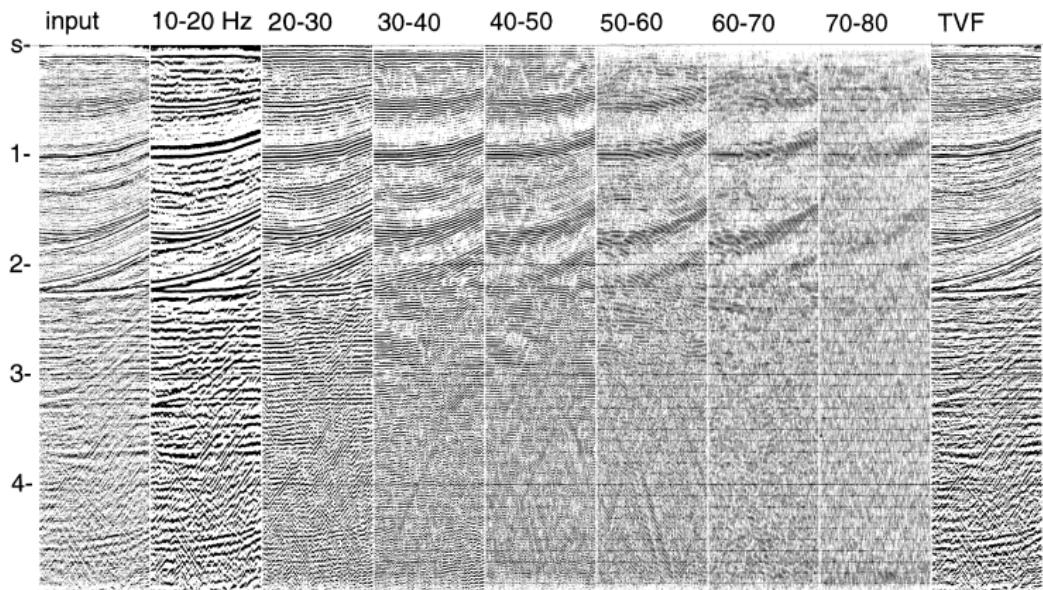
Théorie

Applications

Filtrage en fréquence

Filtrage dans le domaine  
 $f-k$

Références



TVF : *time-varying filter*

# Filtrage en fréquence

Introduction

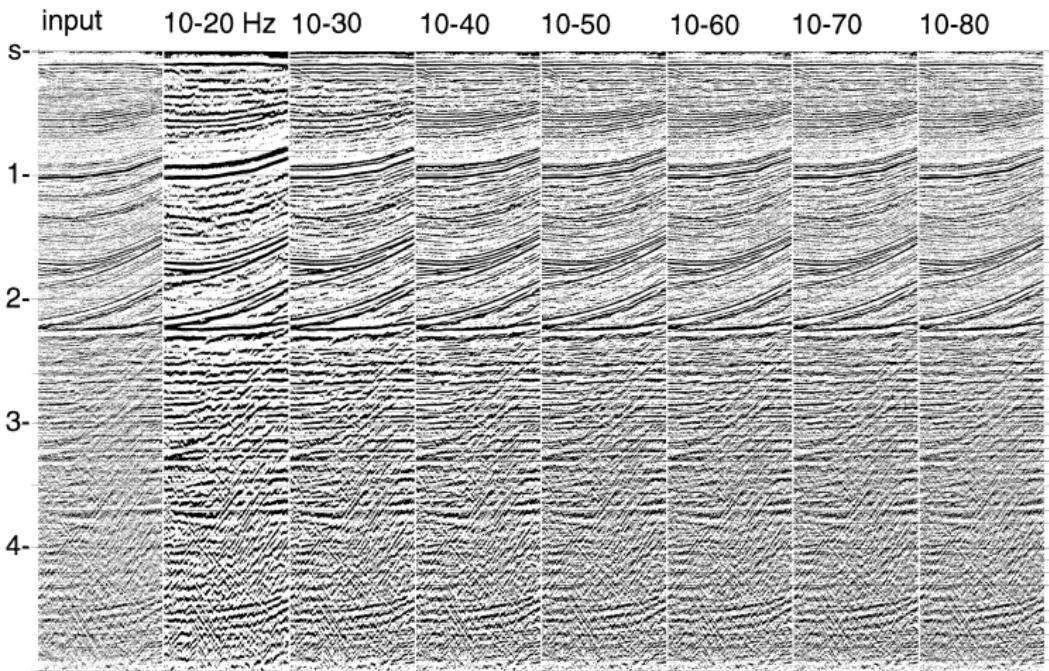
Théorie

Applications

Filtrage en fréquence

Filtrage dans le domaine  
 $f-k$

Références



# Filtrage en fréquence

Introduction

Théorie

Applications

Filtrage en fréquence

Filtrage dans le domaine  
 $f-k$

Références

- Clairement, les paramètres du filtre sont fonction de l'objectif visé;
- En général, on va s'attarder à la forme du *module* de la réponse fréquentielle (RF);
- La phase de la RF est tout aussi importante car elle peut avoir un impact important sur le signal de sortie;
- Si la phase du filtre est non nulle, un retard est occasionné (voir éq. (15));
  - astuce : filtrer deux fois en «retournant» la séquence à filtrer la 2<sup>e</sup> fois (effet : annule la phase et élève le module de  $H$  au carré);
- En général, la conception des filtres est un problème d'optimisation.

# Filtrage en fréquence

Introduction

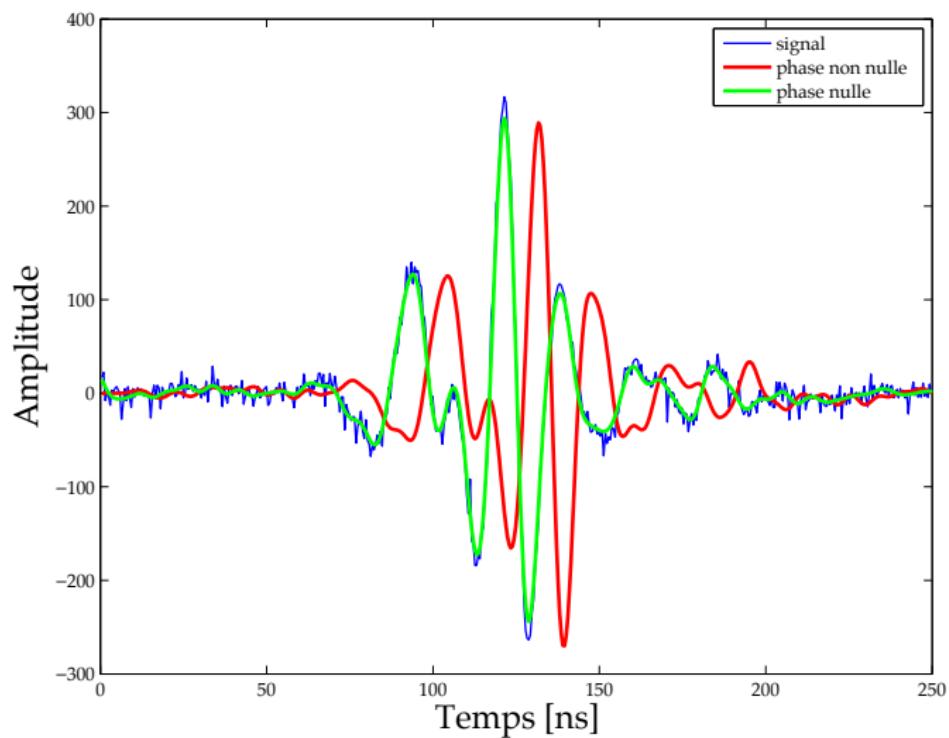
Théorie

Applications

Filtrage en fréquence

Filtrage dans le domaine  
 $f-k$

Références



# Filtrage dans le domaine $f-k$

Introduction

Théorie

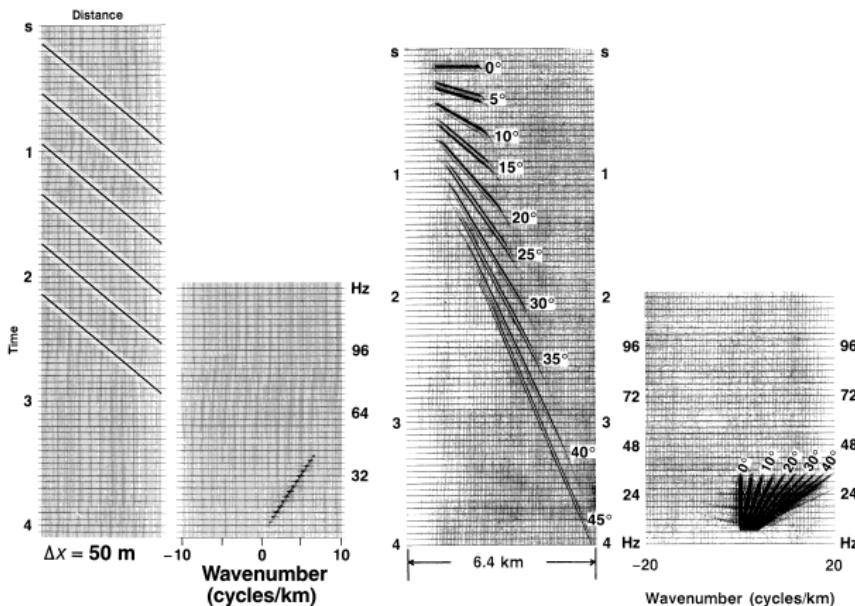
Applications

Filtrage en fréquence

Filtrage dans le domaine  
 $f-k$

Références

- La représentation d'une section sismique dans le domaine  $f-k$  fait ressortir les structures linéaires :



# Filtrage dans le domaine $f-k$

Introduction

Théorie

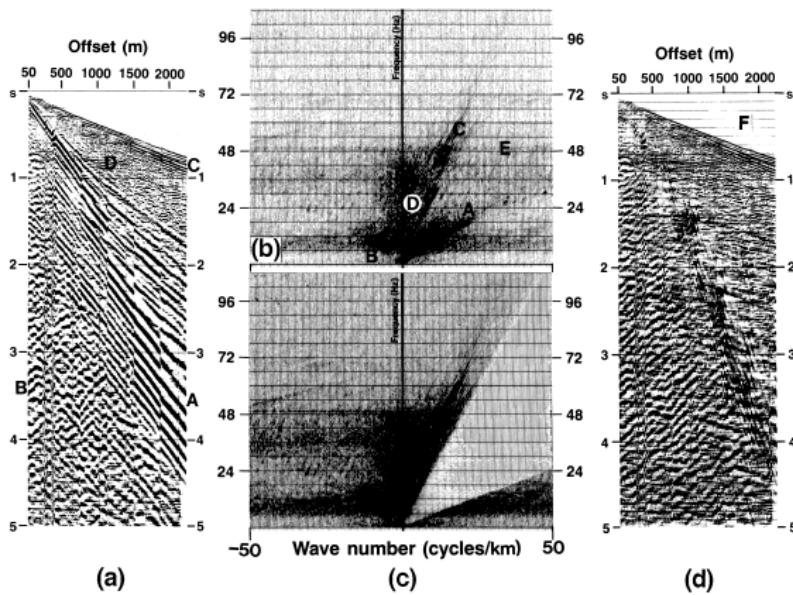
Applications

Filtrage en fréquence

Filtrage dans le domaine  
 $f-k$

Références

- En éliminant une portion des données dans le domaine  $f-k$ , on élimine les événements associés à ces fréquences et nombres d'onde ;



# Filtrage du bruit linéaire

Introduction

Théorie

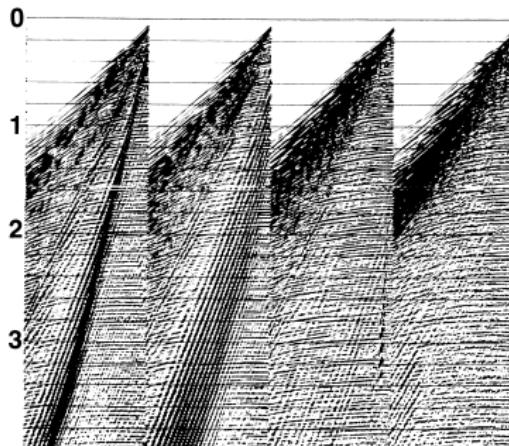
Applications

Filtrage en fréquence

Filtrage dans le domaine  
 $f-k$

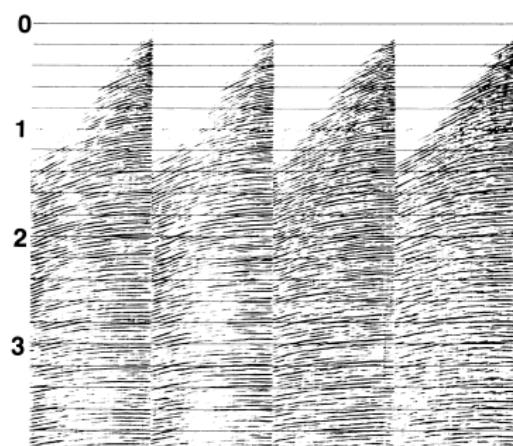
Références

## Élimination du *ground-roll*



(a)

(a) avant filtre  $f-k$



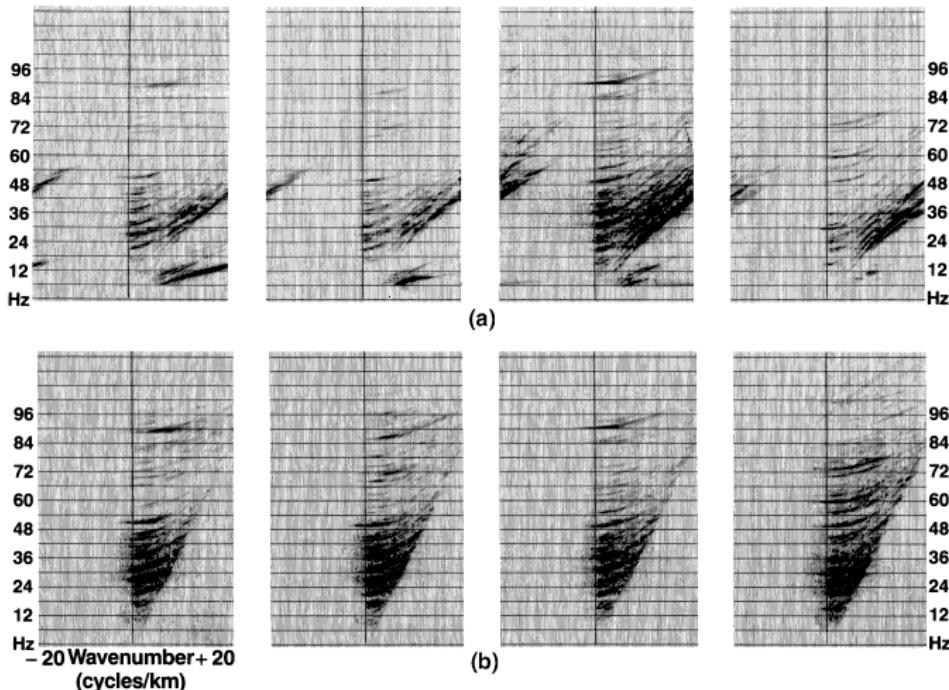
(b)

(b) après filtre  $f-k$

# Filtrage du bruit linéaire

Introduction  
Théorie  
Applications  
Filtrage en fréquence  
Filtrage dans le domaine  
 $f-k$   
Références

Spectres  $f-k$  des sections précédentes  
(a) non filtrés, (b) filtrés



# Considérations pratiques

Introduction

Théorie

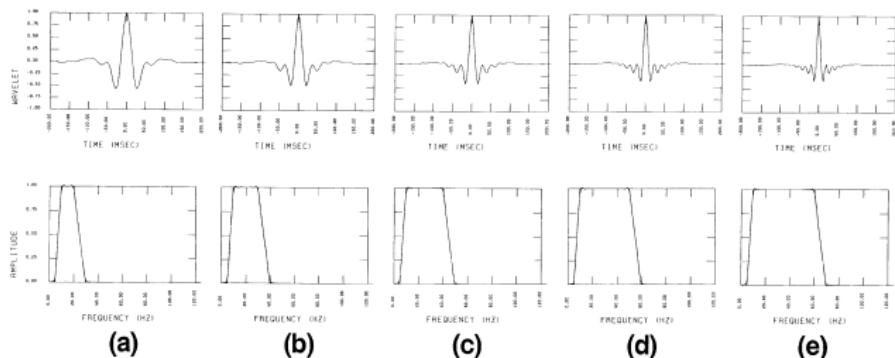
Applications

Filtrage en fréquence

Filtrage dans le domaine  
 $f-k$

Références

- Pour éviter les problèmes de *wraparound*, il faut étendre la section en ajoutant des zéros (au détriment de la rapidité des calculs);
- La largeur de la fenêtre de rejet ne doit pas être trop étroite, sinon on perd en résolution;



# Considérations pratiques

Introduction

Théorie

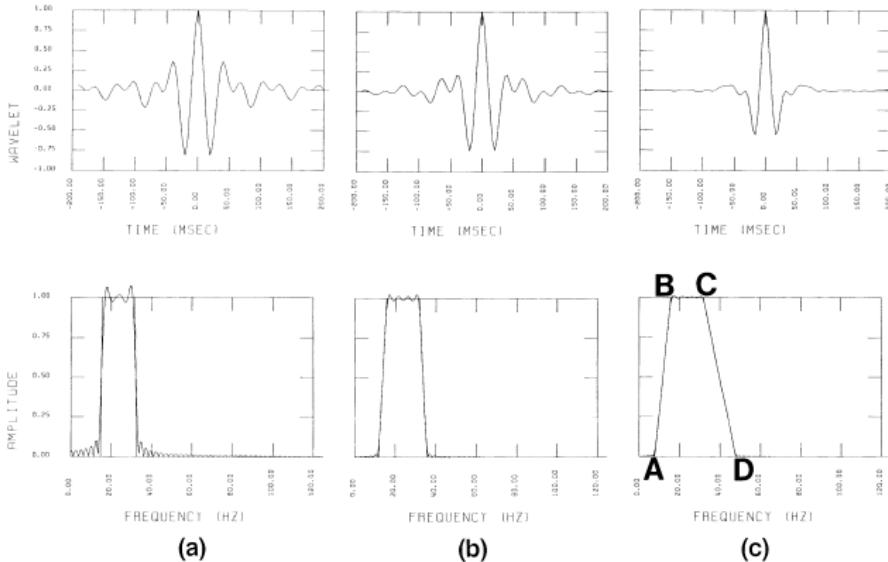
Applications

Filtrage en fréquence

Filtrage dans le domaine  
 $f-k$

Références

- Les limites de la fenêtre de rejet doivent être en pente, sinon problème de fuites spectrales;



# Considérations pratiques

Introduction

Théorie

Applications

Filtrage en fréquence

Filtrage dans le domaine  
 $f-k$

Références

- En présence d'*aliasing* spatial, la performance des filtres  $f-k$  est faible. Une solution peut être de faire la correction NMO avant d'appliquer le filtre  $f-k$ , de façon à redresser les événements, et de faire la NMO inverse une fois le filtre appliqué;
- Le bruit cohérent linéaire est affecté par la topographie et les hétérogénéités du mort-terrain. En conséquence, il faut appliquer les corrections statiques avant de faire du filtrage dans le domaine  $f-k$ .

Introduction  
Théorie  
Applications  
Références

## Références

# Références

## Deux classiques

- Bracewell, R. N. (2000). *The Fourier Transform and Its Applications*. McGraw-Hill, 3<sup>rd</sup> edition
- Papoulis, A. (1991). *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes*. McGraw-Hill, 3rd edition

## Spécifiques à la géophysique

- Coppens, F., Glangeaud, F., and Mari, J.-L. (2001). *Traitements du signal pour géologues et géophysiciens. 2 Techniques de base*. Editions Technip
- Robinson, E. A. and Treitel, S. (1980). *Geophysical Signal Analysis*. Prentice-Hall
- Yilmaz, O. (2001). *Seismic data Analysis*. Number 10 in Investigations in Geophysics. Society of Exploration Geophysicists, Tulsa, Oklahoma