

MODÉLISATION ET INVERSION EN GÉOPHYSIQUE

4 - Inversion: Introduction

Bernard Giroux
(bernard.giroux@ete.inrs.ca)

Institut national de la recherche scientifique
Centre Eau Terre Environnement

Version 1.0.3
Hiver 2018

Données et modèles

Problème discret

Systèmes linéaires

Difficultés

Exemples

Nature aléatoire des
données

Références

Données et modèles

Données et modèles

Problème discret

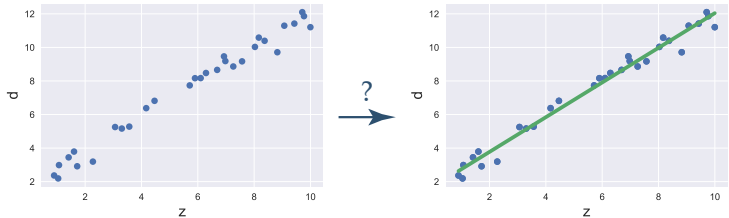
Systèmes linéaires

Difficultés

Exemples

Nature aléatoire des données

Références



Données et modèles

Problème discret

Systèmes linéaires

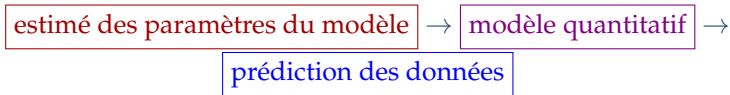
Difficultés

Exemples

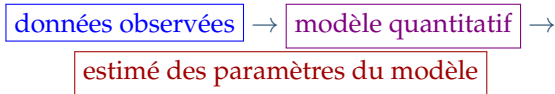
Nature aléatoire des données

Références

- Problème direct



- Problème inverse



Données et modèles

Problème discret

Systèmes linéaires

Difficultés

Exemples

Nature aléatoire des données

Références

- Les données mesurées, notées d , constituent le point de départ de l'inversion.
- L'objectif est d'obtenir une information caractérisant l'objet étudié;
 - Cette information prends la forme de valeurs numériques : les paramètres du modèle, notés m .
- Les lois de la physique permettent de relier m et d ;
 - Ces lois sont décrites par une fonction G , telle que

$$G(m) = d. \quad (1)$$

- Les données peuvent être fonction du temps et/ou de l'espace, et sont généralement une série d'observations *discrètes*.

Données et modèles

Problème discret

Systèmes linéaires

Difficultés

Exemples

Nature aléatoire des données

Références

- En pratique, les données mesurées contiennent une erreur expérimentale.
- On assume que les données sont la somme des mesures obtenues d'une expérience "parfaite", notées d_{vrai} , et d'un bruit η , i.e.

$$d = G(m_{\text{vrai}}) + \eta \quad (2)$$

$$= d_{\text{vrai}} + \eta, \quad (3)$$

où

- d_{vrai} satisfait l'éq. (1) lorsque m est égal au modèle vrai m_{vrai} ;
- la fonction G représente exactement la réalité.
- La présence de η , même faible, peut faire en sorte que m retrouvé par inversion soit très différent de m_{vrai} .
- En général, il existe un infinité de modèles m différents de m_{vrai} qui s'ajustent à d_{vrai} .

Données et modèles

Problème discret

Systèmes linéaires

Difficultés

Exemples

Nature aléatoire des
données

Références

Problème discret

- La plupart du temps, le modèle est décrit par un nombre fini, M , de paramètres, i.e.

$$\mathbf{m} = [m_0, m_1, m_2, \dots, m_{M-1}] \quad (4)$$

- De façon similaire, on dispose d'un nombre fini, N , de données

$$\mathbf{d} = [d_0, d_1, d_2, \dots, d_{N-1}] \quad (5)$$

- On a alors affaire à un problème inverse discret de la forme

$$G(\mathbf{m}) = \mathbf{d}. \quad (6)$$

- Dans le cas contraire où le modèle et les données sont des fct continues, l'estimation de m à partir de d est un problème inverse continu ;
 - On peut souvent approximer un problème continu par un problème discret.

Données et modèles

Problème discret

Systèmes linéaires

Difficultés

Exemples

Nature aléatoire des données

Références

- Lorsque le nombre de paramètres M est faible, on parle d'estimation de paramètres ;
- *A contrario*, lorsque M est élevé et qu'il est nécessaire d'appliquer des contraintes pour stabiliser la solution, on parle de problème inverse ;
 - On verra plus loin que des contraintes sont nécessaires lorsque le système à résoudre est *mal conditionné*.

Données et modèles

Problème discret

Systèmes linéaires

Difficultés

Exemples

Nature aléatoire des
données

Références

Systèmes linéaires

Données et modèles

Problème discret

Systèmes linéaires

Difficultés

Exemples

Nature aléatoire des données

Références

- Les systèmes linéaires sont un type de modèle mathématique trouvant plusieurs applications ;
- Les systèmes linéaires obéissent au principe de superposition :

$$G(m_1 + m_2) = G(m_1) + G(m_2) \quad (7)$$

et à la mise à l'échelle :

$$G(\alpha m) = \alpha G(m). \quad (8)$$

- Dans le cas des problèmes inverses discrets, le problème devient un système linéaire d'équations algébriques :

$$G(\mathbf{m}) = \mathbf{Gm} = \mathbf{d}. \quad (9)$$

où \mathbf{G} est de taille $N \times M$.

Données et modèles

Problème discret

Systèmes linéaires

Difficultés

Exemples

Nature aléatoire des données

Références

- En géophysique, les modèles linéaires sont souvent utilisables ;
- La raison principale est que l'objet d'étude varie peu par rapport à son état d'équilibre ;
- Une relation linéaire permet de décrire adéquatement le phénomène ;
- Par exemple en sismique, les contraintes générées par le passage des ondes sont très faibles p/r aux modules d'élasticité ;
 - La relation contrainte/déformation est alors quasi linéaire.
- La gravimétrie et le magnétisme sont d'autres exemples où les champs sont faibles et où des modèles linéaires s'appliquent.

Données et modèles

Problème discret

Systèmes linéaires

Difficultés

Exemples

Nature aléatoire des
données

Références

Difficultés

Données et modèles

Problème discret

Systèmes linéaires

Difficultés

Exemples

Nature aléatoire des données

Références

- Il est crucial de demeurer critique face aux résultats de l'inversion ;
- La raison principale est qu'il peut y avoir plusieurs modèles qui s'ajustent aussi bien aux données ;
- Les éléments à l'origine de ce phénomène sont :
 - ① l'existence d'une solution ;
 - ② la non unicité de la solution ;
 - ③ l'instabilité du système.

Données et modèles

Problème discret

Systèmes linéaires

Difficultés

Exemples

Nature aléatoire des données

Références

- Il est possible qu'aucun modèle ne s'ajuste *parfaitement* aux données ;
- Les raisons sont :
 - le modèle physique est approximatif ;
 - les données contiennent du bruit.
- Si l'ajustement n'est pas parfait, il est fort probable que le modèle estimé ne soit qu'une approximation du modèle réel.

Données et modèles

Problème discret

Systèmes linéaires

Difficultés

Exemples

Nature aléatoire des données

Références

- Advenant que des solutions exactes existent, elles peuvent être non uniques, *même pour un nombre infini de données* ;
- L'exemple classique est la réponse d'une sphère en gravimétrie, qui dépend de la masse de la sphère et non de la distribution de densité.
 - Deux sphères donneront exactement la même réponse si

$$\rho_1 \frac{4}{3} \pi r_1^3 = \rho_2 \frac{4}{3} \pi r_2^3$$

- La non unicité est une caractéristique des systèmes linéaires pour lesquelles les équations ne sont pas toutes linéairement indépendantes ;
 - Le degré d'indépendance peut être évalué par l'analyse de la *résolution du modèle*.

Données et modèles

Problème discret

Systèmes linéaires

Difficultés

Exemples

Nature aléatoire des données

Références

- Une solution est instable lorsqu'un faible changement dans une mesure (e.g., un faible bruit η) produit une variation importante du modèle estimé ;
- De tels problèmes sont dits *mal conditionnés* dans le cas des problèmes discrets, ou *mal posés* dans le cas continu ;
- Il est possible de stabiliser la solution en imposant des contraintes qui vont biaiser (d'une façon souhaitée) la solution ;
 - on parle alors de *régularisation*.

Données et modèles

Problème discret

Systèmes linéaires

Difficultés

Exemples

Nature aléatoire des
données

Références

Exemples

Exemple 1 : Ajuster une droite

Données et modèles

Problème discret

Systèmes linéaires

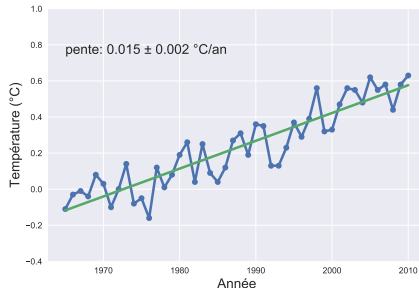
Difficultés

Exemples

Nature aléatoire des données

Références

- On dispose d'un certain nombre (N) de mesures de température prises à des temps t_i dans l'atmosphère.
 - Ces données constituent le vecteur $\mathbf{d} = [T_0, T_1, T_2, \dots, T_{N-1}]^T$.
- On assume que la température obéit à un modèle linéaire en fonction du temps : $T = a + bt$;
 - L'ordonnée à l'origine a et la pente b sont les deux paramètres du modèle, i.e. $\mathbf{m} = [a, b]^T$.



Exemple 1 : Ajuster une droite

Données et modèles

Problème discret

Systèmes linéaires

Difficultés

Exemples

 Nature aléatoire des
données

Références

- Selon le modèle linéaire, la température doit satisfaire

$$T_0 = a + bt_0 \quad (10)$$

$$T_1 = a + bt_1 \quad (11)$$

$$\vdots \quad (12)$$

$$T_{N-1} = a + bt_{N-1} \quad (13)$$

- Sous forme matricielle, on a

$$\underbrace{\begin{bmatrix} T_0 \\ T_1 \\ \vdots \\ T_{N-1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{d}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & t_0 \\ 1 & t_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & t_{N-1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{G}} \underbrace{\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}}_{\mathbf{m}} \quad (14)$$

Exemple 2 : Profilage sismique vertical

Données et modèles

Problème discret

Systèmes linéaires

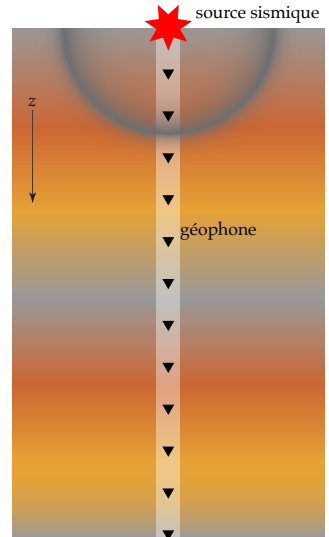
Difficultés

Exemples

Nature aléatoire des données

Références

- Avec le profilage sismique vertical, on cherche à déterminer la distribution verticale de la vitesse sismique V ;
- Des géophones sont placés dans un forage et une source est actionnée à la surface ;
- L'onde sismique est enregistrée aux géophones, ce qui permet de déterminer le temps de parcours t .



Exemple 2 : Profilage sismique vertical

Données et modèles

Problème discret

Systèmes linéaires

Difficultés

Exemples

Nature aléatoire des données

Références

- Le problème est non linéaire lorsque défini en terme de vitesse ;
- Le problème devient linéaire si exprimé en terme de *lenteur* (s), l'inverse de la vitesse, i.e. $s = 1/V$.
- Le temps de parcours à une profondeur z vaut

$$t(z) = \int_0^z s(l)dl \quad (15)$$

$$= \int_0^\infty s(l)H(z-l)dl \quad (16)$$

où H est la fonction de Heaviside, qui vaut 1 si $z-l \geq 0$ et 0 si $z-l < 0$.

Exemple 2 : Profilage sismique vertical

Données et modèles

Problème discret

Systèmes linéaires

Difficultés

Exemples

Nature aléatoire des données

Références

- Le problème est résolu en discrétisant le milieu en couches
- Si le modèle compte M couches et le levé compte N géophones, l'intégrale devient, pour un i^e géophone à une position y_i

$$t_i = \sum_{j=0}^{M-1} H(y_i - z_j) s_j \Delta z \quad (17)$$

où $N/M = \Delta y / \Delta z$ est un entier.

- Le vecteur des données est $\mathbf{d} = [t_0, t_1, t_2, \dots, t_{N-1}]^T$;
- Les paramètres du modèle est sont regroupés dans le vecteur $\mathbf{m} = [s_0, s_1, s_2, \dots, s_{M-1}]^T$;
- La matrice \mathbf{G} sera alors de dimension $N \times M$ et contiendra les termes $H(y_i - z_j) \Delta z$.

Exemple 2 : Profilage sismique vertical

Données et modèles

Problème discret

Systèmes linéaires

Difficultés

Exemples

Nature aléatoire des données

Références



Exemple 2 : Profilage sismique vertical

Données et modèles

Problème discret

Systèmes linéaires

Difficultés

Exemples

 Nature aléatoire des
données

Références

- Sous forme matricielle, pour l'ensemble des données de la figure, on obtient

$$\underbrace{\begin{bmatrix} t_0 \\ t_1 \\ \vdots \\ t_{10} \\ t_{11} \end{bmatrix}}_{\mathbf{d}} = \Delta z \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{G}} \underbrace{\begin{bmatrix} s_0 \\ s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_9 \end{bmatrix}}_{\mathbf{m}} \quad (18)$$

Exemple 3 : Tomographie

Données et modèles

Problème discret

Systèmes linéaires

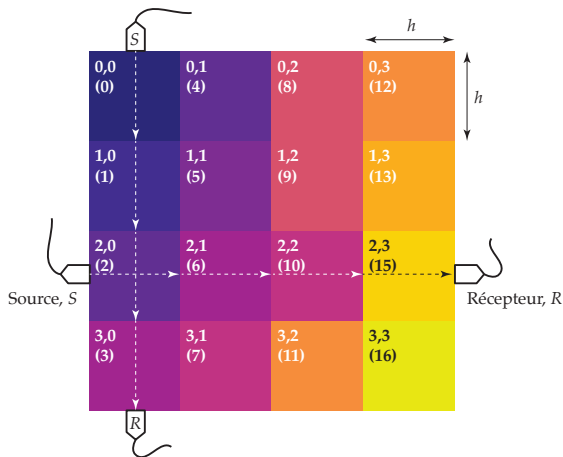
Difficultés

Exemples

Nature aléatoire des données

Références

- En tomographie, on cherche à évaluer la vitesse de propagation ou l'atténuation des ondes dans un milieu.
- Soit l'exemple d'un mur de briques de vitesses différentes :



Exemple 3 : Tomographie

Données et modèles

Problème discret

Systèmes linéaires

Difficultés

Exemples

Nature aléatoire des données

Références

- Deux séries de mesures sont faites, une première le long des colonnes et la seconde le long des lignes, pour un total de $N=8$ mesures.
- Le vecteur des données est $\mathbf{d} = [t_0, t_1, t_2, \dots, t_7]^T$
- On suppose que chaque brique est de vitesse V uniforme ;
- Le temps de parcours dans une brique j est proportionnel à la distance parcourue dans la brique, h , et vaut $t_j = hs_j$, où s est la lenteur.
- Le modèle comporte $M=16$ paramètres, et est dans ce cas $\mathbf{m} = [s_0, s_1, s_2, \dots, s_{15}]^T$

Exemple 3 : Tomographie

Données et modèles

Problème discret

Systèmes linéaires

Difficultés

Exemples

 Nature aléatoire des
données

Références

- On relie les données aux paramètres du modèle par

$$\text{colonne 1 : } t_0 = hs_0 + hs_1 + hs_2 + hs_3$$

$$\text{colonne 2 : } t_1 = hs_4 + hs_5 + hs_6 + hs_7$$

$$\vdots$$

$$\text{ligne 3 : } t_6 = hs_2 + hs_6 + hs_{10} + hs_{14}$$

$$\text{ligne 4 : } t_7 = hs_3 + hs_7 + hs_{11} + hs_{15}$$

- Sous forme matricielle, nous avons

$$\begin{bmatrix} t_0 \\ t_1 \\ \vdots \\ t_6 \\ t_7 \end{bmatrix} = h \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_0 \\ s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_{15} \end{bmatrix} \quad (19)$$

Données et modèles

Problème discret

Systèmes linéaires

Difficultés

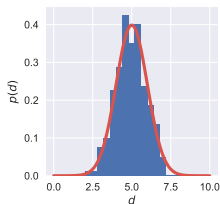
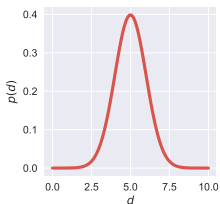
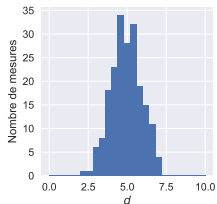
Exemples

**Nature aléatoire des
données**

Références

Nature aléatoire des données

- Invariablement, une mesure expérimentale contient du bruit;
- Une observation répétée *au même point* donnera des mesures différentes;
 - On dit de la variable observée que c'est une **variable aléatoire**, et chaque mesure est une **réalisation** de cette variable aléatoire;
- Une variable aléatoire possède des propriétés précises qui dictent la *distribution* des valeurs observées;
 - Les réalisations permettent *d'estimer* ces propriétés.



Données et modèles

Problème discret

Systèmes linéaires

Difficultés

Exemples

Nature aléatoire des
données

Références

- Les propriétés d'une variables aléatoire d sont spécifiées par sa *fonction de densité de probabilité* (f.d.p), notée $p(d)$;
 - Cette fonction donne la probabilité qu'une réalisation aura une valeur au voisinage de d .
- La fonction $p(d)$ est souvent compliquée et ne peut pas être évaluée directement.
- On résume plutôt ses caractéristiques principales avec quelques grandeurs particulières, par exemple :
 - la moyenne, notée $\langle d \rangle$;
 - la variance, notée σ^2 .

Données et modèles

Problème discret

Systèmes linéaires

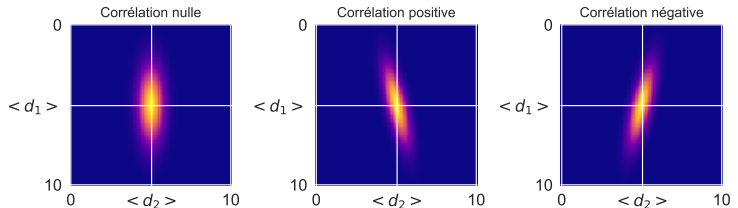
Difficultés

Exemples

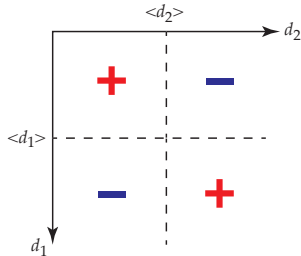
Nature aléatoire des données

Références

- Les levés géophysiques sont réalisés en prenant des mesures en plusieurs points ;
- Il peut arriver que les mesures soient corrélées ;
 - Des valeurs élevées en un point surviennent de façon consistante avec d'autres valeurs élevées (ou faibles) en un autre point.



- Le degré de corrélation de deux variables d_1 et d_2 peut être quantifié en séparant la f.d.p. conjointe en 4 quadrants ;



- Si les variables ne sont pas corrélées, la somme des valeurs de la f.d.p. conjointe de chaque quadrant sera nulle.

Données et modèles

Problème discret

Systèmes linéaires

Difficultés

Exemples

Nature aléatoire des données

Références

- Si la fonction permettant de construire les quadrants est $[d_1 - \langle d_1 \rangle][d_2 - \langle d_2 \rangle]$, la mesure du degré de corrélation est appelée **covariance**;
- Pour un ensemble de N données ayant chacune K réalisations regroupées dans une matrice \mathbf{D} de taille $K \times N$, la covariance expérimentale vaut

$$[\text{cov } \mathbf{d}]_{ij}^{\text{est}} = \frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} (D_{ki} - \langle D_i \rangle^{\text{est}}) (D_{kj} - \langle D_j \rangle^{\text{est}}). \quad (20)$$

où $\langle D_i \rangle^{\text{est}}$ est la moyenne expérimentale de la i^e donnée.

Données et modèles

Problème discret

Systèmes linéaires

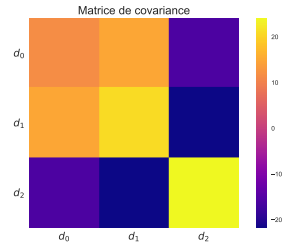
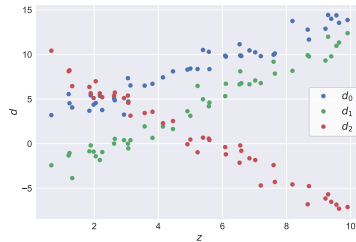
Difficultés

Exemples

Nature aléatoire des données

Références

● Exemple de covariance pour trois variables aléatoires



Données et modèles

Problème discret

Systèmes linéaires

Difficultés

Exemples

Nature aléatoire des
données

Références

Références

Données et modèles

Problème discret

Systèmes linéaires

Difficultés

Exemples

Nature aléatoire des
données

Références

- Aster, R. C., Borchers, B., and Thurber, C. H. (2013). *Parameter Estimation and Inverse Problems*. Academic Press, 2nd edition
- Menke, W. (2012). *Geophysical Data Analysis : Discrete Inverse Theory*. Academic Press, 3rd edition