

# MODÉLISATION ET INVERSION EN GÉOPHYSIQUE

## 2 - Gravimétrie et magnétisme

Bernard Giroux  
(bernard.giroux@ete.inrs.ca)

Institut national de la recherche scientifique  
Centre Eau Terre Environnement

Version 1.2.7  
Hiver 2019

**Gravimétrie**

Théorie

Prisme rectangulaire droit

Polyèdre

Système matriciel

**Magnétisme**

Références

Annexes

# Gravimétrie

# Théorie

Gravimétrie

Théorie

Prisme rectangulaire droit

Polyèdre

Système matriciel

Magnétisme

Références

Annexes

- Le potentiel gravitationnel obéit au **principe de superposition** : le potentiel gravitationnel d'un nombre fini de masses est la somme de l'attraction de chacune de ces masses.
- Si les masses sont infinitésimales ( $dm$ ), le potentiel  $U$  observé en  $P$  est ainsi

$$U(P) = G \int_V \frac{dm}{r} \quad (1)$$

ou bien

$$U(P) = G \int_V \frac{\rho(Q)}{r} dv, \quad (2)$$

où  $G$  est la constante gravitationnelle,  $V$  est le volume occupé par la masse totale,  $\rho$  est la densité,  $Q$  est le point d'intégration, et  $r$  est la distance entre  $P$  et  $Q$ .

Gravimétrie  
Théorie  
Prisme rectangulaire droit  
Polyèdre  
Système matriciel  
Magnétisme  
Références  
Annexes

- L'attraction  $\mathbf{g}$  causée par un volume de densité  $\rho$  est le gradient du potentiel :

$$\begin{aligned}\mathbf{g} &= \nabla U \\ &= -G \int_V \rho \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} dv.\end{aligned}\tag{3}$$

- Dans la pratique, seule la composante verticale de  $\mathbf{g}$  est mesurée, ce qui donne (en coordonnées cartésiennes)

$$\begin{aligned}g(x, y, z) &= \frac{\partial U}{\partial z} \\ &= -G \int_{z'} \int_{y'} \int_{x'} \rho(x', y', z') \frac{z - z'}{r^3} dx' dy' dz',\end{aligned}\tag{4}$$

où  $r = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$ .

# Théorie

Gravimétrie

Théorie

Prisme rectangulaire droit

Polyèdre

Système matriciel

Magnétisme

Références

Annexes

- Typiquement, la modélisation en gravimétrie consiste à calculer  $g(x, y, z)$  avec l'équation (4) pour toutes les cellules du modèle géologique.
- Mais dans les faits, on mesure la **variation de  $g$**  par rapport à un point de référence donné, pour estimer le **contraste de densité ( $\Delta\rho$ )** par rapport à un encaissant ;
  - *On peut donc ne calculer que la réponse des corps qui ont une densité différente de celle de l'encaissant.*
- La solution de l'intégrale triple dépend de la discréétisation du corps.
- Des solutions particulières ont été proposées pour des
  - prismes rectangulaires droits ;
  - prismes polygonaux droits ;
  - polyèdres.

# Théorie - Prisme rectangulaire droit

Gravimétrie

Théorie

Prisme rectangulaire droit

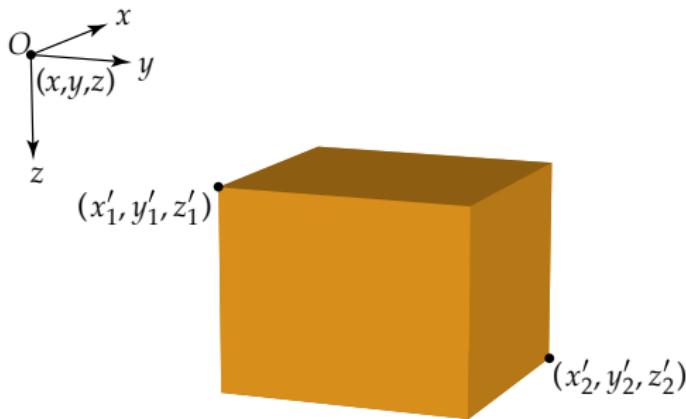
Polyèdre

Système matriciel

Magnétisme

Références

Annexes



- Pour un prisme rectangulaire droit défini par les limites  $x'_1 \leq x \leq x'_2$ ,  $y'_1 \leq y \leq y'_2$  et  $z'_1 \leq z \leq z'_2$ , la composante verticale  $g$  au point d'observation  $O$  vaut

$$g = -G\rho \int_{x'_1}^{x'_2} \int_{y'_1}^{y'_2} \int_{z'_1}^{z'_2} \frac{z - z'}{r^3} dx' dy' dz'. \quad (5)$$

# Théorie - Prisme rectangulaire droit

Gravimétrie

Théorie

Prisme rectangulaire droit

Polyèdre

Système matriciel

Magnétisme

Références

Annexes

- Plusieurs solutions ont été proposées pour le cas du prisme rectangulaire droit.
- Il est important de noter que *certaines solutions ne sont pas valides si le point d'observation est sur un des coins, une des faces, ou à l'intérieur du prisme.*
- Une solution valide sur les faces (excluant les arêtes) et à l'intérieur est (Li et Chouteau, 1998)

$$g = -G\rho \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 \mu_{ijk} \\ \times \left[ x_i \ln(y_j + r_{ijk}) + y_j \ln(x_i + r_{ijk}) + z_k \arctan \frac{z_k r_{ijk}}{x_i y_j} \right], \quad (6)$$

où  $x_i = x - x'_i$ ,  $y_j = y - y'_j$ ,  $z_k = z - z'_k$ ,

$r_{ijk} = \sqrt{x_i^2 + y_j^2 + z_k^2}$  et  $\mu_{ijk} = (-1)^i(-1)^j(-1)^k$ .

- Note relative à l'implémentation de l'équation (6) sous Python/MATLAB :
  - la fonction atan2 (ou arctan2 sous numpy) doit être utilisée au détriment de atan (ou arctan sous numpy).

Pourquoi ?

# Exercice - Prisme rectangulaire droit

Gravimétrie  
Théorie  
Prisme rectangulaire droit  
Polyèdre  
Système matriciel  
Magnétisme  
Références  
Annexes

- Créez un fichier Python `gravi.py`;
- Dans ce fichier, écrivez une fonction `prd` pour calculer la réponse d'un prisme rectangulaire droit;
- Votre fonction doit prendre les variables suivantes en entrée :
  - `rho` : densité [ g/cm<sup>3</sup> ]
  - `x0` : coordonnées [x y z] du point d'observation [ m ]
  - `x` : coord inférieure et supérieure du prisme selon x [ m ]
  - `y` : coord inférieure et supérieure du prisme selon y [ m ]
  - `z` : coord inférieure et supérieure du prisme selon z [ m ]et doit retourner la réponse en mgal.
- Testez votre routine avec les valeurs `rho=0.2`,  
`x=(10, 15)`, `y=(20, 25)` et `z=(5, 15)` pour
  - `x0=(0, 0, 0)`
  - `x0=(12.5, 22.5, 10)`

# Théorie - Polyèdre

Gravimétrie

Théorie

Prisme rectangulaire droit

Polyèdre

Système matriciel

Magnétisme

Références

Annexes

- Le polyèdre constitue la forme géométrique la plus versatile pour représenter des corps de géométrie arbitraire.



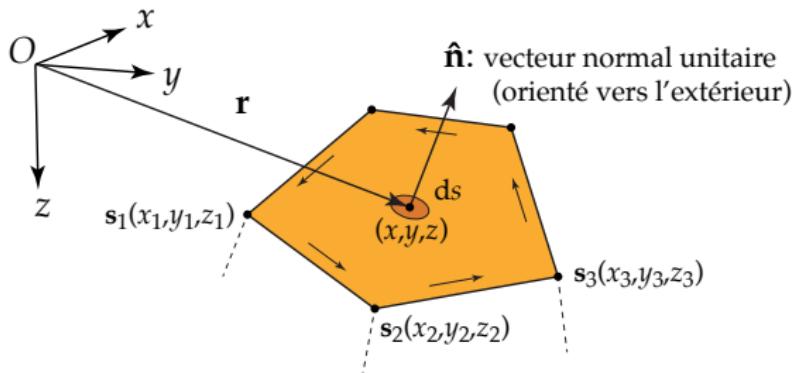
# Théorie - Polyèdre

Gravimétrie  
Théorie  
Prisme rectangulaire droit  
Polyèdre  
Système matriciel  
Magnétisme  
Références  
Annexes

- Singh et Guptasarma (2001) : En vertu du théorème de flux-divergence, l'intégrale sur le volume de l'équation (3) peut être remplacée par une intégrale de surface.
- Il est alors possible d'évaluer la composante de la gravité  $\mathbf{g}$  dans la direction du vecteur unitaire  $\hat{\mathbf{a}}$  par

$$\mathbf{g} \cdot \hat{\mathbf{a}} = -G\rho \iint_S \left( \frac{1}{r} \right) \hat{\mathbf{a}} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, ds, \quad (7)$$

où  $r$  est la distance entre  $O$  et l'aire  $ds$  à la surface du corps, et  $\hat{\mathbf{n}}$  est le vecteur unitaire normal à  $ds$ .



# Théorie - Polyèdre

Gravimétrie  
Théorie  
Prisme rectangulaire droit  
Polyèdre  
Système matriciel  
Magnétisme  
Références  
Annexes

- L'élément  $ds$  produit une attraction orientée selon  $\mathbf{r}$  mais de sens contraire, ce qui permet de remplacer  $\hat{\mathbf{a}}$  par  $-(\mathbf{r}/r)$ .
- Une expression pratique est obtenue en définissant une densité de masse surfacique ( $\sigma'$ ) par

$$\sigma' = \rho \mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{n}}. \quad (8)$$

- L'attraction d'un corps est la même que l'attraction produite par un distribution fictive de  $\sigma'$  sur la surface du corps.
- Nous avons maintenant

$$\begin{aligned} \mathbf{g} &= G\rho \iint (1/r)(\mathbf{r}/r) \cdot \hat{\mathbf{n}} ds \\ &= G \iint \left( \sigma'/r^2 \right) ds. \end{aligned} \quad (9)$$

# Théorie - Polyèdre

Gravimétrie  
Théorie  
Prisme rectangulaire droit  
Polyèdre  
Système matriciel  
Magnétisme  
Références  
Annexes

- La composante verticale  $g$  est obtenue en multipliant l'intégrande par le rapport  $(z/r)$ .
- Dans le cas où le corps est délimité par un polyèdre, i.e. un ensemble de  $n_f$  faces planes, nous avons

$$g = G \sum_{i=1}^{n_f} \rho d_i \iint_i \left( \frac{z}{r^3} \right) ds, \quad (10)$$

où  $d_i = \mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{n}}_i$ .

- Le vecteur  $\hat{\mathbf{n}}_i$  peut être obtenu à partir du produit vectoriel des arêtes de la face  $i$  :
  - Soient  $n_s$  sommets  $\mathbf{s}_{i,k}$  appartenant à la face  $i$ , où l'indice  $k$  définit l'ordre antihoraire lorsque l'objet est vu de l'extérieur ;
  - le vecteur  $\mathbf{n}_i$  vaut

$$\mathbf{n}_i = \sum_{l=2}^{n_s-1} (\mathbf{s}_{i,l} - \mathbf{s}_{i,1}) \times (\mathbf{s}_{i,l+1} - \mathbf{s}_{i,1}), \quad (11)$$

et, par définition,

$$\hat{\mathbf{n}}_i = \frac{\mathbf{n}_i}{|\mathbf{n}_i|}. \quad (12)$$

# Théorie - Polyèdre

Gravimétrie  
Théorie  
Prisme rectangulaire droit  
Polyèdre  
Système matriciel  
Magnétisme  
Références  
Annexes

- Pour arriver à une expression utilisable numériquement, l'intégrale de surface est convertie en intégrale de contour.
- On peut montrer que

$$\iint_i \left( \frac{z}{r^3} \right) ds = - (n\Omega + mP_i - \ell Q_i), \quad (13)$$

où  $(\ell, m, n)$  sont les composantes de  $\hat{\mathbf{n}}_i$ ,  $\Omega$  est l'angle solide de la face  $i$  au point  $O$ , et où  $P_i$  et  $Q_i$  sont les sommes

$$P_i = \sum_{j=1}^{n_a} P_{ij} \quad \text{et} \quad Q_i = \sum_{j=1}^{n_a} Q_{ij}, \quad (14)$$

avec  $n_a$  le nombre d'arêtes sur la face  $i$ .

# Théorie - Polyèdre

Gravimétrie

Théorie

Prisme rectangulaire droit

Polyèdre

Système matriciel

Magnétisme

Références

Annexes

- Les composantes  $P_{ij}$  et  $Q_{ij}$  sont égales à

$$P_{ij} = IL_x \quad \text{et} \quad Q_{ij} = IL_y \quad (15)$$

avec  $L_x = x_2 - x_1$  et  $L_y = y_2 - y_1$  où  $(x_1, y_1, z_1)$  et  $(x_2, y_2, z_2)$  sont les coordonnées du début et de la fin du segment, et où

$$I = \frac{1}{L} \ln \left[ \frac{\sqrt{L^2 + b + r_1^2} + L + \frac{b}{2L}}{r_1 + \frac{b}{2L}} \right] \quad \text{si } (r_1 + b/2L) \neq 0 \quad (16)$$

et

$$I = \frac{1}{L} \ln \left[ \frac{|L - r_1|}{r_1} \right] \quad \text{si } (r_1 + b/2L) = 0, \quad (17)$$

avec

$$L = \sqrt{L_x^2 + L_y^2 + L_z^2}, \quad b = 2(x_1 L_x + y_1 L_y + z_1 L_z), \quad (18)$$

$$r_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$$

# kron - une commande numpy utile

- Gravimétrie
- Théorie
- Prisme rectangulaire droit
- Polyèdre
- Système matriciel
- Magnétisme
- Références
- Annexes

- À l'invite de commande python, entrez `help(np.kron)`
- Essayez `np.kron([[1,2],[3,4]], np.ones((2,1)))`
- Essayez `np.kron([[1,2],[3,4]], np.ones((1,2)))`
- Exercice :
  - Soient des points définis aux coordonnées
    - `x = np.arange(0.0,0.8,0.2)`
    - `y = np.arange(0.1,0.5,0.1)`
    - `z = np.arange(-0.3,0.4,0.3)`
  - Construisez une matrice  $n \times 3$  contenant les coordonnées  $x, y, z$  de chacun des points, un point par ligne
  - Faites varier d'abord la coordonnée  $z$ , ensuite la coordonnée  $y$  et finalement la coordonnée  $x$ , i.e.

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_1 & y_1 & z_2 \\ x_1 & y_2 & z_1 \\ x_1 & y_2 & z_2 \\ x_2 & y_1 & z_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

# Système matriciel

Gravimétrie  
Théorie  
Prisme rectangulaire droit  
Polyèdre  
Système matriciel  
Magnétisme  
Références  
Annexes

- Lorsque le problème direct est linéaire, comme en gravimétrie, ou qu'il a été linéarisé, il est fréquent en inversion de le représenter par un produit matriciel, souvent noté

$$\mathbf{G}\mathbf{m} = \mathbf{d}, \quad (19)$$

où

- $\mathbf{m}$  est un vecteur  $M \times 1$  contenant les paramètres du modèle (la densité des corps en gravimétrie);
- $\mathbf{d}$  est le vecteur  $N \times 1$  des données;
- $\mathbf{G}$  est l'opérateur direct (*data kernel*), de taille  $N \times M$ ;
  - $\mathbf{G}(n, m) \equiv g_{nm}$ , la contribution du  $m^e$  corps à la  $n^e$  donnée.
- Cette approche n'est intéressante que pour les situations où :
  - le maillage ne change pas;
  - les calculs sont répétés pour différents vecteurs  $\mathbf{m}$ .

Gravimétrie
Théorie
Prisme rectangulaire droit
Polyèdre
Système matriciel
Magnétisme
Références
Annexes

- Pour une grille régulière, constituée de prismes rectangulaires droits, on aurait

$$g_{nm} = -G \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 \mu_{ijk} \left[ x_i \ln(y_j + r_{ijk}) + y_j \ln(x_i + r_{ijk}) + z_k \arctan \frac{z_k r_{ijk}}{x_i y_j} \right],$$

où  $x_i = x(n) - x'_i(m)$ ,  $y_j = y(n) - y'_j(m)$ , et  
 $z_k = z(n) - z'_k(m)$ .

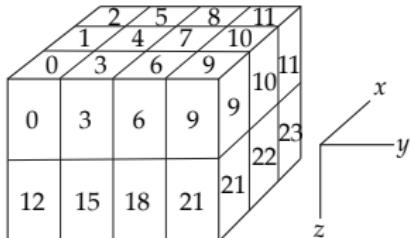
- Remarquez l'absence du terme de densité.

# Système matriciel - Exercice

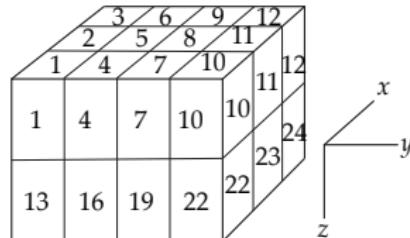
Gravimétrie  
Théorie  
Prisme rectangulaire droit  
Polyèdre  
Système matriciel  
  
Magnétisme  
  
Références  
  
Annexes

Implémenter la construction de la matrice  $\mathbf{G}$  pour une grille régulière (prismes rectangulaires droits)

- Pour construire le système matriciel, il faut se donner une convention pour numérotter les prismes;
- Une convention possible est de faire varier
  - d'abord le numéro de ligne (indice  $i$  selon l'axe des  $x$ ),
  - ensuite le numéro de colonne (indice  $j$  selon l'axe des  $y$ ),
  - finalement le numéro de couche (indice  $k$  selon l'axe des  $z$ ).



Python



MATLAB

# Système matriciel - Exercice

Gravimétrie  
Théorie  
Prisme rectangulaire droit  
Polyèdre  
Système matriciel  
Magnétisme  
Références  
Annexes

- Dans votre fichier `gravi.py`, créez une classe `Grille` pour gérer des grilles régulières (prismes rectangulaires droits)
  - La taille de la grille est de  $n_x \times n_y \times n_z$  prismes
- Le constructeur sera

```
class Grille:  
    def __init__(self, x, y, z):  
        """  
        Input  
        x: coordonnées des noeuds selon x (nx+1 x 1)  
        y: coordonnées des noeuds selon y (ny+1 x 1)  
        z: coordonnées des noeuds selon z (nz+1 x 1)  
        """  
        self.x = x  
        self.y = y  
        self.z = z
```

- Définissez une méthode `ind` qui retourne l'indice  $m$  d'un prisme dans la grille, à partir de ses indices  $(i, j, k)$

# Système matriciel - Exercice

Gravimétrie  
Théorie  
Prisme rectangulaire droit  
Polyèdre  
Système matriciel  
Magnétisme  
Références  
Annexes

- Ajoutez finalement à votre classe Grille une méthode prd\_G, qui utilise votre fonction prd, pour construire la matrice G

```
def prd_G(self, x0):  
    """
```

*PRD\_G - Opérateur direct gravimétrique pour une grille de prismes rectangulaires droits*

*G = prd\_G(x0)*

*Input*

*x0: coordonnées des points d'observation (N x 3)*

*Output*

*G: opérateur direct (array numpy N x M)*

"""

[Gravimétrie](#)[Théorie](#)[Prisme rectangulaire droit](#)[Polyèdre](#)[Système matriciel](#)[Magnétisme](#)[Références](#)[Annexes](#)

- Testez votre fonction avec les commandes

```
g = Grille(x=np.arange(-8.5,9.0),
            y=np.arange(-10.5,11.0),
            z=np.arange(10.0))

x0 = np.array([[0.0, 0.0, 0.0],
               [1.0, 0.0, 0.0],
               [2.0, 0.0, 0.0]])

tic = time.time()
G = g.prd_G(x0)
t_G = time.time() - tic

rho = np.zeros((g.nc,))
rho[ g.ind(8,10,5) ] = 1.0

tic = time.time()
gz = np.dot(G, rho)
t_mult = time.time() - tic

print(t_G, t_mult)
```

Gravimétrie

**Magnétisme**

Équations de Maxwell

Modèle linéaire

Volumes finis

Références

Annexes

# Magnétisme

# Équations de Maxwell

Gravimétrie

Magnétisme

Équations de Maxwell

Modèle linéaire

Volumes finis

Références

Annexes

- Le problème direct en magnétisme est solutionné en partant des équations de Maxwell :

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (20)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (21)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (22)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (23)$$

où

- $\mathbf{B}$  est le champ d'induction;
- $\mathbf{H}$  est le champ magnétique;
- $\mathbf{D}$  est le champ de déplacement;
- $\mathbf{E}$  est le champ électrique;
- $\rho$  est la densité de charge;
- $\mathbf{J}$  est la densité de courant électrique.

# Équations constitutives

Gravimétrie

Magnétisme

Équations de Maxwell

Modèle linéaire

Volumes finis

Références

Annexes

- Les grandeurs électrique  $\mathbf{D}$  et  $\mathbf{E}$  ainsi que les grandeurs magnétiques  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{H}$  sont liées par les équations constitutives :

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (24)$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) \quad (25)$$

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad (26)$$

où

- $\epsilon_0$  est la permittivité diélectrique du vide;
- $\mu_0$  est la perméabilité du vide;
- $\sigma$  est la conductivité électrique;
- $\mathbf{P}$  est la polarisation;
- $\mathbf{M}$  est l'aimantation.

# Équations constitutives

Gravimétrie

Magnétisme

Équations de Maxwell

Modèle linéaire

Volumes finis

Références

Annexes

- Dans les matériaux linéaires isotropes sans pertes,  $\mathbf{P}$  et  $\mathbf{M}$  sont des fonctions linéaires de  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{H}$  respectivement, i.e.

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} = \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E} \quad (27)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H} \quad (28)$$

avec  $\epsilon_r$  la permittivité relative et  $\mu_r$  la perméabilité relative.

- Si le milieu est anisotrope (et linéaire sans pertes),  $\epsilon_r$  et  $\mu_r$  deviennent les tenseurs  $\bar{\bar{\epsilon}}_r$  et  $\bar{\bar{\mu}}_r$  :

$$\bar{\bar{\epsilon}}_r = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{bmatrix} \quad (29)$$

$$\bar{\bar{\mu}}_r = \begin{bmatrix} \mu_{xx} & \mu_{xy} & \mu_{xz} \\ \mu_{yx} & \mu_{yy} & \mu_{yz} \\ \mu_{zx} & \mu_{zy} & \mu_{zz} \end{bmatrix} \quad (30)$$

- En unités SI,
  - $\mathbf{B}$  est exprimé en tesla (T) ou weber/m<sup>2</sup>;
  - $\mathbf{H}$  est exprimé en A/m;
  - $\mu_0$  vaut  $4\pi \times 10^{-7}$  (henry/m).
  - $\chi$  est la susceptibilité (sans dimension).
- Dans le vide (ou dans l'air)

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}. \quad (31)$$

- Si la matière est polarisable, nous avons

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}) \quad (32)$$

$$= \mu_0(\mathbf{H} + \chi \mathbf{H}) \quad (33)$$

$$= \mu_0(1 + \chi) \mathbf{H} \quad (34)$$

$$= \mu \mathbf{H}, \quad (35)$$

$$\mu = \mu_0(1 + \chi) \quad (36)$$

- $\chi$  est la susceptibilité (sans dimension).

Gravimétrie  
Magnétisme  
Équations de Maxwell  
Modèle linéaire  
Volumes finis  
Références  
Annexes

- Si la matière possède une aimantation rémanente, elle s'ajoute à l'aimantation induite.
- L'aimantation totale  $\mathbf{M}$  vaut

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_i + \mathbf{M}_r \quad (37)$$

$$= \chi \mathbf{H} + \mathbf{M}_r \quad (38)$$

où l'aimantation induite est  $\mathbf{M}_i$  et l'aimantation rémanente est  $\mathbf{M}_r$ .

- Le tableau du lien suivant présente les unités en magnétisme : [http://www.ieemagnetics.org/index.php?option=com\\_content&view=article&id=118&Itemid=107](http://www.ieemagnetics.org/index.php?option=com_content&view=article&id=118&Itemid=107)

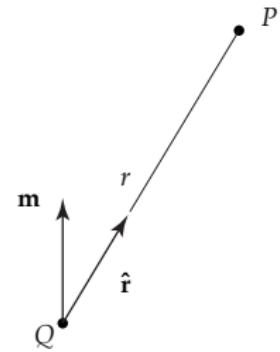
Gravimétrie  
Magnétisme  
Équations de Maxwell  
Modèle linéaire  
Volumes finis  
Références  
Annexes

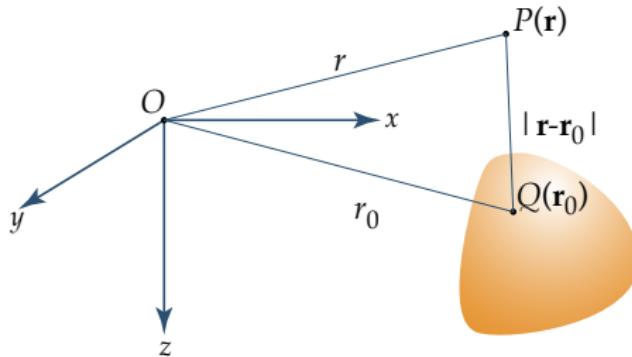
- Une approche simple et rapide consiste à considérer qu'un corps aimanté peut être représenté par une **somme de moments dipolaires**  $\mathbf{m}_i$ . i.e.

$$\mathbf{M} = \frac{1}{V} \sum_i \mathbf{m}_i. \quad (39)$$

- Cette approche suppose que **les moments magnétiques sont faibles** et n'interagissent pas entre eux.
- Le potentiel magnétique d'un moment dipolaire est

$$V = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \cdot \hat{\mathbf{r}}}{r^2}. \quad (40)$$





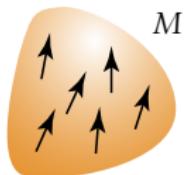
- Le champ magnétique d'un corps aimanté de volume  $V$ , observé au point  $P$  est

$$\mathbf{B} = -\nabla V = -\frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \int_V \mathbf{M} \cdot \nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} dv, \quad (41)$$

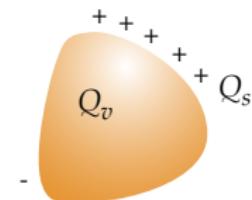
où  $\mu_0$  est la perméabilité magnétique du vide,  $\mathbf{M}$  est l'aimantation du corps, et  $\mathbf{r}_0$  est la position de l'élément de volume  $dv$ .

Gravimétrie  
Magnétisme  
Équations de Maxwell  
Modèle linéaire  
Volumes finis  
  
Références  
Annexes

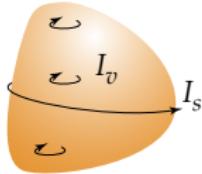
- L'aimantation du corps peut être considérée selon différents modèles



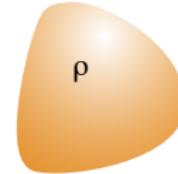
Volume d'aimantation



Charges surfaciques et  
volumiques



Courants surfaciques et  
volumiques



Relation de Poisson

# Théorie - Volume d'aimantation

Gravimétrie  
Magnétisme  
Équations de Maxwell  
Modèle linéaire  
Volumes finis  
Références  
Annexes

- Le modèle du volume d'aimantation s'avère pratique si on peut décomposer le corps en éléments de volume de faibles dimensions (comparativement à la distance au pt d'observation).
- Un  $i^e$  élément de volume  $V_i$  peut être vu comme un dipôle de moment magnétique

$$\mathbf{m}_i = V_i \chi_m \mathbf{H}, \quad (42)$$

où  $\chi_m$  est sa susceptibilité magnétique et  $\mathbf{H}$  est le champ magnétique terrestre.

- Comme on a vu, l'aimantation du corps vaut

$$\mathbf{M} = \frac{1}{V} \sum_i \mathbf{m}_i.$$

# Théorie - Volume d'aimantation

Gravimétrie  
Magnétisme  
Équations de Maxwell  
Modèle linéaire  
Volumes finis  
Références  
Annexes

- Le champ magnétique d'un dipôle  $\mathbf{m}_i$  à une distance  $\mathbf{r}_i$  du point d'observation est

$$\mathbf{B}_i = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \frac{3(\mathbf{m}_i \cdot \mathbf{r}_i) \mathbf{r}_i}{r_i^5} - \frac{\mathbf{m}_i}{r_i^3} \right]. \quad (43)$$

- Le champ mesuré à ce point d'observation est

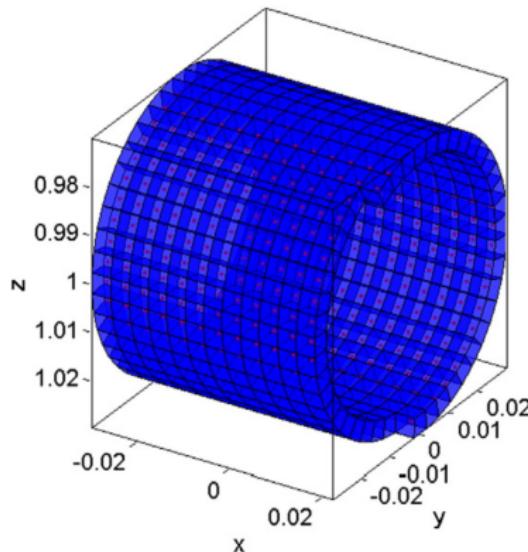
$$\mathbf{B} = \sum_{i=1}^N \mathbf{B}_i + \mu_0 \mathbf{H}, \quad (44)$$

où  $N$  est le nombre de dipôles.

# Exemple - Volume d'aimantation

Gravimétrie  
Magnétisme  
Équations de Maxwell  
Modèle linéaire  
Volumes finis  
Références  
Annexes

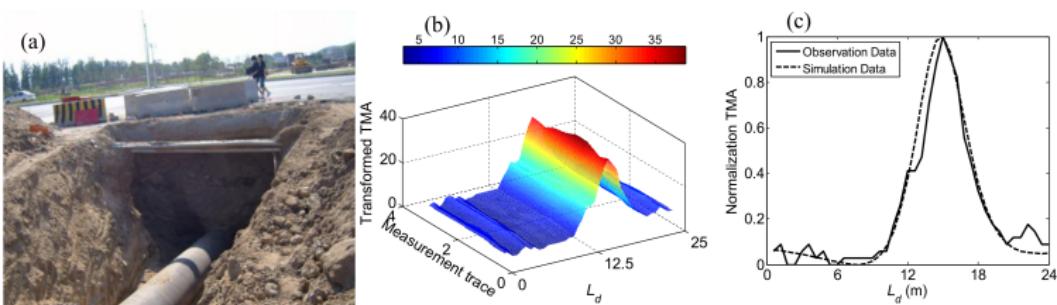
- Guo *et al.* (2015) ont utilisé l'approche du volume d'aimantation pour modéliser la réponse de conduits ferreux.
- Le conduit est discréteisé de sections cylindriques divisées en éléments :



# Exemple - Volume d'aimantation

Gravimétrie  
Magnétisme  
Équations de Maxwell  
Modèle linéaire  
Volumes fins  
Références  
Annexes

- La démagnétisation est prise en compte en ajustant la susceptibilité en fonction d'un facteur de démagnétisation (voir en annexe) choisi de façon *ad hoc*.
- La réponse d'un conduit réel a pu être reproduite :



# Théorie - Charges surfaciques & volumiques

Gravimétrie  
Magnétisme  
Équations de Maxwell  
Modèle linéaire  
Volumes finis  
Références  
Annexes

- En utilisant l'identité  $\nabla \cdot (\phi \mathbf{A}) = \nabla \phi \cdot \mathbf{A} + \phi \nabla \cdot \mathbf{A}$  et le théorème de divergence, on a pour le potentiel magnétique

$$\begin{aligned} V &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \mathbf{M} \cdot \nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} dv \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \frac{\mathbf{M} \cdot \hat{\mathbf{n}}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} ds - \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\nabla \cdot \mathbf{M}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} dv \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \frac{Q_s}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} ds - \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{Q_v}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} dv. \end{aligned} \quad (45)$$

- Si l'aimantation est uniforme, la 2<sup>e</sup> intégrale est nulle.
- Les équations de Singh et Guptasarma (2001) peuvent être utilisées.

Gravimétrie  
Magnétisme  
Équations de Maxwell  
Modèle linéaire  
Volumes finis  
Références  
Annexes

- Pour un polyèdre d'aimantation  $\mathbf{M}$  ayant  $n_f$  faces, les composantes du champ magnétique sont

$$B_x = - \sum_{i=1}^{n_f} \sigma_i \iint_i \left( \frac{x}{r^3} \right) ds, \quad (46)$$

$$B_y = - \sum_{i=1}^{n_f} \sigma_i \iint_i \left( \frac{y}{r^3} \right) ds, \quad (47)$$

$$B_z = - \sum_{i=1}^{n_f} \sigma_i \iint_i \left( \frac{z}{r^3} \right) ds, \quad (48)$$

où  $\sigma_i \equiv Q_{si} = \mathbf{M} \cdot \hat{\mathbf{n}}_i$ .

[Gravimétrie](#)[Magnétisme](#)[Équations de Maxwell](#)[Modèle linéaire](#)[Volumes finis](#)[Références](#)[Annexes](#)

- En transformant l'intégrale de surface en intégrale de contour, nous avons

$$B_x = \sigma_i (\ell\Omega + nQ_i - mR_i), \quad (49)$$

$$B_y = \sigma_i (m\Omega + \ell R_i - nP_i), \quad (50)$$

$$B_z = \sigma_i (n\Omega + mP_i - \ell Q_i) \quad (51)$$

avec  $R_i = \sum_{j=1}^{n_a} R_{ij}$ , où pour chacune des  $n_a$  arête  $R_{ij} = IL_z$ .

# Théorie - Volumes finis

Gravimétrie

Magnétisme

Équations de Maxwell

Modèle linéaire

Volumes finis

Références

Annexes

- Le modèle du corps aimanté vu précédemment suppose que le champ induit est faible par rapport au champ primaire.
- Cette approximation n'est pas valide lorsque la susceptibilité est élevée, en particulier en présence de démagnétisation.
- Une **solution basée sur les équations de Maxwell** permet de tenir compte adéquatement des champs induits.
- La **méthode des volumes finis** (VF) permet de résoudre les équations de Maxwell pour le problème **magnétostatique** :
  - En l'absence de charges libres et de source de courant électrique et lorsqu'il n'y a pas de variation temporelle des champs, nous avons

$$\nabla \times \mathbf{H} = 0 \quad (52)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (53)$$

- La relation  $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$  est toujours valide.

# Théorie - Volumes finis

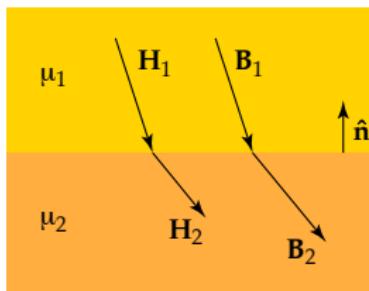
[Gravimétrie](#)[Magnétisme](#)[Équations de Maxwell](#)[Modèle linéaire](#)[Volumes finis](#)[Références](#)[Annexes](#)

- Avec la méthode des VF, le domaine est **discrétisé en voxels** à l'intérieur desquels la perméabilité  $\mu$  est constante, mais où  $\mu$  varie d'un voxel à l'autre.
- À l'interface entre deux voxels, *la composante tangentielle du champ  $\mathbf{H}$  est continue* :

$$\mathbf{H}_1 \times \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{H}_2 \times \hat{\mathbf{n}} \quad \text{ce qui implique} \quad \mu_1^{-1} \mathbf{B}_1 \times \hat{\mathbf{n}} = \mu_2^{-1} \mathbf{B}_2 \times \hat{\mathbf{n}} \quad (54)$$

- La *composante normale de l'induction  $\mathbf{B}$  est également continue* :

$$\mathbf{B}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{B}_2 \cdot \hat{\mathbf{n}} \quad \text{ce qui implique} \quad \mu_1 \mathbf{H}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}} = \mu_2 \mathbf{H}_2 \cdot \hat{\mathbf{n}} \quad (55)$$



# Théorie - Volumes finis

Gravimétrie  
Magnétisme  
Équations de Maxwell  
Modèle linéaire  
Volumes finis  
Références  
Annexes

- L'équation (52) permet d'exprimer le champ magnétique en fonction d'un **potentiel scalaire  $\phi$** , par

$$\mathbf{H} = \nabla\phi. \quad (56)$$

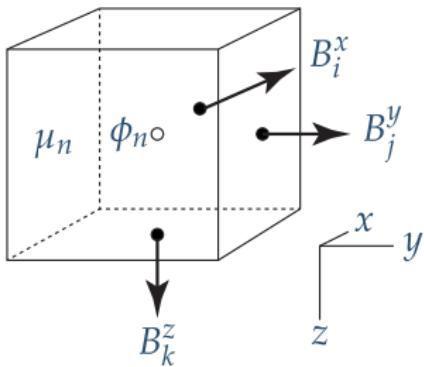
- L'équation (56), exprimée en terme de  $\mathbf{B}$  et  $\mu$ ,

$$\mathbf{B} = \mu\nabla\phi \quad (57)$$

ainsi que les équations (53) et (55) seront discrétisées pour construire le système numérique à résoudre.

- L'approche présentée dans la suite est tirée de Lelièvre (2003).

Gravimétrie  
Magnétisme  
Équations de Maxwell  
Modèle linéaire  
Volumes finis  
Références  
Annexes



- Le système discret repose sur une **grille décalée** :
  - les composantes du champ sont situées aux centres des faces du voxels;
  - le potentiel scalaire est localisé au centre du voxel.
- Ce schéma permet de respecter les conditions de continuités aux interfaces et de calculer la dérivée de  $\phi$  avec un opérateur de différence finie centrée.

# Théorie - Volumes finis

Gravimétrie

Magnétisme

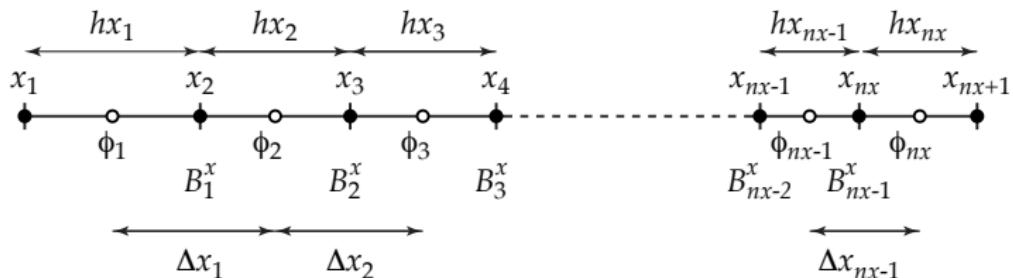
Équations de Maxwell

Modèle linéaire

Volumes finis

Références

Annexes



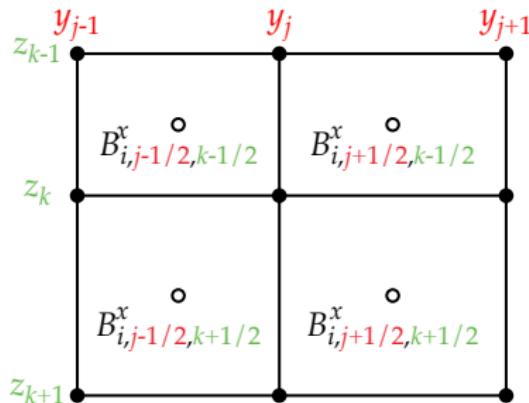
- Le domaine est divisé en  $nc = nx \times ny \times nz$  voxels.
- Les coordonnées de noeuds sont

$$x_i : x_1, x_2, x_3, \dots, x_{nx+1} \quad (58)$$

$$y_j : y_1, y_2, y_3, \dots, y_{ny+1} \quad (59)$$

$$z_k : z_1, z_2, z_3, \dots, z_{nz+1} \quad (60)$$

Gravimétrie  
Magnétisme  
Équations de Maxwell  
Modèle linéaire  
Volumes finis  
Références  
Annexes



- Sur la face  $x_i$ , les indices sont décalés en  $y$  et  $z$  pour le champ  $B^x$ ;
- Un jeu similaire survient pour  $B^y$  et  $B^z$ .

# Théorie - Volumes finis

Gravimétrie  
Magnétisme  
Équations de Maxwell  
Modèle linéaire  
Volumes finis  
Références  
Annexes

- La longueur des côtés des voxels est

$$hx_i : hx_1, hx_2, \dots, hx_{nx} ; \quad hx_i = x_{i+1} - x_i \quad (61)$$

$$hy_j : hy_1, hy_2, \dots, hy_{ny} ; \quad hy_j = y_{j+1} - y_j \quad (62)$$

$$hz_k : hz_1, hz_2, \dots, hz_{nz} ; \quad hz_k = z_{k+1} - z_k \quad (63)$$

- Les coordonnées des centres des voxels sont

$$x_{i+1/2} : x_{1+1/2}, x_{2+1/2}, \dots, x_{nx+1/2} \quad (64)$$

$$y_{j+1/2} : y_{1+1/2}, y_{2+1/2}, \dots, y_{ny+1/2} \quad (65)$$

$$z_{k+1/2} : z_{1+1/2}, z_{2+1/2}, \dots, z_{nz+1/2} \quad (66)$$

- La distance entre les centres des voxels est

$$\Delta x_i : \Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_{nx-1} ; \quad \Delta x_i = x_{i+3/2} - x_{i+1/2} = (hx_i + hx_{i+1})/2 \quad (67)$$

$$\Delta y_j : \Delta y_1, \Delta y_2, \dots, \Delta y_{ny-1} ; \quad \Delta y_j = y_{j+3/2} - y_{j+1/2} = (hy_j + hy_{j+1})/2 \quad (68)$$

$$\Delta z_k : \Delta z_1, \Delta z_2, \dots, \Delta z_{nz-1} ; \quad \Delta z_k = z_{k+3/2} - z_{k+1/2} = (hz_k + hz_{k+1})/2 \quad (69)$$

# Théorie - Volumes finis

Gravimétrie  
Magnétisme  
Équations de Maxwell  
Modèle linéaire  
Volumes finis  
Références  
Annexes

- La solution du problème est obtenue en déterminant les valeurs de  $\phi$  et  $\mathbf{B}$  sur tout le domaine.
  - $\phi$  doit être évalué aux  $nc$  voxels;
  - $B^x$  doit être évalué aux  $(nx + 1) \times ny \times nz$  faces avec un vecteur normal selon  $x$ ;
  - $B^y$  doit être évalué aux  $nx \times (ny + 1) \times nz$  faces avec un vecteur normal selon  $y$ ;
  - $B^z$  doit être évalué aux  $nx \times ny \times (nz + 1)$  faces avec un vecteur normal selon  $z$ .
- Conditions aux frontières pratiques : poser que  $\mathbf{B}$  aux limites du domaine est égal au champ terrestre ambiant;
  - Il faut dans ce cas définir une zone tampon autour du domaine où  $\chi$  est égal à zéro, de façon à ce que le champ induit soit négligeable aux frontières.
  - Les valeurs de  $\mathbf{B}$  doivent alors être déterminées seulement sur les faces intérieures
  - Le nombre total d'inconnues pour  $\mathbf{B}$  est ainsi

$$nf = \underbrace{(nx - 1) \times ny \times nz}_{nfx} + \underbrace{nx \times (ny - 1) \times nz}_{nfy} + \underbrace{nx \times ny \times (nz - 1)}_{nfz}.$$

(70)

# Théorie - Volumes finis

Gravimétrie

Magnétisme

Équations de Maxwell

Modèle linéaire

Volumes finis

Références

Annexes

- Créez une classe `GrilleVF` en vous basant sur votre classe `Grille`
- Ajoutez les attributs suivants
  - `hx, hy, hz` contenant les longueurs des côtés des voxels;
  - `xc, yc, zc` contenant les coordonnées des centres des voxels;
  - `dx, dy, dz` contenant les distances entre les centres des voxels;
  - Ajoutez aussi des attributs pour `nx, ny, nz, nc, nfx, nfy, nfz, nf`
- Modifiez finalement la méthode `ind` pour que `i`, `j` et `k` puisse contenir chacun plusieurs indices.
  - Les indices retournés doivent être classés en ordre croissant;
  - Vérifiez que les indices sont à l'intérieur de la grille.

Gravimétrie  
Magnétisme  
Équations de Maxwell  
Modèle linéaire  
Volumes finis  
Références  
Annexes

- Une discrétisation par volumes finis est une discrétisation de la formulation faible de l'équation aux dérivées partielles.
  - Qu'est-ce qu'une formulation faible implique ?
- Avec cette discrétisation, l'espace est décomposé en petits "volumes finis", qui correspondent aux voxels de la grille.
- Sur ces volumes, les équations devant être discrétisées sont

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{B} \, dv = 0 \quad (71)$$

$$\int_V \mathbf{B} \, dv = \int_V \mu \nabla \phi \, dv \quad \text{ou} \quad \int_V \mu^{-1} \mathbf{B} \, dv = \int_V \nabla \phi \, dv. \quad (72)$$

[Gravimétrie](#)[Magnétisme](#)[Équations de Maxwell](#)[Modèle linéaire](#)[Volumes finis](#)[Références](#)[Annexes](#)

- L'approximation discrète de l'équation (71) est obtenue par le théorème de divergence

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{B} \, dv = \int_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, ds = 0$$

- En posant un flux sortant positif, la forme discrète de l'intégrale de surface devient, pour le voxel  $(i, j, k)$

$$\begin{aligned} \int_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, ds &\approx \left( B_{i,j+1/2,k+1/2}^x - B_{i-1,j+1/2,k+1/2}^x \right) hy_j hz_k \\ &+ \left( B_{i+1/2,j,k+1/2}^y - B_{i+1/2,j-1,k+1/2}^y \right) hx_i hz_k \\ &+ \left( B_{i+1/2,j+1/2,k}^z - B_{i+1/2,j+1/2,k-1}^z \right) hx_i hy_j = 0 \quad (73) \end{aligned}$$

Gravimétrie

Magnétisme

Équations de Maxwell

Modèle linéaire

Volumes finis

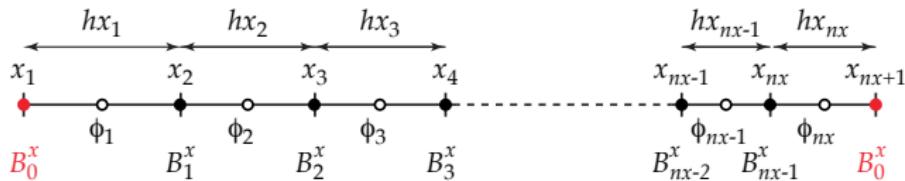
Références

Annexes

- On divisant (73) par le volume du voxel, on obtient  $nc$  équations de la forme

$$\begin{aligned} & \left( B_{\textcolor{red}{i},j+1/2,k+1/2}^x - B_{\textcolor{red}{i}-1,j+1/2,k+1/2}^x \right) / hx_i \\ & + \left( B_{i+1/2,\textcolor{red}{j},k+1/2}^y - B_{i+1/2,\textcolor{red}{j}-1,k+1/2}^y \right) / hy_j \\ & + \left( B_{i+1/2,j+1/2,\textcolor{red}{k}}^z - B_{i+1/2,j+1/2,\textcolor{red}{k}-1}^z \right) / hz_k = 0 \quad (74) \end{aligned}$$

- Les conditions aux limites complètent la discréttisation.
- On pose que partout aux limites du domaine le champ vaut  $\mathbf{B}_0 = (B_0^x, B_0^y, B_0^z)$ .



# Théorie - Volumes finis

Gravimétrie  
Magnétisme  
Équations de Maxwell  
Modèle linéaire  
Volumes finis  
Références  
Annexes

- Pour un voxel sur une face où  $i = 1$ , nous avons une équation de la forme

$$\begin{aligned} & B_{1,j+1/2,k+1/2}^x / hx_1 \\ & + \left( B_{i+1/2,j+1,k+1/2}^y - B_{i+1/2,j,k+1/2}^y \right) / hy_j \\ & + \left( B_{i+1/2,j+1/2,k+1}^z - B_{i+1/2,j+1/2,k}^z \right) / hz_k = B_0^x / hx_1. \end{aligned} \quad (75)$$

- Pour un voxel sur une face où  $i = nx$ , nous avons

$$\begin{aligned} & - B_{nx-1,j+1/2,k+1/2}^x / hx_{nx} \\ & + \left( B_{i+1/2,j+1,k+1/2}^y - B_{i+1/2,j,k+1/2}^y \right) / hy_j \\ & + \left( B_{i+1/2,j+1/2,k+1}^z - B_{i+1/2,j+1/2,k}^z \right) / hz_k = -B_0^x / hx_{nx}. \end{aligned} \quad (76)$$

Gravimétrie  
Magnétisme  
Équations de Maxwell  
Modèle linéaire  
Volumes finis  
Références  
Annexes

- Sur une arête (e.g. où  $i = 1$  et  $j = 1$ ), nous avons une expression de la forme

$$\begin{aligned} & B_{i,j+1/2,k+1/2}^x / hx_i + B_{i+1/2,j,k+1/2}^y / hy_j \\ & + \left( B_{i+1/2,j+1/2,k+1}^z - B_{i+1/2,j+1/2,k}^z \right) / hz_k = B_0^x / hx_i + B_0^y / hy_j. \end{aligned} \quad (77)$$

- Sur un coin (e.g.  $i = 1, j = 1$  et  $k = 1$ ), nous avons une équation de la forme

$$\begin{aligned} & B_{i,j+1/2,k+1/2}^x / hx_i + B_{i+1/2,j,k+1/2}^y / hy_j + \\ & B_{i+1/2,j+1/2,k}^z / hz_k = B_0^x / hx_i + B_0^y / hy_j + B_0^z / hz_k. \end{aligned} \quad (78)$$

# Théorie - Volumes finis

[Gravimétrie](#)[Magnétisme](#)[Équations de Maxwell](#)[Modèle linéaire](#)[Volumes finis](#)[Références](#)[Annexes](#)

- En combinant les équations précédentes, il est possible de construire le système matriciel

$$\mathbf{D}\mathbf{B} = \mathbf{q} \quad (79)$$

où  $\mathbf{D}$  est de taille  $nc \times nf$ ,  $\mathbf{B}$  de taille  $nf \times 1$  et où  $\mathbf{q}$  est de taille  $nc \times 1$  et contient les termes provenant des conditions aux frontières.

- $\mathbf{D}$  est appelée matrice de divergence.
- Le système matriciel peut être séparé de telle sorte que

$$\mathbf{DB} = \mathbf{q} \quad (80)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{D}_x & \mathbf{D}_y & \mathbf{D}_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_x \\ \mathbf{B}_y \\ \mathbf{B}_z \end{bmatrix} = \mathbf{q} \quad (81)$$

$$\mathbf{D}_x \mathbf{B}_x + \mathbf{D}_y \mathbf{B}_y + \mathbf{D}_z \mathbf{B}_z = \mathbf{q}. \quad (82)$$

- La matrice  $\mathbf{D}_x$  est construite selon

$$\mathbf{D}_x = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{D}}_x & & & \\ & \tilde{\mathbf{D}}_x & & \\ & & \ddots & \\ & & & \tilde{\mathbf{D}}_x \end{bmatrix} \quad (83)$$

où

$$\tilde{\mathbf{D}}_x = \begin{bmatrix} hx_1^{-1} & & & \\ -hx_2^{-1} & hx_2^{-1} & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & -hx_{nx-1}^{-1} & hx_{nx-1}^{-1} \\ & & & -hx_n^{-1} \end{bmatrix} \quad (84)$$

- La diagonale principale et la  $-1^e$  diagonale de  $\tilde{\mathbf{D}}_x$  sont remplies.  $\tilde{\mathbf{D}}_x$  est de taille  $nx \times (nx - 1)$ , et est répétée  $ny \times nz$  fois pour créer  $\mathbf{D}_x$ .

Gravimétrie

Magnétisme

Équations de Maxwell

Modèle linéaire

Volumes finis

Références

Annexes

- Ajoutez une méthode `fabrique_D` à la classe `GrilleVF`, pour construire la matrice  $D_x$ .
- $D_x$  devra être une matrice *creuse*.
  - Consultez la documentation du module `sparse` de la librairie `scipy`;
  - La forme la plus simple à utiliser est `coo_matrix`;

Gravimétrie  
Magnétisme  
Équations de Maxwell  
Modèle linéaire  
Volumes finis  
Références  
Annexes

- $\mathbf{D}_y$  est construite de façon similaire avec

$$\tilde{\mathbf{D}}_y = \begin{bmatrix} hy_1^{-1} & & & & \\ 0 & hy_1^{-1} & & & \\ \vdots & & \ddots & & \\ 0 & & & hy_1^{-1} & hy_2^{-1} \\ -hy_2^{-1} & & & hy_2^{-1} & \\ \ddots & & & & \ddots \\ & & & -hy_{ny-1}^{-1} & hy_{ny-1}^{-1} \\ & & & -hy_{ny}^{-1} & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & -hy_{ny}^{-1} \end{bmatrix} \quad (85)$$

- La diagonale principale et la  $-nx^e$  diagonale sont remplies.  $\tilde{\mathbf{D}}_y$  est de taille  $nx * ny \times nx * (ny - 1)$ , et est répétée  $nz$  fois pour créer  $\mathbf{D}_y$ .

Gravimétrie

Magnétisme

Équations de Maxwell

Modèle linéaire

Volumes finis

Références

Annexes

- Ajoutez la construction de la matrice  $D_y$  à votre méthode fabrique\_D.
- $D_y$  devra également être une matrice creuse.

# Théorie - Volumes finis

Gravimétrie

Magnétisme

Équations de Maxwell

Modèle linéaire

Volumes finis

Références

Annexes

- $\mathbf{D}_z$  contient des éléments sur la diagonale principale et la  $-nx * ny^e$  diagonale :

$$\mathbf{D}_z = \begin{bmatrix} hz_1^{-1} & & & & \\ 0 & hz_1^{-1} & & & \\ \vdots & & \ddots & & \\ -hz_2^{-1} & & & hz_2^{-1} & \\ & \ddots & & & \ddots \\ & & -hz_{nz-1}^{-1} & & hz_{nz-1}^{-1} \\ & & & -hz_{nz}^{-1} & \\ & & & & \ddots \\ & & & & -hz_{nz}^{-1} \end{bmatrix} \quad (86)$$

# Théorie - Volumes finis

Gravimétrie

Magnétisme

Équations de Maxwell

Modèle linéaire

Volumes finis

Références

Annexes

- Ajoutez finalement la construction de  $D_z$  (creuse) à votre méthode `fabrique_D` et assemblez la matrice  $D$
- `fabrique_D` doit retourner  $D$ .
- Ajoutez également une méthode `fabrique_q` pour construire le vecteur  $q$ ;
  - Cette méthode doit avoir pour argument  $B_0$  (un vecteur contenant les trois composantes du champ ambiant).

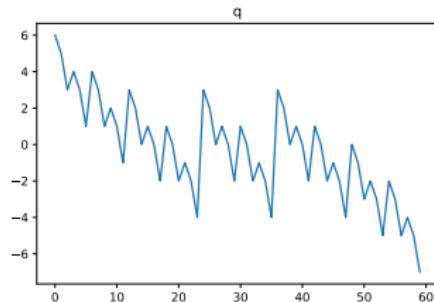
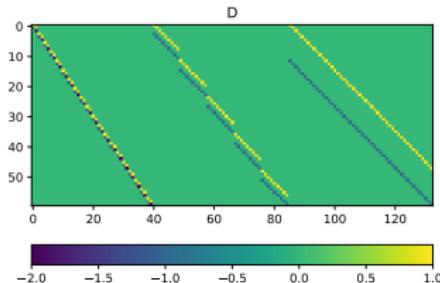
# Théorie - Volumes finis

Gravimétrie  
Magnétisme  
Équations de Maxwell  
Modèle linéaire  
Volumes finis  
Références  
Annexes

- Testez votre code avec :

```
x = [1, 2, 3, 3.5]
y = [1, 2, 3, 4, 5]
z = np.arange(6)
B0 = np.array([1., 2., 3.])
gvf = GrilleVF(x, y, z)
D = gvf.fabrique_D()
q = gvf.fabrique_q(B0)
```

- Vous devriez obtenir :



# Théorie - Volumes finis

Gravimétrie  
Magnétisme  
Équations de Maxwell  
Modèle linéaire  
Volumes finis  
Références  
Annexes

- Pour discréteriser l'équation (72), il est nécessaire de connaître  $\mu$  (ou  $\mu^{-1}$ ) sur les faces des voxels.
- En interpolant  $\mu$ , on obtient sa moyenne arithmétique alors qu'en interpolant  $\mu^{-1}$  on obtient la moyenne harmonique de  $\mu$ .
  - La moyenne harmonique est plus représentative de la perméabilité effective;
  - Pour des cellules de tailles différentes, la moyenne harmonique  $\mu_m$  selon  $x$  vaut

$$\mu_m = 2\Delta x \left( \frac{hx_1}{\mu_1} + \frac{hx_2}{\mu_2} \right)^{-1}. \quad (87)$$

- On discrétise donc  $\mu^{-1}\mathbf{B} = \nabla\phi$ , qui est séparé en trois parties :

$$\mu^{-1}B_x = \nabla_x\phi \quad (88)$$

$$\mu^{-1}B_y = \nabla_y\phi \quad (89)$$

$$\mu^{-1}B_z = \nabla_z\phi. \quad (90)$$

# Théorie - Volumes finis

Gravimétrie

Magnétisme

Équations de Maxwell

Modèle linéaire

Volumes finis

Références

Annexes

- Le volume d'intégration couvre une face du voxel de sorte que l'induction  $B$  est au centre du volume, i.e. en  $x$

$$\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \int_{y_j}^{y_{j+1}} \int_{z_k}^{z_{k+1}} \frac{B_x}{\mu} dx dy dz = \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \int_{y_j}^{y_{j+1}} \int_{z_k}^{z_{k+1}} \nabla_x \phi dx dy dz \quad (91)$$

- Si on assume que  $B_x$  ne varie pas à l'intérieur du volume d'intégration, on peut le sortir de l'intégrale triple.
- La forme discrète, après avoir divisé par le volume d'intégration, est

$$\frac{B_{i,j+1/2,k+1/2}^x}{2\Delta x_i} \left( \frac{hx_i}{\mu_{i+1/2,j+1/2,k+1/2}} + \frac{hx_{i-1}}{\mu_{i-1/2,j+1/2,k+1/2}} \right) = \frac{\phi_{i+1/2,j+1/2,k+1/2} - \phi_{i-1/2,j+1/2,k+1/2}}{\Delta x_i} \quad (92)$$

[Gravimétrie](#)[Magnétisme](#)[Équations de Maxwell](#)[Modèle linéaire](#)[Volumes finis](#)[Références](#)[Annexes](#)

- La notation est allégée en posant

$$\eta_{i,j+1/2,k+1/2}^x = 2\Delta x_i \left( \frac{hx_i}{\mu_{i+1/2,j+1/2,k+1/2}} + \frac{hx_{i-1}}{\mu_{i-1/2,j+1/2,k+1/2}} \right)^{-1} \quad (93)$$

ce qui donne

$$\frac{B_{i,j+1/2,k+1/2}^x}{\eta_{i,j+1/2,k+1/2}^x} = \frac{\phi_{i+1/2,j+1/2,k+1/2} - \phi_{i-1/2,j+1/2,k+1/2}}{\Delta x_i} \quad (94)$$

- On peut maintenant construire une système matriciel de la forme

$$\mathbf{M}_x^{-1} \mathbf{B}_x = \mathbf{G}_x \boldsymbol{\phi} \quad \text{ou} \quad \mathbf{B}_x = \mathbf{M}_x \mathbf{G}_x \boldsymbol{\phi} \quad (95)$$

où  $\mathbf{M}_x$  est une matrice diagonale contenant les coefficients

$$\eta_{i,j+1/2,k+1/2}^x.$$

Gravimétrie  
Magnétisme  
Équations de Maxwell  
Modèle linéaire  
Volumes finis  
Références  
Annexes

- En procédant de façon similaire selon  $y$  et  $z$ , on arrive à un système

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B}_x \\ \mathbf{B}_y \\ \mathbf{B}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_x & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{M}_y & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{M}_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{G}_x \\ \mathbf{G}_y \\ \mathbf{G}_z \end{bmatrix} \phi \quad (96)$$
$$\mathbf{B} = \mathbf{M} \mathbf{G} \phi$$

- $\mathbf{G}$  est appelée matrice de gradient (de taille  $nf \times nc$ );
- $\mathbf{M}$  est appelée matrice des perméabilité (de taille  $nf \times nf$ );
- $\phi$  est le vecteur du potentiel magnétique (de taille  $nc \times 1$ ).

[Gravimétrie](#)[Magnétisme](#)[Équations de Maxwell](#)[Modèle linéaire](#)[Volumes finis](#)[Références](#)[Annexes](#)

- **M est construite suivant**

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \eta_1^x & & & & & \\ & \eta_2^x & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \eta_{(nx-1)ny\,nz}^x & & \\ & & & & \eta_1^y & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & \eta_{nx(ny-1)\,nz}^y & \\ & & & & & & & \eta_1^z \\ & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & \eta_{nx\,ny(nz-1)}^z \end{bmatrix} \quad (97)$$

# Théorie - Volumes finis

Gravimétrie  
Magnétisme  
Équations de Maxwell  
Modèle linéaire  
Volumes finis  
Références  
Annexes

## Construction des matrices $\mathbf{M}_x$ , $\mathbf{M}_y$ et $\mathbf{M}_z$

- Il faut choisir soigneusement les indices des voxels

$\mathbf{M}_x$

1	2	5	7	8	10	11
0	3	6	9	9	10	11
0	3	6	9	9	25	29
12	15	18	21	21		

1	2	5	7	8	10	11
0	3	6	9	9	10	11
0	3	6	9	9	25	29
12	15	18	21	21		

$\mathbf{M}_y$

1	2	5	7	8	10	11
0	3	6	9	9	10	11
0	3	6	9	9	25	29
12	15	18	21	21		

1	2	5	7	8	10	11
0	3	6	9	9	10	11
0	3	6	9	9	25	29
12	15	18	21	21		

$\mathbf{M}_z$

1	2	5	7	8	10	11
0	3	6	9	9	10	11
0	3	6	9	9	25	29
12	15	18	21	21		

1	2	5	7	8	10	11
0	3	6	9	9	10	11
0	3	6	9	9	25	29
12	15	18	21	21		

Gravimétrie

Magnétisme

Équations de Maxwell

Modèle linéaire

Volumes finis

Références

Annexes

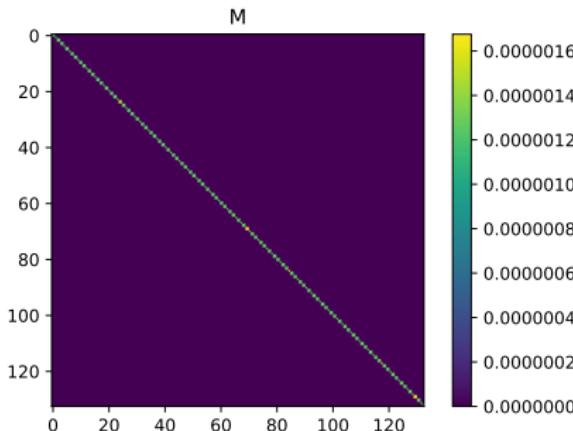
- Créez une méthode `fabrique_M` pour construire la matrice **M** contenant les valeurs de la moyenne harmonique de  $\mu$ .
- Votre méthode aura pour argument `mu`, un vecteur de  $nc$  éléments contenant les valeurs de perméabilité des voxels.
- Notez que **M** est également une matrice creuse.

Gravimétrie  
Magnétisme  
Équations de Maxwell  
Modèle linéaire  
Volumes finis  
Références  
Annexes

- Testez votre code avec :

```
chi = np.zeros((gvf.nc,))  
chi[gvf.ind(2,2,3)] = 1.0  
mu0 = 4 * math.pi * 1.e-7;  
mu = mu0 * (1.+chi)  
M = gvf.fabrique_M(mu)
```

- Vous devriez obtenir :



- Par ailleurs,

$$\mathbf{G}_x = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{G}}_x & & \\ & \tilde{\mathbf{G}}_x & \\ & & \ddots & \\ & & & \tilde{\mathbf{G}}_x \end{bmatrix} \quad (98)$$

$$\tilde{\mathbf{G}}_x = \begin{bmatrix} -\Delta x_1^{-1} & \Delta x_1^{-1} & & \\ & -\Delta x_2^{-1} & \Delta x_2^{-1} & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & -\Delta x_{nx-1}^{-1} & \Delta x_{nx-1}^{-1} \end{bmatrix} \quad (99)$$

- La diagonale principale et la première diagonale sont remplies.
- $\tilde{\mathbf{G}}_x$  est de taille  $(nx - 1) \times nx$  et répétée  $ny * nz$  fois, ce qui fait que  $\mathbf{G}_x$  est de taille  $nfx \times nc$ .

• Également,

$$\mathbf{G}_y = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{G}}_y & & & \\ & \tilde{\mathbf{G}}_y & & \\ & & \ddots & \\ & & & \tilde{\mathbf{G}}_y \end{bmatrix} \quad (100)$$

$$\tilde{\mathbf{G}}_y = \begin{bmatrix} -\Delta y_1^{-1} & 0 & \cdots & 0 & \Delta y_1^{-1} & & \\ & \ddots & & & & \ddots & \\ & & -\Delta y_1^{-1} & & & & \Delta y_1^{-1} \\ & & & -\Delta y_2^{-1} & & & \Delta y_2^{-1} \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & -\Delta y_{ny-1}^{-1} & \Delta y_{ny-1}^{-1} \\ & & & & & & \ddots \end{bmatrix} \quad (101)$$

- La diagonale principale et la  $nx^e$  diagonale sont remplies.
- $\tilde{\mathbf{G}}_y$  est de taille  $nx * (ny - 1) \times nx * ny$  et répétée  $nz$  fois, ce qui fait que  $\mathbf{G}_y$  est de taille  $nfy \times nc$ .

Gravimétrie  
Magnétisme  
Équations de Maxwell  
Modèle linéaire  
Volumes finis

Références

Annexes

● Finalement,

$$\mathbf{G}_z = \begin{bmatrix} -\Delta z_1^{-1} & 0 & \cdots & 0 & \Delta z_1^{-1} \\ \vdots & & & & \vdots \\ & -\Delta z_1^{-1} & & & \Delta z_1^{-1} \\ & & -\Delta z_2^{-1} & & \Delta z_2^{-1} \\ & & & \ddots & \ddots \\ & & & & -\Delta z_{nz-1}^{-1} \\ & & & & \Delta z_{nz-1}^{-1} \\ & & & & (102) \end{bmatrix}$$

- La diagonale principale et la  $(nx * ny)^e$  diagonale sont remplies, et  $\mathbf{G}_z$  est de taille  $nfz \times nc$ .

Gravimétrie

Magnétisme

Équations de Maxwell

Modèle linéaire

Volumes finis

Références

Annexes

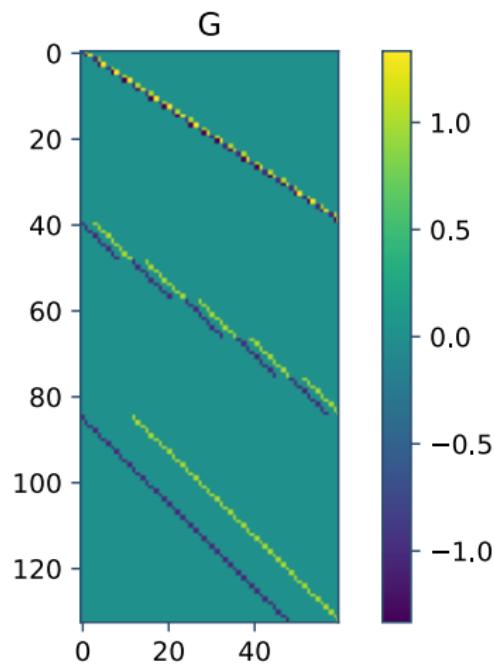
- Écrivez finalement une méthode `fabrique_G` pour construire la matrice **G** contenant les opérateurs du gradient de  $\phi$ .
- Comme pour les matrices **D** et **M**, **G** doit être creuse.

Gravimétrie  
Magnétisme  
Équations de Maxwell  
Modèle linéaire  
Volumes finis  
Références  
Annexes

- Testez votre code avec :

```
G = gvf.fabrique_G()
```

- Vous devriez obtenir :



# Théorie - Volumes finis

Gravimétrie  
Magnétisme  
Équations de Maxwell  
Modèle linéaire  
Volumes finis  
Références  
Annexes

- Les équations vues jusqu'à présent permettent de calculer le champ total  $\mathbf{B}$ .
- Nous avons les équations (79)

$$\mathbf{DB} = \mathbf{q}$$

et (96)

$$\mathbf{B} = \mathbf{MG}\phi$$

- On résoud le système pour  $\phi$  en insérant les conditions aux limites, i.e.

$$\underbrace{\mathbf{DMG}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\phi}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\mathbf{q}}_{\mathbf{b}}$$

- On utilise (96) pour finalement calculer  $\mathbf{B}$ .

# Théorie - Volumes finis

Gravimétrie  
Magnétisme  
Équations de Maxwell  
Modèle linéaire  
Volumes finis  
Références  
Annexes

- Il est souvent souhaitable de ne modéliser que le champ induit (ou secondaire) par la présence de corps magnétisables, i.e. de calculer l'anomalie magnétique (notée  $B_s$ ).
- Il est possible d'extraire l'anomalie du champ total en soustrayant à ce dernier la valeur du champ ambiant  $B_0$ , i.e.

$$B_s = B - B_0. \quad (103)$$

- Cette approche peut être sujette aux erreurs d'arrondi car le champ secondaire est souvent plus faible que  $B_0$  par plusieurs ordres de grandeur .

# Théorie - Volumes finis

Gravimétrie

Magnétisme

Équations de Maxwell

Modèle linéaire

Volumes finis

Références

Annexes

- Il est possible de calculer directement le champ secondaire et de limiter les erreurs d'arrondi.
- Il suffit de décomposer les équations (79) et (96) selon

$$\mathbf{D}(\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_s) = \mathbf{f} + \mathbf{g} \quad (104)$$

$$\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_s) = \mathbf{G}(\phi_0 + \phi_s). \quad (105)$$

- Le vecteur  $\mathbf{f}$  est équivalent au vecteur  $\mathbf{q}$  de l'équation (79), i.e. il est calculé à partir de  $\mathbf{B}_0$  sur le pourtour du domaine.
- Le vecteur  $\mathbf{g}$  est similaire à  $\mathbf{f}$ , mais est dû au champ induit  $\mathbf{B}_s$  plutôt que  $\mathbf{B}_0$ .
  - Si les corps magnétiques sont loin des bords du domaine, on peut assumer que  $\mathbf{B}_s$  sera très faible au pourtour du domaine et donc que  $\mathbf{g} \approx 0$ .

# Théorie - Volumes finis

Gravimétrie

Magnétisme

Équations de Maxwell

Modèle linéaire

Volumes finis

Références

Annexes

- Pour le champ primaire, nous avons ainsi

$$\mathbf{DB}_0 = \mathbf{f} \quad \text{et} \quad \mathbf{M}_0^{-1}\mathbf{B}_0 = \mathbf{G}\phi_0. \quad (106)$$

- $\mathbf{M}_0$  a des éléments non-nuls seulement sur la diagonale principale et  $\eta_0 = \mu_0$ , ce qui fait que  $\mathbf{M}_0 = \mu_0 \mathbf{I}$ .
- Pour le champ secondaire, nous avons alors

$$\mathbf{DB}_s = \mathbf{g} \quad (107)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^{-1}\mathbf{B}_s &= -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{B}_0 + \mathbf{G}\phi_0 + \mathbf{G}\phi_s \\ &= -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{B}_0 + \mathbf{M}_0^{-1}\mathbf{B}_0 + \mathbf{G}\phi_s \\ &= \left(\mu_0^{-1}\mathbf{I} - \mathbf{M}^{-1}\right)\mathbf{B}_0 + \mathbf{G}\phi_s. \end{aligned} \quad (108)$$

[Gravimétrie](#)[Magnétisme](#)[Équations de Maxwell](#)[Modèle linéaire](#)[Volumes finis](#)[Références](#)[Annexes](#)

- On a finalement que

$$\mathbf{B}_s = \left( \mu_0^{-1} \mathbf{M} - \mathbf{I} \right) \mathbf{B}_0 + \mathbf{M} \mathbf{G} \phi_s, \quad (109)$$

où  $\phi_s$  est obtenu en solutionnant

$$\underbrace{\mathbf{D} \mathbf{M} \mathbf{G}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\phi_s}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\mathbf{g} - \mathbf{D} \left( \mu_0^{-1} \mathbf{M} - \mathbf{I} \right) \mathbf{B}_0}_{\mathbf{b}} \quad (110)$$

avec  $\mathbf{B}_0$  un vecteur de la taille de  $\mathbf{B}$  contenant les valeurs du champ ambiant.

- La méthode du gradient biconjugué stabilisé peut être utilisée pour résoudre ce système.

# Théorie - Volumes finis

Gravimétrie  
Magnétisme  
Équations de Maxwell  
Modèle linéaire  
Volumes finis  
Références  
Annexes

- Comment calculer  $\mathbf{g}$  alors que  $\mathbf{B}_s$  est inconnu ?
- Lelièvre (2003) propose d'approximer les matériaux magnétiques dans le domaine par une sphère de susceptibilité égale à la moyenne volumique des susceptibilités des voxels ;
  - on peut ensuite calculer analytiquement la réponse de cette sphère au pourtour du domaine.
- La moyenne volumique  $\xi$  est

$$V = \sum_{i=0, \chi_i \neq 0}^{nc-1} v_i \quad (111)$$

$$\xi = \frac{1}{V} \sum_{i=0}^{nc-1} \chi_i v_i \quad (112)$$

où  $v_i$  est le volume du  $i^e$  voxel et  $\chi_i$  est la susceptibilité de ce voxel.

# Théorie - Volumes finis

Gravimétrie  
Magnétisme  
Équations de Maxwell  
Modèle linéaire  
Volumes finis  
Références  
Annexes

- Pour une sphère de susceptibilité  $\xi$ , les facteurs de  $\rightarrow$  démagnétisation sont  $1/3$ ;
- Le moment dipolaire de la sphère est ainsi

$$\mathbf{m} = \frac{\mathbf{B}_0}{\mu_0} \frac{\xi V}{1 + \frac{\xi}{3}}, \quad (113)$$

avec une magnitude  $m$  et une direction unitaire  $\hat{\mathbf{m}}$ .

- Le champ secondaire à un point  $P$  au pourtour du domaine est donc

$$\mathbf{B}_s(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m}{r^3} [3(\hat{\mathbf{m}} \cdot \hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}} - \hat{\mathbf{m}}], \quad (114)$$

où le vecteur pointe du centre de la sphère vers  $P$ .

[Gravimétrie](#)[Magnétisme](#)[Équations de Maxwell](#)[Modèle linéaire](#)[Volumes finis](#)[Références](#)[Annexes](#)

- Le centre de la sphère est placé au “centre de susceptibilité”  $(x_c, y_c, z_c)$ , calculé de façon similaire au centre de gravité, i.e.

$$\begin{aligned} x_c &= \frac{\sum^{nc} \chi_i x_i}{\sum^{nc} \chi_i} \\ y_c &= \frac{\sum^{nc} \chi_i y_i}{\sum^{nc} \chi_i} \\ z_c &= \frac{\sum^{nc} \chi_i z_i}{\sum^{nc} \chi_i} \end{aligned} \quad (115)$$

[Gravimétrie](#)[Magnétisme](#)[Équations de Maxwell](#)[Modèle linéaire](#)[Volumes finis](#)[Références](#)[Annexes](#)

- La discréttisation du milieu en volumes finis entraîne une erreur.
- Pour évaluer l'ordre de grandeur cette erreur, partons de la série de Taylor à la surface d'un voxel en posant que les voxels sont cubiques de côté  $h$  :

$$\begin{aligned}\phi_{i+1/2,j+1/2,k+1/2} &= \phi_{i,j+1/2,k+1/2} \\ &+ \frac{h}{2}\phi'_{i,j+1/2,k+1/2} + \frac{h^2}{8}\phi''_{i,j+1/2,k+1/2} + \mathcal{O}(h^3)\end{aligned}\quad (116)$$

$$\begin{aligned}\phi_{i-1/2,j+1/2,k+1/2} &= \phi_{i,j+1/2,k+1/2} \\ &- \frac{h}{2}\phi'_{i,j+1/2,k+1/2} + \frac{h^2}{8}\phi''_{i,j+1/2,k+1/2} - \mathcal{O}(h^3)\end{aligned}\quad (117)$$

# Théorie - Volumes finis

Gravimétrie

Magnétisme

Équations de Maxwell

Modèle linéaire

Volumes finis

Références

Annexes

- En soustrayant les équations (116) et (117), on arrive à l'expression de l'opérateur de dérivé centrée suivant :

$$\frac{\phi_{i+1/2,j+1/2,k+1/2} - \phi_{i-1/2,j+1/2,k+1/2}}{h} = \phi'_{i,j+1/2,k+1/2} + \mathcal{O}(h^2) \quad (118)$$

- Or,  $\mathbf{B}$  est évalué à partir du potentiel  $\phi$ , i.e.

$$B_{i,j+1/2,k+1/2}^x = \eta_{i,j+1/2,k+1/2} \left( \frac{\phi_{i+1/2,j+1/2,k+1/2} - \phi_{i-1/2,j+1/2,k+1/2}}{h} \right), \quad (119)$$

où  $\eta_{i,j+1/2,k+1/2}$  est la moyenne harmonique des valeurs de perméabilité des voxels voisins à l'interface.

- La précision sur le calcul de  $\mathbf{B}$  est donc de l'ordre de  $\mathcal{O}(\eta_{\text{harm}} h^2)$ .
  - L'erreur est donc proportionnelle à la perméabilité en plus de la taille des voxels au carré.

Gravimétrie

Magnétisme

Équations de Maxwell

Modèle linéaire

Volumes finis

Références

Annexes

- Créez une méthode `fabrique_cf` à partir de votre méthode `fabrique_q` et ajoutez-y la construction du vecteur `g`
- Suivez pour ce faire l'approche proposée par Lelièvre à la section 4.2 de son mémoire (disponible à <http://circle.ubc.ca/handle/2429/13931>)
- Cette méthode aura pour arguments `B0` et `chi`

Gravimétrie

Magnétisme

Équations de Maxwell

Modèle linéaire

Volumes finis

Références

Annexes

- Implémentez finalement une méthode pour modéliser la réponse magnétique pour une distribution spatiale donnée de la susceptibilité  $\chi$
- Définissez la méthode selon  
`def magmod(self, chi, B0, xo, usecl, chtot)`  
où
  - $xo$  : points d'observation (ndarray de taille  $N \times 3$ )
  - `usecl` permet de préciser si  $g$  doit être considéré (booléen)
  - `chtot` indique s'il faut calculer le champ total ou  $B_s$  (booléen)
- La méthode doit retourner les valeurs de  $B_x$ ,  $B_y$  et  $B_z$  interpolées aux points d'observation  $xo$

# Volumes finis – Exemple

Gravimétrie

Magnétisme

Équations de Maxwell

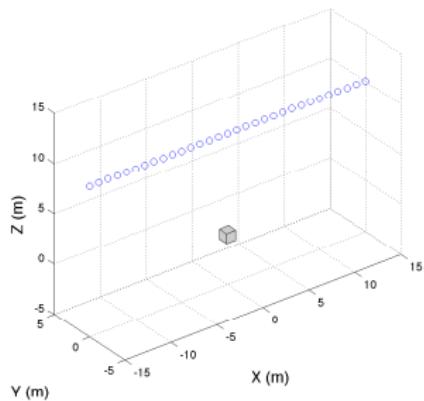
Modèle linéaire

Volumes finis

Références

Annexes

- Calculez l'anomalie causée par un cube de  $1 \text{ m}^3$ , de susceptibilité  $\chi = 0.01$ , et situé au centre d'une grille de  $33 \times 33 \times 33$  voxels (tous de  $1 \text{ m}^3$  de volume), pour un champ ambiant  $\mathbf{B}_0 = [0, 0, 10000]$  T.
- Le centre du cube aimanté est à la coordonnée (0,0,0).
- Utilisez le solveur `bicgstab` avec les paramètres par défaut.
- Tracez un profil de  $B_x$  et un profil de  $B_z$  pour les points ayant pour coordonnées  
`xp=np.arange(-15.0,15.1)`  
`yp=0`  
`zp=10`



# Volumes finis – Exemple

Gravimétrie

Magnétisme

Équations de Maxwell

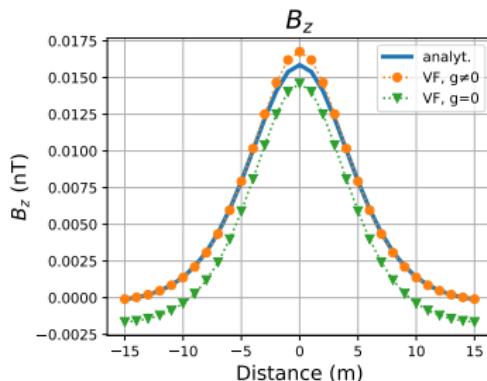
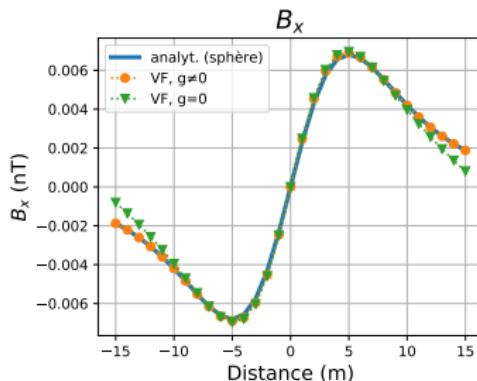
Modèle linéaire

Volumes finis

Références

Annexes

- Comparaison avec la solution analytique pour une sphère de volume égal à celui du cube.



# Volumes finis – Exemple

Gravimétrie

Magnétisme

Équations de Maxwell

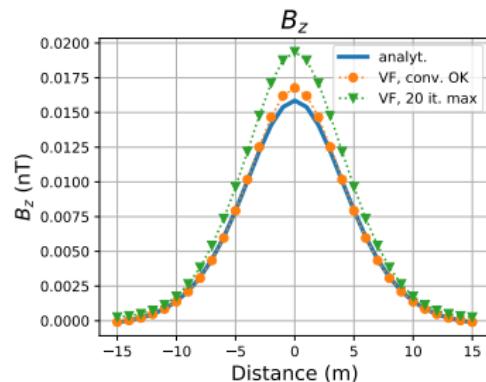
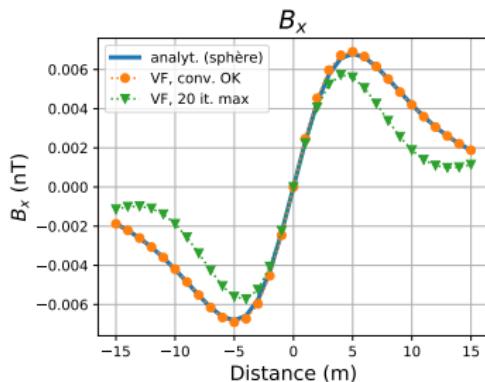
Modèle linéaire

Volumes finis

Références

Annexes

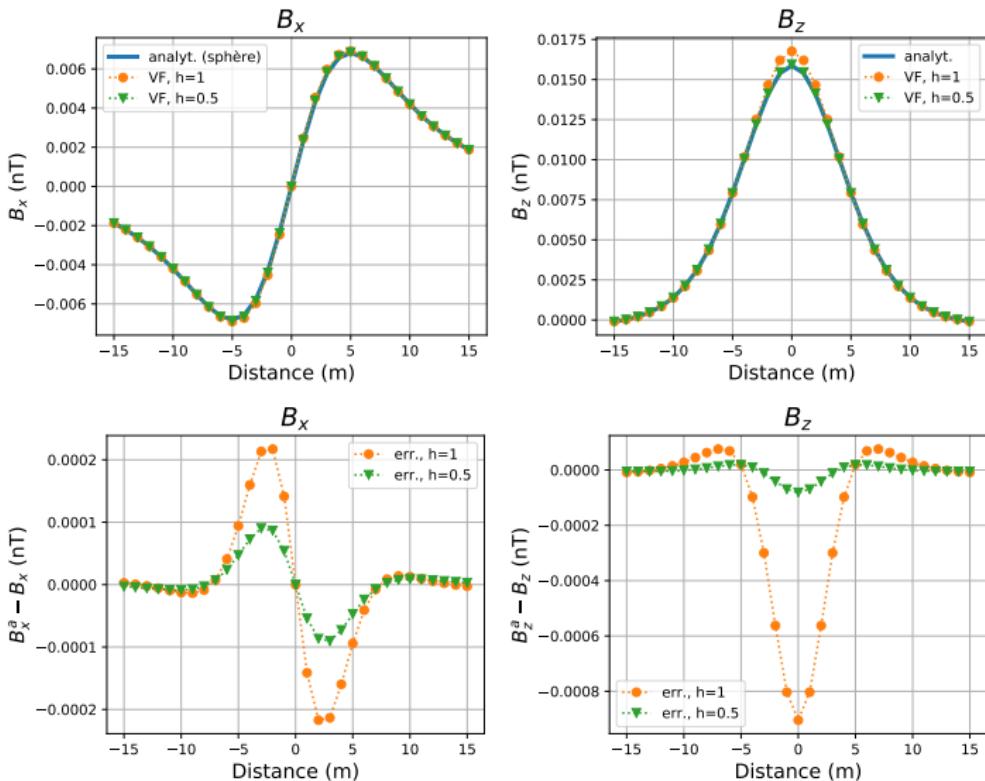
- Influence du choix des paramètres de convergence de bicgstab



# Volumes finis – Exemple

Gravimétrie  
Magnétisme  
Équations de Maxwell  
Modèle linéaire  
Volumes finis  
Références  
Annexes

## Influence de la taille des voxels



Gravimétrie  
Magnétisme  
Références  
Annexes

## Références

# Références

Gravimétrie  
Magnétisme  
Références  
Annexes

- Blakely, R. J. (1995). *Potential Theory in Gravity and Magnetic Applications*. Cambridge University Press
- Guo, Z.-Y., Liu, D.-J., Pan, Q., and Zhang, Y.-Y. (2015). Forward modeling of total magnetic anomaly over a pseudo-2D underground ferromagnetic pipeline. *Journal of Applied Geophysics*, 113 :14 – 30
- Lelièvre, P. G. (2003). Forward modeling and inversion of geophysical magnetic data. Master's thesis, University of British Columbia

# Références

Gravimétrie  
Magnétisme  
Références  
Annexes

- Li, X. and Chouteau, M. (1998). Three-dimentional gravity modeling in all space. *Surveys in Geophysics*, 19 :339–368
- Plouff, D. (1976). Gravity and magnetic fields of polygonal prisms and application to magnetic terrain corrections. *Geophysics*, 41 :727–741
- Singh, B. and Guptasarma, D. (2001). New method for fast computation of gravity and magnetic anomalies from arbitrary polyhedra. *Geophysics*, 66(2) :521–526

Gravimétrie

Magnétisme

Références

**Annexes**

Densité des roches

Propriétés magnétiques  
des roches

Aimantation rémanente

Susceptibilités

Démagnétisation

## Annexes

# Densité $\rho$

Gravimétrie

Magnétisme

Références

Annexes

Densité des roches

Propriétés magnétiques  
des roches

Aimantation rémanente

Susceptibilités

Démagnétisation

- C'est la masse par unité de volume;
- Unité habituelle : g/cm<sup>3</sup>;
- Strictement parlant : masse volumique.
- Pour un milieu poreux saturé, la densité du mélange est

$$\rho_m = (1 - \phi) \rho_h + \phi \rho_f$$

- $\phi$  est la porosité;
- $\rho_h$  la densité de la matrice hôte;
- $\rho_f$  est la densité du fluide.

# Densité $\rho$

Gravimétrie

Magnétisme

Références

Annexes

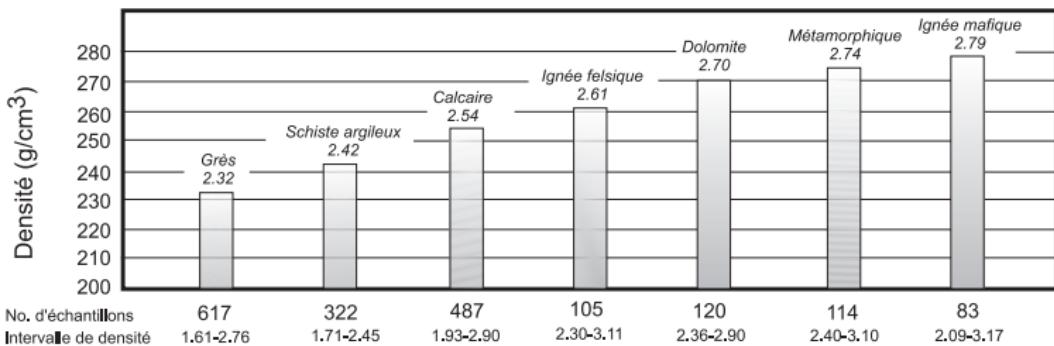
Densité des roches

Propriétés magnétiques  
des roches

Aimantation rémanente

Susceptibilités

Démagnétisation



# Propriétés magnétiques des roches

Gravimétrie

Magnétisme

Références

Annexes

Densité des roches

Propriétés magnétiques  
des roches

Aimantation rémanente

Susceptibilités

Démagnétisation

- Les roches sont un agencement de minéraux qui présentent des propriétés magnétiques différentes ;
- Les différents phénomènes en compétition :
  - diamagnétisme ;
  - paramagnétisme ;
  - ferromagnétisme ;
  - antiferromagnétisme ;
  - ferrimagnétisme.

Gravimétrie

Magnétisme

Références

Annexes

Densité des roches

Propriétés magnétiques  
des roches

Aimantation rémanente

Susceptibilités

Démagnétisation

- Toutes les substances sont magnétiques à l'échelle de l'atome.
- Un atome se comporte comme un dipôle :
  - spin des électrons ;
  - orbite des électrons autour du noyau.
- Physique quantique : max. deux électrons par niveau si les spins sont opposés.
  - Si on a deux électrons par niveau (paire), les moments s'annulent.

Gravimétrie

Magnétisme

Références

Annexes

Densité des roches

Propriétés magnétiques  
des roches

Aimantation rémanente

Susceptibilités

Démagnétisation

- Matière pour laquelle tout les niveaux atomiques sont remplis de paires d'électrons.
- Si on applique un champ **H** :
  - la rotation des électrons s'oppose à **H**;
  - la susceptibilité  $\chi$  est ainsi négative;
  - cet effet est de faible magnitude.
- Cette matière offre une «résistance» au champ magnétique.

Gravimétrie

Magnétisme

Références

Annexes

Densité des roches

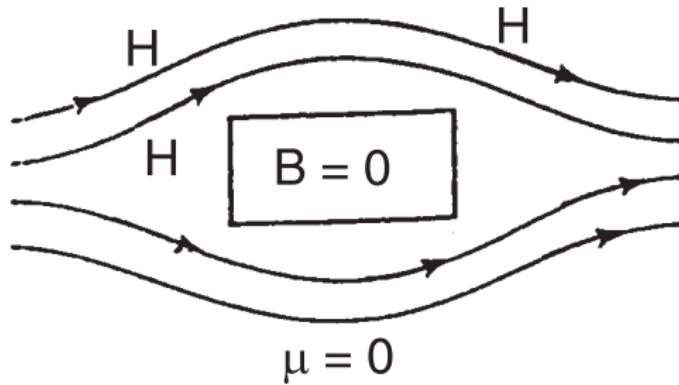
Propriétés magnétiques  
des roches

Aimantation rémanente

Susceptibilités

Démagnétisation

- Diamagnétisme parfait : le champ est nul à l'intérieur de l'objet.



Gravimétrie

Magnétisme

Références

Annexes

Densité des roches

Propriétés magnétiques  
des roches

Aimantation rémanente

Susceptibilités

Démagnétisation

- Quelques roches & matériaux diamagnétiques :

- graphite;
- gypse;
- quartz;
- sel;
- cuivre;
- diamant.

Gravimétrie

Magnétisme

Références

Annexes

Densité des roches

Propriétés magnétiques  
des roches

Aimantation rémanente

Susceptibilités

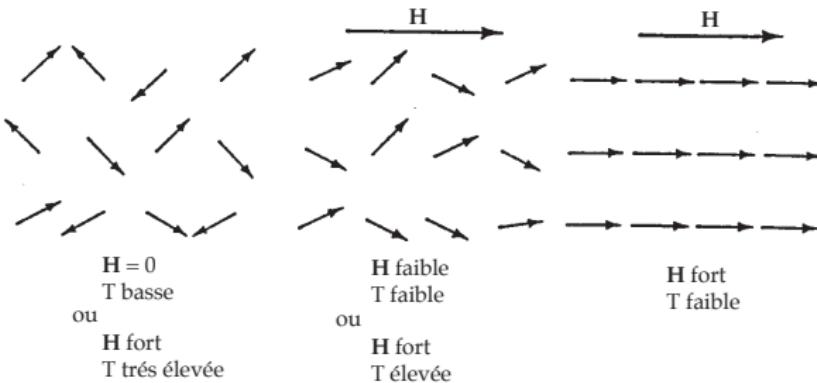
Démagnétisation

- Les niveaux ne sont pas tous remplis :
  - un champ magnétique résulte du spin des électrons solitaires.
- Si on applique un champ **H** :
  - les dipôles des électrons solitaires s'alignent avec **H**;
  - la susceptibilité  $\chi$  est positive;
  - cette effet est de faible magnitude.

# Paramagnétisme

Gravimétrie  
Magnétisme  
Références  
Annexes  
Densité des roches  
Propriétés magnétiques des roches  
Aimantation rémanente  
Susceptibilités  
Démagnétisation

- La température  $T$  influence le comportement de la matière.
- Une température élevée excite les atomes :
  - limite l'effet du champ  $H$ .



Gravimétrie

Magnétisme

Références

Annexes

Densité des roches

Propriétés magnétiques  
des roches

Aimantation rémanente

Susceptibilités

Démagnétisation

- Exemples de substances paramagnétiques :

- la plupart des métaux;
- gneiss;
- dolomie;
- pegmatite;
- syénite.

Gravimétrie

Magnétisme

Références

Annexes

Densité des roches

Propriétés magnétiques  
des roches

Aimantation rémanente

Susceptibilités

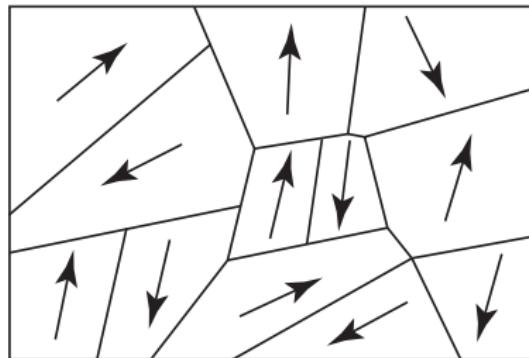
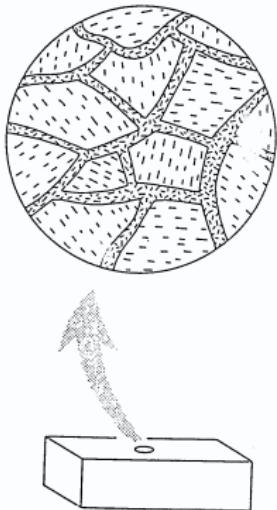
Démagnétisation

- Existe si, dans certains cristaux paramagnétiques, les moments atomiques sont alignés dans la même direction.
- Occurrence spontanée.
- Les régions où les moments sont alignés sont nommés domaines.
- Les limites entre les domaines sont nommées parois.
- Distribution aléatoire.

# Ferromagnétisme

Gravimétrie  
Magnétisme  
Références  
Annexes  
Densité des roches  
Propriétés magnétiques  
des roches  
Aimantation rémanente  
Susceptibilités  
Démagnétisation

- Si  $H$  nul, la somme des moments est nulle.



# Ferromagnétisme

Gravimétrie

Magnétisme

Références

Annexes

Densité des roches

Propriétés magnétiques  
des roches

Aimantation rémanente

Susceptibilités

Démagnétisation

- Sous l'effet d'un **H** externe, les parois se déplacent ;
  - les domaines orientés selon **H** croissent ;
  - il y a augmentation de la magnétisation.
- Si l'intensité augmente, il y a rotation des domaines ;
  - augmentation accrue de la magnétisation.
- Donne lieu à des  $\chi$  élevés.

# Ferromagnétisme

Gravimétrie

Magnétisme

Références

Annexes

Densité des roches

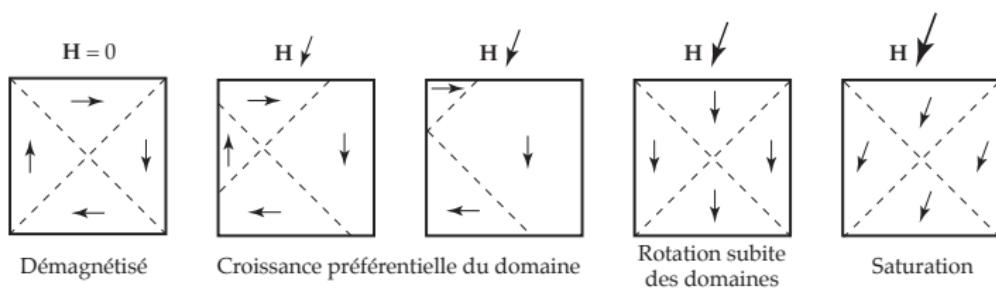
Propriétés magnétiques  
des roches

Aimantation rémanente

Susceptibilités

Démagnétisation

- L'alignement des domaines donne lieu à une magnétisation importante (susceptibilité élevée).



Gravimétrie

Magnétisme

Références

Annexes

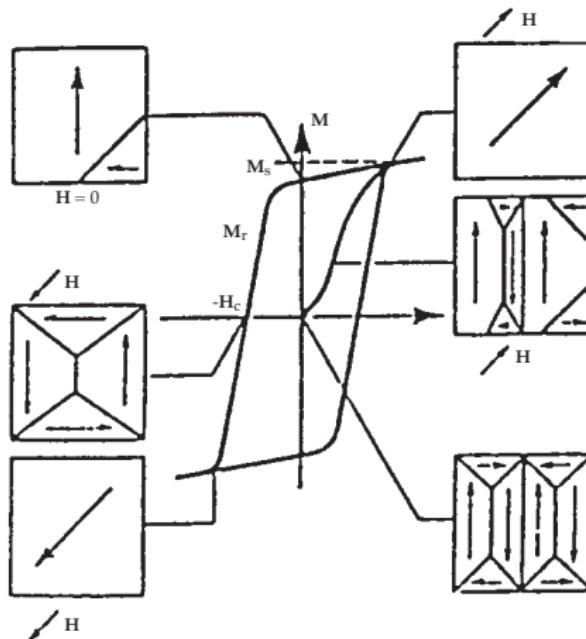
Densité des roches

Propriétés magnétiques  
des roches

Aimantation rémanente

Susceptibilités

Démagnétisation



# Ferromagnétisme

Gravimétrie

Magnétisme

Références

Annexes

Densité des roches

Propriétés magnétiques  
des roches

Aimantation rémanente

Susceptibilités

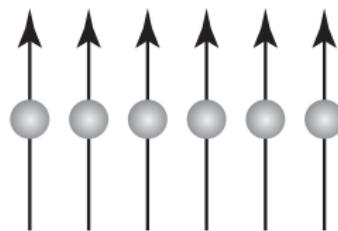
Démagnétisation

- Parmi les substances ferromagnétiques :
  - fer;
  - cobalt;
  - nickel.
- Si la température de la matière dépasse le point de Curie, celle-ci passe à l'état paramagnétique.

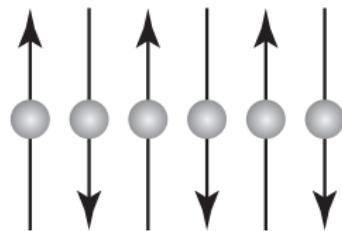
# Antiferromagnétisme

Gravimétrie  
Magnétisme  
Références  
Annexes  
Densité des roches  
Propriétés magnétiques des roches  
Aimantation rémanente  
Susceptibilités  
Démagnétisation

- Survient lorsque les dipôles au sein d'un cristal sont antiparallèles.



Ferromagnétisme



Antiferromagnétisme

- La susceptibilité  $\chi$  est très faible.
- L'hématite ( $\text{Fe}_2\text{O}_3$ ) : exemple d'antiferromagnétisme.

# Ferrimagnétisme

Gravimétrie

Magnétisme

Références

Annexes

Densité des roches

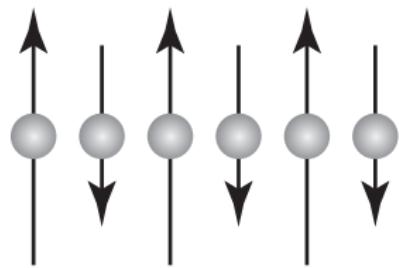
Propriétés magnétiques  
des roches

Aimantation rémanente

Susceptibilités

Démagnétisation

- Les dipôles sont antiparallèles, mais de magnitude différente;
  - le moment net est non nul.
  - magnétite ( $\text{Fe}_3\text{O}_4$ ), ilménite ( $\text{FeTiO}_3$ ), titanomagnétite, oxydes de fer ou de fer et titane.
- Donne lieu à des  $\chi$  élevés.



Ferrimagnétisme

Gravimétrie

Magnétisme

Références

Annexes

Densité des roches

Propriétés magnétiques  
des roches

Aimantation rémanente

Susceptibilités

Démagnétisation

- Existe également si le nombre de dipôles d'une direction est supérieur au nombre dans l'autre direction ;
  - cas de la pyrrhotite.

# Aimantation rémanente

Gravimétrie

Magnétisme

Références

Annexes

Densité des roches

Propriétés magnétiques  
des roches

Aimantation rémanente

Susceptibilités

Démagnétisation

- Une aimantation qui subsiste en l'absence de **H** est dite rémanente.
- Peut être causée par plusieurs mécanismes :
  - thermorémanence;
  - aimantation dépositionnelle ou détritique;
  - aimantation isotherme;
  - aimantation visqueuse;
  - aimantation chimique.

Gravimétrie

Magnétisme

Références

Annexes

Densité des roches

Propriétés magnétiques  
des roches

**Aimantation rémanente**

Susceptibilités

Démagnétisation

- Thermorémanence :
  - Une roche chauffée au dessus de son point de Curie;
  - Ses dipôles vont s'aligner dans le sens du  $H$  ambiant en refroidissant;
    - mémoire magnétique.
  - Une magnétisation subsiste à  $T$  ambiante;
  - proportionnelle à  $H$  au refroidissement.

Gravimétrie

Magnétisme

Références

Annexes

Densité des roches

Propriétés magnétiques  
des roches

Aimantation rémanente

Susceptibilités

Démagnétisation

- Aimantation détritique :
  - lors de la dépositions des sédiments ;
  - les minéraux magnétiques s'alignent avec le **H** ambiant.
- Aimantation isotherme :
  - due aux **H** exceptionnellement élevés (foudre).
- Aimantation visqueuse ;
  - lent déplacement des domaines sous l'effet du **H** ambiant, à T ambiante.
- Aimantation chimique :
  - peut survenir lors d'une transformation cristalline, ou causée par diagénèse ou métamorphisme.

# Aimantation rémanente

Gravimétrie

Magnétisme

Références

Annexes

Densité des roches

Propriétés magnétiques  
des roches

Aimantation rémanente

Susceptibilités

Démagnétisation

- L'intensité de l'aimantation rémanente  $\mathbf{M}_r$  peut dépasser l'aimantation induite  $\mathbf{M}_i$ ;
- Le rapport de Königsberger est défini comme  $Q = \mathbf{M}_r / \mathbf{M}_i = \mathbf{M}_r / \chi(\mathbf{H} / \mu_0)$ ;
- La direction de  $\mathbf{M}_r$  n'est pas nécessairement la même que celle de  $\mathbf{M}_i$ 
  - La résultante n'est plus alignée dans le champ  $\mathbf{H}$  ambiant.

Gravimétrie

Magnétisme

Références

Annexes

Densité des roches

Propriétés magnétiques  
des roches

**Aimantation rémanente**

Susceptibilités

Démagnétisation

- Le rapport  $Q$  peut valoir

- $\approx 1$  pour les roches ignées (cristallisation lente) ;
- $\approx 10$  pour les roches volcaniques ;
- $\approx 30-50$  pour les roches basaltiques (cristallisation rapide) ;
- $< 1$  pour les roches sédimentaires et métamorphique, sauf si Fe présent.

# Magnétisme des roches

Gravimétrie

Magnétisme

Références

Annexes

Densité des roches

Propriétés magnétiques  
des roches

Aimantation rémanente

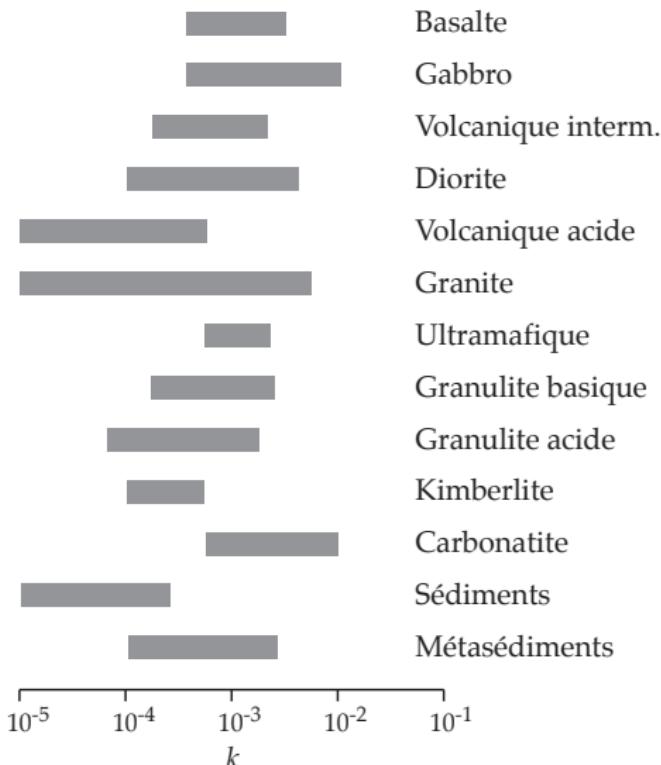
Susceptibilités

Démagnétisation

- La plupart des minéraux ont une  $\chi$  faible;
- La nature magnétique d'une roche est due à une petite quantité de minéraux magnétiques;
- Deux groupes géochimiques :
  - oxydes de fer (les plus courants);
    - magnétite, hématite...
  - sulfures de fer;
    - pyrrhotite.

# Susceptibilité

Gravimétrie  
Magnétisme  
Références  
Annexes  
Densité des roches  
Propriétés magnétiques des roches  
Aimantation rémanente  
**Susceptibilités**  
Démagétisation



# Susceptibilité

Gravimétrie  
Magnétisme  
Références  
Annexes  
Densité des roches  
Propriétés magnétiques des roches  
Aimantation rémanente  
**Susceptibilités**  
Démagnétisation

Roche/minéral	Plage	Moyenne
Dolomite	0 – 0.0009	0.0001
Calcaire	0 – 0.003	0.0003
Grès	0 – 0.02	0.0004
Schiste argileux	0.00001 – 0.015	0.0006
Amphibolite		0.0007
Schiste	0.0003 – 0.003	0.0014
Phyllite		0.0015
Gneiss	0.0001 – 0.025	
Quartzite		0.004
Serpentine	0.003 – 0.017	
Ardoise	0 – 0.035	0.006

Valeurs en SI

# Susceptibilité

Gravimétrie  
Magnétisme  
Références  
Annexes  
Densité des roches  
Propriétés magnétiques des roches  
Aimantation rémanente  
Susceptibilités  
Démagnétisation

Roche/minéral	Plage	Moyenne
Granite	0 – 0.05	0.0025
Rhyolite	0.0002 – 0.035	
Dolorite	0.001 – 0.035	0.017
Augite-syenite	0.03 – 0.04	
Olivine		0.025
Diabase	0.001 – 0.16	0.055
Porphyre	0.0003 – 0.2	0.060
Gabbro	0.001 – 0.09	0.07
Basaltes	0.0002 – 0.175	0.07
Diorite	0.0006 – 0.12	0.085
Pyroxénite		0.125
Péridotite	0.09 – 0.2	0.15
Andésite		0.16

Valeurs en SI

# Susceptibilité

Gravimétrie  
Magnétisme  
Références  
Annexes  
Densité des roches  
Propriétés magnétiques des roches  
Aimantation rémanente  
Susceptibilités  
Démagnétisation

Roche/minéral	Plage	Moyenne
Graphite		$1 \times 10^{-4}$
Quartz		$-1 \times 10^{-5}$
Anhydrite, gypse		$-1 \times 10^{-5}$
Calcite	$-1 \times 10^{-6} - -1 \times 10^{-5}$	
Charbon		$2 \times 10^{-5}$
Argiles		$2 \times 10^{-4}$
Chalcopyrite		$4 \times 10^{-4}$
Sphalérite		$7 \times 10^{-4}$
Cassitérite		$9 \times 10^{-4}$
Sidérite	$1 \times 10^{-3} - 4 \times 10^{-3}$	
Pyrite	$5 \times 10^{-5} - 5 \times 10^{-3}$	$1.5 \times 10^{-3}$
Limonite		$2.5 \times 10^{-3}$
Arsénopyrite		$3 \times 10^{-3}$

Valeurs en SI

# Susceptibilité

Gravimétrie

Magnétisme

Références

Annexes

Densité des roches

Propriétés magnétiques  
des roches

Aimantation rémanente

Susceptibilités

Démagnétisation

Roche/minéral	Plage	Moyenne
Hématite	$5 \times 10^{-5} - 0.035$	$6.5 \times 10^{-3}$
Chromite	0.003 – 0.11	$7 \times 10^{-3}$
Franklinite		0.43
Pyrrhotite	0.001 – 6.0	1.5
Ilménite	0.3 – 3.5	1.8
Magnétite	1.2 – 19.2	6.0

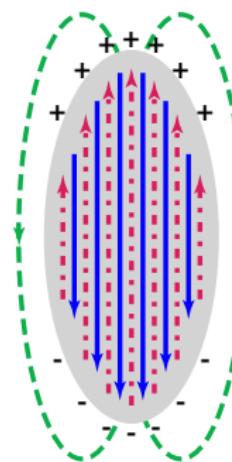
Valeurs en SI

# Cause de la démagnétisation

Gravimétrie  
Magnétisme  
Références  
Annexes  
Densité des roches  
Propriétés magnétiques des roches  
Aimantation rémanente  
Susceptibilités  
Démagnétisation

- Un objet magnétique placé dans un champ  $\mathbf{H}$  ambiant aura des «pôles» aux extrémités;

— Magnétisation  
- - - Démagnétisation  
- - - Champ externe



- Ces pôles génèrent un champ de démagnétisation interne  $\mathbf{H}_d$ .

# Observations

Gravimétrie

Magnétisme

Références

Annexes

Densité des roches

Propriétés magnétiques  
des roches

Aimantation rémanente

Susceptibilités

Démagnétisation

- Plus les pôles sont rapprochés, plus  $\mathbf{H}_d$  est élevé;
- Le champ  $\mathbf{H}_d$  a pour effet de réduire l'effet de  $\mathbf{H}$  sur la magnétisation du corps;
- Le champ  $\mathbf{H}_d$  est proportionnel à  $\mathbf{M}$ ;
- Le facteur de démagnétisation  $N$  est la constante de proportionnalité

$$\mathbf{H}_d = N\mathbf{M}. \quad (120)$$

# Susceptibilité apparente

Gravimétrie  
Magnétisme  
Références  
Annexes  
Densité des roches  
Propriétés magnétiques des roches  
Aimantation rémanente  
Susceptibilités  
Démagnétisation

- Le champ interne, dans l'objet, est

$$\mathbf{H}_i = \mathbf{H} - \mathbf{H}_d = \mathbf{H} - N\mathbf{M};$$

- La susceptibilité apparente  $k_a$  se distingue de la susceptibilité intrinsèque  $k$  en raison du facteur de démagnétisation :

$$k = \frac{\mathbf{M}}{\mathbf{H}_i};$$

$$k_a = \frac{\mathbf{M}}{\mathbf{H}};$$

$$\mathbf{M} = k\mathbf{H}_i = k_a (\mathbf{H}_i + Nk\mathbf{H}_i);$$

$$k_a = \frac{k}{1 + Nk}. \quad (121)$$

# Le facteur de démagnétisation

Gravimétrie  
Magnétisme  
Références  
Annexes  
Densité des roches  
Propriétés magnétiques des roches  
Aimantation rémanente  
Susceptibilités  
Démagnétisation

- Le facteur  $N$  dépend de la forme du corps;
- Règle générale :  $N_x + N_y + N_z = 1$ ;
- Pour une sphère :  $N_x = N_y = N_z = \frac{1}{3}$ ;
- Pour une tige infinie :
  - Perpendiculaire à l'axe :  $N_{\perp} = \frac{1}{2}$ ;
  - Parallèle à l'axe :  $N_{\parallel} = 0$ ;
- Pour une feuille mince infinie :
  - Perpendiculaire au plan :  $N_{\perp} = 1$ ;
  - Parallèle au plan :  $N_{\parallel} = 0$ ;
- On observe donc une anisotropie pour les corps ayant une dimension plus petite que les autres, causée par la démagnétisation;
  - cette anisotropie provoque une déviation de la magnétisation  $\mathbf{M}$  par rapport au champ  $\mathbf{H}$ .

# Influence effective

Gravimétrie

Magnétisme

Références

Annexes

Densité des roches

Propriétés magnétiques  
des roches

Aimantation rémanente

Susceptibilités

Démagnétisation

- La démagnétisation produit un effet notable si  $k > 0.01$  ;
- En général, significatif pour
  - pyrrhotite massive ;
  - roche avec plus de 5-10% de magnétite.
- Pour un corps donné, le facteur  $N$  est constant si la magnétisation est uniforme.