Données et modèles
Problème discret
Systèmes linéaires
Difficultés
Exemples
Références

# Modélisation et inversion en géophysique
# 4 - Inversion: Introduction

Bernard Giroux
(bernard.giroux@ete.inrs.ca)

Institut national de la recherche scientifique
Centre Eau Terre Environnement

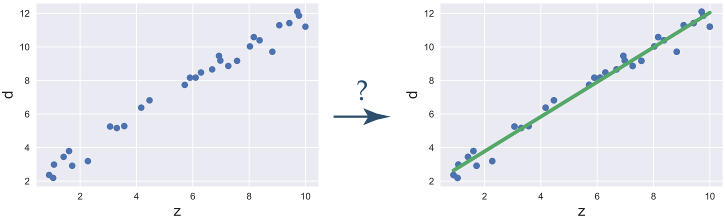
Version 1.0.1
Hiver 2018

Données et modèles
Problème discret
Systèmes linéaires
Difficultés
Exemples
Références

# Données et modèles

# Aperçu

Données et modèles
Problème discret
Systèmes linéaires
Difficultés
Exemples
Références



# Aperçu

Données et modèles
Problème discret
Systèmes linéaires
Difficultés
Exemples
Références

- Problème direct

$\boxed{\text{estimé des paramètres du modèle}} \rightarrow \boxed{\text{modèle quantitatif}} \rightarrow \boxed{\text{prédiction des données}}$

- Problème inverse

$\boxed{\text{données observées}} \rightarrow \boxed{\text{modèle quantitatif}} \rightarrow \boxed{\text{estimé des paramètres du modèle}}$

# Données et modèles

Données et modèles
Problème discret
Systèmes linéaires
Difficultés
Exemples
Références

- Les données mesurées, notées $d$, constituent le point de départ de l'inversion.
- L'objectif est d'obtenir une information caractérisant l'objet étudié ;
  - Cette information prends la forme de valeurs numériques : les paramètres du modèle, notés $m$.
- Les lois de la physique permettent de relier $m$ et $d$ ;
  - Ces lois sont décrites par une fonction $G$, telle que

$$G(m) = d. \tag{1}$$

- Les données peuvent être fonction du temps et/ou de l'espace, et sont généralement une série d'observations *discrètes*.

# Données et modèles

- En pratique, les données mesurées contiennent une erreur expérimentale.
- On assume que les données sont la somme des mesures obtenues d'une expérience "parfaite", notées $d_{\text{vrai}}$, et d'un bruit $\eta$, i.e.

$$d = G(m_{\text{vrai}}) + \eta \tag{2}$$

$$= d_{\text{vrai}} + \eta, \tag{3}$$

où

  - $d_{\text{vrai}}$ satisfait l'éq. (1) lorsque $m$ est égal au modèle vrai $m_{\text{vrai}}$ ;
  - la fonction $G$ représente exactement la réalité.
- La présence de $\eta$, même faible, peut faire en sorte que $m$ retrouvé par inversion soit très différent de $m_{\text{vrai}}$.
- En général, il existe un infinité de modèles $m$ différents de $m_{\text{vrai}}$ qui s'ajustent à $d_{\text{vrai}}$.

# Problème discret

# Problème discret

Données et modèles
Problème discret
Systèmes linéaires
Difficultés
Exemples
Références

- La plupart du temps, le modèle est décrit par un nombre fini, $M$, de paramètres, i.e.

$$\mathbf{m} = [m_0, m_1, m_2, \ldots, m_{M-1}] \tag{4}$$

- De façon similaire, on dispose d'un nombre fini, $N$, de données

$$\mathbf{d} = [d_0, d_1, d_2, \ldots, d_{N-1}] \tag{5}$$

- On a alors affaire à un problème inverse discret de la forme

$$G(\mathbf{m}) = \mathbf{d}. \tag{6}$$

- Dans le cas contraire où le modèle et les données sont des fct continues, l'estimation de $m$ à partir de $d$ est un problème inverse continu ;
  - On peut souvent approximer un problème continu par un problème discret.

# Problème discret

Données et modèles
Problème discret
Systèmes linéaires
Difficultés
Exemples
Références

- Lorsque le nombre de paramètres $M$ est faible, on parle d'estimation de paramètres ;
- *A contrario*, lorsque $M$ est élevé et qu'il est nécessaire d'appliquer des contraintes pour stabiliser la solution, on parle de problème inverse ;
  - On verra plus loin que des contraintes sont nécessaires lorsque le système à résoudre est *mal conditionné*.

Données et modèles
Problème discret
Systèmes linéaires
Difficultés
Exemples
Références

# Systèmes linéaires

# Systèmes linéaires

Données et modèles
Problème discret
Systèmes linéaires
Difficultés
Exemples
Références

- Les systèmes linéaires sont un type de modèle mathématique trouvant plusieurs applications ;
- Les systèmes linéaires obéissent au principe de superposition :

$$G(m_1 + m_2) = G(m_1) + G(m_2) \tag{7}$$

  et à la mise à l'échelle :

$$G(\alpha m) = \alpha G(m). \tag{8}$$

- Dans le cas des problèmes inverses discrets, le problème devient un système linéaire d'équations algébriques :

$$G(\mathbf{m}) = \mathbf{Gm} = \mathbf{d}. \tag{9}$$

# Systèmes linéaires

Données et modèles
Problème discret
Systèmes linéaires
Difficultés
Exemples
Références

- En géophysique, les modèles linéaires sont souvent utilisables ;
- La raison principale est que l'objet d'étude varie peu par rapport à son état d'équilibre ;
- Une relation linéaire permet de décrire adéquatement le phénomène ;
- Par exemple en sismique, les contraintes générées par le passage des ondes sont très faibles p/r aux modules d'élasticité ;
  - La relation contrainte/déformation est alors quasi linéaire.
- La gravimétrie et le magnétisme sont d'autres exemples où les champs sont faibles et où des modèles linéaires s'appliquent.

# Difficultés

# Difficultés du problème inverse

Données et modèles
Problème discret
Systèmes linéaires
Difficultés
Exemples
Références

- Il est crucial de demeurer critique face aux résultats de l'inversion ;
- La raison principale est qu'il peut y avoir plusieurs modèles qui s'ajustent aussi bien aux données ;
- Les éléments à l'origine de ce phénomène sont :
  1. l'existence d'une solution ;
  2. la non unicité de la solution ;
  3. l'instabilité du système.

# Existence de la solution



- Il est possible qu'aucun modèle ne s'ajuste *parfaitement* aux données ;
- Les raisons sont :
  - le modèle physique est approximatif ;
  - les données contiennent du bruit.
- Si l'ajustement n'est pas parfait, il est fort probable que le modèle estimé ne soit qu'une approximation du modèle réel.

# Non unicité de la solution

Données et modèles
Problème discret
Systèmes linéaires
Difficultés
Exemples
Références

- Advenant que des solutions exactes existent, elles peuvent être non uniques, *même pour un nombre infini de données* ;
- L'exemple classique est la réponse d'une sphère en gravimétrie, qui dépend de la masse de la sphère et non de la distribution de densité.
  - Deux sphères donneront exactement la même réponse si

$$\rho_1 \frac{4}{3} \pi r_1^3 = \rho_2 \frac{4}{3} \pi r_2^3$$

- La non unicité est une caractéristique des systèmes linéaires pour lesquelles les équations ne sont pas toutes linéairement indépendantes ;
  - Le degré d'indépendance peut être évalué par l'analyse de la *résolution du modèle*.

# Instabilité

Données et modèles
Problème discret
Systèmes linéaires
Difficultés
Exemples
Références

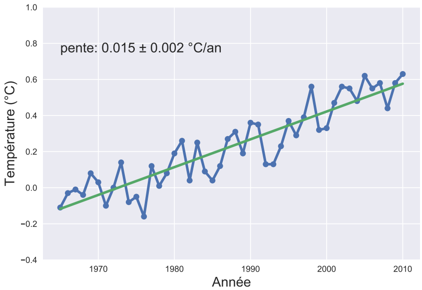
- Une solution est instable lorsqu'un faible changement dans une mesure (e.g., un faible bruit $\eta$) produit une variation importante du modèle estimé ;
- De tels problèmes sont dits *mal conditionnés* dans le cas des problèmes discrets, ou *mal posés* dans le cas continu ;
- Il est possible de stabiliser la solution en imposant des contraintes qui vont biaiser (d'une façon souhaitée) la solution ;
  - on parle alors de *régularisation*.

# Exemples

# Exemple 1 : Ajuster une droite

Données et modèles
Problème discret
Systèmes linéaires
Difficultés
Exemples
Références

- On dispose d'un certain nombre ($N$) de mesures de température prises à des temps $t_i$ dans l'atmosphère.
  - Ces données contsituent le vecteur $\mathbf{d} = [T_0, T_1, T_2, \ldots, T_{N-1}]^T$.
- On assume que la température obéit à un modèle linéaire en fonction du temps : $T = a + bt$ ;
  - L'ordonnée à l'origine $a$ et la pente $b$ sont les deux paramètres du modèle, i.e. $\mathbf{m} = [a, b]^T$.



# Exemple 1 : Ajuster une droite

Données et modèles
Problème discret
Systèmes linéaires
Difficultés
Exemples
Références

- Selon le modèle linéaire, la température doit satisfaire

$$T_0 = a + bt_0 \tag{10}$$
$$T_0 = a + bt_0 \tag{11}$$
$$\vdots \tag{12}$$
$$T_{N-1} = a + bt_{N-1} \tag{13}$$

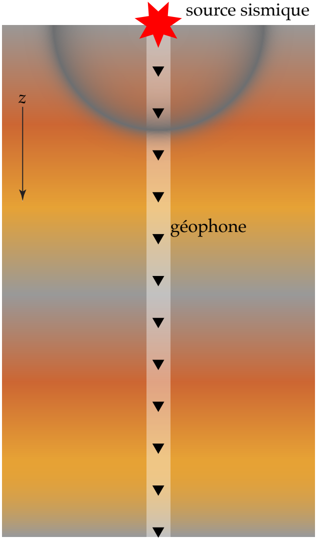
- Sous forme matricielle, on a

$$\underbrace{\begin{bmatrix} T_0 \\ T_1 \\ \vdots \\ T_{N-1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{d}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & t_0 \\ 1 & t_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & T_{N-1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{G}} \underbrace{\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}}_{\mathbf{m}} \tag{14}$$

# Exemple 2 : Profilage sismique vertical



- Avec le profilage sismique vertical, on cherche à déterminer la distribution verticale de la vitesse sismique $V$ ;
- Des géophones sont placés dans un forage et une source est actionnée à la surface ;
- L'onde sismique est enregistrée aux géophones, ce qui permet de déterminer le temps de parcours $t$.



# Exemple 2 : Profilage sismique vertical

Données et modèles
Problème discret
Systèmes linéaires
Difficultés
Exemples
Références

- Le problème est non linéaire lorsque défini en terme de vitesse ;
- Le problème devient linéaire si exprimé en terme de *lenteur* ($s$), l'inverse de la vitesse, i.e. $s = 1/V$.
- Le temps de parcours à une profondeur $z$ vaut

$$t(z) = \int_o^z s(l)dl \quad (15)$$

$$= \int_0^\infty s(l)H(z-l)dl \quad (16)$$

où $H$ est la fonction de Heaviside, qui vaut 1 si $z - l \geq 0$ et 0 si $z - l < 0$.

# Exemple 2 : Profilage sismique vertical

Données et modèles
Problème discret
Systèmes linéaires
Difficultés
Exemples
Références

- Le problème est résolu en discrétisant le milieu en couches
- Si le modèle compte $M$ couches et le levé compte $N$ géophones, l'intégrale devient, pour un $i^e$ géophone

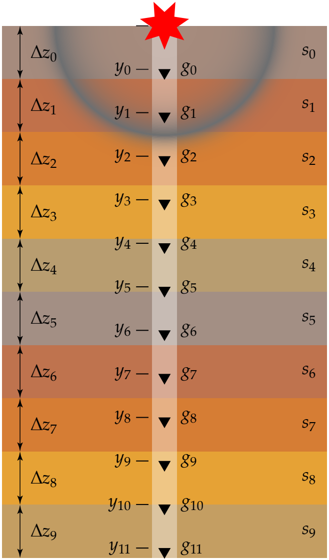
$$t_i = \sum_{j=0}^{N-1} H(y_i - z_j) s_j \Delta z \tag{17}$$

où $N/M = \Delta y / \Delta z$ est un entier.

- Le vecteur des données est $\mathbf{d} = [t_0, t_1, t_2, \ldots, t_{N-1}]^T$ ;
- Les paramètres du modèle est sont regroupés dans le vecteur $\mathbf{m} = [s_0, s_1, s_2, \ldots, s_{M-1}]^T$ ;
- La matrice $\mathbf{G}$ sera alors de dimension $N \times M$ et contiendra les termes $H(y_i - z_j)\Delta z$.

# Exemple 2 : Profilage sismique vertical





# Exemple 2 : Profilage sismique vertical

Données et modèles
Problème discret
Systèmes linéaires
Difficultés
Exemples
Références

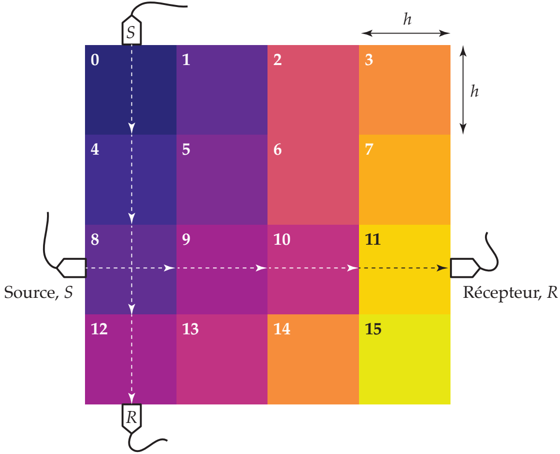
- Sous forme matricielle, pour l'ensemble des données de la figure, on obtient

$$\underbrace{\begin{bmatrix} t_0 \\ t_1 \\ \vdots \\ t_{10} \\ t_{11} \end{bmatrix}}_{\mathbf{d}} = \Delta z \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{G}} \underbrace{\begin{bmatrix} s_0 \\ s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_9 \end{bmatrix}}_{\mathbf{m}} \qquad (18)$$

# Exemple 3 : Tomographie

Données et modèles
Problème discret
Systèmes linéaires
Difficultés
Exemples
Références

- En tomographie, on cherche à évaluer la vitesse de propagation ou l'atténuation des ondes dans un milieu.
- Soit l'exemple d'un mur de briques de vitesses différentes :



# Exemple 3 : Tomographie

Données et modèles
Problème discret
Systèmes linéaires
Difficultés
Exemples
Références

- Deux séries de mesures sont faites, une première le long des lignes et la seconde le long des colonnes, pour un total de $N$=8 mesures.
- Le vecteur des données est $\mathbf{d} = [t_0, t_1, t_2, \ldots, t_7]^T$
- On suppose que chaque brique est de vitesse $V$ uniforme ;
- Le temps de parcours dans une brique $j$ est proportionnel à la distance parcourue dans la brique, $h$, et vaut $t_j = hs_j$, où $s$ est la lenteur.
- Le modèle comporte $M$=16 paramètres, et est dans ce cas $\mathbf{m} = [s_0, s_1, s_2, \ldots, s_{15}]^T$

# Exemple 3 : Tomographie

Données et modèles
Problème discret
Systèmes linéaires
Difficultés
Exemples
Références

- On relie les données aux paramètres du modèle par

$$
\begin{aligned}
\text{ligne 1 : } t_0 &= hs_0 + hs_1 + hs_2 + hs_3 \\
\text{ligne 2 : } t_1 &= hs_4 + hs_5 + hs_6 + hs_7 \\
&\vdots \\
\text{colonne 3 : } t_6 &= hs_2 + hs_6 + hs_{10} + hs_{14} \\
\text{colonne 4 : } t_7 &= hs_3 + hs_7 + hs_{11} + hs_{15}
\end{aligned}
$$

- Sous forme matricielle, nous avons

$$
\begin{bmatrix} t_0 \\ t_1 \\ \vdots \\ t_6 \\ t_7 \end{bmatrix} = h \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_0 \\ s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_{15} \end{bmatrix} \tag{19}
$$

Données et modèles
Problème discret
Systèmes linéaires
Difficultés
Exemples
Références

# Références

# Références



- Aster, R. C., Borchers, B., and Thurber, C. H. (2013). *Parameter Estimation and Inverse Problems*. Academic Press, 2nd edition
- Menke, W. (2012). *Geophysical Data Analysis : Discrete Inverse Theory*. Academic Press, $3^{rd}$ edition