Exercício: Uma série de cinco jogos entre duas equipes termina logo que uma delas ganhe três vezes. Seja X a variável aleatória que representa o resultado dos jogos entre as equipes A e B; e que exemplos de valores possíveis de X são AAA, BABAB e BBAAA. Seja Y o número de jogos disputados ($Y = 3$, 4 ou 5). Admitindo que as duas equipes têm igual nível competitivo e que os jogos são independentes, calcule: $H(X)$, $H(Y)$, $H(Y/X)$ e $H(X/Y)$.

Combinações Possíveis

Cada equipe tem prob. 1/2 de vencer

		Prob.			Prob.
1.	A A A	$0{,}5 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5 = 1/8$	11.	B B B	1/8
2.	B A A A	1/16	12.	B A B B	1/16
3.	A B A A	1/16	13.	B B A B	1/16
4.	A A B A	1/16	14.	A B B B	1/16
5.	B B A A A	1/32	15.	A A B B B	1/32
6.	B A B A A	1/32	16.	A B A B B	1/32
7.	B A A B A	1/32	17.	A B B A B	1/32
8.	A B B A A	1/32	18.	B A A B B	1/32
9.	A B A B A	1/32	19.	B A B A B	1/32
10.	A A B B A	1/32	20.	B B A A B	1/32

$$H(X) = 2 \cdot \frac{1}{8} \cancel{\log_2 8}^{\,3} + 6 \cdot \frac{1}{16} \cancel{\log_2 16}^{\,4} + 12 \cdot \frac{1}{32} \cancel{\log_2 32}^{\,5}$$

$$H(X) = 2 \cdot \frac{1}{8} \cdot 3 + 6 \cdot \frac{1}{16} \cdot 4 + 12 \cdot \frac{1}{32} \cdot 5$$

$$H(X) = 0{,}75 + 1{,}5 + 1{,}875 = 4{,}125 \text{ bits}$$

$$H(Y) = \frac{2}{20} \log_2 10 + \frac{6}{20} \log_2 \frac{1}{0{,}3} + \frac{12}{20} \log_2 \frac{1}{0{,}6}$$

$$H(Y) = 0{,}332 + 0{,}521 + 0{,}442 = 1{,}295 \text{ bits}$$

$H(Y/X)$ = Incerteza de Y dado que X já ocorreu é zero

$$H(X/Y) = H(X) + H(Y/X) - H(Y) = 2{,}83 \text{ bits}$$

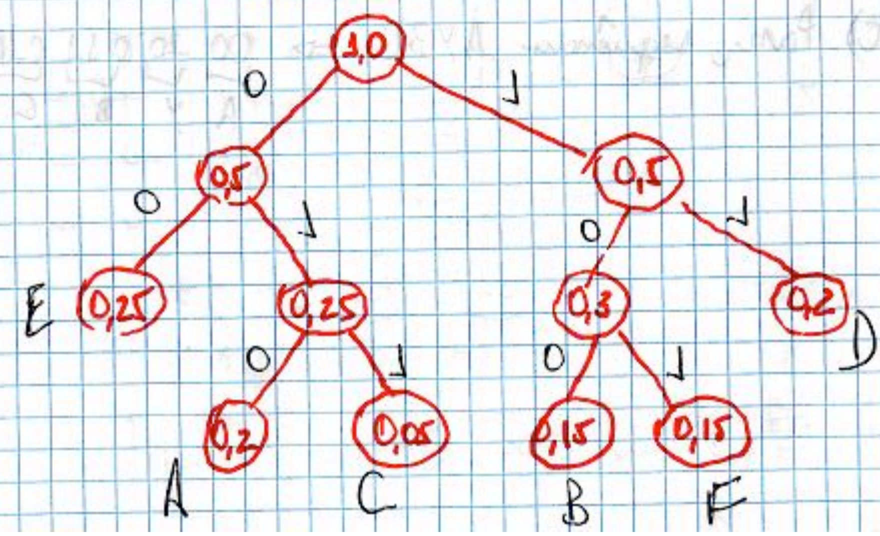
1. O alfabeto de uma fonte discreta contém seis letras produzidas com as seguintes probabilidades de ocorrência (os índices indicam as letras):

$$\{P_A ; P_B ; P_C ; P_D ; P_E ; P_F\} = \{0{,}2 ; 0{,}15 ; 0{,}05 ; 0{,}2 ; 0{,}25 ; 0{,}15\}$$

a) Desenhe uma árvore de codificação binária de Huffman que minimize o número de erros de codificação.

b) Obtenha a tabela de codificação das letras da fonte correspondente à árvore anterior.

c) Calcule a eficiência desta codificação.



TABELA

SÍMBOLO	CÓDIGO
A	010
B	100
C	011
D	11
E	00
F	101

$$\bar{N} = I = 0{,}2 \cdot 3 + 0{,}15 \cdot 3 + 0{,}05 \cdot 3 + 0{,}2 \cdot 2 + 0{,}25 \cdot 2 + 0{,}15 \cdot 3 = 2{,}55 \text{ bits}$$

$$H(X) = \left(0{,}2 \log_2 \frac{1}{0{,}2}\right) 2 + \left(0{,}15 \log_2 \frac{1}{0{,}15}\right) \cdot 2 + 0{,}05 \log_2 \frac{1}{0{,}05} + 0{,}25 \log_2 4 = 2{,}466 \text{ bits}$$

$$E = \frac{H(X)}{\bar{N}} = \frac{H(X)}{I} = 0{,}9671 \Rightarrow 96{,}71\%$$

2. Um texto é constituído por letras de um alfabeto de 4 letras {A, B, C, D}. Para uma sequência de 80 letras {A, B, C, D}, onde se encontraram 20 ás, 32 bês, 13 cês e 15 dês, vai ser codificado com o código de Huffman binário. Apresente a árvore de codificação e a respectiva tabela de palavras de código. Qual é a entropia da fonte que produz o texto da alínea anterior, em bits/letra?. Determine a eficiência desta codificação de Huffman.

SOLUÇÃO:

Nº DE LETRAS = 80

SÍMBOLO	FREQ.
A	20/80
B	32/80
C	13/80
D	15/80

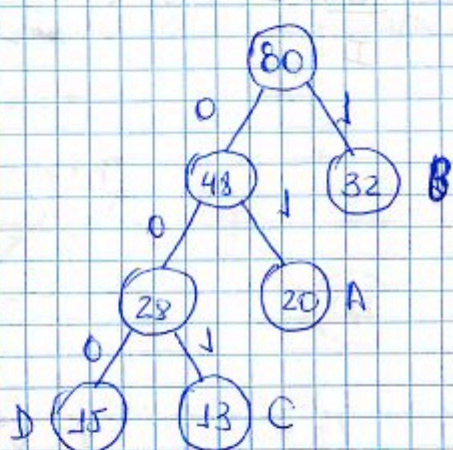


TABELA CODIF

A	01
B	1
C	001
D	000

$$H(X) = \frac{32}{80}\log_2\frac{80}{32} + \frac{20}{80}\log_2\frac{80}{20} + \frac{15}{80}\log_2\frac{80}{15} + \frac{13}{80}\log_2\frac{80}{13}$$

$H(X) = 1{,}9076$ bits/letra

$$E = \frac{H(X)}{\bar{L}} = \frac{1{,}9076}{1{,}95} = 0{,}978 \text{ ou } 97{,}8\%$$

3. Para os seguintes códigos binários, determinar:
   (a) se o código é unicamente decodificável.
   (b) Se o código é instantâneo.

	code A	code B	code C	code D	code E	code F	code G	code H
s_1	000	0	0	0	0	0	01	1010
s_2	001	01	10	10	10	100	011	001
s_3	010	011	110	110	1100	101	10	101
s_4	011	0111	1110	1110	1101	110	1000	0001
s_5	100	01111	11110	1011	1110	111	1100	1101
s_6	101	011111	111110	1101	1111	001	0111	1011

Código A - Instantâneo e Unicamente Decodificável

Código B - Instantâneo e Unicamente Decodificável

Código C - Não Instantâneo e Unicamente Decodificável

Código D - Não Instantâneo e Unicamente Decodificável

Código E - Não Instantâneo e Unicamente Decodificável

Código F - Não Instantâneo e Não Unicamente Decodificável

Código G - Não Instantâneo e Não Unicamente Decodificável

Código H - Não Instantâneo e Não Unicamente Decodificável

4. Considerar o seguinte conjunto de palavras de fonte {xi}={A,B,C,D,E,F,G,H}, com as respectivas probabilidades de ocorrência {P(xi)} ={0.3, 0.27, 0.26, 0.08, 0.06, 0.02, 0.006, 0.004}.

a) Determine o código de Shannon-Fano da fonte X.
b) Determine a eficiência do código. O código é únicamente descodificável? Obedece à condição de prefixação?

Solução:

a) Shannon - Fano

A	0,3	0 0
B	0,27	0 1
C	0,26	1 0
D	0,08	1 1 0
E	0,06	1 1 1 0
F	0,02	1 1 1 1 0
G	0,006	1 1 1 1 1 0
H	0,004	1 1 1 1 1 1

b) $\bar{l} = 0,3.2 + 0,27.2 + 0,26.2 + 0,08.3 + 0,06.4 + 0,02.5 + 0,006.6 + 0,004.6 = 2,3$ bits

$$E = \frac{H(X)}{\bar{l}} = \frac{2,26145}{2,3} = 0,98324 \text{ ou } 98,324\%$$

$$H(X) = 0,3 \log_2 \frac{1}{0,3} + 0,27 \log_2 \frac{1}{0,27} + 0,26 \log_2 \frac{1}{0,26} + 0,08 \log_2 \frac{1}{0,08} + 0,06 \log_2 \frac{1}{0,06} + 0,02 \log_2 \frac{1}{0,02} + 0,006 \log_2 \frac{1}{0,006} + 0,004 \log_2 \frac{1}{0,004} = 2,26145 \text{ bits}$$