Financial Portfolio Optimization

Bernardo Gomes
Kishan Rama
Tomás Falcato

OA

Tópicos

- Introdução
- Formulação do problema
- CVX
- Barrier Method
- Reformulação
- Resultados
- Conclusões

Introdução

Formulação do problema(1)

$$\text{maximize } \mu^T \omega - \gamma \omega^T \boldsymbol{\Sigma}\, \omega$$
$$\text{s.t. } 1^T \omega = 1$$
$$\omega \in \mathbb{R}^n_+$$

Formulação do problema(2)

$$\text{maximize } \boldsymbol{\mu}^T \omega - \gamma \omega^T \boldsymbol{\Sigma}\, \omega$$
$$\text{s.t. } 1^T \omega = 1$$
$$\omega \in \mathbb{R}_+^n$$

Formulação do problema(3)

$$\text{maximize } \mu^T \boldsymbol{\omega} - \gamma \omega^T \boldsymbol{\Sigma}\, \omega$$
$$\text{s.t. } 1^T \omega = 1$$
$$\omega \in \mathbb{R}_+^n$$

Formulação do problema(4)

$$\text{maximize } \mu^T\omega - \gamma\omega^T\boldsymbol{\Sigma}\,\omega$$
$$\text{s.t. } 1^T\omega = 1$$
$$\omega \in \mathbb{R}_+^n$$

Formulação do problema(5)

$$\begin{aligned} &\text{maximize } \mu^T \omega - \gamma \omega^T \boldsymbol{\Sigma}\, \omega \\ &\text{s.t. } 1^T \omega = 1 \\ &\qquad \omega \in \mathbb{R}_+^n \end{aligned}$$

Formulação do problema(6)

$$\text{maximize } \mu^T \omega - \gamma \omega^T \boldsymbol{\Sigma} \, \omega$$
$$\text{s.t. } 1^T \omega = 1$$
$$\omega \in \mathbb{R}_+^n$$

Formulação do problema(7)

$$\begin{aligned}
&\text{maximize } \mu^T\omega - \gamma\omega^T\boldsymbol{\Sigma}\,\omega \\
&\text{s.t. } 1^T\omega = 1 \\
&\qquad \omega \in \mathbb{R}_+^n
\end{aligned}$$

Formulação do problema(8)

$$\text{maximize } \mu^T \omega - \gamma \omega^T \boldsymbol{\Sigma}\, \omega$$
$$\text{s.t. } 1^T \omega = 1$$
$$\omega \in \mathbb{R}_+^n$$

Formulação do problema(9)

$$\text{maximize } \mu^T\omega - \gamma\omega^T\mathbf{\Sigma}\,\omega$$
$$\text{s.t. } 1^T\omega = 1$$
$$\omega \in \mathbb{R}_+^n$$

CVX

```
cvx_begin
    variable w(n);

    maximize(miu'*w - gama*w'*cov*w);

    subject to
    (vec_ones')*w == 1; w>=0;
cvx_end;
```

Barrier Method(1)

$$\begin{aligned} &minimize \quad f_0(x) \\ &s.t. \quad f_i(x) \le 0 \\ &\qquad\quad Ax = b \end{aligned}$$

Barrier Method(2)

$$minimize \quad f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} I_{(f_i(x))}$$

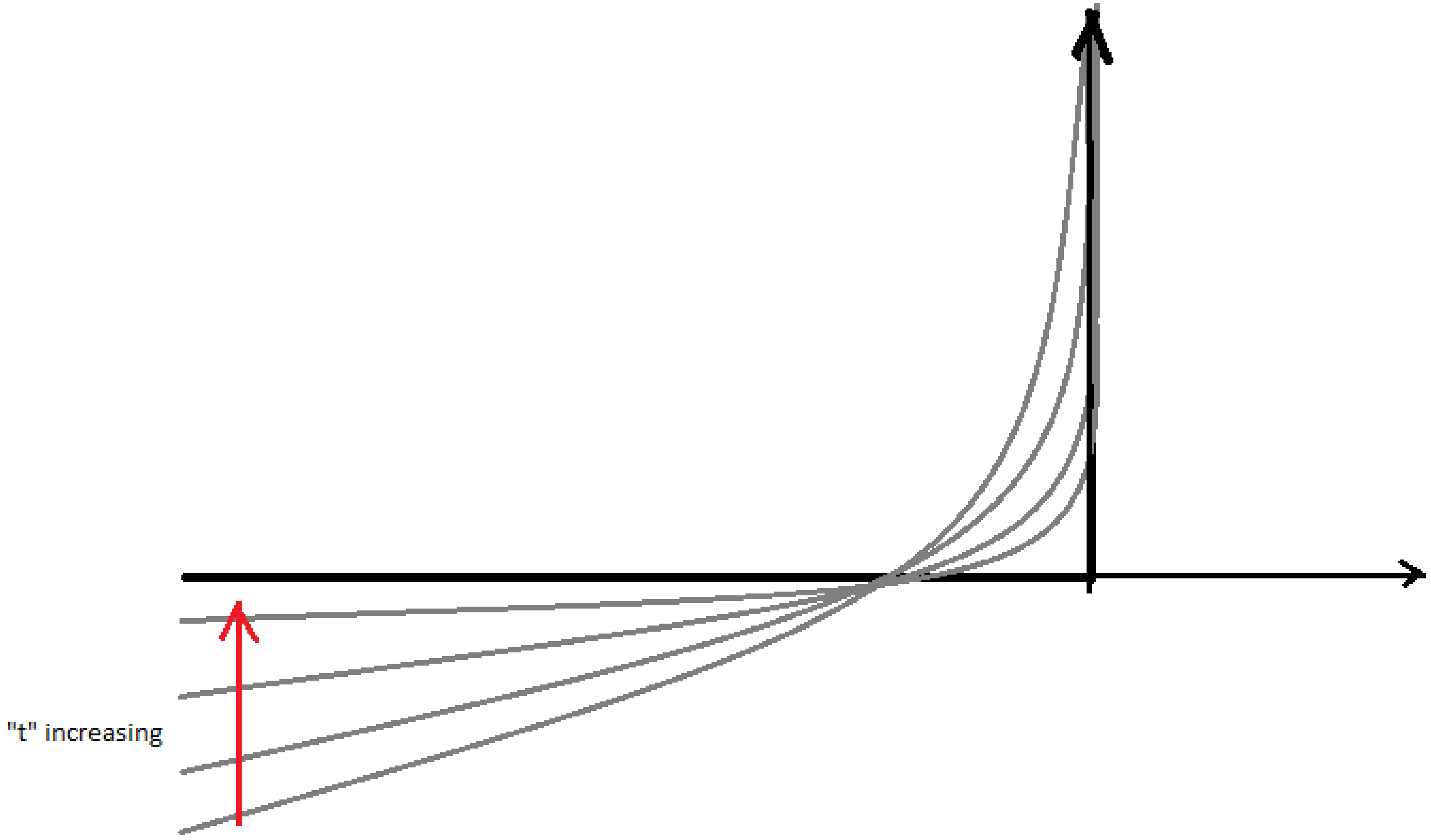
$$s.t. \quad Ax = b$$

Barrier Method(3)

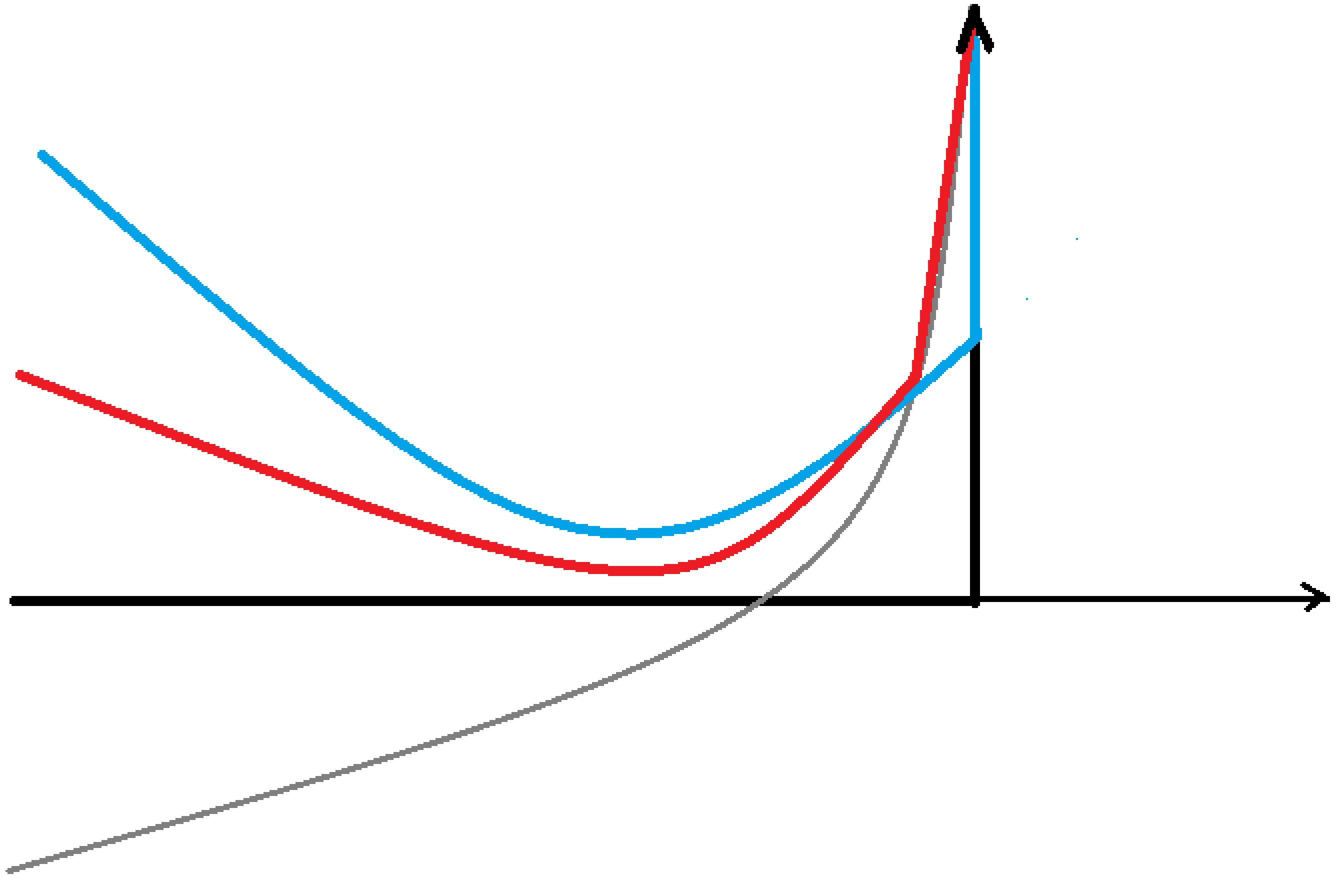
$$minimize \quad f_0(x) + (1/t)\sum_{i=1}^{m} \log(f_i(x))$$

$$s.t. \quad Ax = b$$

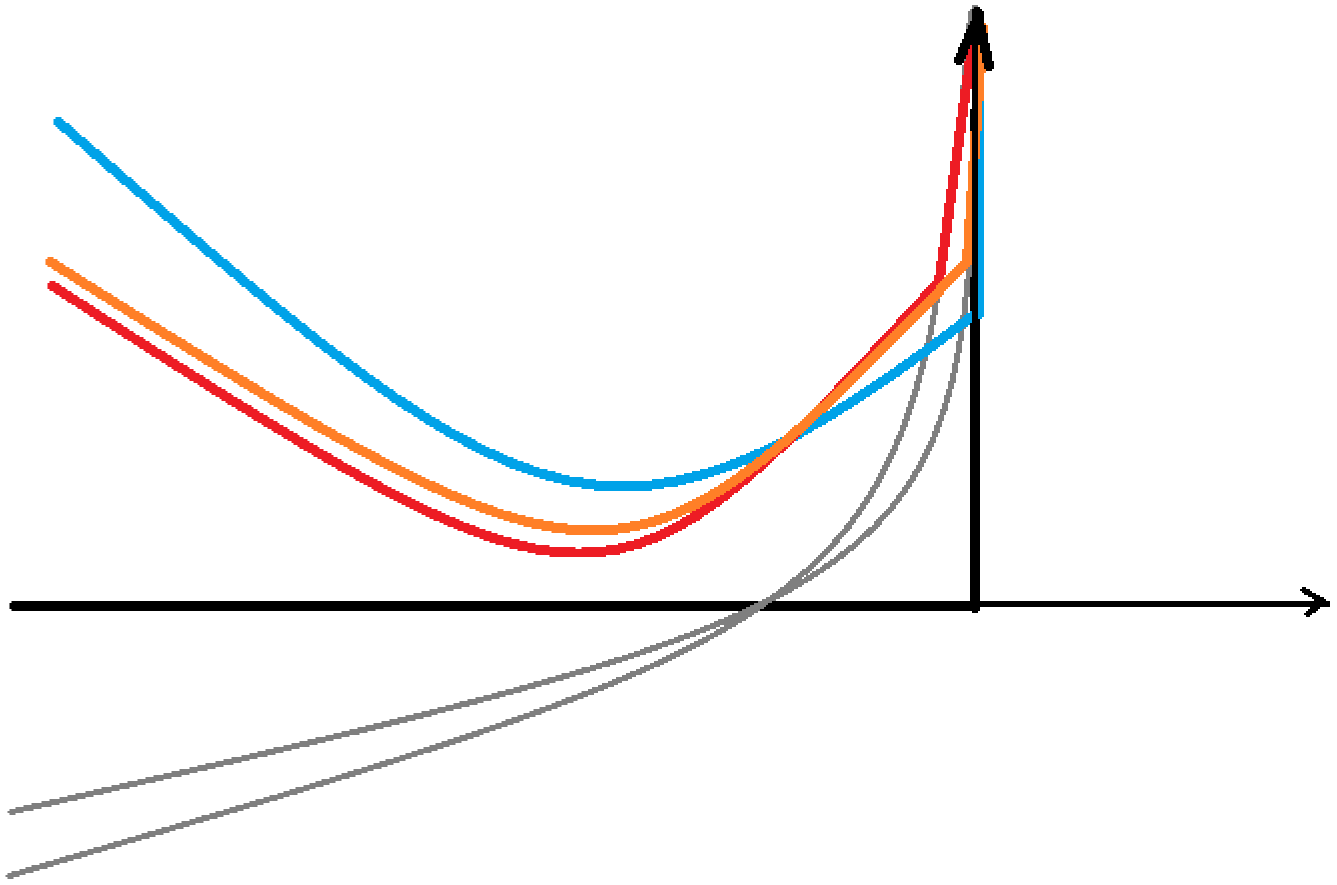
Barrier Method(4)



Barrier Method(5)



Barrier Method(6)



Barrier Method(7)

given strictly feasible x, $t := t(0) > 0$, $\mu > 1$, tolerance $\epsilon > 0$.
repeat
1. Centering step. Compute $x^\star(t)$ by minimizing $tf_0 + \varphi$, subject to $Ax = b$.
2. Update. $x := x^\star(t)$.
3. Stopping criterion. quit if $m/t < \epsilon$.
4. Increase t. $t := \mu t$.

Reformulação(1)

$1^T\omega = 1$ ☒

$\omega = Dz + b$ ☑

Reformulação(2)

$\omega \in \mathbb{R}^n_+$ ☒

$Dz + b \geq 0$ ☑

Reformulação(3)

$$minimize \ -\mu^T(Dz+b)+\gamma(Dz+b)^T\Sigma(Dz+b)$$
$$s.t. \ -Dz-b \leq 0$$

Onde,

$$f_0(z) = -\mu^T(Dz+b)+\gamma(Dz+b)^T\Sigma(Dz+b)$$
$$f_i(z) = -\delta_i^T z - b_i$$

Reformulação(4)

$$minimize\ -\mu^T(Dz+b)+\gamma(Dz+b)^T\Sigma(Dz+b)$$
$$s.t.\ \ -Dz-b\leq 0$$

Onde,

$$f_0(z)=-\mu^T(Dz+b)+\gamma(Dz+b)^T\Sigma(Dz+b)$$
$$f_i(z)=-\delta_i^T z-b_i$$

Reformulação(5)

$$minimize \ -\mu^T(Dz+b)+\gamma(Dz+b)^T\Sigma(Dz+b)$$
$$s.t. \ -Dz-b \le 0$$

Onde,

$$f_0(z) = -\mu^T(Dz+b)+\gamma(Dz+b)^T\Sigma(Dz+b)$$
$$f_i(z) = -\delta_i^T z - b_i$$

Reformulação(6)

$$minimize\ \ f(z) = tf_0(z) + \phi(z)$$

Onde,

$$\phi(z) = -\sum_{i=1}^{m} log(-f_i(z))$$

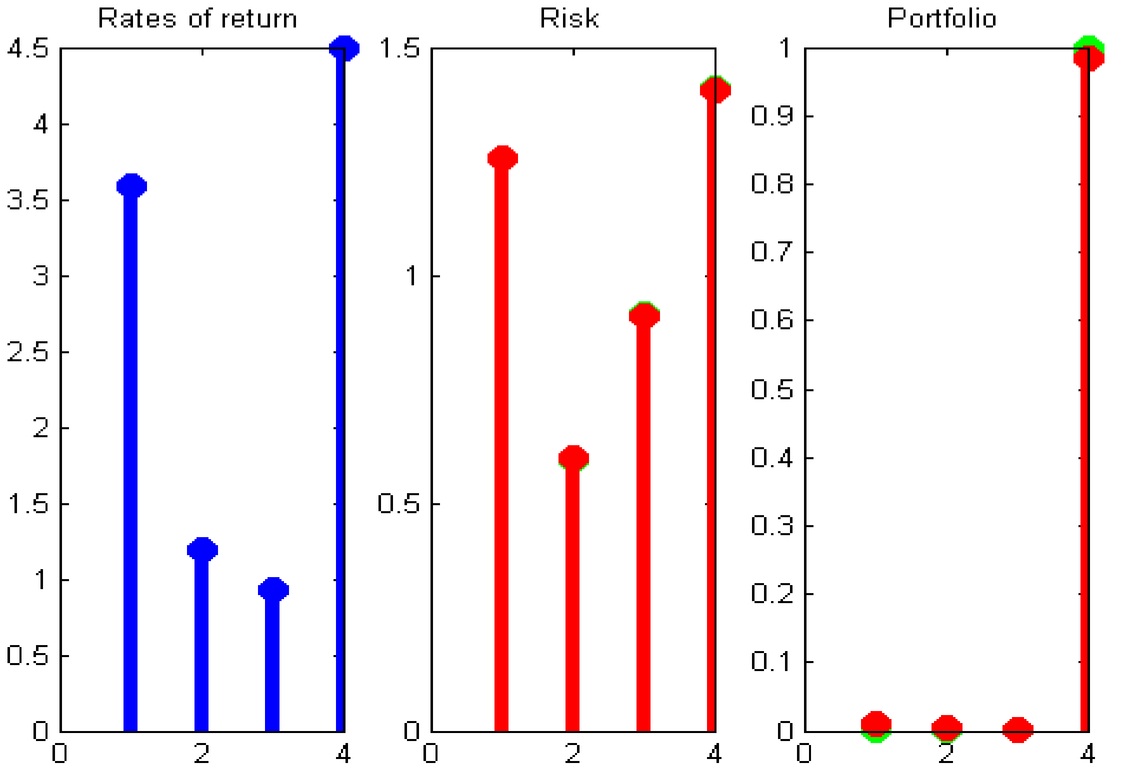
Resultados Númericos(1)

Caso 1: A pessoa que investe não se preocupa com o risco

$\gamma=0$

Resultados Númericos(2)

Caso 1: A pessoa que investe não se preocupa com o risco
ɣ=0

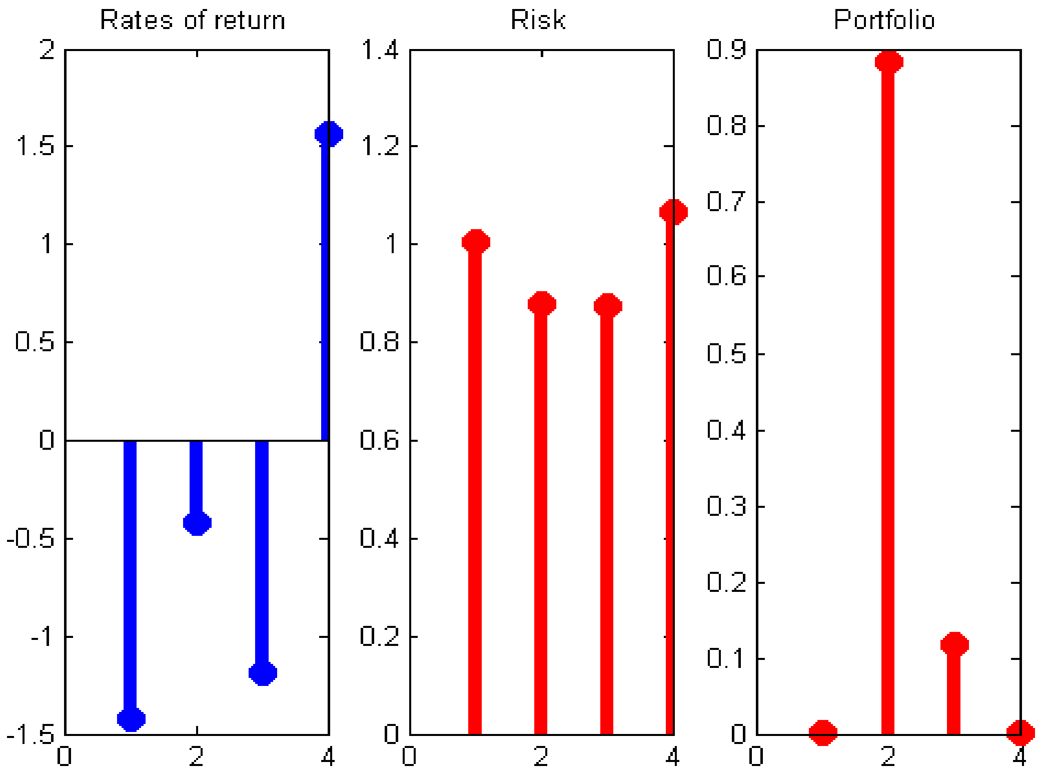


Resultados Númericos(3)

Caso 2: A pessoa que investe tem em conta o risco (aversão ao risco) γ=100

Resultados Númericos(4)

Caso 2: A pessoa que investe tem em conta o risco (aversão ao risco) γ=100

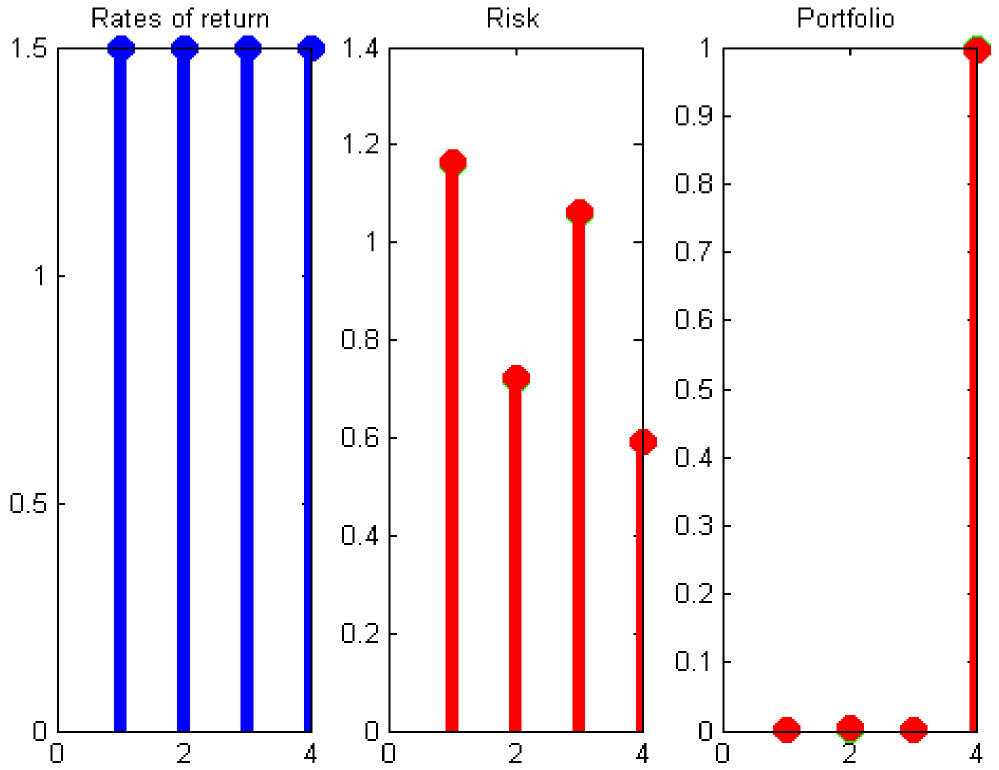


Resultados Númericos(5)

Caso 3: Retornos iguais para todos os assets

Resultados Númericos(6)

Caso 3: Retornos iguais para todos os assets



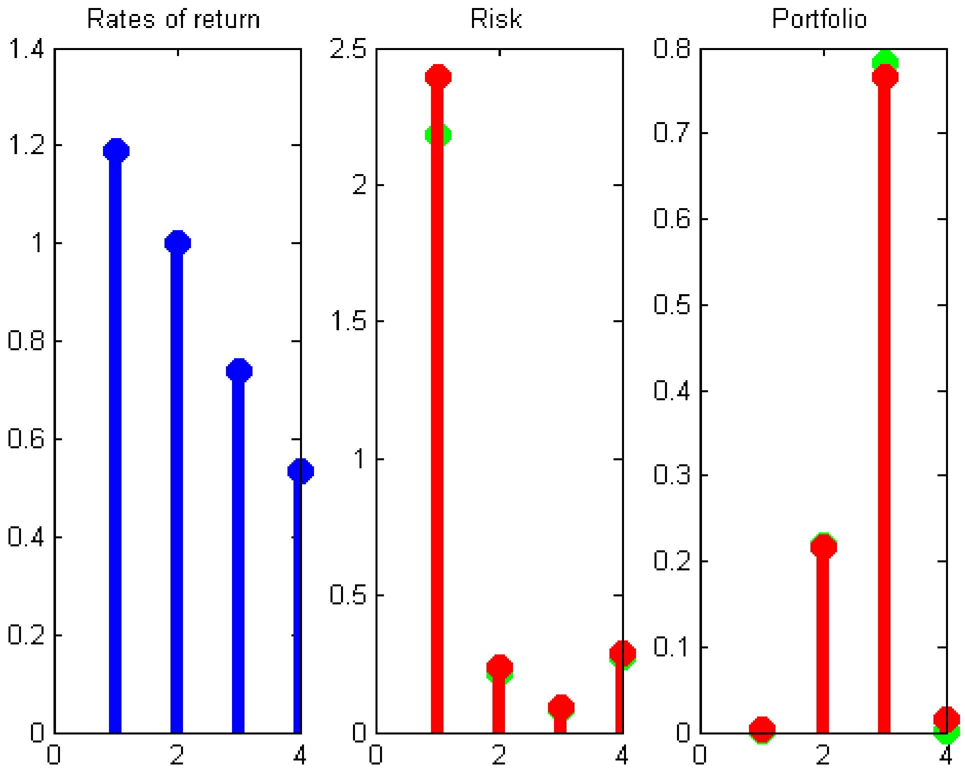
Resultados Númericos(7)

Caso 4: Influência do asset 1 no asset 2

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 100 & 10 & 0 & 0 \\ 10 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1117 & 0.3545 \\ 0 & 0 & 0.3545 & 1.1745 \end{bmatrix}$$

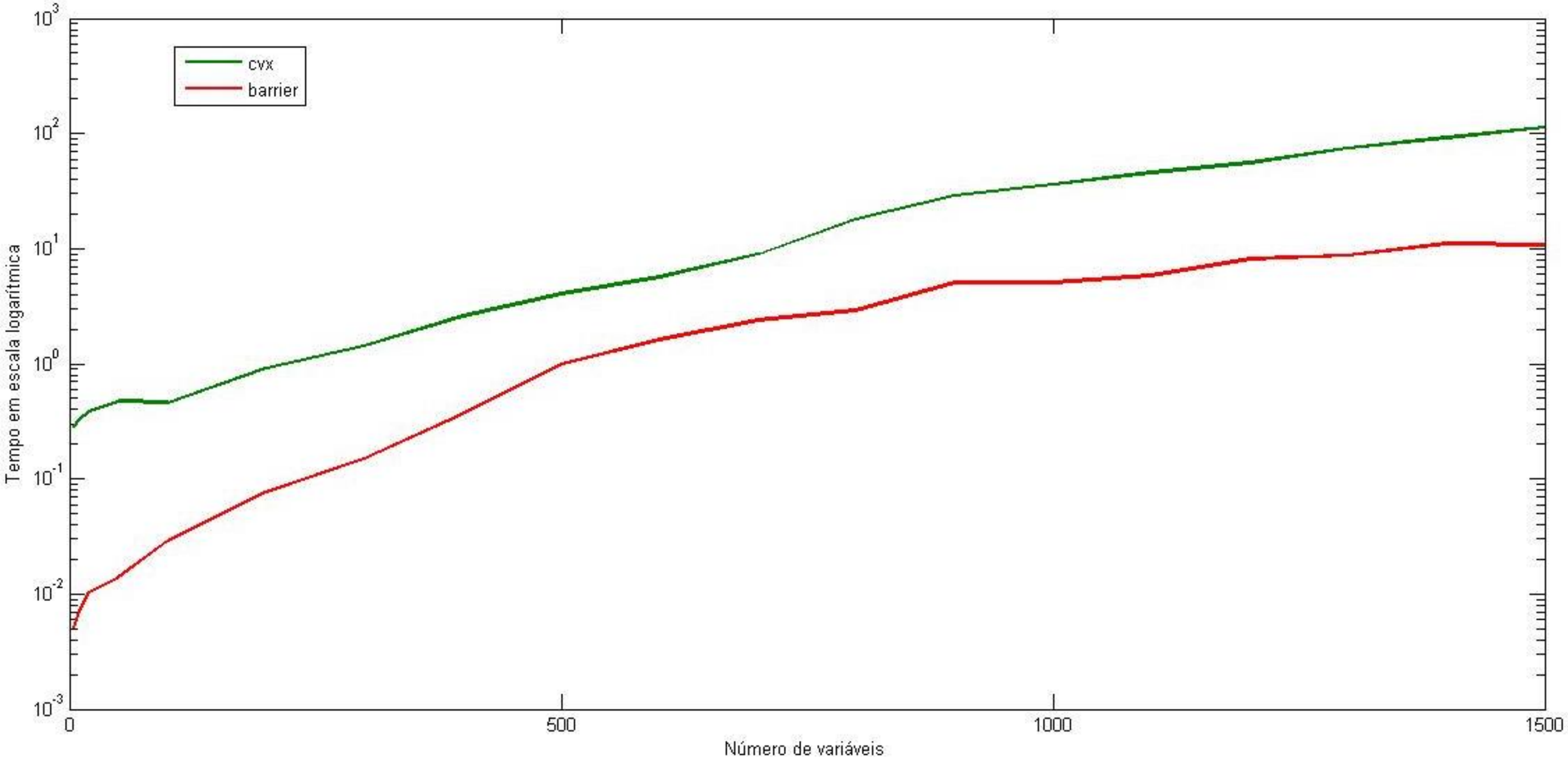
Resultados Númericos(8)

Caso 4: Influência do asset 1 no asset 2



Resultados Númericos(35)

Tempo de Optimização: CVX vs Barrier



Conclusão