UNIVERSIDADE FEDERAL DO VALE DO SÃO FRANCISCO

CURSO DE ENGENHARIA AGRÍCOLA E AMBIENTAL

Bernardo Cardoso de Oliveira Neto.

Roberta de Alencar França Queiroz

APROXIMAÇÃO DE DERIVADAS E INTEGRAIS: DIFERENÇAS FINITAS E SOMA DE RIEMANN

JUAZEIRO – BA

2025

1. Diferenças Finitas

As diferenças finitas constituem um método numérico fundamental para a aproximação da derivada de uma função. Esse método é amplamente utilizado quando não se tem uma expressão analítica da derivada ou quando se trabalha com dados experimentais ou discretos. A ideia central é estimar a inclinação da função em determinado ponto utilizando valores da função em pontos próximos.

Principais Fórmulas:

- Diferença Progressiva**:**
  $f'(x) \approx [f(x + h) - f(x)] / h$
- Diferença Regressiva**:**
  $f'(x) \approx [f(x) - f(x - h)] / h$
- Diferença Central (mais precisa):
  $f'(x) \approx [f(x + h) - f(x - h)] / (2h)$

A escolha do valor de h é importante: se for muito grande, a aproximação é grosseira; se for muito pequeno, podem ocorrer erros numéricos por limitação de precisão dos computadores.

Exemplo:

Considere a função $f(x) = \cos(x)$, e o ponto $x = 0$. Utilizando a fórmula da diferença central com $h = 0{,}1$:

$f'(0) \approx [\cos(0{,}1) - \cos(-0{,}1)] / (2 * 0{,}1)$
Como cos(x) é uma função par ($\cos(0{,}1) = \cos(-0{,}1)$), temos:
$f'(0) \approx 0$

Esse resultado é compatível com o valor analítico da derivada de cos(x) em $x = 0$, que é $-\text{sen}(0) = 0$.

As diferenças finitas são utilizadas, por exemplo, na engenharia para simular fluxos de calor, tensões em estruturas e sistemas dinâmicos em geral.

2. Soma de Riemann

A soma de Riemann é uma das formas mais básicas de se aproximar o valor de uma integral definida. Consiste em dividir o intervalo de integração em subintervalos e somar as áreas de retângulos que se formam entre o eixo x e a curva da função.

Tipos de Soma de Riemann:

- Soma pela Esquerda**:**
  Usa o valor da função no início de cada subintervalo.
- Soma pela Direita**:**
  Usa o valor da função no fim de cada subintervalo.
- Soma pelo Ponto Médio**:**
  Usa o valor da função no ponto médio de cada subintervalo (geralmente mais precisa).

Fórmula Geral:

Seja aa o limite inferior, b o limite superior e n o número de divisões:

$\Delta x = (b - a) / n$
$x_i = a + i * \Delta x$

Soma pela esquerda:
$\sum f(x_i) * \Delta x$, para i de 0 a n-1

Soma pelo ponto médio:
$\sum f((x_i + x_{i+1})/2) * \Delta x$

Exemplo:

Vamos considerar a função $f(x) = x^2$ no intervalo de 0 a 1, com n = 4.

$\Delta x = (1 - 0)/4 = 0,25$

Pontos à esquerda:
$x_0 = 0$, $x_1 = 0,25$, $x_2 = 0,5$, $x_3 = 0,75$

Soma à esquerda:

f(0)*0,25 + f(0,25)*0,25 + f(0,5)*0,25 + f(0,75)*0,25 =

(0 + 0,0625 + 0,25 + 0,5625) * 0,25 = 0,21875

Valor exato da integral:

$\int_0^1 x^2\,dx = (1/3) \approx 0{,}3333$

Portanto, quanto maior for o número de divisões (n), mais próxima a soma de Riemann estará do valor exato.

3. Conclusão

Tanto as **diferenças finitas** quanto as **somas de Riemann** são ferramentas essenciais na Análise Numérica. Elas permitem que derivadas e integrais sejam estimados mesmo quando a função não tem uma forma simples ou quando é obtida experimentalmente.

Esses métodos são muito usados em simulações de processos físicos, engenharia, ciências computacionais, modelagem matemática e até em economia, onde se trabalha com dados em série.

Referências

BURDEN, Richard L.; FAIRES, J. Douglas. ***Análise Numérica***. 9. ed. Cengage Learning, 2011.

BOYKIN, P. Oscar. ***Numerical Methods for Engineers and Scientists*****.** University of Florida, 2020.

CHAPRA, Steven C.; CANALE, Raymond P. ***Métodos Numéricos para Engenharia***. 7. ed. McGraw-Hill, 2016.

KREYSZIG, Erwin. ***Advanced Engineering Mathematics*****.** 10th ed. Wiley, 2011.

ZILL, Dennis G.; WRIGHT, Warren S. ***Cálculo com Geometria Analítica*****.** 7. ed. Bookman, 2014.