TÉCNICO LISBOA

Pêndulo gravítico

Determinação do período do pêndulo simples e aferição do valor da aceleração da gravidade local g

1 Objectivo

Pretende-se com este trabalho determinar o período de oscilação de um pêndulo simples, constituído por um fio e uma massa, para diferentes comprimentos do fio. A partir destes valores é possível determinar o valor da aceleração da gravidade local g.

Este tipo de pêndulos foi estudado extensivamente por Galileu Galilei (1564-1642), no início do séc. XVIII. O *pai da Física Moderna* foi o primeiro a constatar a propriedade de isocronismo do pêndulo: para pequenas amplitudes de oscilação, o período é independente quer da amplitude do movimento, quer do valor da massa. Também descobriu que o período é proporcional à raiz quadrada do comprimento do fio. Estas propriedades vieram a permitir a utilização do pêndulo como instrumento de referência para medição de intervalos de tempo e da Hora durante toda a parte d dia: os relógios de pêndulo.

2 Movimento Harmónico Simples

O pêndulo gravítico é um exemplo simples de um importante modelo matemático, o "Oscilador Harmónico" (OH), de vastíssima utilização em quase todos o ramos da Física, bem como muitas áreas de Engenharia. Neste modelo, um sistema físico arbitrário encontra-se na vizinhança de uma posição de equilíbrio, onde há um mínimo (local ou absoluto) da sua energia potencial (E_P). A Energia pode ser de origem gravítica, elástica, eletrostática ou outra desde que seja do tipo *Conservativa*. Um sistema como este apresenta as seguintes características:

1. Ao distanciar-se deste mínimo, por uma perturbação ou outra força externa inicial, surge uma força de índole conservativa, sempre direcionada de forma a repor o equilíbrio (ver Figura 1).

2. Quando as forças exteriores deixam de actuar, o sistema adquire movimento, transferindoenergia potencial para energia cinética (E_C).

3. Ao retomar a posição de equilíbrio, o movimento prossegue por inércia até se alcançar um novo máximo, normalmente simétrico ao ponto inicial.

4. Na ausência de atrito, o sistema regressa ao ponto de partida e o ciclo repete-se infinitamente, com período T_0 constante ("Oscilador Livre"). Contudo, na presença de forças dissipativas a energia total deixa de ser constante e irá dissipar-se, diminuindo a amplitude do movimento, até desaparecer ("Oscilador Amortecido").

2.1 Sistema massa-mola

Antes de analisarmos o pêndulo gravítico, cuja solução exacta é alago complexa, vamos considerar o modelo de OH mecânico mais simples, que consiste num sistema de uma massa m que se move na horizontal e sem atrito, presa a uma mola de constante elástica k_{mola} que é fixada na sua outra extremidade a um ponto fixo (Figura 2).

Pretendemos determinar a função $x(t)$ que descreve o movimento da massa nestas condições. Caso a massa se desloque da posição de equilíbrio ($x = x_0$), a energia potencial elástica aumenta e mola irá exercer uma força de sentido contrário ao do deslocamento $\Delta x \equiv x - x_0$. Para simplificar faz-se $x_0 = 0$ e portanto $\Delta x = x$. No modelo ideal da *mola linear* a força é sempre proporcional ao deslocamento x, com uma constante k_{mola} :

$$F_{mola} = -k_{mola}\, x \tag{1}$$

A partir da segunda equação de Newton, $F = ma$ e sabendo que $a \equiv \ddot{x} \equiv \frac{d^2x}{dt^2}$ é possível chegar facilmente à equação de movimento do sistema massa-mola (equação diferencial de 2.º grau),

$$ma = -k_{mola}x \Leftrightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k_{mola}}{m}x = 0 \tag{2}$$

Pode-se verificar após alguma álgebra[1] que a seguinte função temporal periódica é solução da equação (2):

$$x(t) = c_1 \cos(\omega_0\, t) + c_2 \sin(\omega_0\, t) = A_0 \sin(\omega_0\, t + \phi_0), \text{ com } \omega_0 = \sqrt{\frac{k_{mola}}{m}} \tag{3}$$

em que A_0 é a amplitude e ϕ_0 é a fase, ambas constantes e dependentes da condições iniciais de posição e velocidade. Finalmente ω_0 é a frequência angular de ressonância, inversamente proporcional ao período, o qual depende apenas da massa m e de k_{mola}:

[1]Consultar *Notas de apoio às aulas teóricas*

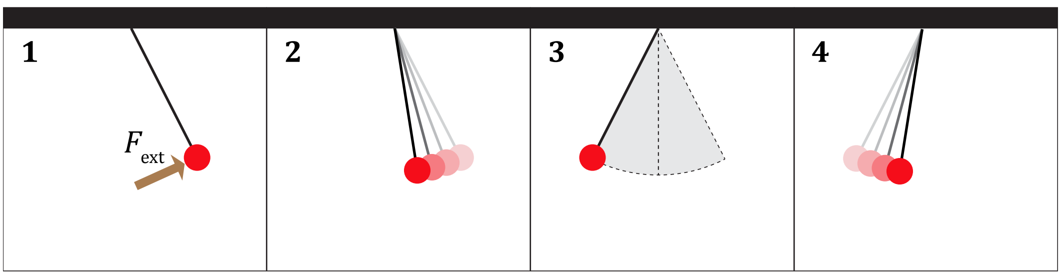

Figura 1: Movimento de um pêndulo gravítico.

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_{mola}}} \tag{4}$$

Assim, a solução para a posição $x(t)$ é uma função sinusoidal (harmónica). Uma vez que a velocidade $v(t)$ é a derivada temporal da posição, também será uma função sinusoidal, com um desfasamento de $\pi/2$ em relação a $x(t)$.

2.2 Pêndulo gravítico

O pêndulo gravítico consiste na sua forma idealizada numa massa pontual suspensa[2] a partir de um fio inextensível, de comprimento l fixo e de massa desprezável, que pode rodar de um ângulo θ em torno de um ponto (o eixo, ou pivô) (Figura 3). Quando a massa se desvia da posição central $\theta = 0$, a força gravítica aplicada (o seu peso $F_g = m\,g$) adquire uma componente F_θ na direcção de movimento (tangente à trajectória) e que tende a restabelecer o equilíbrio.

Se a posição do pêndulo for descrita pela coordenada ao longo da sua trajectória circular, $s = l \cdot \theta$, então a força restauradora é

$$F_\theta = -F_g \sin(\theta) = -mg\sin(\theta) \tag{5}$$

e a equação diferencial de movimento para a posição s resulta em

$$\begin{aligned} a &= \frac{d^2 s}{dt^2} = l\,\frac{d^2\theta}{dt^2} \\ ma = F_\theta &\Leftrightarrow m\,l\,\frac{d^2\theta}{dt^2} = -m\,g\,\sin(\theta) \\ &\Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin(\theta) = 0 \end{aligned} \tag{6}$$

Esta equação não tem resolução analítica simples, mas através do método da *linearização* (o "canivete suíço" dos físicos), utiliza-se a aproximação $\sin(\theta) \simeq \theta$, válida

[2]No Latim *pendulus*

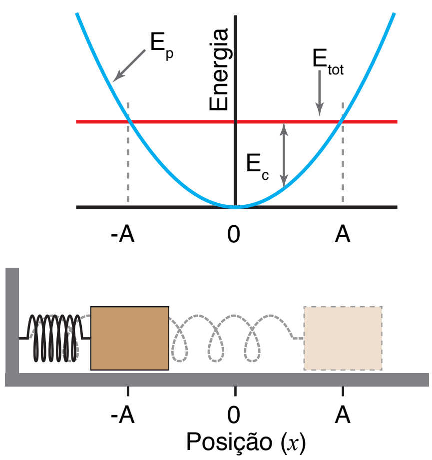

Figura 2: Oscilador Harmónico Simples *massa-mola*.

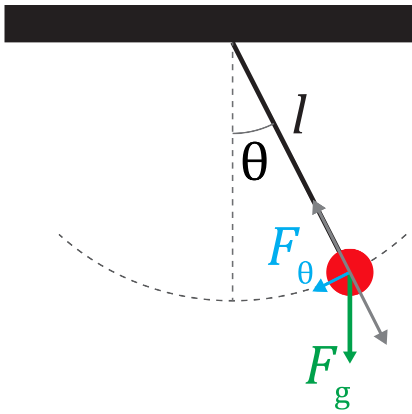

Figura 3: Força de gravidade F_g no pêndulo gravítico e a sua projecção F_θ na direcção de movimento.

para $\theta_0 \leq 0.08\,\mathrm{rad}$ (aqui os ângulos têm de ser expressos em radianos![3]). Com esta aproximação ficamos com

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0 \tag{7}$$

cuja solução matemática é exacta e semelhante à expressão (3),

$$\theta(t) = \theta_0 \sin(\omega_0\, t + \phi_0), \text{ com } \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}. \tag{8}$$

O que é interessante neste modelo é que o efeito da *massa gravítica* anula o da *massa inercial* e o período do pêndulo T_0 fica a depender apenas do comprimento l e do valor da aceleração da gravidade g local:[4]

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad \text{, para } \theta_0 \ll 1\,\mathrm{rad}. \tag{9}$$

A equação (9) representa precisamente a dependência entre o período e o comprimento do pêndulo deduzida por Galileu. A partir dessa época, estes dispositivos foram sistematicamente utilizados para medir o tempo e a Hora local (e comparando com a Hora Solar também a Latitude), sendo a base de todos os relógios de precisão até meados do século passado, com maior ou menor complexidade. Actualmente apenas os relógios decorativos ou de luxo usam variações do pêndulo[5].

[3]Por exemplo: $\sin(5°) = \sin(0.08726\,\mathrm{rad}) = 0.08715...$

[4]À superfície da Terra e à latitude de Lisboa: $g \approx 9.801\,\mathrm{ms}^{-2}$. Consultar também o Projecto “Pêndulo Mundial”, baseado no e-lab do IST: http://groups.ist.utl.pt/wwwelab/wiki/index.php?title=Pêndulo_Mundial

[5]Mas ainda são úteis para se fazer Ciência: Ver por exemplo a revista *Nature* de Julho de 2015, http://www.nature.com/articles/srep11548, com autores aqui do Técnico

2.2.1 A influência do atrito

Até aqui, desprezámos o atrito do ar no movimento do pêndulo. Ao introduzir esta contribuição, na aproximação de atrito cinético proporcional à velocidade, a equação (7) muda para

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \lambda\,\frac{1}{m}\frac{d\theta}{dt} + \frac{g}{l}\theta = 0 \quad (\lambda = \text{Coeficiente de atrito viscoso}) \tag{10}$$

O primeiro efeito, que se pode verificar no laboratório, é na amplitude do movimento θ_0: já não será constante, mas irá diminuir inexoravelmente com o tempo.

O segundo efeito, mais difícil de observar, é que existe uma muito pequena alteração no período, que tem agora o valor

$$T_1 = T_0/\sqrt{1-\zeta^2}, \quad \text{onde } \zeta = \frac{\lambda}{2\,m}\sqrt{\frac{l}{g}}. \tag{11}$$

O factor ζ também se pode relacionar com o factor de amortecimento[6] Q:

$$Q = 2\pi \times \frac{\text{Energia do Pêndulo}}{\text{Energia perdida num ciclo}} \tag{12}$$

Nota final: A resolução analítica (infelizmente bastante complexa) da Equação (6) tem como solução para o período uma série infinita de potências de θ_0:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{1}{16}\theta_0^2 + \frac{11}{3072}\theta_0^4 + \frac{737280}{3072}\theta_0^6 + \frac{22931}{1321205760}\theta_0^8 + \cdots\right) \tag{13}$$

Naturalmente, verifica-se imediatamente que na aproximação $\theta_0 \ll 1$ a Equação 9 continua válida.

[6] Em engenharia é designado por Factor de Qualidade