



ÍNDICE DE REFRAÇÃO DO VIDRO DE UM PRISMA PELO MÉTODO DO DESVIO MÍNIMO.

Poder Dispersivo e Poder de Resolução do Vidro.

1 Princípio do método

Um prisma de um meio transparente, homogêneo e isotrópico de índice de refração, n , colocado no percurso de um feixe luminoso incidente produz um desvio angular, δ , no feixe emergente que depende do ângulo de incidência, i_1 . Pode provar-se que a função desvio angular *vs* apresenta um ponto de estacionariedade (i.e., derivada nula) que é um mínimo se $n > 1$. Mostra-se também que nessa situação as direções dos dois feixes são igualmente inclinadas em relação às faces do prisma, i.e. quando o ângulo de incidência é igual ao ângulo de transmissão emergente (ver Apêndice). Nesse caso (Figura 1) o índice de refração, n , pode ser calculado simplesmente através da expressão seguinte:

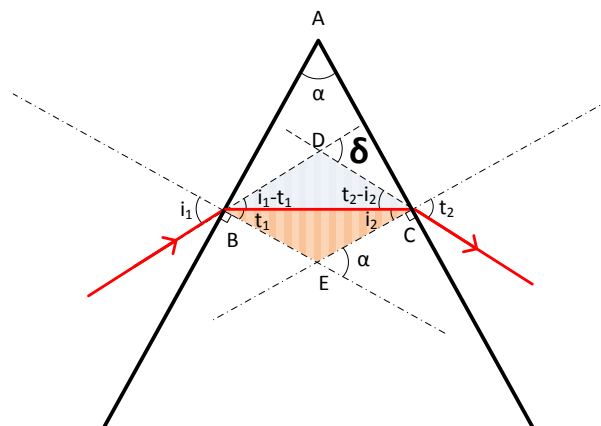


Figura 1: Esquema da transmissão do feixe incidente num prisma colocado na plataforma do goniómetro de Babinet. A direção do feixe transmitido desvia-se do ângulo δ em relação ao feixe incidente.

$$n = \frac{\sin\left(\frac{\alpha + \delta_{min}}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \quad (1)$$

em que α e δ_{min} são os ângulos, respetivamente, do prisma e o desvio mínimo referido. Este desvio mínimo depende do comprimento de onda da radiação incidente, λ , e por consequência n depende de λ . Define-se *poder dispersivo* dum material como a derivada de n em ordem a λ , e escreve-se como $\left(\frac{dn}{d\lambda}\right)$. Como esta função não é constante, deve indicar-se o valor do poder dispersivo relativo a um determinado valor de comprimento de onda incidente, ou $\left(\frac{dn}{d\lambda}\right)_{\lambda_i}$.

O poder separador ou poder de resolução de um dado instrumento óptico¹, $R_\lambda = \frac{\lambda}{\Delta\lambda}$, é a capacidade que possui de poder permitir que se observem separadamente dois comprimentos de onda muito próximos, afastados de $\Delta\lambda$, na vizinhança de um valor médio $\bar{\lambda}$. Esta grandeza é adimensional e quanto maior for o seu valor, melhor é a resolução do instrumento.

No caso de um prisma obtém-se para R a seguinte expressão (ver Apêndice), se a fonte é linear e se dispõe paralelamente à aresta do prisma:

$$R_\lambda = l \left(\frac{dn}{d\lambda} \right)_\lambda \quad (2)$$

em que l é o *maior percurso* do feixe luminoso no interior do prisma.

Uma *rede de difração* permite também observar separadamente dois comprimentos de onda muito próximos. No entanto para uma rede de difração linear a resolução além de variar com o comprimento de onda depende da *ordem de difração*, m

$$R_\lambda = m N \quad (3)$$

sendo N o número de linhas da rede iluminadas pelo feixe.

2 A experiência

2.1 Equipamento

1. Goniómetro de Babinet.
2. Prisma triangular de vidro.
3. Lâmpada espectral de Mercúrio ou Hélio.

No Trabalho anterior colocou-se o prisma na plataforma de modo a poderem observar-se as reflexões nas duas faces polidas. As direcções dos raios refletidos fazem um ângulo θ , que se mediu com o goniómetro e que é o dobro do ângulo principal do prisma α . Determinou-se facilmente assim o ângulo do prisma com uma precisão e exatidão muito melhores do que com um transferidor, por exemplo.

À partida podia determinar-se o ângulo δ_{min} medindo com a objectiva a direcção do raio incidente (sem prisma) e a direcção do raio emergente que corresponda ao desvio mínimo

¹Optical Resolution

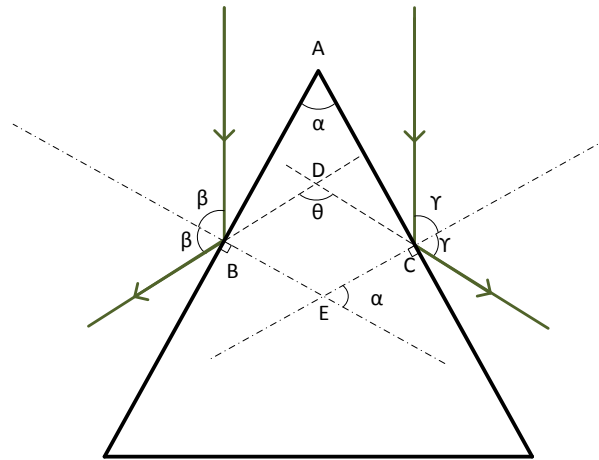


Figura 2: Esquema da reflexão do feixe incidente num prisma colocado na plataforma do goniómetro de Babinet. As direções dos dois raios refletidos fazem entre si um ângulo θ que é o dobro do ângulo α do prisma.

(Figura 1). No entanto para compensar as eventuais assimetrias do aparelho devem fazer-se observações para os desvios à esquerda e à direita. Neste caso é fácil provar que o ângulo formado entre os dois raios emergentes (para a mesma côr) é o dobro do ângulo de desvio, δ_{min} (e não é necessário determinar a direção do raio incidente, i_1).

O prisma que se usa é em geral de seção reta triangular (equilátero ou isósceles). A lâmpada espectral é uma fonte de luz policromática que contém dois elétrodos situados no interior de um invólucro (vidro em geral) onde existe uma substância “ativa”² em muito pequena quantidade, numa atmosfera rarefeita. A alimentação que em geral é de alta tensão e produz entre os elétrodos uma descarga que vaporiza, excita e ioniza a substância ativa. As diferentes excitações permitem transições radiativas que dão origem à emissão de um feixe constituído por diferentes comprimentos de onda bem definidos e que se encontram já muito bem identificados na literatura³.

Todas as lâmpadas espectrais emitem no ultravioleta que é nocivo para a pele e olhos dos observadores, mas o vidro no interior do qual se dá a descarga absorve a maior parte destas radiações perigosas. Para ainda reduzir os riscos, a lâmpada tem um invólucro em geral metálico apenas com uma abertura para permitir iluminar uma fenda estreita e regulável junto à luneta do goniómetro, que produz uma linha vertical na imagem. A aresta do triângulo definido pelas superfícies planas onde se produz a reflexão e/ou transmissão deve ficar paralela a esta fenda.

²Que dá o nome à lâmpada, e.g. Mercúrio, Hélio, Néon, etc.

³Pode consultar a extensa base de dados online em [NIST Atomic Spectra Database](#).



Figura 3: Fotografia do goniómetro de Babinet utilizado na experiência.

3 Protocolo Experimental

1. Ligue a lâmpada espectral e espere 10 a 15 minutos até que se estabeleça o equilíbrio térmico no seu interior.
2. Enquanto espera comece por regular a ótica do goniómetro tal como descrito no Guia do Trabalho anterior.
3. Verifique o nivelamento horizontal do goniómetro e da plataforma onde vai colocar o prisma com a ajuda de um nível de bolha.
4. Utilize o valor do ângulo, α , entre as faces polidas prisma obtido no trabalho anterior.
5. Observe agora a transmissão das várias cores através do prisma com o feixe incidente numa das faces, na posição da Figura 3 do guia do trabalho anterior. Se o instrumento estiver bem focado deve observar uma série de imagens colorida da fenda, i.e. riscas isoladas, uma por cada cor (ou comprimento de onda λ).
6. Escolha duas dessas cores bem afastadas. Rodando o prisma obtenha um conjunto de valores que permita fazer um gráfico dos ângulos de desvio, $\delta(i_1)$, em função do ângulo de incidência, i_1 e um ajuste polinomial (Nesta fase não precisa de utilizar o nónio da escala de minutos). Pelo gráfico verifique que existe de facto um mínimo no ângulo de desvio, $\delta(i_{min})$, mas que o ângulo i_{min} e $\delta(i_{min})$ são diferentes para cada cor.
7. Em seguida, para medir o desvio mínimo, *para cada cor*, tem de se colocar o prisma para posição correspondente. Deve portanto olhar pela objectiva e fixando uma cor rodar o prisma até observar o desvio mínimo. De seguida, com o parafuso micrométrico associado à luneta, centrar a imagem da fenda no retículo e meça o ângulo $\delta_{min(esq)}(\lambda)$. Comece por usar todas as cores quando o prisma desvia para o lado esquerdo (cada elemento do grupo deve efectuar as suas medidas).
8. Repita o ponto anterior, mas para o prisma a desviar o feixe para o lado direito.

Calcule os desvio mínimos:

$$\delta_{min}(\lambda) = \frac{|\delta_{esq} - \delta_{dir}|}{2}$$

9. Com os desvio mínimos e identificando nas tabelas os valores dos comprimentos de onda das riscas visíveis, calcule índice de refração a partir da Equ. 1 e represente graficamente a função $n(\lambda)$. Ajuste uma curva polinomial aos pontos obtidos. Através da estimativa da derivada desta função, calcule o poder dispersivo do vidro para o comprimento de onda médio, $\bar{\lambda}_{amare}$, das duas riscas amarelas do sódio ($\lambda \approx 589 \text{ nm}$).
10. Faça uma estimativa da maior distância percorrida pelo feixe luminoso no prisma (que é aproximadamente o comprimento da aresta) e calcule o Poder de Resolução do prisma para o $\bar{\lambda}_{amare}$, referido no ponto anterior.
11. Substitua no centro da plataforma do goniómetro o prisma por uma rede de difração de 600 linhas por milímetro. Compare a separação angular, $\Delta\delta_{rede}$, das duas riscas mais próximas, observadas com a rede com a que obteve para as mesmas riscas, usando o prisma. Comente, utilizando a expressão (3).

Apêndice

Ângulo do Prisma

Considere-se a incidência nas condições da Figura 2. A figura plana quadrangular $ABEC$ tem dois ângulos retos ABE e ECA . Assim o ângulo CAB , α , é suplementar do ângulo BEC e portanto o ângulo externo em E (assinalado na figura) tem o mesmo valor do ângulo do prisma. Na figura plana quadrangular $DBEC$ está definido um ângulo que é o ângulo formado pelas direções dos raios refletidos na face AB e AC . Entre os ângulos de incidência e existe a relação

$$2\beta + 2\gamma + \theta = 2\pi \quad (4)$$

e entre os ângulos de $DBEC$

$$\beta + \gamma + \theta + \pi - \alpha = 2\pi \quad (5)$$

O sistema destas duas equações permite obter

$$\alpha = \theta/2 \quad (6)$$

Desvio mínimo

Supondo um prisma que tem um índice de refração que em relação ao meio em que está imerso n , na configuração da Figura 1, os feixes que são transmitidos através do mesmo sofrem um desvio $\delta(\lambda)$. Os ângulos α e de desvio δ são exteriores respetivamente aos triângulos BCD (em D) e BEC (em E) e portanto

$$\delta = (i_1 - t_1) + (t_2 - i_2) \quad (7)$$

$$\alpha = t_1 + i_2 \quad (8)$$

o que permite obter

$$\delta = i_1 + t_2 - \alpha \quad (9)$$

Estes ângulos satisfazem à lei de Snell-Descartes da transmissão.

$$n = \frac{\sin i_1}{\sin t_1} = \frac{\sin t_2}{\sin i_2} \quad (10)$$

No caso geral o ângulo δ depende do ângulo de incidência i_1 e pode provar-se que a função envolvida tem uma estacionariedade. Para encontrar o *desvio mínimo* δ_{min} , calculemos a derivada de δ em relação a i_1 (expressão 9).

$$\frac{d\delta}{di_1} = 1 + \frac{dt_2}{di_1} \quad (11)$$

Obtendo $\sin i_1$ e $\sin t_2$ da relação (10) e aplicando-lhe derivada em ordem a i_1 é-se conduzido a

$$\cos i_1 = n \cos t_1 \cdot \frac{dt_1}{di_1} \quad (12)$$

$$\cos t_2 \cdot \frac{dt_2}{di_1} = n \cos i_2 \cdot \frac{di_2}{di_1} \quad (13)$$

Mas atendendo à relação (8)

$$\frac{dt_1}{di_1} = -\frac{di_2}{di_1} \quad (14)$$

e combinando (12), (13) e (14) obtém-se

$$\frac{dt_2}{di_1} = -\frac{\cos i_2 \cos i_1}{\cos t_2 \cos t_1} \quad (15)$$

e a relação (11) vem

$$\frac{d\delta}{di_1} = 1 - \frac{\cos i_2 \cos i_1}{\cos t_2 \cos t_1} \quad (16)$$

Esta função admite um zero para

$$\cos i_2 \cos i_1 = \cos t_2 \cos t_1 \quad (17)$$

Atendendo a (10) e à relação entre coseno e seno obtém-se

$$\sin^2 t_1 \cdot (1 - n^2) = \sin^2 i_2 \cdot (1 - n^2) \quad (18)$$

que para os ângulos considerados ($\leq \pi/2$) e para $n \neq 1$ implica que

$$t_1 = i_2 = t \quad (19)$$

$$i_1 = t_2 = i \quad (20)$$

Assim para $\frac{d\delta}{di} = 0$ (que provaremos ser um mínimo)

$$\delta_{min} = 2i - 2t = 2i - \alpha \quad (21)$$

o que permite calcular t a partir do ângulo do prisma ($t = \alpha/2$) e i a partir do ângulo de desvio mínimo e do ângulo do prisma ($i = (\alpha + \delta_{min})/2$) e consequentemente obter a relação (1) para o cálculo do índice de refração.

É necessário calcular $\frac{d^2\delta}{di^2} = 0$ e verificar se é uma quantidade positiva ou negativa para os valores que anulam a primeira derivada com o objetivo de saber se a estacionariedade é um mínimo, máximo ou um ponto de inflexão. Aplicando derivada em ordem a i à expressão (16) obtém-se

$$\frac{d^2\delta}{di_1^2} = \frac{d}{di_1} \left(-\frac{\cos i_2 \cos i_1}{\cos t_2 \cos t_1} \right) \quad (22)$$

em que todos os argumentos das funções coseno dependem de i_1 . obtém-se 4 parcelas que são:

$$\frac{\cos i_1}{\cos t_2 \cos t_1} \frac{d}{di_1} \cos i_2 = \frac{\cos i_1}{\cos t_2 \cos t_1} (-\sin i_2) \frac{di_2}{di_1} \quad (23)$$

$$\frac{\cos i_2}{\cos t_2 \cos t_1} \frac{d}{di_1} \cos i_1 = \frac{\cos i_2}{\cos t_2 \cos t_1} (-\sin i_1) \quad (24)$$

$$\frac{\cos i_2 \cos i_1}{\cos t_1} \frac{d}{di_1} (\cos t_2)^{-1} = \frac{\cos i_2 \cos i_1}{\cos t_1} \sin t_2 (\cos t_2)^{-2} \frac{dt_2}{di_1} \quad (25)$$

$$\frac{\cos i_2 \cos i_1}{\cos t_2} \frac{d}{di_1} (\cos t_1)^{-1} = \frac{\cos i_2 \cos i_1}{\cos t_2} \sin t_1 (\cos t_1)^{-2} \frac{dt_1}{di_1} \quad (26)$$

Atendendo a (12) e (14) substituídos em (23) e em (25) e a (15) substituído em (26), as 4 parcelas conduzem respetivamente às expressões seguintes que são simplificadas quando se substitui n (10) e se impõem as condições que foram obtidas para o zero de $\frac{d\delta}{di_1}$

$$\frac{\cos i_1}{\cos t_2 \cos t_1} (-\sin i_2) \frac{\cos i_1}{n \cos t_1} = \frac{\sin^2 t \cos i}{\cos^2 t \sin i} \quad (27)$$

$$\dots = -\frac{\sin i}{\cos i} \quad (28)$$

$$\dots = -\frac{\sin i}{\cos i} \quad (29)$$

$$\dots = \frac{\sin^2 t \cos i}{\cos^2 t \sin i} \quad (30)$$

Assim obtém-se

$$\frac{d^2\delta}{di_1^2} = -2 \tan^2 t \frac{1}{\tan i} + 2 \tan i = 2 \tan i \left(1 - \frac{\tan^2 t}{\tan^2 i} \right) \quad (31)$$

Esta expressão é positiva para $\tan^2 t < \tan^2 i$ o que implica $t < i$ ($i, t \leq \pi/2$), ie, para $n > 1$ e é negativa para $n < 1$. No caso do prisma de vidro imerso no ar $n > 1$ e portanto (31) será positiva o que confirma que a condição de estacionariedade corresponde a um mínimo.

Poder de resolução do prisma

A capacidade de observar separadamente dois comprimentos de onda muito próximos está relacionada com a variação do ângulo de desvio δ com o comprimento de onda que se designa por dispersão angular $\frac{d\delta}{d\lambda}$ e que depende do coeficiente de dispersão $\frac{dn}{d\lambda}$ na forma

$$\frac{d\delta}{d\lambda} = \frac{d\delta}{dn} \frac{dn}{d\lambda} \quad (32)$$

Atendendo a (9) $\frac{d\delta}{dn} = \frac{dt_2}{dn}$ (para α e i_1 constantes). Derivando a relação (10) em ordem a n obtém-se

$$\cos t_2 = \frac{dt_2}{dn} = \sin t_2 + n \cos i_2 \frac{di_2}{dn} \quad (33)$$

$$0 = \sin t_1 + n \cos t_1 \frac{dt_1}{dn} \quad (34)$$

Obtém-se assim

$$\frac{d\delta}{dn} = \frac{\sin i_2}{\cos t_2} + \frac{\sin t_1 \cos i_2}{\cos t_2 \cos t_1} = \frac{\sin \alpha}{\cos t_2 \cos t_1} \quad (35)$$

$$\frac{d\delta}{d\lambda} = \frac{dn}{d\lambda} \frac{\sin \alpha}{\cos t_2 \cos t_1} \quad (36)$$

Considerando um feixe paralelo de largura l_1 como se indica na Figura 4, que incide no prisma segundo um ângulo i_1 e que emerge segundo t_2 com largura l_2 , fazendo um percurso máximo no prisma l , pode provar-se (os senos dos ângulos de um triângulo são diretamente proporcionais aos lados opostos) que

$$\frac{\sin \alpha}{l} = \frac{\sin(\pi/2 - t_1)}{AC} \quad (37)$$

e atendendo a que $l_2 = AC \cos t_2$ obtém-se que

$$\frac{d\delta}{d\lambda} = \frac{dn}{d\lambda} \frac{l}{l_2} \quad (38)$$

Assim uma pequena variação de comprimento de onda $\Delta\lambda$ produz uma variação do ângulo de desvio $\Delta\delta$ tal que

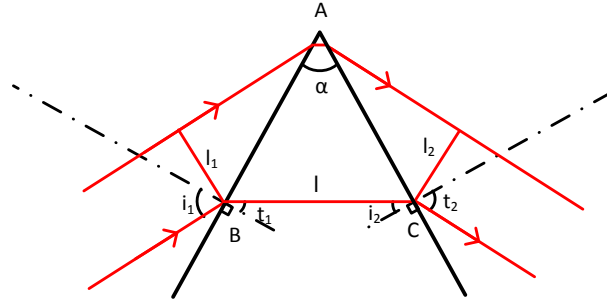


Figura 4: Trajeto de um feixe luminoso paralelo num prisma.

$$\Delta\delta = \frac{dn}{d\lambda} \frac{l}{l_2} \Delta\lambda \quad (39)$$

O critério de Rayleigh para que dois comprimentos de onda estejam resolvidos, ie possam ser detetados separadamente, é que o máximo de intensidade (de ordem $n \geq 1$) de um deles coincida com o mínimo de intensidade do outro (Figura 5)

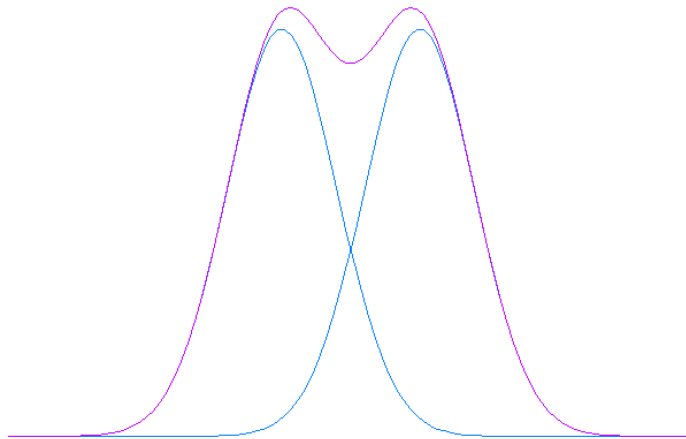


Figura 5: Critério de Rayleigh da resolução de duas riscas espectrais (a vermelho a soma da intensidade das riscas).

Pelas leis de Difração o primeiro mínimo de intensidade da figura de difração de uma fenda de largura l_2 dista angularmente do máximo principal de: $\sin \theta = \lambda/l_2$. Para dois comprimentos de onda muito próximos, $\sin \theta \approx \theta$, que neste caso é o desvio angular $\Delta\delta$. Assim $\Delta\delta = \lambda/l_2$ e obtém-se para a resolução do prisma:

$$R_\lambda = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = l \left(\frac{dn}{d\lambda} \right)_\lambda \quad (40)$$