
DISPERSÃO DA LUZ POR UM PRISMA

Índice de refração, poder dispersivo e poder de resolução do vidro pelo método do desvio mínimo

1 Objectivo do trabalho

Com este trabalho pretende-se efetuar um estudo da dispersão da luz através de um prisma de vidro. Através do conceito de ângulo de desvio mínimo, será determinada a variação do índice de refração do prisma com o comprimento de onda. Uma vez conhecido o índice de refração, serão calculadas duas grandezas associadas, o poder dispersivo e o poder de resolução.



Figura 1: A famosa capa do LP “Dark Side of the Moon” dos Pink Floyd de 1973 ilustra o fenómeno de dispersão pelo prisma, que foi inicialmente analisado por Newton.

2 Princípio do método

Um prisma de um meio transparente, homogéneo e isotrópico de índice de refração n , quando colocado no percurso de um feixe luminoso incidente produz um desvio angular δ no feixe emergente que depende do ângulo de incidência, i_1 . Pode provar-se que a função desvio angular *vs* comprimento de onda λ apresenta um ponto de estacionariedade (i.e.,

derivada nula) que é um mínimo se $n > 1$.¹ Mostra-se também que, nessa situação, as direções dos dois feixes são igualmente inclinadas em relação às faces do prisma, i.e. o ângulo de incidência i_1 é igual ao ângulo de transmissão emergente t_2 (Figura 2). Nesse caso, o índice de refração, n , pode ser calculado² simplesmente através da expressão seguinte:

$$n = \frac{\sin\left(\frac{\alpha + \delta_{min}}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \quad (1)$$

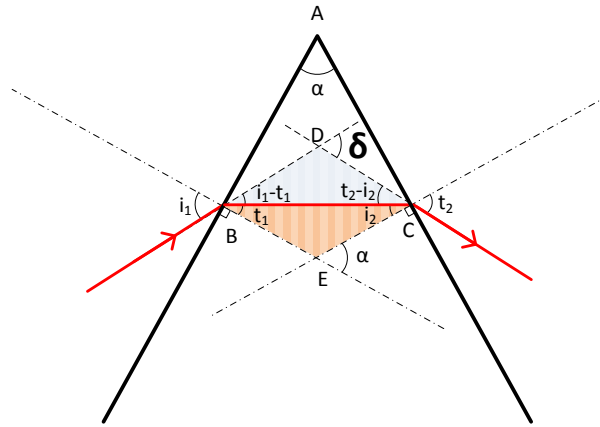


Figura 2: Esquema da transmissão do feixe incidente num prisma colocado na plataforma do goniómetro de Babinet. A direção do feixe transmitido desvia-se do ângulo δ em relação ao feixe incidente.

em que α e δ_{min} são o ângulo do vértice do prisma e o ângulo de desvio mínimo referido, respetivamente. Este desvio mínimo depende do comprimento de onda da radiação incidente, λ , em virtude de n depender de λ .

2.1 Poder dispersivo e poder de resolução

Define-se *poder dispersivo* dum material como a derivada de n em ordem a λ , e escreve-se como $\left(\frac{dn}{d\lambda}\right)$. Como esta função não é constante, deve indicar-se o valor do poder dispersivo relativamente a um determinado valor de comprimento de onda incidente, ou $\left(\frac{dn}{d\lambda}\right)_{\lambda_i}$.

O *poder separador* ou *poder de resolução* de um dado instrumento óptico³, definido como $R_\lambda = \frac{\lambda}{\Delta\lambda}$, é a capacidade que este possui de permitir que se observem separadamente dois comprimentos de onda muito próximos, afastados de $\Delta\lambda$, na vizinhança de um valor médio $\bar{\lambda}$. Esta grandeza é adimensional e quanto maior for o seu valor, melhor é a resolução do instrumento.

¹Ver Apêndice 2.

²Ver também Apêndice 2.

³*Optical Resolution* em inglês.

No caso do prisma obtém-se a seguinte expressão para ⁴.

$$R_{\lambda} = l \left(\frac{dn}{d\lambda} \right)_{\lambda} \quad (2)$$

em que l é o *maior percurso* do feixe luminoso no interior do prisma.

Uma *rede de difração* permite também observar separadamente dois comprimentos de onda muito próximos. No entanto, para uma rede de difração linear a resolução (além de variar com o comprimento de onda) depende da *ordem de difração*, m

$$R_{\lambda_{difrac}} = m N \quad (3)$$

sendo N o número de linhas da rede *iluminadas* pelo feixe.

3 A experiência

3.1 Equipamento

1. Goniómetro de Babinet.
2. Prisma triangular de vidro.
3. Lâmpada espectral de Mercúrio ou Hélio.

No Trabalho anterior colocou-se o prisma na plataforma de modo a poderem observar-se as reflexões nas duas faces polidas (Fig. 3). As direções dos raios refletidos fazem um ângulo θ , que se mediu com o goniómetro e que é o dobro do ângulo principal do prisma α .⁵ Determinou-se assim facilmente o ângulo do prisma com uma precisão e exatidão muito melhores do que com um transferidor, por exemplo.

À partida podia determinar-se o ângulo δ_{min} medindo com a objectiva a direção do raio incidente (sem prisma) e a direção do raio emergente que corresponda ao desvio mínimo (Figura 2). No entanto, para compensar as eventuais assimetrias do aparelho devem fazer-se observações para os desvios à esquerda e à direita. Neste caso é fácil provar que o ângulo formado entre os dois raios emergentes (para a mesma cor) é o dobro do ângulo de desvio, δ_{min} (não sendo necessário determinar a direção do raio incidente, i_1).

O prisma que se usa é em geral de secção reta triangular (equilátero ou isósceles). A lâmpada espectral é uma fonte de luz policromática que contém dois elétrodos situados no interior de um invólucro (vidro em geral) onde existe uma substância “ativa”⁶ em muito pequena quantidade, numa atmosfera rarefeita. A alimentação, em geral é de alta tensão, produz entre os elétrodos uma descarga que vaporiza, excita e ioniza a substância ativa. As diferentes excitações permitem transições radiativas que dão origem à emissão de um feixe constituído por diferentes comprimentos de onda bem definidos e que se encontram muito bem identificados na literatura.⁷

⁴Ver derivação no Apêndice 3

⁵Ver Apêndice 1.

⁶Que dá o nome à lâmpada, e.g. Mercúrio, Hélio, Néon, etc.

⁷Pode consultar a extensa base de dados online em [NIST Atomic Spectra Database](https://physics.nist.gov/PhysRefData/ASD/).

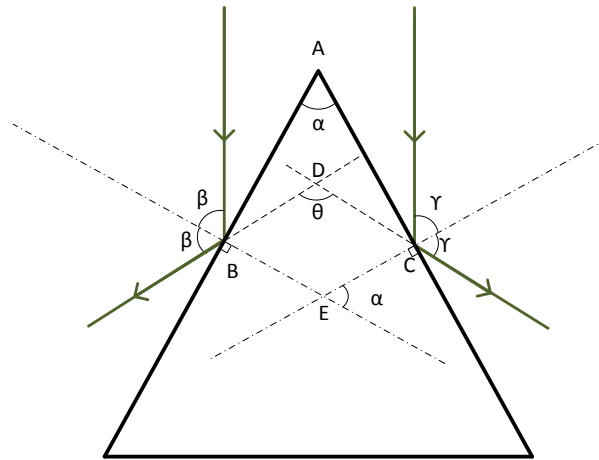


Figura 3: Esquema da reflexão do feixe incidente num prisma colocado na plataforma do goniómetro de Babinet. As direções dos dois raios refletidos fazem entre si um ângulo θ que é o dobro do ângulo α do prisma.

Todas as lâmpadas espectrais emitem no ultravioleta que é nocivo para a pele e para os olhos dos observadores, mas o vidro no interior do qual se dá a descarga absorve a maior parte destas radiações perigosas. Para ainda reduzir os riscos, a lâmpada tem um invólucro, em geral metálico, apenas com uma abertura para permitir iluminar uma fenda estreita e regulável junto à luneta do goniómetro, que produz uma linha vertical na imagem. A aresta do triângulo definido pelas superfícies planas onde se produz a reflexão e/ou transmissão deve ficar paralela a esta fenda.

4 Protocolo Experimental

1. Ligue a lâmpada espectral e espere 10 a 15 minutos até que se estabeleça o equilíbrio térmico no seu interior.
2. Enquanto espera comece por regular a ótica do goniómetro tal como descrito no Guia do Trabalho anterior.
3. Verifique o nivelamento horizontal do goniómetro e da plataforma onde vai colocar o prisma com a ajuda de um nível de bolha.
4. Utilize o valor do ângulo α entre as faces polidas do prisma obtido no trabalho anterior.
5. Observe agora a transmissão das várias cores através do prisma com o feixe incidente numa das faces, na posição da Figura 2. Se o instrumento estiver bem focado deve observar uma série de imagens coloridas da mesma fenda isoladas (riscas), uma por cada comprimento de onda λ .
6. Escolha duas dessas cores bem afastadas. Rodando o prisma obtenha um conjunto de valores que permita fazer um gráfico dos ângulos de desvio, $\delta(i_1)$, em função do ângulo de incidência, i_1 e um ajuste polinomial (Nesta fase não precisa de utilizar o



Figura 4: Fotografia do goniómetro de Babinet utilizado na experiência.

- nónio da escala de minutos). Pelo gráfico verifique que existe de facto um mínimo no ângulo de desvio, $\delta(i_{min})$, mas que este e o ângulo i_{min} são diferentes para cada cor.
7. Em seguida, para medir o desvio mínimo, *para cada risca*, tem primeiro de colocar o prisma na posição apropriada. Deve portanto olhar pela objectiva e, fixando a risca, rodar o prisma até observar que o desvio é mínimo. De seguida, com o parafuso micrométrico associado à luneta, centrar a imagem da fenda no retículo e meça o ângulo $\delta_{min(esq)}(\lambda)$. Comece por usar todas as cores quando o prisma desvia para o lado esquerdo (cada elemento do grupo deve efectuar as suas medidas).
 8. Repita o ponto anterior, mas para o prisma a desviar o feixe para o lado direito. Calcule os desvio mínimos:

$$\delta_{min}(\lambda) = \frac{|\delta_{esq} - \delta_{dir}|}{2}$$

9. Com os desvio mínimos, e identificando nas tabelas os valores dos comprimentos de onda das riscas visíveis, calcule o índice de refração a partir da Eq. 1 e represente graficamente a função $n(\lambda)$. Ajuste uma curva polinomial aos pontos obtidos. Através da estimativa da derivada desta função, calcule o poder dispersivo do vidro para o comprimento de onda médio das duas riscas amarelas do sódio ($\bar{\lambda}_{amarel} \approx 589 \text{ nm}$).
10. Faça uma estimativa da maior distância percorrida pelo feixe luminoso no prisma, l , (que é aproximadamente o comprimento da aresta) e calcule o Poder de Resolução do prisma para o comprimento de onda $\bar{\lambda}_{amarel}$ referido no ponto anterior.
11. Substitua no centro da plataforma do goniómetro o prisma por uma rede de difração de 600 linhas por milímetro. Compare a separação angular, $\Delta\delta_{rede}$, das duas riscas mais próximas observadas com a rede com a que obteve, para as mesmas riscas, usando o prisma. Comente, utilizando a expressão (3).

Apêndices

A1. Ângulo do Prisma

Vamos demonstrar que o ângulo θ entre as direções dos dois feixes reflectidos é o dobro do ângulo do vértice do prisma α . Considere-se a incidência nas condições da Figura 3. A figura plana quadrangular $ABEC$ tem dois ângulos retos: ABE e ECA . Assim o ângulo CAB , α , é suplementar do ângulo BEC , e portanto o ângulo externo em E (assinalado na figura) tem o mesmo valor do ângulo do prisma. Na figura plana quadrangular $DBEC$ está definido um ângulo θ que é o ângulo formado pelas direções dos raios reflectidos na face AB e AC . Entre este ângulo e os ângulos de incidência β e γ existe a relação

$$2\beta + 2\gamma + \theta = 2\pi \quad (4)$$

e entre os ângulos de $DBEC$

$$\beta + \gamma + \theta + \pi - \alpha = 2\pi \quad (5)$$

O sistema destas duas equações permite obter

$$\alpha = \theta/2 \quad (6)$$

A2. Desvio mínimo

Iremos demonstrar que (i) o feixe para o qual o desvio é mínimo atravessa o prisma simetricamente (isto é, paralelamente à sua base) e (ii) essa configuração corresponde de facto a um mínimo do desvio.

Supondo um prisma que tem um índice de refração n em relação ao meio em que está imerso, na configuração da Figura 2, os feixes que são transmitidos através do mesmo sofrem um desvio $\delta(\lambda)$. Os ângulos α e de desvio δ são exteriores respetivamente aos triângulos BCD (em D) e BEC (em E), e portanto temos

$$\delta = (i_1 - t_1) + (t_2 - i_2) \quad (7)$$

$$\alpha = t_1 + i_2 \quad (8)$$

o que permite obter a seguinte relação fundamental

$$\delta = i_1 + t_2 - \alpha \quad (9)$$

Por outro lado, estes ângulos satisfazem a lei de Snell-Descartes da refração (para o feixe de entrada e para o de saída)

$$n = \frac{\sin i_1}{\sin t_1} = \frac{\sin t_2}{\sin i_2} \quad (10)$$

No caso geral o ângulo δ depende do ângulo de incidência i_1 e pode provar-se que a função envolvida tem uma estacionariedade. Para encontrar o *desvio mínimo* δ_{min} , comecemos então por calcular a derivada de δ em relação ao ângulo de incidência i_1 (expressão 9).

$$\frac{d\delta}{di_1} = 1 + \frac{dt_2}{di_1} \quad (11)$$

Obtendo $\sin i_1$ e $\sin t_2$ da relação (10) e calculando também as suas derivadas em ordem a i_1 obtemos as duas igualdades

$$\cos i_1 = n \cos t_1 \cdot \frac{dt_1}{di_1} \quad (12)$$

$$\cos t_2 \cdot \frac{dt_2}{di_1} = n \cos i_2 \cdot \frac{di_2}{di_1} \quad (13)$$

Atendendo à relação (8) temos também para a sua derivada

$$\frac{dt_1}{di_1} = -\frac{di_2}{di_1} \quad (14)$$

e combinando (12), (13) e (14) obtém-se

$$\frac{dt_2}{di_1} = -\frac{\cos i_2 \cos i_1}{\cos t_2 \cos t_1} \quad (15)$$

e a relação (11) vem

$$\frac{d\delta}{di_1} = 1 - \frac{\cos i_2 \cos i_1}{\cos t_2 \cos t_1} \quad (16)$$

Esta função admite um zero para a seguinte condição:

$$\cos i_2 \cos i_1 = \cos t_2 \cos t_1 \quad (17)$$

Atendendo a (10) e à relação entre coseno e seno obtém-se (após alguns cálculos, aqui abreviados)

$$\sin^2 t_1 \cdot (1 - n^2) = \sin^2 i_2 \cdot (1 - n^2) \quad (18)$$

que para os ângulos considerados ($\leq \pi/2$) e para $n \neq 1$ implica que no ponto de estacionariedade de δ se verificam as seguintes condições de simetria:

$$i_1 = t_2 = i \quad (19)$$

$$t_1 = i_2 = t \quad (20)$$

Ou seja: o ângulo de incidência i_1 é igual ao ângulo de saída do prisma t_2 , e os ângulos de refração interna t_1 e i_2 são iguais. Isto implica que o feixe se propaga paralelamente à base do prisma. Obtém-se assim a seguinte expressão para o ângulo de desvio mínimo

$$\delta_{min} = 2i - 2t = 2i - \alpha \quad (21)$$

o que permite calcular t a partir do ângulo do prisma ($t = \alpha/2$) e i a partir do ângulo de desvio mínimo e do ângulo do prisma ($i = (\alpha + \delta_{min})/2$) e consequentemente obter a relação (1) para o cálculo do índice de refração:

$$\sin i = n \sin t \rightarrow n = \frac{\sin(\frac{\alpha + \delta_{min}}{2})}{\sin(\alpha/2)} \quad (22)$$

Vamos agora provar que este ponto de estacionariedade é efectivamente um mínimo. Para isso, é necessário calcular $\frac{d^2\delta}{di^2} = 0$ e verificar que é uma quantidade positiva para os valores que anulam a primeira derivada. Aplicando derivada em ordem a i_1 à expressão (16) obtém-se

$$\frac{d^2\delta}{di_1^2} = \frac{d}{di_1} \left(-\frac{\cos i_2 \cos i_1}{\cos t_2 \cos t_1} \right) \quad (23)$$

em que todos os argumentos das funções coseno dependem de i_1 . Obtém-se quatro parcelas, que são:

$$\frac{\cos i_1}{\cos t_2 \cos t_1} \frac{d}{di_1} \cos i_2 = \frac{\cos i_1}{\cos t_2 \cos t_1} (-\sin i_2) \frac{di_2}{di_1} \quad (24)$$

$$\frac{\cos i_2}{\cos t_2 \cos t_1} \frac{d}{di_1} \cos i_1 = \frac{\cos i_2}{\cos t_2 \cos t_1} (-\sin i_1) \quad (25)$$

$$\frac{\cos i_2 \cos i_1}{\cos t_1} \frac{d}{di_1} (\cos t_2)^{-1} = \frac{\cos i_2 \cos i_1}{\cos t_1} \sin t_2 (\cos t_2)^{-2} \frac{dt_2}{di_1} \quad (26)$$

$$\frac{\cos i_2 \cos i_1}{\cos t_2} \frac{d}{di_1} (\cos t_1)^{-1} = \frac{\cos i_2 \cos i_1}{\cos t_2} \sin t_1 (\cos t_1)^{-2} \frac{dt_1}{di_1} \quad (27)$$

Atendendo a (12) e (14) substituídos em (24) e em (26) e a (15) substituído em (27), as quatro parcelas conduzem respetivamente às expressões seguintes que são simplificadas quando se substitui n (10) e se impõem as condições que foram obtidas para o zero de $\frac{d\delta}{di_1}$

$$\frac{\cos i_1}{\cos t_2 \cos t_1} (-\sin i_2) \frac{\cos i_1}{n \cos t_1} = \frac{\sin^2 t \cos i}{\cos^2 t \sin i} \quad (28)$$

$$\dots = -\frac{\sin i}{\cos i} \quad (29)$$

$$\dots = -\frac{\sin i}{\cos i} \quad (30)$$

$$\dots = \frac{\sin^2 t \cos i}{\cos^2 t \sin i} \quad (31)$$

Assim obtém-se

$$\frac{d^2\delta}{di_1^2} = -2 \tan^2 t \frac{1}{\tan i} + 2 \tan i = 2 \tan i \left(1 - \frac{\tan^2 t}{\tan^2 i} \right) \quad (32)$$

Esta expressão é positiva para $\tan^2 t < \tan^2 i$ o que implica $t < i$ ($i, t \leq \pi/2$), i.e. para $n > 1$, e é negativa para $n < 1$. No caso do prisma de vidro imerso no ar tem-se $n > 1$ e portanto a expressão (32) será positiva, o que confirma que a condição de estacionariedade corresponde a um mínimo.

A3. Poder de resolução do prisma

Vamos determinar uma expressão geral para o poder de resolução de um prisma. A capacidade de observar separadamente dois comprimentos de onda muito próximos está relacionada com a variação do ângulo de desvio δ com o comprimento de onda λ , que se designa por *dispersão angular* $\frac{d\delta}{d\lambda}$ e que depende do coeficiente de dispersão $\frac{dn}{d\lambda}$ na forma

$$\frac{d\delta}{d\lambda} = \frac{d\delta}{dn} \frac{dn}{d\lambda} \quad (33)$$

Atendendo a (9) $\frac{d\delta}{dn} = \frac{dt_2}{dn}$ (para α e i_1 constantes). Considere-se de novo a lei de Snell-Descartes para os feixes de entrada e de saída, Eq. (10). Derivando ambas as relações em ordem a n obtém-se

$$\cos t_2 \cdot \frac{dt_2}{dn} = \sin t_2 + n \cos i_2 \frac{di_2}{dn} \quad (34)$$

$$0 = \sin t_1 + n \cos t_1 \frac{dt_1}{dn} \quad (35)$$

Podemos usar ambas as igualdades para eliminar n . Além disso, da expressão (8) sabemos que, em geral, $\alpha = t_1 + i_2$ e portanto $\frac{dt_1}{dn} = -\frac{di_2}{dn}$. Obtém-se assim após simplificação

$$\frac{d\delta}{dn} = \frac{\sin i_2}{\cos t_2} + \frac{\sin t_1 \cos i_2}{\cos t_2 \cos t_1} = \frac{\sin \alpha}{\cos t_2 \cos t_1} \quad (36)$$

$$\frac{d\delta}{d\lambda} = \frac{dn}{d\lambda} \frac{\sin \alpha}{\cos t_2 \cos t_1} \quad (37)$$

onde foi usada a propriedade $\sin \alpha = \sin(t_1 + i_2) = \sin t_1 \cos i_2 + \cos t_1 \sin i_2$. Considerando um feixe paralelo de largura l_1 como se indica na Figura 5, que incide no prisma segundo um ângulo i_1 e que emerge segundo t_2 com largura l_2 , fazendo um percurso máximo no prisma l , pode provar-se (os senos dos ângulos de um triângulo são diretamente proporcionais aos lados opostos) que

$$\frac{\sin \alpha}{l} = \frac{\sin(\pi/2 - t_1)}{AC} = \frac{\cos t_1}{AC} \quad (38)$$

e atendendo a que $l_2 = AC \cos t_2$, a Eq. (37) pode ser simplificada para

$$\frac{d\delta}{d\lambda} = \frac{dn}{d\lambda} \frac{l}{l_2} \quad (39)$$

Assim, uma pequena variação de comprimento de onda $\Delta\lambda$ produz uma variação do ângulo de desvio $\Delta\delta$ tal que

$$\Delta\delta = \frac{dn}{d\lambda} \frac{l}{l_2} \Delta\lambda \quad (40)$$

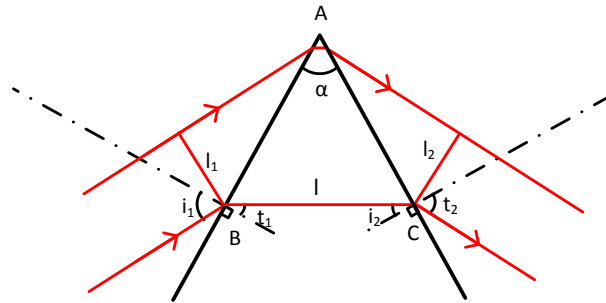


Figura 5: Trajeto de um feixe luminoso paralelo num prisma.

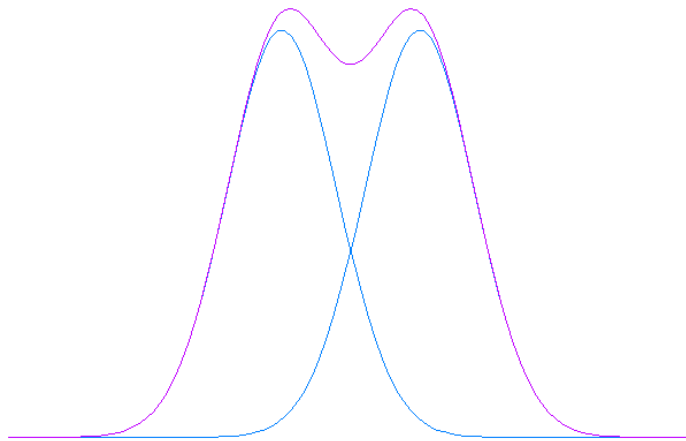


Figura 6: Critério de Rayleigh da resolução de duas riscas espectrais (a vermelho a soma da intensidade das riscas).

O critério de Rayleigh para que dois comprimentos de onda estejam resolvidos, i.e. possam ser detectados separadamente, é que o máximo de intensidade (de ordem $n \geq 1$) de um deles coincida com o mínimo de intensidade do outro (Figura 6)

Pelas leis de difração, o primeiro mínimo de intensidade da figura de difração de uma fenda de largura l_2 dista angularmente do máximo principal de: $\sin \theta = \lambda/l_2$. Para dois comprimentos de onda muito próximos, $\sin \theta \approx \theta$, que neste caso é o desvio angular $\Delta\delta$. Assim $\Delta\delta = \lambda/l_2$ e obtém-se para a resolução do prisma:

$$R_\lambda = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = l \left(\frac{dn}{d\lambda} \right)_\lambda \quad (41)$$

Bibliografia

Óptica (2.^a ed.), Eugene Hecht, Fund. Calouste Gulbenkian, 2002.