TÉCNICO LISBOA

Pêndulo gravítico

Determinação do período do pêndulo simples e aferição do valor da aceleração da gravidade local g

1 Objectivo

Pretende-se com este trabalho determinar o período de oscilação de um pêndulo simples, constituído por um fio e uma massa, para diferentes comprimentos do fio. A partir destes valores é possível determinar o valor da aceleração da gravidade local g.

Este tipo de pêndulos foi estudado extensivamente por Galileu Galilei (1564-1642), no início do séc. XVIII. Galileu foi o primeiro a constatar a propriedade de isocronismo do pêndulo: para pequenas amplitudes de oscilação, o período é independente da amplitude do movimento. Também descobriu que o período não depende do valor da massa, e é proporcional à raiz quadrada do comprimento do fio. Estas propriedades vieram a permitir a utilização do pêndulo como instrumentos para medição de intervalos de tempo: os relógios de pêndulo.

2 Movimento Harmónico Simples

O pêndulo gravítico é um exemplo simples de um importante modelo matemático, o "Oscilador Harmónico" (OH), de vastíssima utilização em quase todos o ramos da Física, bem como muitas áreas de Engenharia. Neste modelo, um sistema físico arbitrário encontra-se na vizinhança de uma posição de equilíbrio, onde há um mínimo (local ou absoluto) da sua energia potencial (E_P), de origem gravítica, elástica, eletrostática ou outra. Este sistema apresenta as seguintes características (ver Figura 1):

1. Ao distanciar-se deste mínimo, por uma perturbação ou outra qualquer força

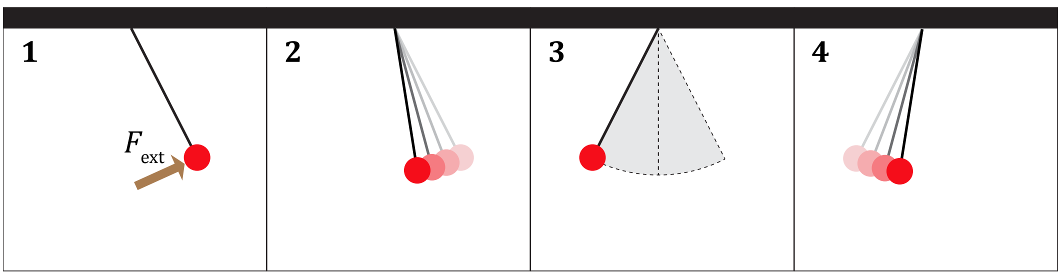

Figura 1: Movimento de um pêndulo gravítico.

externa inicial, surge uma força de índole conservativa, sempre direcionada de forma a repor o equilíbrio.

2. Quando as forças exteriores deixam de actuar, o sistema adquire movimento, transferindo-se a energia potencial para energia cinética (E_C).

3. Ao retomar a posição de equilíbrio, o movimento prossegue por inércia até se alcançar um novo máximo, normalmente simétrico ao ponto inicial.

4. Na ausência de atrito, o sistema regressa ao ponto de partida e o ciclo repete-se infinitamente, com período T_0 constante ("Oscilador Livre"). Contudo, na presença de forças dissipativas a energia total deixa de ser constante e irá dissipar-se, diminuindo a amplitude do movimento, até desaparecer ("Oscilador Amortecido").

2.1 Sistema massa-mola

Antes de analisarmos o pêndulo gravítico, vamos considerar o modelo de OH mecânico mais simples, que consiste num sistema de uma massa m que se move na horizontal e sem atrito, presa a uma mola de constante elástica k_{mola} que é fixada na sua outra extremidade a um ponto fixo (Figura 2).

Pretendemos determinar a função $x(t)$ que descreve o movimento da massa nestas condições. Caso a massa se desloque da posição de equilíbrio ($x = x_0$), a energia potencial elástica aumenta e mola irá exercer uma força de sentido contrário ao do deslocamento $\Delta x \equiv x - x_0$. Por simplicidade faz-se $x_0 = 0$, e portanto $x = \Delta x$. No modelo ideal da mola *linear* a força é sempre proporcional ao deslocamento x:

$$F_{mola} = -k_{mola}\, x \tag{1}$$

A partir da segunda equação de Newton, $F = ma$, e sabendo que $a = \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$, é possível chegar facilmente à equação de movimento do sistema massa-mola (equação diferencial de 2.º grau),

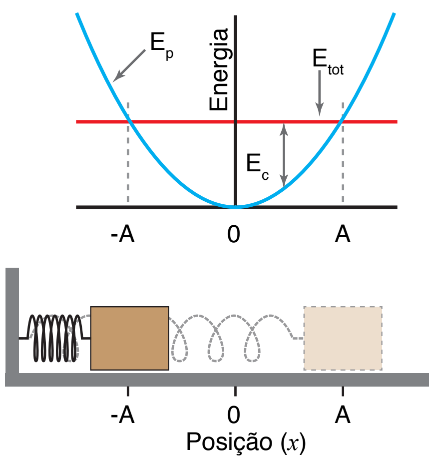

Figura 2: Oscilador Harmónico Simples *massa-mola*.

$$ma = -k_{mola} x \Leftrightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k_{mola}}{m} x = 0 \tag{2}$$

Pode-se verificar após alguma álgebra[1] que a seguinte função temporal periódica é solução da equação (2):

$$x(t) = c_1 \cos(\omega_0\, t) + c_2 \sin(\omega_0\, t) = A_0 \sin(\omega_0\, t + \phi_0), \text{ com } \omega_0 = \sqrt{\frac{k_{mola}}{m}} \tag{3}$$

em que A_0 é a amplitude e ϕ_0 é a fase, ambas constantes e dependentes da condições (a posição e a velocidade) iniciais. Finalmente ω_0 é a frequência angular de ressonância, inversamente proporcional ao período, o qual depende apenas da massa m e de k_{mola}:

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k_{mola}}} \tag{4}$$

Assim, a solução para a posição $x(t)$ é uma função sinusoidal (harmónica). Uma vez que a velocidade $v(t)$ é a derivada temporal da posição, também será uma função sinusoidal, com um desfasamento de $\pi/2$ em relação a $x(t)$.

2.2 Pêndulo gravítico

O pêndulo gravítico consiste na sua forma idealizada numa massa pontual suspensa[2] a partir de um fio inextensível, de comprimento l fixo e de massa desprezável, que pode rodar de um ângulo θ em torno de um ponto (o eixo, ou pivô). Quando a massa se desvia da posição central $\theta = 0$, a força gravítica aplicada (o seu peso $F_g = m\,g$) adquire uma componente F_θ na direcção de movimento (tangente à trajectória circular) e que tende a restabelecer o equilíbrio (Figura 3).

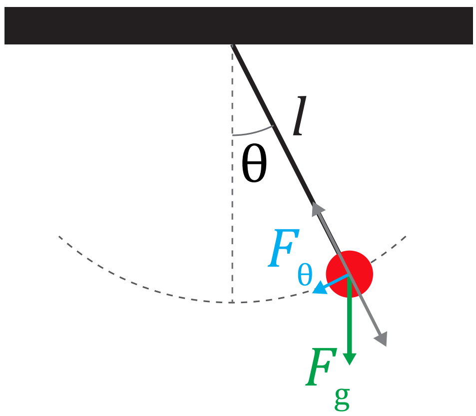

Figura 3: Força de gravidade F_g no pêndulo gravítico e a sua projecção F_θ na direcção de movimento.

[1] Consultar *Notas de apoio às aulas teóricas*

[2] No Latim *pendulus*

Se a posição do pêndulo for descrita pela coordenada $s = l{\cdot}\theta$ ao longo da sua trajectória, então a força restauradora é

$$F_\theta = -F_g \sin(\theta) = -mg\sin(\theta) \tag{5}$$

e a equação diferencial de movimento para a posição s resulta em

$$\begin{aligned} a &= \frac{d^2s}{dt^2} = l\,\frac{d^2\theta}{dt^2} \\ ma &= F_\theta \Leftrightarrow m\,l\,\frac{d^2\theta}{dt^2} = -m\,g\,\sin(\theta) \\ &\Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin(\theta) = 0 \end{aligned} \tag{6}$$

Esta equação não tem uma resolução analítica simples, mas através do método da *linearização* (o "canivete suíço" dos físicos), utiliza-se a aproximação $\sin(\theta) \simeq \theta$, válida para $\theta_0 \leq 0.08\,\mathrm{rad}$ (aqui os ângulos têm de ser medido em radianos![3]). Com esta aproximação ficamos com

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0 \tag{7}$$

cuja solução matemática é exacta e semelhante à expressão (3),

$$\theta(t) = \theta_0 \sin(\omega_0\,t + \phi_0),\ \text{com}\ \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}. \tag{8}$$

O que é interessante neste modelo é que o efeito da *massa gravítica* anula o da *massa inercial* e o período do pêndulo T_0 fica a depender apenas do comprimento l e do valor da aceleração da gravidade g local:[4]

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad ,\ \text{para}\ \theta_0 \ll 1. \tag{9}$$

A equação (9) representa precisamente a dependência entre o período e o comprimento do pêndulo deduzida por Galileu. A partir dessa época, estes dispositivos foram sistematicamente utilizados para medir o tempo (e consequentemente a latitude), sendo a base de quase todos os relógios de precisão até meados do século passado, com maior ou menor complexidade. Actualmente apenas os relógios decorativos ou de luxo usam variações do pêndulo[5].

2.2.1 A influência do atrito

Até aqui, desprezámos o atrito do ar no movimento do pêndulo. Ao introduzir esta contribuição, na aproximação de atrito cinético proporcional à velocidade, a equação (7) muda para

[3] Por exemplo: $\sin(5°) = \sin(0.08726...\,\mathrm{rad}) = 0.08715...$

[4] À superfície da Terra e à latitude de Lisboa: $g \approx 9.800\,\mathrm{ms^{-2}}$. Consultar também o Projecto "Pêndulo Mundial", baseado no e-lab do IST: http://www.elab.ist.utl.pt/

[5] Mas ainda são úteis para se fazer ciência: Ver por exemplo a revista *Nature* de Julho de 2015, http://www.nature.com/articles/srep11548

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \lambda \frac{1}{m}\frac{d\theta}{dt} + \frac{g}{l}\theta = 0 \quad (\lambda = \text{Coeficiente de atrito viscoso}) \tag{10}$$

O primeiro efeito, que se pode verificar no laboratório, é na amplitude do movimento θ_0: já não será uma constante, mas irá diminuir inexoravelmente com o tempo.

O segundo efeito, muito mais difícil de observar, é que existe uma muito pequena alteração no período, que tem agora o valor

$$T_1 = T_0/\sqrt{1-\zeta^2}, \quad \text{onde } \zeta = \frac{\lambda}{2\,m}\sqrt{\frac{l}{g}}. \tag{11}$$

O factor ζ também se pode relacionar com o factor de amortecimento[6] Q:

$$Q = 2\pi \times \frac{\text{Energia do Pêndulo}}{\text{Energia perdida num ciclo}} \tag{12}$$

Nota final: A resolução analítica (infelizmente bastante complexa) da Equação (6) tem como solução para o período uma série infinita de potências de θ_0:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{1}{16}\theta_0^2 + \frac{11}{3072}\theta_0^4 + \frac{737280}{3072}\theta_0^6 + \frac{22931}{1321205760}\theta_0^8 + \cdots\right) \tag{13}$$

Naturalmente, verifica-se imediatamente que na aproximação $\theta_0 \ll 1$ a Equação 9 continua válida.

[6]Em engenharia é designado por Factor de Qualidade

3 Procedimento Experimental

Material

• Suporte do pêndulo
• Massas esféricas de chumbo, linha (quase) inextensível de nylon e com massa desprezável
• Régua graduada, cronómetro, fita métrica, transferidor, balança

1. Comece a sessão de laboratório estimando a precisão que obtém na medição do tempo com o cronómetro, tendo em conta o tempo de reacção do corpo humano. Com a ajuda de um colega e de uma régua graduada, obtenha 15 medidas da distância de queda da régua.

2. A partir da média das distâncias $\overline{D}$ e do respectivo desvio padrão obtenha[7] o seu tempo de reacção $\overline{t}$ e a respectiva incerteza $e_{\overline{t}}$.

3. Repita para cada um dos demais elementos do grupo e preencha uma tabela semelhante à ilustrada.

Ensaio #	D_A - Distância de queda (cm)	D_B - Distância de queda (cm)	D_C - Distância de queda (cm)
1			
2			
...			
15			
Média $\overline{D}$ (m)			
Desvio padrão (m)			
Erro da média $e_{\overline{D}}$ (m)			
Tempo de reacção $\overline{t} \pm e_{\overline{t}}$ (s)	$\pm$	$\pm$	$\pm$

4. Monte o sistema de pêndulo gravítico e obtenha o período para diversos comprimentos do fio.

5. Obtenha o valor de g_{exp} para estes ensaios, usando a expressão (9), bem como a respectiva incerteza experimental.

6. Compare o valor final de g_{exp} obtido com o valor tabelado g_{tab} e estime o desvio à exactidão que obteve.

[7]Considere $\overline{t} = \sqrt{\frac{2\overline{D}}{g}}$ e $e_{\overline{t}} = \sqrt{\frac{2}{g}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\overline{D}}} \cdot e_{\overline{D}} = \overline{t} \cdot \frac{1}{2\overline{D}} \cdot e_{\overline{D}}$

3.1 Aspectos a ter em conta:

• Uma massa pendurada num fio tem mais que o grau de liberdade em θ. Tente assegurar-se de que o pêndulo oscila apenas ao longo de um plano.
• Tente minimizar o efeitos de paralaxe na determinação dos ângulos.
• Naturalmente, a massa utilizada não é pontual. Quais os erros sistemático e aleatório na medida do comprimento l?
• Como pode minimizar a incerteza da medição do período? Medindo o tempo num ou em vários ciclos?

3.2 Actividades adicionais (se houver tempo):

• Verifique experimentalmente que o período do pêndulo não depende do valor da massa.
• Verifique experimentalmente que para grandes ângulos iniciais, o período do pêndulo varia. Aumenta ou diminui?
• Tente estimar a energia que se perde em cada ciclo (em percentagem) devido ao atrito.
• Qual o comprimento do fio para construir um relógio pendular com período de 1 s? E se fosse na superfície da Lua? ($M_{Lua} = 0,0123 M_{Terra}, R_{Lua} = 0,273 R_{Terra}$)
• Utilize o equipamento digital de detecção da passagem da massa para medir o período do pêndulo (para um comprimento apenas), e compare com os valores obtidos manualmente.