



DISPERSÃO DA LUZ POR UM PRISMA.

Índice de Refração, Poder Dispersivo e Poder de Resolução do Vidro pelo método do Desvio Mínimo.

1 Princípio do método

Um prisma de um meio transparente, homogêneo e isotrópico de índice de refração, n , colocado no percurso de um feixe luminoso incidente produz um desvio angular, δ , no feixe emergente que depende do ângulo de incidência, i_1 . Pode provar-se que a função desvio angular δ apresenta um ponto de estacionariedade (i.e., derivada nula) que é um mínimo se $n > 1$. Mostra-se também que nessa situação as direções dos dois feixes são igualmente inclinadas em relação às faces do prisma, i.e. o ângulo de incidência, i_1 , é igual ao ângulo de transmissão emergente, t_2 (Figura 2). Nesse caso o índice de refração, n , pode ser calculado (ver Apêndice) simplesmente através da expressão seguinte:

$$n = \frac{\sin\left(\frac{\alpha + \delta_{min}}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \quad (1)$$



Figura 1: A famosa capa do LP ‘Dark Side of the Moon’ dos Pink Floyd de 1973 ilustra o fenómeno de dispersão pelo prisma, que foi inicialmente analisado por Newton.

em que α e δ_{min} são os ângulos do prisma e o desvio mínimo referido, respetivamente. Este desvio mínimo depende do comprimento de onda da radiação incidente, λ em virtude de n

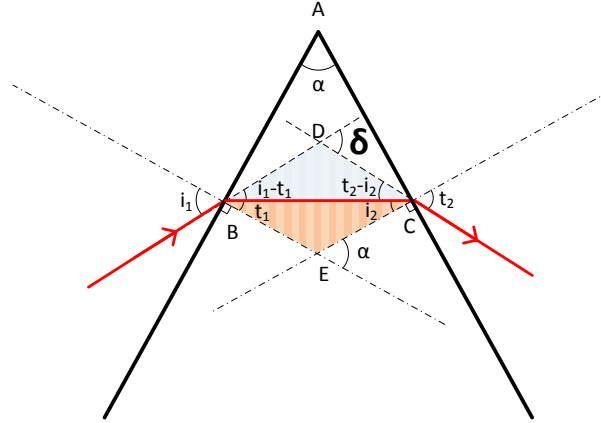


Figura 2: Esquema da transmissão do feixe incidente num prisma colocado na plataforma do goniómetro de Babinet. A direção do feixe transmitido desvia-se do ângulo δ em relação ao feixe incidente.

depende de λ . Define-se *poder dispersivo* dum material como a derivada de n em ordem a λ e escreve-se como $\left(\frac{dn}{d\lambda}\right)$. Como esta função não é constante, deve indicar-se o valor do poder dispersivo relativo a um determinado valor de comprimento de onda incidente, ou $\left(\frac{dn}{d\lambda}\right)_{\lambda_i}$.

O poder separador ou poder de resolução de um dado instrumento óptico¹, $R_\lambda = \frac{\lambda}{\Delta\lambda}$, é a capacidade que possui de poder permitir que se observem separadamente dois comprimentos de onda muito próximos, afastados de $\Delta\lambda$, na vizinhança de um valor médio $\bar{\lambda}$. Esta grandeza é adimensional e quanto maior for o seu valor, melhor é a resolução do instrumento.

No caso do prisma obtém-se R com a seguinte expressão (ver Apêndice).

$$R_\lambda = l \left(\frac{dn}{d\lambda} \right)_\lambda \quad (2)$$

em que l é o *maior percurso* do feixe luminoso no interior do prisma.

Uma *rede de difração* permite também observar separadamente dois comprimentos de onda muito próximos. No entanto para uma rede de difração linear a resolução, além de variar com o comprimento de onda, depende da *ordem de difração*, m

$$R_\lambda = m N \quad (3)$$

sendo N o número de linhas da rede *iluminadas* pelo feixe.

¹Optical Resolution

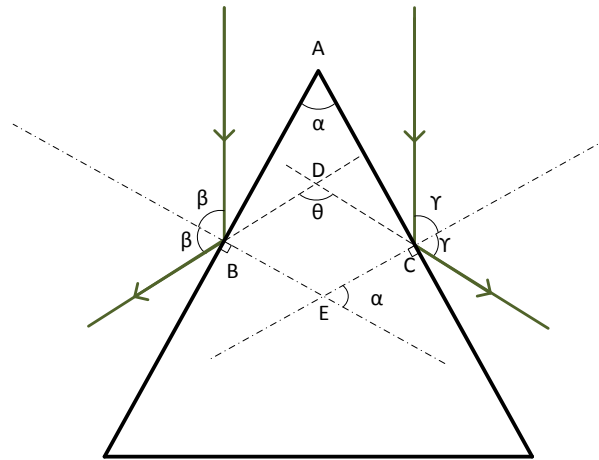


Figura 3: Esquema da reflexão do feixe incidente num prisma colocado na plataforma do goniómetro de Babinet. As direções dos dois raios refletidos fazem entre si um ângulo θ que é o dobro do ângulo α do prisma.

2 A experiência

2.1 Equipamento

1. Goniómetro de Babinet.
2. Prisma triangular de vidro.
3. Lâmpada espectral de Mercúrio ou Hélio.

No Trabalho anterior colocou-se o prisma na plataforma de modo a poderem observar-se as reflexões nas duas faces polidas (Fig. 3). As direções dos raios refletidos fazem um ângulo θ , que se mediu com o goniómetro e que é o dobro do ângulo principal do prisma α . Determinou-se facilmente assim o ângulo do prisma com uma precisão e exatidão muito melhores do que com um transferidor por exemplo.

À partida podia determinar-se o ângulo δ_{min} medindo com a objectiva a direção do raio incidente (sem prisma) e a direção do raio emergente que corresponda ao desvio mínimo (Figura 2). No entanto para compensar as eventuais assimetrias do aparelho devem fazer-se observações para os desvios à esquerda e à direita. Neste caso é fácil provar que o ângulo formado entre os dois raios emergentes (para a mesma cor) é o dobro do ângulo de desvio, δ_{min} (não sendo necessário determinar a direção do raio incidente, i_1).

O prisma que se usa é em geral de seção reta triangular (equilátero ou isósceles). A lâmpada espectral é uma fonte de luz policromática que contem dois elétrodos situados no interior de um invólucro (vidro em geral) onde existe uma substância “ativa”² em muito pequena quantidade, numa atmosfera rarefeita. A alimentação que em geral é de alta tensão e produz entre os elétrodos uma descarga que vaporiza, excita e ioniza a substância ativa. As diferentes excitações permitem transições radiativas que dão origem à emissão de um

²Que dá o nome à lâmpada, e.g. Mercúrio, Hélio, Néon, etc.



Figura 4: Fotografia do goniómetro de Babinet utilizado na experiência.

feixe constituído por diferentes comprimentos de onda bem definidos e que se encontram muito bem identificados na literatura.³

Todas as lâmpadas espectrais emitem no ultravioleta que é nocivo para a pele e olhos dos observadores, mas o vidro no interior do qual se dá a descarga absorve a maior parte destas radiações perigosas. Para ainda reduzir os riscos, a lâmpada tem um invólucro em geral metálico apenas com uma abertura para permitir iluminar uma fenda estreita e regulável junto à luneta do goniómetro, que produz uma linha vertical na imagem. A aresta do triângulo definido pelas superfícies planas onde se produz a reflexão e/ou transmissão deve ficar paralela a esta fenda.

3 Protocolo Experimental

1. Ligue a lâmpada espectral e espere 10 a 15 minutos até que se estabeleça o equilíbrio térmico no seu interior.
2. Enquanto espera comece por regular a ótica do goniómetro tal como descrito no Guia do Trabalho anterior.
3. Verifique o nivelamento horizontal do goniómetro e da plataforma onde vai colocar o prisma com a ajuda de um nível de bolha.
4. Utilize o valor do ângulo, α , entre as faces polidas do prisma obtido no trabalho anterior.
5. Observe agora a transmissão das várias cores através do prisma com o feixe incidente numa das faces, na posição da Figura 2. Se o instrumento estiver bem focado deve observar uma série de imagens coloridas da mesma fenda isoladas (riscas), uma por

³Pode consultar a extensa base de dados online em [NIST Atomic Spectra Database](#).

cada comprimento de onda λ .

6. Escolha duas dessas cores bem afastadas. Rodando o prisma obtenha um conjunto de valores que permita fazer um gráfico dos ângulos de desvio, $\delta(i_1)$, em função do ângulo de incidência, i_1 e um ajuste polinomial (Nesta fase não precisa de utilizar o nónio da escala de minutos). Pelo gráfico verifique que existe de facto um mínimo no ângulo de desvio, $\delta(i_{min})$, mas que este e o ângulo i_{min} são diferentes para cada cor.
7. Em seguida, para medir o desvio mínimo, *para cada risca*, tem primeiro de colocar o prisma na posição apropriada. Deve portanto olhar pela objectiva e fixando a risca rodar o prisma até observar que o desvio é mínimo. De seguida, com o parafuso micrométrico associado à luneta, centrar a imagem da fenda no retículo e meça o ângulo $\delta_{min(esq)}(\lambda)$. Comece por usar todas as cores quando o prisma desvia para o lado esquerdo (cada elemento do grupo deve efectuar as suas medidas).
8. Repita o ponto anterior, mas para o prisma a desviar o feixe para o lado direito. Calcule os desvio mínimos:

$$\delta_{min}(\lambda) = \frac{|\delta_{esq} - \delta_{dir}|}{2}$$

9. Com os desvio mínimos e identificando nas tabelas os valores dos comprimentos de onda das riscas visíveis, calcule índice de refração a partir da Equ. 1 e represente graficamente a função $n(\lambda)$. Ajuste uma curva polinomial aos pontos obtidos. Através da estimativa da derivada desta função, calcule o poder dispersivo do vidro para o comprimento de onda médio das duas riscas amarelas do sódio ($\bar{\lambda}_{amare} \approx 589 \text{ nm}$).
10. Faça uma estimativa da maior distância percorrida pelo feixe luminoso no prisma, l , (que é aproximadamente o comprimento da aresta) e calcule o Poder de Resolução do prisma para o $\bar{\lambda}_{amare}$, referido no ponto anterior.
11. Substitua no centro da plataforma do goniómetro o prisma por uma rede de difração de 600 linhas por milímetro. Compare a separação angular, $\Delta\delta_{rede}$, das duas riscas mais próximas, observadas com a rede com a que obteve para as mesmas riscas, usando o prisma. Comente, utilizando a expressão (3).

Apêndice

Ângulo do Prisma

Considere-se a incidência nas condições da Figura 3. A figura plana quadrangular $ABEC$ tem dois ângulos retos ABE e ECA . Assim o ângulo CAB , α , é suplementar do ângulo BEC e portanto o ângulo externo em E (assinalado na figura) tem o mesmo valor do ângulo do prisma. Na figura plana quadrangular $DBEC$ está definido um ângulo que é o ângulo formado pelas direcções dos raios refletidos na face AB e AC . Entre os ângulos de incidência e existe a relação

$$2\beta + 2\gamma + \theta = 2\pi \quad (4)$$

e entre os ângulos de $DBEC$

$$\beta + \gamma + \theta + \pi - \alpha = 2\pi \quad (5)$$

O sistema destas duas equações permite obter

$$\alpha = \theta/2 \quad (6)$$

Desvio mínimo

Supondo um prisma que tem um índice de refração que em relação ao meio em que está imerso n , na configuração da Figura 2, os feixes que são transmitidos através do mesmo sofrem um desvio $\delta(\lambda)$. Os ângulos α e de desvio δ são exteriores respetivamente aos triângulos BCD (em D) e BEC (em E) e portanto

$$\delta = (i_1 - t_1) + (t_2 - i_2) \quad (7)$$

$$\alpha = t_1 + i_2 \quad (8)$$

o que permite obter

$$\delta = i_1 + t_2 - \alpha \quad (9)$$

Estes ângulos satisfazem à lei de Snell-Descartes da transmissão.

$$n = \frac{\sin i_1}{\sin t_1} = \frac{\sin t_2}{\sin i_2} \quad (10)$$

No caso geral o ângulo δ depende do ângulo de incidência i_1 e pode provar-se que a função envolvida tem uma estacionariedade. Para encontrar o *desvio mínimo* δ_{min} , calculemos a derivada de δ em relação a i_1 (expressão 9).

$$\frac{d\delta}{di_1} = 1 + \frac{dt_2}{di_1} \quad (11)$$

Obtendo $\sin i_1$ e $\sin t_2$ da relação (10) e aplicando-lhe derivada em ordem a i_1 é-se conduzido a

$$\cos i_1 = n \cos t_1 \cdot \frac{dt_1}{di_1} \quad (12)$$

$$\cos t_2 \cdot \frac{dt_2}{di_1} = n \cos i_2 \cdot \frac{di_2}{di_1} \quad (13)$$

Mas atendendo à relação (8)

$$\frac{dt_1}{di_1} = -\frac{di_2}{di_1} \quad (14)$$

e combinando (12), (13) e (14) obtém-se

$$\frac{dt_2}{di_1} = -\frac{\cos i_2 \cos i_1}{\cos t_2 \cos t_1} \quad (15)$$

e a relação (11) vem

$$\frac{d\delta}{di_1} = 1 - \frac{\cos i_2 \cos i_1}{\cos t_2 \cos t_1} \quad (16)$$

Esta função admite um zero para

$$\cos i_2 \cos i_1 = \cos t_2 \cos t_1 \quad (17)$$

Atendendo a (10) e à relação entre coseno e seno obtém-se

$$\sin^2 t_1 \cdot (1 - n^2) = \sin^2 i_2 \cdot (1 - n^2) \quad (18)$$

que para os ângulos considerados ($\leq \pi/2$) e para $n \neq 1$ implica que

$$t_1 = i_2 = t \quad (19)$$

$$i_1 = t_2 = i \quad (20)$$

Assim para $\frac{d\delta}{di} = 0$ (que provaremos ser um mínimo)

$$\delta_{min} = 2i - 2t = 2i - \alpha \quad (21)$$

o que permite calcular t a partir do ângulo do prisma ($t = \alpha/2$) e i a partir do ângulo de desvio mínimo e do ângulo do prisma ($i = (\alpha + \delta_{min})/2$) e consequentemente obter a relação (1) para o cálculo do índice de refração.

É necessário calcular $\frac{d^2\delta}{di^2} = 0$ e verificar se é uma quantidade positiva ou negativa para os valores que anulam a primeira derivada com o objetivo de saber se a estacionariedade é um mínimo, máximo ou um ponto de inflexão. Aplicando derivada em ordem a i à expressão (16) obtém-se

$$\frac{d^2\delta}{di_1^2} = \frac{d}{di_1} \left(-\frac{\cos i_2 \cos i_1}{\cos t_2 \cos t_1} \right) \quad (22)$$

em que todos os argumentos das funções coseno dependem de i_1 . obtém-se 4 parcelas que são:

$$\frac{\cos i_1}{\cos t_2 \cos t_1} \frac{d}{di_1} \cos i_2 = \frac{\cos i_1}{\cos t_2 \cos t_1} (-\sin i_2) \frac{di_2}{di_1} \quad (23)$$

$$\frac{\cos i_2}{\cos t_2 \cos t_1} \frac{d}{di_1} \cos i_1 = \frac{\cos i_2}{\cos t_2 \cos t_1} (-\sin i_1) \quad (24)$$

$$\frac{\cos i_2 \cos i_1}{\cos t_1} \frac{d}{di_1} (\cos t_2)^{-1} = \frac{\cos i_2 \cos i_1}{\cos t_1} \sin t_2 (\cos t_2)^{-2} \frac{dt_2}{di_1} \quad (25)$$

$$\frac{\cos i_2 \cos i_1}{\cos t_2} \frac{d}{di_1} (\cos t_1)^{-1} = \frac{\cos i_2 \cos i_1}{\cos t_2} \sin t_1 (\cos t_1)^{-2} \frac{dt_1}{di_1} \quad (26)$$

Atendendo a (12) e (14) substituídos em (23) e em (25) e a (15) substituído em (26), as 4 parcelas conduzem respetivamente às expressões seguintes que são simplificadas quando se substitui n (10) e se impõem as condições que foram obtidas para o zero de $\frac{d\delta}{di_1}$

$$\frac{\cos i_1}{\cos t_2 \cos t_1} (-\sin i_2) \frac{\cos i_1}{n \cos t_1} = \frac{\sin^2 t \cos i}{\cos^2 t \sin i} \quad (27)$$

$$\dots = -\frac{\sin i}{\cos i} \quad (28)$$

$$\dots = -\frac{\sin i}{\cos i} \quad (29)$$

$$\dots = \frac{\sin^2 t \cos i}{\cos^2 t \sin i} \quad (30)$$

Assim obtém-se

$$\frac{d^2 \delta}{di_1^2} = -2 \tan^2 t \frac{1}{\tan i} + 2 \tan i = 2 \tan i \left(1 - \frac{\tan^2 t}{\tan^2 i} \right) \quad (31)$$

Esta expressão é positiva para $\tan^2 t < \tan^2 i$ o que implica $t < i$ ($i, t \leq \pi/2$), ie, para $n > 1$ e é negativa para $n < 1$. No caso do prisma de vidro imerso no ar $n > 1$ e portanto (31) será positiva o que confirma que a condição de estacionariedade corresponde a um mínimo.

Poder de resolução do prisma

A capacidade de observar separadamente dois comprimentos de onda muito próximos está relacionada com a variação do ângulo de desvio δ com o comprimento de onda que se designa por dispersão angular $\frac{d\delta}{d\lambda}$ e que depende do coeficiente de dispersão $\frac{dn}{d\lambda}$ na forma

$$\frac{d\delta}{d\lambda} = \frac{d\delta}{dn} \frac{dn}{d\lambda} \quad (32)$$

Atendendo a (9) $\frac{d\delta}{dn} = \frac{dt_2}{dn}$ (para α e i_1 constantes). Derivando a relação (10) em ordem a n obtém-se

$$\cos t_2 = \frac{dt_2}{dn} = \sin t_2 + n \cos i_2 \frac{di_2}{dn} \quad (33)$$

$$0 = \sin t_1 + n \cos t_1 \frac{dt_1}{dn} \quad (34)$$

Obtém-se assim

$$\frac{d\delta}{dn} = \frac{\sin i_2}{\cos t_2} + \frac{\sin t_1 \cos i_2}{\cos t_2 \cos t_1} = \frac{\sin \alpha}{\cos t_2 \cos t_1} \quad (35)$$

$$\frac{d\delta}{d\lambda} = \frac{dn}{d\lambda} \frac{\sin \alpha}{\cos t_2 \cos t_1} \quad (36)$$

Considerando um feixe paralelo de largura l_1 como se indica na Figura 5, que incide no prisma segundo um ângulo i_1 e que emerge segundo t_2 com largura l_2 , fazendo um percurso

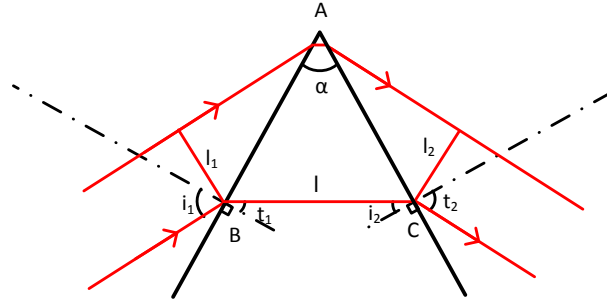


Figura 5: Trajeto de um feixe luminoso paralelo num prisma.

máximo no prisma l , pode provar-se (os senos dos ângulos de um triângulo são diretamente proporcionais aos lados opostos) que

$$\frac{\sin \alpha}{l} = \frac{\sin(\pi/2 - t_1)}{AC} \quad (37)$$

e atendendo a que $l_2 = AC \cos t_2$ obtém-se que

$$\frac{d\delta}{d\lambda} = \frac{dn}{d\lambda} \frac{l}{l_2} \quad (38)$$

Assim uma pequena variação de comprimento de onda $\Delta\lambda$ produz uma variação do ângulo de desvio $\Delta\delta$ tal que

$$\Delta\delta = \frac{dn}{d\lambda} \frac{l}{l_2} \Delta\lambda \quad (39)$$

O critério de Rayleigh para que dois comprimentos de onda estejam resolvidos, ie possam ser detectados separadamente, é que o máximo de intensidade (de ordem $n \geq 1$) de um deles coincida com o mínimo de intensidade do outro (Figura 6)

Pelas leis de Difração o primeiro mínimo de intensidade da figura de difração de uma fenda de largura l_2 dista angularmente do máximo principal de: $\sin \theta = \lambda/l_2$. Para dois comprimentos de onda muito próximos, $\sin \theta \approx \theta$, que neste caso é o desvio angular $\Delta\delta$. Assim $\Delta\delta = \lambda/l_2$ e obtém-se para a resolução do prisma:

$$R_\lambda = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = l \left(\frac{dn}{d\lambda} \right)_\lambda \quad (40)$$

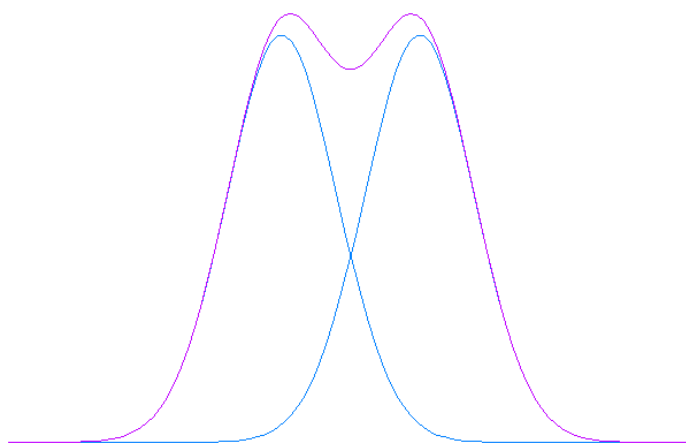


Figura 6: Critério de Rayleigh da resolução de duas riscas espectrais (a vermelho a soma da intensidade das riscas).