



ÓPTICA GEOMÉTRICA

Construções Geométricas em Lentes Delgadas (aproximação paraxial)

1 Objectivos

A óptica geométrica, ou óptica de raios, é uma abordagem que consiste em descrever a propagação da luz através de raios. Um raio é um modelo simplificado, na forma de uma linha, que descreve o caminho percorrido pela luz entre duas superfícies. Para descrever a propagação de um feixe de luz através de um sistema, utilizamos um conjunto de raios, que se propagam utilizando o método do *traçado de raios*. A óptica geométrica é particularmente útil na descrição de sistemas e instrumentos ópticos, e é válida desde que os objectos envolvidos sejam muito maiores que o comprimento de onda da luz ($\sim 0.4 - 0.7 \mu\text{m}$).

Neste trabalho pretende-se estudar vários aspectos da luz do ponto de vista da óptica geométrica, tais como a reflexão e refacção em superfícies ópticas, a polarização, lentes delgadas e associações de lentes. Iremos estudar a formação de imagens reais e virtuais, e verificar como estas dependem das distâncias envolvidas no sistema óptico. Este estudo servirá de base à compreensão do funcionamento dos instrumentos ópticos como o microscópio e o telescópio.

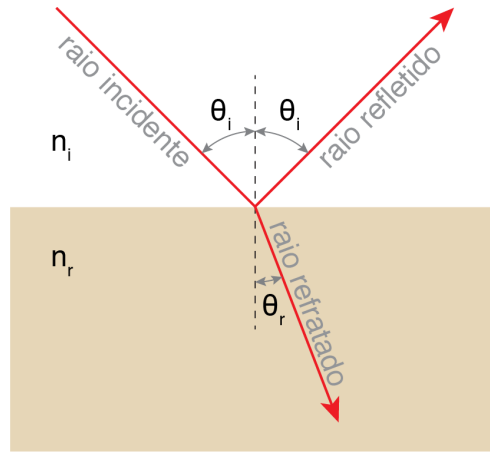
2 Traçado de raios

Em óptica geométrica, a luz é representada por raios. Esta simplificação é suficiente para explicar fenómenos como a reflexão e a refacção da luz quando esta muda de meio óptico. O comportamento dos raios obedece a algumas regras simples:

1. Num meio uniforme, como o ar ou um vidro, um raio é uma linha recta
2. Um meio óptico é caracterizado por uma quantidade $n > 1$, chamada índice de refacção
3. Na fronteira entre dois meios, um raio pode ser reflectido e/ou refractado, verificando-se o seguinte
 - o ângulo de reflexão é igual ao ângulo de incidência, relativamente à normal à superfície
 - o ângulo de refacção θ_r e o ângulo de incidência θ_i têm a seguinte relação:

$$n_i \sin \theta_i = n_r \sin \theta_r \quad (1)$$

designada Lei de Snell-Descartes, em que n_i e n_r são respectivamente os índices de refração do meio de incidência e do meio de refração (ver Figura).



2.1 Reflexão, refração e polarização

A eficiência com que um feixe luminoso é reflectido ou emitido numa fronteira entre dois meios de índices de refração n_1 e n_2 depende, entre outros, do ângulo de incidência e da polarização da luz. A figura em baixo mostra como varia a reflectividade de uma superfície de vidro em função do ângulo de incidência, para polarizações horizontal e vertical (admitindo que o plano de incidência e reflexão é horizontal). Para um ângulo específico, designado ângulo de Brewster e dado por $\theta_B = \arctan(n_2/n_1)$, a componente horizontal da polarização não é reflectida, pelo que a luz reflectida fica com polarização vertical. Esta é uma forma de criar luz polarizada a partir de uma fonte não polarizada.

A figura ilustra também a geometria dos raios luminosos numa separação entre dois meios, no caso de incidência em ângulo de Brewster. Como se pode apreciar, nessa configuração o raio reflectido e o raio refractado fazem entre si um ângulo de 90° .

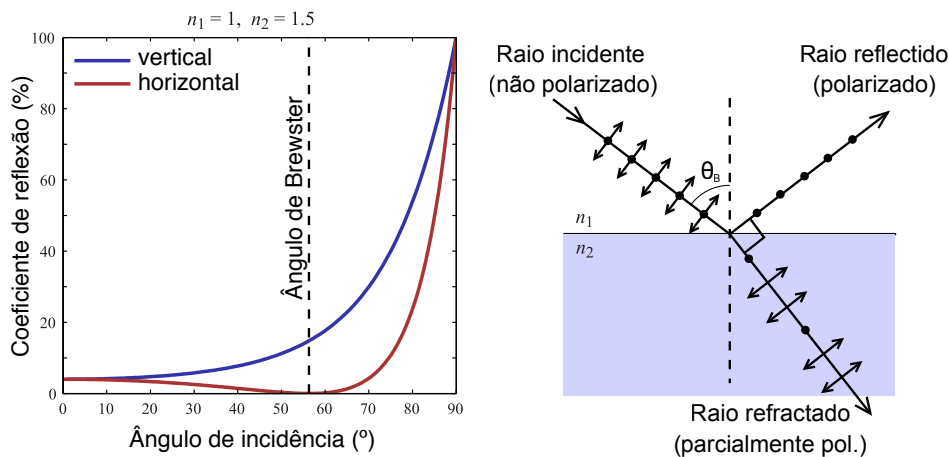


Figura 1: Reflectividade vs. ângulo de incidência e direcção de polarização (esq.) e geometria para ângulo de Brewster (dir.).

3 Construções geométricas em lentes delgadas (aproximação paraxial)

Uma das principais aplicações da óptica geométrica consiste no estudo da formação de imagens: dado um objecto numa dada posição, como desenhar um sistema óptico que permita transferir uma imagem desse objecto para uma posição diferente? É um problema que tem aplicações desde o olho humano até ao desenho de lentes e fibras ópticas.

Um *objecto* iluminado uniformemente é considerado como uma fonte de raios, emitidos em todas as direcções. Podemos escolher um conjunto adequado de raios e traçar o seu percurso através do sistema, até encontrar o correspondente ponto na *imagem*. Por convenção, desenha-se o sistema óptico em torno de um eixo, que coincide com o seu eixo geométrico, e os raios propagam-se da esquerda para a direita.

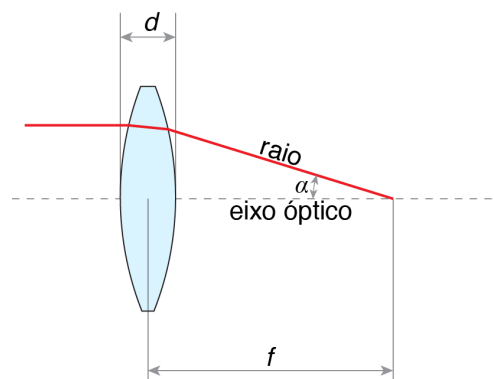


Figura 2: Definições utilizadas: f distância focal, $d \ll f$ espessura da lente delgada, α ângulo entre o raio e o eixo óptico.

3.1 Aproximações

Utilizaremos as duas seguintes aproximações comuns, que facilitam grandemente os cálculos a efectuar:

Lentes delgadas – uma lente é considerada *delgada* quando a sua largura d é desprezável face à sua distância focal f .

Aproximação paraxial – admitimos que todos os raios envolvidos são *paraxiais*, isto é, (i) situam-se próximo do eixo óptico e (ii) o ângulo α que fazem com esse eixo permite utilizar as aproximações $\sin \alpha \approx \alpha$ e $\tan \alpha \approx \alpha$, tipicamente válidas para $\alpha \lesssim 5^\circ$.

3.2 Convenções

A Figura 3 ilustra os principais parâmetros envolvidos no traçado de raios através de uma lente simples.

- O objecto AB fica (por definição) do lado esquerdo da lente, a uma distância $d_O > 0$ desta; caso o objecto esteja do lado direito, temos $d_O < 0$ (que é o caso do "objecto virtual" abordado mais à frente)

- A imagem $A'B'$ está do lado direito da lente, a uma distância $d_I > 0$ desta; ; caso a imagem esteja do lado esquerdo, temos $d_I < 0$
- F_0 é a distância focal do lado do objecto, F_I é a distância focal do lado da imagem. No caso de uma lente fina, ambas são iguais a f , e marcam-se para auxiliar no traçado.

O raios ópticos que emergem de um dado objecto atravessam a lente e dão origem a uma imagem. As imagens dizem-se *reais* quando os raios de luz passam de facto na posição da imagem, isto é, raios que saem do plano do objecto convergem no plano da imagem; e dizem-se *virtuais* quando os raios não passam na imagem, mas esta é visível através da lente. As imagens reais podem ser projectadas num alvo, as virtuais não. Um bom exemplo é considerar a imagem de uma lâmpada brilhante: ao passar a mão pelo plano da imagem, se estar for real sente-se o calor, mas se for virtual parecerá apenas "flutuar" no espaço.

De seguida vamos analisar a formação de imagens para lentes convergentes ($f > 0$) e divergentes ($f < 0$) em função da posição relativa do objecto e do foco da lente, e derivar relações úteis para lentes delgadas.

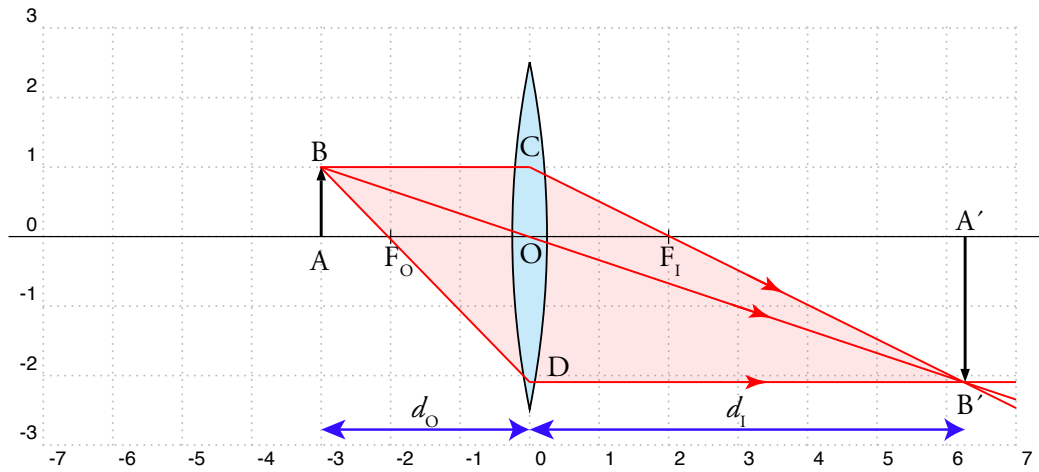


Figura 3: Convenções utilizadas para formação de imagens por lentes.

3.3 Objecto e Imagem - Focos Conjugados

Considere de novo a Fig. 3. Cada ponto do objecto em d_O tem um único ponto correspondente na imagem em d_I . Isto implica que, caso colocássemos o objecto em d_I , a imagem seria formada em d_O . Chama-se a estas posições *focos conjugados*. Pela semelhança de triângulos temos as seguintes relações entre as dimensões do objecto e da imagem:

$$\triangle ABF_O \sim \triangle ODF_O \rightarrow AB/A'B' = AF_O/F_O0 \rightarrow AB/A'B' = \frac{d_O - f}{f} \quad (2)$$

$$\triangle ABO \sim \triangle A'B'O \rightarrow AB/A'B' = AO/OA' \rightarrow AB/A'B' = d_O/d_I \quad (3)$$

$$\triangle COF_I \sim \triangle A'B'F_I \rightarrow AB/A'B' = OF_I/F_I A' \rightarrow AB/A'B' = \frac{f}{d_I - f} \quad (4)$$

Das expressões (2) e (4) obtemos a equação dos focos conjugados:

$$\boxed{\frac{1}{f} = \frac{1}{d_O} + \frac{1}{d_I}} \quad (5)$$

Por outro lado, sendo AB e $A'B'$ respectivamente as dimensões lineares transversais do objecto e da imagem, usamos a igualdade (3) para definir a *ampliação transversal* A como:

$$\boxed{A = \frac{A'B'}{AB} = \frac{d_I}{d_O}} \quad (6)$$

A imagem é *direita* se $A < 0$ e *invertida* se $A > 0$. Podemos usar estas duas equações para, dados f e d_O , determinar as seguintes expressões para a posição da imagem d_I e a respectiva ampliação A :

$$A = \frac{1}{\frac{d_O}{f} - 1} \quad (7)$$

$$d_I = d_O A \quad (8)$$

Como exemplo, temos no caso da Fig. 3: $d_O > f \rightarrow A > 0; d_I > 0$. A imagem resultante é *real* e *invertida*.

3.4 Lente convergente ($f > 0$) – Imagem real

Este caso verifica-se para $d_O > f$, a imagem é real e pode ser projectada. A imagem é maior ($A > 1$) que o objecto se $d_O > 2f$ ou menor ($A < 1$) se $2f > d_O > 0$. Um exemplo do primeiro caso é uma máquina fotográfica: a imagem é posicionada no sensor da câmara, e é (tipicamente) menor que o objecto fotografado. Verifica-se $\boxed{0 < A \leq 1}$ pois

$$\infty > d_O \geq 2f \rightarrow f < d_I \leq 2f \rightarrow 0 < A \leq 1 \quad (9)$$

Um exemplo do segundo caso é um projetor de cinema ou de imagem de computador: a imagem é posicionada num écran, e é maior que o objecto (película ou chip). Verifica-se

$\boxed{1 \leq A < \infty}$ pois

$$f < d_O \leq 2f \rightarrow \infty > d_I \geq 2f \rightarrow \infty > A \geq 1 \quad (10)$$

3.5 Lente convergente ($f > 0$) – Imagem virtual

Este caso verifica-se quando $d_O < f$, por exemplo quando utilizamos uma lupa para ver objectos com um tamanho aumentado, e está esquematizada na Fig. 4. Dependendo da posição d_O , verificam-se as seguintes relações

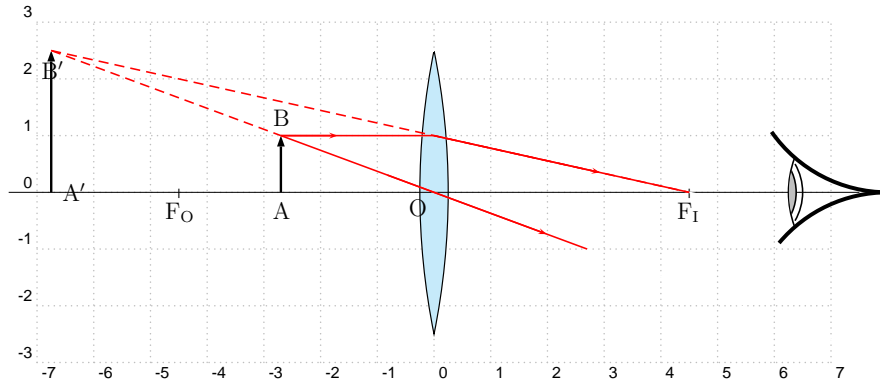


Figura 4: Formação de imagem virtual com uma lente convergente.

$$0 < d_O \leq \frac{f}{2} \quad 0 > d_I \geq -f \quad -1 > A \geq -2 \quad (11)$$

$$\frac{f}{2} \leq d_O < f \quad -f \geq d_I > -\infty \quad -2 > A > -\infty \quad (12)$$

Repare-se que resulta $d_I < 0$ (a imagem está do mesmo lado que o objecto) e $A < 0$ pelo que a imagem é (i) virtual e (ii) direita, para um observador colocado à direita da lente.

3.6 Lente divergente ($f < 0$)

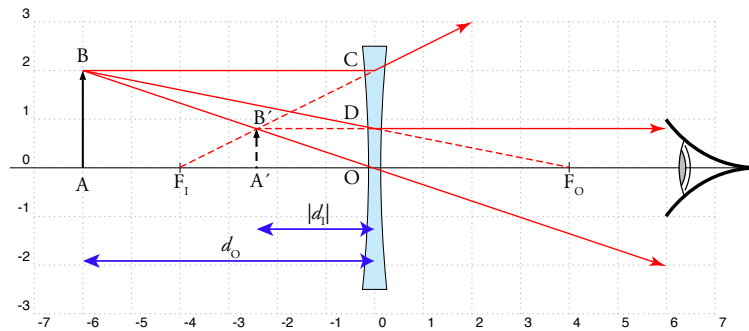


Figura 5: Formação de imagem virtual com uma lente divergente.

Considere-se a situação representada na Fig. 5, que mostra uma lente divergente ($f < 0$) e um objecto AB ($d_O > 0$). Note-se que, no caso da lente divergente, os pontos F_O e F_I trocam de posição. Nesta configuração a imagem resultante $A'B'$ é sempre *virtual* e *direita* com $d_I < 0$ (imagem do mesmo lado do objeto), pois

$$f < 0; \quad d_O > 0 \quad \rightarrow \quad A < 0; \quad d_I < 0$$

Podemos verificar que a equação (5) se mantém válida neste caso, recorrendo à semelhança de triângulos:

$$\Delta ABO \sim \Delta A'B'O \rightarrow AB/A'B' = \frac{d_0}{d_I} \rightarrow -\infty < A < 0 \quad (13)$$

$$\Delta ABF_0 \sim \Delta ODF_0 \rightarrow \frac{d_0 + |f|}{|f|} = AB/A'B' \rightarrow \frac{d_0 + |f|}{|f|} = \frac{d_0}{d_I} \quad (14)$$

$$\Delta F_1OC \sim \Delta F_1A'B' \rightarrow \frac{|f|}{|f| - |d_I|} = AB/A'B' \rightarrow \frac{|f|}{|f| - |d_I|} = \frac{d_0}{|d_I|} \quad (15)$$

Nestas expressões, que descrevem distâncias, foi necessário utilizar os valores em módulo de f e de d_I , que são ambos negativos. Fazendo agora as substituições $|f| \rightarrow -f$ e $|d_I| \rightarrow -d_I$ recupera-se a equação dos focos conjugados.

4 Objetos virtuais ($d_O < 0$)

Em determinadas situações, podemos lidar com "objectos virtuais" – isto é, os raios ópticos têm origem não num objecto sólido, mas num plano do espaço, e estamos interessados em estudar a sua propagação a partir desse plano e a formação da imagem correspondente. Um exemplo típico consiste em estudar a formação da imagem de uma imagem primária. Nestes casos, o objecto virtual é identificado a tracejado no diagrama de raios, como ilustrado nos exemplos em baixo.

4.1 Lente convergente

A Fig. 6 representa um objecto virtual ($d_O < 0$, à direita da lente) e a correspondente imagem. A imagem resultante é real ($d_I > 0$, também à direita) e direita ($A < 0$), verificando-se

$$d_O < 0; \quad f > 0 \rightarrow A < 0$$

$$\frac{d_I}{-|d_O|} = \frac{f}{-|d_O| - f}$$

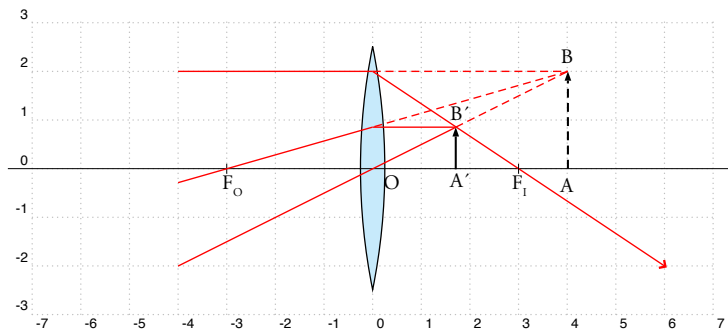


Figura 6: Lente convergente com objecto virtual e imagem real.

4.2 Lente divergente – Imagem virtual

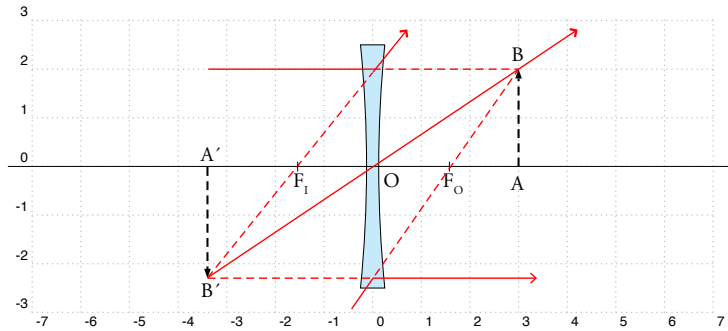


Figura 7: Lente divergente com objecto virtual e imagem virtual.

A Fig. 7 representa um objecto virtual ($d_O < 0$, à direita da lente) para uma lente divergente ($f < 0$) e a correspondente imagem. Na situação da figura, o objecto está à direita do foco F_O : $|d_O| > |f|$. Verifica-se assim:

$$\begin{aligned} d_O < 0 \quad f < 0 \\ \frac{d_I}{|d_O|} &= \frac{|f|}{|d_O| - |f|} \end{aligned}$$

A imagem resultante é também virtual $d_I < 0$, à esquerda da lente) e invertida ($A > 0$), verificando-se as seguintes relações em função da distância:

$$|d_O| = \begin{cases} |d_O| = |f| : & |d_I| \rightarrow \infty, \quad A \rightarrow \infty, \\ |f| < |d_O| < 2|f| : & |d_I| > |d_O|, \quad A > 1, \\ |d_O| = 2|f| : & |d_I| = |d_O|, \quad A = 1, \\ |d_O| > 2|f| : & |d_I| < |d_O|, \quad 0 < A < 1. \end{cases} \quad (16)$$

4.3 Lente divergente - Imagem real

A Fig. 8 representa um objecto virtual ($d_O < 0$, à direita da lente) para uma lente divergente ($f < 0$) e a correspondente imagem. Na situação da figura, o objecto está à esquerda do foco F_O : $|d_O| < |f|$. Verifica-se assim:

$$\begin{aligned} d_O < 0 \quad f < 0 \\ \frac{d_I}{|d_O|} &= \frac{|f|}{|f| - |d_O|} \rightarrow A = \frac{d_I}{d_O} = \frac{f}{d_O - f} < 0 \end{aligned}$$

A imagem resultante é agora real ($d_I > 0$, à direita da lente) e direita ($A < 0$), verificando-se as seguintes relações em função da distância:

$$|d_O| = \begin{cases} |d_O| \rightarrow |f| : & |d_I| \rightarrow \infty, \quad A \rightarrow -\infty, \\ |d_O| = |f|/2 : & |d_I| = f, \quad A = -2, \\ |d_O| = 0 : & |d_I| = 0, \quad A = -1. \end{cases} \quad (17)$$

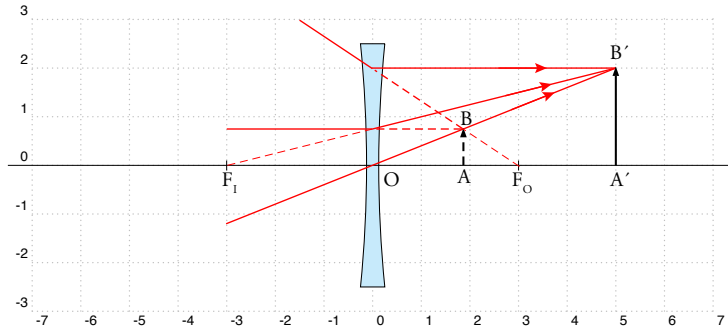


Figura 8: Lente divergente com objecto virtual e imagem real.

5 Associação de lentes delgadas

Para duas lentes delgadas de distâncias focais f_1 e f_2 afastadas de D (para $D \ll f_1, f_2$) pode calcular-se a distância focal equivalente do conjunto através de:

$$\boxed{\frac{1}{f_{equiv}} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{D}{f_1 f_2}} \quad (18)$$

A dificuldade na determinação da distância focal equivalente f_{equiv} é a medição das distâncias d_O e d_I (que são diferentes das distância do objecto e de imagem às superfícies das lentes ou aos seus planos médios).

Uma abordagem preferível consiste em usar a equação (5) separadamente para cada uma das lentes, e considerar que a *primeira imagem* (real ou virtual) irá constituir-se como o *objecto* para a segunda lente. Vamos aplicar este método para várias combinações.

5.1 Duas lentes convergentes afastadas de D

A figura 9 representa duas lentes, L_1 e L_2 , de distâncias focais f_1 e f_2 respectivamente, separadas de uma distância D . O objecto (real) AB situa-se à esquerda de L_1 , e tem uma imagem $A'B'$ por intermédio de L_1 . Esta imagem constitui-se como objecto virtual para L_2 , resultando no final a imagem $A''B''$.

Apliquemos as equações de lentes individuais para cada caso:

$$|d_O| = \begin{cases} \frac{1}{d_{O_1}} + \frac{1}{d_{I_1}} = \frac{1}{f_1} \\ \frac{1}{d_{O_2}} + \frac{1}{d_{I_2}} = \frac{1}{f_2} \\ O_1 O_2 = D = d_{I_1} + d_{O_2} \end{cases} \quad \begin{matrix} d_{O_1} = AO_1 & d_{I_1} = O_1 A' & f_1 = O_1 F_{O_1} = O_1 F_{I_1} \\ d_{O_2} = A'O_2 & d_{I_2} = O_2 A'' & f_2 = F_{O_2} O_2 = O_2 F_{I_2} \end{matrix} \quad (19)$$

Esta é a montagem mais simples de um **telescópio**, a partir do qual se podem obter grandes ampliações. Estas três expressões permitem calcular o valor de uma das incógnitas, conhecidos os valores das outras; por exemplo, podemos determinar f_2 , conhecidos os valores de f_1 , d_{O_1} , d_{I_2} e D .

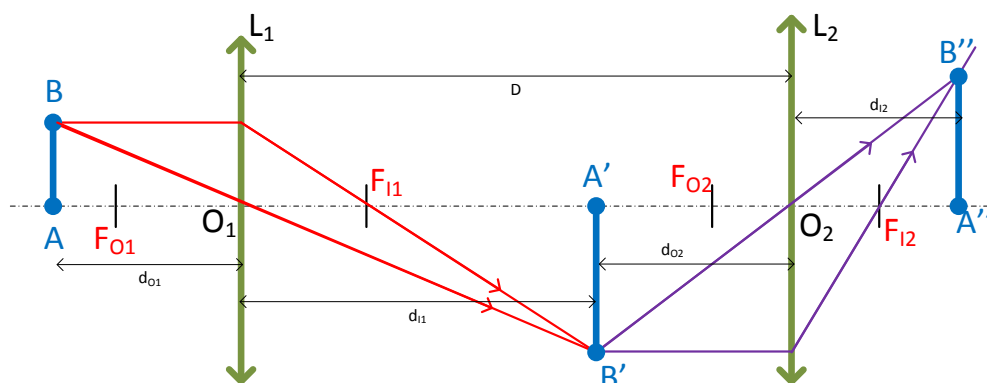


Figura 9: Sistema de duas lentes convergentes.

As mesmas expressões aplicam-se para o caso de uma imagem obtida por uma lente L_1 que passa a ser um “objecto” virtual para L_2 , isto é, em que $d_{O2} < 0$, situação ilustrada na Fig. 10.

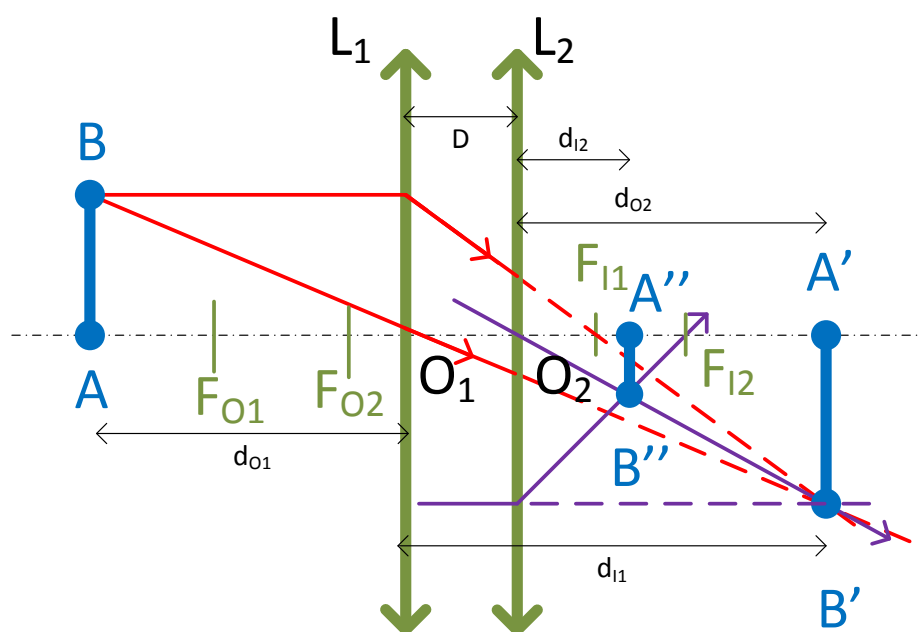


Figura 10: Duas lentes convergentes, com objecto intermédio virtual.

5.2 Lentes convergente e divergente afastadas de D

O outro sistema de lente dupla de interesse é o caso em que temos uma lente convergente e uma divergente separadas de D , ilustrado na Fig. 11, em que L_1 é convergente e L_2 é divergente. A lente L_1 produz uma imagem intermédia $A'B'$ real e invertida, que é o objecto (real) de L_2 . Uma vez que a segunda lente é divergente, a sua imagem $A''B''$ (a imagem final) é sempre virtual e invertida.

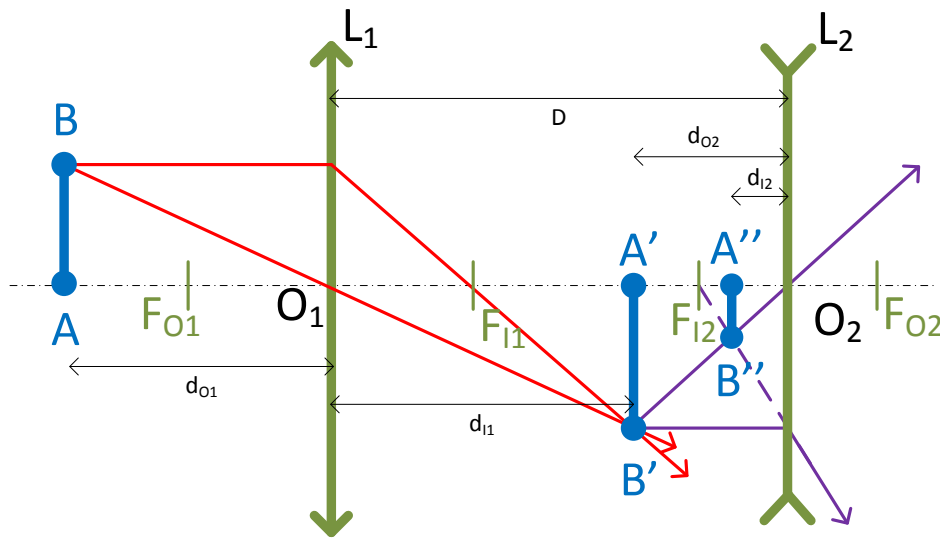


Figura 11: Sistema de lente convergente e divergente. A imagem final é sempre virtual e invertida.

A figura 12 ilustra a situação em que $A'B'$ está numa posição à direita de L_2 : é uma imagem real (de L_1) mas um objecto virtual (de L_2), já que $d_{02} < 0$. A imagem $A''B''$ resultante é real e invertida.

Se L_1 e L_2 permutarem (Fig. 13), obtém-se também uma imagem real $A''B''$ desde que a distância $d_{01} = AO_1$ seja idêntica. Em qualquer destas situações, pode sempre calcular-se $f_2 < 0$ usando o conjunto das três equações (19).

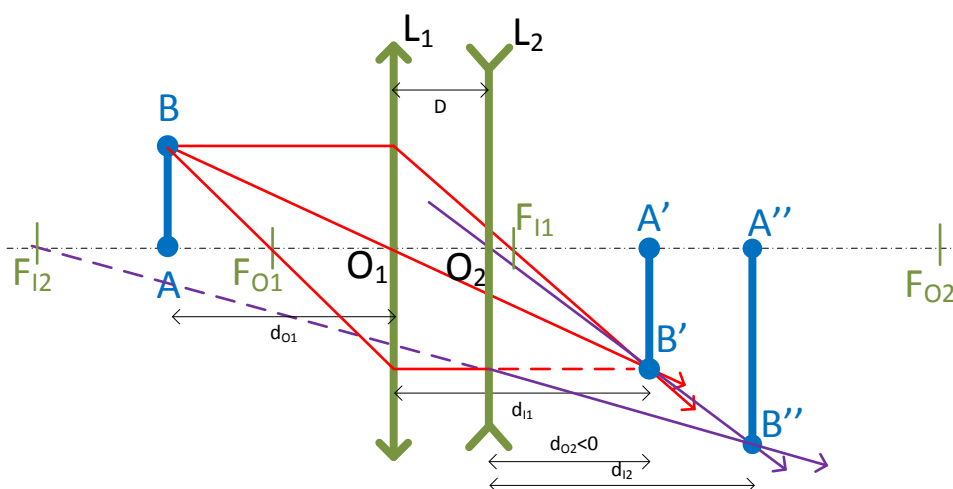


Figura 12: Sistema de lente convergente e divergente com objecto (intermédio) virtual. A imagem final é real e invertida.

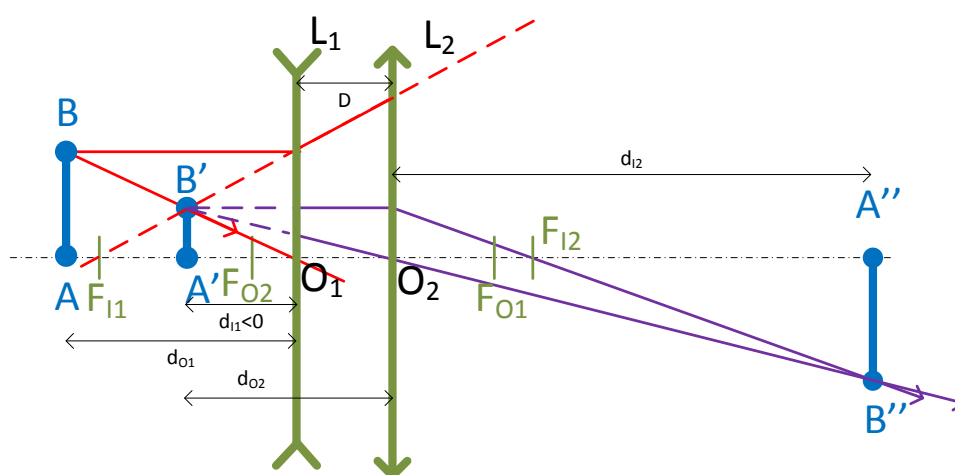


Figura 13: Sistema de lente convergente e divergente.

6 Protocolo Experimental

6.1 Questões a responder ANTES da sessão de Laboratório:

1. Descreva por palavras suas quais os objectivos do Trabalho que irá realizar na sessão de Laboratório (uma folha A4). Indique as expressões que irá utilizar para obter as grandezas experimentais, bem como as expressões para calcular as incertezas. Inclua esta parte também no Relatório. Este irá constituir o ÚNICO meio de consulta na Prova Individual.
2. Utilizando uns óculos graduados (se não usar, peça a um colega), obtenha e registre a sua graduação. Calcule a distância focal, $f = 1/\text{Dioptrias}$ (para miopia são lentes divergentes, para hipermetropia são convergentes. Ignore a correção do astigmatismo).
3. Classifique as imagens visualizadas através das lentes, i.e: Reais/Virtuais, Direitas/Invertidas, Ampliadas/Reduzidas, Posição da Imagem relativa aos objetos.
4. Para uma lente de -2.5 Dioptrias calcule a posição da imagem para um objeto a 40 cm da lente. A que distância está do objeto?
5. Para uma lente convergente (óculos ou uma lupa) em que condições obtém uma imagem virtual: a) direita; b) invertida?

6.2 Material utilizado

- caixa de óptica equipada com calha graduada
- lentes convergentes e divergente
- semi-cilindro de vidro acrílico
- diafragmas
- polaroides
- suportes
- fonte luminosa com lâmpada de incandescência linear

6.3 Procedimento Experimental

6.3.1 Índice de refração dum vidro acrílico

1. Utilizando a fonte luminosa obtenha um feixe de luz branca de raios paralelos. Que tipo de lente necessita?
2. Com os diafragmas obtenha um feixe de luz estreito (≈ 1 mm), alinhado com o eixo do Transferidor.
3. Faça incidir luz branca na superfície plana do semi-cilindro de vidro acrílico. Observe e obtenha os ângulos de reflexão e a transmissão para vários ângulos do feixe incidente, à esquerda e à direita. Faça medições pelo menos para nove valores diferentes do ângulo de incidência.
4. Determine a) *a partir do gráfico*, e b) por ajuste, o índice de refração do vidro acrílico.
5. Repita as medidas e a análise dos resultados fazendo agora a incidência na superfície cilíndrica.
6. Compare o índice de refração do vidro acrílico a partir da incidência nas duas faces.

7. Estime também o valor do índice de refração a partir do ângulo limite de reflexão total.
8. Compare a precisão dos diferentes valores obtidos de n_{vidro} .

6.3.2 Polarização da luz. Ângulo de Brewster

Observe o efeito de interposição de dois polaroides paralelos ou cruzados no percurso de um feixe luminoso. Usando a mesma montagem do ponto anterior, polarize o feixe paralelamente ao plano de incidência. Para valores do ângulo de incidência próximos do ângulo de Brewster (que pode calcular a partir do índice de refração) obtenha o intervalo angular em que se extingue praticamente o feixe reflectido.

6.3.3 Distância focal de uma lente convergente ($f \approx 75 \text{ mm}$)

1. Obtenha um feixe de luz branca de raios paralelos. Determine a distância focal (d.f.) da lente pelo método directo. Repita a experiência duas vezes, colocando a lente noutra posição relativamente à lente de raios paralelos.
2. Coloque o *objeto* com mira no suporte da calha, iluminado-o directamente com a fonte luminosa. Coloque a mesma lente convergente a uma distância $150 \text{ mm} < d_O < 75 \text{ mm}$ do objeto.
3. Com o écran plano procure a posição correcta para obter uma *imagem* focada. Utilizando a equação dos focos conjugados, calcule de novo a d.f. da lente.
4. Na folha quadriculada em anexo desenhe um diagrama com o eixo óptico, o objecto e a lente convergente. Utilizando as aproximações paraxial e das lentes delgadas desenhe a construção geométrica e obtenha a posição da imagem e a respectiva ampliação.
5. Medindo agora a imagem determine a ampliação linear. Compare-a com a que podia calcular pelas distância d_O e d_I .
6. Repita a experiência duas vezes, colocando a lente noutras posições relativamente ao objecto.
7. Compare o valor da distância focal com o obtido em a) e estime a precisão envolvida em cada um dos métodos que utilizou.

6.3.4 Distância focal de uma lente divergente ($f \approx -150 \text{ mm}$)

1. Associe no mesmo suporte a lente divergente com uma convergente ($f \approx 75 \text{ mm}$) de forma a que o conjunto se comporte como um sistema convergente.
2. Repita a montagem com objecto e a sua imagem real.
3. Conhecidas a distância focal da lente convergente e a distância entre lentes D , calcule a distância focal da lente divergente a partir de d_O e d_I .
4. Repita a experiência (pelo menos uma vez), colocando o conjunto das lentes noutra posição relativamente ao objeto.

