



# Interferência e Difração de Ondas Eletromagnéticas num meio dielétrico, homogéneo e isotrópico .

## 1 Introdução

### 1.1 Onda plana monocromática

Uma onda plana e luz pode ser estabelecida com uma lente convergente esférica e uma fonte luminosa pontual ou uma lente convergente cilíndrica e uma fonte linear (e.g um filamento linear). À escala do Laboratório a luz solar é também uma excelente aproximação da Onda Plana. Se a fonte de luz tiver apenas um comprimento de onda (ou cor) ela é *monocromática*, ou de frequência única e constante. O modelo da onda plana monocromática que se propaga numa direção  $\vec{s}$ , descreve o campo eletromagnético  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  de acordo com <sup>1, 2</sup>:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t - \delta_0) \quad (1)$$

$$= \Re\{\mathbb{E}\} = \vec{E}_0 \cdot \Re\{e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t - \delta_0)}\} \quad (2)$$

Em que,  $\vec{k}$ , é o número de onda ou vetor de propagação  $\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \vec{s}$ ,  $(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t - \delta)$  é a fase da onda no ponto  $\vec{r}$  e instante  $t$  e  $\delta_0$ , a fase na origem, que consideremos nula no resto do texto.

Pode provar-se que:

1.  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  e  $\vec{s}$  formam um triedro direto de um produto externo.
2.  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  definem o plano de onda, que é portanto transversal à direção de propagação,  $\vec{s}$ .

### 1.2 Onda Esférica monocromática

A onda criada por uma fonte pontual que radia isotropicamente em todas as direções é dada por:

$$\vec{E} = \frac{E_0}{r} \cdot \Re\{e^{i(kr - \omega t)}\} \cdot \vec{s}_r \quad (3)$$

<sup>1</sup>A quantidade  $e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t - \delta_0)}$  é apenas uma extensão matemática no conjunto complexo,  $\mathbb{C}$ , que irá facilitar as contas de somar e, sobretudo, multiplicar. O campo Eléctrico físico é dado pela *componente real* deste número complexo. Chamemos  $\mathbb{E}$  à extensão Complexa do vetor  $\vec{E}$ .

<sup>2</sup>“Recordar” a *fórmula de Euler*:  $e^{i\alpha} = \cos(\alpha) + i \sin(\alpha)$

A direção de propagação varia com a posição e é radial  $\vec{s}_r = \vec{r}/r$ . A amplitude varia com  $\frac{1}{r}$  e o termo espacial na fase é  $kr$  (e não  $\vec{k} \cdot \vec{r}$  como na onda plana).

### 1.3 Densidade de Energia na onda e Intensidade Luminosa

1. A densidade de energia elétrica  $w_e = \frac{\epsilon |\vec{E}|^2}{2}$  é igual a  $w_m = \frac{|\vec{B}|^2}{2\mu}$ ,  $\epsilon |\vec{E}|^2 = \frac{|\vec{B}|^2}{2\mu}$ ,  $\vec{B} = \sqrt{\epsilon\mu} \vec{E}$ , e

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \rightarrow \vec{H} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \vec{E} \quad (4)$$

2. A transferência de energia que acompanha a propagação da onda é descrita pelo vetor de Poynting

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} |\vec{E}|^2 \vec{s} \quad (5)$$

$\vec{s}$  é a direção em que se propaga a onda e a energia.

O fluxo do vetor de Poynting representa a energia que na unidade de tempo atravessa a superfície fechada (que delimita um Volume) perpendicularmente a ela. Porque a energia se conserva é igual à diminuição no tempo de energia no interior do Volume considerado. O vetor de Poynting é assim a quantidade de energia que flui por unidade de tempo e por unidade de área (e perpendicularmente a ela)

3. A intensidade luminosa ou radiância é calculada pelo valor médio (no tempo: “ $\langle \rangle$ ”) do módulo do vetor de Poynting:

$$I = \langle S \rangle = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \langle |\vec{E}|^2 \rangle \quad (6)$$

A partir da equação (1) e sabendo-se que  $\langle (A \cos(wt))^2 \rangle = \frac{1}{2} A^2$ , obtém-se

$$I = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} |\vec{E}|^2 \quad (7)$$

e usando a representação complexa:

$$I = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \mathbb{E} \mathbb{E}^* \quad (8)$$

em que  $\mathbb{E}^*$  é o *complexo conjugado* de  $\mathbb{E}$ , i.e. se  $\mathbb{E} = \vec{E} \cdot e^{\alpha} \rightarrow \mathbb{E}^* = \vec{E} \cdot e^{-\alpha}$ .

## 2 Interferência de ondas eletromagnéticas produzida por duas fontes coerentes afastadas entre si de $\underline{a}$

Se um feixe de luz incidir em duas fendas, então do lado direito é como se tivémos duas fontes pontuais situadas nas posições  $F_1$  e  $F_2$ .

Se distâncias  $FF_1 = FF_2$  as amplitudes e as fases do campo  $E$  em  $F_1$  e  $F_2$  são idênticas e as fontes são coerentes<sup>3</sup>.

<sup>3</sup>De forma a que o atraso entre os dois raios não fosse maior que o *tempo de coerência da fonte*

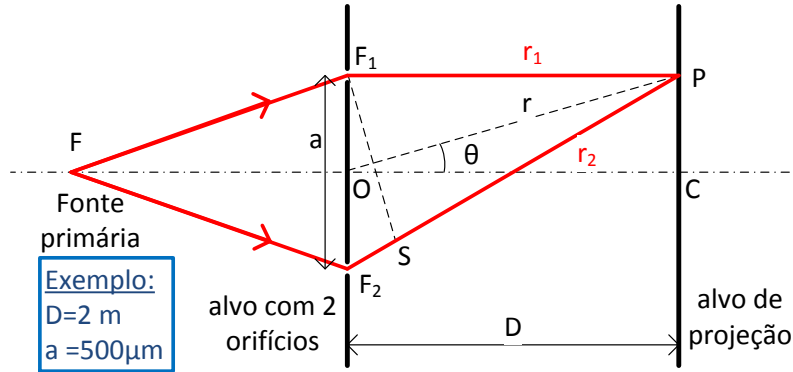


Figura 1: Interferência produzida por duas fontes coerentes. As dimensões NÃO estão à escala. Na realidade temos de ter  $D \gg a$ .

Em qualquer ponto do alvo de projeção a soma é vetorial:

$$\vec{E}_{total} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \Re\{\mathbb{E}_1 + \mathbb{E}_2\} \quad (9)$$

em que  $\vec{E}_i$  é o campo elétrico devido à fonte  $F_i$

A intensidade (8) virá pois

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \langle \mathbb{E}_{total} \mathbb{E}_{total}^* \rangle \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} [\langle \mathbb{E}_1 \mathbb{E}_1^* + \mathbb{E}_1 \mathbb{E}_2^* + \mathbb{E}_2 \mathbb{E}_1^* + \mathbb{E}_2 \mathbb{E}_2^* \rangle] \\ &= I_1 + I_2 + I_{12} \end{aligned} \quad (10)$$

em que

$$I_1 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \langle E_1 E_1^* \rangle, \quad e \quad I_2 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \langle E_2 E_2^* \rangle \quad (11)$$

A intensidade total difere da soma das intensidades no termo  $I_{12}$ , chamado termo de interferência

$$I_{12} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \langle E_1 E_2^* + E_2 E_1^* \rangle \quad (12)$$

mas os dois termos são conjugados um do outro

$$E_1 E_2^* = (E_2 E_1^*)^* \quad (13)$$

Vamos supor que os campos que atingem o ponto  $P$  são do tipo onda esférica (equação 14)

$$E_1 = E_{F1} \frac{1}{r_1} e^{i(kr_1 - \omega t)} \quad (14)$$

$$E_2 = E_{F2} \frac{1}{r_2} e^{i(kr_2 - \omega t)} \quad (15)$$

$$\text{como } FF_1 = FF_1 \quad ; \quad E_{F_1} = E_{F_1} = E_{F_i} \quad (16)$$

Do esquema da fig. 1 pode concluir-se que

$$r_2 \approx r_1 + a \sin \theta \quad (17)$$

a quantidade  $a \sin \theta$  tem um valor muito pequeno<sup>4</sup>, i.e. na amplitude dos campos em (??) e (??)  $r_1 \cong r_2 = r$ . Mas a mesma aproximação não pode ser feita na fase, porque em

$$kr_2 = kr_1 + ka \sin \theta \quad , \text{ e}$$

$$ka \sin \theta = \frac{2\pi}{\lambda} a \sin \theta \rightarrow \text{varia entre } 0 \text{ e } \frac{2\pi}{\lambda} a \sim 5 \cdot 10^3, \text{ para } \lambda \simeq 600 \text{ nm}$$

produzindo variações muito sensíveis na fase.

$$I_{12} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \left( E_{F_1} \cdot \frac{1}{r} \right)^2 [\langle e^{i(kr_1 - wt)} e^{-i(kr_2 - wt)} + \text{conjugado} \rangle]$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \left( \frac{E_i}{r} \right)^2 [\langle e^{ik(r_1 - r_2)} + \text{conjugado} \rangle] \quad (18)$$

Atendendo à fórmula de Euler, o termo entre parêntesis retos em (18) é

$$2 \cos(k(r_1 - r_2)) = 2 \cos(k(r_2 - r_1)) = 2 \cos(ka \sin \theta)$$

com a hipótese (16)

$$I_1 = I_2 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \left( \frac{E_i}{r} \right)^2 \quad (19)$$

$$I_{12} = 2I_1 \cos(ka \sin \theta) \quad (20)$$

$$I_{total} = 2I_1 [1 + \cos(ka \sin \theta)] \quad (21)$$

mas  $\cos X = \cos^2 \frac{X}{2} - \sin^2 \frac{X}{2} = 2 \cos^2 \frac{X}{2} - 1$  ;  $\cos X + 1 = 2 \cos^2 \frac{X}{2}$

$$I_{total} = 4I_1 \cos^2 \left( \frac{ka \sin \theta}{2} \right) \quad (22)$$

(Ver representação gráfica na fig. 2) A função da expressão (22) está representada à esquerda para uma fonte monocromática. Apresenta máximos para  $\cos^2 \frac{ka}{2} \sin \theta = 1$ , i.e

$$\text{máximos para } \frac{ka}{2} \sin \theta = m\pi \quad (23)$$

$$\text{e mínimos para } \frac{ka}{2} \sin \theta = (2m + 1) \frac{\pi}{2} \quad (24)$$

Os máximos de intensidade correspondem a

$$\sin \theta = \frac{m\lambda}{a} \quad (25)$$

---

<sup>4</sup>Esta quantidade quando comparada com  $r_1$   $\frac{a \sin \theta}{r_1} \sim \frac{a}{r} \sim \frac{500 \times 10^{-6}}{2} \sim 10^{-4}$

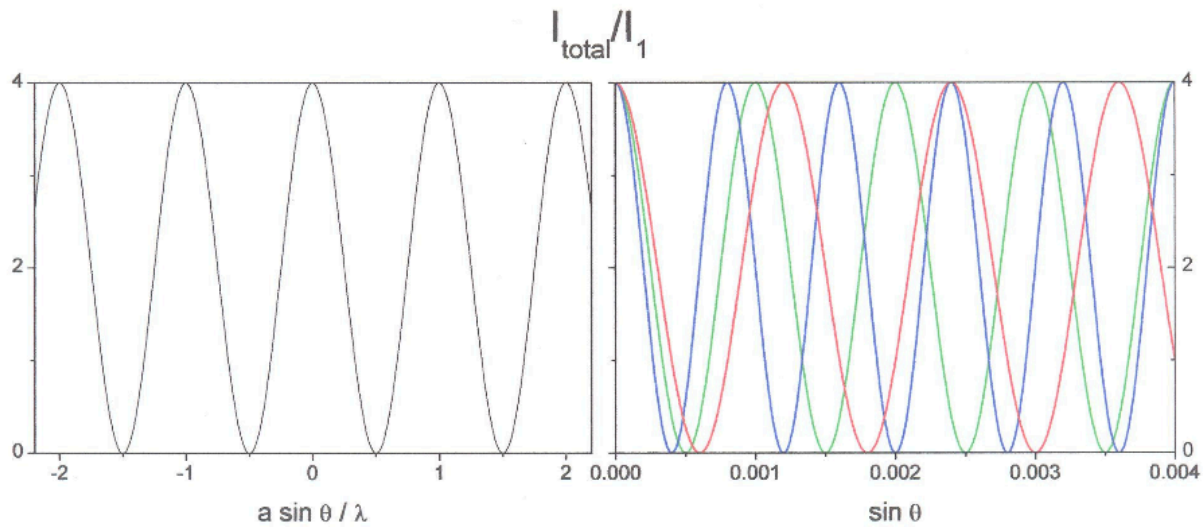


Figura 2: Intensidade da figura de interferência produzida por duas fontes coerentes. Fonte monocromática (esquerda) e policromática (direita).

São igualmente afastados em  $\sin \theta$  e têm teoricamente a mesma intensidade, sendo o máximo de ordem zero observado no ponto central (C na figura 1)

$m$  é a ordem de interferência e corresponde ao número de comprimentos de onda (c.d.o.) de que diferem os percursos  $r_1$  e  $r_2$  no ponto considerado (por exemplo para  $|m| = 2$  diferem de  $2\lambda$ ).

A relação (25) varia linearmente com  $\lambda$ . Na figura 2 à direita, representa-se a figura de interferência para uma radiação policromática<sup>5</sup>, só na ordem zero há coincidência dos máximos. O 1º máximo de ordem 1 é irisado, para ordens elevadas a mistura de várias ordens dará um “branco sujo”.

### 3 Difração por uma Fenda

As primeiras interpretações das figuras de difração foram feitas por Huygens e Fresnel que supuseram que os pontos de um écran, com uma fenda iluminada por uma fonte luminosa  $F$  constituem fontes secundárias que emitem ondas esféricas que interferem entre si. A dedução que se apresenta é válida quando a maior das distâncias  $r$  entre  $F$  e um ponto da fenda  $O$  ou  $OQ$  (sendo  $Q$  um ponto do alvo de projecção) é tal que  $\frac{r}{s} \gg \frac{s}{\lambda}$ , em que  $s$  é a largura da fenda e  $\lambda$  o comprimento de onda emitido por  $F$ . Esta aproximação é conhecida como **aproximação de Fraunhofer** e corresponde a considerar que  $F$  emite uma onda que, quando atinge a fenda, é praticamente uma onda plana.

A contribuição do elemento  $dz$  do écran (à distância  $z$  da origem) para o campo elétrico em  $P$  é elementar e é

$$dE_P(dz) = \frac{E(z)}{r(z)} e^{i(kr - \omega t)} dz \quad (26)$$

em que  $E(z)$  é a amplitude do campo no ponto médio do elemento  $dz$  e  $r(z)$  é a distância deste ponto a  $P$ .

Em 1ª aproximação (dado que  $s \ll r$ ;  $s \simeq 10^2 \mu m$ ,  $r \sim 1m$ )

$$r(z) = r_0 - z \sin \theta \quad (27)$$

<sup>5</sup> $\lambda_{azul} = 400nm$ ,  $\lambda_{verde} = 500nm$ ,  $\lambda_{vermelho} = 600nm$ ,  $a = 50 \mu m$

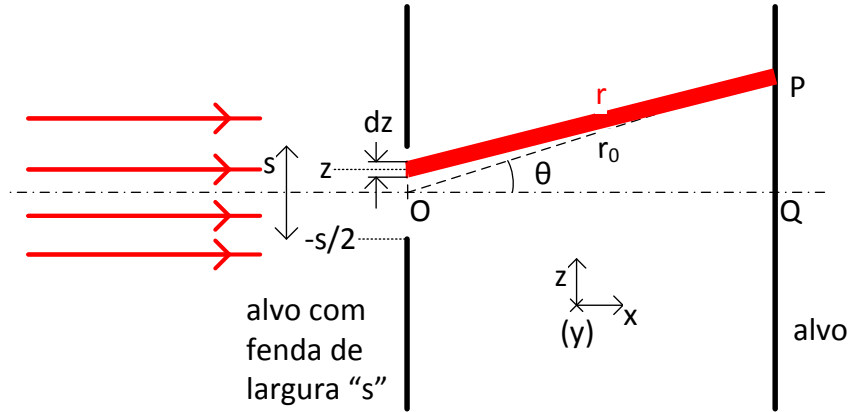


Figura 3: Difração produzida por uma fenda. As dimensões não estão à escala ( $r \gg s$ ).

Em que o termo  $z \sin \theta$  é muito inferior a  $r_0$

O cálculo de  $E_P$  é feito somando todas as contribuições do tipo (26)

$$\begin{aligned} E_P &= \int_{-\frac{s}{2}}^{\frac{s}{2}} dE_P = \int_{-\frac{s}{2}}^{\frac{s}{2}} \frac{E(z)}{r(z)} e^{i(kr_0 - kz \sin \theta - \omega t)} dz \\ &= \left( \frac{E}{r} \right)_{z=0} e^{i(kr_0 - \omega t)} \int_{-\frac{s}{2}}^{\frac{s}{2}} e^{-ikz \sin \theta} dz \end{aligned} \quad (28)$$

$E(z) \simeq E(z=0)$  na hipótese da onda plana que atinge o écran.

$r \simeq r(z=0) = r_0$  na amplitude, aproximação que não é feita na fase.

O integral

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{s}{2}}^{\frac{s}{2}} e^{-ikz \sin \theta} dz &= \frac{1}{-ik \sin \theta} \left[ e^{-ikz \sin \theta} \right]_{-\frac{s}{2}}^{\frac{s}{2}} \\ &= \frac{1}{-ik \sin \theta} \left[ e^{-ik \frac{s}{2} \sin \theta} + e^{+ik \frac{s}{2} \sin \theta} \right] \end{aligned} \quad (29)$$

Mas pela fórmula de Euler

$$[\dots] = -2i \sin\left(\frac{ks}{2} \sin \theta\right) \quad (30)$$

O integral virá pois igual a

$$\begin{aligned} \frac{2 \sin\left(\frac{ks}{2} \sin \theta\right)}{k \sin \theta} &= s \frac{\sin\left(\frac{ks}{2} \sin \theta\right)}{\frac{ks}{2} \sin \theta} \\ E_P &= \left( \frac{E}{r} \right)_0 s e^{i(kr_0 - \omega t)} \frac{\sin\left(\frac{ks}{2} \sin \theta\right)}{\frac{ks}{2} \sin \theta} \end{aligned} \quad (31)$$

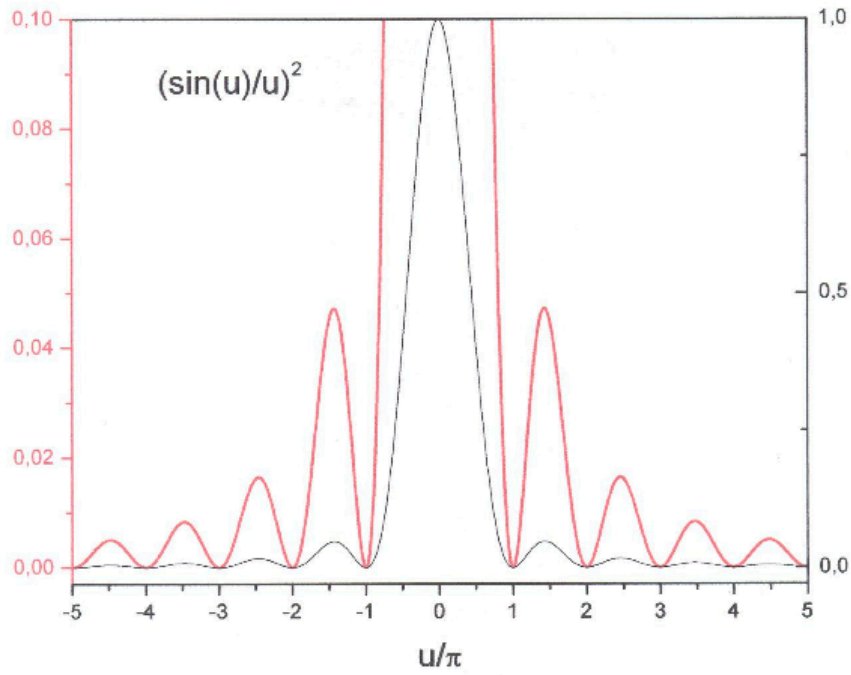


Figura 4: Evolução da função  $\left(\frac{\sin u}{u}\right)^2$  (a preto). Para se visualizarem os máximos secundários apresenta-se a vermelho no mesmo gráfico com a escala de ordenadas ampliada de 10 vezes. A mancha central tem uma extensão (em  $\sin \theta$ ) que é dupla das manchas laterais.

A intensidade  $I$  será pois

$$I = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \left( \frac{E}{r} \right)_0^2 s^2 \left[ \frac{\sin\left(\frac{ks}{2} \sin \theta\right)}{\frac{ks}{2} \sin \theta} \right]^2 \quad (32)$$

O último termo  $[\dots]$  é do tipo  $\left(\frac{\sin u}{u}\right)^2$  (Figura 4) e tem zeros para  $u = m\pi$  com  $m \neq 0$ . Tem um máximo principal para  $m = 0$  e vale 1. Assim o fator  $I_0 \equiv \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \left( \frac{E}{r} \right)_0^2 s^2$  representa o valor de intensidade máxima que se vai observar no ponto  $Q$  (figura 3)

$$I = I_0 \cdot \underbrace{\left( \frac{\sin u}{u} \right)^2}_{\text{Fator de forma de fenda}}, \text{ com } u \equiv \frac{ks}{2} \sin \theta \quad (33)$$

### 3.1 Mínimos da figura de difração

Os zeros de  $\left(\frac{\sin u}{u}\right)^2$  correspondem a

$$\frac{ks}{2} \sin \theta = m\pi, \text{ com } m \neq 0 \quad (34)$$

$$\frac{2\pi s}{\lambda} \sin \theta = m\pi \Rightarrow \sin \theta = m \frac{\lambda}{s} \quad (35)$$

[Notar a dependência do comprimento de onda  $\lambda$  e da largura de fenda  $s$ ]

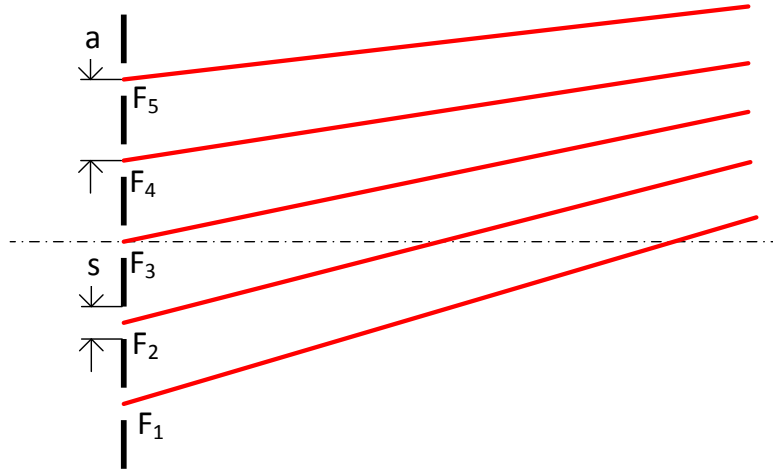


Figura 5

$m = \pm 1$  corresponde à posição do 1º mínimo que rodeia o máximo central e  $\sin \theta_{m=1} = \frac{\lambda}{s}$ .  $\theta_1$  é o ângulo segundo o qual do centro da fenda se vê o 1º mínimo.

Quanto aos máximos da figura embora estejam situados naturalmente entre os vários mínimos, NÃO são dados, desta vez, exactamente pela expressão do tipo (24). Como tal não os consideremos para este trabalho (contudo ver apêndice 7.1).

## 4 Difração por N Fendas de Largura $s$ Afastadas de $a$

### 4.1 Primeiro, SEM considerar o efeito de largura da fenda, $s$

O campo eléctrico  $\vec{E}$  num ponto  $P$  do alvo de projecção quando as  $N$  fendas são iluminadas por uma fonte luminosa tal que os valores do campo eléctrico  $\vec{E}_0$  nas diferentes aberturas são os mesmos em amplitude e fase (aproximação de onda plana).

$$\vec{E}_P = \vec{E}_{P_1} + \vec{E}_{P_2} + \cdots + \vec{E}_{P_N} \quad (36)$$

em que  $E_{P_i}$  representa a contribuição da fenda  $i$  para o campo no ponto  $P$ .

$$\begin{aligned} |\vec{E}_{P_1}| &= E_0 \frac{1}{r_1} e^{i(kr_1 - \omega t)} \\ |\vec{E}_{P_2}| &= E_0 \frac{1}{r_2} e^{i(kr_2 - \omega t)} & r_2 &= r_1 - a \sin \theta \\ |\vec{E}_{P_i}| &= E_0 \frac{1}{r_i} e^{i(kr_i - \omega t)} & r_i &= r_1 - (i - 1)a \sin \theta \end{aligned} \quad (37)$$



O termo  $(i-1)a \sin \theta \ll r_1$  e pode desprezar-se na amplitude de  $E_{P(1)}$  mas terá que ser considerado na fase.

$$E_P = \frac{E_0}{r_1} e^{i(kr_1 - \omega t)} \left[ \underbrace{1 + e^{-ika \sin \theta} + e^{-ik2a \sin \theta} + \dots + e^{-ik(N-1)a \sin \theta}}_{N \text{ termos}} \right] \quad (38)$$

Podemos reconhecer na expressão anterior uma soma de termos de uma progressão geométrica de razão  $R = e^{-ika \sin \theta}$ , cuja soma é

$$\frac{1 - R^N}{1 - R} u_1 = \frac{1 - e^{-iNX}}{1 - e^{-iX}} = \frac{1 - e^{-iNka \sin \theta}}{1 - e^{-ika \sin \theta}} \quad (39)$$

A Intensidade vem, de (8),  $I_P = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E_P E_P^*$

$$E_P E_P^* = \left(\frac{E_0}{r}\right)^2 \cdot [\text{soma}] \cdot [\text{soma}^*] \quad (40)$$

O produto dos fatores  $[\text{soma}] \cdot [\text{soma}^*]$  é do tipo

$$\begin{aligned} \left( \frac{1 - e^{-iNX}}{1 - e^{-iX}} \right) \cdot \left( \frac{1 - e^{+iNX}}{1 - e^{+iX}} \right) &= \\ \frac{1 - e^{-iNX} - e^{iNX} + 1}{1 - e^{-iX} - e^{iX} + 1} &= \frac{2 - (e^{-iNX} + e^{iNX})}{2 - (e^{-iX} + e^{iX})} = \\ \frac{2 - 2 \cos NX}{2 - 2 \cos X} &= \frac{1 - \cos NX}{1 - \cos X} = \frac{2 \sin^2 \frac{NX}{2}}{2 \sin^2 \frac{X}{2}} = \frac{\sin^2 \frac{NX}{2}}{\sin^2 \frac{X}{2}} \end{aligned} \quad (41)$$

Que, com  $v \equiv \frac{ka}{2} \sin \theta = \frac{X}{2}$ , se obtém

$$\begin{aligned} I_P &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \left(\frac{E_0}{r}\right)^2 N^2 \left( \frac{\sin \frac{NX}{2}}{N \sin \frac{X}{2}} \right)^2 \\ &= I_0 \left( \frac{\sin Nv}{N \sin v} \right)^2 \end{aligned} \quad (42)$$

O termo  $\left( \frac{\sin Nv}{N \sin v} \right)^2$  designa-se termo de interferência e corresponde à *interferência de N fendas*.

#### 4.1.1 Máximos Principais

Para  $v = m\pi$  temos

$$\begin{aligned} \left. \begin{array}{l} \sin v = 0 \\ \sin Nv = 0 \end{array} \right\} &\Rightarrow \left( \frac{\sin Nv}{N \sin v} \right)^2 \rightarrow \left( \frac{0}{0} \right)^2 \\ \lim_{v \rightarrow m\pi} \frac{\sin Nv}{N \sin v} &= \lim_{v \rightarrow m\pi} \frac{N \cos Nv}{N \cos v} = \frac{N(\pm 1)}{N(\pm 1)} = \pm 1 \end{aligned} \quad (43)$$

Quando  $v \rightarrow 0$   $\lim(\dots)^2 = 1$ , e portanto o fator que multiplica o termo de interferência na expressão (42) é  $I_0$ , a intensidade no centro da figura de interferência.

O termo de interferência terá uma série de Máximos Principais laterais  $v = \frac{ka}{2} \sin \theta = m\pi$ .

Como o termo de interferência tem  $N$  no denominador, a intensidade dos máximos secundários diminui com o aumento de  $N$  (Ver Apêndice 7.2). Assim para uma rede com um elevado número de linhas estes máximos secundários são praticamente inobserváveis.

## 4.2 Efeito da largura da fenda, $s$

Se considerarmos o efeito de difração produzido por cada fenda de largura  $s$ , (seção 3) a intensidade deverá conter este fator, que modula o termo de interferência de  $N$  fendas.

$$I_P(\theta) = I_0 \cdot \underbrace{\left(\frac{\sin u}{u}\right)^2}_{\text{Fator de forma de fenda}} \cdot \underbrace{\left(\frac{\sin Nv}{N \sin v}\right)^2}_{\text{Termo de interferência}}$$

Onde  $u \equiv \frac{ks}{2} \sin \theta = \pi \frac{s}{\lambda} \sin \theta$ , e  $v \equiv \frac{ka}{2} \sin \theta = \pi \frac{a}{\lambda} \sin \theta$  (44)

Representemos na figura seguinte a tracejado azul o termo de interferência para  $a = 160 \mu m$ ,  $\lambda = 640 \mu m$  e  $N = 2$  e a vermelho o fator de forma da fenda de largura  $s = 40 \mu m$ . Ambos têm um máximo para  $\sin v = 0$ , o do termo de interferência, tal que

$$v = m_v \pi \Leftrightarrow \pi \frac{a}{\lambda} \sin \theta = m_v \pi$$

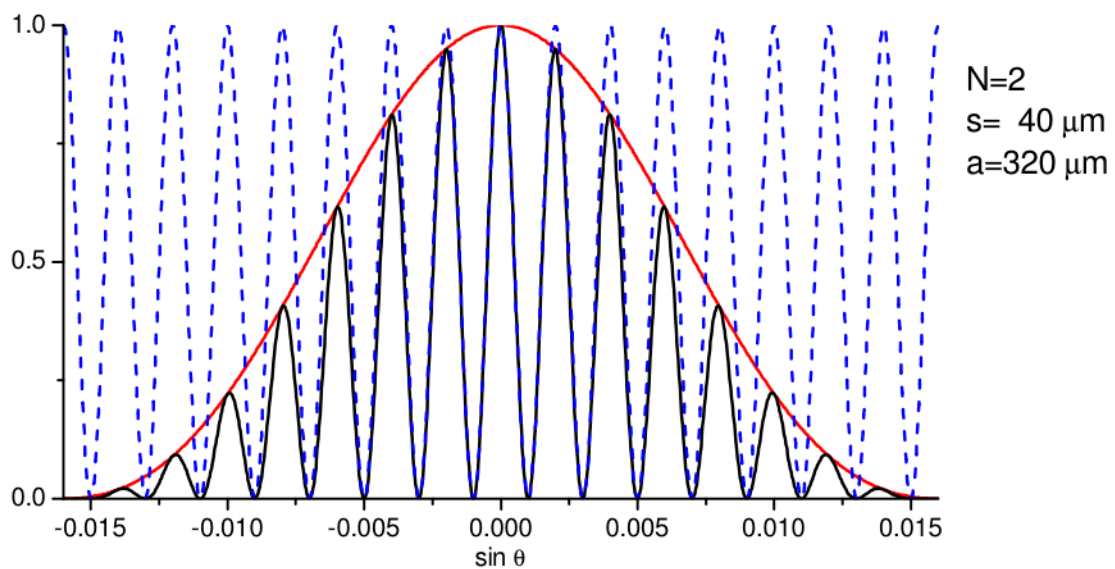
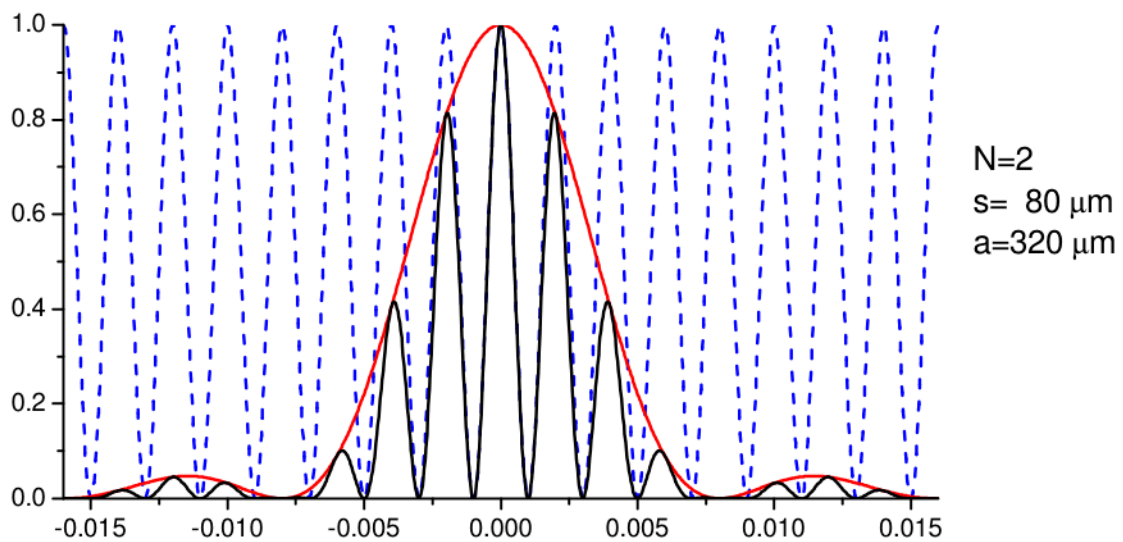
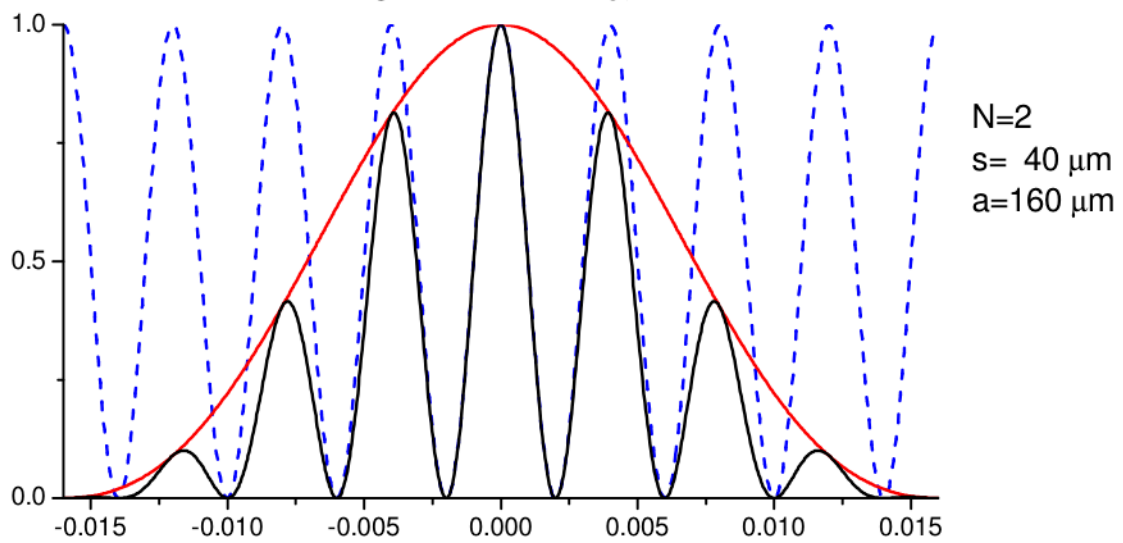
$$\sin \theta = m_v \frac{\lambda}{a}$$
(45)

O fator de forma tem mínimos para

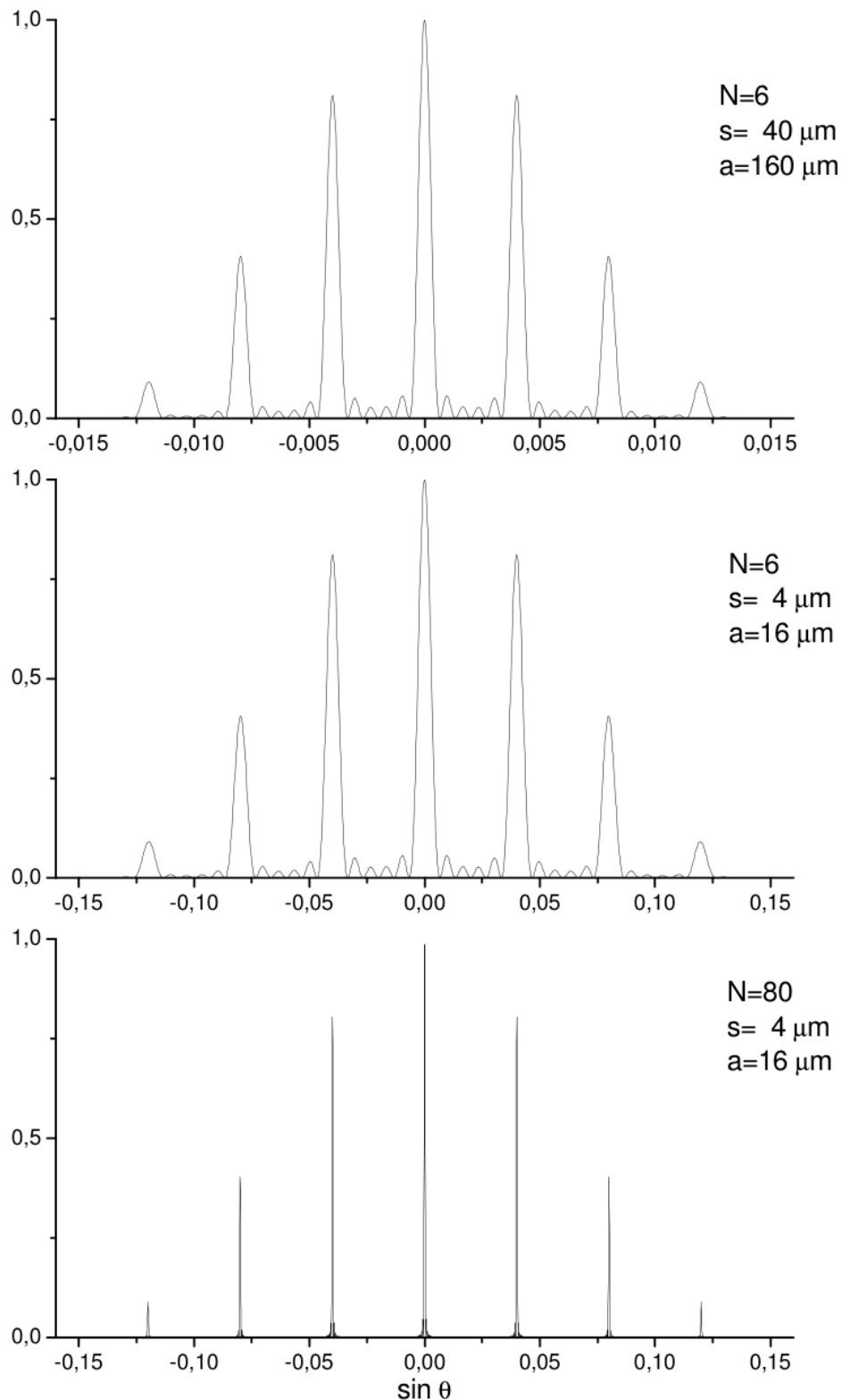
$$\sin \theta = m_u \frac{\lambda}{s}, \quad (m_u \neq 0)$$
(46)

Por exemplo, se  $a = 4s$  para  $m_v = 4 \rightarrow \sin \theta = 4 \frac{\lambda}{a} = m_u \frac{\lambda}{a/4} = m_u \frac{\lambda}{s}$ , com  $m_u = 1$ , isto é o máximo para  $m_v = 4$  e o mínimo para  $m_u = 1$

Irradiância do **factor de forma** de uma fenda e do **termo de interferência** de duas fendas. Figura de difracção de duas fendas



## Irradiância produzida por uma rede de difracção



Para uma rede com um elevado número de linhas (no laboratório existem de 80, 100, 300 e 600 por mm) só são observáveis os máximos principais que correspondem a  $\sin \theta = m \frac{\lambda}{a}$ , notando-se o efeito do fator de forma da fenda que é uma envolvente da intensidade dos máximos.

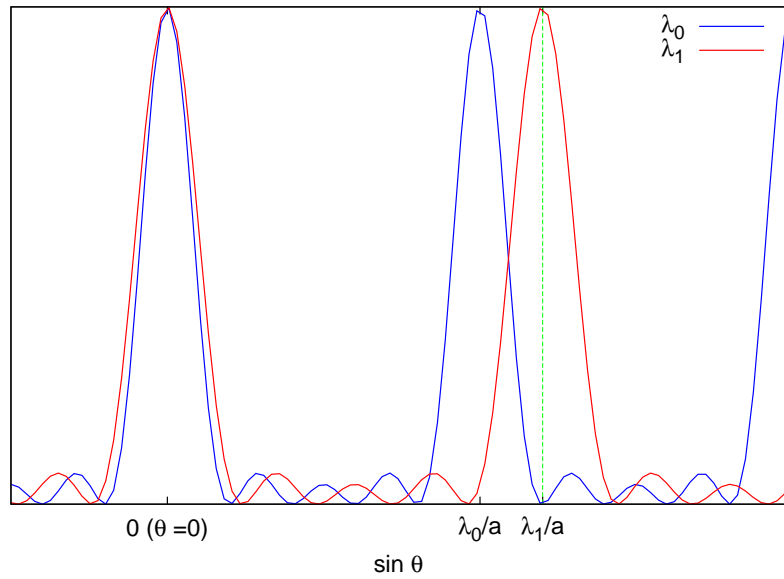


Figura 6: Critério de resolução para uma rede de  $N = 5$  fendas, ordem  $m = 1$  e dois c.d.o.

## 5 Poder de Resolução de uma Rede de Difração

Referiu-se, a propósito de resolução de um prisma, o critério de Rayleigh para resolução de duas riscas como o afastamento mínimo dos dois comprimentos de onda associados tal que o máximo de uma risca correspondia ao mínimo de outra (Figura 6).

Devido ao termo de interferência uma rede de  $N$  fendas produz um máximo principal de ordem 1 ladeado do mínimo mais próximo, qual corresponde a

$$|m'| = N + 1 \quad \text{o que implica } v_{0_{min}} = \frac{m'\pi}{N} = \frac{(N+1)\pi}{N}$$

Assim o intervalo mínimo de  $v$  que corresponde à diferença de posição do máximo para o mínimo seguinte será  $\Delta v = \frac{\pi}{N}$  o que atendendo a  $v = \frac{ka}{2} \sin \theta$

$$\frac{ka}{2} \cos \theta \Delta \theta = \frac{\pi}{N} \quad (47)$$

em que  $\Delta \theta$  é o intervalo angular correspondente ao critério de Rayleigh.

Se considerarmos agora que o feixe que incide na rede não é monocromático, uma variação de  $\Delta \lambda$  em  $\lambda$  produz uma variação angular  $\Delta \theta$  que considerando a equação dos máximos da rede (45).

$$\frac{d}{d\theta} (\sin \theta) = \frac{d}{d\theta} \left( m \frac{\lambda}{a} \right) \quad (48)$$

$$\cos \theta = \frac{m}{a} \frac{d\lambda}{d\theta} \Rightarrow \Delta \lambda = \frac{a \cos \theta}{m} \Delta \theta \quad (49)$$

Combinando (49) e (47) obtém-se para a *resolução*  $R$

$$R = \frac{\lambda}{\Delta \lambda} = mN \quad (50)$$

que depende apenas da ordem  $m$  de difração e do número,  $N$ , de linhas (ou fendas) na rede de difração iluminadas pelo feixe .

### 5.1 Questões a responder ANTES da sessão de Laboratório:

1. Dois altifalantes ligados ao mesmo canal de um amplificador estereofónico estão separados de dois metros e emitem uma onda sonora de  $f = 1.0 \text{ kHz}$ . Calcule o(s) ângulo(s) em relação à mediatriz que se deve colocar para deixar de ouvir o som. Explique porquê.
2. Se trocar a polaridade dos fios a uma coluna o que acontece?
3. Um ponteiro Laser verde ( $\lambda = 532 \text{ nm}$ ), é apontado a uma chapa com um “pinhole” de diâmetro  $s = 120 \mu\text{m}$ . Se tiver uma parede a  $150 \text{ cm}$  desta chapa que imagem irá observar? Justifique e faça um esboço à escala 1:1.

## 6 Protocolo Experimental

### 6.1 Material utilizado

1. Caixa de Óptica equipada com calha graduada.
2. Slides com várias fendas,
3. Redes de difracção, filtros corados, suportes.
4. Laser de He-Ne de potência  $\leq 5 \text{ mW}$ .
5. Detetor de intensidade luminosa linear tipo CCD e software de aquisição Caliens

**(Todas as figuras de difracção obtidas devem ser incluídas no relatório)**

### 6.2 Difracção por uma fenda

1. Faça incidir numa das três fendas (A, B, C, respectivamente, 40, 80 e 160  $\mu\text{m}$ ) um feixe de luz monocromática proveniente de um laser de He-Ne ( $\lambda = 632.8 \text{ nm}$ ). Coloque a rede e o alvo, onde vai observar a figura, a distâncias tais que possa usar a aproximação de Fraunhofer(Justifique!). Repita pelo menos para duas posições diferentes do alvo. Estime a largura da fenda a partir da figura de difracção obtida. Estime a precisão e a exactidão que obteve nas duas situações.
2. Difracção por um cabelo Repita o procedimento do ponto anterior usando agora um cabelo montado num suporte. Estime a precisão obtida. Compare a figuras de difracção obtida com a que foi registada para as fendas no ponto anterior, utilizando o *Princípio de Babinet*.

### 6.3 Difracção por uma fenda dupla

Faça incidir numa das três fendas duplas (D, E, F) um feixe de luz monocromática proveniente de um laser de He-Ne ( $\lambda = 632.8 \text{ nm}$ ). Usando um detector CCD linear registe o perfil das intensidades com o programa instalado no PC ao qual o detector está ligado. Conhecendo a largura de cada fenda ( $s = 40 \mu\text{m}$  para D e E e  $80 \mu\text{m}$  para F), a distância entre fendas ( $a = 125 \mu\text{m}$  para D e  $250 \mu\text{m}$  para E e F) e a distância entre slide e alvo simule o perfil obtido para a intensidade. Guarde o ficheiro das intensidades em formato texto para poder simular o perfil usando a equação que permite calcular a intensidade da figura de difracção, ajustando interactivamente os parâmetros  $s$  e  $a$ . Comente o que observou e o resultado das simulações comparado ao perfil experimental.

## 7 Apêndice

### 7.1 Máximos da figura de difração de uma fenda

Entre mínimos regularmente espaçados em  $\sin \theta$  ocorrem máximos secundários correspondentes às soluções da equação

$$\frac{d}{du} \left( \frac{\sin u}{u} \right)^2 = 0 \text{ (com 2ª derivada } \leq 0) \quad (51)$$

$$2 \frac{\sin u}{u} \frac{u \cos u - \sin u}{u^2} = 0 \Rightarrow u \neq 0 \wedge u \cos u - \sin u = 0$$

$$\tan u = u \quad (52)$$

As soluções da equação trigonométrica (52) que correspondem aos máximos secundários são calculados graficamente a partir do pontos de interseção de  $\tan u$  com a reta  $y = u$  (os Pontos  $A, B, C, D$ , etc.) que correspondem a valores  $u$  menores mas próximos de  $\frac{(2n+1)\pi}{2}$  com  $n = 1, 2 \dots$ .

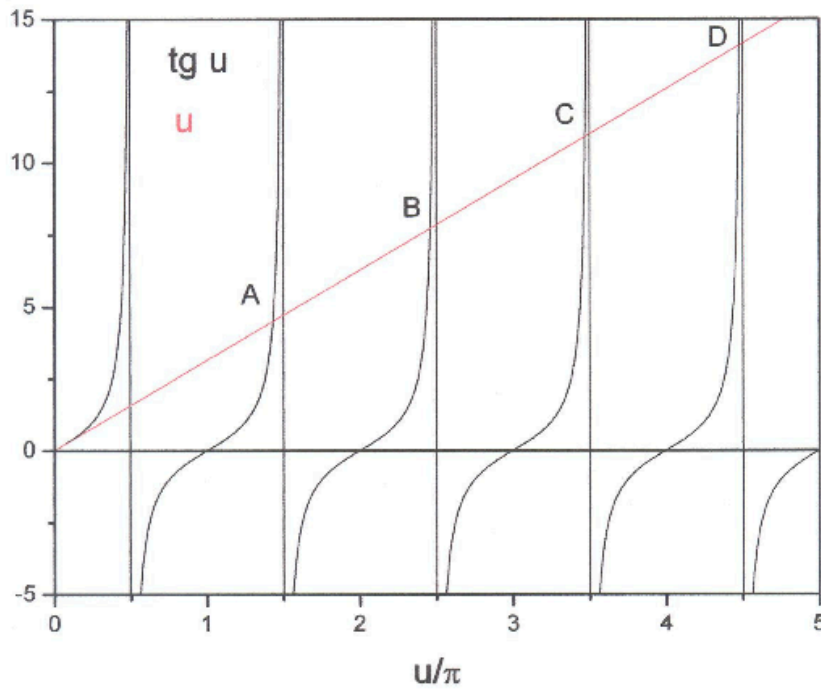


Figura 7

$$I\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \frac{I_0}{\left(\frac{3\pi}{2}\right)^2} \simeq 0.045 I_0 \quad I\left(\frac{5\pi}{2}\right) \simeq 0.016 I_0$$

As soluções numéricas são  $u = \pm 1.4303\pi ; \pm 2.45908\pi$ , etc. e não  $1.5\pi, 2.5\pi \dots$

## 7.2 Mínimos e Máximos Secundários da figura de difração de N fendas, afastadas de $a$

### 7.2.1 Mínimos Secundários

Quando  $Nv = m'\pi$ ,  $v = \frac{m'}{N}\pi$  para  $m' \neq mN$  o termo de interferência terá mínimos de intensidade. E quantos mínimos?

$$m' = 1, \dots, N-1, N \rightarrow \frac{m'}{N} = \underbrace{\frac{1}{N}, \dots, \frac{N-1}{N}}_{N-1 \text{ valores } \neq \text{inteiros}}, \frac{N}{N}$$

Difração por N Fendas de Largura  $s$  Afastadas de  $a$  Haverá portanto  $N-1$  mínimos entre os máximos principais.

### 7.2.2 Máximos Secundários

Entre estes mínimos haverá naturalmente máximos secundários, um entre cada dois mínimos consecutivos sendo portanto  $N-2$ , cujas posições podem ser calculados por

$$\begin{aligned} \frac{d}{dv} \left( \frac{\sin Nv}{N \sin v} \right)^2 &= 2 \left( \frac{\sin Nv}{N \sin v} \right) \frac{N^2 \sin v \cos Nv - N \sin Nv \cos v}{N^2 \sin^2 v} \\ &= 2 \left( \frac{\sin Nv}{N \sin v} \right) \frac{N \cos Nv \cos v}{N^2 \sin v} \left( N \frac{\sin v}{\cos v} - N \frac{\sin Nv}{\cos Nv} \right) = 0 \\ &\Rightarrow \sin v \neq 0 \wedge N \tan v = \tan Nv \end{aligned} \quad (53)$$

Pode verificar-se que se trata de um máximo fazendo a 2ª derivada.