

# Pêndulo gravítico

## Determinação do período do pêndulo simples e aferição do valor da aceleração da gravidade local $g$

### 1 Objectivo

Pretende-se com este trabalho determinar o período de oscilação de um pêndulo simples, constituído por um fio e uma massa, para diferentes comprimentos do fio. A partir destes valores é possível determinar o valor da aceleração da gravidade local  $g$ .

Este tipo de pêndulos foi estudado extensivamente por Galileu Galilei (1564-1642), no início do séc. XVIII. O *pai da Física Moderna* foi o primeiro a constatar a propriedade de isocronismo do pêndulo: para pequenas amplitudes de oscilação, o período é independente quer da amplitude do movimento, quer do valor da massa. Também descobriu que o período é proporcional à raiz quadrada do comprimento do fio. Estas propriedades vieram a permitir a utilização do pêndulo como instrumento de referência para medição de intervalos de tempo e da Hora durante toda a parte d dia: os relógios de pêndulo.

### 2 Movimento Harmónico Simples

O pêndulo gravítico é um exemplo simples de um importante modelo matemático, o “Oscilador Harmónico” (OH), de vastíssima utilização em quase todos o ramos da Física, bem como muitas áreas de Engenharia. Neste modelo, um sistema físico arbitrário encontra-se na vizinhança de uma posição de equilíbrio, onde há um mínimo (local ou absoluto) da sua energia potencial ( $E_P$ ). A Energia pode ser de origem gravítica, elástica, eletrostática ou outra desde que seja do tipo *Conservativa*. Um sistema como este apresenta as seguintes características:

1. Ao distanciar-se deste mínimo, por uma perturbação ou outra força externa inicial, surge

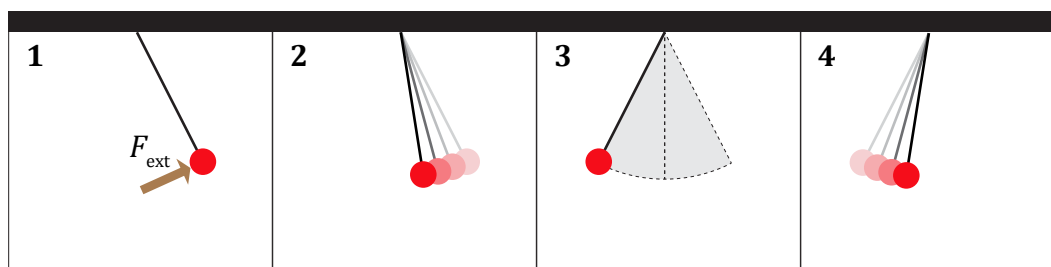


Figura 1: Movimento de um pêndulo gravítico.

uma força de índole conservativa, sempre direccionada de forma a repor o equilíbrio (ver Figura 1).

2. Quando as forças exteriores deixam de actuar, o sistema adquire movimento, transferindo energia potencial para energia cinética ( $E_C$ ).
3. Ao retomar a posição de equilíbrio, o movimento prossegue por inércia até se alcançar um novo máximo, normalmente simétrico ao ponto inicial.
4. Na ausência de atrito, o sistema regressa ao ponto de partida e o ciclo repete-se infinitamente, com período  $T_0$  constante (“Oscilador Livre”). Contudo, na presença de forças dissipativas a energia total deixa de ser constante e irá dissipar-se, diminuindo a amplitude do movimento, até desaparecer (“Oscilador Amortecido”).

## 2.1 Sistema massa-mola

Antes de analisarmos o pêndulo gravítico, cuja solução exacta é algo complexa, vamos considerar o modelo de OH mecânico mais simples, que consiste num sistema de uma massa  $m$  que se move na horizontal e sem atrito, presa a uma mola de constante elástica  $k_{mola}$  que é fixada na sua outra extremidade a um ponto fixo (Figura 2).

Pretendemos determinar a função  $x(t)$  que descreve o movimento da massa nestas condições. Caso a massa se desloque da posição de equilíbrio ( $x = x_0$ ), a energia potencial elástica aumenta e a mola irá exercer uma força de sentido contrário ao do deslocamento  $\Delta x \equiv x - x_0$ . Para simplificar faz-se  $x_0 = 0$  e portanto  $\Delta x = x$ . No modelo ideal da *mola linear* a força é sempre proporcional ao deslocamento  $x$ , com uma constante  $k_{mola}$ :

$$F_{mola} = -k_{mola} x \quad (1)$$

A partir da segunda equação de Newton,  $F = ma$  e sabendo que  $a \equiv \ddot{x} \equiv \frac{d^2x}{dt^2}$  é possível chegar facilmente à equação de movimento do sistema massa-mola (equação diferencial de 2.º grau),

$$ma = -k_{mola}x \Leftrightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k_{mola}}{m}x = 0 \quad (2)$$

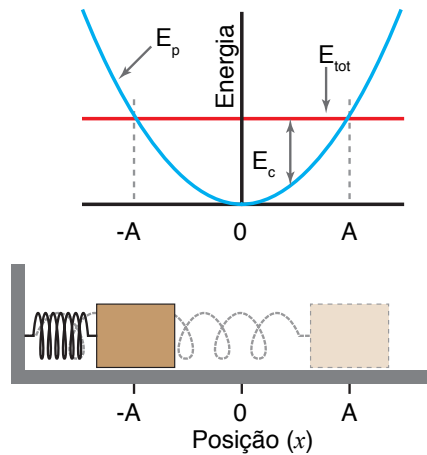


Figura 2: Oscilador Harmónico Simples *massa-mola*.

Pode-se verificar após alguma álgebra<sup>1</sup> que a seguinte função temporal periódica é solução da equação (2):

$$x(t) = c_1 \cos(\omega_0 t) + c_2 \sin(\omega_0 t) = A_0 \sin(\omega_0 t + \phi_0), \text{ com } \omega_0 = \sqrt{\frac{k_{mola}}{m}} \quad (3)$$

em que  $A_0$  é a amplitude e  $\phi_0$  é a fase, ambas constantes e dependentes das condições iniciais de posição e velocidade. Finalmente  $\omega_0$  é a frequência angular de ressonância, inversamente proporcional ao período, o qual depende apenas da massa  $m$  e de  $k_{mola}$ :

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k_{mola}}} \quad (4)$$

Assim, a solução para a posição  $x(t)$  é uma função sinusoidal (harmónica). Uma vez que a velocidade  $v(t)$  é a derivada temporal da posição, também será uma função sinusoidal, com um desfasamento de  $\pi/2$  em relação a  $x(t)$ .

## 2.2 Pêndulo gravítico

O pêndulo gravítico consiste na sua forma idealizada numa massa pontual suspensa<sup>2</sup> a partir de um fio inextensível, de comprimento  $l$  fixo e de massa desprezável, que pode rodar de um ângulo  $\theta$  em torno de um ponto (o eixo, ou pivô) (Figura 3). Quando a massa se desvia da posição central  $\theta = 0$ , a força gravítica aplicada (o seu peso  $F_g = m g$ ) adquire uma componente  $F_\theta$  na direcção de movimento (tangente à trajectória) e que tende a restabelecer o equilíbrio.

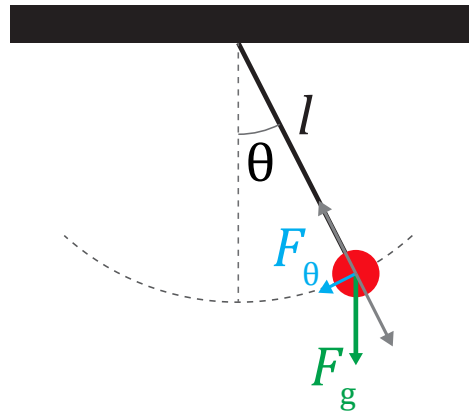


Figura 3: Força de gravidade  $F_g$  no pêndulo gravítico e a sua projecção  $F_\theta$  na direcção de movimento.

Se a posição do pêndulo for descrita pela coordenada ao longo da sua trajectória circular,  $s = l \cdot \theta$ , então a força restauradora é

$$F_\theta = -F_g \sin(\theta) = -mg \sin(\theta) \quad (5)$$

<sup>1</sup>Consultar *Notas de apoio às aulas teóricas*

<sup>2</sup>No Latim *pendulus*

e a equação diferencial de movimento para a posição  $s$  resulta em

$$\begin{aligned} a &= \frac{d^2 s}{dt^2} = l \frac{d^2 \theta}{dt^2} \\ ma &= F_\theta \Leftrightarrow m l \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -m g \sin(\theta) \\ \Rightarrow \frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin(\theta) &= 0 \end{aligned} \quad (6)$$

Esta equação não tem resolução analítica simples, mas através do método da *linearização* (o “canivete suíço” dos físicos), utiliza-se a aproximação  $\sin(\theta) \simeq \theta$ , válida para  $\theta_0 \leq 0.08$  rad (aqui os ângulos têm de ser expressos em radianos!<sup>3</sup>). Com esta aproximação ficamos com

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \theta = 0 \quad (7)$$

cujas solução matemática é exacta e semelhante à expressão (3),

$$\theta(t) = \theta_0 \sin(\omega_0 t + \phi_0), \text{ com } \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}. \quad (8)$$

O que é interessante neste modelo é que o efeito da *massa gravítica* anula o da *massa inercial* e o período do pêndulo  $T_0$  fica a depender apenas do comprimento  $l$  e do valor da aceleração da gravidade  $g$  local:<sup>4</sup>

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}, \text{ para } \theta_0 \ll 1 \text{ rad}. \quad (9)$$

A equação (9) representa precisamente a dependência entre o período e o comprimento do pêndulo deduzida por Galileu. A partir dessa época, estes dispositivos foram sistematicamente utilizados para medir o tempo e a Hora local (e comparando com a Hora Solar também a Latitude), sendo a base de todos os relógios de precisão até meados do século passado, com maior ou menor complexidade. Actualmente apenas os relógios decorativos ou de luxo usam variações do pêndulo<sup>5</sup>.

### 2.2.1 A influência do atrito

Até aqui, desprezámos o atrito do ar no movimento do pêndulo. Ao introduzir esta contribuição, na aproximação de atrito cinético proporcional à velocidade, a equação (7) muda para

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \lambda \frac{1}{m} \frac{d\theta}{dt} + \frac{g}{l} \theta = 0 \quad (\lambda = \text{Coeficiente de atrito viscoso}) \quad (10)$$

O primeiro efeito, que se pode verificar no laboratório, é na amplitude do movimento  $\theta_0$ : já não será constante, mas irá diminuir inexoravelmente com o tempo.

<sup>3</sup>Por exemplo:  $\sin(5^\circ) = \sin(0.08726 \text{ rad}) = 0.08715\dots$

<sup>4</sup>À superfície da Terra e à latitude de Lisboa:  $g \approx 9.801 \text{ ms}^{-2}$ . Consultar também o Projecto “Pêndulo Mundial”, baseado no e-lab do IST: [http://groups.ist.utl.pt/wwwelab/wiki/index.php?title=Pêndulo\\_Mundial](http://groups.ist.utl.pt/wwwelab/wiki/index.php?title=Pêndulo_Mundial)

<sup>5</sup>Mas ainda são úteis para se fazer Ciência: Ver por exemplo a revista *Nature* de Julho de 2015, <http://www.nature.com/articles/srep11548>, com autores aqui do Técnico

O segundo efeito, mais difícil de observar, é que existe uma muito pequena alteração no período, que tem agora o valor

$$T_1 = T_0 / \sqrt{1 - \zeta^2}, \quad \text{onde } \zeta = \frac{\lambda}{2m} \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (11)$$

O factor  $\zeta$  também se pode relacionar com o factor de amortecimento<sup>6</sup>  $Q$ :

$$Q = 2\pi \times \frac{\text{Energia do Pêndulo}}{\text{Energia perdida num ciclo}} \quad (12)$$

Nota final: A resolução analítica (infelizmente bastante complexa) da Equação (6) tem como solução para o período uma série infinita de potências de  $\theta_0$ :

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left( 1 + \frac{1}{16}\theta_0^2 + \frac{11}{3072}\theta_0^4 + \frac{737280}{3072}\theta_0^6 + \frac{22931}{1321205760}\theta_0^8 + \dots \right) \quad (13)$$

Naturalmente, verifica-se imediatamente que na aproximação  $\theta_0 \ll 1$  a Equação 9 continua válida.

---

<sup>6</sup>Em engenharia é designado por Factor de Qualidade