Interpolazione polinomiale

È l'interpolazione di una serie di valori con una funzione polinomiale che passa per i punti dati

Teorema di unicità del polinomio interpolatore

Se (x_i, y_i) con $i = 0, \dots, n$ sono $n+1$ punti distinti, ovvero che $x_i \neq x_j$ se $i \neq j$, allora esiste ed è unico il polinomio $p_n(x)$ al massimo di grado n tale che $p_n(x_i) = y_i$

Dimostrazione

Considero il generico polinomio di grado n

$$p_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$$

Ora impongo (sostituisco) gli $n+1$ vincoli

$$p_n(x_i) = a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + \dots + a_{n-1} x_i^{n-1} + a_n x_i^n = y_i$$

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \dots + a_{n-1} x_0^{n-1} + a_n x_0^n = y_0 \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \dots + a_{n-1} x_1^{n-1} + a_n x_1^n = y_1 \\ \dots \\ a_0 + a_1 x_{n-1} + a_2 x_{n-1}^2 + \dots + a_{n-1} x_{n-1}^{n-1} + a_n x_{n-1}^n = y_{n-1} \\ a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \dots + a_{n-1} x_n^{n-1} + a_n x_n^n = y_n \end{cases}$$

Rappresento il sistema in forma matriciale

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & x_0^{n-1} & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^{n-1} & x_1^n \\ & & & & \\ 1 & x_{n-1} & x_{n-1}^2 & x_{n-1}^{n-1} & x_{n-1}^n \\ 1 & x_n & x_n^2 & x_n^{n-1} & x_n^n \end{bmatrix}}_{V} \underbrace{\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \dots \\ a_{n-1} \\ a_n \end{bmatrix}}_{a} = \underbrace{\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \dots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{bmatrix}}_{y}$$

Si ottiene da risolvere un sistema del tipo $Va = b$

Si dimostra l'unicità del sistema $Va = b$ dimostrando per induzione che

$$\det(V) \neq 0 \rightsquigarrow \det(V) = \prod_{0 \le i < j \le n} (x_j - x_i) = (x_1 - x_0)(x_2 - x_1) \dots (x_n - x_{n-1})$$

Per induzione ... $n = 1$

$$\prod_{0 \le i < j \le 1} (x_1 - x_0)$$

Per $n = n+1$

$$\prod_{0 \le i \le j < n+1}$$

Un altro modo è verificare che la soluzione $Va = 0$ è a nullo

Secondo il Teorema di Faber data una qualunque successione di nodi in un intervallo chiuso $[a, b]$ esiste sempre una funzione $f(x)$ che genera una sequenza di polinomi di interpolazione che non convergono uniformemente a f in $[a, b]$

Interpolazione Lagrangiana

È una tecnica di interpolazione polinomiale che sfrutta un'altra base per costruire un polinomio interpolatore

$L_0(x_i)$ 1 se $i = 0$
0 se $i \neq 0$

$L_1(x_i)$ 1 se $i = 1$
0 se $i \neq 1$

$L_2(x_i)$ 1 se $i = 2$
0 se $i = 2$

in generale:

$$L_i(x_j) = \begin{cases} 1 \text{ se } i = j \\ 0 \text{ se } i \neq j \end{cases}$$

Si vuole costruire il polinomio nella seguente forma:

$$L_0(x) = \alpha(x - x_1)(x - x_2)$$

2. Impongo la condizione $L_0(x_0) = 1$

$$L_0(x_0) = \alpha_0(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) = 1 \longrightarrow a_0 = \frac{1}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}$$

3. Sostituisco α_0 nella forma generale

$$L_0(x) = \frac{1}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} \cdot (x - x_1)(x - x_2) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}$$

Si ottiene così un polinomio $L_0(x)$ che vale 1 se $x = x_0$ e 0 se $x = x_1$ e $x = x_2$

Per verificare che $L_0(x)$, $L_1(x)$, $L_2(x)$ siano una base, devo dimostrare che siano linearmente indipendenti

$$c_0 L_0(x) + c_1 L_1(x) + c_2 L_2(x) = 0$$

$\longrightarrow$ per $x = x_0$ $\quad c_0 \overset{1}{L_0(x_0)} + c_1 \overset{0}{L_1(x_0)} + c_2 \overset{0}{L_2(x_0)} = 0 \quad \rightarrow \quad c_0 \cdot 1 = 0$

$\longrightarrow$ per $x = x_1$ $\quad c_0 \overset{0}{L_0(x_1)} + c_1 \overset{1}{L_1(x_1)} + c_2 \overset{0}{L_2(x_1)} = 0 \quad \rightarrow \quad c_1 \cdot 1 = 0$

$\longrightarrow$ per $x = x_2$ $\quad c_0 \overset{0}{L_0(x_2)} + c_1 \overset{0}{L_1(x_2)} + c_2 \overset{1}{L_2(x_2)} = 0 \quad \rightarrow \quad c_2 \cdot 1 = 0$

Posso mettere a sistema e riscrivere in forma matriciale

$$\begin{cases} c_0 L_0(x_0) + c_1 L_1(x_0) + c_2 L_2(x_0) = y_0 \\ c_0 L_0(x_1) + c_1 L_1(x_1) + c_2 L_2(x_1) = y_1 \\ c_0 L_0(x_2) + c_1 L_1(x_2) + c_2 L_2(x_2) = y_2 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} L_0(x_0) & L_1(x_0) & L_2(x_0) \\ L_0(x_1) & L_1(x_1) & L_2(x_1) \\ L_0(x_2) & L_1(x_2) & L_2(x_2) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

Per definizione dei polinomi L_j posso riscrivere il sistema nel seguente modo

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{matrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{matrix} = \begin{matrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{matrix}$$

Ho dimostrato che è possibile generare un polinomio $p_2(x)$ utilizzando come base i polinomi di Lagrange e come coordinate per l'interpolazione le ordinate

$$p_2(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + y_2 L_2(x)$$

In generale il polinomio di Lagrange può essere scritto nella seguente forma

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i(x)$$

Forma pesata

$$p_2(x) = \sum_{j=0}^{2} y_j \, l_j(x) = \sum_{j=0}^{2} y_j \prod_{i=0\, i\neq j}^{2} \frac{x - x_i}{x_j - x_i}$$

Per semplificare la scrittura, moltiplico per $\frac{x - x_j}{x - x_j}$ che equivale a moltiplicare per 1

$$\sum_{j=0}^{2} y_j \cdot \prod_{i=0\, i\neq j}^{2} \frac{x - x_i}{x_j - x_i} \cdot \frac{x - x_j}{x - x_j}$$

Noto che questo prodotto lo posso riscrivere nel seguente modo:

$$\boxed{\sum_{j=0}^{2} y_j \cdot \left(\prod_{i=0\, i\neq j}^{2} \frac{x - x_i}{x_j - x_i} \right) \cdot \frac{x - x_j}{x - x_j} = x - x_j}$$

ho così definito la funzione peso $\omega_n(x)$

$$\sum_{j=0}^{2} y_j \cdot \prod_{i=0\, i\neq j}^{2} \frac{x - x_i}{x_j - x_i} \cdot \frac{x - x_j}{x - x_j}$$

$$\beta_j = \frac{y_i}{x_j - x_i} \qquad p_n(x) = \omega_n(x) \sum_{j=0}^{n} \frac{\beta_j}{x - x_j}$$

Resto nell'interpolazione polinomiale

Essendo il polinomio passante per i punti nodali x_i, la differenza in quei punti è nulla.

$$r(x_i) = f(x_i) - p_n(x_i) = 0$$

TEOREMA: Sia $f(x) \in C^{n+1}[a,b]$ e $p_n(x)$ il suo polinomio interpolatore nei punti distinti $x_0, x_1, \dots x_n$ in $[a,b]$. Esiste almeno un punto $\xi_x \in [a,b]$ tale che

$$r(x) = f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}\,\omega_n(x) \qquad \text{dove } \omega_n(x) = (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)$$

Domanda: Quali fattori influiscono sull'errore?
- La regolarità della funzione
- Grado del polinomio di interpolazione (fenomeno di Runge)
- La funzione $\omega_n(x) = (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)$ che dipende solo dai punti x_i

Domanda: Posso ridurre l'errore?
L'idea è quella di utilizzare gli zeri del polinomio di Chebichev, dett. anche, nodi di Chebichev
il limite è che posso utilizzarli solo quando la funzione da interpolare è nota

TEOREMA DI ROLLE: Sia $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua in $[a,b]$ e derivabile in (a,b)
Se la funzione assume lo stesso valore agli estremi dell'intervallo allora esiste almeno un punto $x_0 \in (a,b)$ tale che $f'(x_0) = 0$

Dal teorema di Rolle segue che $F'(z) = 0$ in almeno $n+1$ punti distinti in (a,b)
$F''(z) = 0$ in almeno n punti in (a,b) e così via. $F^{(n+1)} = 0$ in almeno un punto $\xi \in (a,b)$ e tale che

Dimostrazione

$$F(z) = f(z) - p_n(z) = k_x W_n(z)$$
$$F(z) = f(z) - p_n(z) - k_x W_n(z)$$
$$F^{(n+1)}(z) = f^{(n+1)}(\xi_x) - 0 - k_x (n+1)! = 0$$
$$k_x = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}$$

$F(z) = 0$ in $n+2$ punti
$F'(z) = 0$ in n punti
$F''(z) = 0$ in $n-1$ punti
$\vdots$
$F^{(n)}(z) = 0$ in 2 punti
$F^{(n+1)}(z) = 0$ in 1 punto chiamato ξ,

È possibile quindi scrivere che

$$F^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)} - p_n^{(n+1)} - k_x W_n^{(n+1)} = 0$$
$$F^{(n+1)}(\xi_x) = f^{(n+1)} - 0 - k_x (n+1)! = 0$$
$$k_x = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}$$

Interpolazione lineare

L'interpolazione lineare è il caso più semplice di polinomio interpolatore. Viene usato per determinare il valore che una funzione assume tra due punti tabulati

$$p_1(x) = y_0 \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + y_1 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

Resto nell'interpolazione lineare

$$r(x) = (x - x_0)(x - x_1) \frac{f''(\xi)}{2!} \qquad \text{con } \xi_x \in (x_0, x_1)$$

È possibile ricavare un maggiorante

$$|r(x)| = \frac{|f''(\xi)|}{2!} |(x - x_0) \cdot (x - x_1)|$$

$$M = \max_{x \in (x_0, x_1)} |f''(\xi_x)|$$

Siccome in generale $(x - x_i)(x - x_{i+1})$ è una parabola, possiamo considerare il valor massimo come il vertice della parabola, corrispondente al punto medio.

$$\left(\frac{(x_i - x_{i+1})}{2} - x_i\right)\left(\frac{(x_i - x_{i+1})}{2} - x_{i+1}\right) = \left(\frac{x_i - x_{i+1} - 2x_i}{2}\right)\left(\frac{x_i - x_{i+1} - 2x_{i+1}}{2}\right) =$$

$$\left(\frac{x_i - x_{i+1}}{2}\right)^2$$

Nota: $x_i - x_{i+1}$, è la lunghezza dell'intervallo. In una spline lineare, se il passo è costante $x_i - x_{i+1} = h$, da cui:

$$|e(x)| = \frac{M}{2} \frac{h^2}{4} = \frac{Mh^2}{8}$$

Polinomio di Newton

Dato un insieme di $n+1$ punti $(x_0\ y_0)(x_1\ y_1)\dots(x_n\ y_n)$ distinti, il polinomio di Newton è definito come segue

$$\boxed{N(x) := \sum_{i=0}^{n} a_i n_i(x)}$$

RICORDA: "n" è l'ordine del polinomio dato dal numero di punti -1

I termini a_i sono coefficienti calcolati tramite le differenze divise, ovvero una quantità definita in modo ricorsivo su punti distinti nel seguente modo:

$$\begin{array}{ll} x & y \\ x_0 & y_0 \\ & \quad f[x_0\ x_1] = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \\ x_1 & y_1 \qquad\qquad\qquad\qquad f[x_0\ x_1\ x_2] = \dfrac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} \\ & \quad f[x_1\ x_2] = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_0} \\ x_2 & y_2 \end{array}$$

Rispetto al polinomio di Lagrange risulta essere:
- Maggiore velocità
- Versatilità grazie alla sua struttura ricorsiva, in quanto è possibile aggiungere nuovi punti e non dover ricalcolare da capo
- Utilizza funzioni continue

i termini $n_i(x)$ sono definiti dalla struttura delle differenze divise

$$f[x_0\ x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \qquad f[x_1, x_2] = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Per ricavare il valore di $f(x_1)$ eseguo una manipolazione

$$f[x_0\ x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \qquad (x_1 - x_0) f[x_0\ x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \cdot (x_1 - x_0)$$

$$(x_1 - x_0) f[x_0\ x_1] = f(x_1) - f(x_0)$$

$$f(x_0) + (x_1 - x_0) f[x_0\ x_1] = f(x_1) \cancel{- f(x_0)} + \cancel{f(x_0)}$$

E continuo ricorsivamente, posso così generalizzare per una non nota $f(x)$

NOTA IMPORTANTE: i punti non devono per forza essere distinti. Se due punti x_i coincidono posso ancora dare significato alla corrispondente differenza divisa di ordine 1, purchè la funzione $f(x)$ abbia derivata.

$$f[x_i, x_i] = \lim_{h \to 0} f[x_i, x_i + h] = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_i + h) - f(x_i)}{h} = f'(x_i)$$

TEOREMA: se $f(x) \in C^k[a,b]$ e i nodi $\{x_i\}$ non necessariamente distinti, appartengono tutti all'intervallo $[a,b]$ allora esiste un punto ξ con $\min\{x_i\} \le x_i \le \max\{x_i\}$ tale che

$$f[x_0, x_1, \dots x_k] = \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}$$

Polinomio alla Hermite o generalizzato

È un tipo di interpolazione polinomiale che coinvolge il polinomio di Newton o una sua rappresentazione equivalente e incorpora le informazioni sulle derivate nei punti specificati per migliorare l'approssimazione della funzione desiderata

$$p_{2n+1}(x) \in P_{2n+1} \quad \left(p_{2n+1}(x_i) = f(x_i) \quad e \quad p'_{2n+1}(x_i) = f'(x_i) \right)$$

$$p_{2n+1}(x) = f(x_0) + f'(x_0) + (x - x_0)^2 f[x_0, x_0, x_1] + (x - x_0)^2 (x - x_1) f[x_0, x_0, x_1, x_1]$$

ESEMPIO

$$\begin{array}{lll}
x_0 \; y_0 & & \\
 & f[x_0, x_0] = f'(x_0) & \\
x_0 \; y_0 & & f[x_0, x_0, x_0] = \dfrac{f''(x_0)}{2!} \quad k=2 \\
 & f[x_0\, x_0] = f'(x_0) & \\
x_0 \; y_0 & &
\end{array}$$

$$p(x) = f[x_0] + f[x_0, x_0](x - x_0) + f[x_0, x_0, x_0](x - x_0)^2$$

Se riscrivo sostituendo i calcoli ottengo taylor

$$p(x) = f[x_0] + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2$$

Taylor: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n$

Teorema di Hermite - Fejer

Sia $f(x) \in C^0([a,b])$ con $[a,b]$ limitato e chiuso e sia $p_{2n+1}(x)$ il polinomio di interpolazione di grado $2n+1$ tale che

$$p_{2n+1}(x_i) = f(x_i) \qquad p'_{2n+1}(x_i) = 0 \qquad i = 0, \dots, n$$

Se gli x_i sono zeri del polinomio di Chebichev su $[a,b]$ allora

$$\lim_{n \to \infty} \| f(x) - p_{2n+1}(x) \|_\infty = 0$$

Dimostrazione per induzione

Matrice di Vandermonde di ordine n

$$V = \begin{bmatrix} 1 & x_0^1 & x_0^2 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_1^1 & x_1^2 & \dots & x_2^n \\ \vdots & \dots & & & \\ 1 & x_n^1 & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{bmatrix} \qquad \det(V) = (a_j - a_i)$$

Per $n = 1$, prodotto vuoto

Per $n =$

$$\begin{matrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^k \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^k \\ \vdots & & & \\ 1 & x_n & x_n^2 & x_n^k \\ 1 & x_{n+1} & x_{n+1}^2 & x_{n+1}^3 \end{matrix}$$

$$\det V = (x_j - x_i)$$

$$\det V = \prod_{0 \le i < j}^{n} (x_j - x_i)$$

$$(x_n - x_{n-1}) \dots (x_3 - x_2)(x_2 - x_1)(x_1 - x_0)$$

matrice $N \times N$

$$\begin{bmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & \ddots & & \\ 1 & \dots & & \ddots & \\ 1 & a_n & a_n^2 & & a_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

il determinante è dato da

$$\prod_{j=0}^{n-1} \left[\prod_{i=j+1}^{n} (x_i - x_j) \right]$$

Se $j = 0$ $i = 1$

matrice $N \times N$

$$\begin{bmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & \ddots & & \\ 1 & \dots & & \ddots & \\ 1 & a_n & a_n^2 & & a_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

il determinante è dato da

$$\prod_{j=0}^{n-1} \left[\prod_{i=j+1}^{n} (x_i - x_j) \right]$$

se $j=0$ $i=1$

$$(x_1 - x_0) \cdot (x_2 - x_0) \cdot (x_3 - x_0) \cdot \dots \cdot (x_n - x_0) \cdot$$

$j=1$ $i=2$

$$(x_2 - x_1) \cdot (x_3 - x_1) \cdot (x_4 - x_1) \cdot \dots \cdot (x_n - x_1) \cdot$$

$j = n-1$

$$x_n - x_{n-1}$$

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$$

$2n$ somme algebriche

moltiplicazioni $\frac{n-1 \text{ moltip}}{n-1 \text{ moltipli}}$

divisioni: 1

$$p_n = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i(x)$$

n somme

$n+1$ moltiplicazioni

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)}{\boxed{(x_0 - x_1)}(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)(x_0 - x_4)}$$

$$L_1(x) = \frac{x -}{\boxed{x_1 - x_0}}$$

Teorema di Karl Weierstrass

Data una funzione continua $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, per ogni valore reale $\varepsilon > 0$ esiste un polinomio $p_{n_\varepsilon}(x)$ tale che

$$\max_{x \in [a,b]} \left| f(x) - p_{n_\varepsilon}(x) \right| \leq \varepsilon$$

Teorema di Faber

Data una qualunque successione di nodi in un intervallo chiuso $[a,b]$ esiste sempre una funzione $f(x)$ che genera una sequenza di polinomi di interpolazione che non convergono uniformemente ad f in $[a,b]$

Questo significa che non esiste una scelta ottimale dei nodi per l'interpolazione polinomiale e che l'aumentare del numero di nodi non garantisce una migliore approssimazione della funzione originale. Questo è noto come Fenomeno di Runge

Fenomeno di Runge

Considerando la funzione

$$f(x) = \frac{1}{1 + 25x^2}$$

Runge notò che interpolando questa funzione in un insieme di punti x_i equidistanti, con un polinomio interpolatore $P_n(x)$, il risultato oscilla in ampiezza verso gli estremi dell'intervallo, tramite il teorema di Weierstass si dimostra che questo errore tende all'infinito all'aumentare del grado del polinomi

$$\lim_{n \to \infty} \left(\max_{x \in [a,b]} | f(x) - p_n(x) | \right) = +\infty$$

Definizione generale di funzione spline

Una funzione spline di grado m con nodi x_i per $i = 0, \dots, n$ è una funzione $S_m(x)$ in $[a, b]$ tale che

su ogni sottointervallo $[x_{i-1}, x_i]$, $S_m(x)$ è un polinomio di grado m
la funzione $S_m(x)$ e le sue derivate fino all'ordine $m-1$ sono continue

$$S_m(x) \in C^{m-1}([a,b])$$

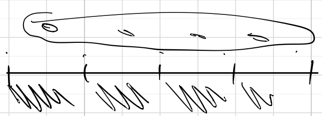
Imponendo la seguente condizione si ottiene una funzione spline interpolante

$$S_m(x_i) = y_i \qquad i = 0, 1, \dots, n$$

m

$$\frac{2-0}{N} = 1$$

$$h = \frac{b-a}{N}$$



$$N = n - 1$$

$$\sum_{i=0}^{n} y_i \int_{x_i}^{x_{i+1}} L_i(x)$$

$$L_0(x) = \int \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} = \frac{1}{2} h$$

$$L_1(x) = \int \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{1}{2} h$$

$$\sum_{i=0}^{n} y_i \frac{1}{2} h$$

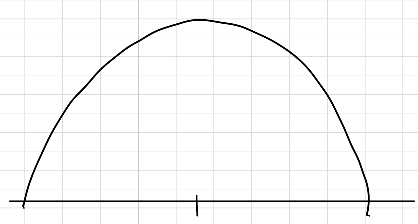
$$f(0)\frac{1}{2}h + f(0{,}5)\frac{1}{2}h + f(0{,}5)\frac{1}{2}h + f(1)\frac{1}{2}h$$

$$\frac{h}{2}\left[f(0) + 2f(0{,}5) + f(1) \right]$$

$$\left(\frac{x_1 + x_0}{2}\right)^2 \qquad \left(\frac{x_1 + x_0}{2}\right)$$

h

$$\left| (x - x_0)(x - x_1) \right|$$



Interpolazione locale

L'idea chiave è l'approssimazione locale per mantenere basso il grado del polinomio

$$\Delta = \{ a = x_0 < x_1 < \dots < x_i < \dots < x_{n-1} < x_n = b \}$$

Si vuole discretizzare l'insieme di n + 1 punti in N sottointervalli e costruire su ciascuno di essi un polinomio interpolante lineare.

$$S_1(x) \begin{cases} S_1^{(1)}(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) & x_0 < x < x_1 \\ S_1^{(2)}(x) = f(x_1) + f[x_1, x_2](x - x_1) & x_1 < x < x_2 \\ S_1^{(n-1)}(x) = f(x\ ) + f[x\ , x\ ](x - x\ ) & x\ < x < x \\ S_1^{(n)}(x) = f(x\ ) + f[x\ , x\ ](x - x\ ) & x\ < x < x \end{cases}$$

Ho così costruito un sistema di funzioni continue e derivabili infinite volte nel loro intervallo. Noto però che la funzione risultante non gode della stessa continuità in quanto è un polinomio di primo grado definito a tratti:

$$S_1^{(i)} \in C^{\infty}([a,b]) \qquad S_1(x) \in C^0[a,b]$$

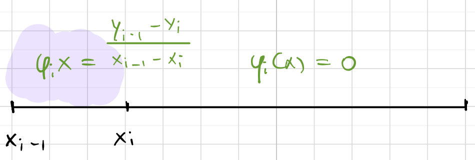
Siccome $S_1(x)$ è definito da vari polinomi, per poterlo valutare in un punto specifico x_i è necessario conoscere l'intervallo di appartenenza.

× confronti ✓ ricerca binaria

Interpolazione Spline

Una spline lineare si basa sul concetto di interpolazione locale tramite polinomi di primo grado
Si definisce nel seguente modo

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \dfrac{x_i - x}{x_i - x_{i-1}} & \text{se } x \in [x_{i-1}, x_i] \\ 0 & \text{se } x \in [x_{i-1}, x_i] \end{cases}$$



Resto interpolazione lineare

Dalla forma generale del resto, possiamo si ricava che:

$$r(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}\,\omega_n(x)$$

Sostituendo si ha che

$$r(x) = \frac{f^{2}(\xi_x)}{2!}\,(x-x_0)(x-x_1)$$

Per massimizzare l'errore

$$M = \max_{x \in x_0, x_1} |f''(x)| \quad e \quad \max_{x \in x_0 x_1} (x-x_0)(x-x_1) = \frac{|x_1 - x_0|^2}{4}$$

Richiami sui massimi di una funzione

Teorema di Lagrange

Sia $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua in $[a,b]$ e derivabile in (a,b). Allora esiste almeno un punto x_0 nell'intervallo $[a,b]$ tale che ...

$$f(b) - f(a) = f'(x_0)(b-a) \qquad f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Il segno della derivata implica la monotonia della funzione originaria

$$f'(x_0) < 0 \iff f(b) - f(a) < 0$$

$$f'(x_0) > 0 \iff f(b) - (fa) > 0$$

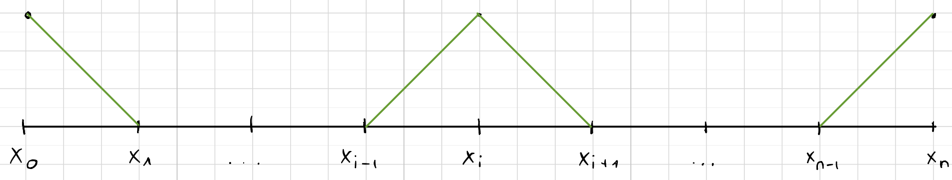
In sintesi

1) Si calcola la derivata della funzione
2) Si risolve $f'(x) = 0$
3) Si risolve $f'(x) > 0$

$$\frac{1}{3}h\,f(x_1) + \frac{2}{3}h\,(f x_m) + \frac{1}{3}h\,f(x_n)$$

$$\frac{1}{2}h\,f(a) + \frac{1}{2}h\,f(b) \qquad \frac{h}{2}\left[f(a)+f(b)\right]$$

Interpolazione Spline



$$\varphi_0(x) = \begin{cases} \dfrac{x_1 - x}{x_1 - x_0} & x \in [x_0, x_1] \\ 0 & x \notin [x_0, x_1] \end{cases}$$

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} 0 & x \notin [x_{i-1}, x_{i+1} \\ \dfrac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} & x \in [x_{i-1}, x_i] \\ \dfrac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} & x \in [x_i, x_{i+1}] \end{cases} \qquad i = 1, \dots, n-1$$

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} & x \in [x_{n-1}, x_n] \\ 0 & x \notin [x_{n-1} \; x_n] \end{cases}$$

Queste funzioni verificano le seguenti condizioni

$$\varphi_i(x_j) = \begin{cases} 1 & se \;\; i = j \\ 0 & se \;\; i \neq j \end{cases}$$

Esempio

x	y
1	
2	
3	
4	

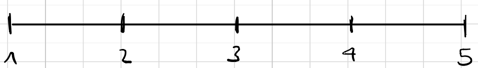
$$\varphi_0(x) = \begin{cases} \dfrac{x_1 - x}{x_1 - x_0} & x \in [x_0, x_1] \\ 0 & x \notin [x_0, x_1] \end{cases}$$

$$\frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}$$

$$\frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i}$$

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} \dfrac{2 - x}{2 - 1} & x \in [1, 2] \\ 0 & x \notin [1, 2] \end{cases}$$

$$\varphi_1(x) = \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}$$



Rispettano, inoltre, le seguenti condizioni:

$$\varphi_i(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{se } j = i \\ 0 & \text{se } j \neq i \end{cases}$$

Possiamo verificare che questi polinomi siano linearmente indipendenti

$$c_0 \varphi_0(x) + c_1 \varphi_1(x) + c_2 \varphi_2(x) = 0$$

formano quindi, una base canonica.

$$c_0 \overbrace{\varphi_0(x_0)}^{1} + c_1 \overbrace{\varphi_1(x_0)}^{0} + c_2 \overbrace{\varphi_2(x_0)}^{0} = 0$$

$$c_0 \overbrace{\varphi_0(x_1)}^{0} + c_1 \overbrace{\varphi_1(x_1)}^{1} + c_2 \overbrace{\varphi_2(x_1)}^{0} = 0$$

$$c_0 \overbrace{\varphi_0(x_2)}^{0} + c_1 \overbrace{\varphi_1(x_2)}^{0} + c_2 \overbrace{\varphi_2(x_2)}^{1} = 0$$

Come conseguenza una generica spline lineare la si esprime come

$$S_1(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i \varphi_i(x)$$

dove c_i sono le coordinate della base canonica
A questo punto, per renderla interpolante, mi basta sostituire c_i con y_i e ottengo

$$S_1(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \varphi_i(x)$$

Errore nell'interpolazione Splime

$r(x) = f(x) - S_1(x)$ per $x \neq x_i$

Sul generico tratto la splime è um polimommio di primo grado interpolante

$$r(x) = \frac{f''(\xi_x)}{2}(x - x_{i-1})(x - x_i)$$

Cose molto figa

Dalla espressione del resto è possibile determimare um passo h per limitare l'errore

$$\left| f(x) - p_n(x) \right| \leq \varepsilon \rightsquigarrow \frac{M h^2}{8} \leq \varepsilon \rightsquigarrow h \leq \sqrt{\frac{M}{8}\varepsilon}$$

Interpolazione locale generalizzata

Il problema che si pone è quello di determinare una funzione definita a tratti di grado minore od uguale a 3 e che preservi anche informazioni sulla velocità. ($p'(x_i) = y_i'$)

Splime cubiche

Come prima, creo uma decomposizione dell'intervallo

$$\Delta = \{a = x_0, x_1, \dots x_i, \dots x_n = b\}$$

Uma splime cubica interpolante è una funzione $S_{3,\Delta}(x)$ polinomiale definita a tratti e su ciascun tratto è um polimomio di terzo grado.
È uma fumziome di classe C^2 nell'intervallo considerato, questo si traduce im condizioni di continuità fimo alla sua derivata seconda.

$$S_{3,\Delta}(x) = \begin{cases} a_0^1 + a_1^1(x-x_0) + a_2^1(x-x_0)^2 + a_3^1(x-x_0)^3 \\ a_0^2 + a_1^2(x-x_1) + a_2^2(x-x_1)^2 + a_3^2(x-x_1)^3 \\ \dots \\ a_0^n + a_1^n(x-x_{n-1}) + a_2^n(x-x_{n-1})^2 + a_3^n(x-x_{n-1})^3 \end{cases}$$

Vincoli: per ogni tratto ho 4 coefficienti da determimare, avendo n tratti, si hanno $4n$ coefficiemti da determimare per costruire uma spline

la determinazione dei coefficienti richiede di risolvere um sistema limeare com $4n$ equazioni im $4n$ imcognite. L'idea chiave è quella di cercare di ridurre le dimensioni del sistema limeare e determinare im modo indiretto tutti i coefficienti di una splime

Spline cubica

È una funzione polinomiale definita a tratti, costruita su ciascun sottointervallo della decomposizione con polinomi di terzo grado. Su ogni sotto-intervallo è una funzione di classe C^{∞} mentre complessivamente è di classe C^2, ovvero garantisce continuità delle derivata prima e seconda

Costruzione

$$S_{3\Delta} = \begin{cases} S^1_{3,\Delta} = a^1_0 + a^1_1(x-x_0) + a^1_2(x-x_0)^2 + a_3(x-x_0)^3 & x_0 \le x \le x_1 \\ S^2_{3,\Delta} = a^2_0 + a^2_1(x-x_1) + a^2_2(x-x_1)^2 + a_3(x-x_0)^3 & x_1 \le x \le x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ S^n_{3,\Delta} = a^n_0 + a^n_1(x-x_{n-1}) + a^n_2(x-x_{n-1})^2 + a^n_3(x-x_{n-1})^3 & x_{n-1} \le x \le x_n \end{cases}$$

noto che ho $4 \cdot n$ coefficienti da determinare + $(n-1)$ per imporre la continuità, $(n-1)$ per imporre la continuità della derivata prima + $(n-1)$ per imporre la continuità della derivata seconda + $n+1$ vincoli per imporre la condizione di interpolazione ai nodi

Si possono costruire ∞^2 spline interpolanti, abbiamo bisogno di altri due vincoli per costruire la spline

Prendendo la spline nel gen. tratto

$$S^1_{3\Delta} = a^1_0 + a^1_1(x-x_0) + a^1_2(x-x_0)^2 + a_3(x-x_0)^3$$

$$a_1 + 2a_2(x-x_0) + 3a_3(x-x_0)^2$$

$$S''_{3\Delta} = 2a_2 + 6a_3(x-x_0)$$

$$M_i = S''_{3\Delta}(x_i) = 2a_2$$

$$S_{3\Delta} = a_0 + a^1_1(x-x_i) + a^1_2(x-x_i)^2 + a_3(x-x_i)^3 \qquad x_i \le x \le x_{i+1}$$

$$S'_{3\Delta} = a^1_1 + 2a_2(x-x_i) + 3a_3(x-x_i)^2$$

$$S''_{3\Delta} = 2a_2 + 6a_3(x-x_i)^2$$

$$S''_{3\Delta}(x_i) = 2a_2 + 6a_3(x_i-x_i)^2 = 2a_2 \rightsquigarrow a_2 = \frac{M_i}{2}$$

$$[S^{i}_{3\Delta}(x)]'' = \frac{(x - x_{i-1})M_i + (x_i - x)M_{i-1}}{h_i} \qquad h_i = x_i - x_{i-1}$$

Ora che abbiamo ottenuto questa forma, possiamo ridurre il numero di calcoli in quanto ogni momento corrisponde al valore della derivata secon della funzione valutata in x_i

$$4n + (n+1) + (n-1) + (n-1) + (n-1)$$

$$4n + n+1 + 3(n-1)$$

Possibili vincoli, famiglie di spline

Spline cubica naturale

$$[S^{1}_{3\Delta}(x)]'' = M_0 = 0 \qquad [S^{n}_{3\Delta}(x)]'' = 0$$

Spline cubica vincolata

$$[S^{1}_{3\Delta}(x)]' = y'_0 \qquad [S^{n}_{3\Delta}(x)]' = y'_n$$

Polinomio di Hermite generalizzato

Sia Δ una decomposizione dell'intervallo $[a, b]$

e siano assegnati in ciascun punto della decomposizione i valori

$$\begin{array}{cc} y_0 & y'_0 \\ y_1 & y'_1 \\ \dots & \dots \\ y_i & y'_i \\ \dots & \dots \\ y_n & y'_n \end{array}$$

Vogliamo costruire un polinomio $p(x)$ definito a tratti tali che:

In ogni sottointervallo $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1 \dots n$ coincide con la restrizione di un polinomio di grado minore od uguale a tre e soddisfi le condizioni

$$p(x_i) = y_i \qquad p'(x) = y'_i \qquad i = 0, 1, \dots n$$

$$p_i(x_{i-1}) = y_{i-1} \qquad p(x_i) = y_i \qquad p'(x_{i-1}) = y'(x_{i-1}) \qquad p'(x_i) = y'_i$$

Consideriamo per semplicità la seguente forma del polinomio

$$p_i(x) = a_i + b_i(x - x_{i-1}) + c_i(x - x_{i-1})^2 + d(x - x_{i-1})^2(x - x_i)$$

e la sua derivata

$$p'_i(x) = b_i + 2c_i(x - x_{i-1}) + 2d_i(x - x_{i-1})(x - x_i) + d_i(x - x_{i-1})^2$$

Polimonmi di Bernstein

Teorema: Se $f(x) \in C^1([a,b])$ il polimonmio $p_n(x)$ di interpolazione della funzione f, relativo agli zeri del polimonmio di Chebichev di grado $n+1$ converge uniformemente a f su $[a,b]$ per $n \to \infty$
Se inoltre $f \in C^2([a,b])$ si ha la seguente stima dell'errore

$$\|f(x) - p_n(x)\|_\infty = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

I Polimonmi di base di Bernstein sono definiti come:

$$B_{n,k}(x) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \qquad k = 0, 1, \dots, n$$